Contents

1 Enkle ting

1.1 Polynomdivisjon

$$
\begin{array}{r}
x^2 - 4x + 3 : x - 3 = x - 1 \\
-x^2 + 3x \qquad\qquad \\
-x + 3 \qquad\qquad \\
x - 3 \qquad\qquad \\
\hline
0 \qquad\qquad
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 2x^2 + 4x + 7 & x + 1 \\
\hline
-x^3 - x^2 & x^2 - 3x + 7 \\
-3x^2 + 4x & \\
3x^2 + 3x & \\
7x + 7 & \\
-7x - 7 & \\
0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
x^2 - 2x + 4 : x + 1 = x - 3 + \frac{7}{x+1} \\
-x^2 - x \qquad\qquad\qquad \\
-3x + 4 \qquad\qquad\qquad \\
3x + 3 \qquad\qquad\qquad \\
7 \qquad\qquad\qquad
\end{array}
$$

1.2 Fullføre kvadrat

$$ax^2 + bx + c = a(x+d)^2 + e$$

$$d = \frac{b}{2a}$$

$$e = c - \frac{b^2}{4a}$$

1.3 inf og sup

b er en *øvre skranke* til A hvis den er større enn eller lik alle elementene i A. Den minste øvre skranke er den *minste øvre skranke* hvis den er den minste av disse. Motsatt er nedre skranke.

$$\textit{minste øvre skranke} = \sup A$$

$$\textit{største nedre skranke} = \inf A$$

1.4 Begreper

Konveks $\cup$ $f''(x) > 0$

Konkav $\cap$ $f''(x) < 0$

1.5 tangent

$$y - y_1 = f'(x)(x - x_1)$$

1.6 sekant

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

2 Kan være nyttig

2.1 Integral av invers funksjon

$$\int f^{-1}(y)\,dy = yf^{-1}(y) - F \circ f^{-1}(y) + C$$

Kan kanskje også løses med og ta arealet av rektangelet fra a til b i x-retning og $f(a)$ til $f(b)$ i y-retning minus $\int_a^b f(x)\,dx$.

2.2 Skrå asymptote

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax$$

Dersom grensene eksisterer, har f en skrå asymptote $ax + b$. Hvis en av grensene ikke finnes, er det ikke noen skrå asymptote.

$ax + b$ er en skrå asymptote av f hvis $\lim_{x\to\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

2.3 Lengden av en graf

Lengden langs en grad fra a til b er gitt ved.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)}$$

2.4 Numerisk integrasjon

Trapesmetoden

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\approx \frac{\Delta x}{2}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

Simpsons metode. Annenhver 2 og 4, unntatt først og sist. 2 på partallsledd, 4 på oddetallsledd.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\approx \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots$$
$$+ 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})]$$

2.5 Dreie om x-aksen

Grillspyd

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2\,dx$$

2.6 Dreie om y-aksen

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

3 Komplekse tall

z og w er komplekse tall

$$|z + w| \le |z| + |w|$$

$$z = a + ib$$

$$e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$$

$$|z| = \rho = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = r\cos\theta$$

$$b = r\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{r}$$

De Moivres formel

$$(cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

3.1 Trekke røtter av komplekse tall

$z = re^{i\theta}$ og $n \in \mathbb{N}$. Da har z nøyaktig n n-te røtter, $w_0, w_1, \cdots, w_{n-1}$ som er gitt ved

$$w_k = r^{1/n} e^{i(\theta + 2k\pi)}$$

På kartisisk form

$$r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

4 Noen setninger

4.1 Skjæringssetningen

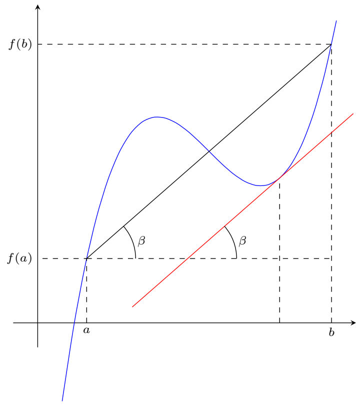
Dersom en funksjonen har forskjellig fortegn i a og b, finnes det et nullpunkt i $[a, b]$ hvis funksjonen er kontinuerlig.

4.2 Middelverdisetningen

Funksjonen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig og deriverbar. Da finnes det et punkt c slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Enklere forklart så finnes det et punkt c mellom a og b hvis tangent har samme stigningstall som sekanten mellom a og b.



4.3 epsilon-delta

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \leftrightarrow (\forall\epsilon, \exists\,\delta > 0)$$

slik at

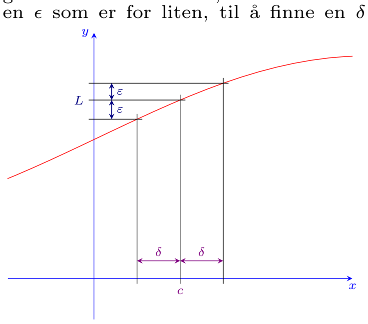
$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Gitt en ϵ så finnes det en δ slik at om x er så nære c at $|x - c| < \delta$ så er $|f(x) - L| < \epsilon$

δ er mellom x og c; ϵ er mellom $f(x)$ og L.

$$\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = 12$$

ϵ er en avstand fra 12. Den er liten som jeg vil. Det som det betyr at grensen eksisterer er at jeg alltid kan finne et interval med input rundt grenseinputtet (0), en avtand δ unna 0, slik at enhver input innenfor en avtand av δ gir en output innen avtand ϵ fra 12, uansett hvor liten ϵ er (sålenge den er større enn 0). Hvis grensen ikke eksisterer, kan man finne en ϵ som er for liten, til å finne en δ



5 Differensligninger

Formen $x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$. Løs den karakteristiske ligningen $r^2 + bx + c = 0$.

5.1 To reelle røtter

$$x_n = Cr_1^n + Dr_2^n$$

5.2 Én reell rot

$$x_n = Cr_1^n + Dnr_1^n$$

5.3 Komplekse røtter

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$$

$$x_n = Cr^n + \overline{C}\overline{r}^n \quad \text{(reelle løsninger)}$$

$$x_n = E\rho^n\cos(n\theta) + F\rho^n\sin(n\theta)$$

(trigonmetrisk form for reelle løsninger)

5.4 Inhomogene

Fungerer på samme måte og har samme fremgangsmåte som inhomogene differensialligninger.

6 Integrering

6.1 Delvis integrasjon

$$\int F \cdot g\,dx = F \cdot G - \int f \cdot G\,dx$$

6.2 Substutisjon

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

$$u = g(x)$$

$$\frac{du}{dx} = g'(x)$$

$$dx = \frac{du}{g'(x)}$$

$$\int f(u)g'(x)\frac{du}{g'(x)}$$

$$\int f(u)\,du$$

6.3 Delbrøkoppspaltning

P og Q er polynomer

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

1. $\deg(P) \ge \deg(Q) \Rightarrow$ utfør polynomdivisjon

2. Faktoriser Q i reelle første- og annengradsuttrykk. Sjekk at annengradsuttrykkene ikke kan faktoriseres ytterligere.

3. Foreta delbrøkoppspaltning. Integralene vi nå har er på formen $\int \frac{A}{(x-r)^n}\,dx$ eller $\int \frac{Bx+C}{(x^2+ax+b)^m}\,dx$. Den første typen kan integreres umiddelbart.

4. For å integrere den andre typen, smugler du den deriverte til $x^2 + ax + b$ inn i P, og substituerer $u = x^2 + ax + b$. Du står igjen med et integral på formen $\int \frac{dx}{(x^2+ax+b)^m}$.

5. Fullfør kvadratet og substituer slik at integralet får formen $\int \frac{du}{(1+u^2)^m}$.

6. Bruk rekursjonsformelen til å redusere multiplisiteten m. Til slutt sitter du igjen med $\int \frac{du}{1+u^2}$ som kan integreres direkte.

Rekursjonsformelen

$$I_m = \int \frac{du}{(1+u^2)^m}$$

$$I_m = \frac{1}{2(m-1)} \cdot \frac{u}{(1+u^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)} I_{m-1}$$

6.3.a Eksempler

Kan ikke faktoriseres, men smuglingen er veldig lett

$$I = \int \frac{x+2}{x^2+4x+6}\,dx$$

$$P(x) = x + 2$$

$$Q(x) = x^2 + 4x + 6$$

$$\text{Q kan ikke faktoriseres} \tag{2}$$

$$\text{Vi har form 2} \tag{3}$$

$$\frac{d}{dx}Q(x) = 2x + 4$$

$$\text{Vi smugler } Q' \text{ inn i } P \tag{4}$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6}\,dx$$

$$u = x^2 + 4x + 6$$

$$dx = \frac{du}{2x+4}$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$I = \frac{1}{2}\ln|u| + C$$

$$I = \frac{1}{2}\ln|x^2 + 4x + 6| + C$$

Kan faktoriseres

$$I = \int \frac{2x+1}{x^2-4x+3}\,dx$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}$$

gange med felles nevner $(x-1)(x-3)$

$$2x + 1 = A(x-3) + B(x-1)$$

$$x = 1 \Rightarrow 2\cdot 1 + 1 = A(1-3) + B(1-1)$$

$$3 = -2A$$

$$A = \frac{-3}{2}$$

$$x = 3 \Rightarrow 2\cdot 3 + 1 = A\cdot 0 + B(3-1)$$

$$7 = 2B$$

$$B = \frac{7}{2}$$

$$\frac{2x+1}{x^2-4x+3} = \frac{-\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{\frac{7}{2}}{x-3}$$

$$I = -\frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{7}{2}\int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$I = -\frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{7}{2}\ln|x-3| + C$$

En jævel

$$I=\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}\,dx$$

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Ganger med $(x-1)(x^2+x+1)$

$$(x+1)=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)$$
$$=Ax^2+Ax+A+Bx^2-Bx+Cx-C$$
$$=x^2(A+B)+x(A-B+C)+(A-C)$$

For at dette skal være lik $x+1$, får vi ligningssystemet

$$A+B=0$$
$$A-B+C=1$$
$$A-C=1$$

Vi løser selvsagt dette med

$$\text{rref}\left(\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&-1&1&1\\1&0&-1&1\end{bmatrix}\right)$$
$$=\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{2}{3}\\0&1&0&-\frac{2}{3}\\0&0&1&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

Vi har således

$$A=\frac{2}{3}\quad B=-\frac{2}{3}\quad C=-\frac{1}{3}$$

$$I=\int \frac{\frac{2}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}{x^2+x+1}\,dx$$

Vi ganger med $-\frac{1}{3}$ for at telleren er lik nevneren derivert

$$=\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+C$$

$u=x^2+x+1$ (teller er lik $\frac{du}{dx}$!)

$$\frac{du}{dx}=2x+1$$

$$dx=\frac{1}{2x+1}du$$

$$I=\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\int\frac{2x+1}{u}\cdot\frac{1}{2x+1}du$$

$$I=\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\int\frac{1}{u}\,du+C$$

$$I=\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln|x^2+x+1|+C$$

6.4 Definisjon

partisjon av intervallet $[a,b]$ er en endelig mengde $\Pi=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ slik at

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

$M_i=\sup\{f(x): x\in[x_{i-1},x_i]\}$

$(\max(f(x_i),f(x_{x-1})))$

$m_i=\inf\{f(x): x\in[x_{i-1},x_i]\}$
$(\min(f(x_i),f(x_{x-1})))$

$$\mathcal{O}(\Pi)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1})$$

$$\mathcal{N}(\Pi)=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1})$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\inf\{\mathcal{O}(\Pi): \text{alle mulige }\Pi\}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\inf\{\mathcal{N}(\Pi): \text{alle mulige }\Pi\}$$

Dersom $\overline{\int_a^b} f(x)dx=\underline{\int_a^b} f(x)dx$ er f integrerbar

6.5 Tips

6.5.a $\int\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

Substituer $u=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

Løs for x, deriver, finn $\frac{dx}{du}$ og deretter dx

$$I=\int u\,dx$$

Dette kan løses med delbrøkoppspaltning

6.5.b $\int R(\sin x,\cos x)$

$$R(\sin x,\cos x)=$$
$$\frac{\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{M}a_{n,m}\sin^n x\cos^m x}{\sum_{n=0}^{L}\sum_{m=0}^{K}b_{n,m}\sin^n x\cos^m x}$$

Substituer $u=\tan\frac{x}{2}$

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$$
$$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$$
$$dx=\frac{2}{1+u^2}du$$

7 Newtons metode

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Anta at $f(a)=0$, at $f'(a)\neq 0$ og at $f''(x)$ eksisterer og er kontinuerlig rundt a. Da finnes det en $\delta>0$ slik at følgen $\{x_n\}$ i Newtons metode konvergerer mot a når $x_0\in(a-\delta,a+\delta)$.

8 Diffligninger

8.1 Førsteordens lineære

$$y'+f(x)y=g(x)$$

$$y=e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)}g(x)\,dx+C\right)$$

8.2 Annenordens homogen med konstante koeffisienter

$$y''+py'+qy=0$$

y_1 og y_2 er løsninger. Da er også

$$y=Cy_1+Dy_2$$

en løsning med alle C og D. For å finne y_1 og y_2 løser vi den karakteristiske ligningen

$$r^2+pr+q=0$$

To røtter Dersom vi har to røtter er

$$y=Ce^{r_1x}+De^{r_2x}$$

Vi vet at $r_1+r_2=-p$

Én rot

$$y=Ce^{r_1x}+Dxe^{r_1x}$$

Komplekse røtter To røtter $r_1=a+ib$ og $r_2=a-ib$

$$y=e^{ax}(C\cos(bx)+D\sin(bx))$$

8.3 Annenordens inhomogen

$$y''+py'+qy=f(x)$$

Vi tipper $y_p(x)$ er på formen: Dersom f(x) er et polynom sier vi at g(x) er et polynom av samme grad som f, og forsøker

gitt multisettet Ω er løsningene til den karakteristiske ligningen $r^2+pr+q=0$

er 0 en rot?	y_p
$0\notin\Omega$	$g(x)$
$0\in^1\Omega$	$xg(x)$
$0\in^2\Omega$	$x^2g(x)$

Gitt funksjonen $\Upsilon: M\times\mathbb{R}\to\mathbb{N}$, gir multiplisiteten til et tall i et multiset, har vi

$$y_p=x^{\Upsilon(\Omega,0)}g(x)$$

Dersom vi har formen $f(x)=e^{ax}P(x)$ der P er et polynom, tipper vi

$$y_p=e^{ax}x^{\Upsilon(\Omega,a)}Q(x)$$

der Q er et polynom av samme grad som P.

Dersom vi har formen

$$f(x)=a^x(A\cos(bx)+B\sin(bx))$$

tipper vi

$$y_p=a^x(C\cos(bx)+D\sin(bx))$$

Dersom $a^x\cos(bx)$ eller $a^x\sin(bx)$ er den karakteristiske ligningen tipper vi

$$y_p=x\cdot a^x(C\cos(bx)+D\sin(bx))$$

8.3.a Fremgangsmåte for å løse

- Løs $r^2+pr+q=0$
- Finn $y_h=Ce^{r_1x}+De^{r_2x}$
- Med komplekse røtter blir det annerledes, se over.
- Ukjente koeffisienters metode
- Gjett y_p og finn y_p' og y_p''
- Innsett i ligningen
- Løs ligningsstystemet og finn A og B
- Vi har funnet den partikulære løsningen.
- Den generelle er $y=y_p+y_h$
- Dersom du har $y(0)=\alpha$ og $y'(0)=\beta$, løs ligningssystemet og finn C og D.

8.3.b Parametervariasjon

Last minute resort

$$y''+py'+qy=f(x)$$

$$y=Cy_1+Dy_2\qquad(y_n=e^{r_nx})$$

Vi erstatter C og D med $c(x)$ og $d(x)$

$$y=c(x)y_1(x)+d(x)y_2(x)$$

$$c(x)=-\int\frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1,y_2)}dx$$

$$d(x)=\int\frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1,y_2)}dx$$

$$W(y_1,y_2)=y_1y_2'-y_1'y_2$$

Dette er den generelle løsningen, ikke den homogene! M.a.o. så er man ferdig!

8.4 Separable Diffligninger

Kan skrives på formen

$$q(y)y'=p(x)$$

For å løse

$$\int q(y)y'\,dx=\int p(x)\,dx$$

$dy=y'\,dx$ ergo.

$$\int q(y)dy=\int p(x)\,dx$$

' Regn integralene og løs mhp. y.

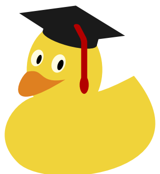
9 Taylorpolynom

Taylorpolynomet til f av grad n om punktet a er gitt ved

$$T_nf(x;a)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

(der $f^{(k)}(a)=\frac{d^kf}{dx^k}(a)$ og $f^{(0)}(a)=f(a)$)

10 Hjemmeeksamen



10.1

10.1.a

$$z^2+\sqrt{3}z+1=0$$

$$z=\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{(\sqrt{3})^2-4}}{2}$$

$$z=\frac{-\sqrt{3}\pm-\sqrt{-1}}{2}$$

$$z=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\vee z=\frac{-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$z_1=\rho e^{i\theta_1}\qquad z_2=\rho e^{i\theta_2}$$

$$\rho=\sqrt{(\Re z)^2+(\Im z)^2}$$

$$\rho=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\rho=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$$

$$\cos\theta=\frac{\Re z}{\rho}\qquad\sin\theta=\frac{\Im z}{\rho}$$

$$\cos\theta_1=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta_1=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$

z_1 er i II kvadrant

$$\theta_1=\frac{5}{6}\pi$$

$$\cos\theta_2=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta_2=\frac{-\frac{1}{2}}{1}=-\frac{1}{2}$$

z_2 er i III kvadrant

$$\theta_2=\frac{7}{6}\pi$$

$$z_1=e^{i\frac{5}{6}\pi}\qquad z_2=e^{i\frac{7}{6}\pi}$$

10.1.b

$f(x)=x$ er et polynom av første grad. Vi bruker ukjente koefisienters metode.

Løsningen er kanskje på formen $Ax+B$

$$y_p=Ax+B$$

$$y_p''+\sqrt{3}y_p'+y_p=0+\sqrt{3}A+B$$

$$x=0\Rightarrow\sqrt{3}A+B=0$$
$$x=1\Rightarrow A+\sqrt{3}A+B=1$$
$$B=-\sqrt{3}A$$
$$A+\sqrt{3}A-\sqrt{3}A=1$$
$$A=1$$
$$\sqrt{3}+B=0$$
$$B=-\sqrt{3}$$

$y_p=x-\sqrt{3}$ Partikulær løsning

Vi finner y_h

$$r^2+\sqrt{3}r+1=0$$

$$r=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\vee r=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$y_h=Ce^{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)x}+De^{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)x}$$

$$=Ce^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}ix}+De^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}ix}$$

$$=Ce^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}\cdot e^{\frac{1}{2}ix}+De^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}\cdot e^{-\frac{1}{2}ix}$$

$$=Ce^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}\cdot\left(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\right)$$
$$+De^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}\cdot\left(\cos\frac{-x}{2}+i\sin\frac{-x}{2}\right)$$

$$=Ce^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}\cdot\left(\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}\right)$$
$$+De^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}\cdot\left(\cos\frac{x}{2}-i\sin\frac{x}{2}\right)$$

$$y=y_p+y_h$$

$$y=x-\sqrt{3}+y_h$$

10.2

10.2.a

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\sin x}{x^2}$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\cos x}{2x}$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}+\sin x}{2}=0$$

10.2.b

$$\int\frac{\arctan x\ln\arctan x}{1+x^2}\,dx$$

$u=\arctan u$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x^2+1}$$

$$dx=(x^2+1)\,du$$

$$\int u\ln u\,du$$

$$=\frac{1}{2}u^2\ln u-\int\frac{1}{2}u^2\cdot\frac{1}{u}\,du$$

$$=\frac{1}{2}u^2\ln u-\frac{1}{2}\int u\,du$$

$$=\frac{1}{2}u^2\ln u-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}u^2+C$$

$$=\frac{1}{2}\arctan^2x\ln\arctan x$$
$$-\frac{1}{4}\arctan^2x+C$$

$$=\frac{1}{2}\arctan^2x(\ln\arctan x-\frac{1}{2})+C$$

10.2.c

$$f(x)=1+(x-2)^2$$
$$g(x)=3-(x-2)^2$$
$$f(x)=g(x)\implies x=1\vee x=3$$

$$A=\int_1^3 g(x)\,dx-\int_1^3 f(x)\,dx$$

$$A=\frac{8}{3}$$

10.3

$$f:[-\pi,\pi]\to(-\infty,\infty)$$

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\le x\le\pi\\ x^2+1, & -\pi\le x<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\cos x=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}x^2+1=1$$

f er kontinuerlig på hele $[-\pi,\pi]$ f er deriverbar på hele intervallet dersom den er deriverbar i $x=0$ TODO

10.3.a

TODO

10.3.b

$g : (-\infty, \infty) \to (0, 1)$ er deriverbar og strengt voksende overalt.

$$h(x) = \frac{e^{g(x)}}{g(x)}$$

$$h'(x) = \frac{g'(x)e^{g(x)}(g(x)-1)}{g(x)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} g(x)-1 \le 0 \,\forall\, x \in \mathbb{R} \\ g'(x) > 0 \,\forall\, x \in \mathbb{R} \\ e^{g(x)} > 0 \,\forall\, x \in \mathbb{R} \\ g(x)^2 > 0 \,\forall\, x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow h'(x) \le 0$$

11 Obligatorisk Oppgave

11.1

11.1.a

$x_{n+2} - ax_{x+1} + x_n = 0$ for $0 \le a \le \infty$

$a = 6 \implies x_{n+2} - 6x_{x+1} + x_n = 0$

Den karakteristiske ligningen er:

$$r^2 - 6r + 1 = 0$$

$$r = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4}}{2}$$

$$r = 3 - 2 \cdot \sqrt{2} \,\vee\, r = 3 + 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$x_n = \alpha\left(3 - 2\sqrt{2}\right)^n + \beta\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n$$

$$x_0 = \alpha + \beta$$

$$x_1 = \alpha\left(3 - 2\sqrt{2}\right) + \beta\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$$

For at x_n skal gå mot 0, må β være 0. α kan være hva som helst. Hva må x_0, x_1 være for at β er 0?

$$\beta = \alpha - x_0$$

$$\beta = \frac{\alpha(3 - 2\sqrt{2}) - x_1}{3 + 2\sqrt{2}}$$

For at β skal være 0, må $x_0 = \alpha$ og $x_1 = -(2\sqrt{2} - 3)\alpha$

11.1.b

$a = 0$

$$x_{n+2} - 0 \cdot x_{n+1} + x_n = 0$$

$$r^2 + 1 = 0$$

$$r = -i \vee r = i$$

$$x_n = \alpha \cdot (-i)^n + \beta \cdot i^n$$

$$x_0 = 1 \implies \alpha \cdot (-i)^0 + \beta \cdot i^0 = 1$$

$$\implies \alpha + \beta = 1$$

$$x_1 = 1 \implies \alpha \cdot (-i)^1 + \beta \cdot i^1 = 1$$

$$\implies -\alpha i + \beta i = 1$$

$$\alpha = 1 - \beta$$

$$-(1-\beta)\,i + \beta i = 1$$

$$-i + \beta i + \beta i = 1$$

$$2\beta i = i + 1$$

$$\beta = \frac{1+i}{2i}$$

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\alpha = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$x_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) \cdot (-i)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) \cdot i^n$$

11.1.c

i^n og $(-i)^n$ er periodisk med periode 4, siden $i^{4k} = 1 \,\wedge\, (-i)^{4k} = 1 \;\forall\; k \in \mathbb{Z}$. Resten av uttrykket er bare konstanter så x_n sin periode vil være 4. Dersom $a = 0$, vil uttrykket på være på formen $x_n = \alpha \cdot (-i)^n + \beta \cdot i^n$ hvor α og β er konstanter. Perioden vil derfor alltid være 4 når $a = 0$.

11.1.d

$$a = \sqrt{2}$$

$$x_{n+2} - \sqrt{2}x_{n+1} + x_n = 0$$

$$r^2 - \sqrt{2}r + 1 = 0$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \,\vee\, r = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$x_n = \alpha \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^n + \beta \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^n$$

x_n er periodisk med 8 som periode.

11.1.e

$$f(x) = 2\arctan(x) - \log(1 + x^2)$$

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2}$$

Vi har lokale eksemalpunkter der $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \implies \frac{2}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

$$2 - 2x = 0$$

$$x = 1$$

$$f(1) = 2\arctan(1) - \log(1 + 1^2) = \frac{\pi}{2} - \log(2)$$

$(1,\ \frac{\pi}{2} - \log(2))$ er et lokalt ekstremalpunkt.

Vi bruker annenderiverttesten for å finne ut om det er et minimum- eller maksimumspunkt.

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 2x - 1)}{(1+x^2)^2}$$

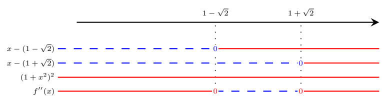
$$f''(1) = -1$$

Siden $f''(1) < 0$, er $x = 1$ et maksimumspunkt.

11.1.f

f er konkav når $f''(x) < 0$ og konveks når $f''(x) > 0$. Vi finner nullpunktene til $f''(x)$

$$f''(x) = 0$$



f er konkav på intervallet $(1 - \sqrt{2},\ 1 + \sqrt{2})$ og konveks på intervallet $(-\infty,\ 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2},\ \infty)$

11.2

11.2.a

$$f(1) = 1^2 \ln|1|^{1/2} - 1^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f(e^2) = (e^2)^2 \ln|e^2|^{\frac{1}{2}} - (e^2)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

På grunn av skjæringssetningen, og fordi f er kontinuelig i $[1,\ e^2]$, har f et nullpunkt i intervallet.

11.2.b

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \ln\left(|x|^{1/2}\right) - x^2 + \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x\to 0} x^2 \ln\left(|x|^{1/2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln\left(|x|^{1/2}\right)}{1/x^2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$\overset{\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\frac{1}{2x}}{-\frac{2}{x^3}}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(-\frac{x^2}{4}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Dersom vi definerer $f(0) = 1/2$, er f kontinuelig siden $\ln(x)$ er kontinuelig for alle x større enn 0 og $|x|^{1/2}$ aldri er negativ.

11.2.c

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \ln(|h|^{1/2}) - h^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2(\ln(|h|^{1/2}) - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h(\ln(|h|^{1/2}) - 1)$$

$$= \lim_{h\to 0} h\ln(|h|^{1/2}) - h$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(|h|^{1/2})}{\frac{1}{h}}$$

$$\overset{\left[\frac{-\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2h}}{-\frac{1}{h^2}}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{h^2}{2h}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{h}{2}$$

$$= \underline{0}$$

11.3

11.3.a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x + 3}{x^3 - 2} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x - 1}{3x^2}$$

$$\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{6x}$$

$$= 0$$

b)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \sqrt{x+1} + \sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

11.3.b

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x^2)}{x\sin(x)}$$

$$\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{x^4+1}}{\sin(x) + x\cos(x)}$$

$$\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2 - 6x^4}{(x^4+1)^2}}{2\cos(x) + x\sin(x)}$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

11.4

Det er ingen oppgave 5 i oppgavesettet

11.5

11.5.a

Løsningene til ligningen $e^{x/2} = 2 - 2x$ er det samme som nullpunktene til funksjonen $f(x) = e^{x/2} - 2 + 2x$

$$f(0) = e^{0/2} - 2 + 2 \cdot 0 = -1$$

$$f(1) = e^{1/2} - 2 + 2 \cdot 1 = e^{1/2}$$

Siden f er kontinuelig på $[0,\ 1]$ og to punkter i intervallet har forskjellig fortegn, har f minst ett nullpunkt i intervallet.

11.5.b

f er strengt voksende

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2} + 2$$

f har derfor bare ett nullpunkt i $(-\infty,\ \infty)$.

11.5.c

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_0 = 0$$

$$f(0) = -1$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}e^{0/2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = 0 - \frac{-1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

$f''(x) = \frac{1}{4}e^{x/2}$

Newtons metode finner neste iterasjon ved å ta nullpunktet til tangenten i x_n. Siden $f''(x)$ alltid er positiv vil dette nullpunkt alltid være for stort når $f(x) < 0$. Siden $f(0) < 0$, er løsningen på ligningen mindre enn $\frac{5}{2}$.

11.6

11.6.a

$$z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$$

$$z = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2}$$

$$= \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{4}\sqrt{\cos^2\theta - 1}}{2}$$

$$= \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1}$$

$$= \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta}$$

(merk: $\cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta$)

$$= \cos\theta \pm \sqrt{-1}\sqrt{\sin^2\theta}$$

$$= \cos\theta \pm i\sin\theta$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

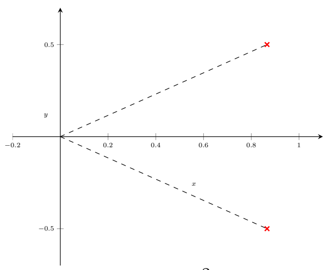
$$z = e^{i\theta} \vee z = e^{-i\theta}$$

11.6.b

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$z_2 = \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$



$$z_1^2 + z_2^2 = \left(e^{i\pi/6}\right)^2 + \left(e^{-i\pi/6}\right)^2$$

$$= e^{i\pi/3} + e^{-i\pi/3}$$

$$= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

11.7

11.7.a

En funksjon er injektiv dersom den er strengt voksende.

$$f'(x) = e^{\left(x^3\right)} \cdot 3x^2$$

$e^{\left(x^3\right)}$ og $3x^2$ er positivt for alle x i $(0,\ \infty)$ så f er strengt voksende og injektiv.

f er surjektiv dersom for enhver y, finnes det en x slik at $y = f(x)$.

$$y = e^{\left(x^3\right)}$$

$$\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{e^{\left(x^3\right)}} = e^x$$

$$\ln\left(\sqrt[3]{y}\right) = \ln(e^x) = x$$

$$f^{-1}(x) = \ln\left(\sqrt[3]{x}\right)$$

For enhver y finnes det en x slik at $y = f(x)$. Denne x er $\ln\left(\sqrt[3]{y}\right)$. f er således surjektiv.

11.7.b

Vi fant $f^{-1}(x)$ i a).

$$f^{-1}(x) = \ln\left(\sqrt[3]{x}\right)$$

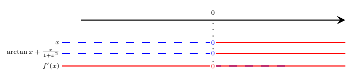
11.8

11.8.a

x^2 og $\arctan(x)$ er kontinuelige på $(-\infty, \infty)$, så f er også det.

$$f'(x) = 2x\arctan x + x^2\frac{1}{1+x^2}$$

$$= x\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right)$$



$f'(x) \ge 0 \;\forall\; x \in (-\infty,\ \infty) \implies f$ er injektiv

11.8.b

TODO

11.8.c

$$f'(1) = 2\cdot 1\cdot \arctan(1) + 1^2\cdot\frac{1}{1+1^2}$$
$$= \frac{\pi+1}{2}$$
$$y - y_1 = a(x - x_1)$$
$$y = \left(\frac{\pi+1}{2}\right)(x-1) + \frac{\pi}{4}$$
$$= y = \left(\frac{\pi+1}{2}\right)x - \left(\frac{\pi+1}{2}\right) + \frac{\pi}{4}$$
$$= y = \underline{\underline{\left(\frac{\pi+1}{2}\right)x - \frac{3\pi+2}{4}}}$$

Tangent til $y = f^{-1}(x)$ i $(\pi/4,\ 1)$

$$\frac{df^{-1}}{dx}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$
$$\frac{df^{-1}}{dx}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\frac{\pi}{4}))}$$
$$= \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\frac{\pi+1}{2}} = \frac{2}{\pi+1}$$

Vi finner ligningen til tangenten

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$
$$= y - 1 = \left(\frac{2}{\pi+1}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \left(\frac{2}{\pi+1}\right)x - \left(\frac{2}{\pi+1}\right)\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1$$
$$= y = \underline{\underline{\left(\frac{2}{\pi+1}\right)x - \frac{\pi}{2(1+\pi)} + 1}}$$

11.8.d

$$f''(x) = 2\arctan x + 2x\frac{1}{1+x^2} + x^2\cdot\left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)$$

Alle ledd er positive når $x > 0$ og negative når $x < 0$. f er derfor konkav på $(-\infty,\ 0)$ og konveks på $(0,\ \infty)$

11.9

11.9.a

$$A(r+\Delta r) \approx A(r) + A'(r)\cdot\Delta r$$
$$A'(r) = \pi\sqrt{r^2+h^2} + \pi 2r^2\frac{1}{2\sqrt{r^2+h^2}}$$
$$= \pi\left(\sqrt{r^2+h^2} + \frac{r^2}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)$$
$$= \pi\left(\frac{r^2+h^2}{\sqrt{r^2+h^2}} + \frac{r^2}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)$$
$$= \frac{\pi(2r^2+h^2)}{\sqrt{r^2+h^2}}$$
$$A(r+\Delta r) \approx \pi r\sqrt{r^2+h^2} + \frac{\pi(2r^2+h^2)}{\sqrt{r^2+h^2}}\Delta r$$

11.9.b

Ved middelverdisetningen vet vi at det finnes et punkt c, slik at

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$= \frac{f(a+h)-f(a)}{\cancel{a}+h-\cancel{a}} \quad (a+h=b)$$
$$= \frac{f(a)+f'(a)h+\eta(h)h-f(a)}{h}$$
$$(f(a+h) = f(a)+f'(a)h+\eta(h)h)$$
$$= \frac{f'(a)h+\eta(h)h}{h}$$
$$= f'(a)+\eta(h)$$

Dersom vi flytter om på leddene finner vi:

$$f'(c) = f'(a)+\eta(h)$$
$$\Downarrow$$
$$\eta(h) = f'(c) - f'(a)$$

12 Eksamen 2010

12.1

12.1.a

Lokale ekstremalpunkt av
$f(x) = 2\arctan x - x$

Deriverer

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - 1$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{1+x^2} - 1 = 0$$
$$\frac{2}{1+x^2} = 1$$
$$2 = 1 + x^2$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$

12.1.b

$$f''(x) = 2\cdot\mathcal{D}\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}$$
$$= 2\cdot 2x\cdot\left(-\frac{1}{(x^2+1)^2}\right)$$
$$= -\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

f kan bytte mellom konkav/konveks når $f''(x) = 0$

$$-\frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0$$
$$x = 0$$
$$f(1) = \frac{1}{2}\pi - 1 > 0$$
$$f(-1) = -\frac{1}{2}\pi + 1 < 0$$

f er konkav på $[-\infty,\ 0]$ og konveks på $[0,\ \infty]$

12.2

12.2.a

$$r^2 + 4r + 8 = 0$$
$$r = \frac{-4\pm\sqrt{16-32}}{2}$$
$$r = \frac{-4\pm 4i}{2}$$
$$r_1 = -2+2i \quad r_2 = -2-2i$$
$$|r_1 - r_2| = |-2+2i-(-2-2i)|$$
$$= |4i| = \sqrt{4^2} = 4$$

12.2.b

$$u'' + 4u' + 8 = 0$$
$$r^2 + 4r + 8 = 0$$
$$r_1 = -2+2i \quad r_2 = -2-2i$$
$$y = e^{-2x}(C\cos(2x) + D\sin(2x))$$

12.2.c

$$y'' + 4y' + 8y = 26e^x,\ y(0) = y'(0) = 0$$
$$y_h = e^{-2x}(C\cos(2x) + D\sin(2x))$$
$$y_p = y_p' = y_p'' = Ae^x$$
$$Ae^x + 4e^x + 8e^x = 26e^x$$
$$13Ae^x = 26e^x$$
$$A = 2$$
$$y_p = 2e^x$$
$$y = y_p + y_h$$
$$= 2e^x + e^{-2x}(C\cos(2x) + D\sin(2x))$$

$$y_p' = 2e^x - 2Ce - 2x\cos(2x)$$
$$- 2Ce^{-2x}\sin(2x)$$
$$- 2De^{-2x}\sin(2x)$$
$$+ 2De^{-2x}\cos(2x)$$

$$y(0) = 0 \implies C = -2$$
$$y'(0) = 0 \implies D = -3$$
$$y(x) = 2e^x$$
$$+ e^{-2x}((-2)\cos(2x) + (-3)\sin(2x))$$

12.3

12.3.a

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x - \arctan x}$$
$$\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\frac{1}{1+x^2}}$$
$$\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{2x}{(1+x^2)^2}}$$
$$\overset{[\frac{0}{0}]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2(1+x^2)^2 - 4x^2(2x+2x^2)}$$
$$= \frac{1}{2}$$

12.3.b

$$\int\frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int\frac{\cancel{u}}{u+1}\cdot\frac{1}{\cancel{u}}du$$
$$u = e^x;\ \frac{du}{dx} = e^x;\ dx = \frac{1}{e^x}du = \frac{1}{u}du$$
$$\int\frac{1}{u+1}du = \ln|u+1| + C$$
$$= \ln|e^x+1| + C$$

12.3.c

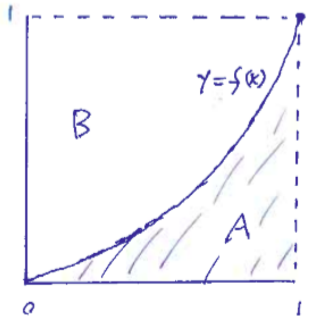
$$\int\frac{dx}{2x^3+3x^2} = \int\frac{dx}{x^2(2x+3)}$$
$$\frac{1}{x^2(2x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{2x+3}$$
$$A(x)(2x+3) + B(2x+3) + Cx^2 = 1$$
$$2Ax^2 + 3Ax + 2Bx + 3B + Cx^2 = 1$$
$$x^2(2A+C) + x(3A+2B) + 3B = 1$$

$$\begin{array}{lllll} 2A & & + & C & = & 0\\ 3A & + & 2B & & = & 0\\ & & 3B & & = & 1\end{array}$$

$$A = -\frac{2}{9},\quad B = \frac{1}{3},\quad C = \frac{4}{9}$$
$$\frac{1}{x^2(2x+3)} = \frac{\frac{2}{9}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x^2} + \frac{\frac{4}{9}}{2x+3}$$
$$I = -\frac{2}{9}\int\frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{3}\int\frac{1}{x^2}\,dx + \frac{4}{9}\int\frac{1}{2x+3}\,dx$$
$$= -\frac{2}{9}\ln|x| - \frac{1}{3x} + \frac{4}{9}\frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$$
$$= \underline{\underline{-\frac{2}{9}\ln|x| - \frac{1}{3x} + \frac{2}{9}\ln|2x+3| + C}}$$

12.4

$$f(x) = \frac{1}{2}x\cdot 2^x$$
$$\int_0^1 f(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 x\cdot 2^x\,dx$$
$$F = x \quad g = 2^x$$
$$f = 1 \quad G = \frac{1}{\ln 2}2^x$$
$$I = \frac{1}{2}\left(x\frac{1}{\ln 2}2^x\Big|_0^1 - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1\frac{1}{\ln 2}2^1 - 0\frac{1}{\ln 2}2^0 - \frac{1}{\ln^2 2}2^x\Big|_0^1\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\ln 2} - \left(\frac{1}{\ln^2 2}2^1 - \frac{1}{\ln^2 2}2^0\right)\right)$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\ln 2} - \frac{2}{\ln^2 2} + \frac{1}{\ln^2 2}\right)$$
$$= \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 2} + \frac{1}{2\ln^2 2}$$
$$= \frac{1}{\ln 2} - \frac{2}{2\ln^2 2} + \frac{1}{2\ln^2 2}$$
$$= \underline{\underline{\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2\ln^2 2}}}$$



B = Arealet av rektangelet $-A$. Arealet er 1. B er derfor

$$1 - \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2\ln^2 2}$$

,

13 Tilfeldige oppgaver

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1} - 1\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+1}-1}{\frac{1}{x}}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}-1\right)\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}+1\right)}{\frac{1}{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}+1\right)}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+1-1}{\frac{1}{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+1}+1\right)}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}+1}+1}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \underline{\frac{1}{2}}$$

---

x_0 er et vilkårlig punkt. Vi skal ha $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

$$\Leftrightarrow |Ax + B - (Ax_0 + B)| < \epsilon|$$
$$\Leftrightarrow |Ax - Ax_0| < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow |A(x - x_0)| < \epsilon \Leftrightarrow |A|\cdot|x - x_0| < \epsilon$$
$$\Leftrightarrow |x - x_0| < \frac{\epsilon}{|A|}$$

For hver $\epsilon > 0$, velg $\delta = \frac{\epsilon}{|A|}$, så vil

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |x - x_0| < \frac{\epsilon}{|A|}$$
$$\implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Dermed er f kontinuerlig i x_0

---

c) Sett

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt,$$

så er $F(x)$ kontinuerlig, og deriverbar ved Analysens Fundamentalteorem, siden e^{-t^2} er kontinuerlig. Har

$$F(0) = 0 \quad \text{og} \quad F(1) = \int_0^1 e^{-t^2}dt$$

Ved Middelverdisatsen finnes en c mellom 0 og 1 slik at

$$F(1) - F(0) = F'(c)(1-0) = e^{-c^2},$$

og siden $0 < c < 1$ følger

$$\int_0^1 e^{-t^2}dt = F(1) = e^{-c^2} > e^{-1}.$$