Lógica Proposicional

Pergunta: Como formalizamos as definições e raciocínios que usamos em nossas provas?

Roteiro

- **Lógica Proposicional**
  - Conectores lógicos básicos.
  - Tabelas verdade.
  - Equivalências lógicas.

Uma **proposição** é uma afirmação que é, por si mesma, verdadeira ou falsa.

Exemplos de Proposições

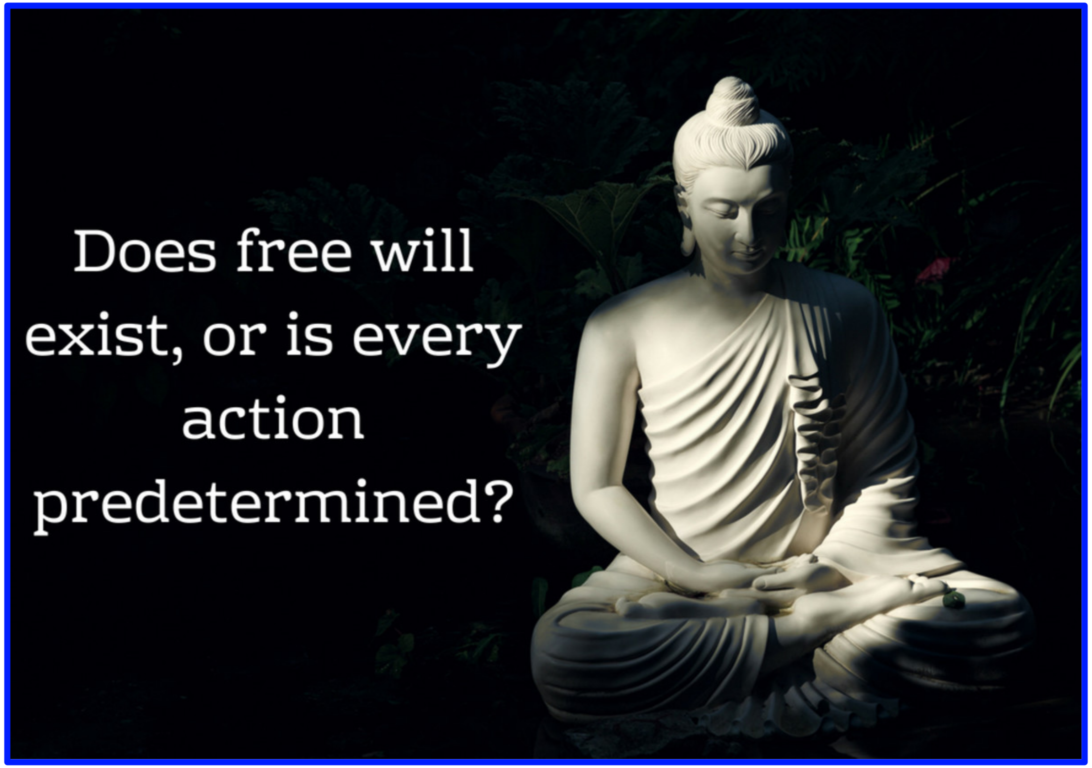
- Cães são mais fofos que gatinhos.
- Gatinhos são mais fofos do que cães.
- Usain Bolt pode superar todos nesta sala.
- Esta é a última entrada nesta lista.

Coisas Que Não São Proposições

- Os comandos não podem ser verdadeiros ou falsos.

Coisas Que Não São Proposições

- As perguntas não podem ser verdadeiras ou falsas.



Lógica Proposicional

- A **lógica proposicional** é um sistema matemático para raciocinar sobre proposições e como elas se relacionam umas com as outras.
- Cada declaração na lógica proposicional consiste em **variáveis proposicionais** combinadas por meio de **conectivos proposicionais**.
  - Cada variável representa alguma proposição, como “Você gostou” ou “Você deveria ter colocado um anel nisso”.
  - Os conectivos codificam como as proposições estão relacionadas, como “Se você gostou, então deveria ter colocado um anel nisso”.

Variáveis Proposicionais

- Cada proposição será representada por uma **variável proposicional**.
- Variáveis proposicionais são geralmente representadas como letras minúsculas, como **p**, **q**, **r**, **s**, etc.
- Cada variável pode ter um de dois valores: **verdadeiro** ou **falso**.

Conectivos Proposicionais

- **NOT Lógico: ¬p**
  - Leia “não p”
  - ¬p é verdadeiro se e somente se p é falso.
  - Também chamada de **negação lógica**.
- **AND Lógico: p ∧ q**
  - Leia “p e q.”
  - p ∧ q é verdadeiro se, e somente se, p e q forem verdadeiros.
  - Também chamada de **conjunção lógica**.
- **OR Lógico: p ∨ q**
  - Leia “p ou q.”
  - p ∨ q é verdadeiro se e somente se pelo menos um de p ou q for verdadeiro (OR inclusivo)
  - Também chamada de **disjunção lógica**.

Tabelas Verdade

- Uma tabela verdade é uma tabela que mostra o valor verdade de uma fórmula lógica proposicional como uma função de suas entradas.
- Útil por vários motivos:
  - Elas fornecem uma definição formal do que um conectivo "significa".
  - Elas nos fornecem uma maneira de descobrir o que uma fórmula proposicional complexa diz.

A Ferramenta Tabela Verdade

Resumo de Pontos Importantes

- O conectivo $\vee$ é um "ou" inclusivo. É verdade se pelo menos um dos operandos for verdadeiro.
  - Semelhante ao **||** operador em C, C++, Java e o operador **or** em Python.
- Se precisarmos de um operador "ou" exclusivo, podemos construí-lo com o que já temos.

Tabela Verdade para XOR

Esta é a tabela verdade para **XOR**. Podemos escrever **XOR** com os seguintes Operadores lógicos:

$(p \lor q) \land \neg(p \land q)$

p	q	p XOR q
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

Implicação Matemática

Implicação

- O conectivo → é usado para representar implicações.
  - Seu nome técnico é operador **condicional material**.
- Uma tabela de verdade mostra como a verdade ou falsidade de uma declaração composta depende da verdade ou falsidade das declarações simples a partir das quais ela é construída.

Tabela Verdade Implicação

p	q	p → q
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Por que esta Tabela Verdade?

- Os valores de verdade do $\rightarrow$ são como são porque são definidos dessa forma.
- A intuição:
  - Cada fórmula proposicional deve ser verdadeira ou falsa - isso é apenas um princípio de design orientador por trás da lógica proposicional.
  - Queremos que $p \rightarrow q$ seja falso apenas quando $p \land \neg q$ for verdadeiro.
  - Em outras palavras, $p \rightarrow q$ deve ser verdadeiro sempre que $\neg(p \land \neg q)$ for verdadeiro.

Tabela Verdade Implicação

p	q	p → q
F	F	T
F	T	T
T	**F**	**F**
T	T	T

A implicação é apenas
false se **p** for verdadeiro e **q** não.
Caso contrário é verdadeiro.

O Conectivo Bicondicional

O Conectivo Bicondicional

- O conectivo bicondicional ↔ é usado para representar uma implicação bidirecional.
- Especificamente, $p \leftrightarrow q$ significa que $p \rightarrow q$ e que $q \rightarrow p$.

Bicondicionais

- O conectivo **bicondicional** $p \leftrightarrow q$ é lido "p se e somente se q."
- Aqui está sua tabela verdade:

p	q	p ↔ q
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Uma interpretação de ↔ é pensar nisso como igualdade: as duas proposições devem ter valores de verdade iguais.

Verdadeiro e Falso

- Existem mais dois “conectivos” para falar: verdadeiro e falso.
  - O símbolo $\top$ é um valor sempre verdadeiro.
  - O símbolo $\bot$ é um valor que é sempre falso.
- Freqüentemente, são chamados de conectivos, embora não conectem nada.
  - (Ou melhor, eles conectam nada.)

Prova por Contradição

- Suponha que você queira provar que p é verdadeiro usando uma prova por contradição.
- A configuração é semelhante a esta:
  - Suponha que p é falso.
  - Derive algo que sabemos ser falso.
  - Conclua que p é verdadeiro.
- Na lógica proposicional:

$$(\neg p \to \bot) \to p$$

Precedência de Operadores

- Como analisamos essa declaração?

  $\neg x \to y \lor z \to x \lor y \land z$

- Precedência de operador para lógica proposicional:

  $\neg$

  $\land$

  $\lor$

  $\to$

  $\leftrightarrow$

- Todos os operadores são associativos à direita.
- Podemos usar parênteses para eliminar a ambigüidade.

Precedência de Operadores

- Como analisamos essa declaração?

  $(\neg x) \to ((y \lor z) \to (x \lor (y \land z)))$

- Precedência de operador para lógica proposicional:

  $\neg$

  $\land$

  $\lor$

  $\to$

  $\leftrightarrow$

- Todos os operadores são associativos à direita.
- Podemos usar parênteses para eliminar a ambigüidade.

Precedência de Operadores

- Os principais pontos a serem lembrados:
  - $\neg$ liga-se a tudo o que o segue imediatamente.
  - $\wedge$ e $\vee$ ligam-se com mais força do que $\rightarrow$.
- Normalmente escreveremos expressões como $p \wedge q \rightarrow r$ sem adicionar parênteses.
- Para expressões mais complexas, tentaremos adicionar parênteses.

A Grande Tabela

Conectivo	Ler Como	Versão C++	Nome
¬	“não”	!	Negação
∧	“e”	&&	Conjunção
∨	“ou”	||	Disjunção
→	“implica”		Implicação
↔	“se e apenas se”		Bicondicional
⊤	“verdadeiro”	true	Verdade
⊥	“falso”	false	Falsidade

Revisão

- Uma **variável proposicional** é uma variável verdadeira ou falsa.
- Os **conectivos proposicionais** são
  - Negação: $\neg p$
  - Conjunção: $p \wedge q$
  - Disjunção: $p \vee q$
  - Implicação: $p \rightarrow q$
  - Bicondicional: $p \leftrightarrow q$
  - Verdadeiro: $\top$
  - Falso: $\bot$

Traduzindo para Lógica Proposicional

Exemplos de Proposições

a: estarei no caminho da totalidade.

b: Vou ver um eclipse solar total.

c: Há um eclipse solar total hoje.

"Se eu estiver no caminho da totalidade,
mas não houver eclipse solar hoje,
não verei um eclipse solar total."

$$a \land \neg c \rightarrow \neg b$$

“P, mas q”

Se traduz em

$p \wedge q$

Importante: Para Lembrar

- Ao traduzir para ou fora da lógica proposicional, tome muito cuidado para não se confundir com as nuances da língua portuguesa.
  - Na verdade, esta é uma das razões pelas quais temos uma notação simbólica em primeiro lugar!
- Muitas frases proposicionais levam a traduções contra-intuitivas; certifique-se de verificar novamente!

Equivalências Proposicionais

Pergunta Rápida:

O que eu teria para mostrar a você para convencê-lo de que a afirmação $p \wedge q$ é falsa?

Pergunta Rápida:

O que eu teria para mostrar a você para convencê-lo de que a afirmação **$p \vee q$** é falsa?

Leis de Morgan

- Usando tabelas verdade, concluímos que

  $\neg(p \land q)$

  É equivalente a

  $\neg p \lor \neg q$

- Também vimos que

  $\neg(p \lor q)$

  É equivalente a

  $\neg p \land \neg q$

- Essas duas equivalências são chamadas de Leis de Morgan.

Equivalência Lógica

- Como $\neg(p \land q)$ e $\neg p \lor \neg q$ têm as mesmas tabelas verdade, dizemos que são **equivalentes**.
- Denotamos isso escrevendo

  $$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$$

- O símbolo $\equiv$ não é um conectivo
  - A afirmação $\neg(p \land q) \leftrightarrow (\neg p \lor \neg q)$ é uma fórmula proposicional. Se você inserir diferentes valores de p e q, será avaliado como um valor verdadeiro. Acontece que sempre é avaliado como verdadeiro.
  - A declaração $\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$ significa "essas duas fórmulas têm exatamente a mesma tabela verdade."
- Em outras palavras, a notação $\varphi \equiv \psi$ significa "φ e ψ sempre têm os mesmos valores verdade, independentemente de como as variáveis são atribuídas."

Uma Equivalência Importante

- Anteriormente, falamos sobre a tabela verdade para $p \to q$. Nós escolhemos ela de forma que

$$p \to q \equiv \neg(p \land \neg q)$$

- Mais tarde, essa equivalência será extremamente útil:

$$\neg(p \to q) \equiv p \land \neg q$$

Outra Equivalência Importante

- Aqui está uma equivalência útil. Começar com

  $p \rightarrow q \equiv \neg(p \land \neg q)$

- Pelas leis de Morgan:

  $p \rightarrow q \equiv \neg(p \land \neg q)$

  $p \rightarrow q \equiv \neg p \lor \neg\neg q$

  $p \rightarrow q \equiv \neg p \lor q$

- Sendo assim, $p \rightarrow q \equiv \neg p \lor q$

Outra Equivalência Importante

- Aqui está uma equivalência útil. Começar com

  $p \to q \equiv \neg(p \land \neg q)$

- Pelas leis de Morgan:

  $p \to q \equiv \neg(p \land \neg q)$

  $p \to q \equiv \neg p \lor \neg\neg q$

  $p \to q \equiv \neg p \lor q$

- Sendo assim, $p \to q \equiv \neg p \lor q$

se p for falso,
então $\neg p \lor q$ é verdadeiro.
Se p for verdadeiro,
então q deve ser verdadeiro
para que toda a expressão
seja verdadeira.

Uma Última Equivalência

O Contrapositivo

- O contrapositivo da afirmação

  $p \rightarrow q$

  É a afirmação

  $\neg q \rightarrow \neg p$

- Estes são logicamente equivalentes, razão pela qual a prova por contrapositivo funciona:

  $\mathbf{p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p}$

Porque tudo isso é Relevante

Porque tudo isso é Relevante

- Suponha que queremos provar a seguinte afirmação:

“Se $x + y = 16$, então $x \geq 8$ ou $y \geq 8$”

$$x + y = 16 \rightarrow x \geq 8 \lor y \geq 8$$

“Se $x < 8$ e $y < 8$, então $x + y \neq 16$”

Teorema: Se $x + y = 16$, então $x \geq 8$ ou $y \geq 8$

Prova: Por contrapositivo. Vamos provar que se $x < 8$ e $y < 8$, então $x + y \neq 16$. Sejam x e y números arbitrários tais que $x < 8$ e $y < 8$.

Perceba que

$$x + y < 8 + y$$

$$x + y < 8 + 8$$

$$x + y = 16.$$

Isso significa que $x + y < 16$, então $x + y \neq 16$, que é o que precisamos mostrar.■

Conclusão

- A lógica proposicional é uma ferramenta para raciocinar sobre como várias declarações afetam umas às outras.
- Para entender melhor como provar um resultado, muitas vezes ajuda primeiro a traduzir o que você está tentando provar em lógica proposicional.
- Dito isso, a lógica proposicional não é expressiva o suficiente para capturar todas as afirmações. Para isso, precisamos de algo mais poderoso.