Provas Indiretas

Implicação Lógica

Implicações

- Uma implicação é uma declaração na forma

  Se P for verdadeiro, então Q é verdadeiro.

- Alguns exemplos:
  - Matemática: Se **n** for um inteiro par, então $\mathbf{n^2}$ é um inteiro par.
  - Teoria de conjuntos: Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$.

O que Significam as Implicações

- Considere a declaração simples

  Se eu colocar fogo perto do algodão, ele vai queimar.

- Algumas questões a serem consideradas:
  - Isso se aplica a todos os tipos de fogo e algodão, ou apenas a alguns tipos de fogo e alguns tipos de algodão? (Escopo)
  - O fogo faz o algodão queimar ou o algodão queima por outro motivo? (Causalidade)
- Essas são questões significativamente mais profundas do que podem parecer.
- Para estudar as implicações matematicamente, precisamos formalizar o que as implicações realmente significam.

Entendendo Implicações

"Se houver um arco-íris no céu, então está chovendo em algum lugar."

- Em matemática, a implicação é direcional.
  - A afirmação acima não significa que, se está chovendo em algum lugar, deve haver um arco-íris.
- Em matemática, as implicações só dizem algo sobre o consequente quando o antecedente é verdadeiro.
  - Se não houver arco-íris, não significa que não há chuva.
- Na matemática, a implicação não diz nada sobre causalidade
  - Arco-íris não causa chuva.

O que Significam as Implicações

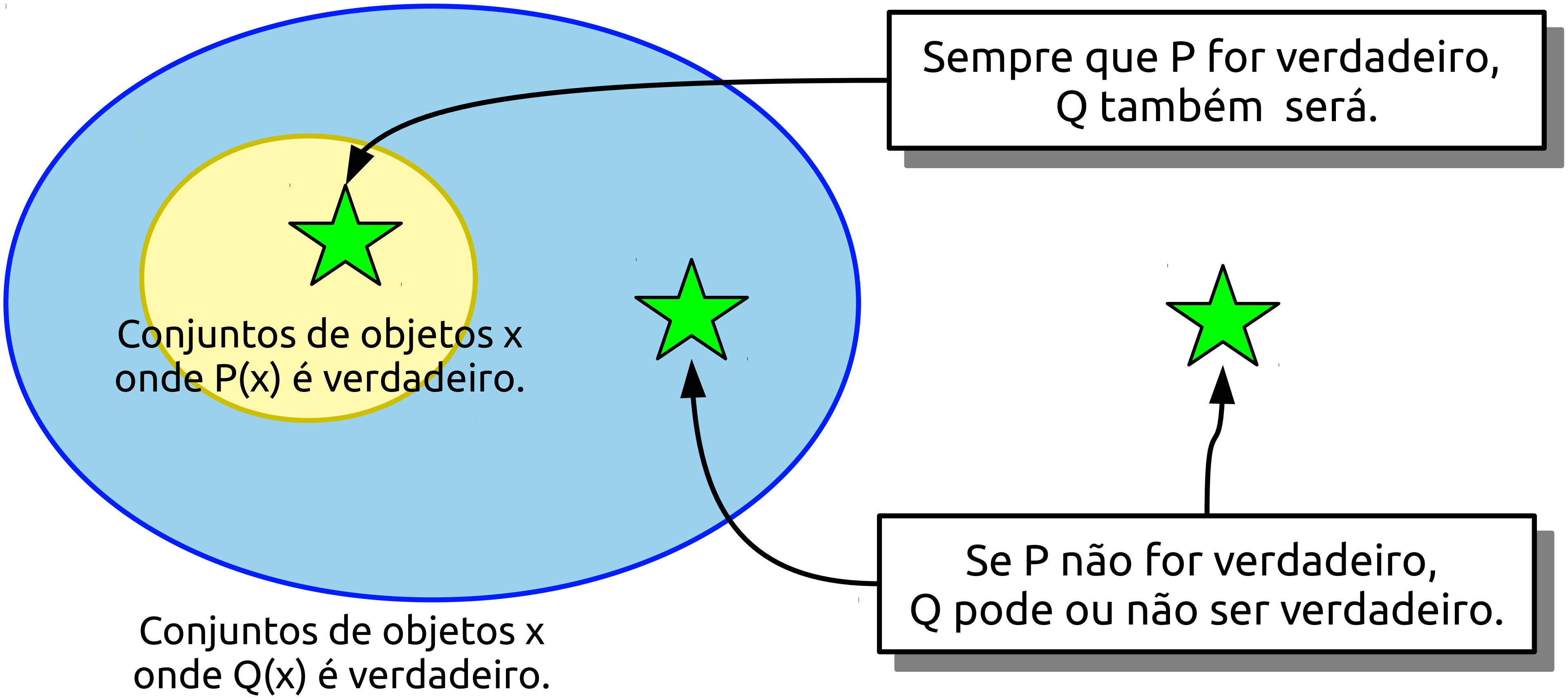
- Em matemática, uma declaração na forma

  Para qualquer x, se P(x) for verdadeiro, então Q(x) é verdadeiro

  Significa que sempre que você encontrar um objeto x onde P(x) é verdadeiro, você verá que Q(x) também é verdadeiro (para esse mesmo x).

- Não há discussão de causalidade aqui. Significa simplesmente que se você descobrir que P(x) é verdadeiro, você descobrirá que Q(x) também é verdadeiro.

Implicação, Diagramaticamente



Negações

Negações

- Uma **proposição** é uma afirmação verdadeira ou falsa.
  - Frases que são perguntas ou comandos não são proposições.
- Alguns exemplos:
  - Se **n** for um inteiro par, então $\mathbf{n^2}$ é um inteiro par.
  - $\varnothing = \mathbb{R}$.
  - Senhor dos Anéis é um bom filme.
- A **negação** de uma proposição X é uma proposição que é verdadeira sempre que X é falsa e é falsa sempre que X é verdadeiro.
- Por exemplo, considere a declaração “está nevando lá fora”.
  - Sua negação é "não está nevando lá fora".
  - Sua negação não é "está ensolarado lá fora". ⚠

Como Encontramos a Negação de uma Afirmação?

A negação da declaração **universal**

Todo P é um Q.

É a declaração **existencial**

Existe um P que não é um Q.

A negação da declaração **universal**

Para todo x, P(x) é verdadeiro.

É a declaração **existencial**

Existe um x onde P(x) é falso.

A negação da declaração **existencial**

Existe um P que é um Q.

É a declaração **universal**

Todo P não é um Q.

A negação da declaração **existencial**

Existe um x onde P(x) é verdadeiro.

É a declaração **universal**

Para todo x, P(x) é falso.

Lógica Canina

- Considere a afirmação

Eu amo todos os cachorros.

Qual é a negação?

A. Eu não amo cachorros.
B. Eu amo alguns cachorros e outros não.
C. Há pelo menos um cachorro que eu não amo

Lógica Canina

- Considere a afirmação

Eu amo todos os cachorros.

- A seguinte declaração **não é** a negação da declaração original:

Eu não amo cachorros.

"Eu amo todos os cachorros." | "É complicado." | "Eu não amo cachorros."

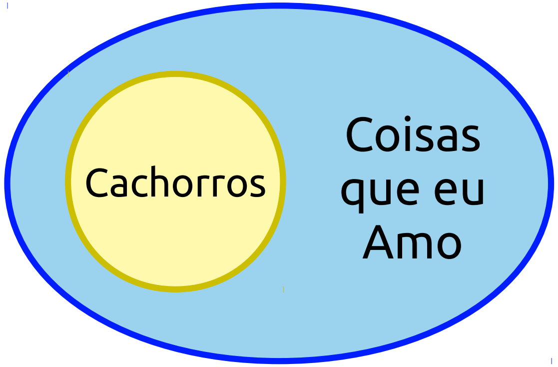
Lógica Canina

- Considere a afirmação

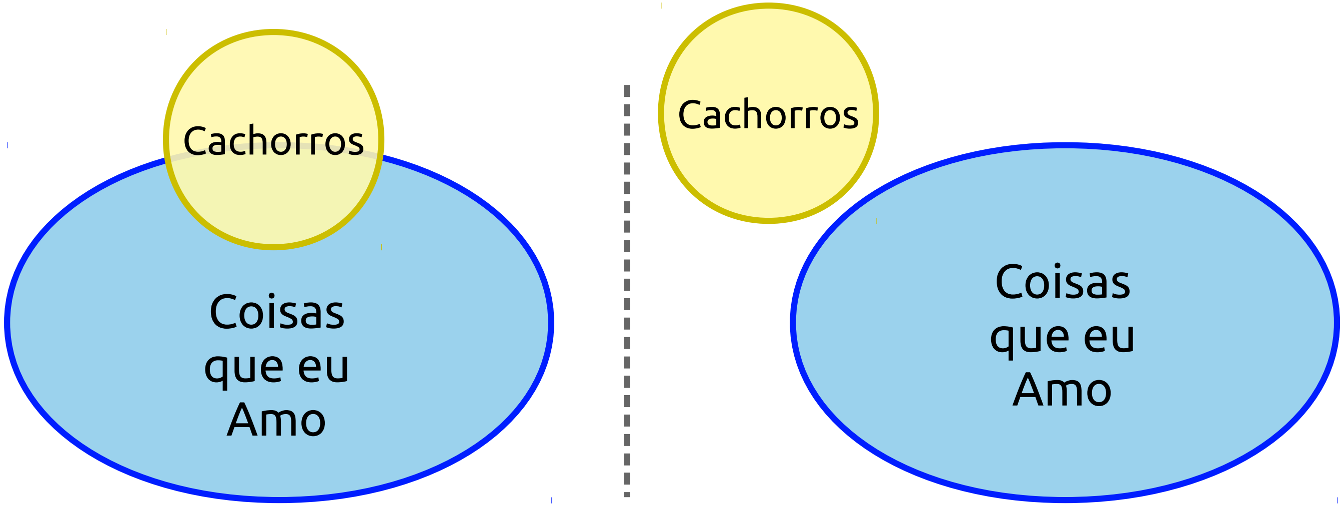
Eu amo todos os cachorros.

- Aqui está a negação adequada de nossa afirmação inicial sobre cachorros:

Há pelo menos um cachorro que eu não amo.



“Eu amo todos os cachorros.”



“Há pelo menos um cachorro que eu não amo.”

Como você nega uma implicação?

Vamos olhar para:

- Negação de uma implicação
- Um parente próximo da negação: o Contrapositivo

A negação da declaração

“Se P é verdadeiro, então Q é verdadeiro.”

É a declaração

“P é verdadeiro, e Q é falso.”

A negação de uma implicação não é uma implicação!

A negação da declaração

“Para qualquer x, se P(x) for verdadeiro, então Q(x) é verdadeiro”

É a declaração

“Há pelo menos um x onde P(x) é verdadeiro e Q(x) é falso.”

A negação de uma implicação não é uma implicação!

O Contrapositivo

- O **contrapositivo** da implicação "Se P, então Q" é "Se não Q, então não P."
- Por exemplo:
  - "Se você gosta, você deve colocar um anel nele."
  - Contrapositivo: “Se você não deveria colocar um anel nele, então você não gosta.”

Prova por Contrapositivo

Para provar a declaração

> "Se P for verdadeiro, então Q é verdadeiro."

você pode optar por provar a declaração equivalente

> "Se Q for falso, então P é falso."

(se isso for mais fácil).

Isso é chamado de prova por contrapositivo.

Teorema: Para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, se n^2 for par, então n é par.

Teorema: Para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, se n^2 for par, então n é par.

Prova: Por contrapositivo;

Estamos iniciando esta prova dizendo
ao leitor que é uma prova por contrapositivo.
Isso ajuda o leitor a saber o que está por vir

Teorema: Para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, se n^2 for par, então n é par.

Prova: Por contrapositivo; provamos que se n é ímpar, então n^2 é ímpar.

Aqui, estamos escrevendo explicitamente o contrapositivo. Esse diz ao leitor o que vamos provar. Ele também atua como um teste de sanidade, nos forçando a escrever o que pensamos que seja o contrapositivo.

Teorema: Para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, se n^2 for par, então n é par.

Prova: Por contrapositivo; provamos que se n é ímpar, então n^2 é ímpar.

Seja **n** um número inteiro ímpar arbitrário. Uma vez que **n** é ímpar, existe algum inteiro **k** tal que $\mathbf{n = 2k + 1}$. Quadrando ambos os lados desta igualdade e simplificando dá o seguinte:

$$n^2 = (2k + 1)^2$$

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Disto, vemos que existe um inteiro **m** (nomeadamente, $\mathbf{2k^2 + 2k}$) tal que $\mathbf{n^2 = 2m + 1}$. Portanto, n^2 é ímpar.■

Teorema: Para qualquer $n \in \mathbb{Z}$, se n^2 for par, então n é par.

Prova: Por contrapositivo; provamos que se n é ímpar, então n^2 é ímpar.

O padrão geral aqui é o seguinte:

1. Comece anunciando que vamos usar uma prova por contrapositivo para que o leitor saiba o que esperar.

2. Declare explicitamente o contrapositivo do que queremos provar.

3. Prove o contrapositivo.

Bicondicionais

- Combinado com o que vimos anteriormente, provamos que, se n for um inteiro:

  Se n for par, então n^2 será par.

  Se n^2 for par, então n é par.

- Portanto, se n for um inteiro:

  n é par se e somente se n^2 for par.

Provando Bicondicionais

- Para provar um teorema da forma P se somente Q, você precisa provar que P implica Q e que Q implica P. (duas provas separadas)
- Você pode usar qualquer técnica de prova que gostaria de mostrar cada uma dessas declarações.
  - No nosso caso, usamos uma prova direta para um e uma prova por contrapositivo para o outro.

Prova por Contradição

“Quando você eliminou tudo o que é impossível, o que restar, por mais improvável que seja, deve ser a verdade.”

- Sir Arthur Conan Doyle, The Adventure of the Blanched Soldier

Prova por Contradição

- Uma **prova por contradição** é uma prova que funciona da seguinte forma:
  - Para provar que P é verdadeiro, suponha que P não seja verdadeiro.
  - Partindo dessa suposição, use o raciocínio lógico para concluir algo que é claramente impossível.
    - Por exemplo, que $1 = 0$, que $x \in S$ e $x \notin S$, etc.
  - Isso significa que se P for falso, algo que não pode acontecer, acontece!
  - Portanto, P não pode ser falso, então deve ser verdadeiro.

Um Exemplo:
Cardinalidades de Conjuntos

Cardinalidades de Conjuntos

- Vimos conjuntos de muitas cardinalidades diferentes:
  - $|\emptyset| = 0$
  - $|\{1, 2, 3\}| = 3$
  - $|\{ n \in \mathbb{N} \mid n < 137\}| = 137$
  - $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.
- Estes vão do finito ao infinito.
- **Pergunta:** Existe um conjunto “maior”? Ou seja, existe um conjunto maior do que qualquer outro?

Teorema: Não existe um conjunto maior.

Teorema: Não existe um conjunto maior.

Prova: Suponha, por uma questão de contradição, que haja um conjunto maior; chame de **S**.

Para provar esta afirmação por contradição,
vamos assumir sua negação.
Qual é a negação da declaração
“Não há conjunto maior?”
Uma opção: “há um conjunto maior”.

Teorema: Não existe um conjunto maior.

Prova: Suponha, por uma questão de contradição, que haja um conjunto maior; chame de **S**.

Observe que estamos anunciando

1. que esta é uma prova por contradição, e
2. o que, especificamente, estamos assumindo.

Isso ajuda o leitor a entender onde estamos indo.
Lembre-se: as provas são feitas para serem lidas por outras pessoas

Teorema: Não existe um conjunto maior.

Prova: Suponha, por uma questão de contradição, que haja um conjunto maior; chame de **S**.

Agora, considere o conjunto $\wp(S)$. Pelo teorema de Cantor, sabemos que $|S| < |\wp(S)|$, então $\wp(S)$ é um conjunto maior que **S**. Isso contradiz o fato de que **S** é o maior conjunto.

Chegamos a uma contradição, então nossa suposição deve estar errada. Portanto, não existe um conjunto maior. $\blacksquare$

Teorema: Não existe um conjunto maior.

Prova: Suponha, por uma questão de contradição, que haja um conjunto maior; chame de **S**.

Existem três peças chave:

1. Diga que a prova é por contradição.
2. Diga o que você está assumindo ser a negação da afirmação a provar.
3. Diga que você alcançou uma contradição e o que ela significa.

Chegamos a uma contradição, então nossa suposição deve estar errada. Portanto, não existe um conjunto maior. ■

Provando Implicações

- Para provar a implicação

  "Se P for verdadeiro, então Q é verdadeiro."

- Você pode usar estas três técnicas:
  - **Prova Direta.**
    - Assuma P e prove Q.
  - **Prova por Contrapositivo.**
    - Suponha que não seja Q e prove que não é P.
  - **Prova por Contradição.**
    - O que isso parece?

Teorema: Se **n** for um inteiro e $\mathbf{n^2}$ for par, então **n** é par.

Prova: Suponha, por uma questão de contradição, que **n** é um inteiro e que $\mathbf{n^2}$ é par, mas que **n** é ímpar.

Como **n** é ímpar, sabemos que existe um inteiro **k** tal que

$$n = 2k + 1 \qquad (1)$$

Quadrando ambos os lados da equação (1) e simplificando dá o seguinte:

$$n^2 = (2k + 1)^2$$

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \qquad (2)$$

A equação (2) nos diz que $\mathbf{n^2}$ é ímpar, o que é impossível; por suposição, $\mathbf{n^2}$ é par.

Chegamos a uma contradição, então nossa suposição deve ter sido incorreta. Portanto, se **n** for um inteiro e $\mathbf{n^2}$ for par, n também será.■

Teorema: Se **n** for um inteiro e **n²** for par, então **n** é par.

Prova: Suponha, por uma questão de contradição, que **n** é um inteiro e que **n²** é par, mas que **n** é ímpar.

Como **n** é ímpar, sabemos que existe um inteiro **k** tal que

Existem três peças chave:

1. Diga que a prova é por contradição.
2. Diga o que você está assumindo ser a negação da afirmação a provar.
3. Diga que você alcançou uma contradição e o que ela significa.

A equação (2) nos diz que **n²** é ímpar, o que é impossível; por suposição, **n²** é par.

Chegamos a uma contradição, então nossa suposição deve ter sido incorreta. Portanto, se **n** for um inteiro e **n²** for par, n também será. ■

Revisão: Negando Implicações

- Para provar a declaração

  "Para qualquer x, se P(x) for verdadeiro, então Q(x) é verdadeiro"

  Por contradição, fazemos o seguinte:

  - Suponha que toda esta afirmação roxa seja falsa.
  - Derive uma contradição.
  - Conclua que a declaração é verdadeira.

- Qual é a negação da afirmação roxa acima?

  "Existe um x onde P(x) é verdadeiro e Q(x) é falso"

Revisão: Contradições e Implicações

- Para provar a declaração

  "Se P for verdadeiro, então Q é verdadeiro"

  Usando uma prova por contradição, faça o seguinte:

  - Suponha que P seja verdadeiro e que Q seja falso.
  - Derive uma contradição.
  - Conclua que, se P for verdadeiro, Q também deve ser.

Números Racionais e Irracionais

Números Racionais e Irracionais

- Um número **r** é chamado de **número racional** se puder ser escrito como

$$r = \frac{p}{q}$$

- Onde **p** e **q** são inteiros e $\mathbf{q \neq 0}$.
- Um número que não é racional é chamado de irracional.

Formas mais Simples

- Por definição, se r é um número racional, então r pode ser escrito como p / q, onde p e q são inteiros e $q \neq 0$.
- **Teorema:** Se r é um número racional, então r pode ser escrito como p / q onde p e q são inteiros, $q \neq 0$, e p e q não têm fatores comuns diferentes de 1 e -1.
  - Ou seja, r pode ser escrito como uma fração na forma mais simples.

Pergunta: Todos os números reais são racionais?

Teorema: $\sqrt{2}$ é irracional.

Prova: Suponha, por uma questão de contradição, que $\sqrt{2}$ é racional. Isso significa que deve haver inteiros p e q onde $q \neq 0$, onde p e q não têm divisores comuns além de 1 e -1, e onde

$$p / q = \sqrt{2}. \qquad (1)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (1) por q e elevando os dois lados ao quadrado nos mostra que

$$p^2 = 2q^2 \qquad (2)$$

Pela equação (2), vemos que p^2 é par. Anteriormente, provamos que se p^2 for par, então p também deve ser par. Portanto, sabemos que existe algum inteiro k tal que $p = 2k$. Substituindo isso na equação (2) e simplificando nos dá o seguinte:

$$p^2 = 2q^2$$

$$(2k)^2 = 2q^2$$

$$4k^2 = 2q^2$$

$$2k^2 = q^2 \qquad (3)$$

A equação (3) mostra que q^2 é par. Nosso teorema anterior nos diz que, porque q^2 é par, q também deve ser par. Mas isso não é possível - sabemos que p e q não têm fatores comuns além de 1 e -1, mas mostramos que p e q devem ter dois como fator comum.

Chegamos a uma contradição, então nossa suposição original deve estar errada. Portanto $\sqrt{2}$ é irracional. ■

Teorema: $\sqrt{2}$ é irracional.

Prova: Suponha, por uma questão de contradição, que $\sqrt{2}$ é racional. Isso significa que deve haver inteiros p e q onde $q \neq 0$, onde p e q não têm divisores comuns além de 1 e -1, e onde

$$p / q = \sqrt{2}. \qquad (1)$$

Multiplicando ambos os lados da equação (1) por q e elevando os dois lados ao quadrado nos mostra que

$$p^2 = 2q^2 \qquad (2)$$

Existem três peças chave:

1. Diga que a prova é por contradição.
2. Diga o que você está assumindo ser a negação da afirmação a provar.
3. Diga que você alcançou uma contradição e o que ela significa.

A equação (3) mostra que q^2 é par. Nosso teorema anterior nos diz que, porque q^2 é par, q também deve ser par. Mas isso não é possível - sabemos que p e q não têm fatores comuns além de 1 e -1, mas mostramos que p e q devem ter dois como fator comum.

Chegamos a uma contradição, então nossa suposição original deve estar errada. Portanto $\sqrt{2}$ é irracional. ■

O que Aprendemos

- **O que é uma implicação?**
  - É uma declaração da forma “se P, então Q,” e afirma que se P é verdadeiro, então Q é verdadeiro.
- **Como você nega fórmulas?**
  - Depende da fórmula. Existem boas regras sobre como negar declarações e implicações universais e existenciais.
- **O que é uma prova por contrapositivo?**
  - É uma prova de uma implicação que, em vez disso, prova sua contraposição.
  - (O contrapositivo de "se P, então Q" é "se não Q, então não P.")
- **O que é uma prova por contradição?**
  - É uma prova de uma afirmação P que funciona mostrando que P não pode ser falsa.

Negando Declarações

Implicações do Escopo

- Considere as seguintes declarações:

  Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

  Se n for par, então n^2 será par.

  Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$.

- Nas declarações acima, o que são A, B, C e n? São eles objetos específicos? Ou essas afirmações valem para todos os objetos?

Implicações e Universais

- Na matemática discreta, a maioria das implicações que envolvem quantidades desconhecidas são, implicitamente, afirmações universais.*
- Por exemplo, a declaração

  Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$
- Na verdade significa

  Para quaisquer conjuntos A, B e C,

  Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$.

* Suas provas nunca devem usar variáveis sem introduzi-las oficialmente.

Negando Declarações Universais

"Para todo x, P(x) é verdadeiro"

Torna-se

"Há um x onde P(x) é falso."

Negando Declarações Existenciais

"Existe um x onde P(x) é verdadeiro"

Torna-se

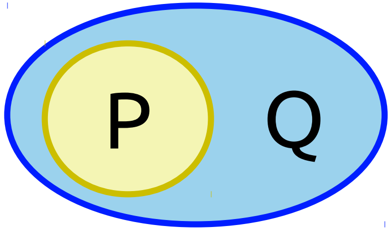
"Para todo x, P(x) é falso."

Negando Implicações

"Para cada x, se P(x) for verdadeiro, então Q(x) é verdadeiro"

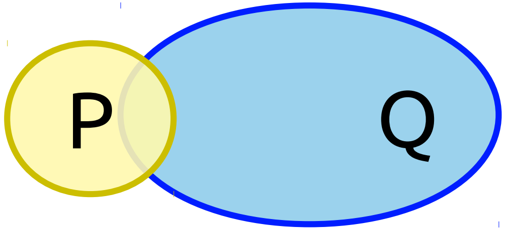
Torna-se

"Existe um x onde P(x) é verdadeiro e Q(x) é falso"



P(x) implica Q(x)

"Se P(x) for verdadeiro, então Q(x) é verdadeiro."



P(x) não implica Q(x)

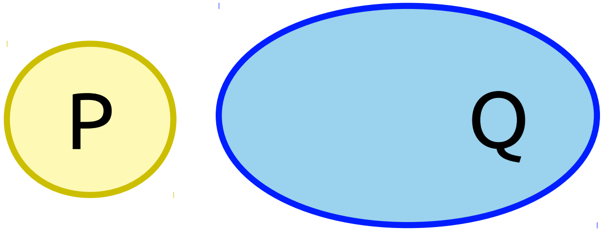
- e -

P(x) não implica não Q(x)

"Às vezes P(x) é verdadeiro e Q(x) é verdadeiro,

- e -

às vezes P(x) é verdadeiro e Q(x) é falso."

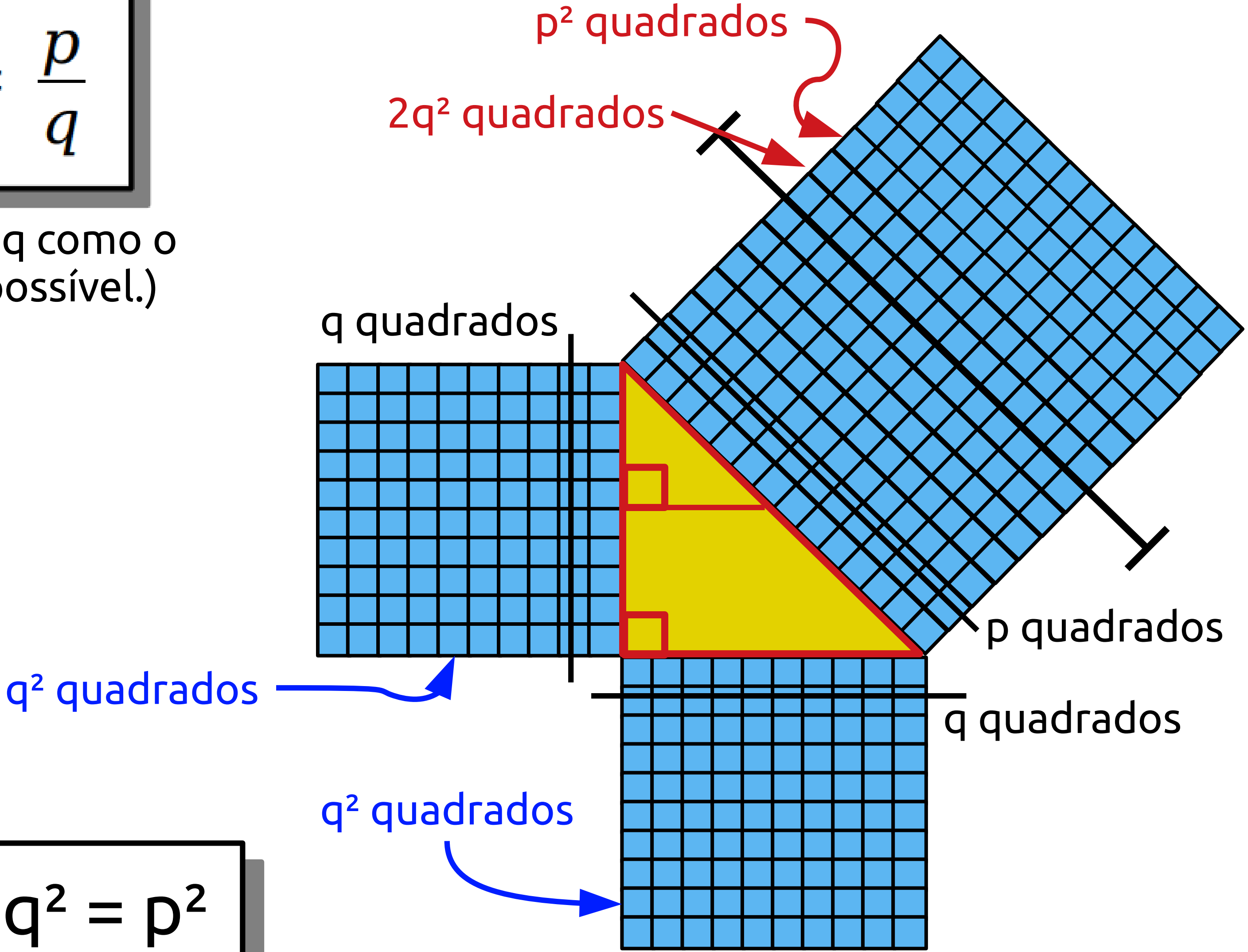


P(x) implica não Q(x)

"Se P(x) for verdadeiro, então Q(x) é falso."

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

(Imagine q como o menor possível.)



$$q^2 + q^2 = p^2$$