Teoria dos Conjuntos

Questões Chaves na Teoria da Computação

- Quais problemas podemos resolver com um computador?
  - **Teoria da Computabilidade**
- Por que alguns problemas são mais difíceis de resolver do que outros?
  - **Teoria da Complexidade**
- Como podemos ter certeza de nossas respostas a essas perguntas?
  - **Matemática Discreta**

Introdução à Teoria dos Conjuntos

Conjuntos

Um **conjunto** é uma coleção não ordenada de objetos distintos, que podem ser qualquer coisa (incluindo outros conjuntos).

Estudantes do Curso de Ciência da Computação

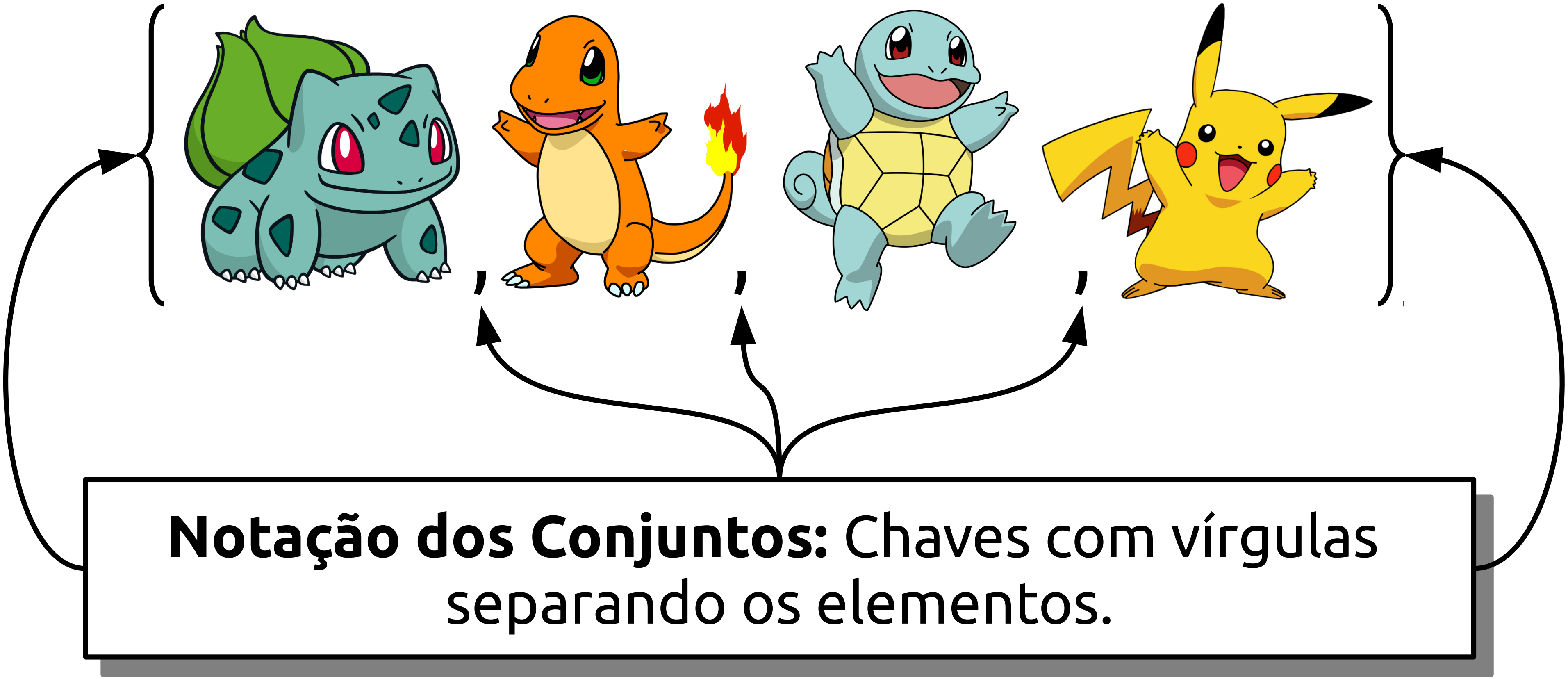
Todos os Computadores de uma Rede de Computadores

Pessoas Altas

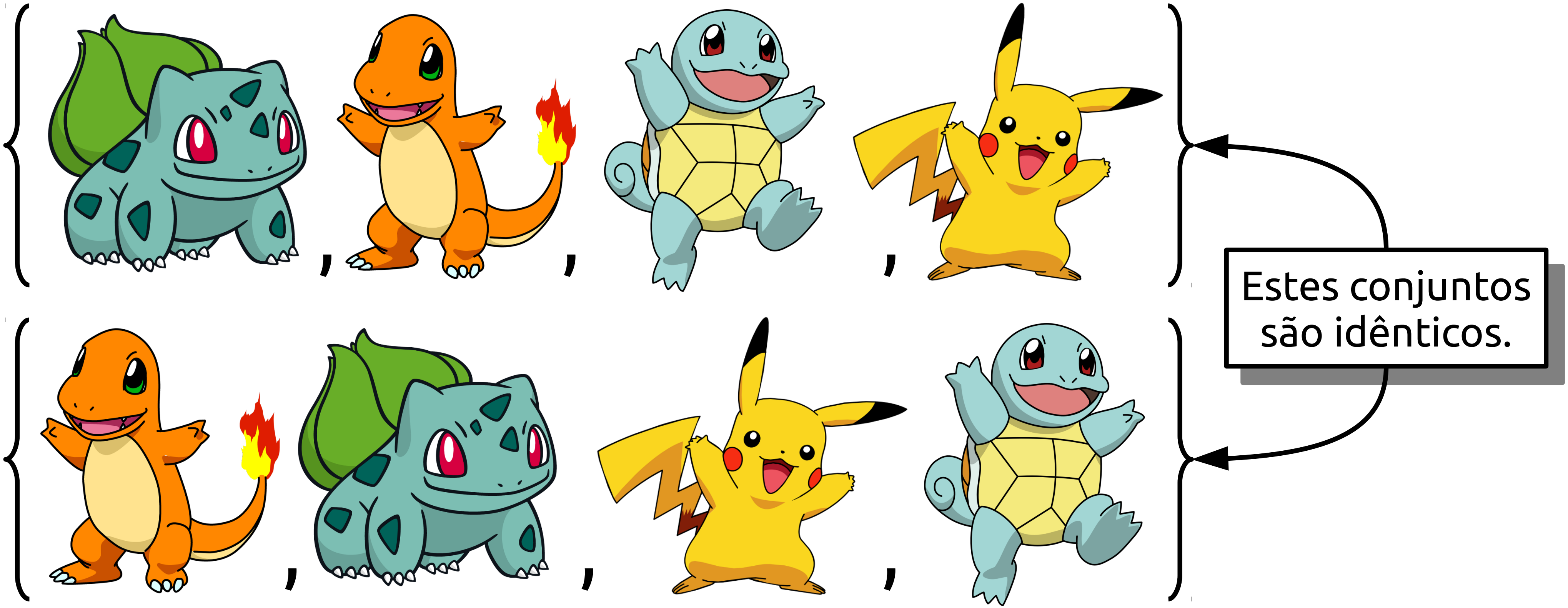
Elementos Químicos

Animais Mamíferos

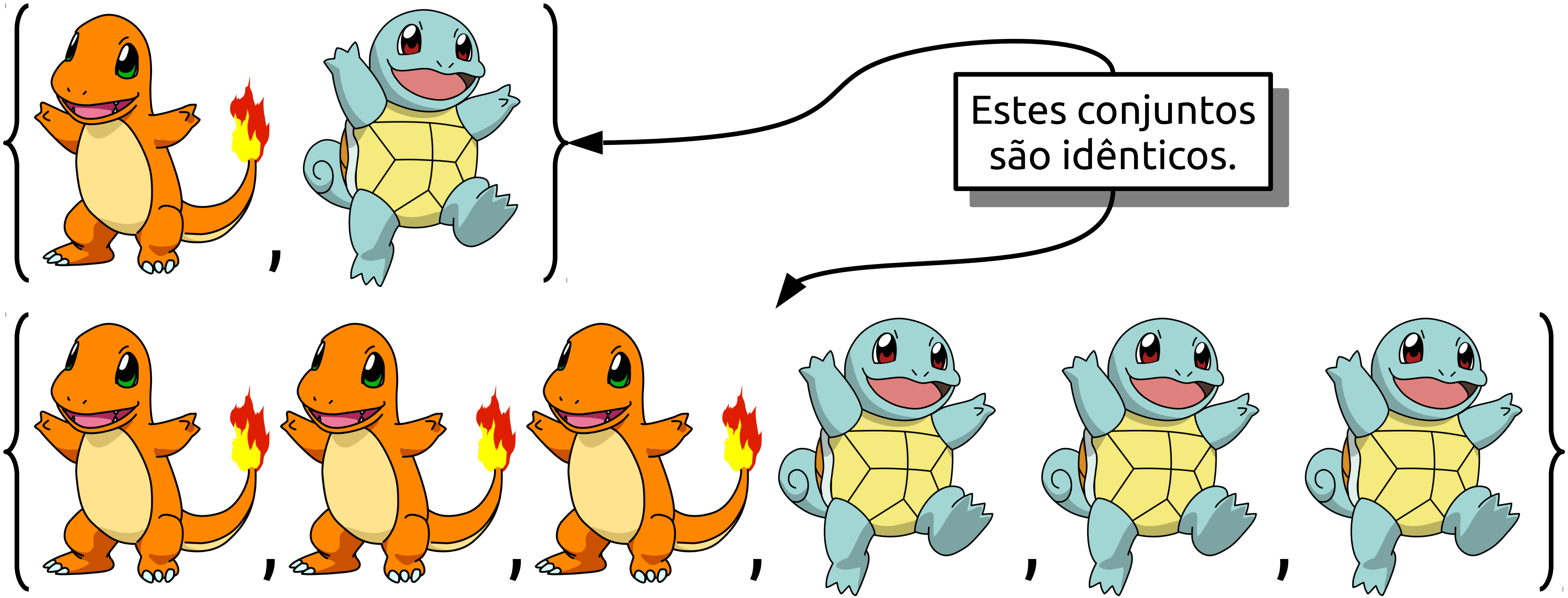
Moedas Brasileiras



Um **conjunto** é uma coleção não ordenada de objetos distintos, que podem ser qualquer coisa (incluindo outros conjuntos).



Dois conjuntos são iguais quando têm exatamente o mesmo conteúdo, ignorando a ordem.



Os conjuntos não podem conter o mesmo objeto duas vezes.
Elementos repetidos são ignorados.

$$\{\quad\} = \emptyset$$

O **conjunto vazio**
não contém elementos

Usamos este símbolo para
denotar o conjunto vazio

Este é um número.

Este é um conjunto.
Ele contém um número.

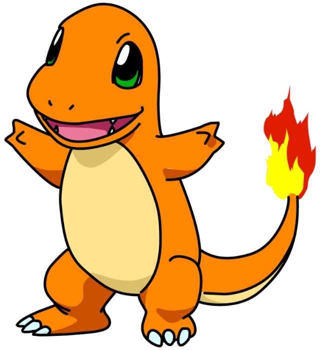
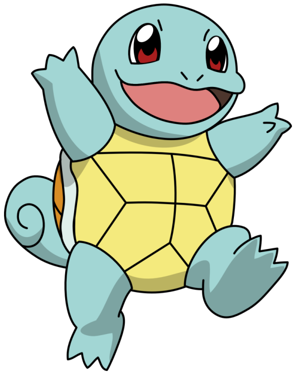
$$1 \neq \{1\}$$

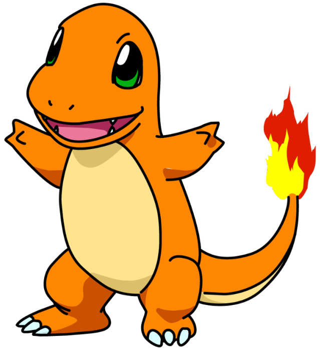
Este conjunto não contém nada.

Este conjunto contém um elemento que se trata do conjunto vazio.

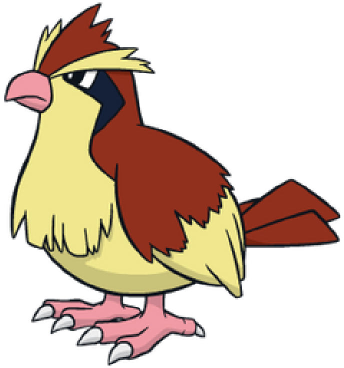
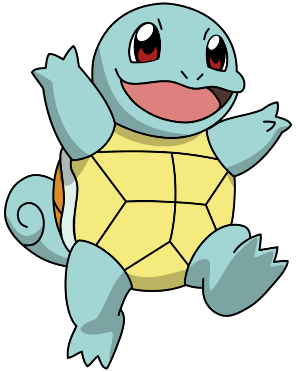
$$\emptyset \neq \{\emptyset\}$$

Presença

 $\in$ { , , ,  }

 está presente neste conjunto? **Sim**

Presença

 $\notin$ {, , , }

 está presente neste conjunto? **Não**

Presença em Conjuntos

- Dado um conjunto **S** e um objeto **x**, escrevemos

$$x \in S$$

- Se **x** estiver contido em **S**, caso contrário

$$x \notin S$$

- Se **x ∈ S**, dizemos que **x** é um **elemento** de **S**.
- Dado qualquer objeto **x** e qualquer conjunto **S**, ou **x ∈ S** ou **x ∉ S**.

Conjuntos Infinitos

- Alguns conjuntos contêm infinitos elementos!
- O conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ é o conjunto de todos os **números naturais**.
  - Alguns matemáticos não incluem zero nessa classe, suponha que 0 é um número natural.
- O conjunto $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ é o conjunto de todos os **inteiros**.
  - Z é do alemão “Zahlen”.
- O conjunto $\mathbb{R}$ é o conjunto de todos os **números reais**.
  - $e \in \mathbb{R}$, $\pi \in \mathbb{R}$, $4 \in \mathbb{R}$, etc.

Descrevendo Conjuntos Complexos

- Aqui temos algumas descrições em português de conjuntos infinitos:
  - “O conjunto de todos os números pares.”
  - “O conjunto de todos os números reais menores que 100.”
  - “O conjunto de todos os inteiros negativos.”
- Para descrever conjuntos complexos como esses matematicamente, usaremos a **notação construtora de conjuntos**.

Números Naturais Pares

$$\{\, n \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } n \text{ é par} \,\}$$

O conjunto de todos n — onde — n é um número natural — e n é par

$$\{\, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \ldots \,\}$$

Notação Construtora de Conjuntos

- Um conjunto pode ser especificado através da **notação construtora de conjuntos**:

  { x | alguma propriedade que x satisfaça }

- Por exemplo:

  $\{ r \mid r \in \mathbb{R} \text{ e } r < 137 \}$

  { n | n é um número natural par }

  { S | S é um conjunto de moedas brasileiras }

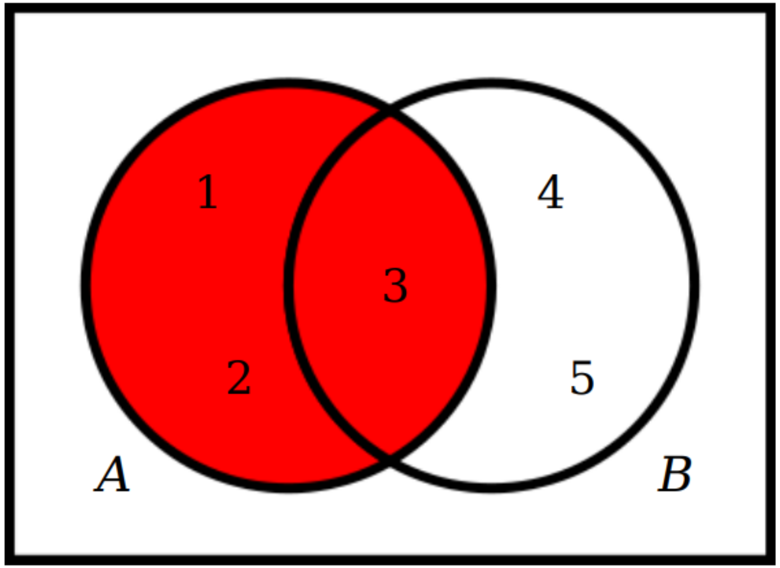
  { a | a é um animal mamífero }

  $\{ r \in \mathbb{R} \mid r < 137 \}$

  $\{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é ímpar} \}$

Combinando Conjuntos

Diagramas Venn

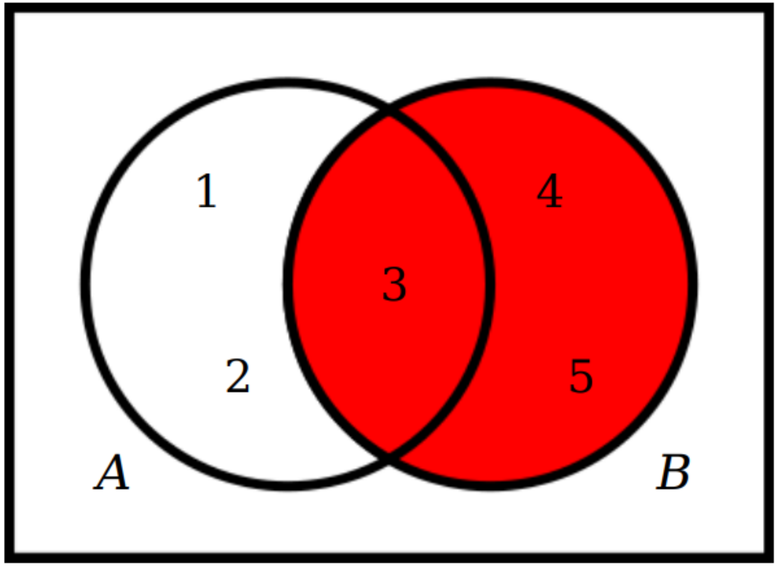


A

$A = \{ 1, 2, 3 \}$

$B = \{ 3, 4, 5 \}$

Diagramas Venn

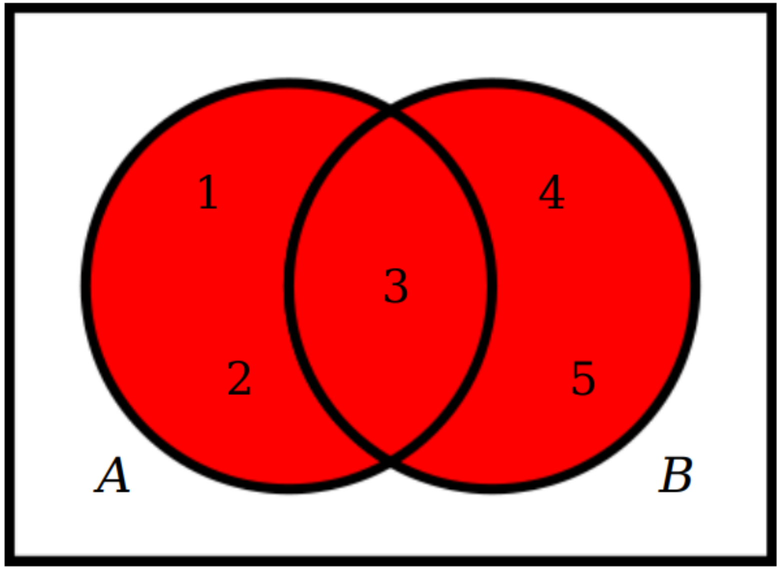


B

A = { 1, 2, 3 }

B = { 3, 4, 5 }

Diagramas Venn



União

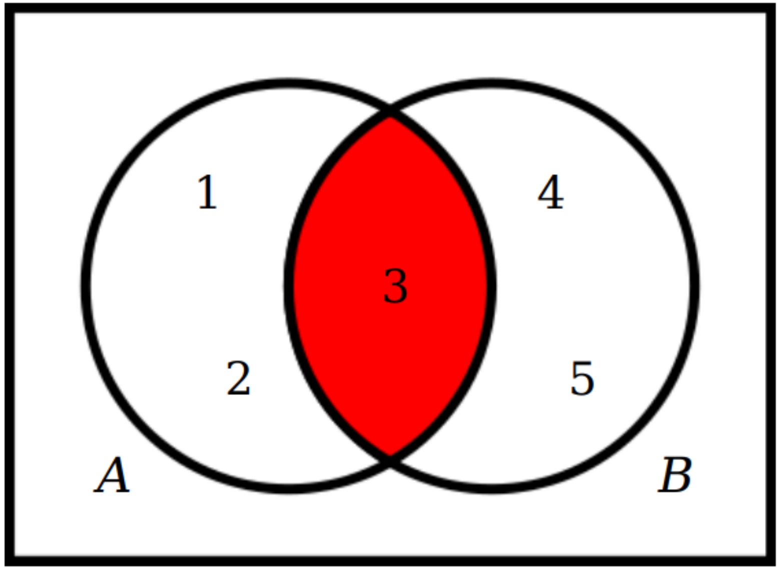
A ∪ B

{ 1, 2, 3, 4, 5 }

A = { 1, 2, 3 }

B = { 3, 4, 5 }

Diagramas Venn



A = { 1, 2, 3 }

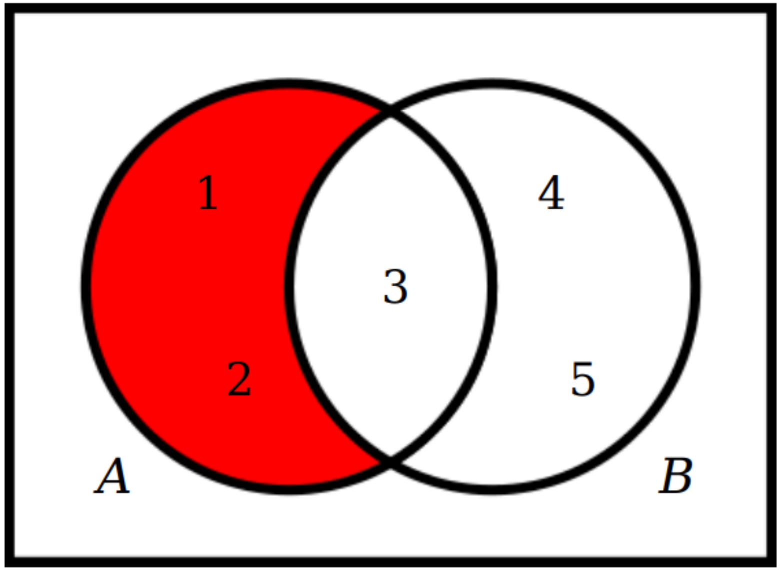
B = { 3, 4, 5 }

Intersecção

$A \cap B$

{ 3 }

Diagramas Venn



Diferença

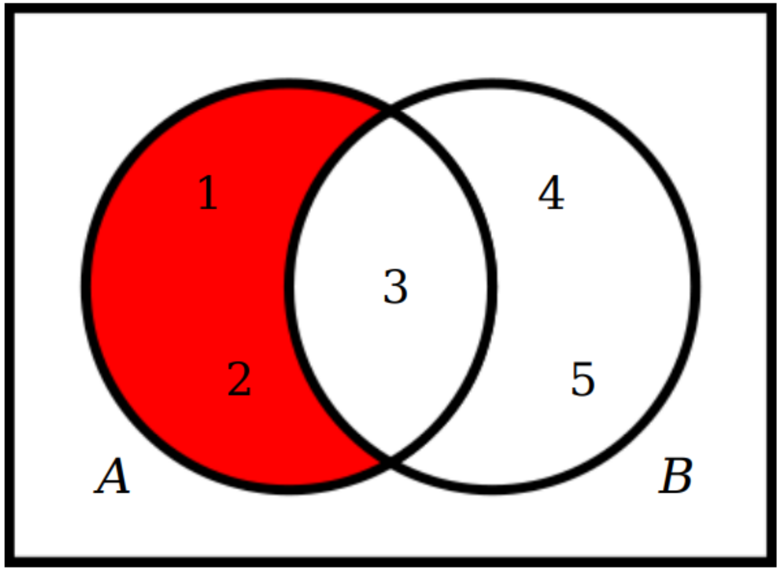
A – B

{ 1, 2 }

A = { 1, 2, 3 }

B = { 3, 4, 5 }

Diagramas Venn



$A = \{ 1, 2, 3 \}$

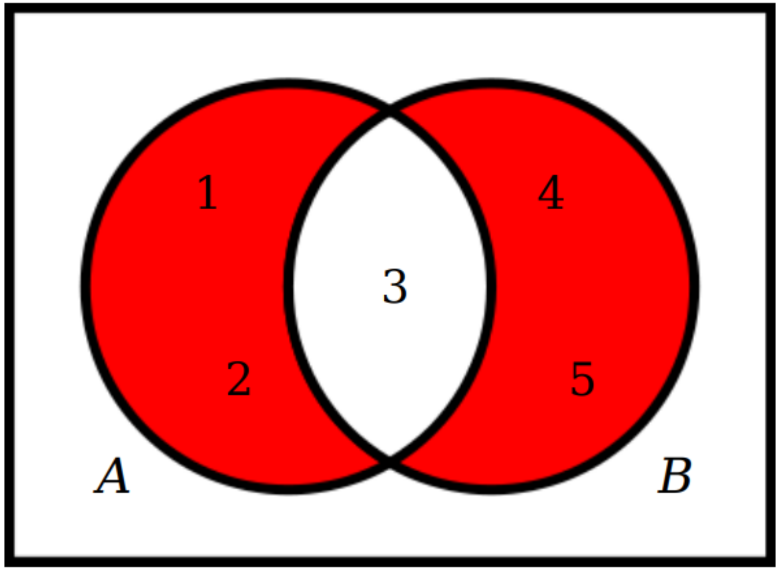
$B = \{ 3, 4, 5 \}$

Diferença

$A \setminus B$

$\{ 1, 2 \}$

Diagramas Venn



A = { 1, 2, 3 }

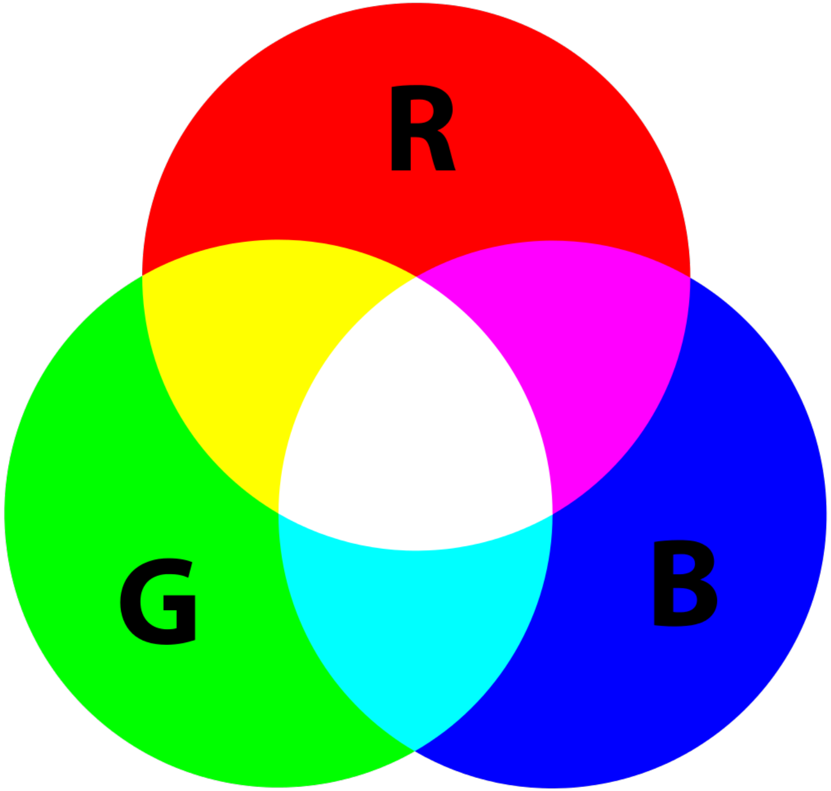
B = { 3, 4, 5 }

Diferença Simétrica

A Δ B

{ 1, 2, 4, 5 }

Diagramas Venn para Três Conjuntos

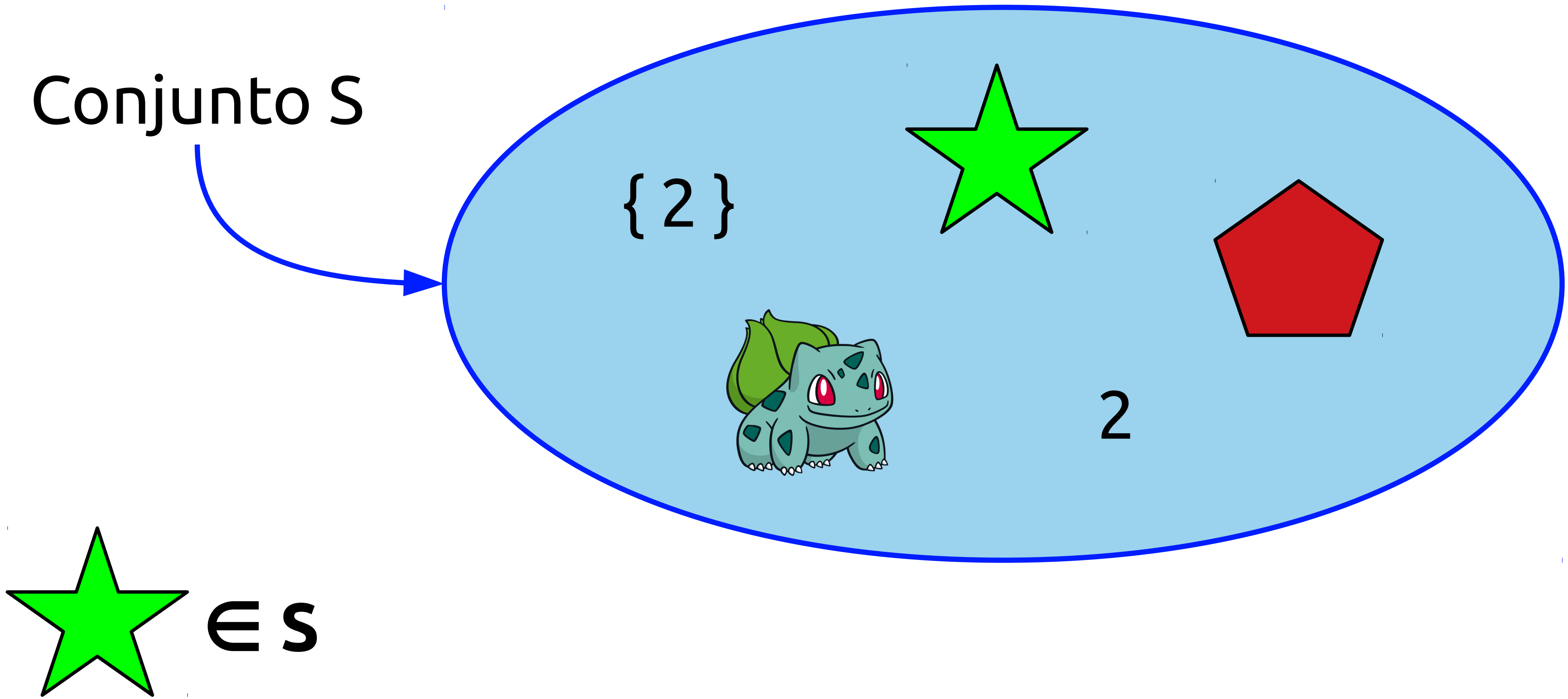


Subconjuntos e Conjuntos de Potência

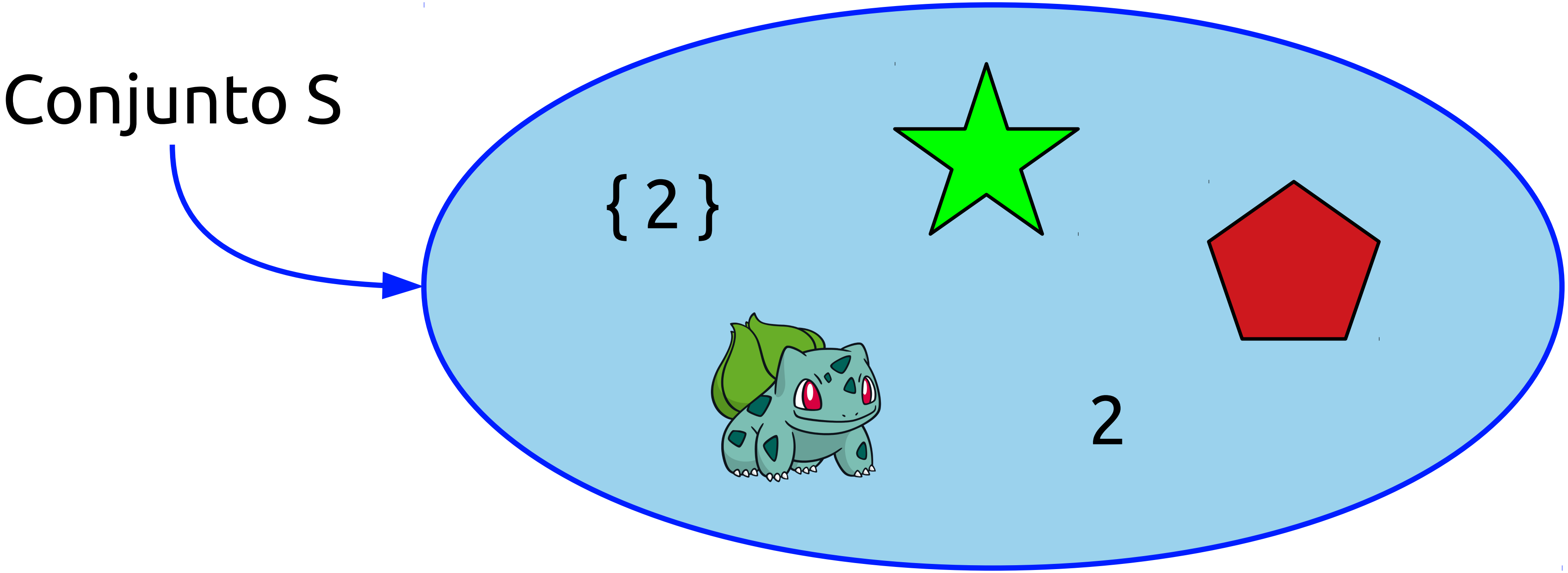
Subconjuntos

- Um conjunto **S** é chamado de **subconjunto** de um conjunto **T** (denotado **S ⊆ T**), se todos os elementos de **S** são também elementos de **T**.
- Exemplos:
  - $\{ 1, 2, 3 \} \subseteq \{ 1, 2, 3, 4 \}$
  - $\{ b, c \} \subseteq \{ a, b, c, d \}$
  - $\{ H, He, Li \} \subseteq \{ H, He, Li \}$
  - $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ (todo número natural é um inteiro)
  - $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ (todo inteiro é um número real)

Subconjuntos e Elementos

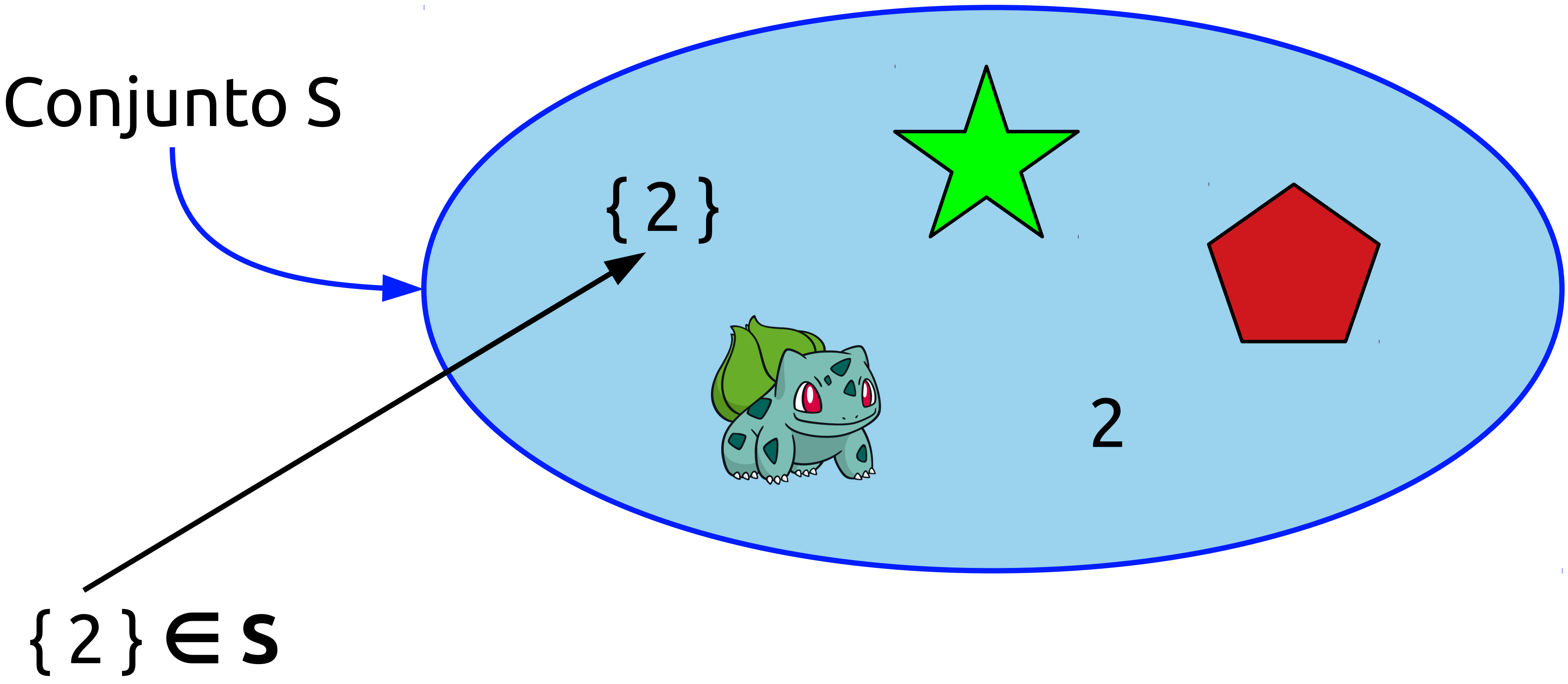


Subconjuntos e Elementos

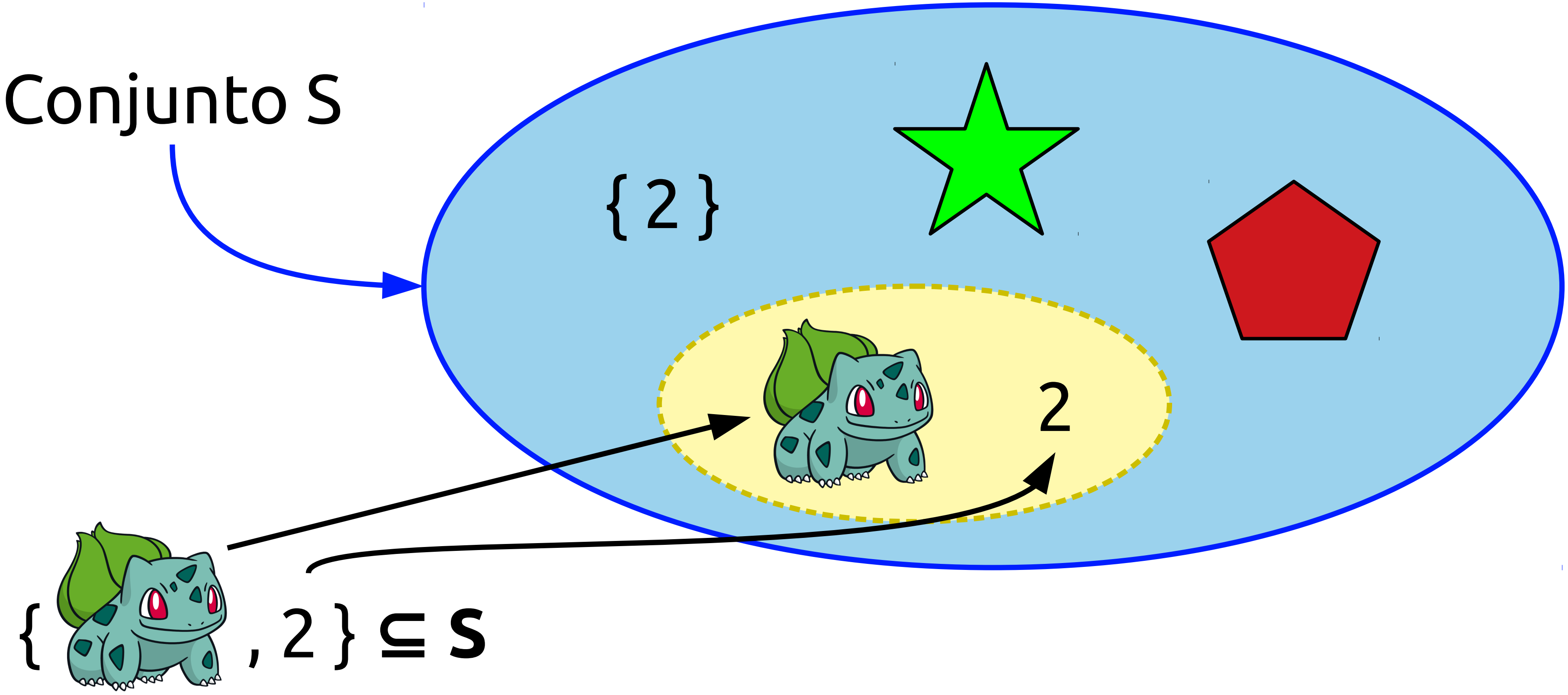


$2 \in \mathbf{S}$

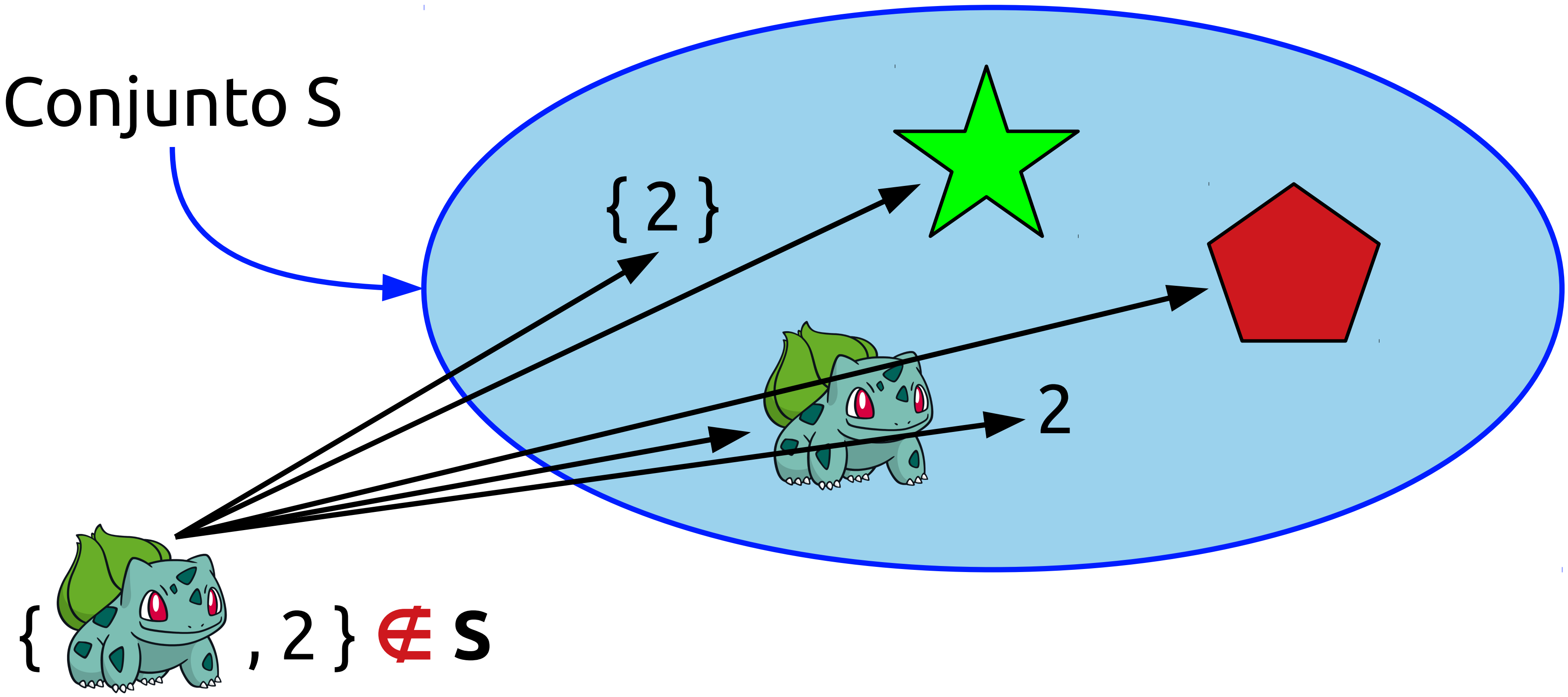
Subconjuntos e Elementos



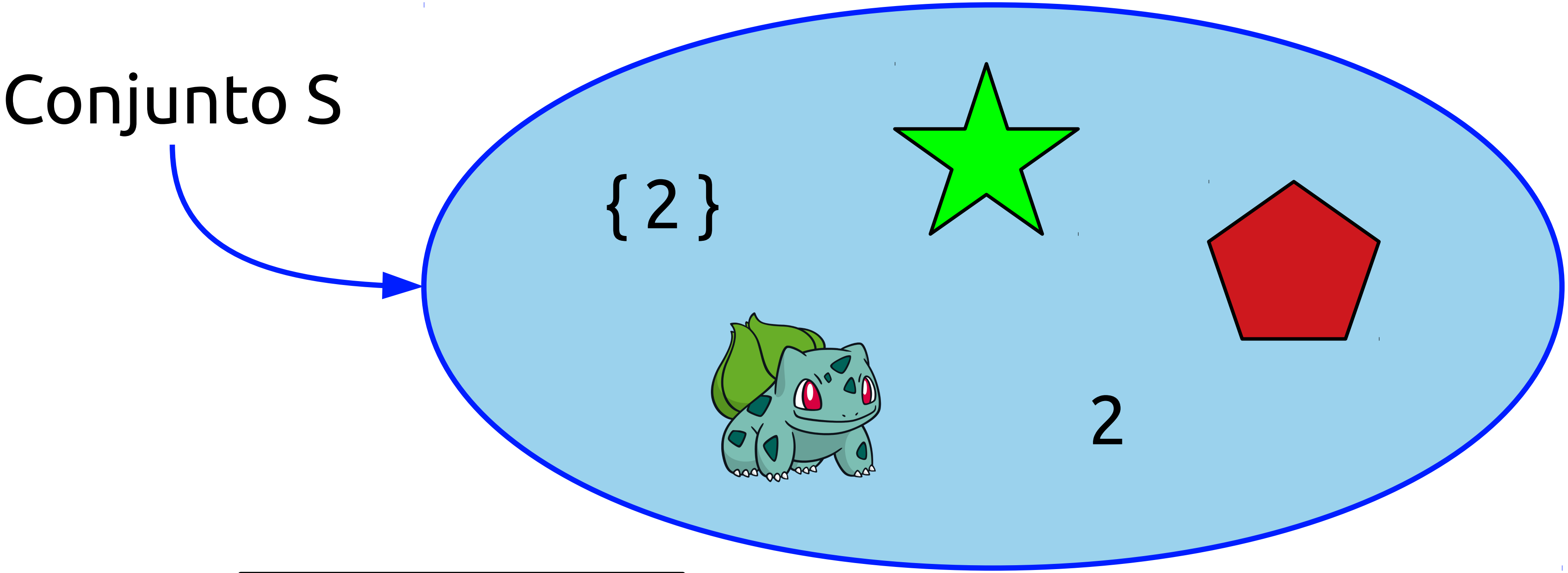
Subconjuntos e Elementos



Subconjuntos e Elementos



Subconjuntos e Elementos



$2 \nsubseteq \mathbf{S}$

Uma vez que 2
não é um conjunto.

Subconjuntos e Elementos

- Dizemos que **S ∈ T** se, entre os elementos de **T**, um deles é exatamente o objeto **S**.
- Dizemos que **S ⊆ T** se **S** for um conjunto e cada elemento de **S** também for um elemento de **T**. (**S** tem que ser um conjunto para que a afirmação **S ⊆ T** seja significativa).
- Embora esses conceitos sejam semelhantes, eles não são os mesmos! Nem todos os elementos de um conjunto são subconjuntos desse conjunto e vice-versa.

E o Conjunto Vazio?

- Um conjunto **S** é chamado de **subconjunto** de um conjunto **T** (denotado **S ⊆ T**) se todos os elementos de **S** também são elementos de **T**.
- Há algum conjunto **S** onde **Ø ⊆ S**?
- Equivalentemente, existe um conjunto **S** onde a seguinte afirmação é verdadeira?

  "Todos os elementos de Ø também são elementos de S"

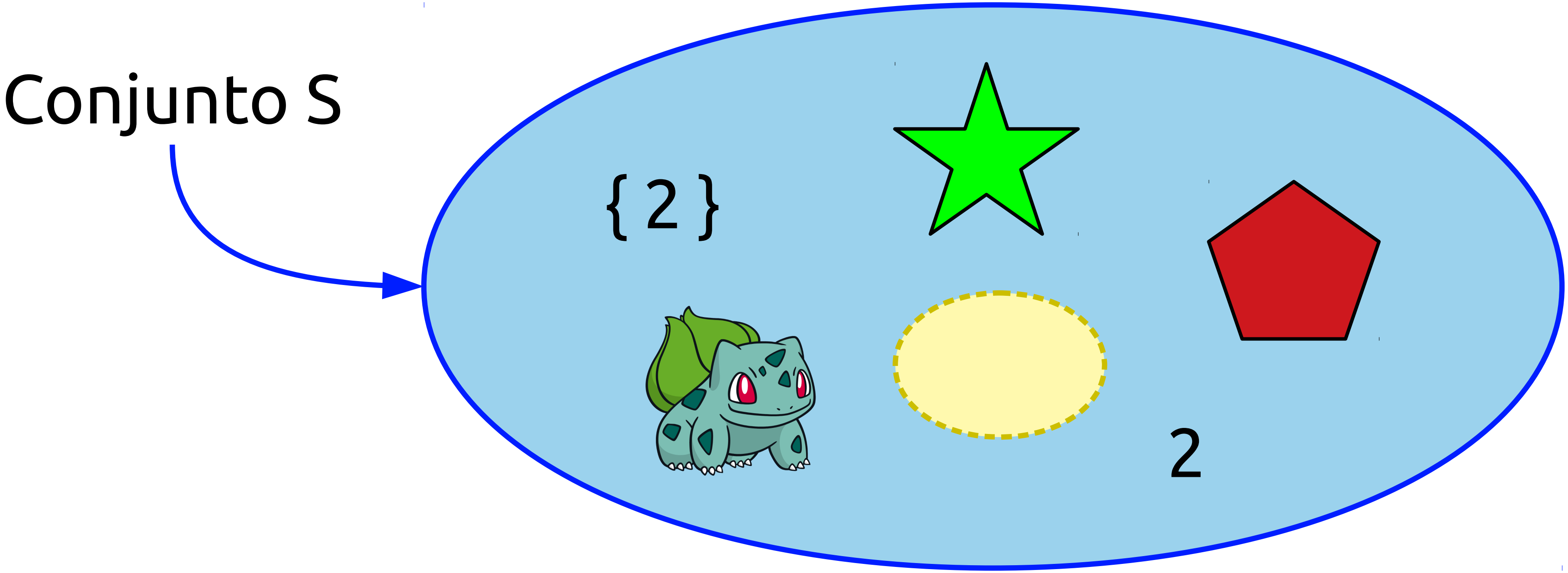
- Sim! Na verdade, essa afirmação é verdadeira para todas as opções de **S**!

Verdade Vazia

- Uma declaração na forma

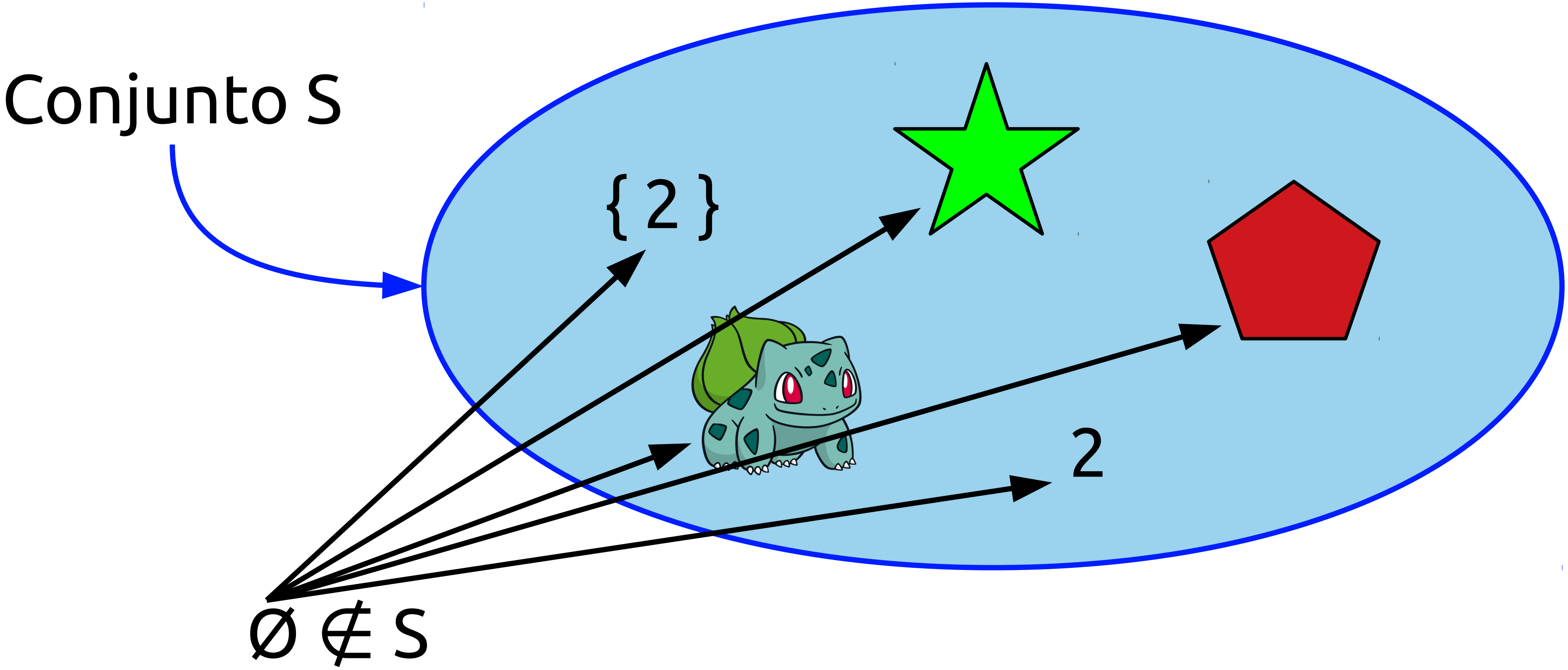
  "Todos os objetos do tipo **P** também são do tipo **Q**"
- É chamado **vagamente verdadeiro** se não houver objetos do tipo **P**.
- Declarações vagamente verdadeiras são verdadeiras por definição. Esta é uma convenção usada em toda a matemática
- Exemplos:
  - Todos os unicórnios são rosa.
  - Todos os unicórnios são azul.
  - Cada elemento de Ø também é um elemento de **S**.

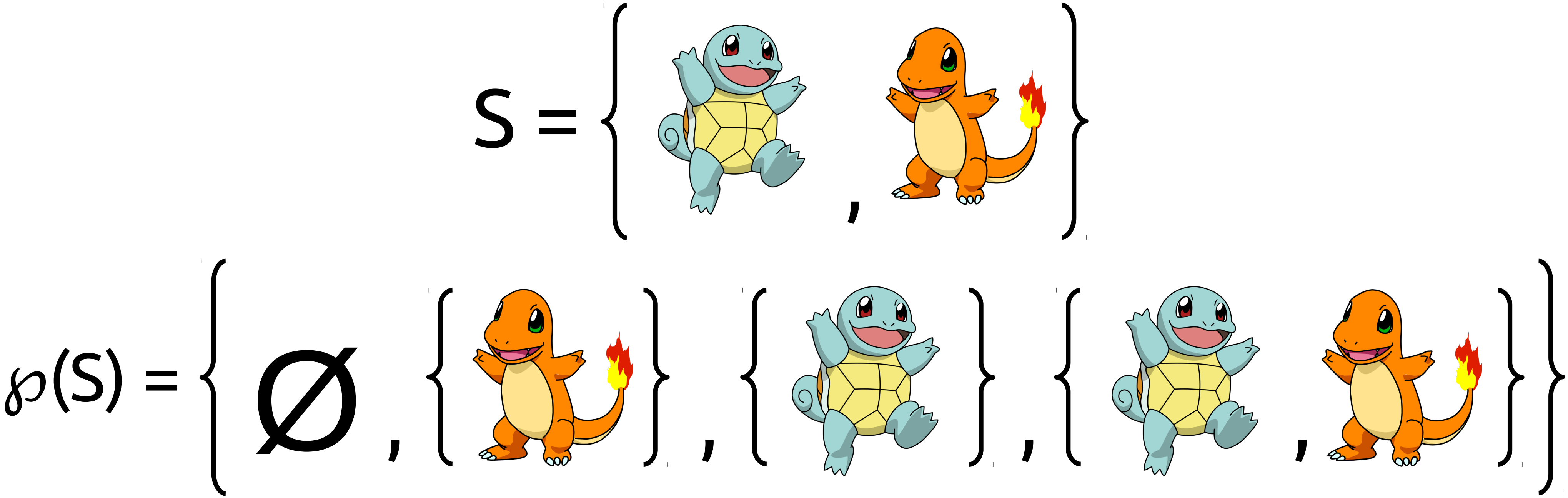
Subconjuntos e Elementos



$\emptyset \subseteq S$

Subconjuntos e Elementos





A notação (℘ S) denota o **conjunto de potência** de S
(o conjunto de todos os subconjuntos de S)

Formalmente, $\wp(S) = \{\, T \mid T \subseteq S \,\}$

Qual é o $\wp(\emptyset)$?

Resposta: $\{ \emptyset \}$

Lembre que $\emptyset \neq \{ \emptyset \}$

Cardinalidade

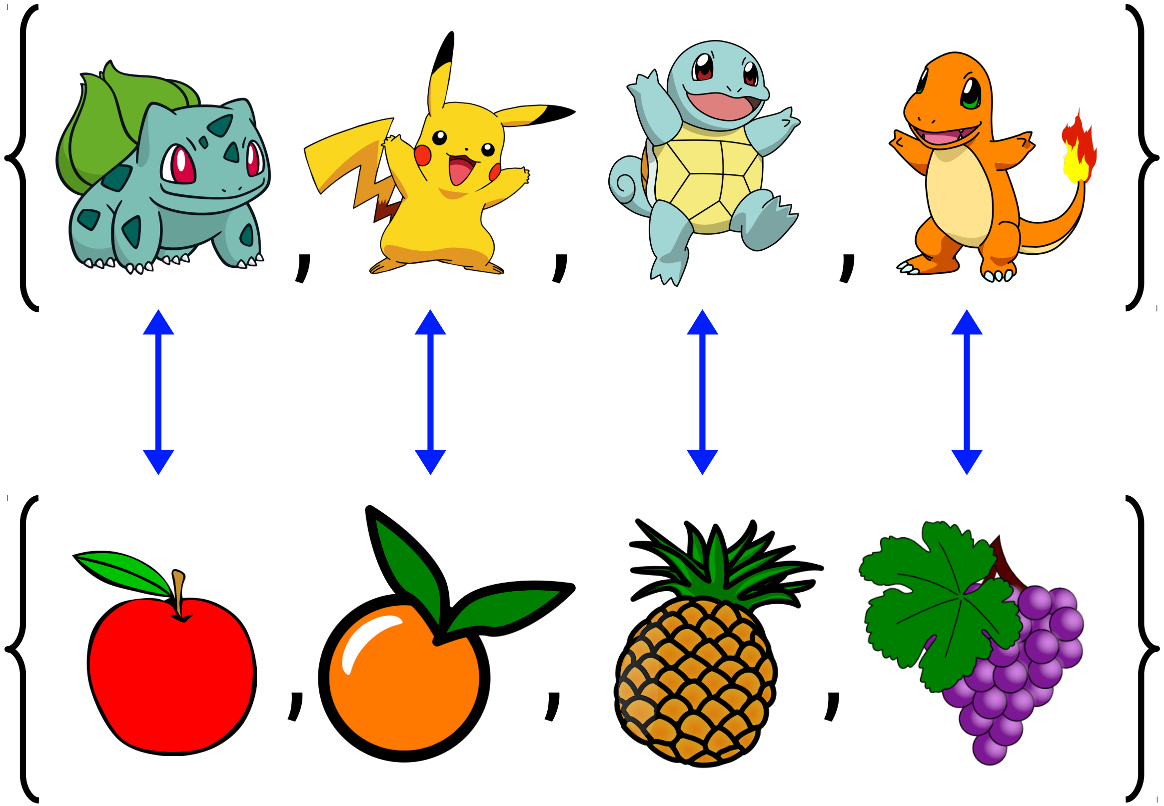
Cardinalidade

- A **cardinalidade** de um conjunto é o número de elementos que ele contém.
- Se **S** for um conjunto, denotamos sua cardinalidade escrevendo | **S** |.
- Exemplos:
  - $|\{a, b, c, d, e\}| = 5$
  - $|\{ \{a, b\}, \{c, d, e, f, g\}, \{h\} \}| = 3$
  - $|\{1, 2, 3, 3, 3, 3, 3\}| = 3$
  - $|\{n \in \mathbb{N} \mid n < 137\}| = 137$

A Cardinalidade de $\mathbb{N}$

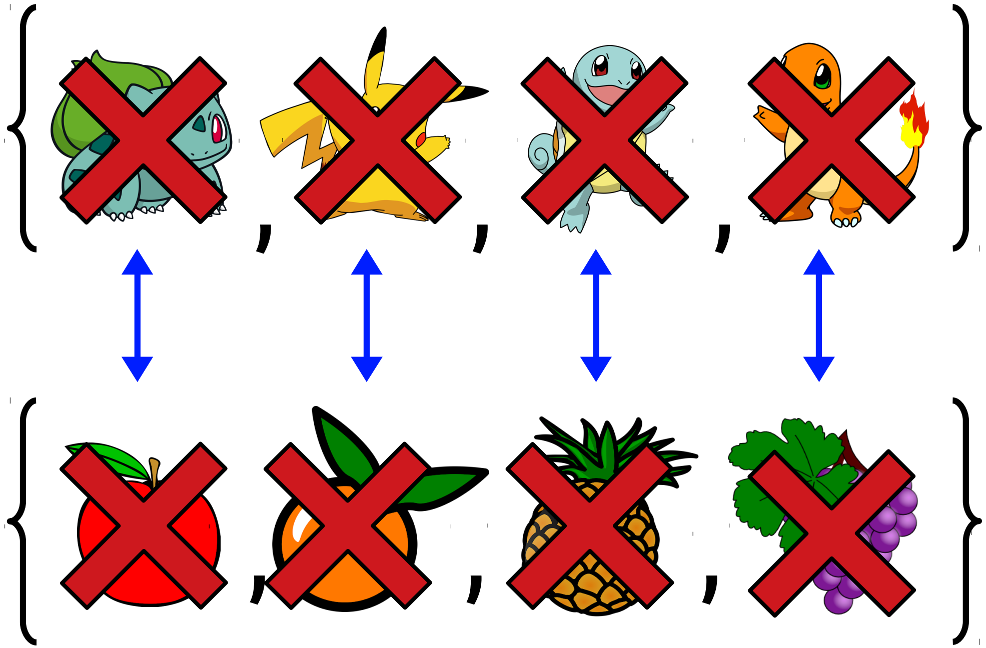
- O que é $|\mathbb{N}|$?
  - Existem infinitos números naturais.
  - $|\mathbb{N}|$ não pode ser um número natural, pois é infinitamente grande.
- Precisamos introduzir um novo termo.
- Vamos definir $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$.
  - $\aleph_0$ é pronunciado "aleph-zero," "aleph-nought," ou "aleph-null."

Quão grande são esses conjuntos?



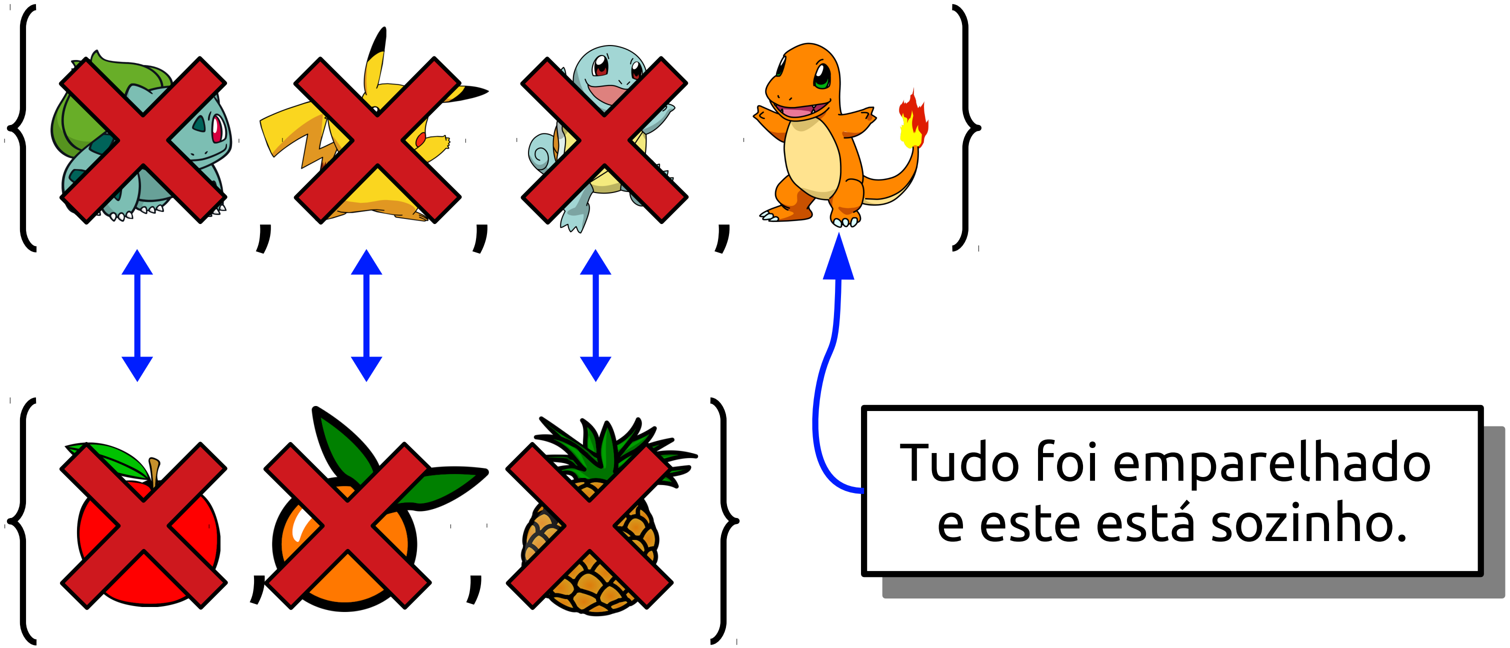
Comparando Cardinalidades

- Por definição, dois conjuntos têm o mesmo tamanho se houver uma maneira de emparelhar seus elementos sem deixar nenhum elemento descoberto. A seguir temos a intuição:



Comparando Cardinalidades

- Por definição, dois conjuntos têm o mesmo tamanho se houver uma maneira de emparelhar seus elementos sem deixar nenhum elemento descoberto. A seguir temos a intuição:



Cardinalidades Infinitas

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
S	0	2	4	6	8	10	12	14	16	...

$$n \leftrightarrow 2n$$

$$S = \{\, n \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } n \text{ é par} \,\}$$

$$|S| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$$

Cardinalidades Infinitas

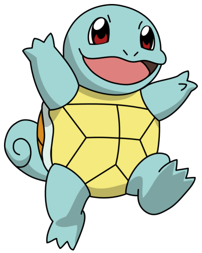
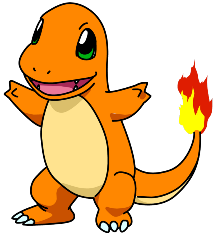
$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$\mathbb{Z}$	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	...

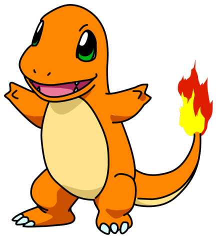
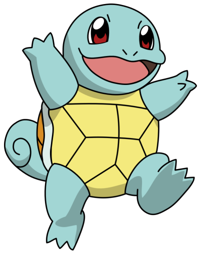
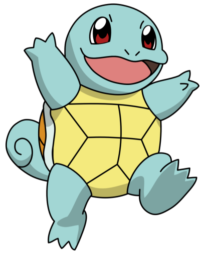
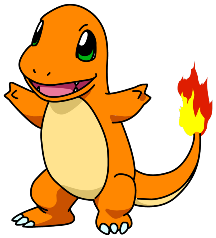
$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = \aleph_0$$

Emparelhe inteiros não negativos com números naturais pares.
Emparelhe inteiros negativos com números naturais ímpares.

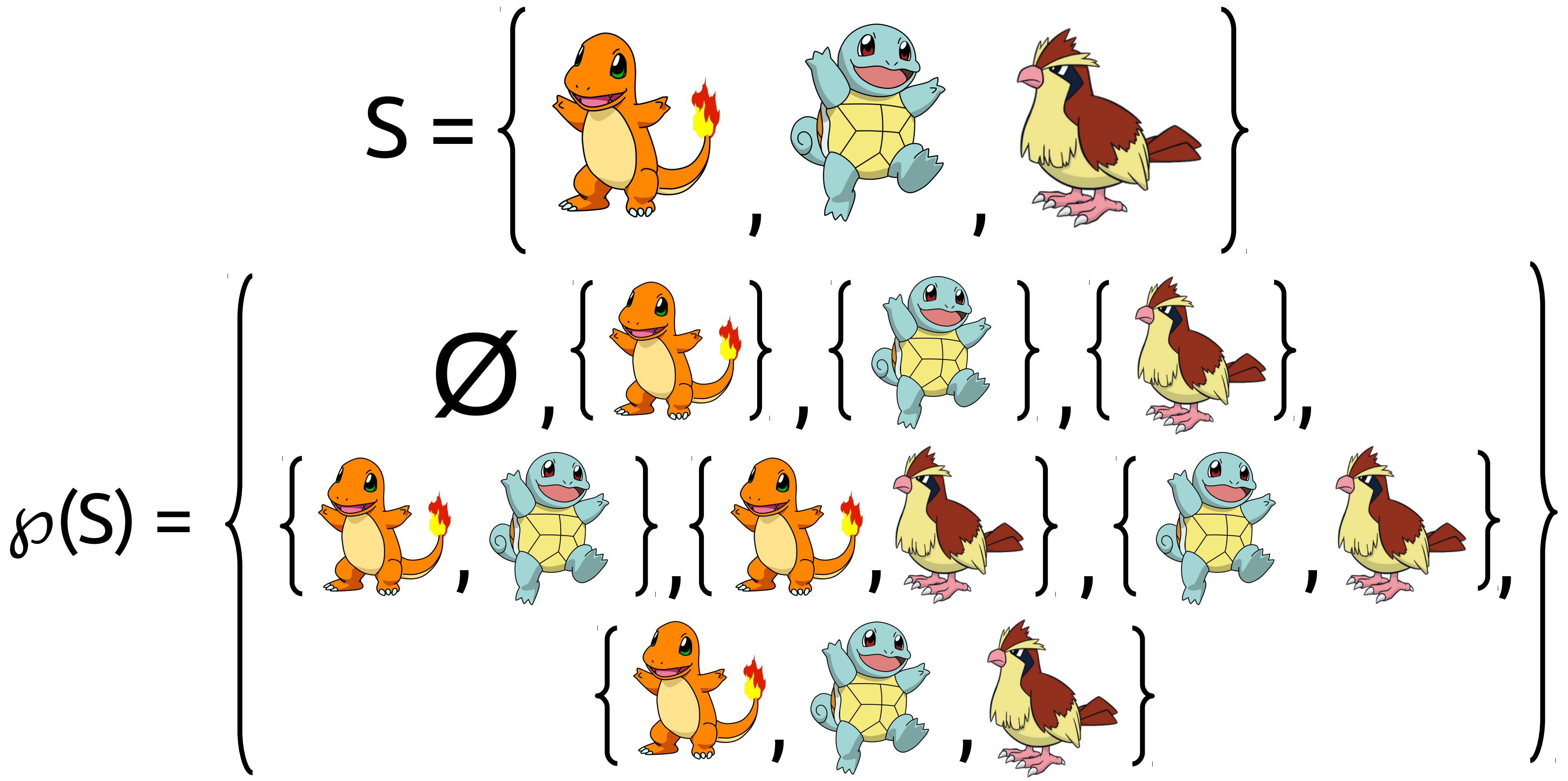
Pergunta Importante:

Todos os conjuntos infinitos têm a mesma cardinalidade?

S = {  ,  }

$\wp$(S) = { $\varnothing$, {  } , {  } , {  ,  } }

$$|S| < |\wp(S)|$$



$$|S| < |\wp(S)|$$

$$S = \{ a, b, c, d \}$$

$$\wp(S) = \{$$

$$\varnothing,$$

$$\{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ d \},$$

$$\{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ a, d \}, \{ b, c \}, \{ b, d \}, \{ c, d \},$$

$$\{ a, b, c \}, \{ a, b, d \}, \{ a, c, d \}, \{ b, c, d \},$$

$$\{ a, b, c, d \}$$

$$\}$$

$$|S| < |\wp(S)|$$

Se $|S|$ é infinito, qual é a relação entre $|S|$ e $|\wp(S)|$?

É $|S| = |\wp(S)|$?

Se $|S| = |\wp(S)|$, podemos emparelhar os elementos de **S** e os elementos de $\wp(S)$ sem deixar nada de fora

$$x_0 \longleftrightarrow \{ x_0, x_2, x_4, \ldots \}$$

$$x_1 \longleftrightarrow \{ x_0, x_3, x_4, \ldots \}$$

$$x_2 \longleftrightarrow \{ x_4, \ldots \}$$

$$x_3 \longleftrightarrow \{ x_0, x_4, \ldots \}$$

$$x_4 \longleftrightarrow \{ x_0, x_5, \ldots \}$$

$$x_5 \longleftrightarrow \{ x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots \}$$

...

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...

$$x_0 \longleftrightarrow \{x_0, x_2, x_4, \dots\}$$

$$x_1 \longleftrightarrow \{x_0, x_3, x_4, \dots\}$$

$$x_2 \longleftrightarrow \{x_4, \dots\}$$

$$x_3 \longleftrightarrow \{x_0, x_4, \dots\}$$

$$x_4 \longleftrightarrow \{x_0, x_5, \dots\}$$

$$x_5 \longleftrightarrow \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots\}$$

...

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...
x_0	**S**	**N**	**S**	**N**	**S**	**N**	...
x_1	**S**	**N**	**N**	**S**	**S**	**N**	...
x_2	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	**N**	...
x_3	**N**	**S**	**N**	**N**	**S**	**N**	...
x_4	**S**	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	...
x_5	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	...
...	...	...	...	...	...	...	...

	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	...
X_0	**S**	**N**	**S**	**N**	**S**	**N**	...
X_1	**S**	**N**	**N**	**S**	**S**	**N**	...
X_2	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	**N**	...
X_3	**N**	**S**	**N**	**N**	**S**	**N**	...
X_4	**S**	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	...
X_5	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	...
...	...	...	...	...	...	...	...

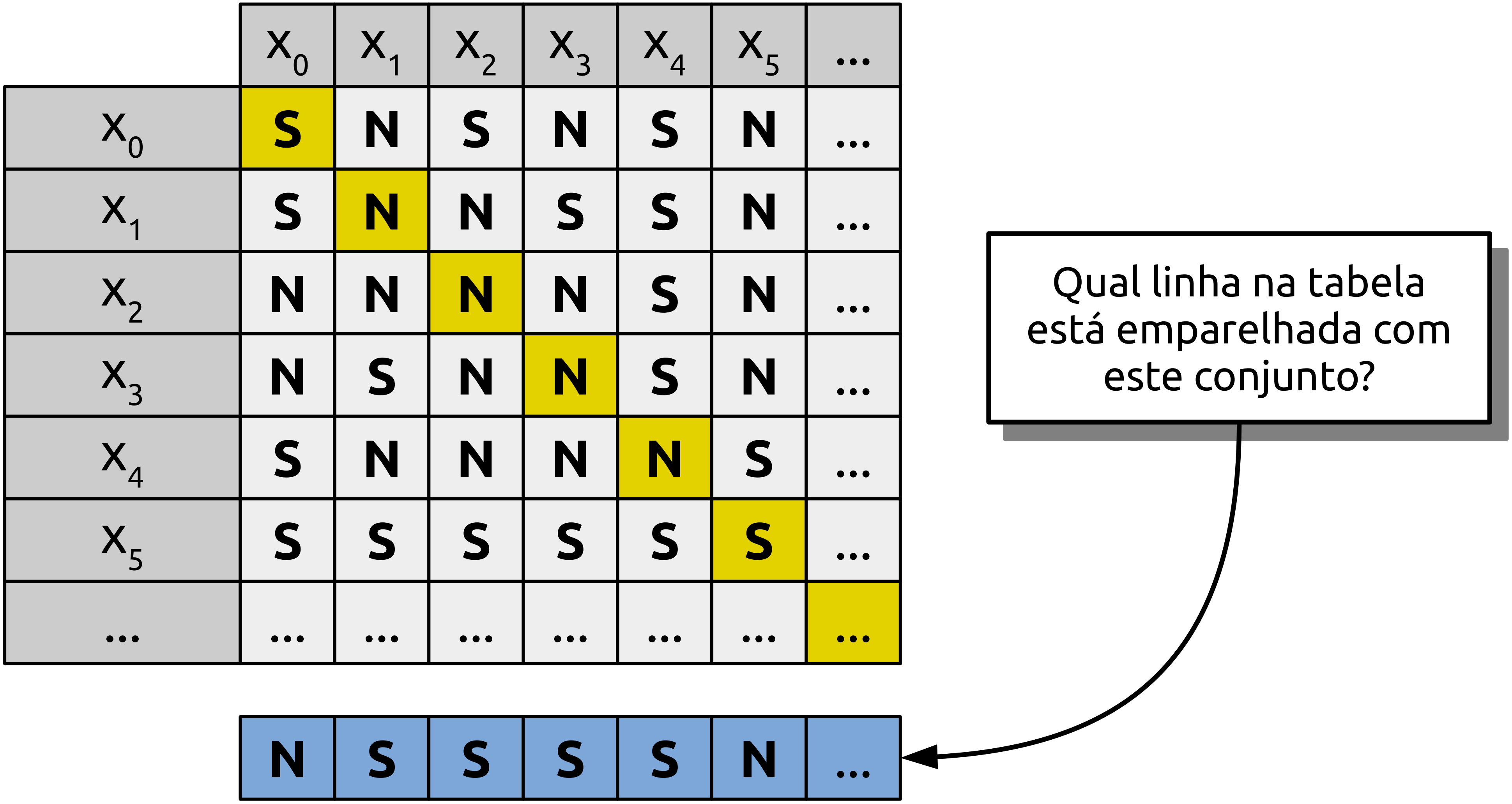
S	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	...

Qual linha da tabela está emparelhada com este conjunto?

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...
x_0	**S**	**N**	**S**	**N**	**S**	**N**	...
x_1	**S**	**N**	**N**	**S**	**S**	**N**	...
x_2	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	**N**	...
x_3	**N**	**S**	**N**	**N**	**S**	**N**	...
x_4	**S**	**N**	**N**	**N**	**N**	**S**	...
x_5	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	**S**	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Virar todos os S's para N's e vice-versa para obter um novo conjunto

N	**S**	**S**	**S**	**S**	**N**	...


x0 x1 x2 x3 x4 x5 ...
x0 S N S N S N ...
x1 S N N S S N ...
x2 N N N N S N ...
x3 N S N N S N ...
x4 S N N N N S ...
x5 S S S S S S ...
... ...
Qual linha na tabela está emparelhada com este conjunto?
N S S S S N ...

A Prova de Diagonalização

- Não importa como pareamos elementos de **S** e subconjuntos de **S**, a diagonal complementada não aparecerá na tabela.
  - Na linha **n**, o enésimo elemento deve estar errado.
- Não importa como emparelhemos os elementos de **S** e os subconjuntos de **S**, sempre sobra pelo menos um subconjunto.
- Este resultado é o **teorema de Cantor**: cada conjunto é estritamente menor do que seu conjunto de potência:

Se S é um conjunto, então $|S| < |\wp(S)|$.

Cardinalidades Infinitas

- Pelo **Teorema de Cantor**:

$$|\mathbb{N}| < |\wp(\mathbb{N})|$$
$$|\wp(\mathbb{N})| < |\wp(\wp(\mathbb{N}))|$$
$$|\wp(\wp(\mathbb{N}))| < |\wp(\wp(\wp(\mathbb{N})))|$$
$$|\wp(\wp(\wp(\mathbb{N})))| < |\wp(\wp(\wp(\wp(\mathbb{N}))))|$$

- Nem todos os conjuntos infinitos têm o mesmo tamanho.
- Não existe infinito maior!
- Existem infinitos infinitos!

O que isso tem a ver com computação?

“O conjunto de todos os programas de computador”

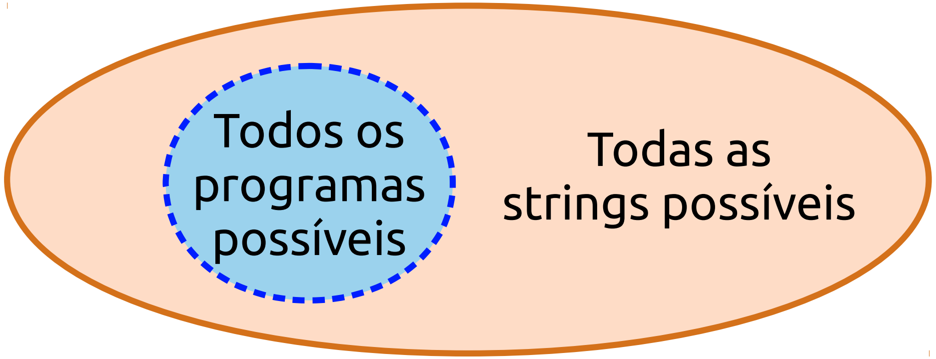
“O conjunto de todos os problemas para solucionar”

Destino

- Uma string é uma sequência de caracteres.
- Devemos provar os seguintes resultados:
  - Existem, no máximo, tantos programas quanto strings.
  - Existem pelo menos tantos problemas quanto conjuntos de strings.

Strings e Programas

- O código-fonte de um programa de computador é apenas uma sequência de texto (longa, estruturada e bem comentada)
- Todos os programas são strings, mas nem todas as strings são necessariamente programas.



$$|\text{Programas}| \leq |\text{Strings}|$$

Strings e Problemas

- Há uma conexão entre o número de conjuntos de strings e o número de problemas a serem resolvidos
- Seja **S** qualquer conjunto de strings. Este conjunto **S** dá origem a um problema a ser resolvido:

Dada uma string w, determinar se $w \in S$.

Strings e Problemas

Dada uma string w, determinar se $w \in S$.

- Suponha que S é o conjunto

  $S = \{ \text{"a"}, \text{"b"}, \text{"c"}, \ldots, \text{"z"} \}$

- A partir deste conjunto, obtemos este problema:

  Dada uma string w, determinar se w é uma única letra minúscula em português.

Strings e Problemas

Dada uma string w, determinar se w ∈ S.

- Suponha que S é o conjunto

  S = { "0", "1", "2", ..., "9", "10", "11", ... }

- A partir deste conjunto, obtemos este problema:

  Dada uma string w, determinar se w representa um número natural.

Strings e Problemas

Dada uma string w, determinar se $w \in S$.

- Suponha que S é o conjunto

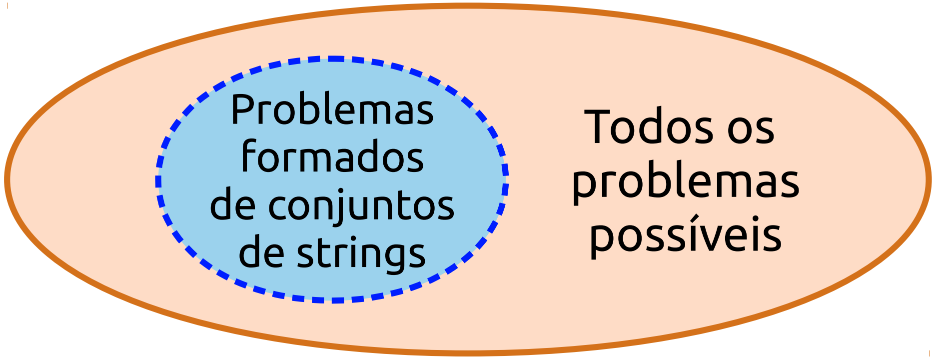
  $S = \{ p \mid p \text{ é um programa Java legal} \}$

- A partir deste conjunto, obtemos este problema:

  Dada uma string w, determinar se w é um programa Java legal.

Strings e Programas

- Cada conjunto de strings dá origem a um problema único a ser resolvido.
- Outros problemas também existem.



|Conjuntos de Strings| ≤ |Problemas|

Todo programa de computador é uma string.

Portanto, o número de programas é no máximo o número de strings.

Do Teorema de Cantor, sabemos que existem mais conjuntos de strings do que strings.

Existem pelo menos tantos problemas quanto conjuntos de strings.

$$|\text{Programas}| \leq |\text{Strings}| < |\text{Conjuntos de Strings}| \leq |\text{Problemas}|$$

Todo programa de computador é uma string.

Portanto, o número de programas é no máximo o número de strings.

Do Teorema de Cantor, sabemos que existem mais conjuntos de strings do que strings.

Existem pelo menos tantos problemas quanto conjuntos de strings.

$$|\text{Programas}| < |\text{Problemas}|$$

Existem mais problemas para resolver do que existem programas para resolvê-los.

$$|\text{Programas}| < |\text{Problemas}|$$

Fica Pior

- Usando uma teoria de conjuntos mais avançada, é possível mostrar que existem infinitamente mais problemas do que soluções.
- Na verdade, se você escolher um problema totalmente aleatório, a probabilidade de resolvê-lo é zero.
- **Fato mais preocupante:** acabamos de mostrar que alguns problemas são impossíveis de resolver com computadores, mas não sabemos quais são esses problemas!

Precisamos desenvolver uma compreensão mais diferenciada da computação.

Destino

- **O que torna um problema impossível de resolver com computadores?**
  - Existe uma razão profunda pela qual certos problemas não podem ser resolvidos com computadores, ou é completamente arbitrário?
  - Como saber quando se está diante de um problema impossível?
  - Esses problemas são do mundo real ou são altamente planejados?
- **Como sabemos que estamos certos?**
  - Como podemos “fazer backup de nossas fotos“ com provas rigorosas?
  - Como podemos construir uma estrutura matemática para estudar computação?