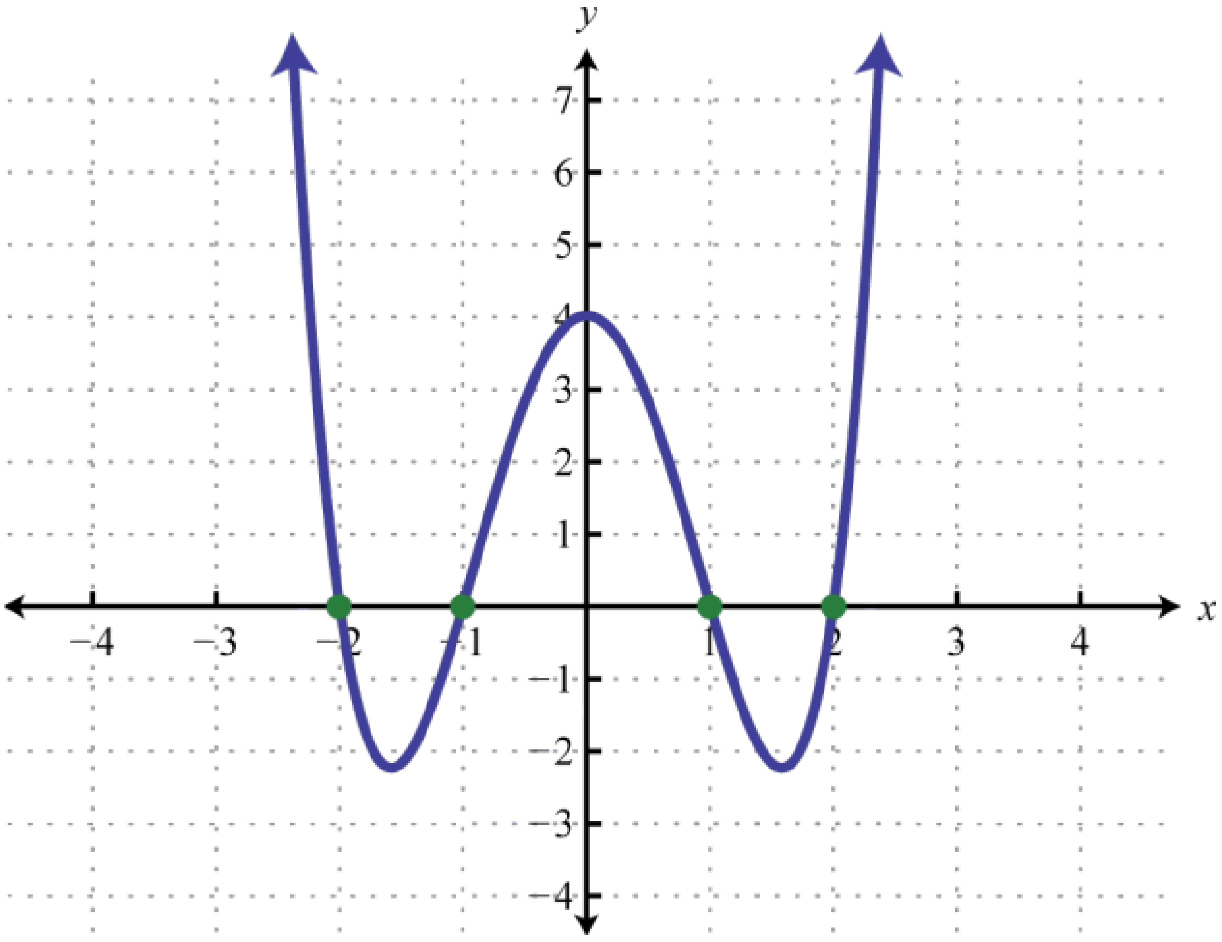
# Funções

# O que é uma Função?

# Funções, Edição Ensino Médio




$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

# Funções, Edição Ensino Médio

- No ensino médio, as funções são geralmente dadas como objetos da forma

$$f(x) = \frac{x^3+3x^2+15x+7}{1-x^{137}}$$

- O que uma função faz?
  - Ela recebe como entrada um número real.
  - Ela produz como saída um número real.
  - Exceto quando há assíntotas verticais ou outras descontinuidades, caso em que a função não produz nada.

# Funções, Edição Ciência da Computação

```
int flipUntil(int n) {
    int numHeads = 0;
    int numTries = 0;

    while (numHeads < n) {
        if (randomBoolean()) numHeads++;

        numTries++;
    }

    return numTries;
}
```

# Funções, Edição Ciência da Computação

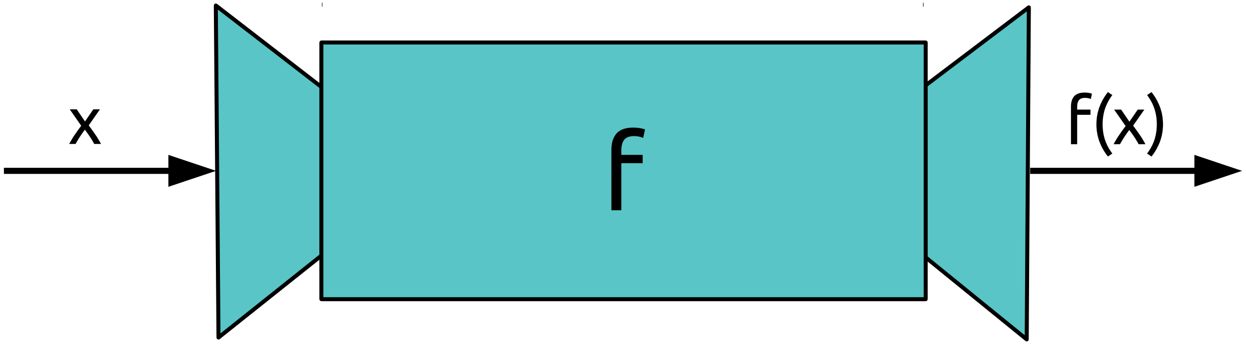
- Na programação, as funções:
  - podem receber entradas,
  - podem retornar valores,
  - podem ter efeitos colaterais,
  - podem nunca devolver nada,
  - podem falhar (crash), e
  - podem retornar valores diferentes quando chamada várias vezes.

## O que há em Comum?

- Embora as funções matemáticas do ensino médio e as funções de Ciência da Computação sejam bastante diferentes, elas têm dois aspectos principais em comum:
  - Eles recebem entradas.
  - Elas produzem saídas.
- Em matemática, gostamos de manter as coisas fáceis, então é assim que vamos definir uma função.

# Idéia aproximada de uma Função

- Uma função é um objeto f que recebe uma entrada e produz exatamente uma saída.



# Funções Ensino Médio vs CC

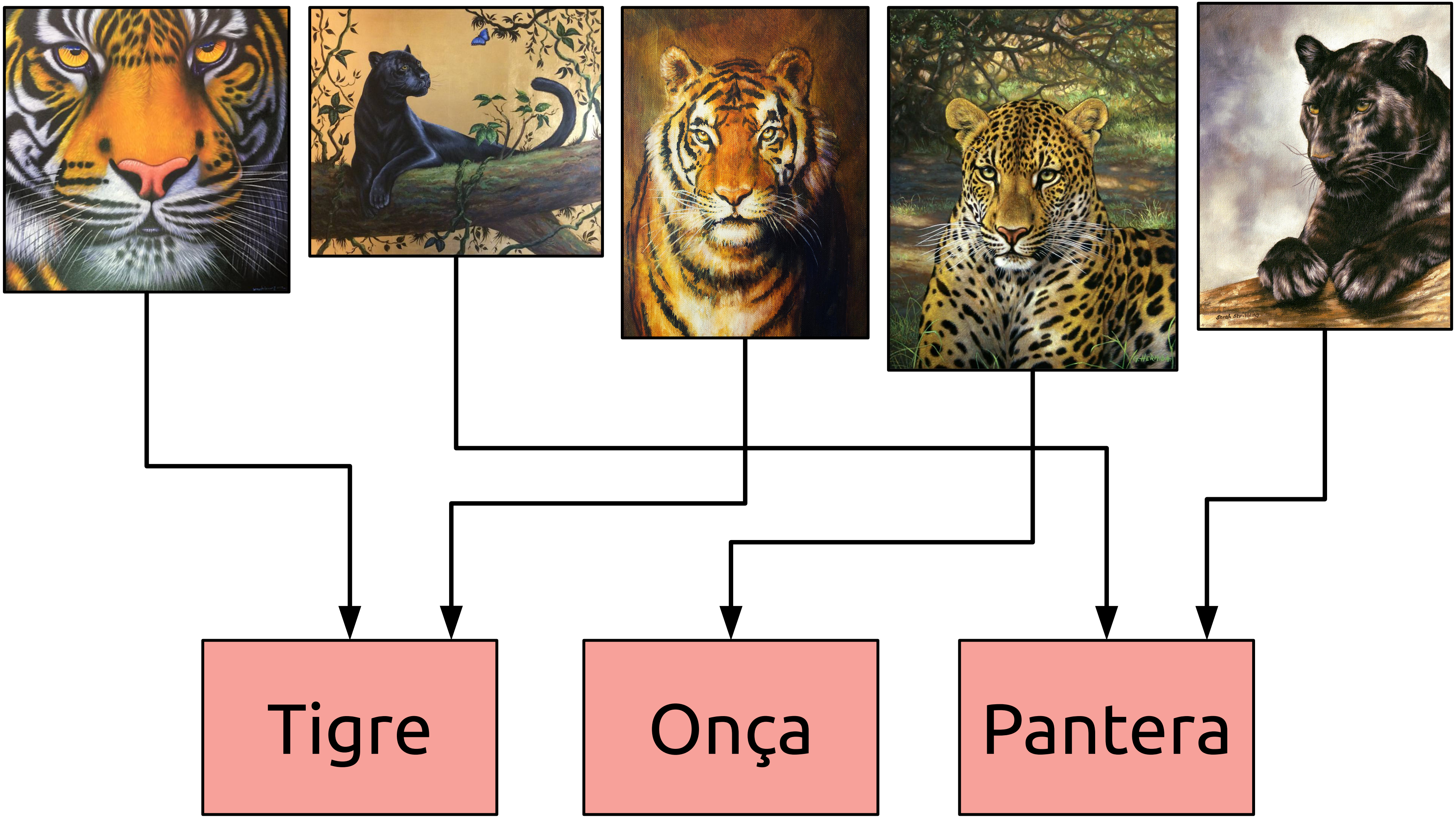
- No ensino médio, as funções geralmente eram dadas por uma regra:

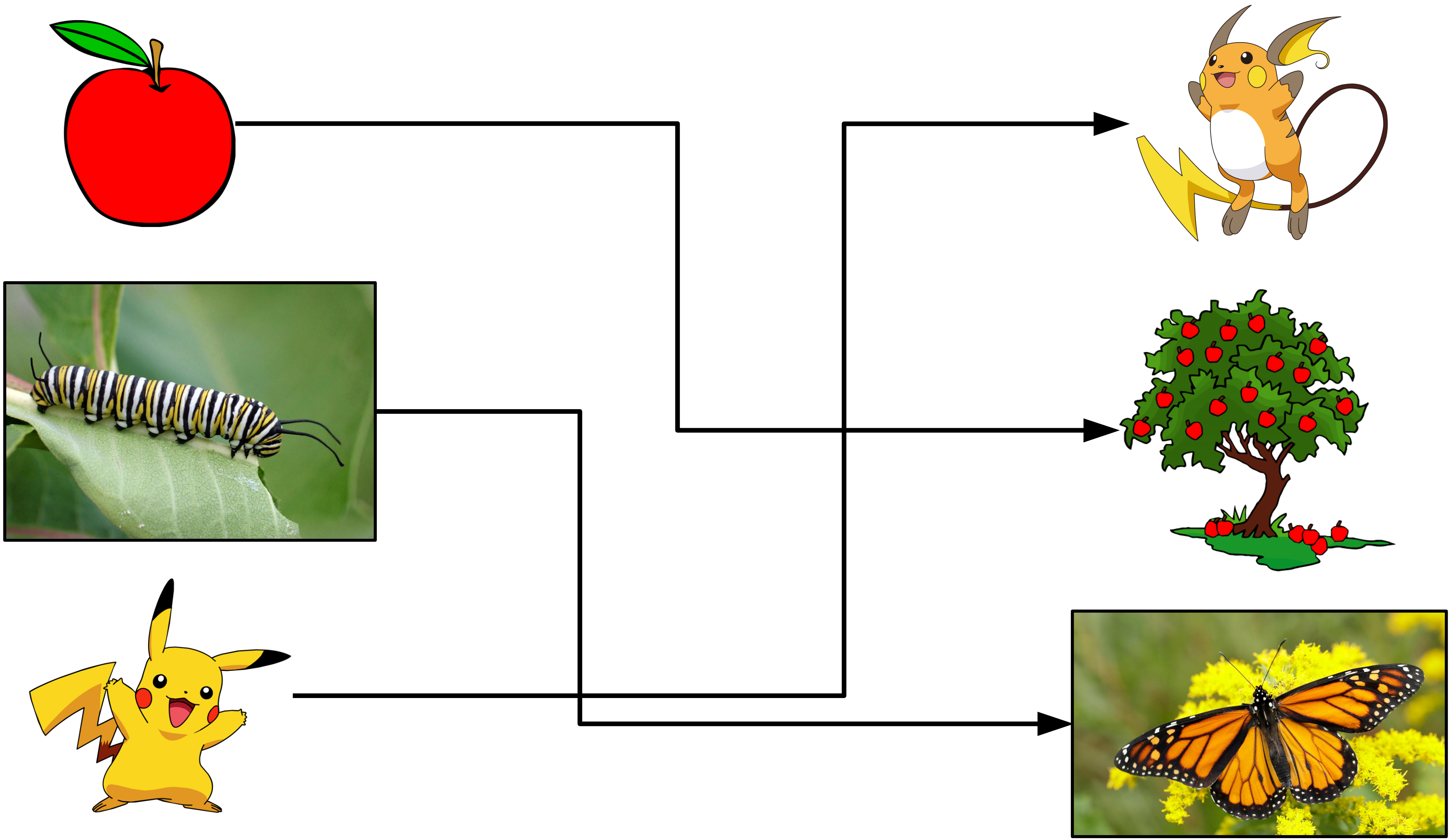
  $f(x) = 4x + 15$

- Na Ciência da Computação, as funções geralmente são fornecidas por código:

```
int factorial(int n) {
    int result = 1;
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        result *= i;
    }
    return result;
}
```

Que tipo de funções permitiremos de uma perspectiva matemática?


Tigre
Onça
Pantera



Mas também...

$$f(x) = x^2 + 3x - 15$$

$$f(n) = \begin{cases} -n/2 & \text{se n for par} \\ (n+1)/2 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Funções como essas são chamadas de **funções por partes**.

Para definir uma função, você normalmente irá:

- desenhar uma imagem, ou
- fornecer uma regra para determinar a saída.

Em matemática, as funções são **determinísticas**.

Ou seja, dada a mesma entrada, uma função deve sempre produzir a mesma saída.

A seguir temos uma parte perfeitamente válida do código C++, mas não é uma função válida em nossa definição:

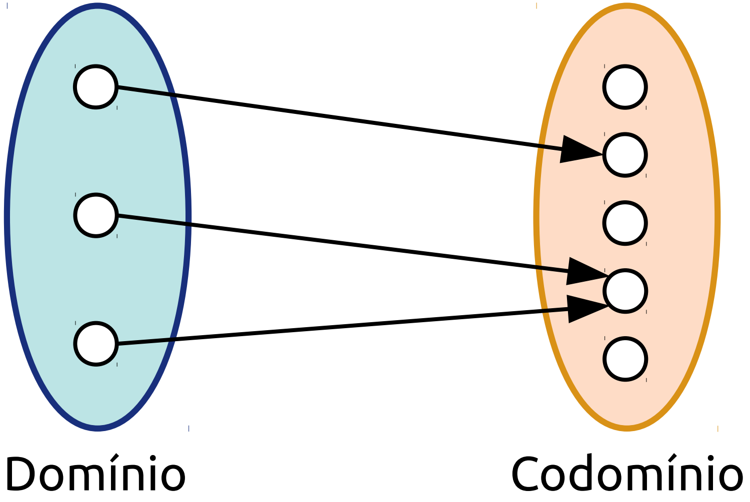
```
int randomNumber(int numOutcomes) {
    return rand() % numOutcomes;
}
```

**Precisamos ter certeza de que não podemos aplicar funções a entradas sem sentido.**

# Domínios e Codomínios

- Toda função f tem dois conjuntos associados a ela: seu **domínio** e seu **codomínio**.
- Uma função f só pode ser aplicada a elementos de seu domínio. Para qualquer x no domínio, f(x) pertence ao codomínio.

A função deve ser definida para cada elemento do domínio.




A saída da função deve estar sempre no codomínio, mas nem todos os elementos do codomínio devem ser produzidos como saídas.

# Domínios e Codomínios

- Toda função f tem dois conjuntos associados a ela: seu **domínio** e seu **codomínio**.
- Uma função f só pode ser aplicada a elementos de seu domínio. Para qualquer x no domínio, f(x) pertence ao codomínio.

```
private double absoluteValueOf(double x) {
    if (x >= 0) {
        return x;
    } else {
        return -x;
    }
}
```

O domínio desta função é $\mathbb{R}$. Qualquer número real pode ser fornecido como entrada

O codomínio desta função é $\mathbb{R}$. Tudo o que é produzido é um número real, mas nem todos os números reais podem ser produzidos.

# Domínios e Codomínios

- Se f é uma função cujo domínio é A e cujo codomínio é B, escrevemos **f : A → B**.
- Essa notação apenas diz quem são o domínio e o codomínio da função. Não diz como a função é avaliada.
- Pense nisso como um "protótipo de função" em C ou C++. A notação f: ArgType → RetType é como escrever

```
RetType f(ArgType argument);
```

- Sabemos que f recebe um ArgType e retorna um RetType, mas não sabemos exatamente qual RetType ele retornará para um determinado ArgType.

# As Regras Oficiais para Funções

- Falando formalmente, dizemos que $f: A \to B$ se as duas regras a seguir forem válidas.
- Primeiro, $f$ deve obedecer às suas regras de domínio/codomínio:

  $$\forall a \in A.\ \exists b \in B.\ f(a) = b$$

  ("Cada entrada em A mapeia para alguma saída em B.")
- Em segundo lugar, $f$ deve ser determinístico:

  $$\forall a_1 \in A.\ \forall a_2 \in A.\ (a_1 = a_2 \to f(a_1) = f(a_2))$$

  ("Entradas iguais produzem saídas iguais.")
- Se você está curioso para saber se algo é uma função, reveja essas regras e verifique! Por exemplo:
  - Uma função pode ter um domínio vazio?
  - Uma função com um domínio não vazio pode ter um codomínio vazio?

# Definindo Funções

- Normalmente, especificamos uma função descrevendo uma regra que mapeia cada elemento do domínio para algum elemento do codomínio.
- Exemplos:
  - $f(n) = n + 1$, onde $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$
  - $f(x) = \sin x$, onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
  - $f(x) = \lceil x \rceil$, onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$
- Observe que estamos fornecendo uma regra e o domínio/codomínio.

# Definindo Funções

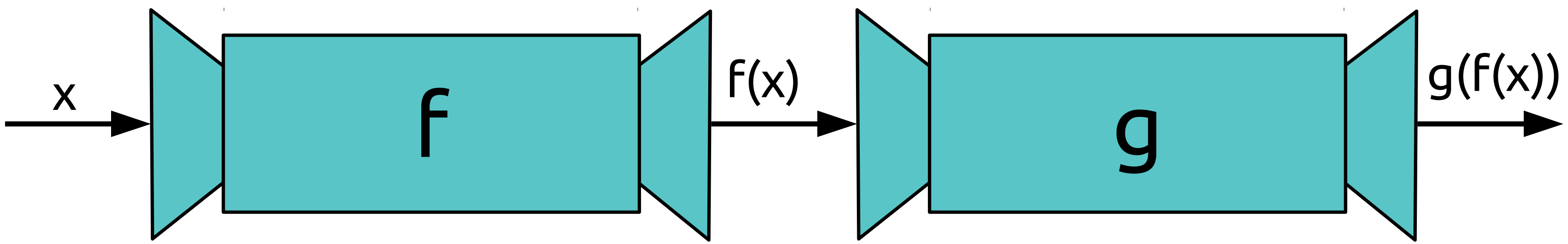
- Normalmente, especificamos uma função descrevendo uma regra que mapeia cada elemento do domínio para algum elemento do codomínio.
- Exemplos:
  - $f(n) = n + 1$, onde $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
  - $f(x) = \sin x$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - $f(x) = \lceil x \rceil$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$
- Observe que estamos fornecendo uma regra e o domínio/codomínio.

Esta é a função de ceiling -
o menor inteiro maior ou igual a x.
Por exemplo, $\lceil 1 \rceil = 1$, $\lceil 1.37 \rceil = 2$, $\lceil \pi \rceil = 4$.

# Combinando Funções

# Composição de Função

- Suponha que temos duas funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$.
- Observe que o codomínio de $f$ é o domínio de $g$. Isso significa que podemos usar as saídas de $f$ como entradas para $g$.



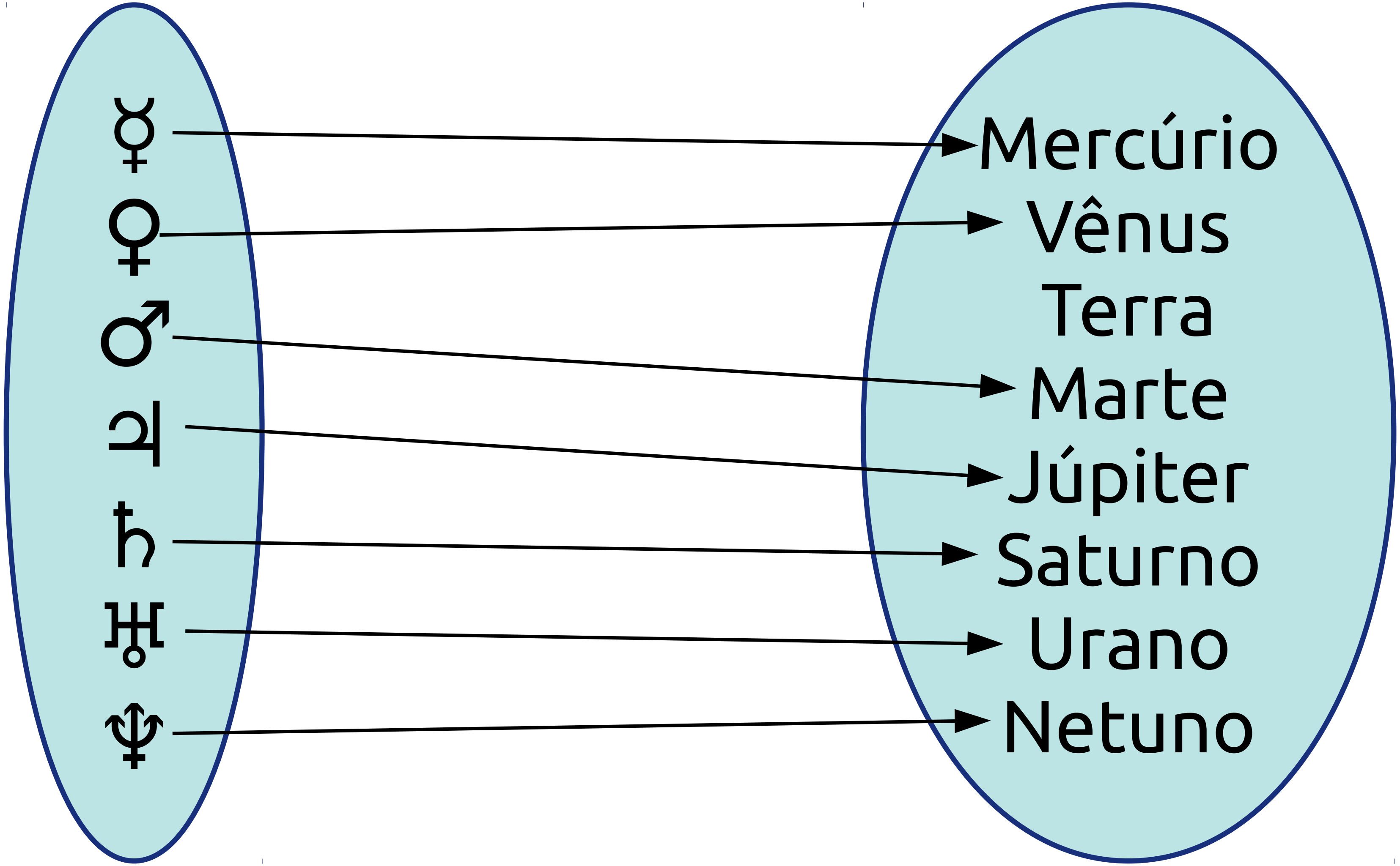
# Composição de Função

- Suponha que temos duas funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$.
- A **composição de f e g**, denotada por $g \circ f$, é uma função onde
  - $g \circ f : A \to C$, e
  - $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

O nome da função é $g \circ f$.
Quando o aplicamos a uma entrada x, escrevemos $(g \circ f)(x)$.

- Algumas coisas a serem observadas:
  - O domínio de $g \circ f$ é o domínio de f. Seu codomínio é o codomínio de g.
  - Mesmo que a composição seja escrita $g \circ f$, ao avaliar $(g \circ f)(x)$, a função f é avaliada primeiro.

# Tipos Especiais de Funções


☿
♀
♂
♃
♄
♅
♆
Mercúrio
Vênus
Terra
Marte
Júpiter
Saturno
Urano
Netuno

# Funções Injetivas

- Uma função $f: A \to B$ é chamada **injetiva** (ou **um-para-um**) se a seguinte afirmação for verdadeira sobre f:

  $$\forall a_1 \in A.\ \forall a_2 \in A.\ (a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2))$$

  ("Se as entradas são diferentes, as saídas são diferentes.")

- A seguinte definição de primeira ordem é equivalente e freqüentemente útil em provas.

  $$\forall a_1 \in A.\ \forall a_2 \in A.\ (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$$

  ("Se as saídas são as mesmas, as entradas são as mesmas.")

- Uma função com essa propriedade é chamada de **injeção**.
- Como isso se compara à nossa segunda regra para funções?

# Funções Injetivas

**Teorema:** Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definido como $f(n) = 2n + 7$. Então $f$ é injetivo.

**Prova:**

O que significa a função $f$ ser injetiva?

$$\forall n_1 \in \mathbb{N}.\ \forall n_2 \in \mathbb{N}.\ (f(n_1) = f(n_2) \to n_1 = n_2)$$

$$\forall n_1 \in \mathbb{N}.\ \forall n_2 \in \mathbb{N}.\ (n_1 \neq n_2 \to f(n_1) \neq f(n_2))$$

Portanto, escolheremos $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ arbitrário, onde $f(n_1) = f(n_2)$, e então provaremos que $n_1 = n_2$.

# Funções Injetivas

**Teorema:** Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definido como $f(n) = 2n + 7$. Então $f$ é injetivo.

**Prova:** Considere qualquer $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ onde $f(n_1) = f(n_2)$. Vamos provar que $n_1 = n_2$.

Como $f(n_1) = f(n_2)$, vemos que

$$2n_1 + 7 = 2n_2 + 7.$$

Isso, por sua vez, significa que

$$2n_1 = 2n_2$$

então $n_1 = n_2$, conforme necessário. ■

# Funções Injetivas

**Teorema:** Seja $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definido como $f(x) = x^4$. Então $f$ não é injetivo.

**Prova:**

O que significa a função $f$ não ser injetiva?

$$\forall x_1 \in \mathbb{Z}.\ \forall x_2 \in \mathbb{Z}.\ (x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2))$$

Qual a negação dessa declaração?

$$\neg\forall x_1 \in \mathbb{Z}.\ \forall x_2 \in \mathbb{Z}.\ (x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2))$$
$$\exists x_1 \in \mathbb{Z}.\ \neg\forall x_2 \in \mathbb{Z}.\ (x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2))$$
$$\exists x_1 \in \mathbb{Z}.\ \exists x_2 \in \mathbb{Z}.\ \neg(x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2))$$
$$\exists x_1 \in \mathbb{Z}.\ \exists x_2 \in \mathbb{Z}.\ \neg(x_1 \neq x_2 \land \neg(f(x_1) \neq f(x_2)))$$
$$\exists x_1 \in \mathbb{Z}.\ \exists x_2 \in \mathbb{Z}.\ (x_1 \neq x_2 \land f(x_1) = f(x_2))$$

Portanto, precisamos encontrar $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$
tal que $x_1 \neq x_2$, mas $f(x_1) = f(x_2)$. Podemos fazer isso?

# Funções Injetivas

**Teorema:** Seja $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definido como $f(x) = x^4$. Então $f$ não é injetivo.

**Prova:** Provaremos que existem inteiros $x_1$ e $x_2$ tais que $x_1 \neq x_2$, mas $f(x_1) = f(x_2)$.

Seja $x_1 = -1$ e $x_2 = +1$.

$$f(x_1) = f(-1) = (-1)^4 = 1$$

e

$$f(x_2) = f(1) = 1^4 = 1,$$

então $f(x_1) = f(x_2)$ mesmo que $x_1 \neq x_2$, conforme necessário. ■

# Injeções e Composição

# Injeções e Composição

- **Teorema:** Se $f : A \to B$ é uma injeção e $g : B \to C$ é uma injeção, então a função $g \circ f : A \to C$ é uma injeção.
- Nosso objetivo será comprovar esse resultado. Para fazer isso, teremos que voltar às definições formais de injetividade e composição de funções.

**Teorema:** Se $f : A \to B$ é uma injeção e $g : B \to C$ é uma injeção, então a função $g \circ f : A \to C$ também é uma injeção.

**Prova:** Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ injeções arbitrárias. Vamos provar que a função $g \circ f: A \to C$ também é injetiva.

Existem duas definições de injetividade que podemos usar aqui:

$$\forall a_1 \in A.\ \forall a_2 \in A.\ ((g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \to a_1 = a_2)$$

$$\forall a_1 \in A.\ \forall a_2 \in A.\ (a_1 \neq a_2 \to (g \circ f)(a_1) \neq (g \circ f)(a_2))$$

Portanto, vamos escolher um $a_1, a_2 \in A$ arbitrário, onde $a_1 \neq a_2$, então provar que $(g \circ f)(a_1) \neq (g \circ f)(a_2)$.

**Teorema:** Se $f : A \to B$ é uma injeção e $g : B \to C$ é uma injeção, então a função $g \circ f : A \to C$ também é uma injeção.

**Prova:** Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ injeções arbitrárias. Vamos provar que a função $g \circ f: A \to C$ também é injetiva. Para fazer isso, considere qualquer $a_1, a_2 \in A$ onde $a_1 \neq a_2$. Vamos provar que $(g \circ f)(a_1) \neq (g \circ f)(a_2)$. Equivalentemente, precisamos mostrar que $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$.

Como $(g \circ f)(x)$ é definido?

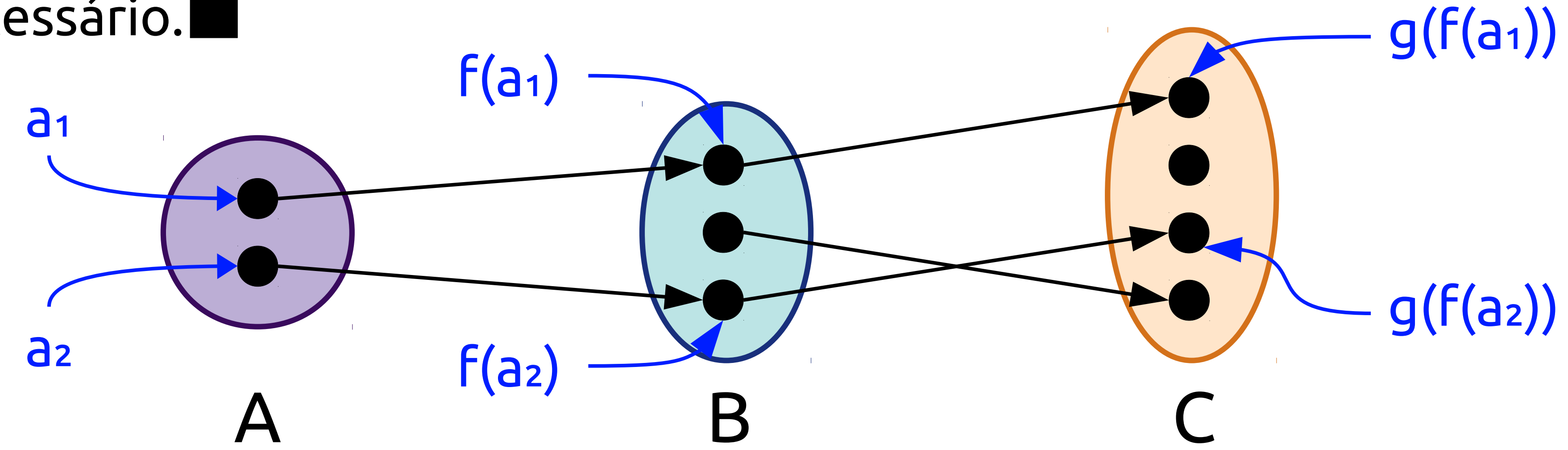
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Portanto, precisamos provar que $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$.

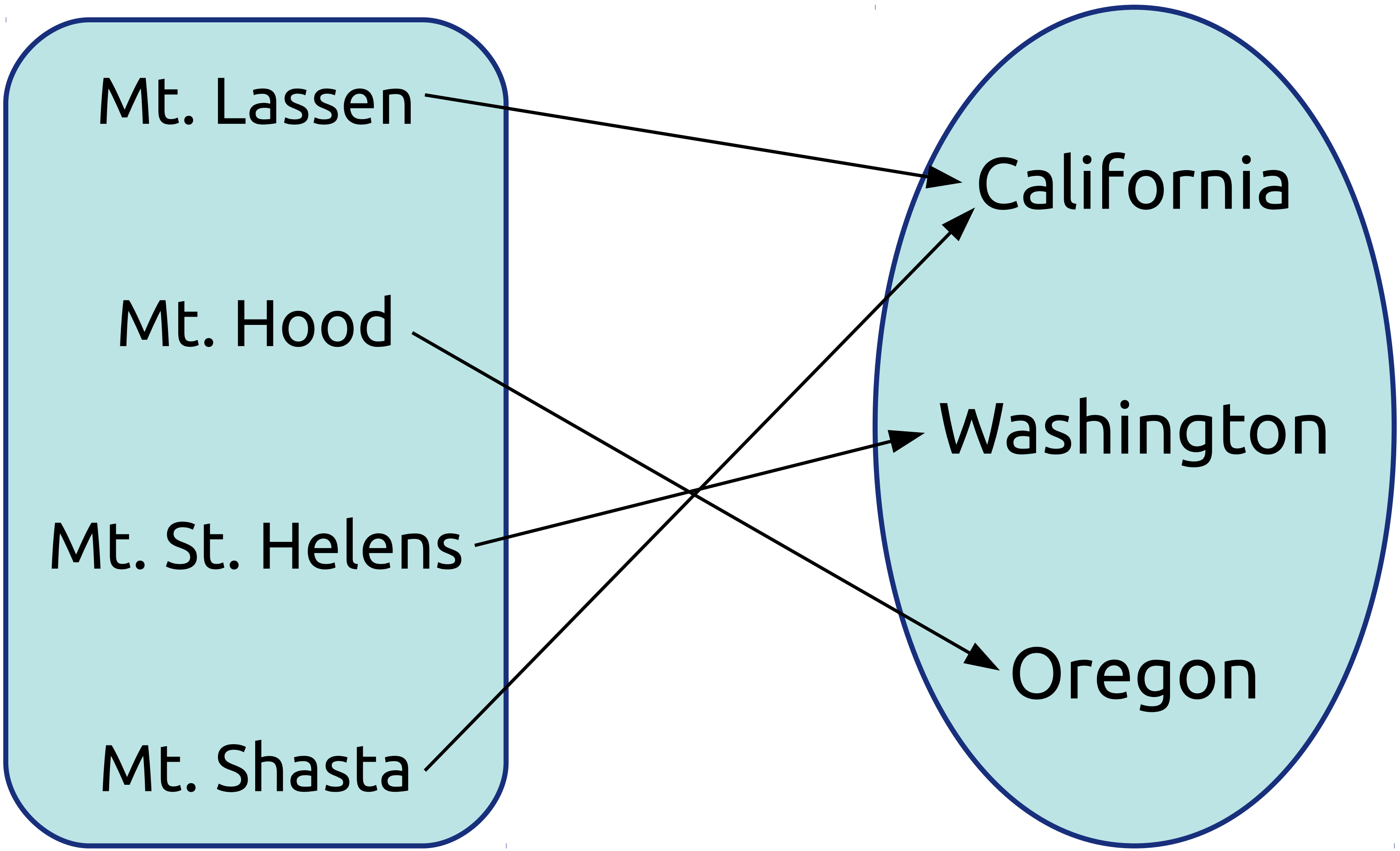
**Teorema:** Se $f : A \to B$ é uma injeção e $g : B \to C$ é uma injeção, então a função $g \circ f : A \to C$ também é uma injeção.

**Prova:** Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ injeções arbitrárias. Vamos provar que a função $g \circ f: A \to C$ também é injetiva. Para fazer isso, considere qualquer $a_1, a_2 \in A$ onde $a_1 \neq a_2$. Vamos provar que $(g \circ f)(a_1) \neq (g \circ f)(a_2)$. Equivalentemente, precisamos mostrar que $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$.

Como $f$ é injetiva e $a_1 \neq a_2$, vemos que $f(a_1) \neq f(a_2)$. Então, como $g$ é injetivo e $f(a_1) \neq f(a_2)$, vemos que $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$, conforme necessário.■



# Outra Classe de Funções


Mt. Lassen
Mt. Hood
Mt. St. Helens
Mt. Shasta
California
Washington
Oregon

# Funções Sobrejetivas

- Uma função $f : A \to B$ é chamada **sobrejetiva** (ou **onto**) se esta declaração lógica de primeira ordem for verdadeira sobre f:

  $$\forall b \in B.\ \exists a \in A.\ f(a) = b$$

  ("Para cada saída possível, há pelo menos uma entrada possível que a produz")
- Uma função com essa propriedade é chamada de **sobrejeção**.
- Como isso se compara à nossa primeira regra de funções?

# Funções Sobrejetivas

**Teorema:** Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido como $f(x) = x / 2$. Então $f(x)$ é sobrejetiva.

**Prova:**

O que significa f ser sobrejetivo?

$$\forall y \in \mathbb{R}.\ \exists x \in \mathbb{R}.\ f(x) = y$$

Portanto, vamos escolher um $y \in \mathbb{R}$ arbitrário e,
em seguida, provar que existe algum $x \in \mathbb{R}$ onde $f(x) = y$.

# Funções Sobrejetivas

**Teorema:** Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido como $f(x) = x / 2$. Então $f(x)$ é sobrejetiva.

**Prova:** Considere qualquer $y \in \mathbb{R}$. Vamos provar que existe uma escolha de $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$.

Seja $x = 2y$. Então nós vemos que

$$f(x) = f(2y) = 2y / 2 = y.$$

Portanto, $f(x) = y$, conforme necessário.■

# Compondo Sobrejeções

**Teorema:** Se $f : A \to B$ é sobrejetora e $g : B \to C$ é sobrejetora, então $g \circ f : A \to C$ também é sobrejetora.

**Prova:** Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ sobrejeções arbitrárias. Provaremos que a função $g \circ f : A \to C$ também é sobrejetora.

O que significa $g \circ f : A \to C$ ser sobrejetora?

$$\forall c \in C.\ \exists a \in A.\ (g \circ f)(a) = c$$

Portanto, escolheremos $c \in C$ arbitrário e provaremos que existe algum $a \in A$ tal que $(g \circ f)(a) = c$.

**Teorema:** Se $f : A \to B$ é sobrejetora e $g: B \to C$ é sobrejetora, então $g \circ f : A \to C$ também é sobrejetora.

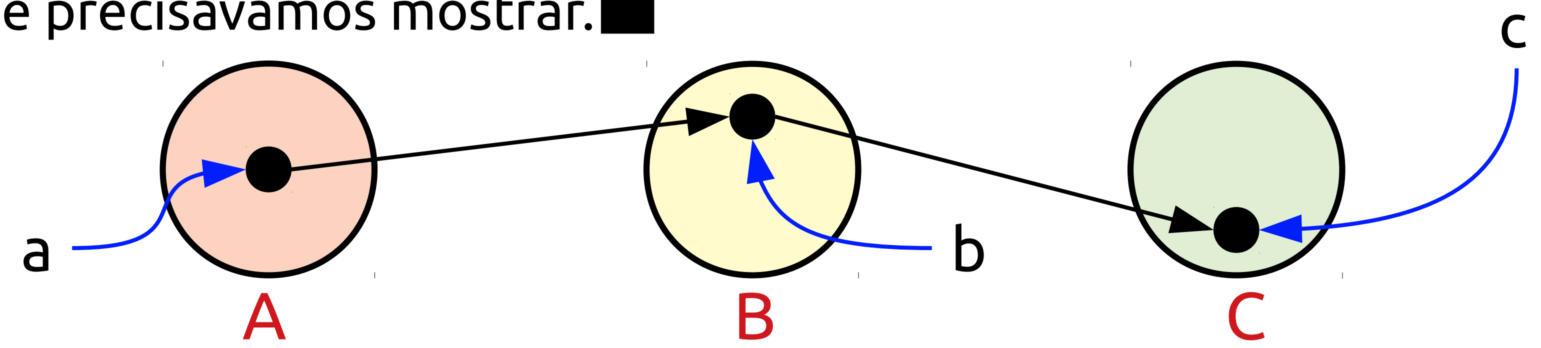
**Prova:** Sejam $f : A \to B$ e $g: B \to C$ sobrejeções arbitrárias. Provaremos que a função $g \circ f : A \to C$ também é sobrejetora.

Para fazer isso, vamos provar que para qualquer $c \in C$, existe algum $a \in A$ tal que $(g \circ f)(a) = c$. De forma equivalente, provaremos que para qualquer $c \in C$, existe algum $a \in A$ tal que $g(f(a)) = c$.

Considere qualquer $c \in C$. Como $g : B \to C$ é sobrejetora, existe algum $b \in B$ tal que $g(b) = c$. Da mesma forma, como $f : A \to B$ é sobrejetora, existe algum $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Isso significa que existe algum tipo de $\in A$ tal que

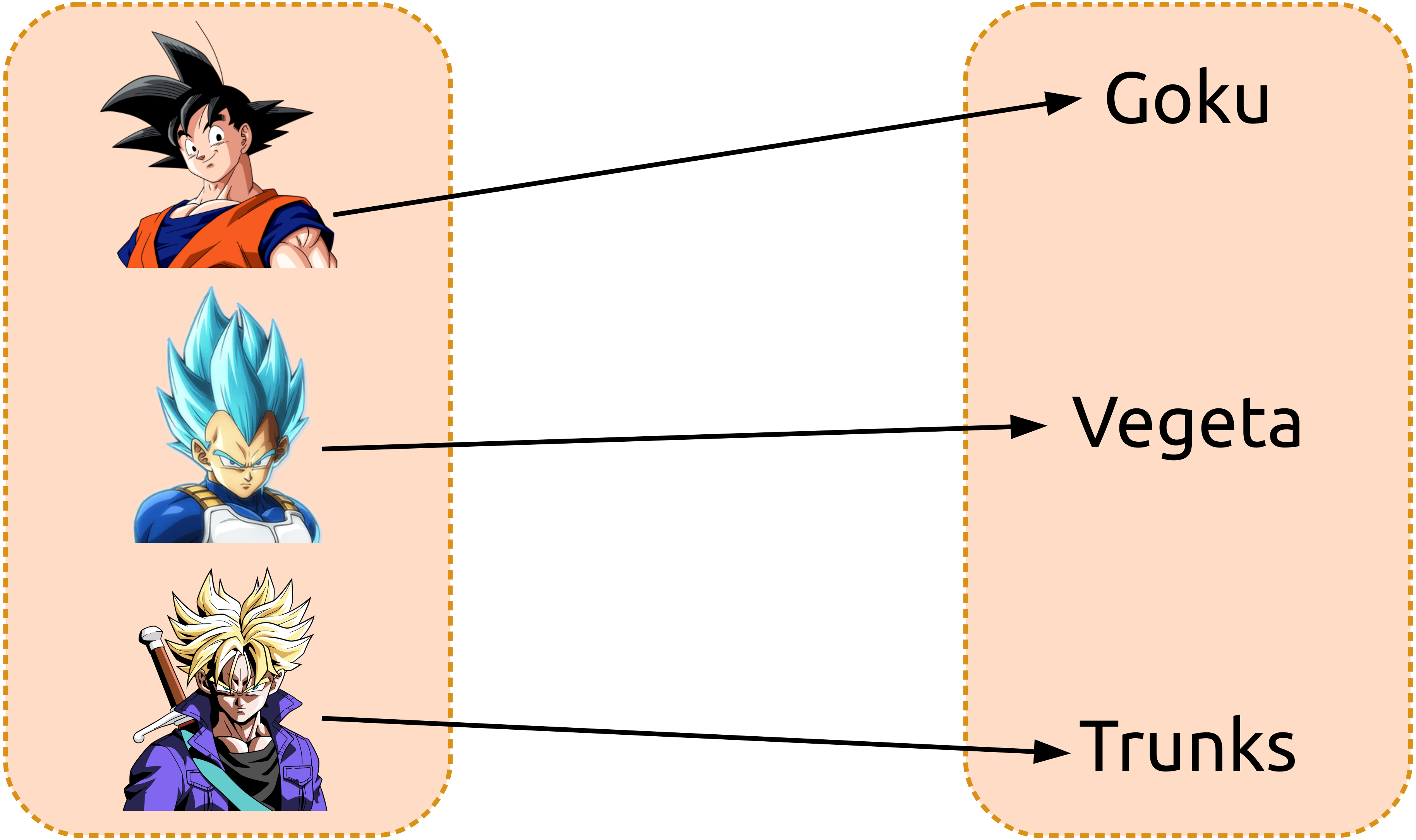
$$g(f(a)) = g(b) = c,$$

que é o que precisávamos mostrar. ■



# Injeções e Sobrejeções

- Uma função injetiva associa **no máximo** um elemento do domínio com cada elemento do codomínio.
- Uma função sobrejetiva associa **pelo menos** um elemento do domínio a cada elemento do codomínio.
- E as funções que associam **exatamente um** elemento do domínio a cada elemento do codomínio?


Goku
Vegeta
Trunks

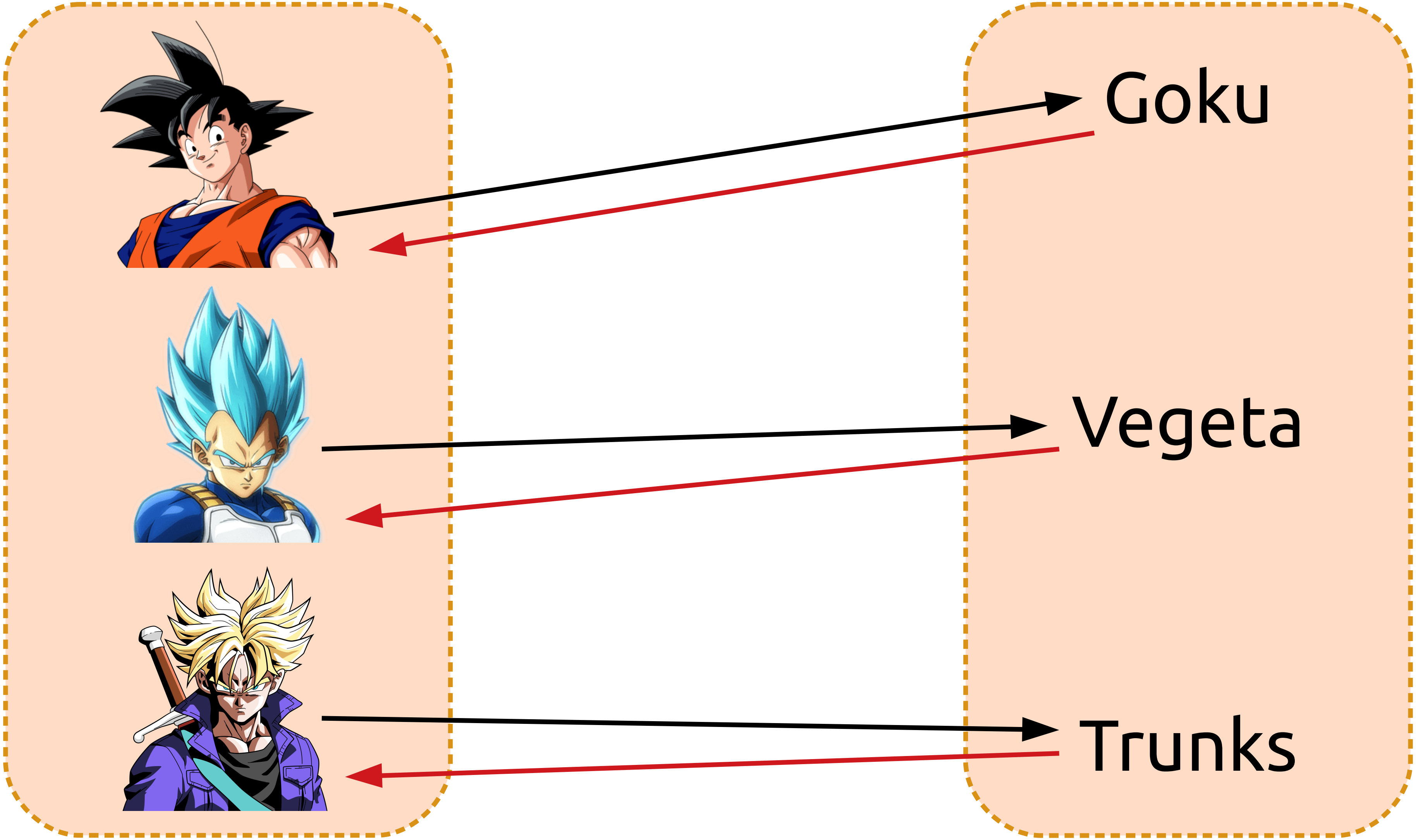
# Bijeções

- Uma função que associa cada elemento do codomínio a um elemento único do domínio é chamada de **bijetiva**.
  - Essa função é uma **bijeção**.
- Formalmente, uma bijeção é uma função tanto injetiva quanto sobrejetora.
- As bijeções às vezes são chamadas de **correspondências um a um**.
  - Não deve ser confundido com "funções um para um".

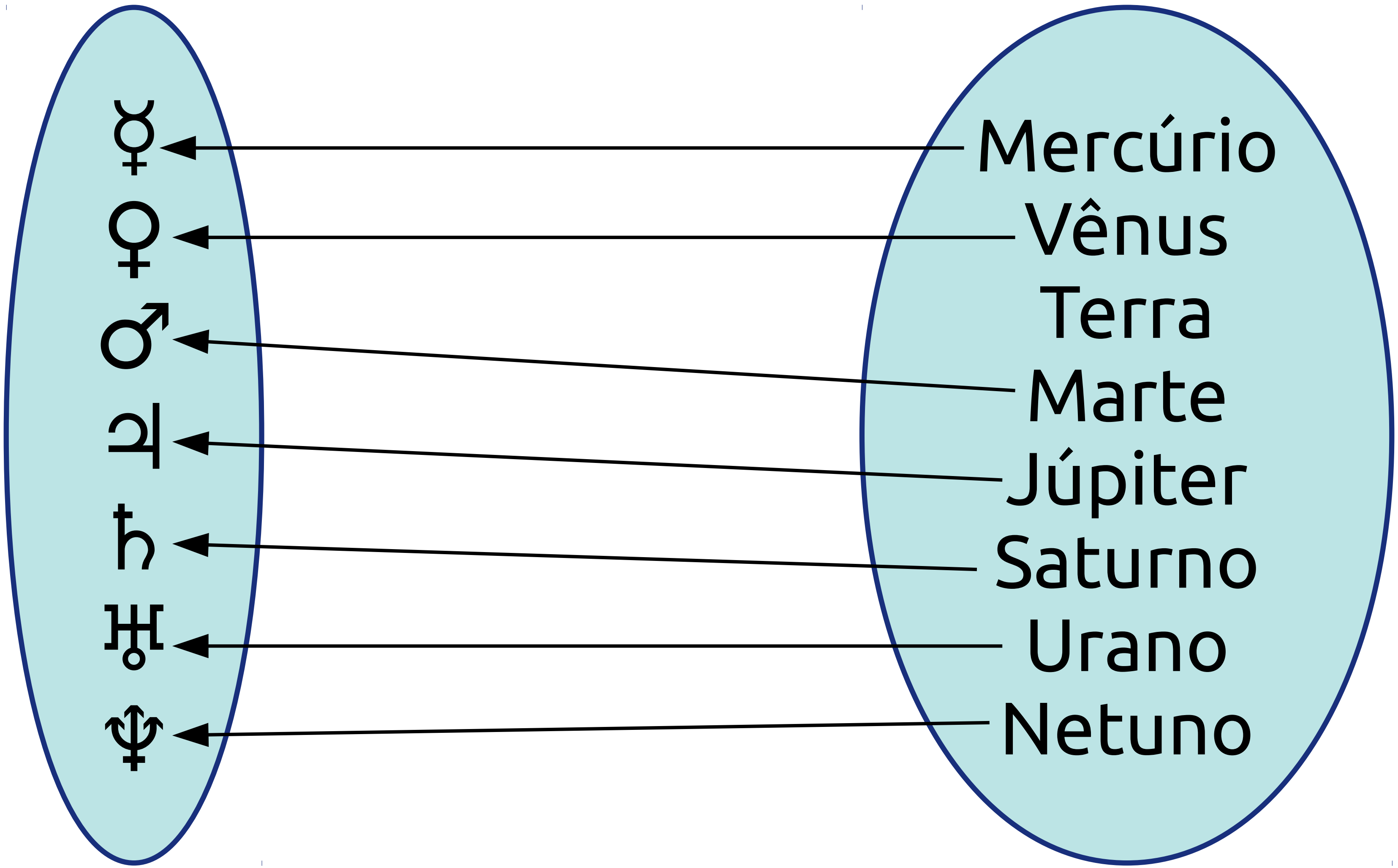
# Bijeções e Composição

- Suponha que $f : A \to B$ e $g : B \to C$ sejam bijeções.
- É $g \circ f$ necessariamente uma bijeção?
- **Sim!**
  - Visto que ambos $f$ e $g$ são injetivas, sabemos que $g \circ f$ é injetiva.
  - Como $f$ e $g$ são sobrejetivas, sabemos que $g \circ f$ é sobrejetiva.
  - Portanto, $g \circ f$ é uma bijeção.

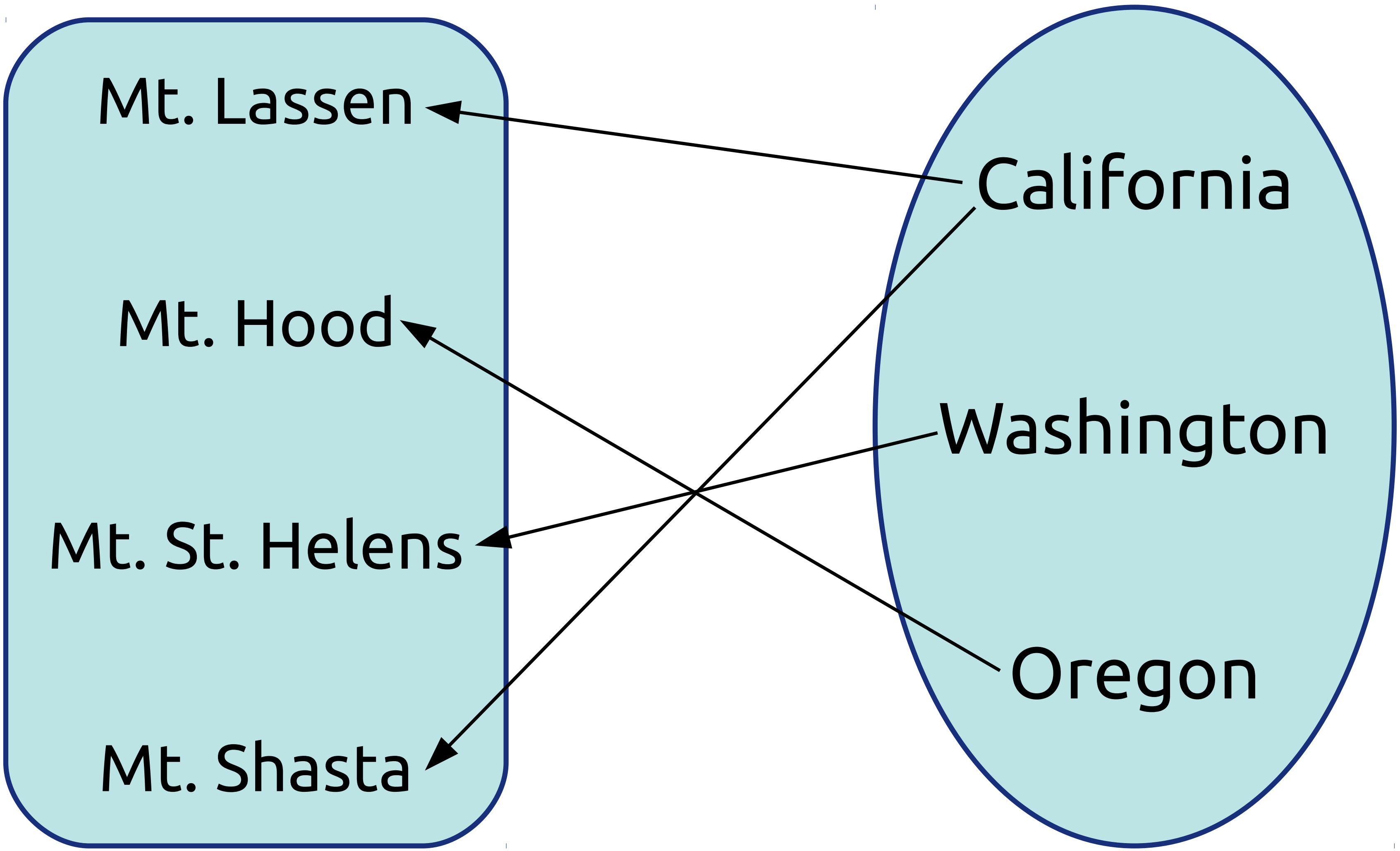
# Funções Inversas



Goku
Vegeta
Trunks



Mercúrio
Vênus
Terra
Marte
Júpiter
Saturno
Urano
Netuno


Mt. Lassen
Mt. Hood
Mt. St. Helens
Mt. Shasta
California
Washington
Oregon

# Funções Inversas

- Em alguns casos, é possível "inverter uma função".
- Seja $f : A \to B$ uma função. Uma função $f^{-1} : B \to A$ é chamada de **inverso de f** se as seguintes afirmações de lógica de primeira ordem são verdadeiras sobre $f$ e $f^{-1}$

  $$\forall a \in A.\ (f^{-1}(f(a)) = a)\quad \forall b \in B.\ (f(f^{-1}(b)) = b)$$

- Em outras palavras, se $f$ mapeia $a$ para $b$, então $f^{-1}$ mapeia $b$ de volta para $a$ e vice-versa.
- Nem todas as funções têm inversos (acabamos de ver alguns exemplos de funções sem inversos).
- Se $f$ é uma função que tem um inverso, então dizemos que $f$ é **invertível**.

# Onde Estamos

- Agora sabemos
  - o que são injeção, sobrejeção e bijeção;
  - que a composição de duas injeções, sobrejeções e bijeções também é uma injeção, sobrejeção ou bijeção, respectivamente; e
  - que as bijeções são invertíveis e as funções invertíveis são bijeções.