

# Notas Econometria I

Thiago Oliveira Coelho

31 de janeiro de 2020

Resumo baseado em (GUJARATI; PORTER, 2011) e (WOOLDRIDGE, 2016)

## Sumário

<b>Sumário</b>	<b>1</b>
<b>1 1ª UNIDADE</b>	<b>2</b>
1.1 <b>Análise de Regressão Simples</b>	<b>2</b>
1.2 <b>Função Regressão Amostral [FRA]</b>	<b>3</b>
1.3 <b>Estimativa de <math>\beta</math> por mínimos quadrados ordinários</b>	<b>3</b>
1.3.1 MQO / OLS	3
1.3.2 Soma dos quadrados dos resíduos	4
1.4 <b>Reta de regressão</b>	<b>6</b>
1.5 <b>Forma funcional</b>	<b>6</b>
1.6 $R^2$	7
<b>2 2ª UNIDADE</b>	<b>9</b>
2.1 <b>Eliminação de viés nos estimadores</b>	<b>9</b>
2.2 <b>Confiabilidade e variância</b>	<b>9</b>
2.2.1 Variância dos estimadores	9
<b>Referências</b>	<b>12</b>

# 1 1ª Unidade

## 1.1 Análise de Regressão Simples

É usada para determinar o impacto *ceteris paribus* entre variáveis. Seu modelo simples é o seguinte:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + u$$

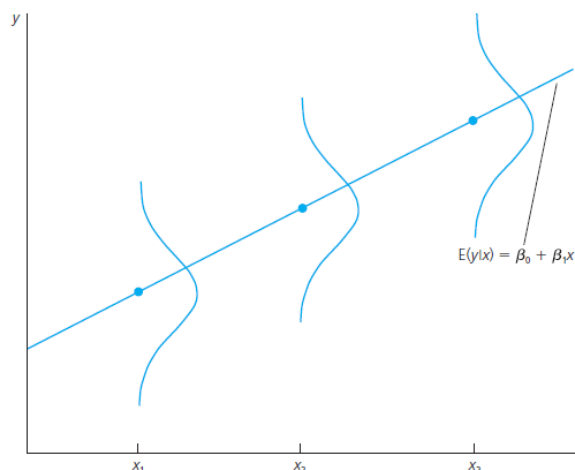
Onde:

- Y: Variável dependente;
- X: Variável independente;
- $\beta_0$ : Intercepto (Valor de Y quando  $X = 0$ );
- $\beta_1$ : Coeficiente do impacto de X em Y;
- u: Erro. Inclui todos os fatores que influenciam Y e não estão explicitados no modelo como variáveis explicativas.

Tanto X quanto u serão tratadas como variáveis aleatórias. Mas para capturar o efeito *ceteris paribus* das variáveis explicativas nós assumimos que  $E(u) = 0$ . Com isso podemos derivar também que :  $E(u|x) = E(u) = 0$ . Isso permite que X tenha um efeito *linear* em Y.

Encontramos assim nossa *Função regressão populacional* [FRP]:

$$E(Y|X) = \beta_0 + \beta_1 X$$



Observe que para cada observação de X há uma distribuição de valores de Y, mas os que estão na linha de regressão representam a esperança (média) destes valores para aquele dado X. A linha de regressão é o local geométrico das expectativas condicionais das variáveis dependentes dados certos valores das explicativas.

Figura 1 – Fonte: (WOOLDRIDGE, 2016)

## 1.2 Função Regressão Amostral [FRA]

Dada uma amostra da população, existe uma reta de regressão que define esta amostra. Porém não é possível se obter esta reta pura por causa da perturbação estocástica ( $u$ ). Portanto iramos achar estimativas dos parâmetros:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$$

Aonde os betas não são seus valores reais, mas sim os *estimadores* obtidos a partir da amostra, representados pelo chapéu.

## 1.3 Estimativa de $\beta$ por mínimos quadrados ordinários

### 1.3.1 MQO / OLS

Pelas hipóteses podemos deduzir:

$$E(u) = Cov(x, u) = E(Xu) = 0$$

$$u = Y - \beta_0 - \beta_1 X$$

$$E(X(Y - \beta_0 - \beta_1 X)) = 0$$

Montamos o sistema:

$$\frac{\sum_{i=1}^n Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i}{n} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)}{n} = 0 \quad (1.2)$$

Pelas regras de somatório:

$$\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\beta}_0}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n \hat{\beta}_1 X_i}{n} = 0$$
$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

Substituindo o valor de  $\beta_0$  na segunda equação:

$$\sum_{i=1}^n X_i(Y_i - (\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}) - \hat{\beta}_1 X_i) = 0$$

Por manipulação algébrica chegamos no seguinte sistema de equações linear (Todos os betas são estimativas):

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

Percebe que a estimativa de beta 1 chapéu é dada pela covariância entre X e Y sobre a variância de X, portanto o sistema fica:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \quad (1.3)$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{Cov(X, Y)}{Var(X)} \quad (1.4)$$

### 1.3.2 Soma dos quadrados dos resíduos

O resíduo de uma observação é dada por:

$$\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_1)$$

Existem n resíduos, que nos dizem a diferença entre os valores esperados de Y estimados pelo modelo e os valores das observações.

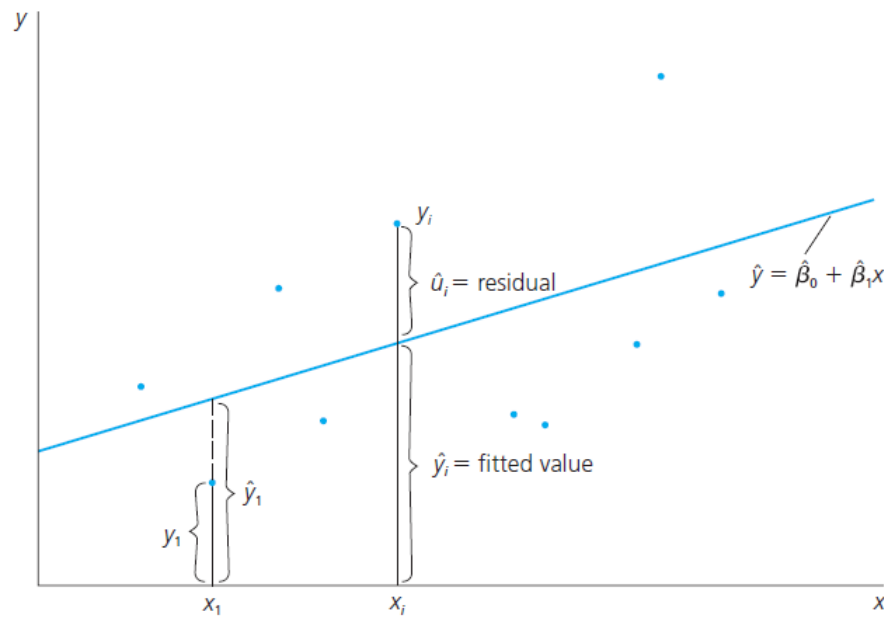


Figura 2 – Fonte: (WOOLDRIDGE, 2016, p. 28)

$$\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2$$

A ideia é obter uma reta com o menor resíduo possível, para isso queremos minimizar a soma dos quadrados dos resíduos:

$$\sum_{i=1}^n Y_i - \hat{Y}_i$$

Substituímos  $Y_i$  e obtemos a equação final:

$$Q = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2$$

Com isso nosso objetivo passa a ser minimizar  $Q$  com relação a  $\hat{\beta}_0$  e  $\hat{\beta}_1$ .

Teremos então as condições de 1ª ordem:

$$\frac{dQ}{d\hat{\beta}_0} = 0 \rightarrow -2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1)$$

$$\frac{dQ}{d\hat{\beta}_1} = 0 \rightarrow -2 \sum_{i=1}^n X_i (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1)$$

Podemos ainda fazer uma transformação monotônica das duas equações dividindo ambas por  $-2$  e obter:

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)$$

Que equivale ainda as duas hipóteses populacionais a quais chegamos ao tentar deduzir as fórmulas dos estimadores 1.1 e 1.2. Se continuarmos a desenvolver as fórmulas chegamos ao mesmo sistema para determinarmos os estimadores: 1.3 e 1.4. Concluimos então que as fórmulas do estimadores minimizam a soma dos quadrados dos resíduos.

## 1.4 Reta de regressão

A reta de regressão é aquela que minimiza os resíduos quadrados, que, como vimos anteriormente, é aquela reta que tem como intercepto  $\hat{\beta}_0$  e como inclinação  $\hat{\beta}_1$ . A reta de regressão passa por todos os valores esperados dado  $x$  e consegue te dar os valores previstos  $\hat{Y}$  para todo valor de variável explicativa, até mesmo aquelas que não possuímos observações.

$$\frac{d\hat{Y}}{dx} = \hat{\beta}_1 \Rightarrow \Delta \hat{Y} = \hat{\beta}_1 \Delta X$$

A mudança em  $\hat{Y}$  é igual a mudança em  $X$  vezes o coeficiente da reta  $\hat{\beta}_1$ . Esta previsão vale para a população como um todo.

## 1.5 Forma funcional

Um modelo é linear por causa de seus parâmetros, não por suas variáveis explicativas ou variável dependente. Todos os modelos a seguir são lineares, consequentemente nós podemos utilizar mínimos quadrados para obtermos seus coeficientes:

$$\log Y = \beta_0 + \beta_1 X^2 + u$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \frac{1}{X} + u$$

Temos quatro principais formas funcionais:

1. Linear em Y e  $X \rightarrow Y = \beta_0 + \beta_1 X + u$ , neste caso  $\frac{dY}{dX} = \beta_1$ .
2. Log em Y e  $X \rightarrow \log Y = \beta_0 + \beta_1 \log X + u$ , neste caso  $\frac{d \log Y}{d \log X} = \beta_1 \approx \epsilon_{yx}$ .  $\beta_1$  indica a mudança percentual em Y dada alteração de 1% em X.
3. Log em Y, linear em X  $\rightarrow \log Y = \beta_0 + \beta_1 X + u$ . Multiplicamos  $\beta_1$  por 100 para obtermos o aumento percentual de Y dada mudança unitária em X.
4. Linear em Y, log em X  $\rightarrow Y = \beta_0 + \beta_1 \log X + u$ , neste caso  $\beta_1$  mostra o efeito unitário em Y de uma mudança de 1% de X. Este caso é chamado de semi elasticidade.

## 1.6 $R^2$

Podemos criar uma lista das propriedades mais importantes da MQO amostral vistas até agora:

1. Soma dos resíduos é igual a zero:  $\sum \hat{u}_i = 0$ ;
2. Covariância amostral entre x e resíduos na amostra é zero:  $\sum X_i \hat{u}_i = 0$ ;
3. Os pontos  $(\bar{X}, \bar{Y})$  sempre estarão na reta de regressão, dado que:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i \Rightarrow X = \bar{X} \rightarrow Y = \bar{Y}$$

4. Covariância amostral entre  $\hat{Y}$  e  $\hat{u}$  é zero;
5. A média amostral de  $\hat{Y}$  é igual a média amostral de Y:  $\bar{\hat{Y}} = \bar{Y}$ ;
6.  $Y = \hat{Y} + \hat{u}$ ;

Podemos então, a partir da propriedade 6, chegar nas seguintes abreviações:

Soma dos Quadrados totais:

$$SQT = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \quad (1.5)$$

Soma dos quadrados explicados:

$$SQE = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \quad (1.6)$$

Soma dos quadrados dos resíduos:

$$SQR = \sum_{i=1}^n (\hat{u}_i)^2 \quad (1.7)$$

Por fim, temos que:

$$SQT = SQE + SQR \quad (1.8)$$

O  $R^2$ , também chamado de coeficiente de determinação, pode ser definido de diferentes formas:

1. *Quanto da variância de Y é explicada por X, em termos proporcionais;*
2. Relação entre variância de Y e de  $\hat{Y}$ ;
3. Proporção da variância de Y explicada pelo modelo de regressão;

$$R^2 = \frac{SQE}{SQT} = 1 - \frac{SQR}{SQT} \quad (1.9)$$

logo:

$$0 \leq R^2 \leq 1$$

$R^2$  seria igual 1 somente em duas ocasiões:

1.  $SQR = 0$ , o que ocorre somente se todos os erros dão zero. Isso significaria que  $\hat{Y}_i = Y_i$  para todo i, todos os valores reais de Y estariam em cima da reta de regressão;
2.  $SQE = SQT$ , o que significa que seu modelo amostral se iguala perfeitamente a realidade. Isso novamente implicaria que  $\hat{Y}_i = Y_i$  para todo i.

Se mudarmos a forma funcional, alteramos o valor do R quadrado.



## 2 2ª Unidade

### 2.1 Eliminação de viés nos estimadores

Algumas das precauções que podem ser tomadas para termos estimadores não enviesados:

1. Amostragem aleatório: é aquela que representa a população inteira, e não somente grupos específicos. Para isso todos os membros de população tem de ter alguma chance de participar da amostra;
2. Auto seleção: quando partes da população pode intencionalmente decidir participar da amostragem;
3. Média condicional de erro igual a zero:  $E(u|X) = 0$ . Não há correlação entre o erro e X, isso é importante para garantirmos o efeito *ceteris paribus*;
4. As variáveis X e Y não podem ter somente um único valor para toda a amostra;

Suponha que desejamos estimar um parâmetro populacional  $\theta$ . Seja  $\hat{\theta}$  o estimador de  $\theta$ ,  $\hat{\theta}$  não seria enviesado se:

$$E(\hat{\theta}) = \theta \quad (2.1)$$

O *MQO* garante que dadas as inúmeras amostras diferentes possíveis a partir da população, os estimadores não são enviesados. Contanto que as quatro hipóteses passadas sejam respeitadas:

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0 \quad (2.2)$$

$$E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 \quad (2.3)$$

### 2.2 Confiabilidade e variância

Nossa principal hipótese é a da *homocedasticidade do erro*. Ela nos diz que:

$$Var(u|x) = \sigma^2 \quad (2.4)$$

#### 2.2.1 Variância dos estimadores

Sob a hipótese de homocedasticidade, e tendo  $\sigma^2$  como a variância populacional, as variâncias dos estimadores são:

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.5)$$

$$Var(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} \quad (2.6)$$

Algumas conclusões que podem ser retiradas a partir disto:

1. Quão maior a quantidade da amostra ( $n$ ), a variância tenderá a ser menor. Isso se dá por haverem mais valores para serem somados nos denominadores;
2. Quanto maior a variância de  $X$  na amostra, menor a variação dos estimadores.

Como  $u$  é variável aleatória, sua variância é dada por:

$$Var(u|x) = E(u^2|x) - [E(u|x)]^2 \quad (2.7)$$

$$Var(u|x) = E(u^2) = \sigma^2 \quad (2.8)$$

Como é impossível obter os valores reais de  $\sigma^2$ , iremos calcular ele a partir da melhor informação que temos: os resíduos.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n u_i^2}{n - 2} \quad (2.9)$$

Sendo  $(n - 2)$  o número de *graus de liberdade* dos estimadores. O grau de liberdade representa o número de observações amostrais independentes. Este valor é obtido pelo número de observações  $n$  menos o número de restrições independentes  $(\beta_1, \beta_2)$ . Portanto a regra que podemos estabelecer é a seguinte, sendo  $k$  o número de variáveis do modelo:

$$G^o liberdade = n - ks \quad (2.10)$$

Com nossa estimativa de  $\sigma^2$  podemos agora calcular as variâncias estimadas dos coeficientes:

$$\hat{Var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.11)$$

$$\hat{Var}(\hat{\beta}_0) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} \quad (2.12)$$

E também o *erro padrão* dos estimadores:

$$Ep(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \quad (2.13)$$

$$Ep(\hat{\beta}_0) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2}} \sigma \quad (2.14)$$

# Referências

GUJARATI, Damodar N; PORTER, Dawn C. **Econometria Básica-5**. [S.l.]: Amgh Editora, 2011.

WOOLDRIDGE, Jeffrey M. **Introductory econometrics: A modern approach**. [S.l.]: Nelson Education, 2016.