Segunda Lista de Física Matemática

1. Dada a sequência de funções $f_n = x^n$, com $x \in [-1/2, 1/2]$. Mostre que para um dado número real $\epsilon > 0$ podemos encontrar um natural n_0, tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |x^n| < \epsilon$$

Encontre a relação entre n_0 e ϵ. O que isso significa?

2. Mostre que

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

com $|x| < 1$

3. Mostre que $e^x = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$, com raio de convergência infinito.

4. Determine para quais valores de x as seguintes séries são convergentes:

a) $\sum_1^\infty n \frac{x^n}{3^n}$

b) $\sum_0^\infty \frac{(-3x)^n}{\sqrt{n+1}}$

c) $\sum_2^\infty \frac{x^n}{\ln(n)}$

Exercícios envolvendo prova de teoremas(opcional)

5. Prove que um sequência de funções é uniformemente convergente se, e somente se, for uma sequência de Cauchy.

6. MOstre que uma série de funções $\sum f_n$ com domínio B converge uniformemente se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um natural n_0, tal que

$$\left| \sum_{k=n}^{m} f_k \right| < \epsilon, \forall m > n \geq n_0, \forall x \in B$$

7. Estude e demonstre o Teste M de Weierstrass para convergência uniforme de série de fuções.