Lógica de Primeira Ordem

O que é Lógica de Primeira Ordem?

- A **lógica de primeira ordem** é um sistema lógico para raciocinar sobre propriedades de objetos.
- Ela aperfeiçoa os conectivos lógicos da lógica proposicional com
  - **predicados** que descrevem propriedades de objetos,
  - **funções** que mapeiam objetos entre si, e
  - **quantificadores** que nos permitem raciocinar sobre vários objetos.

Vejamos alguns Exemplos

$$Gosta(Você, Ovos) \land Gosta(Você, Tomate) \rightarrow Gosta(Você, Shakshuka)$$

$$Aprende(Você, História) \lor SempreRepete(Você, História)$$

$$Em(MeuCoração, Havana) \land LeveiPara(Ele, Mim, Moscou)$$

Gosta(Você, Ovos) ∧ Gosta(Você, Tomate) → Gosta(Você, Shakshuka)

Aprende(Você, História) ∨ SempreRepete(Você, História)

Em(MeuCoração, Havana) ∧ LeveiPara(Ele, Mim, Moscou)

Esses termos azuis são chamados de **símbolos constantes**. Ao contrário das variáveis proposicionais, eles se referem a objetos, não proposições.

$Gosta(Você, Ovos) \land Gosta(Você, Tomate) \rightarrow Gosta(Você, Shakshuka)$

$Aprende(Você, História) \lor SempreRepete(Você, História)$

$Em(MeuCoração, Havana) \land LeveiPara(Ele, Mim, Moscou)$

As coisas vermelhas que parecem chamadas de função são chamadas de **predicados**. Predicados pegam objetos como argumentos e são avaliados como verdadeiros ou falsos.

$Gosta(Você, Ovos) \land Gosta(Você, Tomate) \rightarrow Gosta(Você, Shakshuka)$

$Aprende(Você, História) \lor SempreRepete(Você, História)$

$Em(MeuCoração, Havana) \land LeveiPara(Ele, Mim, Moscou)$

O que resta são conectivos proposicionais tradicionais.
Como cada predicado é avaliado como **verdadeiro** ou **falso**, podemos conectar os valores verdade dos predicados usando conectivos proposicionais normais

Raciocinando sobre Objetos

- Para raciocinar sobre objetos, a lógica de primeira ordem usa **predicados**.
- Exemplos:
  - Bonita(Coruja)
  - DiscutirIncessantemente(Esquerda, Direita)
- Aplicar um predicado a argumentos produz uma proposição, que é verdadeira ou falsa.
- Normalmente, quando você está trabalhando na lógica de primeira ordem, você tem uma lista de predicados, o que eles representam e quantos argumentos eles aceitam. Eles serão fornecidos separadamente das fórmulas que você escreve.

Sentenças de Primeira Ordem

- As frases na lógica de primeira ordem podem ser construídas a partir de predicados aplicados a objetos:
  - Bonito(a) → Gato(a) ∨ Tigre(a) ∨ Leão(a)
  - Bem-sucedido(Você) ↔ Praticar(Você)

$x < 8 \rightarrow x < 137$

O sinal **menos que** é apenas outro predicado. Predicados binários às vezes são escritos em **notação de infixo** dessa maneira.

Os **números** não são "incorporados à lógica de primeira ordem. Eles são símbolos constantes como "Você" e "a" acima.

Igualdade

- A lógica de primeira ordem é equipada com um predicado especial = que diz se dois objetos são iguais um ao outro.
- A igualdade é uma parte da lógica de primeira ordem, assim como → e ¬ são.
- Exemplos:

  TomMarvoloRiddle = LordVoldemort

  EstrelaDaManhã = EstrelaDaTarde
- A igualdade só pode ser aplicada a **objetos**; para afirmar que duas **proposições** são iguais, use ↔.

Vejamos mais Exemplos

$$\text{FilmeFavoritoDe}(\text{Você}) \neq \text{FilmeFavoritoDe}(\text{Data}) \land$$
$$\text{EstrelaDe}(\text{FilmeFavoritoDe}(\text{Você})) = \text{EstrelaDe}(\text{FilmeFavoritoDe}(\text{Data}))$$

$$\text{FilmeFavoritoDe}(\text{Você}) \neq \text{FilmeFavoritoDe}(\text{Data}) \land$$
$$\text{EstrelaDe}(\text{FilmeFavoritoDe}(\text{Você})) = \text{EstrelaDe}(\text{FilmeFavoritoDe}(\text{Data}))$$

Esses termos roxos são funções.
Funções pegam objetos como
entrada e produzem objetos como saída

Funções

- A lógica de primeira ordem permite funções que retornam objetos associados a outros objetos.
- Exemplos:

  CorDe(Animal)

  MédiaDe(x, y, z)

  x + y
- Assim como acontece com os predicados, as funções podem receber qualquer número de argumentos, mas sempre retornam um único valor.
- Funções avaliam para **objetos**, não **proposições**.

Objetos e Predicados

- Ao trabalhar na lógica de primeira ordem, tome cuidado para manter os objetos (coisas reais) e os predicados (verdadeiros ou falsos) separados.
- Você não pode aplicar conectivos a objetos:

⚠ Vênus → OSol ⚠

- Você não pode aplicar funções a proposições:

⚠ EstrelaDe(ÉVermelho(Sol) ∧ ÉVerde(Marte)) ⚠

A Tabela de Verificação de Tipo

	opera em	e produz
Conectivos (↔, ∧, etc.)	proposições	uma proposição
Predicados (=, etc.)	objetos	uma proposição
Funções	objetos	um objeto

Uma Última (e importante) Mudança

Algum muggle é inteligente.

$\boxed{\exists m.}$ (Muggle(m) ∧ Inteligente(m))

∃ é o **quantificador existencial** e diz
"para alguma escolha de m, o seguinte é verdadeiro.

O Quantificador Existencial

- Uma declaração na forma

  $\exists x.$ alguma-fórmula

  é verdadeiro se, para alguma escolha de x, a afirmação **alguma-fórmula** for verdadeira quando esse x estiver conectado a ela.

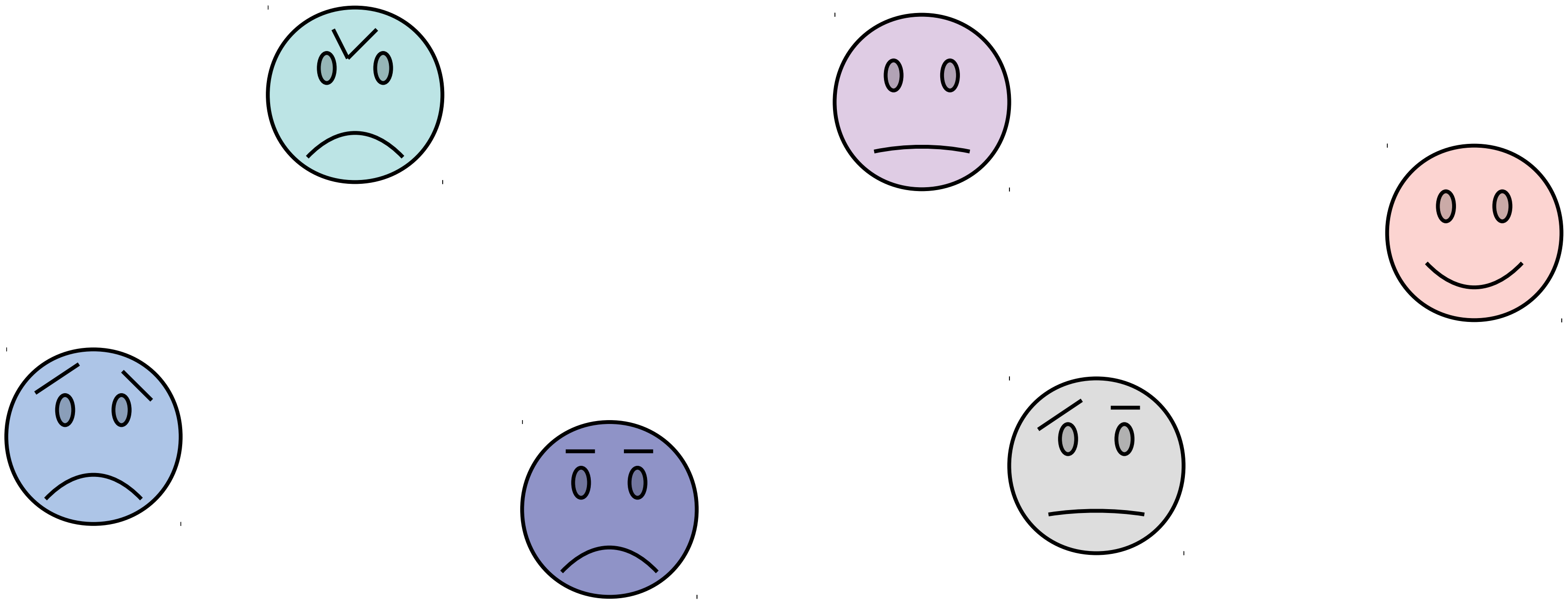
- Exemplos:

  $\exists x. (Par(x) \land Primo(x))$

  $\exists x. (MaisAltoQue(x, me) \land MaisClaroQue(x, me))$

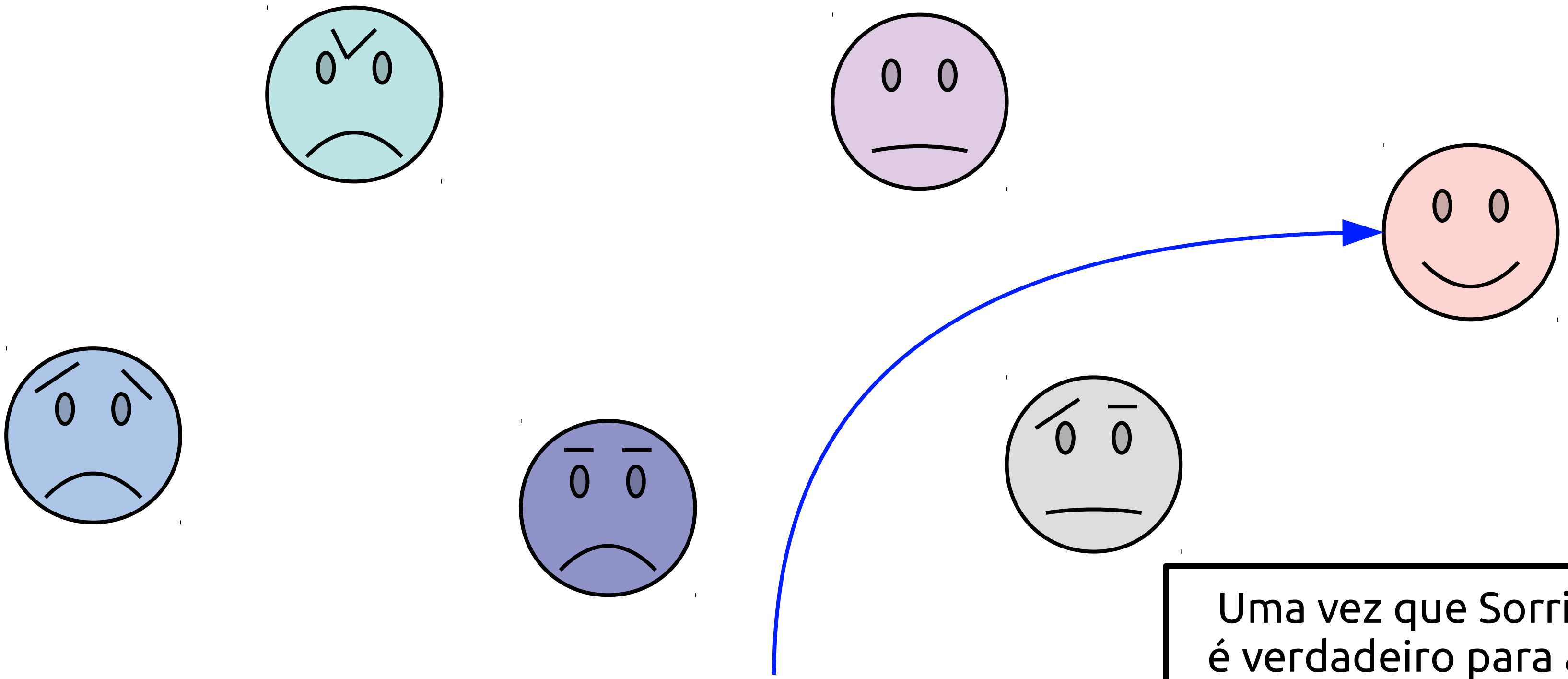
  $(\exists w. Vai(w)) \to (\exists x. Caminho(x))$

O Quantificador Existencial



$\exists x. \text{Sorrindo}(x)$

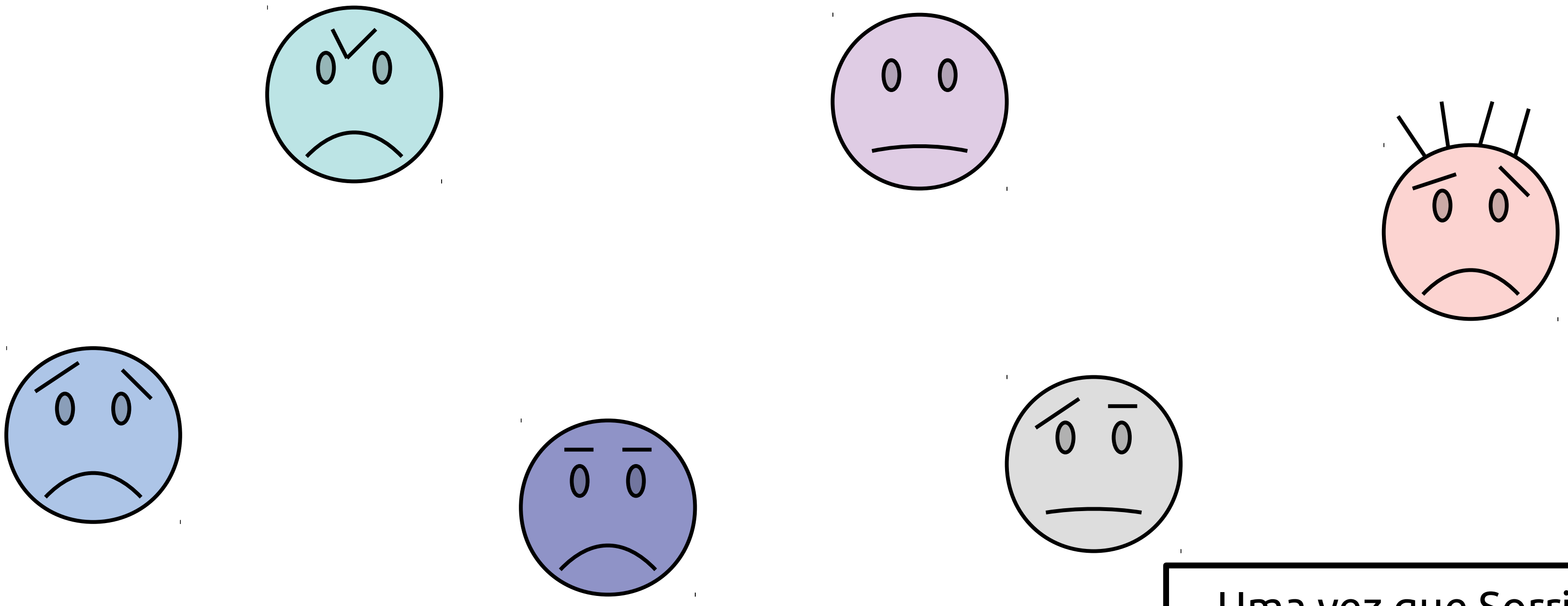
O Quantificador Existencial



$\exists x.$ Sorrindo(x)

Uma vez que Sorrindo(x) é verdadeiro para alguma escolha de x, esta afirmação é avaliada como verdadeira.

O Quantificador Existencial



~~∃x. Sorrindo(x)~~

Uma vez que Sorrindo(x)
é falso para qualquer
escolha de x, esta afirmação
é avaliada como falsa.

Casos Extremos

~~∃x. Sorrindo(x)~~

Afirmações quantificadas existencialmente
são falsas em um mundo vazio,
uma vez que não é possível escolher um objeto

Alguns Detalhes Técnicos

Variáveis e Quantificadores

- Cada quantificador possui duas partes:
  - a variável que é introduzida, e
  - a declaração que está sendo quantificada.
- A variável introduzida tem como escopo apenas a instrução que está sendo quantificada.

$$\underbrace{(\exists x.\ \text{Ama}(\text{Você}, x))}_{\text{A variável } \mathbf{x} \text{ vive apenas aqui}} \land \underbrace{(\exists y.\ \text{Ama}(y, \text{Você}))}_{\text{A variável } \mathbf{y} \text{ vive apenas aqui}}$$

Variáveis e Quantificadores

- Cada quantificador possui duas partes:
  - a variável que é introduzida, e
  - a declaração que está sendo quantificada.
- A variável introduzida tem como escopo apenas a instrução que está sendo quantificada.

$$\underbrace{(\exists x.\ \text{Ama}(\text{Você}, x))}_{\text{A variável } \mathbf{x} \text{ vive apenas aqui}} \land \underbrace{(\exists y.\ \text{Ama}(x, \text{Você}))}_{\text{Uma diferente variável } \mathbf{x} \text{ vive apenas aqui}}$$

Precedência de Operador

- Ao escrever uma fórmula na lógica de primeira ordem, os quantificadores têm precedência logo abaixo de ¬.
- A declaração

  $\exists x.\ P(x) \land R(x) \land Q(x)$

  É analisada assim:

  $(\exists x.\ P(x)) \land (R(x) \land Q(x))$
- Isso é sintaticamente inválido porque a variável x está fora do escopo na metade posterior da fórmula.
- Para garantir que x seja devidamente quantificado, coloque explicitamente entre parênteses a região que deseja quantificar:

  $\exists x.\ (P(x) \land R(x) \land Q(x))$

“Para qualquer número natural n, n é par, se somente n² for par”

$$\forall n.\ (n \in \mathbb{N} \rightarrow (Par(n) \leftrightarrow Par(n^2)))$$

∀ é o **quantificador universal** e diz
“para qualquer escolha de n, o seguinte é verdadeiro.

O Quantificador Universal

- Uma declaração na forma

  $\forall$x. alguma-fórmula

  É verdadeiro se, para cada escolha de x, a afirmação **alguma-fórmula** for verdadeira quando x estiver conectado a ela.

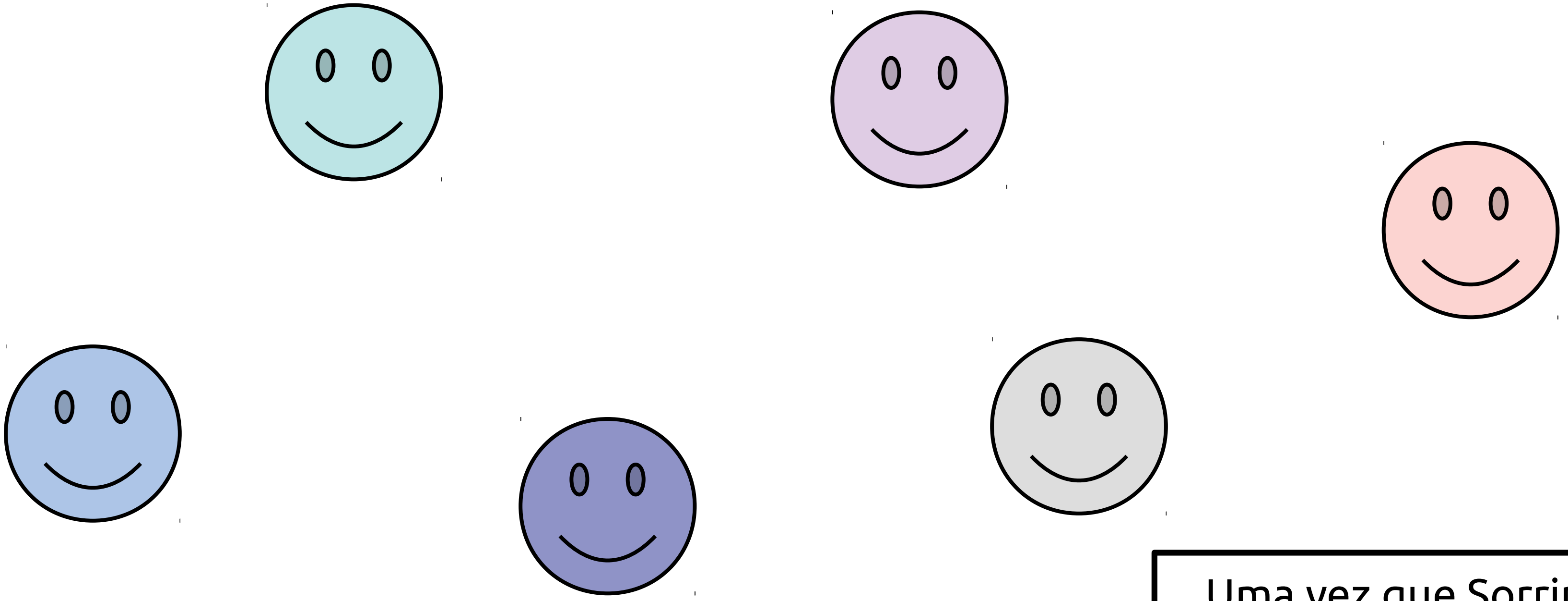
- Exemplos:

  $\forall$p. (Cães(p) → Bonito(p))

  $\forall$m. (ÉMilenial(m) → Éespecial(m))

  MaisAlto(SultanKösen) → $\forall$x. (SultanKösen ≠ x → MenorQue(x, SultanKösen))

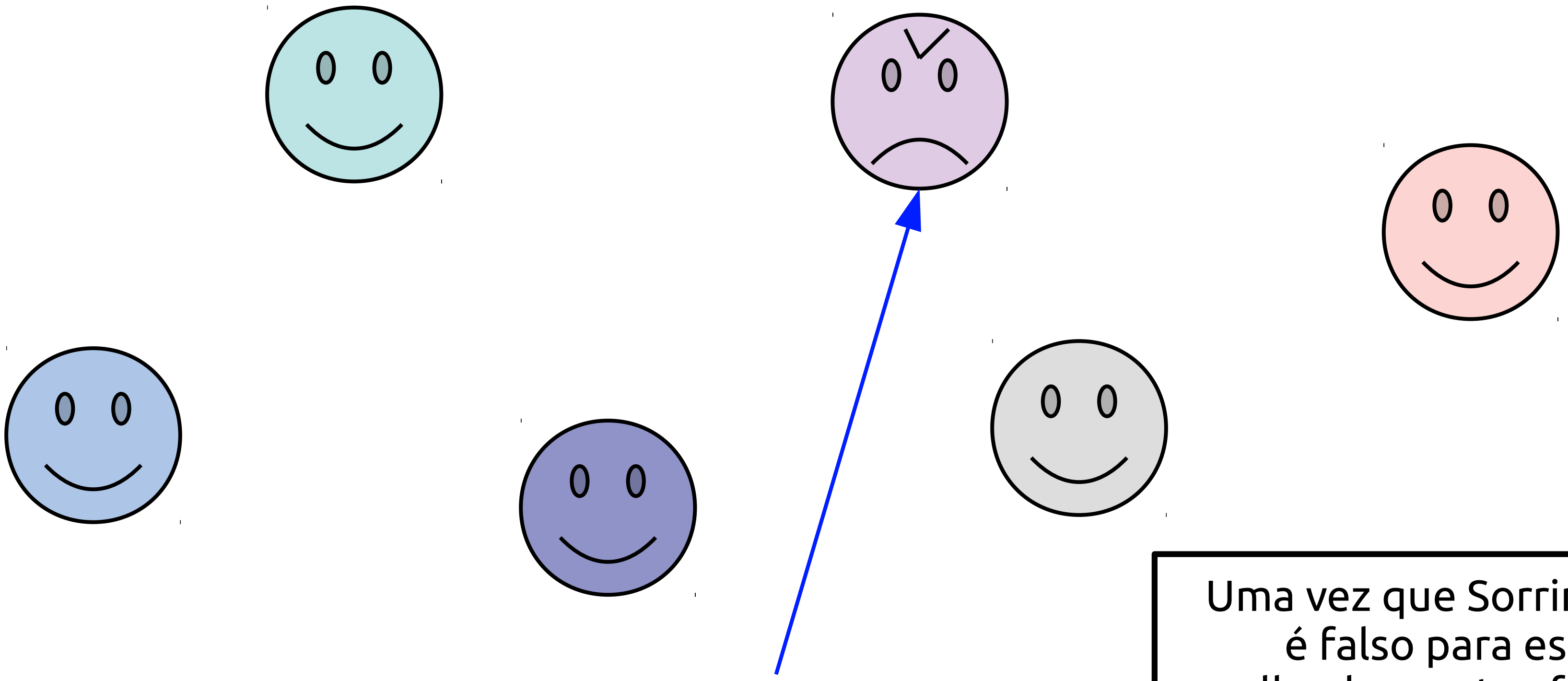
O Quantificador Existencial



$\forall x.$ Sorrindo(x)

Uma vez que Sorrindo(x) é verdadeiro para qualquer escolha de x, esta afirmação é avaliada como verdadeira.

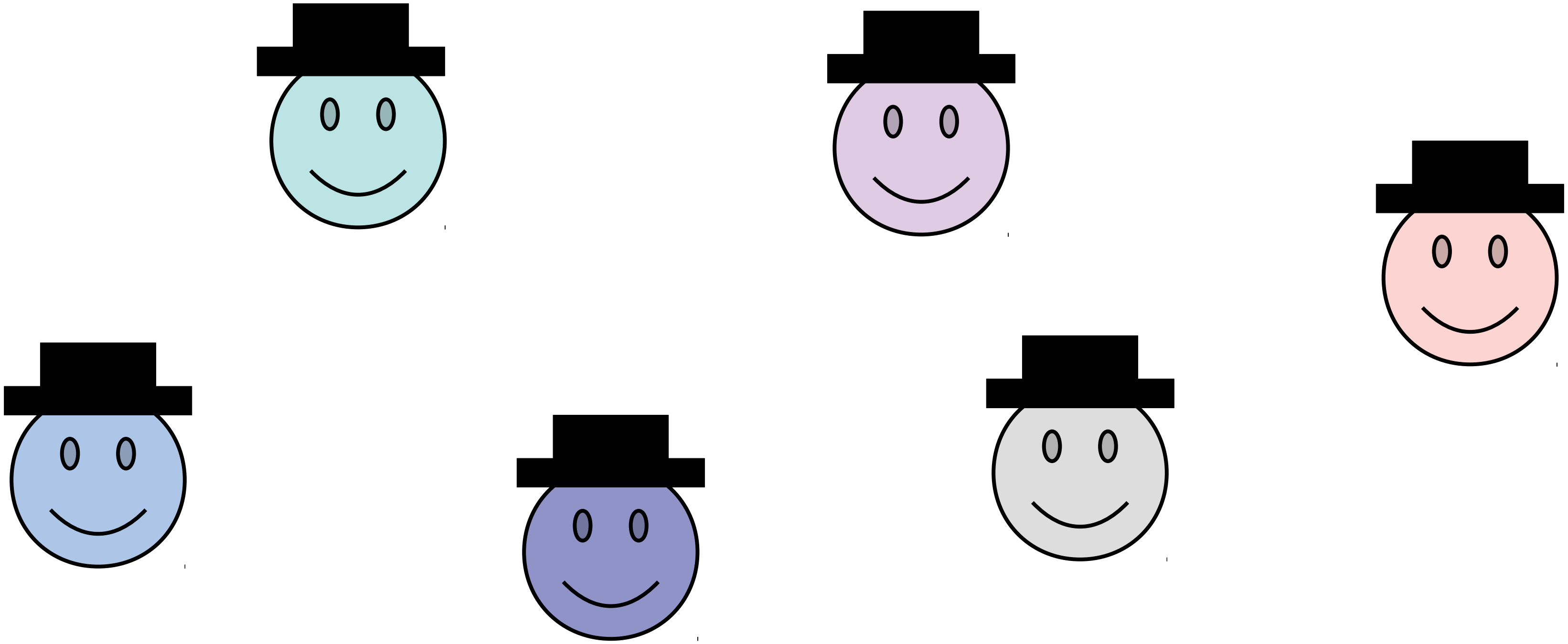
O Quantificador Existencial



~~$\forall x.$ Sorrindo(x)~~

Uma vez que Sorrindo(x)
é falso para essa
escolha de x, esta afirmação
é avaliada como falsa.

O Quantificador Existencial



$$(\forall x.\ \text{Sorrindo}(x)) \to (\forall y.\ \text{VestindoChapéu}(y))$$

Traduzindo para a Lógica de Primeira Ordem

Traduzindo em Lógica

- A lógica de primeira ordem é uma excelente ferramenta para manipular definições e teoremas para aprender mais sobre eles.
- Precisa aceitar uma negação? Traduza sua declaração para a lógica de primeira ordem, negue-a e, em seguida, traduza-a de volta.
- Quer provar algo por contrapositivo? Traduza sua implicação para a lógica de primeira ordem, pegue o contrapositivo e depois traduza de volta.

Traduzindo em Lógica

- Traduzir instruções em lógica de primeira ordem é muito mais difícil do que parece.
- Existem muitas nuances que surgem ao traduzir para a lógica de primeira ordem.
- Cobriremos exemplos de traduções boas e ruins em lógica para que você possa aprender.
- Também mostraremos muitos exemplos de traduções para que você possa ver o processo que envolve.

Uma Tradução Incorreta

Todos os cães são bonitos!

$$\forall x. (\text{Cão}(x) \land \text{Bonito}(x))$$

Isso deve funcionar para qualquer escolha de x, incluindo coisas que não são cachorros.

Uma Tradução Incorreta

Todos os cães são bonitos!

$\forall x.\ (\cancel{\text{Cão}(x)\ \land\ \text{Bonito}(x)})$

Uma declaração na forma

$\forall x.\ \text{algo}$

É verdadeira apenas quando algo é verdadeiro para toda escolha de x.

Uma Tradução Incorreta

Todos os cães são bonitos!

~~$\forall x.\ (\text{Cão}(x) \wedge \text{Bonito}(x))$~~

Esta declaração de primeira ordem é falsa, embora a declaração em português seja verdadeira. Portanto, não pode ser uma tradução correta.

Uma Tradução Incorreta

Todos os cães são bonitos!

$$\forall x. (\text{Cão}(x) \land \text{Bonito}(x))$$

O problema aqui é que essa declaração afirma que tudo é um cão.
Essa é uma afirmação muito forte a se fazer.

Uma Tradução Melhor

Todos os cães são bonitos!

$$\forall x.\ (\cancel{\text{Cão}(x)} \to \text{Bonito}(x))$$

Isso deve funcionar para qualquer escolha de x, incluindo coisas que não são cães.

Uma Tradução Melhor

Todos os cães são bonitos!

$$\forall x.\ (\text{Cão}(x) \to \text{Bonito}(x))$$

Isso deve funcionar para qualquer escolha de x, incluindo coisas que não são cães.

“Todos os P's são Q's”

traduz como

$$\forall x.\ (P(x) \to Q(x))$$

Intuição útil:

Afirmações universalmente quantificadas são verdadeiras, a menos que haja um contra-exemplo.

$$\forall x.\ (P(x) \to Q(x))$$

Se x for um contra-exemplo, ele deve ter a propriedade **P**, mas não deve ter a propriedade **Q**.

Uma Tradução Incorreta

Algumas corujas são bonitas.

$\exists x. \, (\text{Coruja}(x) \rightarrow \text{Bonita}(x))$

Uma Tradução Incorreta

Algumas corujas são bonitas.

$\exists x.\ (\cancel{Coruja(x)} \rightarrow Bonita(x))$

Uma Tradução Incorreta

Algumas corujas são bonitas.

$\exists x.\ (\text{Coruja}(x) \rightarrow \text{Bonita}(x))$

Uma declaração na forma

$\exists x.$ algo

É verdadeira apenas quando algo é verdadeiro para pelo menos uma escolha de x.

Uma Tradução Incorreta

Algumas corujas são bonitas.

$$\exists x.\ (\mathrm{Coruja}(x) \rightarrow \mathrm{Bonita}(x))$$

Esta declaração de primeira ordem é verdadeira, embora a declaração em português seja falsa. Portanto, não pode ser uma tradução correta.

Uma Tradução Incorreta

Algumas corujas são bonitas.

$\exists x. (\text{Coruja}(x) \rightarrow \text{Bonita}(x))$

A questão aqui é que as implicações são verdadeiras sempre que o antecedente é falso. Esta afirmação “acidentalmente” é verdadeira por causa do que acontece quando x não é uma coruja.

Uma Tradução Correta

Algumas corujas são bonitas.

$$\exists x. (\cancel{\mathrm{Coruja}(x)} \land \mathrm{Bonita}(x))$$

Uma Tradução Correta

Algumas corujas são bonitas.

$\exists x. (\cancel{Coruja(x) \land Bonita(x)})$

“Algum P é um Q”

traduz como

$$\exists x.\ (P(x) \land Q(x))$$

Intuição útil:

As afirmações quantificadas existencialmente são falsas, a menos que haja um exemplo positivo.

$$\exists x. (P(x) \land Q(x))$$

Se x for um exemplo, ele deve ter a propriedade **P** sobre a propriedade **Q**.

Bons Emparelhamentos

- O quantificador ∀ geralmente é pareado com →

  $\forall x. (P(x) \rightarrow Q(x))$

- O quantificador ∃ geralmente é pareado com ∧.

  $\exists x. (P(x) \land Q(x))$

- No caso de ∀, o conectivo → evita que a afirmação seja falsa ao falar sobre algum objeto pelo qual você não se importa.
- No caso de ∃, o conectivo ∧ impede que a afirmação seja verdadeira quando se fala sobre algum objeto com o qual você não se importa.