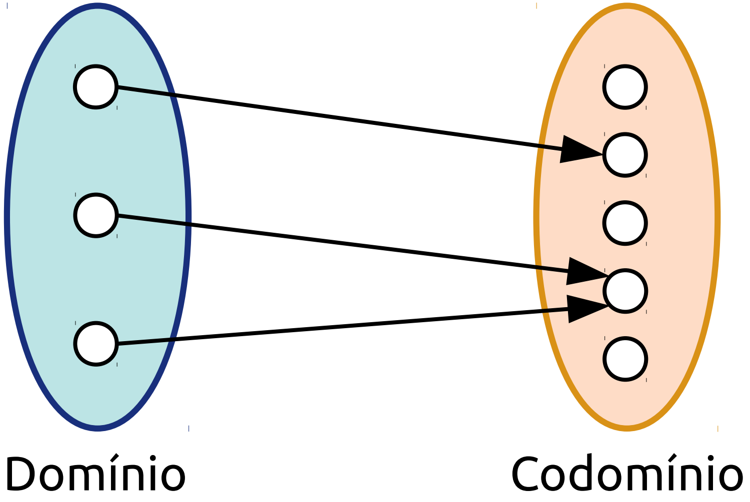
Cardinalidade

Revisão

Domínios e Codomínios

- Toda função f tem dois conjuntos associados a ela: seu **domínio** e seu **codomínio**.
- Uma função f só pode ser aplicada a elementos de seu domínio. Para qualquer x no domínio, f(x) pertence ao codomínio.

A função deve ser definida para cada elemento do domínio.



A saída da função deve estar sempre no codomínio, mas nem todos os elementos do codomínio devem ser produzidos como saídas.

Composição de Funções

- Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são funções, **a composição de f e g**, denotada $g \circ f$, é uma função
  - cujo domínio é A,
  - cujo codomínio é C, e
  - que é avaliada como $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Funções Injetivas

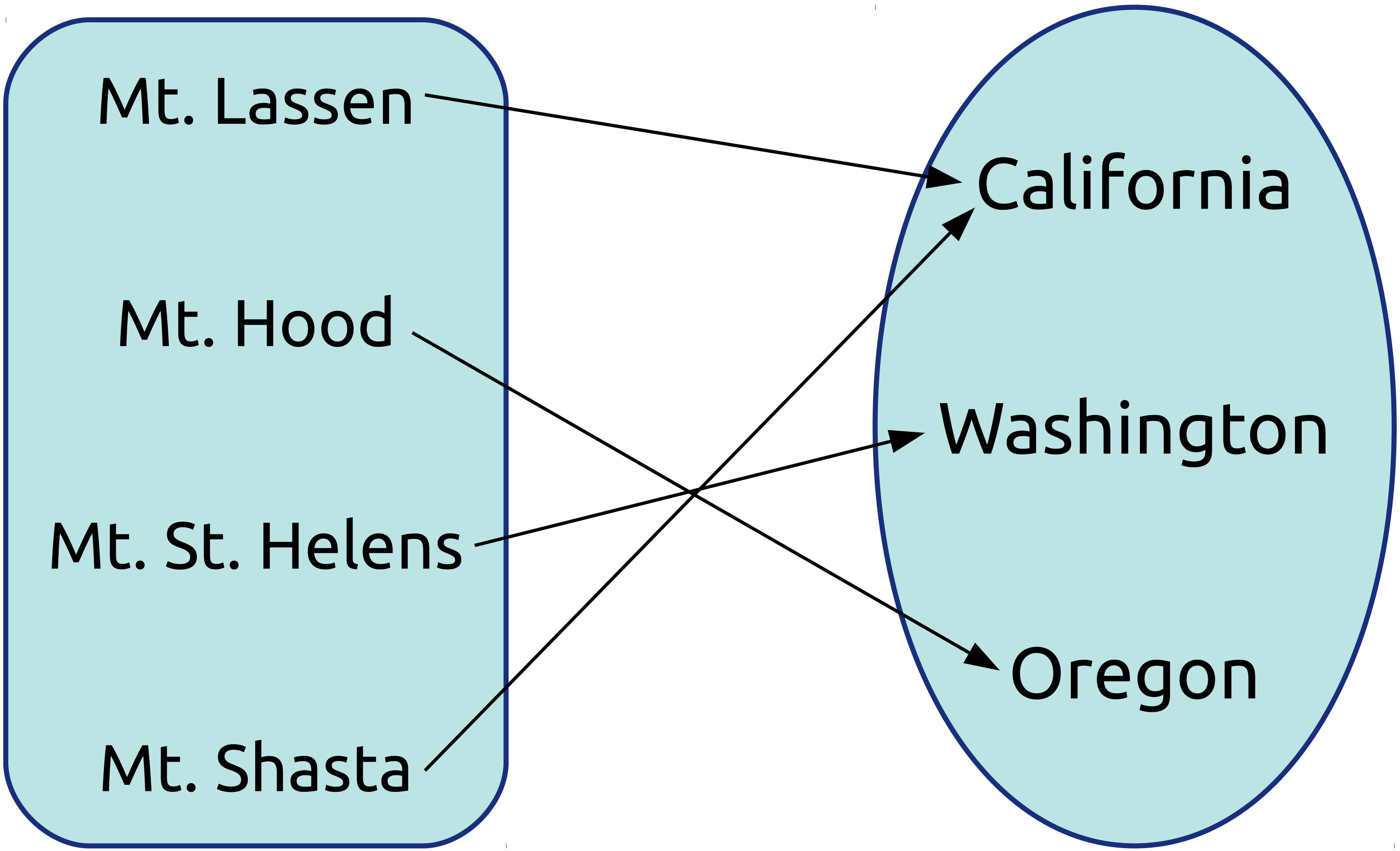
- Uma função f: A → B é chamada **injetiva** (ou **um-para-um**) se cada elemento do codomínio tem no máximo um elemento do domínio que mapeia para ele.
  - Uma função com esta propriedade é chamada de **injeção**.
- Formalmente, f : A → B é uma injeção se esta declaração de lógica de primeira ordem for verdadeira:

  $$\forall a_1 \in A.\ \forall a_2 \in A.\ (a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2))$$

  ("Se as entradas são diferentes, as saídas são diferentes")
- Equivalentemente:

  $$\forall a_1 \in A.\ \forall a_2 \in A.\ (f(a_1) = f(a_2) \rightarrow a_1 = a_2)$$

  ("Se as saídas são as mesmas, as entradas são as mesmas")
- **Teorema:** A composição de duas injeções é uma injeção.


Mt. Lassen
Mt. Hood
Mt. St. Helens
Mt. Shasta
California
Washington
Oregon

Funções Injetivas

- Uma função $f: A \to B$ é chamada **injetiva** (ou **um-para-um**) se cada elemento do codomínio tem no máximo um elemento do domínio que mapeia para ele.
  - Uma função com esta propriedade é chamada de **injeção**.
- Formalmente, $f : A \to B$ é uma injeção se esta declaração de lógica de primeira ordem for verdadeira:

  $$\forall a_1 \in A.\ \forall a_2 \in A.\ (a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2))$$

  ("Se as entradas são diferentes, as saídas são diferentes")
- Equivalentemente:

  $$\forall a_1 \in A.\ \forall a_2 \in A.\ (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$$

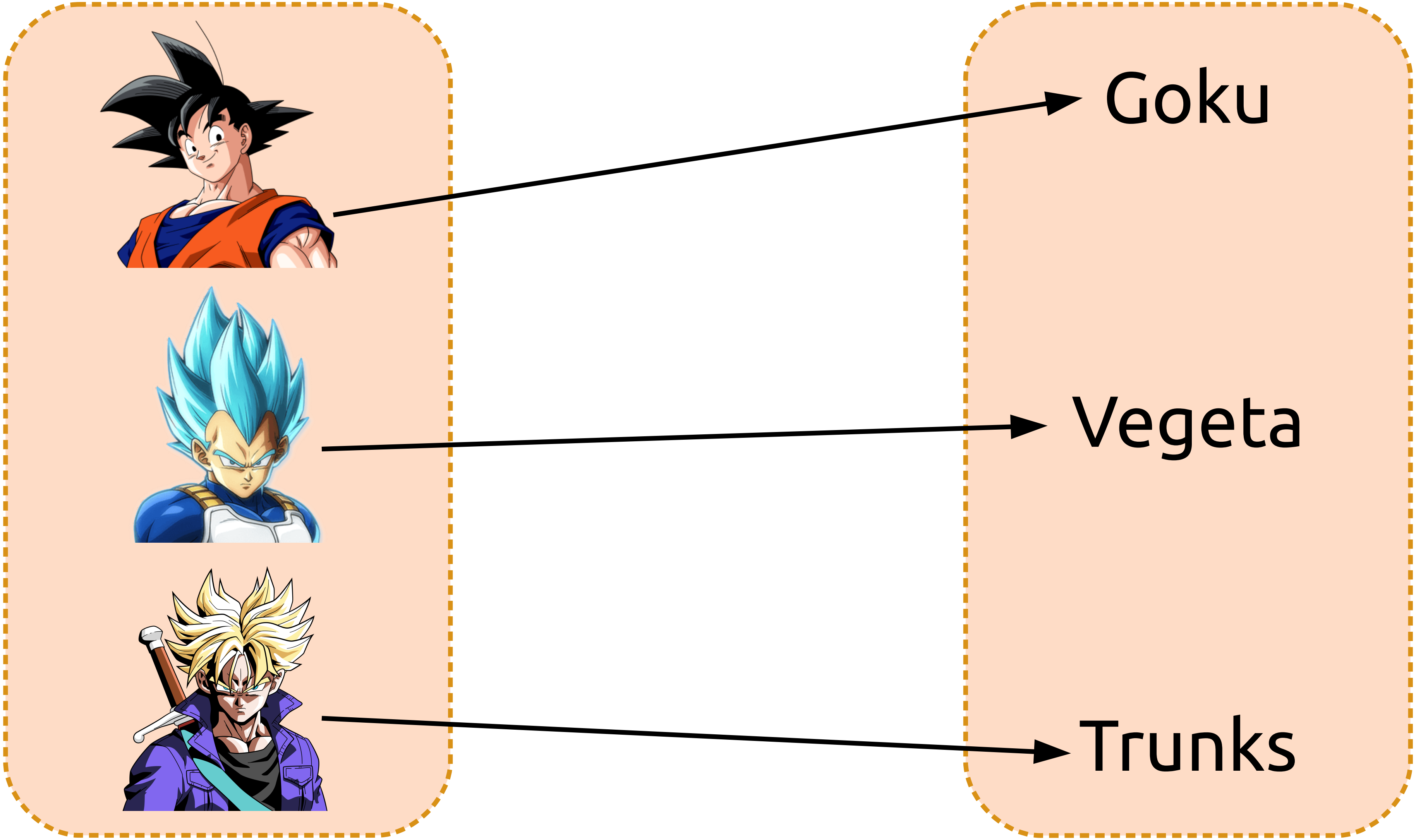
  ("Se as saídas são as mesmas, as entradas são as mesmas")
- **Teorema:** A composição de duas injeções é uma injeção.

Funções Sobrejetoras

- Uma função $f : A \to B$ é chamada **sobrejetiva** (ou **onto**) se cada elemento do codomínio é "coberto" por pelo menos um elemento do domínio.
  - Uma função com essa propriedade é chamada de **sobrejetora**.
- Formalmente, $f : A \to B$ é uma sobreposição se esta declaração de lógica de primeira ordem for verdadeira:

  $$\forall b \in B.\ \exists a \in A.\ f(a) = b$$

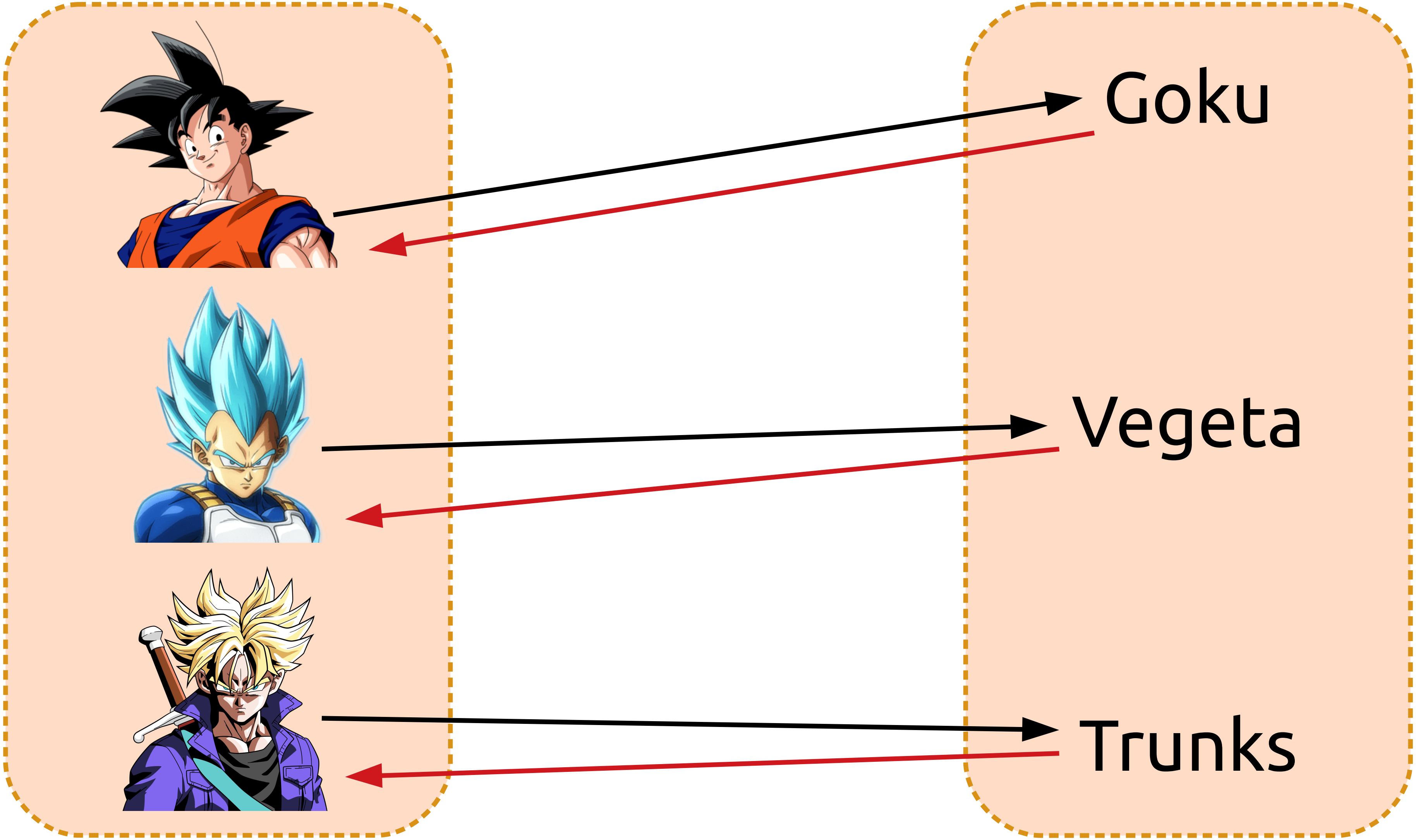
  ("Para cada saída possível, há pelo menos uma entrada possível que a produz")
- **Teorema:** A composição de duas sobreposições é uma sobrejeção.

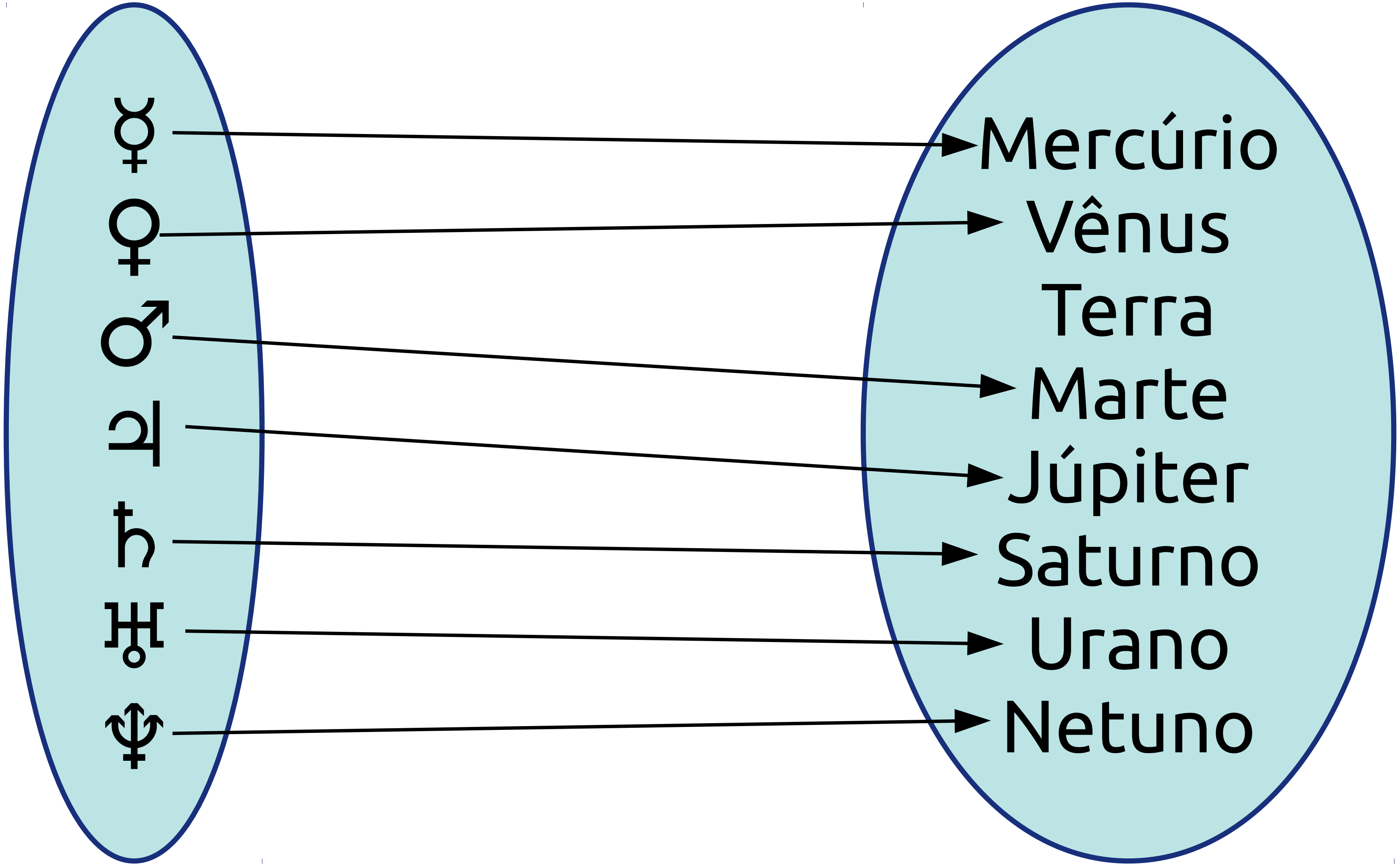

Goku
Vegeta
Trunks

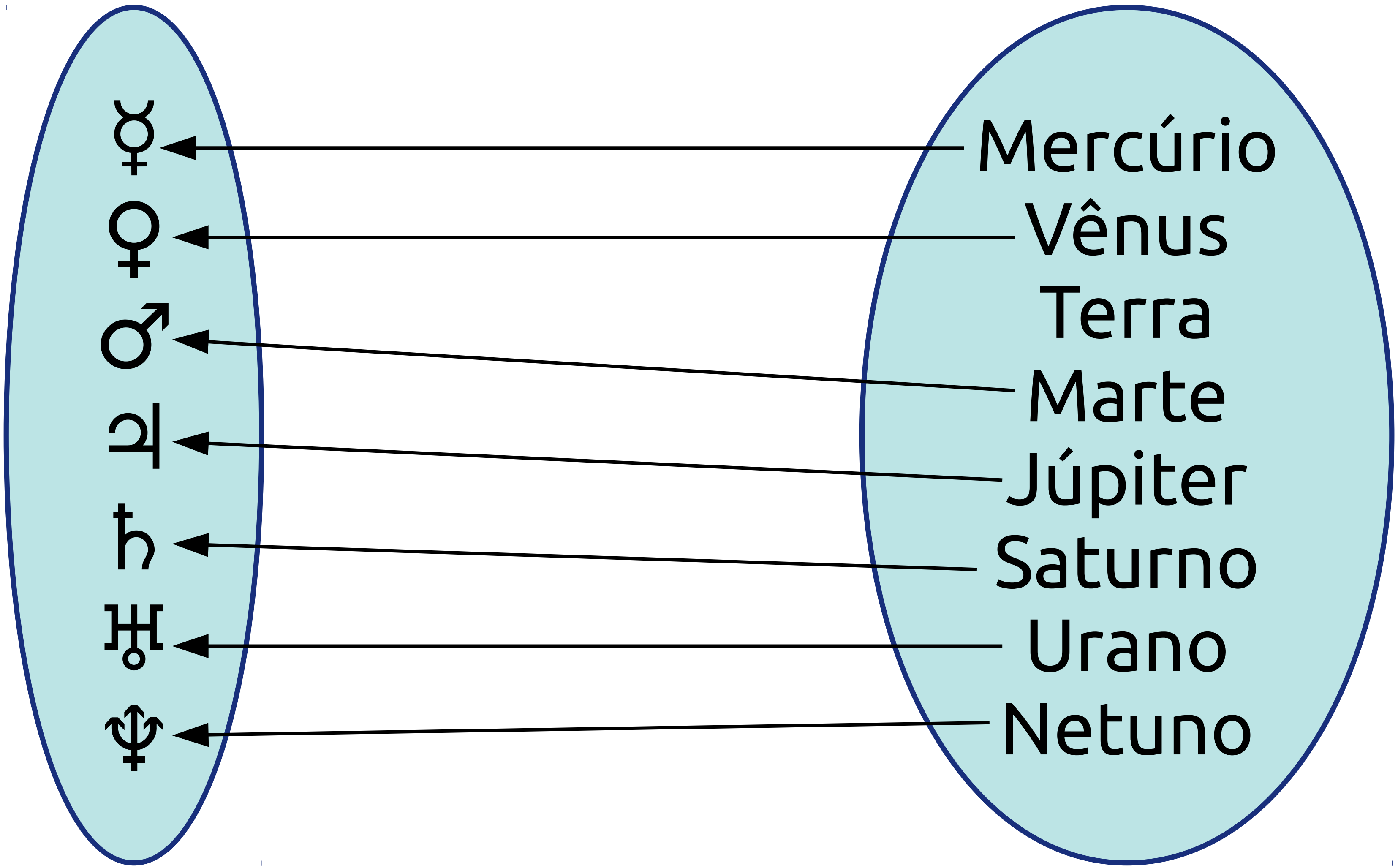
Bijeções

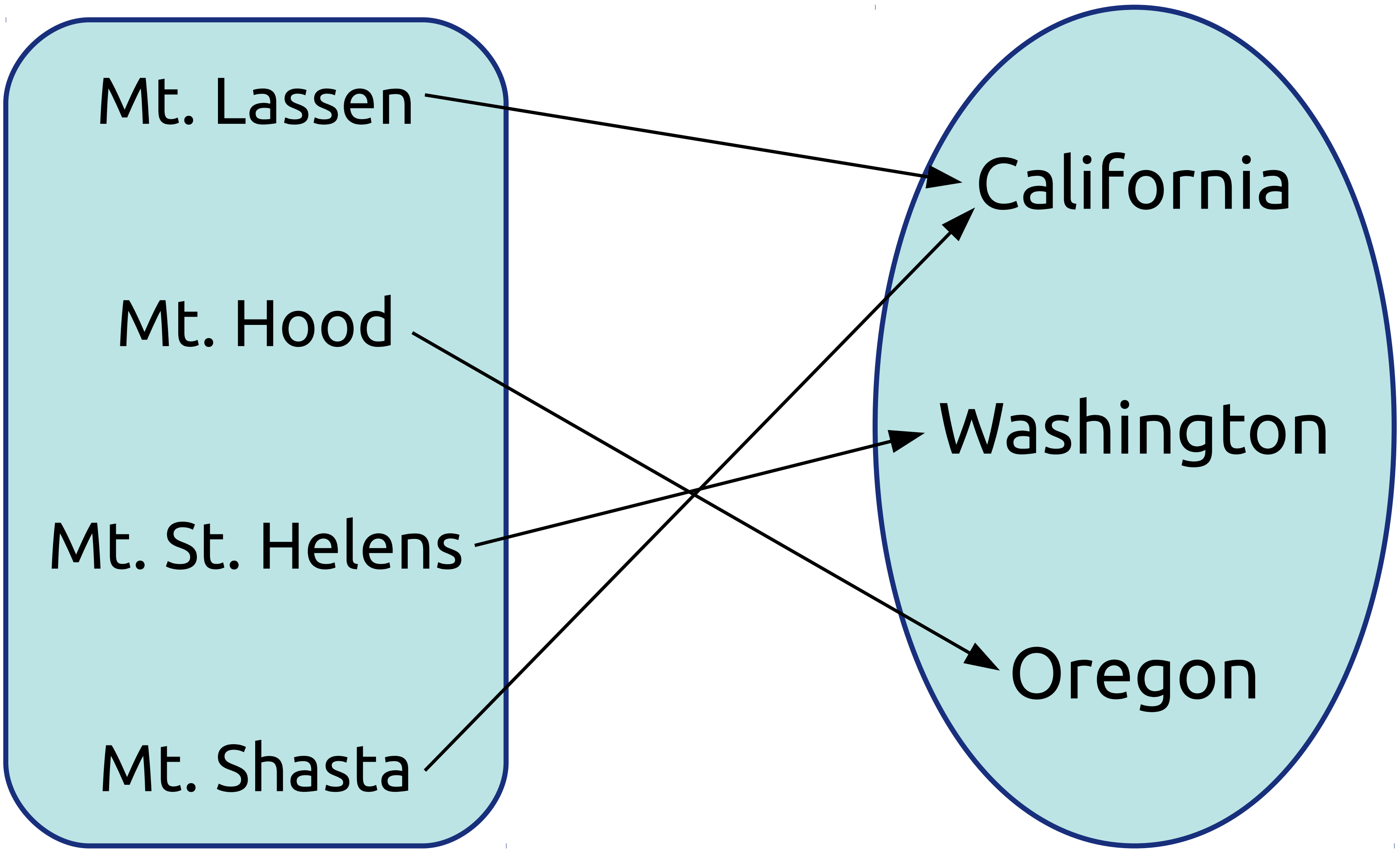
- Uma função que associa cada elemento do codomínio a um elemento único do domínio é chamada de **bijetiva**.
    - Essa função é uma **bijeção**.
- Formalmente, uma bijeção é uma função tanto injetiva quanto sobrejetora.
- **Teorema:** A composição de duas bijeções é uma bijeção.

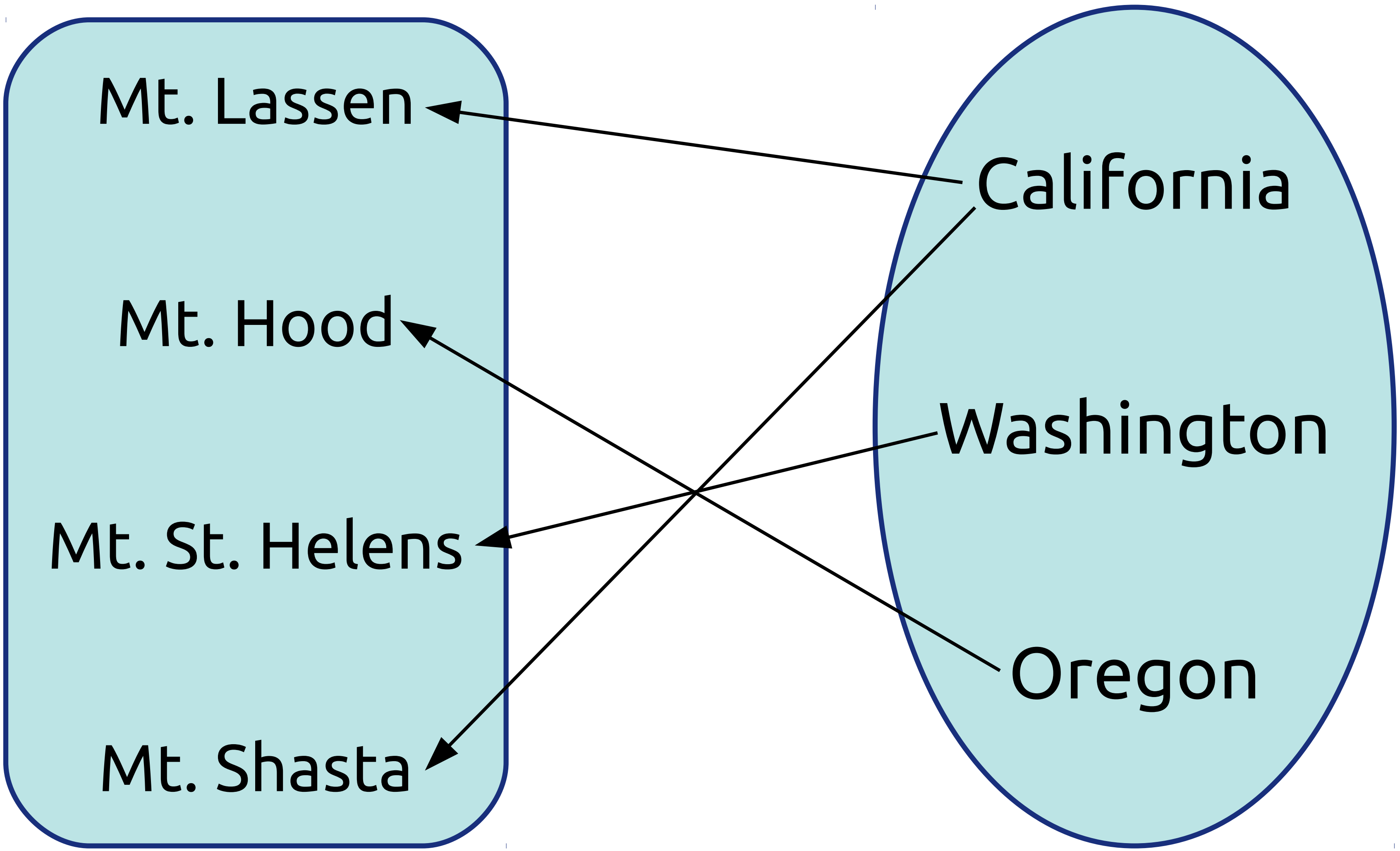
Funções Inversas


Goku
Vegeta
Trunks


☿
♀
♂
♃
♄
♅
♆
Mercúrio
Vênus
Terra
Marte
Júpiter
Saturno
Urano
Netuno


☿
♀
♂
♃
♄
♅
♆
Mercúrio
Vênus
Terra
Marte
Júpiter
Saturno
Urano
Netuno


Mt. Lassen
Mt. Hood
Mt. St. Helens
Mt. Shasta
California
Washington
Oregon


Mt. Lassen
Mt. Hood
Mt. St. Helens
Mt. Shasta
California
Washington
Oregon

Funções Inversas

- Em alguns casos, é possível "inverter uma função".
- Seja $f : A \to B$ uma função. Uma função $f^{-1} : B \to A$ é chamada de **inverso de f** se as seguintes afirmações de lógica de primeira ordem são verdadeiras sobre f e f^{-1}

  $\forall a \in A. (f\text{-}1(f(a)) = a)$ **$\forall b \in B. (f(f\text{-}1(b)) = b)$**

- Em outras palavras, se f mapeia a para b, então f^{-1} mapeia b de volta para a e vice-versa.
- Nem todas as funções têm inversos (acabamos de ver alguns exemplos de funções sem inversos).
- Se f é uma função que tem um inverso, então dizemos que f é **invertível**.

Onde Estamos

- Agora sabemos
  - o que são injeção, sobrejeção e bijeção;
  - que a composição de duas injeções, sobrejeções e bijeções também é uma injeção, sobrejeção ou bijeção, respectivamente; e
  - que as bijeções são invertíveis e as funções invertíveis são bijeções.

Revisando Cardinalidade

Cardinalidade

- Lembre-se de que a **cardinalidade** de um conjunto é o número de elementos que ele contém.
- Se S for um conjunto, denotamos sua cardinalidade por |S|.
- Para conjuntos finitos, as cardinalidades são números naturais:
  - $|\{1, 2, 3\}| = 3$
  - $|\{100, 200\}| = 2$
- Para conjuntos infinitos, introduzimos **cardinais infinitos** para denotar o tamanho dos conjuntos:

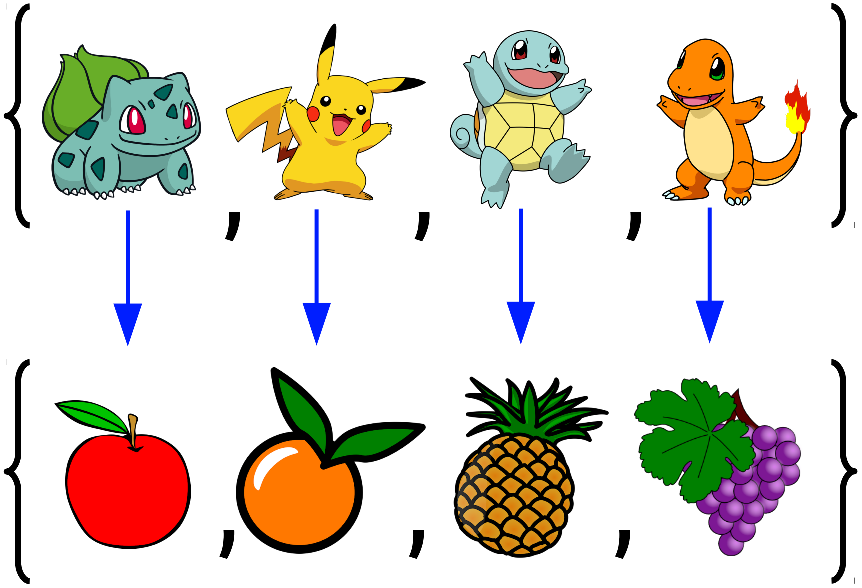
$$|\mathbb{N}| = \aleph_0$$

Definindo Cardinalidade

- É difícil dar uma definição rigorosa do que realmente são as cardinalidades.
  - O que é 4? O que é $\aleph_0$?
- **Idéia:** Defina a cardinalidade como uma relação entre dois conjuntos, em vez de uma quantidade absoluta.

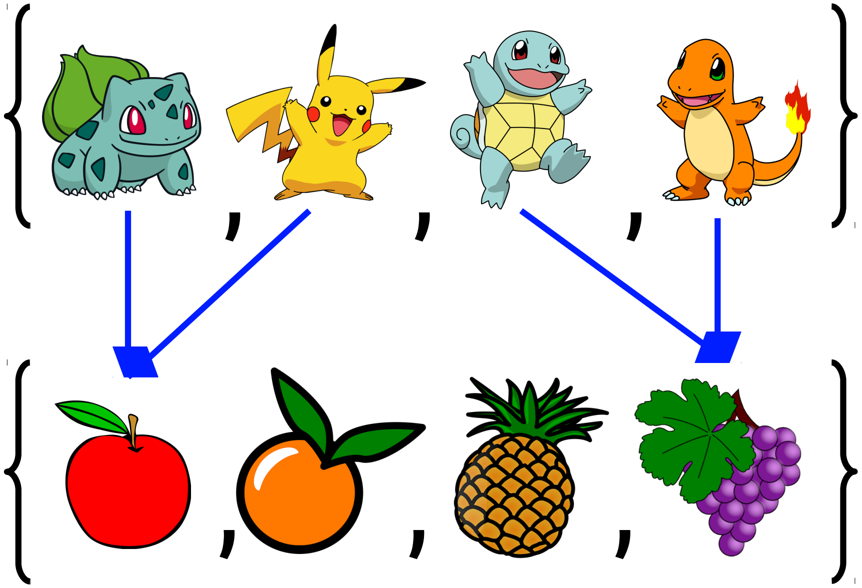
Comparando Cardinalidades

- Aqui está a definição formal do que significa dois conjuntos terem a mesma cardinalidade:
  - **$|S| = |T|$ se existe uma bijeção $f : S \to T$**



Comparando Cardinalidades

- Aqui está a definição formal do que significa dois conjuntos terem a mesma cardinalidade:
  - **| S | = | T | se existe uma bijeção f : S → T**



Mais sobre Cardinalidade

Atualização de Terminologia

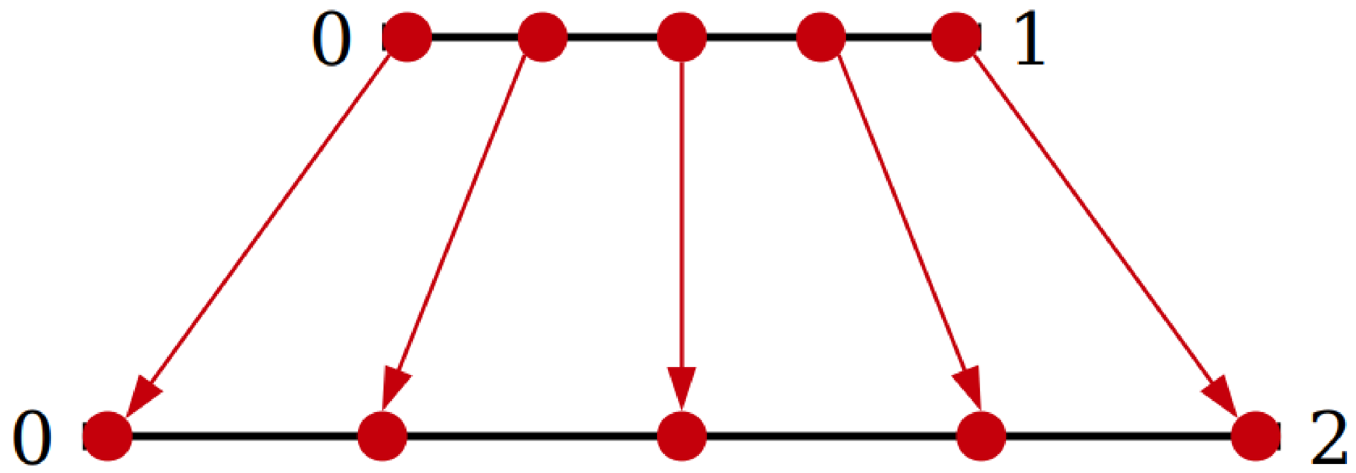
- Sejam a e b números reais onde $a \leq b$.
- A notação **[a, b]** denota o conjunto de todos os números reais entre a e b, inclusivo.

$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$$

- A notação **(a, b)** denota o conjunto de todos os números reais entre a e b, exclusivo.

$$(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$$

Casa no Intervalo



$f : [0, 1] \to [0, 2]$

$f(x) = 2x$

Teorema: $|[0, 1]| = |[0, 2]|$

Prova: Considere a função $f: [0, 1] \to [0, 2]$ definida como $f(x) = 2x$. Vamos provar que f é uma bijeção.

Primeiro, mostraremos que f é uma função bem definida. Escolha qualquer $x \in [0, 1]$. Isso significa que $0 \leq x \leq 1$, então sabemos que $0 \leq 2x \leq 2$. Consequentemente, vemos que $0 \leq f(x) \leq 2$, então $f(x) \in [0, 2]$.

A seguir, mostraremos que f é injetivo. Escolha qualquer $x_1, x_2 \in [0, 1]$ onde $f(x_1) = f(x_2)$. Mostraremos que $x_1 = x_2$. Para ver isso, observe que como $f(x_1) = f(x_2)$, vemos que $2x_1 = 2x_2$, que por sua vez nos diz que $x_1 = x_2$, conforme necessário.

Finalmente, mostraremos que f é sobrejetora. Para fazer isso, considere qualquer $y \in [0, 2]$. Mostraremos que existe algum $x \in [0, 1]$ onde $f(x) = y$.

Seja $x = y/2$. Como $y \in [0, 2]$, sabemos $0 \leq y \leq 2$ e, portanto, que $0 \leq y/2 \leq 1$. Escolhemos $x = y/2$, portanto sabemos que $0 \leq x \leq 1$, o que por sua vez significa $x \in [0, 1]$. Além disso, observe que

$$f(x) = 2x = 2(y/2) = y,$$

Então $f(x) = y$, conforme necessário. ■

Casa no Intervalo

(Para qualquer $k > 0$)

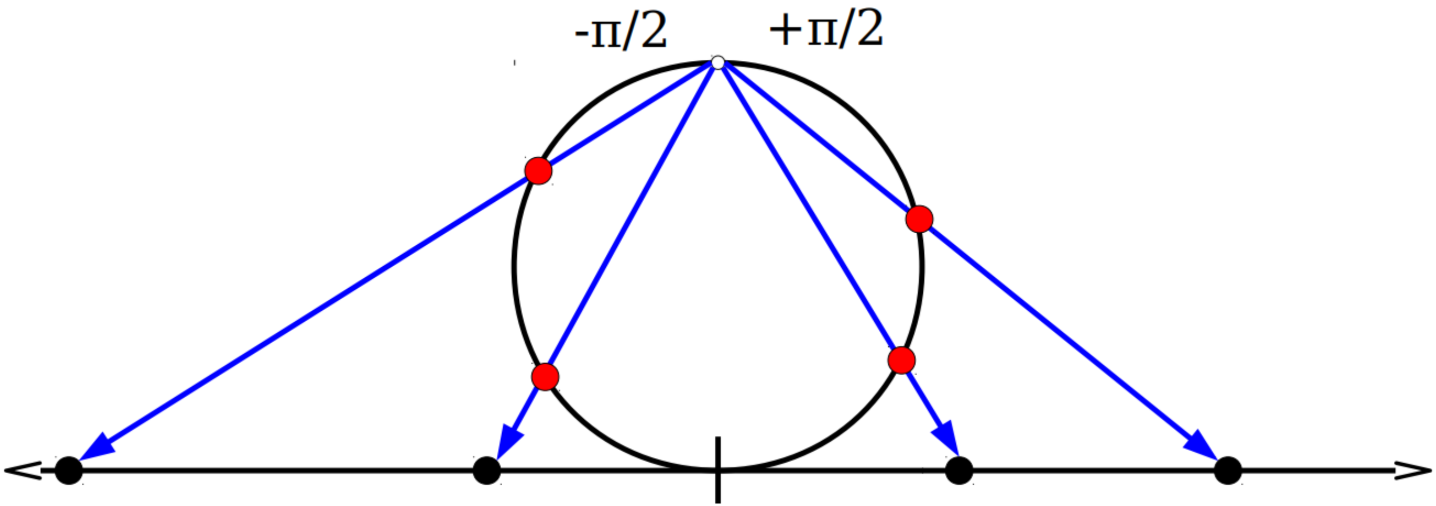
Isso significa que a cardinalidade (quantos pontos existem) é uma ideia diferente da massa (quanto pesam esses pontos).

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, k]$$

$$f(x) = kx$$

Mais um Exemplo

Coloque um Anel Nisso



$f : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \tan x$

$|(-\pi/2, \pi/2)| = |\mathbb{R}|$

Algumas Propriedades da Cardinalidade

Teorema: Para qualquer conjunto A, temos $|A| = |A|$.

Prova: Considere qualquer conjunto A e seja $f : A \to A$ a função definida como $f(x) = x$. Vamos provar que f é uma bijeção.

Primeiro, mostraremos que f é uma função bem definida. Para ver isso, observe que para qualquer $x \in A$, temos $f(x) = x \in A$, conforme necessário.

A seguir, mostraremos que f é injetivo. Escolha qualquer $x_1, x_2 \in A$ onde $f(x_1) = f(x_2)$. Precisamos mostrar que $x_1 = x_2$. Como $f(x_1) = f(x_2)$, vemos por definição de f que $x_1 = x_2$, conforme necessário.

Finalmente, mostraremos que f é sobrejetora. Considere qualquer $y \in A$. Provaremos que existe algum $x \in A$ onde $f(x) = y$. Escolha $x = y$. Então $x \in A$ (já que $y \in A$) e $f(x) = x = y$, conforme necessário. ■

Teorema: Se A, B e C forem conjuntos onde $|A| = |B|$ e $|B| = |C|$, então $|A| = |C|$.

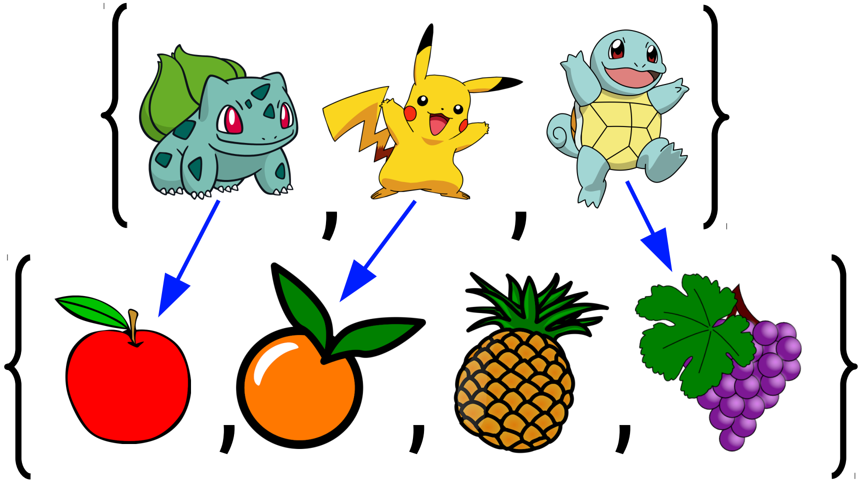
Prova: Considere quaisquer conjuntos A, B e C, onde $|A| = |B|$ e $|B| = |C|$. Precisamos provar que $|A| = |C|$. Para isso, precisamos mostrar que há uma bijeção de A a C.

Uma vez que $|A| = |B|$, sabemos que existe alguma bijeção $f : A \to B$. Da mesma forma, uma vez que $|B| = |C|$ sabemos que existe pelo menos uma bijeção $g : B \to C$.

Considere a função $g \circ f : A \to C$. Como g e f são bijeções e a composição de duas bijeções é uma bijeção, vemos que $g \circ f$ é uma bijeção de A a C. Assim, $|A| = |C|$, conforme necessário.■

Cardinalidades Desiguais

- Lembre-se: $|A| = |B|$ se a seguinte afirmação for verdadeira:
  - Existe uma bijeção $f : A \to B$
- O que isso significa para $|A| \neq |B|$ ser verdadeiro?
  - Cada função $f : A \to B$ não é uma bijeção.
- Esta é uma declaração forte! Para provar $|A| \neq |B|$, precisamos mostrar que nenhuma função possível de A a B pode ser injetiva e sobrejetiva.



Teorema de Cantor Revisitado

Teorema de Cantor

- Em nossa primeira aula, esboçamos uma prova do teorema de Cantor, que diz que
  - **Se S for um conjunto, então $|S| < |\wp(S)|$.**
- Essa prova era visual e bem executada à mão. Vamos ver se podemos voltar e formular ela!

Para Onde Estamos Indo

- Hoje, vamos provar formalmente o seguinte resultado:

Se S for um conjunto, então $|S| \neq |\wp(S)|$.

O Caminho

- Hoje, vamos provar formalmente o seguinte resultado:

  Se S for um conjunto, então $|S| \neq |\wp(S)|$.

- Funcionará da seguinte forma:
  - Escolha um conjunto arbitrário S.
  - Escolha uma função arbitrária $f : S \to \wp(S)$.
  - Mostre que f não é sobrejetiva usando um argumento diagonal.
  - Conclua que não há bijeções de S para $\wp(S)$.
  - Conclua que $|S| \neq |\wp(S)|$.

Este é um desenho
da nossa função
$f : S \to \wp(S)$

$$x_0 \longleftrightarrow \{ x_0, x_2, x_4, \dots \}$$

$$x_1 \longleftrightarrow \{ x_0, x_3, x_4, \dots \}$$

$$x_2 \longleftrightarrow \{ x_4, \dots \}$$

$$x_3 \longleftrightarrow \{ x_1, x_4, \dots \}$$

$$x_4 \longleftrightarrow \{ x_0, x_5, \dots \}$$

$$x_5 \longleftrightarrow \{ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots \}$$

$\dots$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	…
x_0	**S**	**N**	**S**	**N**	**S**	**N**	…
x_1	**S**	**N**	**N**	**S**	**S**	**N**	…
x_2	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	**N**	…
x_3	**N**	**S**	**N**	**N**	**S**	**N**	…
x_4	**S**	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	…
x_5	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	…
…	…	…	…	…	…	…	…

Este é um desenho da nossa função $f : S \to \wp(S)$

Este é um desenho da nossa função $f : S \to \wp(S)$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...
x_0	**S**	**N**	**S**	**N**	**S**	**N**	...
x_1	**S**	**N**	**N**	**S**	**S**	**N**	...
x_2	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	**N**	...
x_3	**N**	**S**	**N**	**N**	**S**	**N**	...
x_4	**S**	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	...
x_5	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	...
...	...	...	...	...	...	...	...

$\{\ x_0, \quad x_5, \quad \ldots\ \}$

Este é um desenho
da nossa função
$f : S \to \wp(S)$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...
x_0	**S**	**N**	**S**	**N**	**S**	**N**	...
x_1	**S**	**N**	**N**	**S**	**S**	**N**	...
x_2	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	**N**	...
x_3	**N**	**S**	**N**	**N**	**S**	**N**	...
x_4	**S**	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	...
x_5	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Virar todos os S's para
N's e vice-versa para
obter um novo conjunto

N	**S**	**S**	**S**	**S**	**N**	...

Este é um desenho da nossa função $f : S \to \wp(S)$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...
x_0	**S**	**N**	**S**	**N**	**S**	**N**	...
x_1	**S**	**N**	**N**	**S**	**S**	**N**	...
x_2	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	**N**	...
x_3	**N**	**S**	**N**	**N**	**S**	**N**	...
x_4	**S**	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	...
x_5	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Qual linha na tabela está emparelhada com este conjunto?

N	**S**	**S**	**S**	**S**	**N**	...

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...
x_0	**S**	**N**	**S**	**N**	**S**	**N**	...
x_1	**S**	**N**	**N**	**S**	**S**	**N**	...
x_2	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	**N**	...
x_3	**N**	**S**	**N**	**N**	**S**	**N**	...
x_4	**S**	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	...
x_5	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	...
...	...	...	...	...	...	...	...

N	**S**	**S**	**S**	**S**	**N**	...

Este é um desenho da nossa função $f : S \to \wp(S)$

Que conjunto é esse?

Este é um desenho da nossa função $f : S \to \wp(S)$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...
x_0	**S**	**N**	**S**	**N**	**S**	**N**	...
x_1	**S**	**N**	**N**	**S**	**S**	**N**	...
x_2	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	**N**	...
x_3	**N**	**S**	**N**	**N**	**S**	**N**	...
x_4	**S**	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	...
x_5	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	...
...	...	...	...	...	...	...	...

$f(x_0)$

N	**S**	**S**	**S**	**S**	**N**	...

Este é um desenho da nossa função $f : S \to \wp(S)$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...
x_0	**S**	**N**	**S**	**N**	**S**	**N**	...
x_1	**S**	**N**	**N**	**S**	**S**	**N**	...
x_2	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	**N**	...
x_3	**N**	**S**	**N**	**N**	**S**	**N**	...
x_4	**S**	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	...
x_5	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	...
...	...	...	...	...	...	...	...

$x_0 \in f(x_0)$?

N	**S**	**S**	**S**	**S**	**N**	...

Este é um desenho da nossa função $f : S \to \wp(S)$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...
x_0	**S**	**N**	**S**	**N**	**S**	**N**	...
x_1	**S**	**N**	**N**	**S**	**S**	**N**	...
x_2	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	**N**	...
x_3	**N**	**S**	**N**	**N**	**S**	**N**	...
x_4	**S**	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	...
x_5	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	...
...	...	...	...	...	...	...	...

$x_0 \notin f(x_0)$?

N	**S**	**S**	**S**	**S**	**N**	...

Este é um desenho da nossa função $f : S \to \wp(S)$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...
x_0	**S**	**N**	**S**	**N**	**S**	**N**	...
x_1	**S**	**N**	**N**	**S**	**S**	**N**	...
x_2	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	**N**	...
x_3	**N**	**S**	**N**	**N**	**S**	**N**	...
x_4	**S**	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	...
x_5	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	...
...	...	...	...	...	...	...	...

$x \notin f(x)$?

N	**S**	**S**	**S**	**S**	**N**	...

Este é um desenho da nossa função $f : S \to \wp(S)$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...
x_0	**S**	**N**	**S**	**N**	**S**	**N**	...
x_1	**S**	**N**	**N**	**S**	**S**	**N**	...
x_2	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	**N**	...
x_3	**N**	**S**	**N**	**N**	**S**	**N**	...
x_4	**S**	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	...
x_5	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	...
...	...	...	...	...	...	...	...

$$\{ x \in S \mid x \notin f(x) \}$$

N	**S**	**S**	**S**	**S**	**N**	...

O Conjunto Diagonal

- Para qualquer conjunto S e função $f : S \to \wp(S)$, podemos definir um conjunto D da seguinte forma:

  $$D = \{ x \in S \mid x \notin f(x) \}$$

  ("O conjunto de todos os elementos x onde x não é um elemento do conjunto f(x).")
- Esta é uma formalização do conjunto que encontramos na imagem anterior.
- Usando esta escolha de D, podemos provar formalmente que nenhuma função $f : S \to \wp(S)$ é uma bijeção.

Teorema: Se S for um conjunto, então $|S| \neq |\wp(S)|$.

Prova: Seja S um conjunto arbitrário. Vamos provar que $|S| \neq |\wp(S)|$ mostrando que não há bijeções de S para $\wp(S)$. Para fazer isso, escolha uma função arbitrária $f : S \to \wp(S)$. Provaremos que f não é sobrejetora.

Começando com f, definimos o conjunto

$D = \{ x \in S \mid x \notin f(x) \}$. (1)

Mostraremos que não existe $y \in S$ tal que $f(y) = D$. Para fazer isso, procedemos por contradição. Suponha que haja algum $y \in S$ tal que $f(y) = D$. Pela definição de D, sabemos que

$y \in D$ if $y \notin f(y)$. (2)

Por suposição, $f(y) = D$. Combinado com (2), isso nos diz

- $y \in D$ if $y \notin D$. (3)

- Isto é impossível. Chegamos a uma contradição, então nossa suposição deve estar errada. Portanto, não existe $y \in S$ tal que $f(y) = D$, então f não é sobrejetiva. Isso significa que f não é uma bijeção e, como nossa escolha de f foi arbitrária, concluímos que não há bijeções entre S e $\wp(S)$. Assim, $|S| \neq |\wp(S)|$, conforme necessário. ■

Recapitulando

- Definimos cardinalidade igual em termos de bijeções entre conjuntos.
- Muitos conjuntos diferentes de tamanho infinito têm a mesma cardinalidade.
- A cardinalidade atua como uma relação de equivalência - mas apenas porque podemos provar propriedades específicas de como ela se comporta, baseando-nos em propriedades de função.
- O teorema de Cantor pode ser formalizado em termos de sobrejetividade.