Provas Diretas

O que é uma Prova?

Uma **prova** é um argumento que demonstra porque uma conclusão é verdadeira, sujeita a certos padrões de verdade.

Prova Matemática

Uma **prova matemática** é um argumento que demonstra porque uma afirmação matemática é verdadeira, seguindo as regras da matemática.

Duas Rápidas Definições

- Um inteiro **n** é **par** se houver algum inteiro **k** tal que **n = 2k**.
  - Isso significa que 0 é par.
- Um inteiro **n** é **ímpar** se houver algum inteiro **k** tal que **n = 2k + 1**.
  - Isso significa que 0 não é ímpar.
- Vamos assumir o seguinte por agora:
  - Cada número inteiro é par ou ímpar.
  - Nenhum número inteiro é ambos par e ímpar.

Nossa Primeira Prova Direta

Teorema: Se $\mathbf{n}$ for um número inteiro par, então $\mathbf{n^2}$ é par.

Prova: seja $\mathbf{n}$ um número inteiro par.

Como $\mathbf{n}$ é par, existe algum inteiro $\mathbf{k}$ tal que $\mathbf{n = 2k}$.

Isso significa que $\mathbf{n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)}$.

A partir disso, vemos que há um inteiro $\mathbf{m}$ (nomeadamente, $\mathbf{2k^2}$), onde $\mathbf{n^2 = 2m}$.

Sendo assim, $\mathbf{n^2}$ é par. ■

Esse símbolo Significa "fim da prova"

Nossa Primeira Prova Direta

Para provar uma afirmação na forma

“Se P, então Q”

Assumir que **P** é verdade, então mostrar que **Q** também deve ser verdade.

Nossa Primeira Prova Direta

Teorema: Se **n** for um número inteiro par, então **n²** é par.

Prova: seja **n** um número inteiro par.

Como **n** é par, existe algum inteiro **k** tal que **n = 2k**.

Isso si

A par
(nome

Send

Essa é a definição de um inteiro par. Quando escrevemos uma prova matemática, é comum retornar a definição

Nossa Primeira Prova Direta

Perceba como usamos o valor de **k** que obtivemos acima.
Dar nomes a quantidades, mesmo que não tenhamos certeza do que são, nos permite manipulá-las.
Isso é similar às variáveis dos programas.

Como $\mathbf{n}$ é par, existe algum inteiro $\mathbf{k}$ tal que $\mathbf{n = 2k}$.

Isso significa que $\mathbf{n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)}$.

A partir disso, vemos que há um inteiro $\mathbf{m}$ (nomeadamente, $\mathbf{2k^2}$), onde $\mathbf{n^2 = 2m}$.

Sendo assim, $\mathbf{n^2}$ é par. ■

Nossa Primeira Prova Direta

Nosso objetivo final é provar que n^2 é par.
Isso significa que precisamos encontrar m tal que $n^2 = 2m$.
Aqui, estamos explicitamente mostrando
como podemos fazer isso.

Como n é par, existe algum inteiro k tal que $n = 2k$.

Isso significa que $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$.

A partir disso, vemos que há um inteiro m (nomeadamente, $2k^2$), onde $n^2 = 2m$.

Sendo assim, n^2 é par. ■

Nossa Primeira Prova Direta

Teorema: Se **n** for um número inteiro par, então $\mathbf{n^2}$ é par.

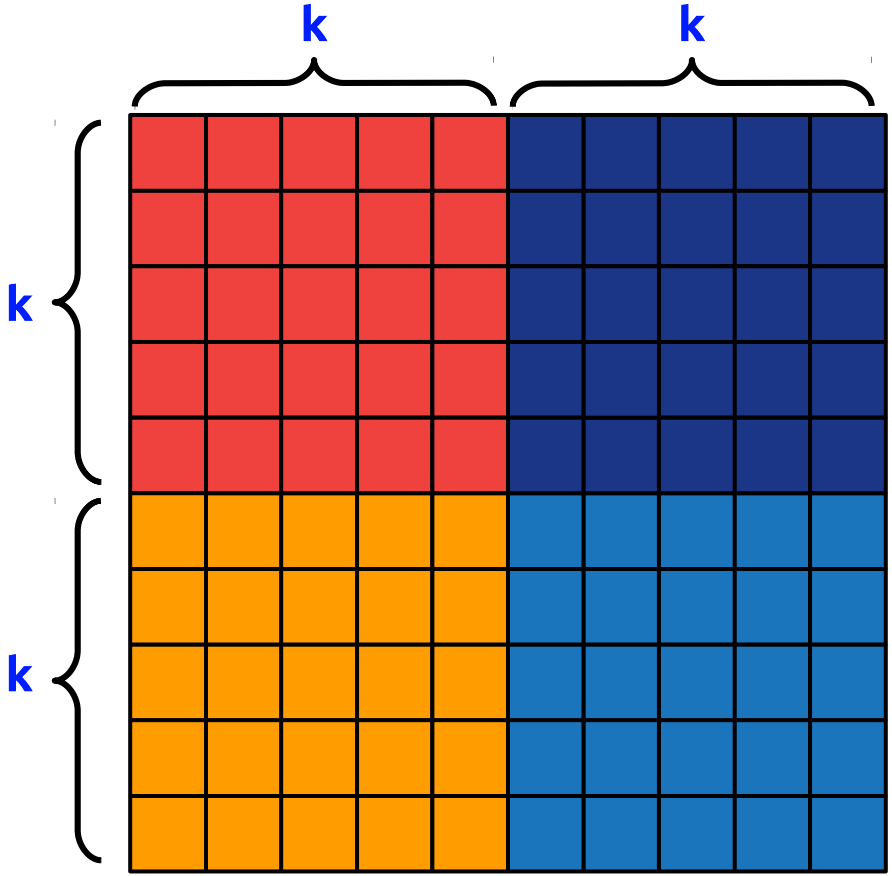
Prova: seja **n** um número inteiro par.

Como **n** é par, existe algum inteiro **k** tal que **n = 2k**.

Aqui é o que estamos tentando apresentar.
Finalmente finalizamos.

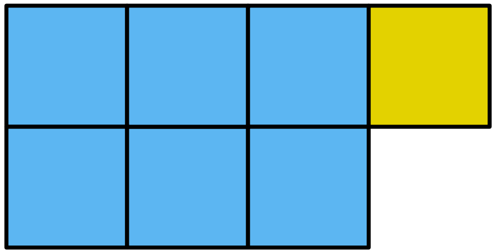
Sendo assim, $\mathbf{n^2}$ é par. ■

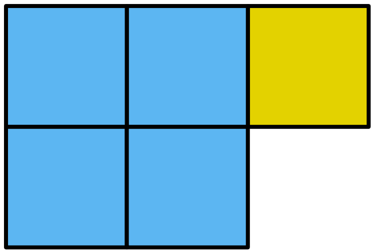
Intuição Visual



Intuição Visual

Teorema: Para quaisquer inteiros **m** e **n**, se **m** e **n** forem ímpares, então **m + n** é par.





Intuição Visual

Teorema: Para quaisquer inteiros **m** e **n**, se **m** e **n** forem ímpares, então **m + n** é par.

Prova:

Como provamos que isso é verdade para **qualquer** inteiro?

Provar que Algo Sempre é Válido

- Muitas declarações têm a forma

  Para qualquer x, [alguma propriedade] é válida para x.

- Exemplos:

  Para todos os inteiros $\mathbf{n}$, se $\mathbf{n}$ for par, $\mathbf{n^2}$ será par.

  Para quaisquer conjuntos $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, se $\mathbf{A \subseteq B}$ e $\mathbf{B \subseteq C}$, então $\mathbf{A \subseteq C}$.

  Para todos os conjuntos $\mathbf{S}$, $\mathbf{|S| < |\wp(S)|}$.

- Como podemos provar essas declarações quando há (potencialmente) infinitos casos para verificar?

Escolhas Arbitrárias

- Para provar que alguma propriedade é verdadeira para todos os **x** possíveis, mostre que, independentemente da escolha de **x** que você fizer, essa propriedade deve ser verdadeira.
- Comece a prova escolhendo **x** **arbitrariamente**:
  - "Seja x um número inteiro par arbitrário."
  - "Seja x qualquer conjunto contendo 137."
  - "Considere qualquer x."
  - "Escolha um número inteiro ímpar x."
- Demonstre que a propriedade é verdadeira para esta escolha de x.

Arbitrariedade

arbitrário

adjetivo /ˈärbiˌtrerē/

Usaremos esta definição

1. Com base na escolha aleatória ou capricho pessoal,
ao invés de qualquer razão ou sistema -
"seus horários das refeições eram inteiramente arbitrários"

2. (do poder ou de um corpo governante) Irrestrito e autocrático
no uso da autoridade - "governo arbitrário do Rei e
bispos tornaram-se impossíveis ”

2. (de uma constante ou outra quantidade) De valor não especificado

Prova

Teorema: Para quaisquer inteiros **m** e **n**, se **m** e **n** forem ímpares, então **m + n** é par.

Prova: Considere quaisquer inteiros arbitrários **m** e **n** onde **m** e **n** são ímpares.

Ao escolher **m** e **n** arbitrariamente, o que quer que provemos sobre **m** e **n** irá generalizar para todas as possíveis escolhas que pudéssemos fazer.

Prova

Teorema: Para quaisquer inteiros **m** e **n**, se **m** e **n** forem ímpares, então **m + n** é par.

Prova: Considere quaisquer inteiros arbitrários **m** e **n** onde **m** e **n** são ímpares.

Para provar uma afirmação na forma

"Se P, então Q"

Assumir que **P** é verdade, então mostrar que **Q** também deve ser verdade.

Prova

Teorema: Para quaisquer inteiros **m** e **n**, se **m** e **n** forem ímpares, então **m + n** é par.

Prova: Considere quaisquer inteiros arbitrários m e n onde m e n são ímpares. Como **m** é ímpar, sabemos que existe um inteiro **k** onde

$$m = 2k + 1 \qquad (1)$$

Da mesma forma, porque **n** é ímpar, deve haver algum inteiro **r** tal que

$$n = 2r + 1 \qquad (2)$$

Ao adicionar as equações (1) e (2), aprendemos que

$$m + n = 2k + 1 + 2r + 1$$

$$m + n = 2k + 2r + 2$$

$$m + n = 2(k + r + 1). \qquad (3)$$

A equação (3) nos diz que existe um inteiro **s** (ou seja, **k + r + 1**) tal que **m** + **n = 2s**. Portanto, vemos que **m + n** é par, conforme requisitado. ■

Prova

Numerar essas igualdades nos permite consultar elas mais tarde, fazendo o fluxo da prova ser mais fácil de compreender

rem ímpares, então **m + n** é

n onde m e n são ímpares.

nde

$m = 2k + 1$ (1)

Da mesma forma, porque **n** é ímpar, deve haver algum inteiro **r** tal que

$n = 2r + 1$ (2)

Ao adicionar as equações (1) e (2), aprendemos que

$m + n = 2k + 1 + 2r + 1$

$m + n = 2k + 2r + 2$

$m + n = 2(k + r + 1).$ (3)

A equação (3) nos diz que existe um inteiro **s** (ou seja, **k + r + 1**) tal que **m** + **n = 2s**. Portanto, vemos que **m + n** é par, conforme requisitado. ■

Prova

Teorema: Para quaisquer inteiros **m** e **n**, se **m** e **n** forem ímpares, então **m + n** é par.

Prova: Considere quaisquer inteiros arbitrários m e n onde m e n são ímpares. Como **m** é ímpar, sabemos que existe um inteiro **k** onde

$m = 2k + 1$ (1)

Da mesma forma, porque **n** é ímpar, deve haver algum inteiro **r** tal que

$n = 2r + 1$ (2)

Perceba que usamos **k** na primeira igualdade e **r** na segunda igualdade. Isso porque sabemos que **n** é o dobro mais um, porém não podemos dizer com certeza que se trata de **k** especificamente.

+ r + 1) tal que **m** + **n** = **2s**.

Prova

Teorema: Para quaisquer inteiros **m** e **n**, se **m** e **n** forem ímpares, então **m + n** é par.

Prova: Considere quaisquer inteiros arbitrários m e n onde m e n são ímpares. Como **m** é ímpar, sabemos que existe um inteiro **k** onde

$$m = 2k + 1. \qquad (1)$$

Esta é uma sentença gramaticamente correta e completa. Provas são esperadas a serem escritas em sentenças completas, sendo assim, você normalmente irá usar pontuação no final das fórmulas.

$$m + n = 2k + 2r + 2$$

$$m + n = 2(k + r + 1). \qquad (3)$$

A equação (3) nos diz que existe um inteiro **s** (ou seja, **k + r + 1**) tal que **m** + **n = 2s**. Portanto, vemos que **m + n** é par, conforme requisitado. ■

Prova

Teorema: Para quaisquer inteiros **m** e **n**, se **m** e **n** forem ímpares, então **m + n** é par.

Prova: Considere quaisquer inteiros arbitrários m e n onde m e n são ímpares. Como **m** é ímpar, sabemos que existe um inteiro **k** onde

$$m = 2k + 1 \qquad (1)$$

Da mesma forma, porque **n** é ímpar, deve haver algum inteiro **r** tal que

$$n = 2r + 1 \qquad (2)$$

Ao adicionar as equações (1) e (2), aprendemos que

$$m + n = 2k + 1 + 2r + 1$$

$$m + n = 2k + 2r + 2$$

$$m + n = 2(k + r + 1). \qquad (3)$$

A equação (3) nos diz que existe um inteiro **s** (ou seja, **k + r + 1**) tal que **m** + **n = 2s**. Portanto, vemos que **m + n** é par, conforme requisitado. ■

Rastreie através desta prova
se **m = 7** e **n = 9**.
Qual é o valor resultado de s?
A. 3
B. 8
C. 17

Prova por Exaustão

Teorema: O produto de quaisquer dois inteiros consecutivos é par.

...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...

Teorema: O produto de quaisquer dois inteiros consecutivos é par.

Prova: Escolha quaisquer dois inteiros consecutivos n e $n + 1$.

Teorema: O produto de quaisquer dois inteiros consecutivos é par.

Prova: Escolha quaisquer dois inteiros consecutivos n e n + 1.

Vamos considerar dois casos:

Caso 1: n é par.

Isso é chamado de prova por casos (alternativamente, uma prova por exaustão) e funciona ao mostrar que o teorema é verdadeiro independentemente de qual resultado que aparece.

Caso 2: n é ímpar.

Teorema: O produto de quaisquer dois inteiros consecutivos é par.

Prova: Escolha quaisquer dois inteiros consecutivos n e n + 1.

Vamos considerar dois casos:

Caso 1: n é par. Isso significa que existe um inteiro **k** tal que **n = 2k**. Portanto, aprendemos que

$$n(n + 1) = 2k(n + 1)$$

$$n(n + 1) = 2(k(n + 1)).$$

Portanto, há um inteiro **m** (nomeadamente, **k(n + 1)**) tal que **n(n + 1) = 2m**, então **n(n + 1)** é par.

- **Caso 2:** n é ímpar. Então, há um inteiro **k** onde **n = 2k + 1**. Isso nos diz que **n + 1 = 2k + 2**. Então vemos que

$$n(n + 1) = n(2k + 2)$$

$$n(n + 1) = 2(n(k + 1)).$$

  - Isso significa que há um inteiro m (nomeadamente, **n(k + 1)**) tal que **n(n + 1) = 2m**, então **n(n + 1)** é par.

- Em qualquer dos casos, descobrimos que **n(n + 1)** é par, que é o que precisávamos mostrar. ■

Teorema: O produto de quaisquer dois inteiros consecutivos é par.

Prova: Escolha quaisquer dois inteiros consecutivos n e n + 1.

Vamos considerar dois casos:

Após dividir em casos, é uma boa ideia sumarizar o que você fez de forma que o leitor saiba o que concluir.

o **k** tal que **n = 2k**. Portanto,

al que **n(n + 1) = 2m**, então **n(n + 1)** é par.

- **Caso 2:** n é ímpar. Então, há um inteiro **k** onde **n = 2k + 1**. Isso nos diz que **n + 1 = 2k + 2**. Então vemos que

  n(n + 1) = n(2k + 2)

  n(n + 1) = 2(n(k + 1)).

  - Isso significa que há um inteiro m (nomeadamente, **n(k + 1)**) tal que n**(n + 1) = 2m**, então **n(n + 1)** é par.

- Em qualquer dos casos, descobrimos que **n(n + 1)** é par, que é o que precisávamos mostrar.

Exercícios

- Aqui está uma lista de outros teoremas que são verdadeiros sobre números pares e ímpares:
  - **Teorema:** A soma e a diferença de quaisquer dois números pares é par.
  - **Teorema:** A soma e a diferença de um número ímpar e um número par é ímpar.
  - **Teorema:** O produto de qualquer número inteiro e um número par é par.
  - **Teorema:** O produto de quaisquer dois números ímpares é ímpar.

Declarações Universais e Existenciais

Teorema: Para qualquer inteiro ímpar **n**, existem inteiros **r** e **s** onde $\mathbf{r^2 - s^2 = n}$.

Prova: Escolha qualquer inteiro ímpar **n**.

Este é um tipo muito diferente de solicitação do que o que vimos no passado. Como nós vamos proceder para provar algo assim?

Declarações Universais vs Existenciais

- Uma declaração universal é uma declaração na forma

  Para todo x, [alguma propriedade] vale para x.

- Já vimos como provar essas declarações.
- Uma afirmação existencial é uma afirmação na forma

  Há algum x onde [alguma propriedade] vale para x.

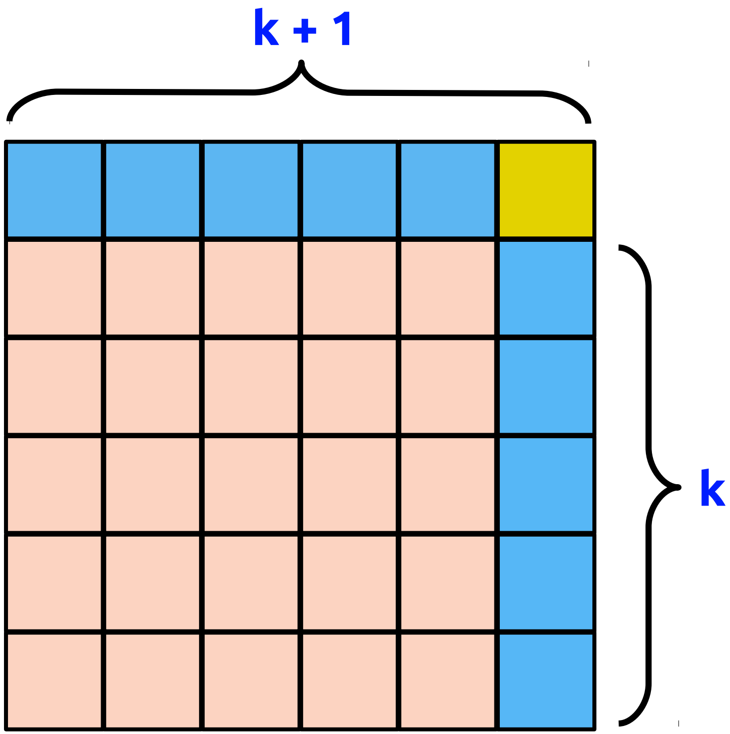
- Como provamos uma afirmação existencial?

Provando uma Declaração Existencial

- **Abordagem mais simples:** pesquise em toda parte, encontre um **x** que tenha a propriedade certa e mostre por que sua escolha está correta.

Teorema: Para qualquer inteiro ímpar **n**, existem inteiros **r** e **s** onde $\mathbf{r^2 - s^2 = n}$.

Prova: Escolha qualquer inteiro ímpar **n**. Como **n** é ímpar, sabemos que existe algum inteiro **k** onde $\mathbf{n = 2k + 1}$.



Nosso palpite:

$(k+1)^2 - k^2 = n$

Teorema: Para qualquer inteiro ímpar **n**, existem inteiros **r** e **s** onde **$r^2 - s^2 = n$**.

Prova: Escolha qualquer inteiro ímpar **n**. Como **n** é ímpar, sabemos que existe algum inteiro **k** onde **$n = 2k + 1$**.

Agora, seja **$r = k + 1$** e **$s = k$**. Então nós vemos que

$$r^2 - s^2 = (k+1)^2 - k^2$$

$$r^2 - s^2 = k^2 + 2k + 1 - k^2$$

$$r^2 - s^2 = 2k + 1$$

$$r^2 - s^2 = n.$$

Isso significa que **$r^2 - s^2 = n$**, que é o que precisamos mostrar. ■

Provas em Conjuntos

Revisão: Teoria dos Conjuntos

- Lembre-se da última vez que escrevemos $\mathbf{x} \in \mathbf{S}$ se **x** for um elemento do conjunto **S** e $\mathbf{x} \notin \mathbf{S}$ se **x** não for um elemento do conjunto **S**.
- Se **S** e **T** são conjuntos, dizemos que **S** é um subconjunto de **T** (denotado $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{T}$) se a seguinte afirmação for verdadeira:

  Para todo objeto **x**, se $\mathbf{x} \in \mathbf{S}$, então $\mathbf{x} \in \mathbf{T}$.

- Vamos explorar algumas propriedades da relação de subconjunto.

Teorema: Para quaisquer conjuntos A, B e C, se A ⊆ B e B ⊆ C, então A ⊆ C.

Prova: Sejam A, B e C conjuntos arbitrários onde A ⊆ B e B ⊆ C.

Estamos mostrando aqui que,
independentemente de qual
A, B e C você escolher,
o resultado ainda será verdadeiro.

Teorema: Para quaisquer conjuntos A, B e C, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

Prova: Sejam A, B e C conjuntos arbitrários onde $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$.

Para provar uma afirmação na forma

"Se P, então Q"

Assumir que **P** é verdade, então mostrar que **Q** também deve ser verdade.

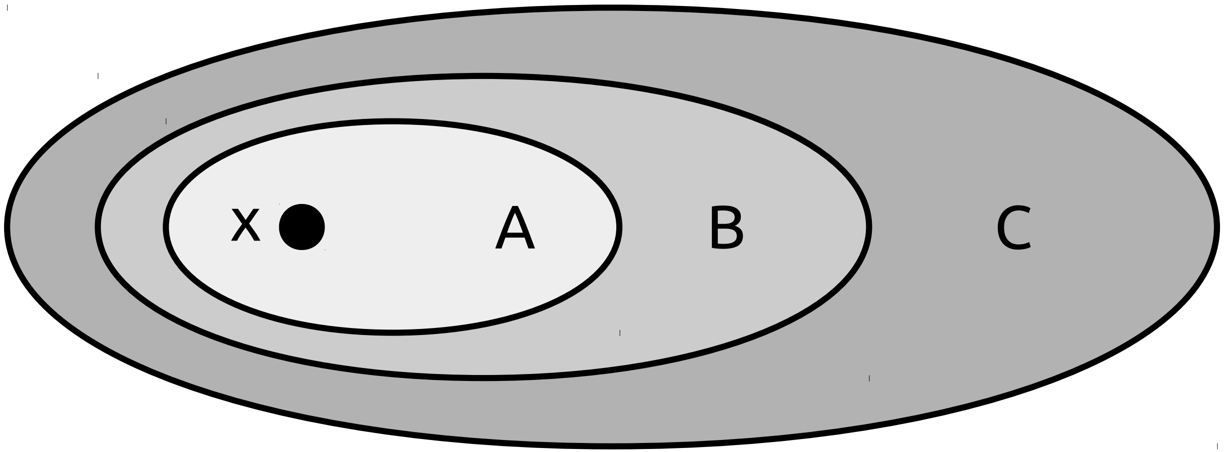
Teorema: Para quaisquer conjuntos A, B e C, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

Prova: Sejam A, B e C conjuntos arbitrários onde $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$. Para fazer isso, vamos provar que para cada x, se $x \in A$, então $x \in C$.

Isso é, por definição, o que significa para $A \subseteq C$ ser verdadeiro. Nosso trabalho será provar esta afirmação

Teorema: Para quaisquer conjuntos A, B e C, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

Prova: Sejam A, B e C conjuntos arbitrários onde $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$. Para fazer isso, vamos provar que para cada x, se $x \in A$, então $x \in C$.



Teorema: Para quaisquer conjuntos A, B e C, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

Prova: Sejam A, B e C conjuntos arbitrários onde $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$. Para fazer isso, vamos provar que para cada x, se $x \in A$, então $x \in C$.

Considere qualquer x onde $x \in A$.

Estamos mostrando aqui que, independentemente de qual x você escolher, o resultado ainda será verdadeiro.

Teorema: Para quaisquer conjuntos A, B e C, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

Prova: Sejam A, B e C conjuntos arbitrários onde $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$. Para fazer isso, vamos provar que para cada x, se $x \in A$, então $x \in C$.

Considere qualquer x onde $x \in A$.

Para provar uma afirmação na forma

"Se P, então Q"

Assumir que **P** é verdade, então mostrar que **Q** também deve ser verdade.

Teorema: Para quaisquer conjuntos A, B e C, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

Prova: Sejam A, B e C conjuntos arbitrários onde $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$. Para fazer isso, vamos provar que para cada x, se $x \in A$, então $x \in C$.

Considere qualquer x onde $x \in A$. Como $A \subseteq B$ e $x \in A$, vemos que $x \in B$. Da mesma forma, como $B \subseteq C$ e $x \in B$, vemos que $x \in C$, que é o que precisamos mostrar. ■

Esta propriedade da relação de subconjunto é chamada de **transitividade**.

Igualdade de Conjuntos e Lemmas

Igualdade de Conjuntos

- Dois conjuntos **A** e **B** são iguais quando têm exatamente os mesmos elementos.
- Aqui está um pequeno teorema que é muito útil para mostrar que dois conjuntos são iguais:

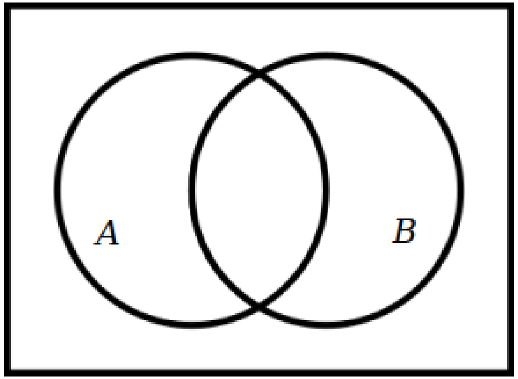
  Teorema: Se **A** e **B** são conjuntos em que $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}$, então $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Um Teorema mais Complicado

- **Teorema:**

  Se A e B são conjuntos e $A \cup B \subseteq A \cap B$, então $A = B$.

- Ao contrário do nosso teorema anterior, este é muito mais difícil de ver usando apenas os diagramas de Venn.



Enfrentando nosso Teorema

Teorema:

Se A e B são conjuntos e $A \cup B \subseteq A \cap B$, então $A = B$.

A seguir temos uma ideia de como será a nossa prova.

- Vamos escolher conjuntos arbitrários A e B.
- Vamos assumir $A \cup B \subseteq A \cap B$.
- Vamos provar que $A = B$.

Enfrentando nosso Teorema

Palpite razoável: vamos tentar provar que $A \subseteq B$ e que $B \subseteq A$.

Teorema:

Se A e B são conjuntos e $A \cup B \subseteq A \cap B$, então $A = B$.

A seguir temos uma ideia de como será a nossa prova.

Vamos escolher conjuntos arbitrários A e B.

Vamos assumir $A \cup B \subseteq A \cap B$.

Vamos provar que $A = B$.

Lemma: Se **S** e **T** são conjuntos e $\mathbf{S} \cup \mathbf{T} \subseteq \mathbf{S} \cap \mathbf{T}$, então $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{T}$.

Um lemma é uma prova menor projetada
para ser construída em uma maior.
Pense nisso como decomposição de programa,
exceto para provas.

Lemma: Se **S** e **T** são conjuntos e **S ∪ T ⊆ S ∩ T**, então **S ⊆ T**.

Prova: Sejam **S** e **T** quaisquer conjuntos em que **S ∪ T ⊆ S ∩ T**. Provaremos que **S ⊆ T**. Para fazer isso, considere qualquer **x ∈ S**. Provaremos que **x ∈ T**.

Como **x ∈ S**, sabemos que **x ∈ S ∪ T** porque **x** pertence a pelo menos um de **S** e **T**. Vemos então que **x ∈ S ∩ T** porque **x ∈ S ∪ T** e **S ∪ T ⊆ S ∩ T**. Finalmente , uma vez que **x ∈ S ∩ T**, aprendemos que **x ∈ T**, uma vez que **x** pertence a **S** e **T**.

No geral, começamos com uma escolha arbitrária de **x ∈ S** e concluímos que **x ∈ T**. Portanto, vemos que **S ⊆ T** é válido, que é o que precisávamos para provar.■

Lemma: Se **S** e **T** são conjuntos e **S ∪ T ⊆ S ∩ T**, então **S ⊆ T**.

Teorema: Se A e B são conjuntos e A ∪ B ⊆ A ∩ B, então A = B.

Prova: Sejam A e B quaisquer conjuntos onde A ∪ B ⊆ A ∩ B. Provaremos que A = B mostrando A ⊆ B e B ⊆ A.

Primeiro, observe que pelo nosso lemma, uma vez que A ∪ B ⊆ A ∩ B, sabemos que A ⊆ B.

Lemma: Se **S** e **T** são conjuntos e **S ∪ T ⊆ S ∩ T**, então **S ⊆ T**.

Teorema: Se A e B são conjuntos e A ∪ B ⊆ A ∩ B, então A = B.

Prova: Sejam A e B quaisquer conjuntos onde A ∪ B ⊆ A ∩ B. Provaremos que A = B mostrando A ⊆ B e B ⊆ A.

Primeiro, observe que pelo nosso lemma, uma vez que A ∪ B ⊆ A ∩ B, sabemos que A ⊆ B.

Lemma: Se **S** e **T** são conjuntos e **S ∪ T ⊆ S ∩ T**, então **S ⊆ T**.

Teorema: Se A e B são conjuntos e A ∪ B ⊆ A ∩ B, então A = B.

Prova: Sejam A e B quaisquer conjuntos onde A ∪ B ⊆ A ∩ B. Provaremos que A = B mostrando A ⊆ B e B ⊆ A.

Primeiro, observe que pelo nosso lemma, uma vez que A ∪ B ⊆ A ∩ B, sabemos que A ⊆ B.

Em seguida, como A ∪ B = B ∪ A e A ∩ B = B ∩ A, de A ∪ B ⊆ A ∩ B aprendemos que B ∪ A ⊆ B ∩ A. Aplicar nosso lemma novamente neste caso nos diz que B ⊆ A.

Lemma: Se **S** e **T** são conjuntos e $\mathbf{S} \cup \mathbf{T} \subseteq \mathbf{S} \cap \mathbf{T}$, então $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{T}$.

Teorema: Se A e B são conjuntos e $A \cup B \subseteq A \cap B$, então $A = B$.

Prova: Sejam A e B quaisquer conjuntos onde $A \cup B \subseteq A \cap B$. Provaremos que $A = B$ mostrando $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Primeiro, observe que pelo nosso lemma, uma vez que $A \cup B \subseteq A \cap B$, sabemos que $A \subseteq B$.

Em seguida, como $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$, de $A \cup B \subseteq A \cap B$ aprendemos que $B \cup A \subseteq B \cap A$. Aplicar nosso lemma novamente neste caso nos diz que $B \subseteq A$.

Lemma: Se **S** e **T** são conjuntos e **S ∪ T ⊆ S ∩ T**, então **S ⊆ T**.

Teorema: Se A e B são conjuntos e A ∪ B ⊆ A ∩ B, então A = B.

Prova: Sejam A e B quaisquer conjuntos onde A ∪ B ⊆ A ∩ B. Provaremos que A = B mostrando A ⊆ B e B ⊆ A.

Primeiro, observe que pelo nosso lemma, uma vez que A ∪ B ⊆ A ∩ B, sabemos que A ⊆ B.

Em seguida, como A ∪ B = B ∪ A e A ∩ B = B ∩ A, de A ∪ B ⊆ A ∩ B aprendemos que B ∪ A ⊆ B ∩ A. Aplicar nosso lemma novamente neste caso nos diz que B ⊆ A.

Como ambos A ⊆ B e B ⊆ A, concluímos que A = B, que é o que precisamos mostrar. ■

Revisando

- O que é uma prova matemática?
  - Um argumento - escrito principalmente em português - delineando um argumento matemático.
- O que é uma prova direta?
  - É uma prova de onde você começa com algumas suposições iniciais e raciocina até a conclusão.
- O que são declarações universais e existenciais?
  - As declarações universais fazem uma afirmação sobre todos os objetos de um tipo. As declarações existenciais fazem afirmações sobre pelo menos um objeto de algum tipo.
- Como escrevemos provas sobre a teoria dos conjuntos?
  - Recorrendo às definições! As definições são fundamentais.

Igualdade de Conjuntos

Revisando

- Se A e B são conjuntos, dizemos que A = B precisamente quando a seguinte afirmação é verdadeira:

  Para qualquer objeto x, $x \in A$ se e somente se $x \in B$

- (Isso é chamado de axioma da extensionalidade.)
- Na prática, essa definição é difícil de trabalhar.
- Muitas vezes é mais fácil usar o seguinte resultado para mostrar que dois conjuntos são iguais

  Para quaisquer conjuntos A e B,

  se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$.

Teorema: Para quaisquer conjuntos A e B, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$.

Prova: Sejam A e B conjuntos arbitrários onde $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$. Precisamos provar $A = B$. Para fazer isso, provaremos para todo x que $x \in A$ se e somente se $x \in B$.

Primeiro, vamos provar que se $x \in A$, então $x \in B$. Para fazer isso, tome qualquer $x \in A$. Como $A \subseteq B$ e $x \in A$, vemos que $x \in B$, conforme requisitado.

A seguir, vamos provar que se $x \in B$, então $x \in A$. Considere um arbitrário $x \in B$. Como $B \subseteq A$ e $x \in B$, vemos que $x \in A$, que é o que precisamos mostrar.

Como provamos as duas direções de implicação, vemos que $A = B$. ■