第三周机器学习

> 本文公式显示需要使用Mathjax，然后令人悲伤的是github不支持Mathjax 您可以将这篇md文件pull下来，使用您本地的markdown解析器解析 没有必要在公示显示上浪费时间，您也可以下载我本地生成的html用浏览器打开即可 或者您也可以下载我上传到github上的pdf *Mathjax开源项目地址*

个人反馈

这是我学习机器学习第三周,一开始跟着视频老师学习vggnet和resner,发现听不懂,一方面是tensorflow的api函数我没有基础知识,另一方面是神经网络相关的基础知识不够扎实,因此我计划再次回到吴恩达老师的课程中去,吴恩达有一个专讲深度学习的视频,目前学习中....

再谈二分分类

- 对于输入矩阵$X_{n\times m}$的理解:X为n行,m列的矩阵,可以理解为m个n维列向量,**n即代表单个输入向量的特征数,m即代表输入样本个数**,此时对于二分分类下的输出Y来说,Y是一个向量,维度为m.这里吴恩达老师将其定义为列向量,即Y表示为$Y_{1\times m}$
- 关于logistic function 中 sigmoid(z)的z的表示有两种表示方法:
  - w^Tx+b
  - θ^Tx
- cost function 这里不使用误差平方作为cost function的原因是:该函数不是一个凸函数,即存在局部最值 我们将loss(error) function选用

$$L(\hat{y},y)=-(y\log(\hat{y})+(1-y)\log(1-\hat{y}))$$

我们将 cost function 定义为:

$$J(w,b)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}L(\hat{y},y)$$

cost function的简单推导

我们令

$$P(y=1|x)=\hat{y}$$
$$P(y=0|x)=1-\hat{y}$$

合并写法

$$P(y|x)=\hat{y}^y(1-\hat{y})^{(1-y)}$$

由于log是单调递增函数,因此我们可以用log(P)代替P,所以有

$$\log(P(y|x))=y\log(\hat{y})+(1-y)\log(1-\hat{y})=-L(\hat{y},y)$$

这里我们根据极大似然估计的思想,假设m个训练样本iid
那么有

$$\log(P(labsintrainset)) = log(\Pi_{i=1}^{m} P(y(i)|x(i))) = \sum_{i=1}^{m} \log(P(y(i)|x(i))) = -\sum_{i=1}^{m} L(\hat{y}^{(i)}, y^{(i)})$$

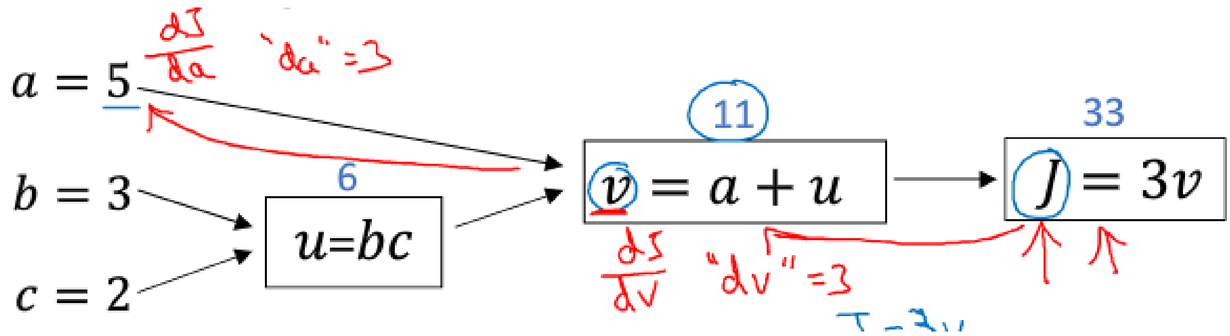
我们为了让极大似然函数取最大,那么我们应该使得$\sum_{i=1}^{m} \log(P(y(i)|x(i)))$值要大一些,即loss function的累加值要小一些,从而我们定义 cost function:

$$J(w,b) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} L(\hat{y}, y)$$

这也就证实了cost function计算出来的值越小越好.

Computation Graph and Derivatives

$$J(a,b,c) = 3(a+bc)$$



其实计算图的出现是为了让我们更好的理解求偏导的过程:即复合函数求导(链式法则),进而为Backpropagation打下基础

Node:

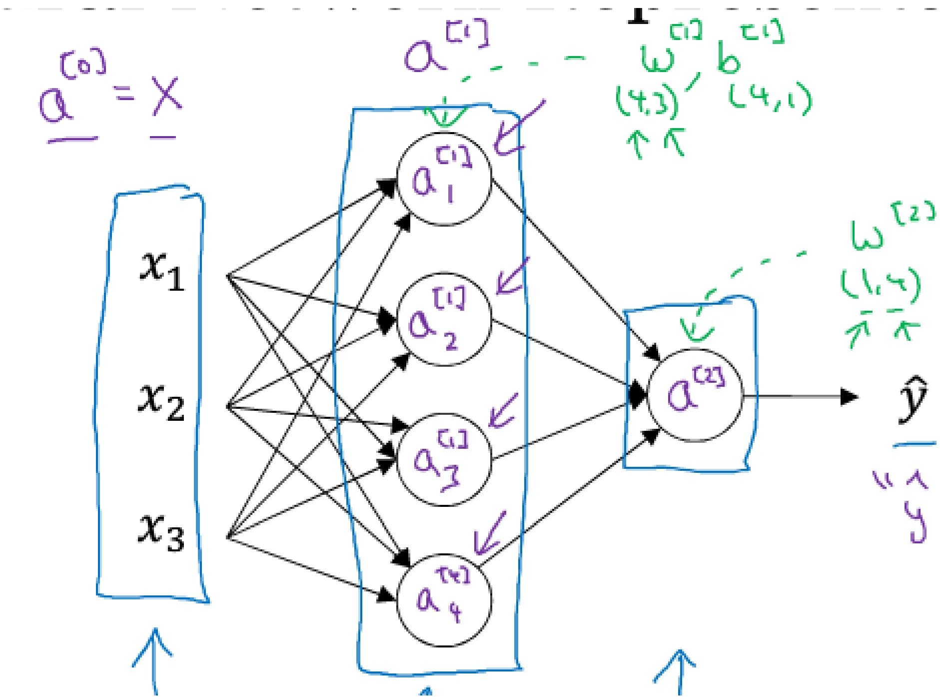
> 编程习惯:变量da表示$\frac{\partial J}{\partial a}$ 在使用numpy定义向量时,不要使用1维的array表示向量,而是使用nx1的矩阵 举例: a = np.random.randn(5) # X
> a = np.random.randn((5,1)) # √

向量化

向量化的作用就是采用向量或者矩阵相乘的形式来代替for循环,从而加快运算速度. 但是GPU和CPU都含有并行化指令有时也叫SIMD（single instruction multiple data）指令。如果你使用这样的内置函数np.dot 或者np.functions,或者其它能让你去掉显式for循环的函数，这样python的numpy能够充分利用并行化能更加快速的计算这点对GPU和CPU上面计算都是成立的,GPU更加擅长SIMD计算但是CPU实际上也不差，只是没有GPU擅长而已。 实际编程的法则是只要有可能就不能显式的使用for循环。

再谈神经网络

一些符号定义和命名



在我们计算神经网络的层数时候,一般不包含输入层,因此上图给出的是一个2 Layer NN

这里定义一些符号

$$a^{[0]} = \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1^{[1]} \\ x_2^{[1]} \\ x_3^{[1]} \end{bmatrix}$$

$$a^{[1]} = \begin{bmatrix} a_1^{[1]} \\ a_2^{[1]} \\ a_3^{[1]} \\ a_4^{[1]} \end{bmatrix}$$

$$a^{[2]} = \hat{y}$$

下面一单个样本为例,展示各个向量之间的计算关系,这里采用w与 b来表示变量之间的线性关系

根据logistic regression中的基本关系式
sigma函数可以看做一个activation function

$$z = \vec{w}^T \vec{x} + b$$
$$\hat{y} = a = \sigma(z)$$

我们以输入层到隐藏层为例,这里我们先不着急立马写出矩阵形式的表达式 先给出w的形式

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

即

$$z_1^{[1]} = (\vec{w}_1^{[1]})^T\vec{x} + b_1^{[1]}$$
$$a_1^{[1]} = \sigma(z_1^{[1]})$$
$$z_2^{[1]} = (\vec{w}_2^{[1]})^T\vec{x} + b_2^{[1]}$$
$$a_2^{[1]} = \sigma(z_2^{[1]})$$
$$z_3^{[1]} = (\vec{w}_3^{[1]})^T\vec{x} + b_3^{[1]}$$
$$a_3^{[1]} = \sigma(z_3^{[1]})$$
$$z_4^{[1]} = (\vec{w}_4^{[1]})^T\vec{x} + b_4^{[1]}$$
$$a_4^{[1]} = \sigma(z_4^{[1]})$$
$$veca_1\text{的关系}$$

这里需要注意的$\vec{w}_i^{[i]}$是一个三维的列向量,下面我们对上述过程进行向量化

$$\text{令 } w_{4\times3}^{[1]} = \begin{bmatrix} (\vec{w}_1^{[1]})^T \\ (\vec{w}_2^{[1]})^T \\ (\vec{w}_3^{[1]})^T \\ (\vec{w}_4^{[1]})^T \end{bmatrix}$$
$$\text{令 } \vec{b}_{4\times1}^{[1]} = \begin{bmatrix} b_1^{[1]} \\ b_2^{[1]} \\ b_3^{[1]} \\ b_4^{[1]} \end{bmatrix}$$
$$\text{令 } \vec{z}_{4\times1}^{[1]} = \begin{bmatrix} z_1^{[1]} \\ z_2^{[1]} \\ z_3^{[1]} \\ z_4^{[1]} \end{bmatrix}$$
$$\text{那么我们得出 } \vec{z}_{4\times1} = w_{4\times3}^{[1]}\vec{x}_{3\times1} + \vec{b}_{4\times1}^{[1]} = w_{4\times3}^{[1]}\overrightarrow{a^{[0]}}_{3\times1} + \vec{b}_{4\times1}^{[1]}$$
$$\vec{a}^{[1]} = \sigma(\vec{z}^{[1]})$$
$$\text{从而我们就得出了 } \vec{a}^{[0]} \text{ 与 } \vec{a}^{[1]} \text{ 的关系}$$

同理,我们可以得出输出层与隐藏层的关系,这里需要注意的矩阵和向量的维度

多个样本时的向量化

这里我们将m个样本定义为

$$X_{n\times m} = [\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(m)}]$$

这里我们设 $A^{[0]} = X_{n\times m}$,由此我们推导$A^{[0]}$ 与 $A^{[1]}$的关系
对于任意网络,设当前层的神经元个数为L_i,设n为上一层神经元的个数 那么有

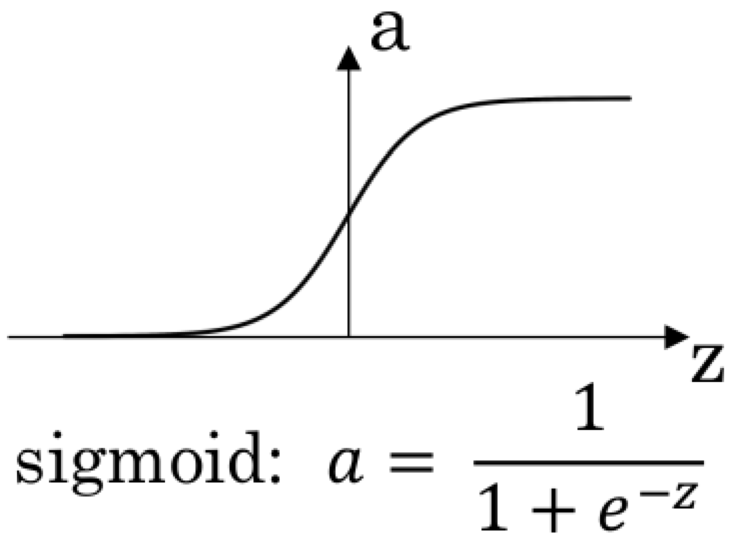
$$Z^{[1]}_{L_1\times m} = W^{[1]}_{L_1\times n} X_{n\times m} + b^{[1]}_{n\times m}$$
$$A^{[1]} = \sigma(Z^{[1]})$$

Activation function

Q:如果activation function是线性的会怎样?
如果神经网络的各个层之间都是某个线性函数作为activation function,那么最终的输出与输入之间就化简为简单的线性关系,这样对于模型的拟合程度和简单线性回归没有任何区别,因此就需要activation function为非线性的.
设activation fucntion为$a = g(z)$

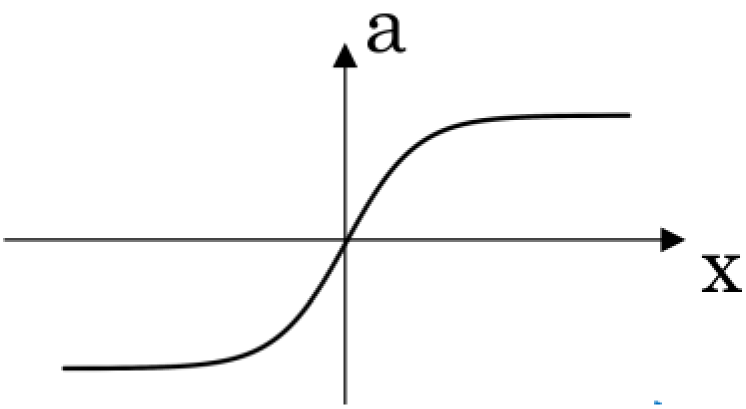
1. sigmoid function sigmiod:

$$a = \frac{1}{1+e^{-z}}$$



2. tanh

$$a = tanh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

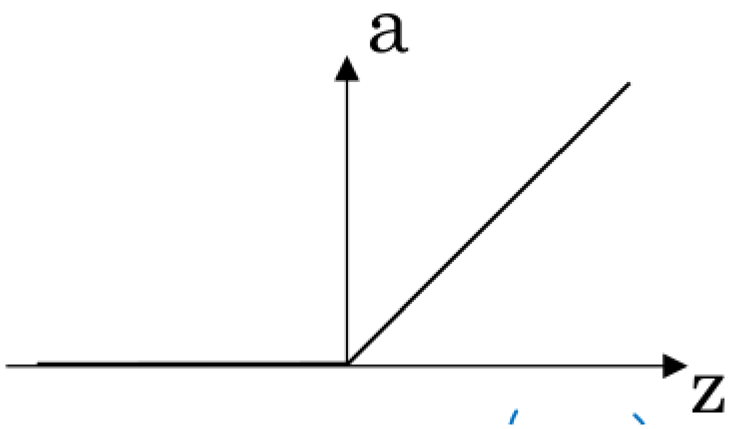


the mean of the data is close to zero,thie actually makes learning for the next layer a little bit easier.
在隐藏层中一般使用tanh function代替sigmoid function.
在输出层,若希望 $\hat{y} \in [0,1]$,那么仍然用sigmoid function

3. Relu function(首选)

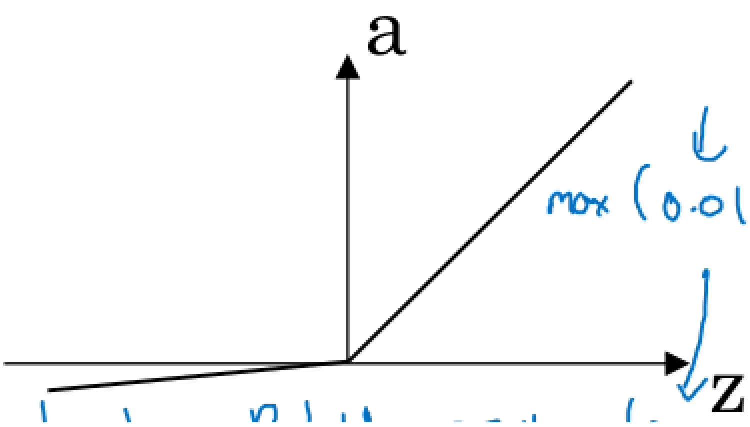
$$a = relu(z) = \max(0, z)$$

无论是sigmoid function还是tanh function,都有一个缺点:当z非常小的时候,函数斜率就会变得非常小,这样就会拖慢梯度下降,ReLU没有斜率接近于0的情况,尽管当z<0时,ReLU的斜率为0,但是在实践中,有足够多的隐藏单元令z>0



4 leaky Relu

$$a = \max(0.01z, z)$$



Derivation of activation function

1. sigmoid

$$g(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$
$$g'(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}\frac{e^{-z}}{1+e^{-z}} = \frac{1}{1+e^{-z}}(1-\frac{1}{1+e^{-z}}) = g(z)(1-g(z))$$

2. tanh

$$g(z) = \frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}}$$
$$g'(z) = 1-(g(z))^2$$

3. ReLU 当z<0,$g'(z)$ = 0
   当z>=0,$g'(z)$ = 1

Gradient descent for neural networks

以之前的2 Layer NN为例 Paramters: $w^{[1]}$、$b^{[1]}$、$w^{[2]}$、$b^{[2]}$
cost funciton: $J(w^{[1]},b^{[1]},w^{[2]},b^{[2]}) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} h(\hat{y},y)$

在执行梯度下降运算时，有这样几个参数需要注意：

$$dw^{[1]} = \frac{\partial J}{\partial w^{[1]}}$$
$$db^{[1]} = \frac{\partial J}{\partial b^{[1]}}$$
$$dw^{[2]} = \frac{\partial J}{\partial w^{[2]}}$$
$$db^{[2]} = \frac{\partial J}{\partial b^{[2]}}$$

关键在这些参数如何去求得，下面先给出这类公式： 我们先给出Forward Propagation的例子

$$Z^{[1]} = W^{[1]}X + b^{[1]}$$
$$A^{[1]} = g^{[1]}(Z^{[1]})$$
$$Z^{[2]} = W^{[2]}A^{[1]} + b^{[2]}$$
$$A^{[2]} = g^{[2]}(Z^{[2]})$$

然后写出Back Propagation：

$$dZ^{[2]} = A^{[2]} - Y \text{(Y是 1xm的矩阵)}$$

$$dW^{[2]} = \frac{1}{m} dZ^{[2]} (A^{[1]})^T$$

$$db^{[2]} = \frac{1}{m} np.sum(dZ^{[2]}, axis = 1, keepdims = True)$$

$$dZ^{[1]} = (W^{[2]})^T dZ^{[2]} . \times g^{[1]\prime}(Z^{[1]}) \text{(这里的点乘表示矩阵里的每个对应元素相乘)}$$

$$dW^{[1]} = \frac{1}{m} dZ^{[1]} X^T$$

$$db^{[1]} = \frac{1}{m} np.sum(dZ^{[1]}, axis = 1, keepdims = True)$$

Summary of gradient descent

$$dz^{[2]} = a^{[2]} - y$$

$$dW^{[2]} = dz^{[2]} a^{[1]T}$$

$$db^{[2]} = dz^{[2]}$$

$$\underset{(n^{[1]},1)}{dz^{[1]}} = W^{[2]T} dz^{[2]} * g^{[1]\prime}(z^{[1]})$$

$$dW^{[1]} = dz^{[1]} x^T$$

$$db^{[1]} = dz^{[1]}$$

$$dZ^{[2]} = A^{[2]} - Y$$

$$J(\ldots) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}(\hat{y}, y)$$

$$dW^{[2]} = \frac{1}{m} dZ^{[2]} A^{[1]T}$$

$$db^{[2]} = \frac{1}{m} np.sum(dZ^{[2]}, axis = 1, keepdims = True)$$

element-wise product

$$\underset{(n^{[1]},m)}{dZ^{[1]}} = \underbrace{W^{[2]T} dZ^{[2]}}_{(n^{[1]},m)} * \underbrace{g^{[1]\prime}(Z^{[1]})}_{(n^{[1]},m)}$$

$$dW^{[1]} = \frac{1}{m} dZ^{[1]} X^T$$

$$db^{[1]} = \frac{1}{m} np.sum(dZ^{[1]}, axis = 1, keepdims = True)$$