INSTITUTO LATINO-AMERICANO DE CIÊNCIAS DA VIDA E DA NATUREZA
ILACVN
CÁLCULO II

GUSTAVO BENITES WENCESLAU

RESOLUÇÃO DAS LISTAS

Foz do Iguaçu-PR
2023

GUSTAVO BENITES WENCESLAU

RESOLUÇÃO DAS LISTAS

Tentarei resolver todas as questões das listas
Prof. Dr. Jonny Ardila Ardila.

Foz do Iguaçu-PR
2023

Sumário

Páginas

1 Lista I

1.1

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n^2)}{n}$

Primeiro devemos testar se a sequência a_n é decrescente, para isso relacionamos a sequência a uma função $f(x)$ tq: $a_n = f(n), \forall\, n \in \mathbb{N}$ e derivar para fazer a analise do sinal:

$$f(x) = \frac{\ln(x^2)}{x}$$
$$f'(x) = \frac{2 - 2\ln(x)}{x^2}$$
$$f'(e) = 0$$

Fazendo a analise do sinal vemos que para $x \geq e$, $f'(x) \leq 0$, como n começa em 2 temos que para $n \geq 2$, $f(n)$ é decrescente logo podemos aplicar o teste da integral na série para testar a convergência.

$$\sum_{n-2}^{\infty} \frac{\ln(n^2)}{n} \geq \int_{2}^{\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} dx$$
$$\int \frac{\ln(x^2)}{x} dx = 2\int \frac{\ln(x)}{x} = 2\left[\ln(x)^2 - \int \frac{\ln(x)}{x} dx\right]$$
$$\int \frac{\ln(x^2)}{x} dx = \ln(x)^2 \Rightarrow \int_{2}^{\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} dx = \ln(x)^2\Big|_2^{\infty} = \infty$$

A série diverge!!!

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^4}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^4} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \geq \int_{1}^{\infty} \frac{1}{(3x-1)^4} dx$$
$$\int \frac{1}{(3x-1)^4} dx = \frac{-1}{9(3x-1)^3}$$
$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{(3x-1)^4} = -\frac{1}{9}\left[\frac{1}{(3x-1)^3}\right]\Bigg|_1^{\infty} = \frac{1}{72}$$

A série converge!!!

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-4}{n^2-2n+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-4}{n^2-2n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \geq \int_2^{\infty} \frac{x-4}{x^2-2x+1} dx$$

$$\int \frac{x-1}{x^2-2x+1} dx = \ln|x-1| + \frac{3}{x-1}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{x-4}{x^2-2x+1} dx = \left[\ln|x-1| + \frac{3}{x-1}\right]\Big|_2^{\infty} = \infty$$

Diverge!!!

1.2 $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^p}$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^p}$$

$$p \neq 1$$

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^p} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^p} = \int_{\ln 2}^{\infty} u^{-u} du$$

$$\int_{\ln 2}^{\infty} u^{-u} du = \frac{u^{1-p}}{1-p}$$

$$\alpha = 1 - p$$

$$p < 1 \rightarrow \alpha > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{u^{\alpha}}{\alpha}\Big|_{\ln 2}^{\infty} = \infty$$

Diverge para $p < 1$!!!

$$p > 1 \rightarrow \alpha < 0 \Rightarrow \frac{u^{1-p}}{1-p}\Big|_{\ln 2}^{\infty} = \frac{1}{\alpha u^{\alpha}}\Big|_{\ln 2}^{\infty} = \frac{1}{\alpha(\ln 2)^{\alpha}}$$

Converge para $p > 1$!!!

Agora vamos ver para $p = 1$

$$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)}$$

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \rightarrow$$

$$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u} = \ln u \Big|_{\ln 2}^{\infty} = \infty$$

A integraldiverge para $p = 1$

Com esse resultado podemos dizer que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ converge apenas para $p > 1$

1.3

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+4}{n^2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+4}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{x}+4}{x^2}$$

Como x^2 é um polinomio de grau maior que $\sqrt{x}+4$, então $f(x)$ é decrescente e positivo por ser uma função par, então o teste da integral se aplica para testar a convergência da série.

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}+4}{x^2} dx = \int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{4}{x^2} dx$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{4}{x^2} dx = \int_{0}^{\infty} x^{-\frac{3}{2}} dx + 4 \int_{0}^{\infty} x^{-2} dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{-2}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x} \right] \Big|_{0}^{\infty} = \infty$$

Como a integral diverge a série também diverge!!

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+2}$$

Por comparação vou utilizar o teste do limite se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$ então a_n e b_n convergem e divergem juntos, sendo:

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 2n + 2}, \quad b_n = \frac{1}{n^2}$$

Temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+2n+2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n + 2} = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Converge, logo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + 2}$$

Converge!!!

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

Por se tratar de uma sequência positiva e decrescente podemos usar o teste da integral

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \geq \int_{2}^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$\int_{\ln 2}^{\infty} = \ln u \Big|_{\ln 2}^{\infty} = \infty$$

A série diverge!!!

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{x^4+1} dx, u = x^2 \Rightarrow 2x$$

$$\int_2^{\infty} \frac{2x}{2(x^4+1)} dx = \frac{1}{2} \int_4^{\infty} \frac{du}{u^2+1}$$

$$\frac{1}{2} \int_4^{\infty} \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2} \left[\arctan(u)\right] \Big|_4^{\infty} =$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan(4)\right]$$

A série é converge!!!

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3+1}$

se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$, então se b_n converge ou diverge a_n converge ou diverge junto

$$a_n = \frac{n-1}{n^3+1}, \quad b_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-1}{n^3+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-n^2}{n^3+1} = 1$$

Como $\sum b_n$ converge por ser uma séri p, onde $p > 1$, a série $\sum a_n$, também converge!!

f) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \operatorname{sen}^2(k)}{1+k^3}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \operatorname{sen}^2(k)}{1+k^3}$$

$$\operatorname{sen}^2(k) \leq 1$$

$$k \operatorname{sen}^2(k) \leq k$$

$$\frac{k \operatorname{sen}^2(k)}{1+k^3} \leq \frac{k}{1+k^3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \operatorname{sen}^2(k)}{1+k^3} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{1+k^3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{k}{1+k^3}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{k^3}{1+k^3} = 1$$

Como $\sum \frac{1}{k^2}$ converge $\sum \frac{k}{1+k^3}$ também converge!!!

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \geq \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$\operatorname{tg}\theta = x \to dx = \sec^2\theta d\theta$$

$$\sec\theta = \sqrt{x^2+1}$$

$$\int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta} d\theta = \int \sec\theta d\theta = \int \sec\theta \frac{\operatorname{tg}\theta + \sec\theta}{\operatorname{tg}\theta + \sec\theta} d\theta$$

$$\int \frac{\operatorname{tg}\theta + \sec^2\theta}{\operatorname{tg}\theta + \sec\theta} d\theta$$

$$u = \operatorname{tg}\theta + \sec\theta \to du = (\sec^2\theta + \sec\theta \operatorname{tg}\theta) d\theta$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln u = \ln|\tan\theta + \sec\theta| = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|\Big|_1^{\infty} = \infty$$

Logo a série diverge!!!

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4^n}{n+6^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4^n}{n+6^n}$$

$$\frac{n+4^n}{n+6^n} \leq \frac{n+4^n}{6^n} \leq \frac{2(4^n)}{6^n}$$

Podemos usar o teste da raiz para ver se a série que vamos comparar converge, caso convirja todas as séries menores convergem.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2(4^n)}{6^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{4}{6}\sqrt[n]{2}\right| = \frac{4}{6}$$

Como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} < 1$ a série converge.
Por comparação $\sum_n \frac{n+4^n}{n+6^n}$ Converge!!!

i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} f(n)$$

$$\int_2^{\infty} f(x)dx < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}} < a_2 + \int_2^{\infty} f(x)dx$$

$$\int_2^{\infty} f(x)dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx \left| \begin{array}{c} \sec\theta = x \\ dx = \sec\theta \operatorname{tg}\theta d\theta \\ \operatorname{tg}\theta = \sqrt{x^2+1} \end{array} \right.$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{\sec\theta \operatorname{tg}\theta}{\sec\theta \operatorname{tg}\theta}d\theta$$

$$\int d\theta = \theta = \operatorname{arccos}^{-1} x$$

$$\Rightarrow \int_2^{\infty} f(x)dx = \operatorname{arccos}^{-1}(x)\Big|_2^{\infty} = \operatorname{arccos}^{-1}(\infty) - \operatorname{arccos}^{-1}(2)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

Logo pelo teste da integral a série converge!!

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Vou usar o teste de D'Alembert $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ a série é convergente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)n!}{(n+1)^n(n+1)}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{(n+1)^n}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1-1}$$

$$u = n+1, n \to \infty, u \to \infty$$

$$\lim_{u\to\infty} \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{u-1} = \lim_{u\to\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{u}\right)^u}{\left(1 - \frac{1}{u}\right)} = \frac{\lim_{u\to\infty} \left(1 - \frac{1}{u}\right)^u}{\lim_{u\to\infty} \left(1 - \frac{1}{u}\right)}$$

$$\frac{\lim_{u\to\infty} \left(1 - \frac{1}{u}\right)^u}{1} = \lim_{u\to\infty} \left(1 - \frac{1}{u}\right)^u = \lim_{u\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{u}\right)^u =$$

$$= e^{-1} < 1$$

Logo a série converge!

k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{10^n}$

Vou usar o teste de Cauchy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ a série é convergente.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{n}{10^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\sqrt[n]{n}}{10}\right| = \frac{1}{10} < 1$$

Logo a série é convergente!!

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(n\pi)}{2^n}$

Podemos dizer que a sequência $c_n = \frac{n\cos(n\pi)}{2^n}$ é o produto de duas séries $a_n = \frac{n}{2^n}$ e $b_n = \cos(n\pi)$. Vamos analisar a sequência b_n

$$b_0 = 1$$

$$b_1 = -1$$

$$b_2 = 1$$

$$b_3 = -1$$

$$b_n = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

Então como podemos escrever c_n como $a_n \times b_n$ e $b_n = (-1)^n$, então $c_n = (-1)^n \frac{n}{2^n}$. Usando o teste de Cauchy para determinar a convergência da série temos:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{n}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\sqrt[n]{n}}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

Logo fica claro que a série converge!!

m) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n e^{-n}$

Novamente pelo teste de Cauchy é fácil provar a convergência da série.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^{n+1} n e^{-n}\right|} = \lim_{n\to\infty} e^{-1} \sqrt[n]{n} = e^{-1} < 1$$

Logo a série é convergente!!

n) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 0 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$b_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \to \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n b_n = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n f(n)$$

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{-\pi}{x^2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) = \frac{-\pi \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x^2}$$

$$f'(x) \leq 0 \qquad \forall x \in [2, \infty[$$

O que siguinifica que a série é descrescente para $n > 2$

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 0$$

Pelo teste Leibniz a série é convergente!!!

o) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$$a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = f(n)$$
$$f(x) = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$f'(x) < 0 \qquad \forall\, x \in]0,\infty[$$

Logo a_n é decrescente

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

Pelo teste de Leibniz a série é convergente!!

1.4 Encontre os valores de p para os quais a série converge.

a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$

Para $p = 0$ temos $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ que é divergente.
Para $p < 0$ temos que:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{-p}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^p}{n}$$
$$\frac{(\ln n)^p}{n} \geq \frac{1}{n}$$

Como a série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge por teste de comparação a série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^p}{n}$ diverge!!
Agora para $p > 0$, temos que a série é descrescente, então podemos aplicar o teste da integral

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p} \qquad \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{array} \right.$$
$$\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{du}{u^p} = \left.\frac{u^{1-p}}{1-p}\right|_{\ln 2}^{\infty}$$

Se $0 < p \leq 1$ temos que a série diverge, pois tomando $\alpha = 1-p \to \alpha > 0$

$$\left.\frac{u^{\alpha}}{\alpha}\right|_{\ln 2}^{\infty} = \infty$$

Se $p > 1$ temos que a série CONVERGE, pois temos $\alpha < 0$

$$\left.\frac{1}{\alpha u^{\alpha}}\right|_{\ln 2}^{\infty} = \frac{-1}{\alpha(\ln 2)^{\alpha}}$$

Portanto chegasse a conclusão que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ converge para $p > 1$!!!

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(1+n^2\right)^p$

Para $p \geq 0$ temos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, então diverge. Agora para $p < 0$ temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(1+n^2\right)^p}$$

Usando o teste de D'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{(1+n^2)^p}}{\frac{1}{n^p}} = 1$$

Sabe que a série hârmonica $\sum_n \frac{1}{n^p}$ corvege apenas para $p > 1$, podemos dizer então que a série $\sum_n n\left(1+n^2\right)^p$ converge $\forall\ p \in]1, \infty[$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

Para $p > 0$ temos que a série converge, por se tratar de uma série hârmonica alternada que é sabido que converge.
Para $p = 0$ temos $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ que diverge.
Para $p < 0$ temos $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^p$ como $\lim_{n\to\infty} n^p = \infty$, temos que a série diverge.
Portanto temos que a série converge apenas para $p \in [1, \infty[$

d) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\ln n)^p}{n}$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^p}{n} = 0$, precisamos achar para quais valores de p a sequência $\frac{(\ln n)^p}{n}$ é decrescente. Tomando uma função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tq $a_n = \frac{(\ln n)^p}{n} = f(n),\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ então temos que:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(\ln x)^p}{x} \\ f'(x) &= \frac{p(\ln x)^{p-1} - (\ln x)^p}{x^2} \\ f'(x) &< 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &\frac{p(\ln x)^{p-1} - (\ln x)^p}{x^2} < 0 \Rightarrow \\ &p(\ln x)^{p-1} - (\ln x)^p < 0 \\ &p < \frac{(\ln x)^p}{(\ln x)^{p-1}} \Rightarrow \\ &p < \ln x \\ &x > e^p \end{aligned}$$

O que é provado nas equações anteriores é que a função (portanto a sequência) começa a decrescer a partir de um número que depende de p, em razão da série começar com $n = 2$ queremos que a função seja decrescente para $x \leq 2$ substituindo na expressçao anterior temos:

$$\begin{gathered} 2 \geq x > e^p \;\Rightarrow\; 2 > e^p \\ \ln 2 > \ln e^p \\ p < \ln 2 \end{gathered}$$

Então pelo teste de Leibniz a série converge para $p \in]-\infty, \ln 2[$

1.5 Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-2n}$ com precisão de 4 casa decimais.

Corrigir essa conta usando o método mostrado pelo professor.

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-2n} = \sum_{n=1}^{N} ne^{-2n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} ne^{-2n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-2n} - \sum_{n=1}^{N} ne^{-2n} = \sum_{n=N+1}^{\infty} ne^{-2n}$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} ne^{-2n} < 0,0001$$

$$\int_{N+1}^{\infty} xe^{-2x}dx \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} ne^{-2n} \leq \int_{N}^{\infty} xe^{-2x}dx$$

$$\int_{N}^{\infty} xe^{-2x}dx \quad \left| \begin{aligned} u &= -2x \\ du &= -2dx \end{aligned} \right.$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-2N}^{-\infty} \frac{-u}{2}e^{u}du = \frac{1}{4}\int_{-2N}^{-\infty} ue^{u}du$$

$$\begin{array}{l|l} w = u & dv = e^{u}du \\ dw = du & v = e^{u} \end{array}$$

$$\frac{1}{4}\int_{-2N}^{-\infty} ue^{u}du = \frac{1}{4}\left[ue^{u}\Big|_{-2N}^{-\infty} - \int_{-2N}^{-\infty} e^{u}du \right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[ue^{u} - e^{u}\right]\Big|_{-2N}^{-\infty}$$

$$u = -2x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\left[-2xe^{-2x} - e^{-2x}\right]\Big|_{N}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{4}\left[2Ne^{-2N} + e^{-2N}\right]$$

$$= \frac{2N+1}{4e^{2N}}$$

Temos que $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} ne^{-2n}$ precisa ser menor que $0,0001$, como:

$$\int\limits_{N+1}^{\infty} xe^{-2x}dx \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} ne^{-2n} \leq \int\limits_{N}^{\infty} xe^{-2x}dx$$

Então temos que fazer:

$$\int\limits_{N}^{\infty} xe^{-2x}dx < 0,0001$$

$$\int\limits_{N}^{\infty} xe^{-2x}dx = \frac{2N+1}{4e^{2N}}$$

$$\Rightarrow \frac{2N+1}{4e^{2N}} < 0,0001$$
$$\Rightarrow (2N+1)e^{-2N} < 0,0004$$
$$\Rightarrow (-2N-1)e^{-2N} > -0,0004$$
$$\Rightarrow (-2N-1)e^{-2N-1} > -0,0004e^{-1}$$

Usando a Função W de Lambert:

$$-2N-1 > W_0\left(-0,0004e^{-1}\right) \quad \text{ou} \quad -2N-1 > W_{-1}\left(-0,0004e^{-1}\right)$$

Então

$$N < -\frac{1}{2} - \frac{W_0\left(-0,0004e^{-1}\right)}{2} \quad \text{ou} \quad N < -\frac{1}{2} - \frac{W_{-1}\left(-0,0004e^{-1}\right)}{2}$$

Colando em um calculadora temos:

$$-\frac{1}{2} - \frac{W_0\left(-0,0004e^{-1}\right)}{2} \approx -0.4999264133$$
$$-\frac{1}{2} - \frac{W_{-1}\left(-0,0004e^{-1}\right)}{2} \approx 5.121935$$

Logo $\rightarrow$

$$N \lessapprox -0.499926413 \quad \text{ou} \quad N \lessapprox 5.121935$$

Como N é um numero natural descartamos o resultado negativo e como $N < 5.121935$ temos então que $N = 5$