Lógica de Primeira Ordem

Revisando o que Aprendemos

O que é Lógica de Primeira Ordem?

- A **lógica de primeira ordem** é um sistema lógico para raciocinar sobre propriedades de objetos.
- Ela aperfeiçoa os conectivos lógicos da lógica proposicional com
  - **predicados** que descrevem propriedades de objetos,
  - **funções** que mapeiam objetos entre si, e
  - **quantificadores** que nos permitem raciocinar sobre muitos objetos ao mesmo tempo.

Algum muggle é inteligente.

$$\exists m.\ (\mathrm{Muggle}(m) \land \mathrm{Inteligente}(m))$$

∃ é o **quantificador existencial** e diz
“para alguma escolha de m, o seguinte é verdadeiro.

"Para qualquer número natural n, n é par, se somente n^2 for par"

$$\forall n.\ (n \in \mathbb{N} \to (\mathrm{Par}(n) \leftrightarrow \mathrm{Par}(n^2)))$$

$\forall$ é o **quantificador universal** e diz
"para qualquer escolha de n, o seguinte é verdadeiro.

“Todos os A's são B's”

traduz como

$$\forall x.\ (A(x) \to B(x))$$

Intuição útil:

Afirmações universalmente quantificadas são verdadeiras, a menos que haja um contra-exemplo.

$$\forall x.\ (A(x) \to B(x))$$

Se x for um contra-exemplo, ele deve ter a propriedade **A**, mas não deve ter a propriedade **B**.

“Algum A é um B”

traduz como

$$\exists x.\,(A(x) \wedge B(x))$$

Intuição útil:

As afirmações quantificadas existencialmente são falsas, a menos que haja um exemplo positivo.

$$\exists x.\ (A(x) \land B(x))$$

Se x for um exemplo, ele deve ter a propriedade **A** sobre a propriedade **B**.

As Formas Aristotélicas

"Todos os As são Bs"

$$\forall x.\ (A(x) \to B(x))$$

"Alguns As são Bs"

$$\exists x.\ (A(x) \to B(x))$$

"Nenhum As são Bs"

$$\forall x.\ (A(x) \to \neg B(x))$$

"Alguns As não são Bs"

$$\exists x.\ (A(x) \land \neg B(x))$$

Vale a pena guardar esses padrões na memória.

A Arte da Tradução

Usando os predicados

- Pessoa(p), que afirma que p é uma pessoa, e
- Ama(x, y), que afirma que x ama y

escreva uma frase na lógica de primeira ordem que significa "todo mundo ama outra pessoa".

$$
\begin{aligned}
&\forall p.\ (\mathrm{Pessoa}(p) \rightarrow \\
&\quad \exists q.\ (\mathrm{Pessoa}(q) \land p \neq q \land \\
&\qquad \mathrm{Ama}(p, q) \\
&\quad) \\
&)
\end{aligned}
$$

Usando os predicados

- Pessoa(p), que afirma que p é uma pessoa, e
- Ama(x, y), que afirma que x ama y

escreva uma frase na lógica de primeira ordem que significa “Há uma pessoa que todo mundo ama.”

$$
\begin{aligned}
&\exists p.\ (\mathrm{Pessoa}(p)\ \land \\
&\quad \forall q.\ (\mathrm{Pessoa}(q)\ \land\ p \neq q \rightarrow \\
&\qquad \mathrm{Ama}(p, q) \\
&\quad) \\
&)
\end{aligned}
$$

Combinando Quantificadores

- As declarações mais interessantes na lógica de primeira ordem requerem uma combinação de quantificadores.
- Exemplo: “Todo mundo ama outra pessoa.”

$$\forall p.\ (Pessoa(p) \rightarrow \exists q.\ (Pessoa(q) \land p \neq q \land Ama(p, q)))$$

Para cada pessoa,

Existe uma pessoa

Que não são elas

Que elas amam.

Combinando Quantificadores

- As declarações mais interessantes na lógica de primeira ordem requerem uma combinação de quantificadores.
- Exemplo: "Há alguém que todo mundo ama."

$$\exists p.\ (\underbrace{Pessoa(p)}_{\text{Há alguma pessoa}} \land \forall q.\ (\underbrace{Pessoa(q)}_{\text{Que todo mundo}} \land \underbrace{p \neq q}_{\text{Que não são elas}} \to \underbrace{Ama(p, q)}_{\text{Amam.}}))$$

Para Comparação

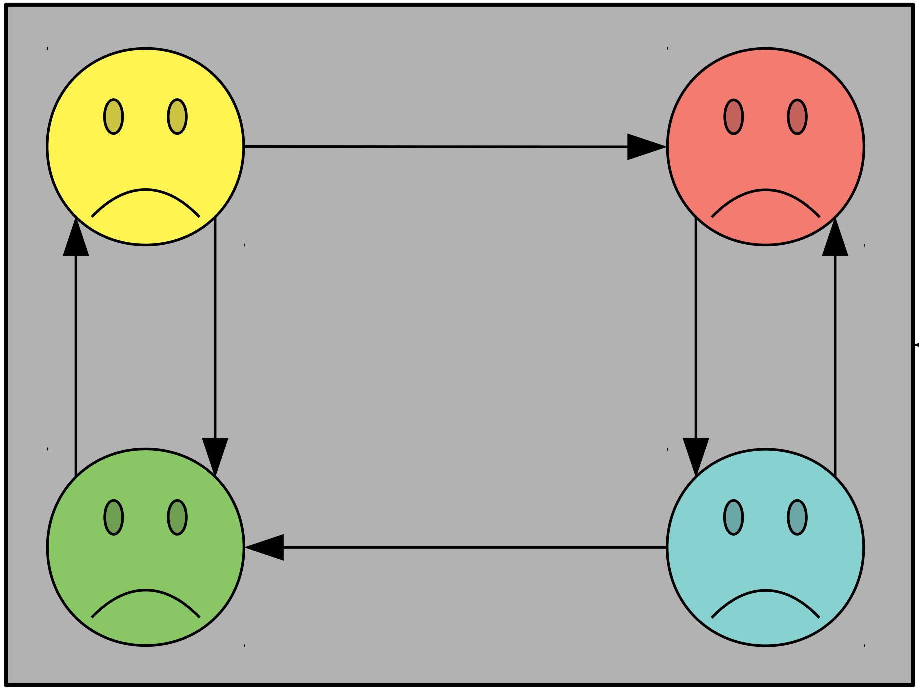
$$\forall p.\ (Pessoa(p) \to \exists q.\ (Pessoa(q) \land p \neq q \land Ama(p, q)))$$

Para cada pessoa, Existe uma pessoa Que não são elas Que elas amam.

$$\exists p.\ (Pessoa(p) \land \forall q.\ (Pessoa(q) \land p \neq q \to Ama(p, q)))$$

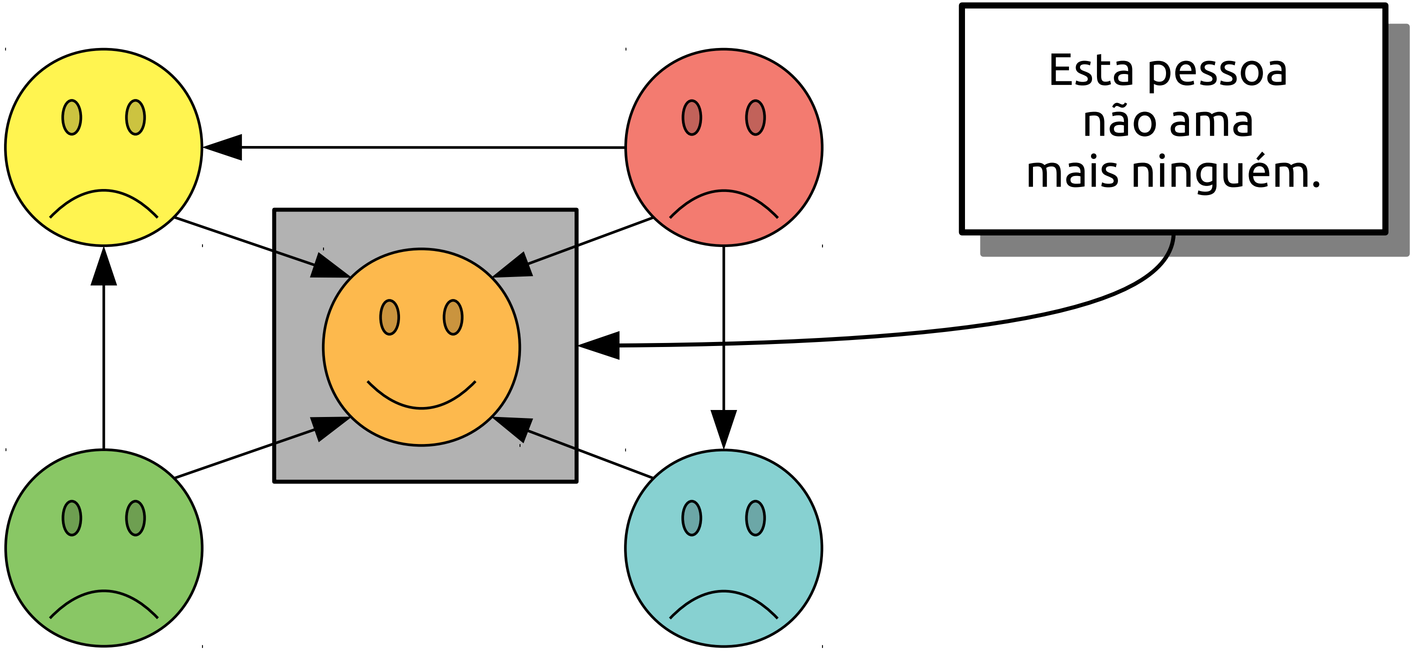
Há alguma pessoa Que todo mundo Que não são elas Amam.

Todo Mundo Ama outra Pessoa

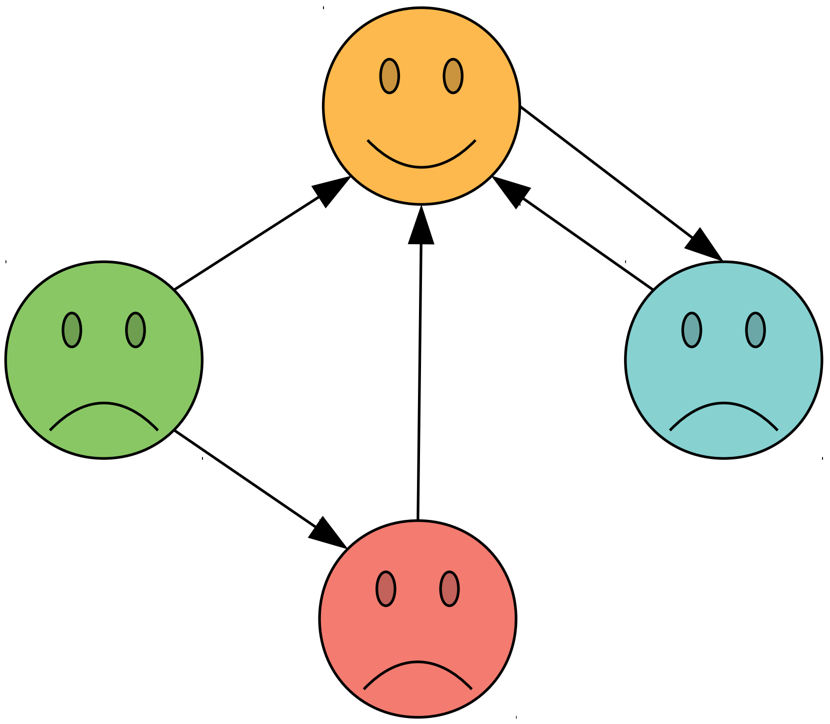


Ninguém aqui é universalmente amado.

Há Alguém que Todos Amam



Todo Mundo Ama Outra Pessoa e Há Alguém que Todas as Outras Pessoas Amam



Todo Mundo Ama Outra Pessoa e Há Alguém que Todas as Outras Pessoas Amam

$$\forall p.\ (\text{Pessoa}(p) \to \exists q.\ (\text{Pessoa}(q) \land p \neq q \land \text{Ama}(p, q)))$$

Para cada pessoa, Existe uma pessoa Que não são elas Que elas amam.

$$\land$$

$$\exists p.\ (\text{Pessoa}(p) \land \forall q.\ (\text{Pessoa}(q) \land p \neq q \to \text{Ama}(p, q)))$$

Há alguma pessoa Que todo mundo Que não são elas Amam.

Pedido de Quantificador

- A declaração

  $\forall x.\ \exists y.\ P(x, y)$

  Significa "para qualquer escolha de x, há alguma escolha de y onde P(x, y) é verdadeiro."
- A escolha de y pode ser diferente a cada vez e pode depender de x.

Pedido de Quantificador

- A declaração

  $\exists x.\ \forall y.\ P(x, y)$

  Significa "Existe algum x onde para qualquer escolha de y, obtemos que P(x, y) é verdadeiro."
- Como a parte interna deve funcionar para qualquer escolha de y, isso impõe muitas restrições sobre o que x pode ser.

A **ordem é importante** ao misturar quantificadores existenciais e universais!

Traduções de Conjuntos

Usando os predicados

- Conjunto(S), que afirma que S é um conjunto, e
- x ∈ y, que afirma que x é um elemento de y,

escreva uma frase na lógica de primeira ordem que significa “O conjunto vazio existe.”

A lógica de primeira ordem não tem operadores ou símbolos de conjuntos "embutidos". Se tivermos apenas os predicados dados acima, como podemos descrever isso?

$$\exists S.\ (\text{Conjunto}(S) \land \neg\exists x.\ x \in S)$$

$$\exists S.\ (\text{Conjunto}(S) \land \forall x.\ x \notin S)$$

Ambas as traduções estão corretas. Assim como na lógica proposicional, existem muitas maneiras equivalentes diferentes de expressar a mesma declaração na lógica de primeira ordem

Usando os predicados

- Conjunto(S), que afirma que S é um conjunto, e
- $x \in y$, que afirma que x é um elemento de y,

escreva uma frase na lógica de primeira ordem que significa “Dois conjuntos são iguais se e somente se contiverem os mesmos elementos.”

$$
\begin{array}{l}
\forall S.\ (\mathrm{Conjunto}(S) \to \\
\quad \forall T.\ (\mathrm{Conjunto}(T) \to \\
\qquad (S = T \leftrightarrow \forall x.\ (x \in S \leftrightarrow x \in T)) \\
\quad) \\
)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\forall S.\ (\mathrm{Conjunto}(S) \rightarrow \\
\quad \forall T.\ (\mathrm{Conjunto}(T) \rightarrow \\
\quad\quad (S = T \leftrightarrow \forall x.\ (x \in S \leftrightarrow x \in T)) \\
\quad) \\
)
\end{array}
$$

Às vezes, você vê o par de quantificador universal com o conectivo ↔. Isso é especialmente comum quando falando sobre conjuntos, porque dois conjuntos são iguais quando têm exatamente os mesmos elementos.

Mecânica: Negando Declarações

Tabela Muito Importante

	Quando isso é verdade?	Quando isso é falso?
$\forall x.\ P(x)$	Para qualquer escolha de x, P(x)	$\exists x.\ \neg P(x)$
$\exists x.\ P(x)$	Para alguma escolha de x, P(x)	$\forall x.\ \neg P(x)$
$\forall x.\ \neg P(x)$	Para qualquer escolha de x, ¬P(x)	$\exists x.\ P(x)$
$\exists x.\ \neg P(x)$	Para alguma escolha de x, ¬P(x)	$\forall x.\ P(x)$

Negando Declarações de Primeira Ordem

- Use as equivalências

  $$\neg\forall x.\ A \equiv \exists x.\ \neg A$$

  $$\neg\exists x.\ A \equiv \forall x.\ \neg A$$

  Para negar quantificadores.
- Mecanicamente:
  - Empurre a negação pelo quantificador.
  - Mude o quantificador de $\forall$ para $\exists$ ou vice-versa.
- Use técnicas da lógica proposicional para negar conectivos.

Tomando uma Negação

$$\forall x.\ \exists y.\ Ama(x, y)$$

("Todo mundo ama alguém.")

$$\neg\forall x.\ \exists y.\ Ama(x, y)$$

$$\exists x.\ \neg\exists y.\ Ama(x, y)$$

$$\exists x.\ \forall y.\ \neg Ama(x, y)$$

("Há alguém que não ama ninguém.")

Duas Equivalências Úteis

- As seguintes equivalências são úteis ao negar declarações na lógica de primeira ordem:

  $$\neg(p \land q) \equiv p \to \neg q$$

  $$\neg(p \to q) \equiv p \land \neg q$$

- Essas identidades são úteis ao negar declarações envolvendo quantificadores.
  - $\land$ é usado em afirmações quantificadas existencialmente.
  - $\to$ é usado em declarações quantificadas universalmente.
- Ao enviar negações entre quantificadores, recomendamos fortemente o uso das equivalências acima para manter $\to$ com $\forall$ e $\land$ com $\exists$.

Negando Quantificadores

- Qual é a negação da seguinte afirmação, que diz “há um cão fofo”?

  $$\exists x.\ (\text{Cão}(x) \land \text{Fofo}(x))$$

- Podemos obtê-lo da seguinte forma:

  $$\neg\exists x.\ (\text{Cão}(x) \land \text{Fofo}(x))$$

  $$\forall x.\ \neg(\text{Cão}(x) \land \text{Fofo}(x))$$

  $$\forall x.\ (\text{Cão}(x) \to \neg\text{Fofo}(x))$$

- Isso diz “nenhum cão é fofo”.
- Você percebe por que esta é a negação da afirmação original tanto de uma perspectiva intuitiva quanto formal?

$$\exists S.\ (\text{Conjunto}(S) \land \forall x.\ \neg(x \in S))$$

("Há um conjunto sem elementos.")

$$\neg\exists S.\ (\text{Conjunto}(S) \land \forall x.\ \neg(x \in S))$$

$$\forall S.\ \neg(\text{Conjunto}(S) \land \forall x.\ \neg(x \in S))$$

$$\forall S.\ (\text{Conjunto}(S) \to \neg\forall x.\ \neg(x \in S))$$

$$\forall S.\ (\text{Conjunto}(S) \to \exists x.\ \neg\neg(x \in S))$$

$$\forall S.\ (\text{Conjunto}(S) \to \exists x.\ x \in S)$$

("Cada conjunto contém pelo menos um elemento.")

Quantificadores Restritos

Quantificação de Conjuntos

- A notação

  $\forall x \in S.\ P(x$

  Significa "para qualquer elemento x do conjunto S, P(x) é válido." (É vacuamente verdadeiro se S estiver vazio.)

- A notação

  $\exists x \in S.\ P(x)$

- Significa "há um elemento x do conjunto S onde P(x) é válido." (É falso se S estiver vazio.)

Quantificação de Conjuntos

- A sintaxe

$$\forall x \in S.\ \varphi$$

$$\exists x \in S.\ \varphi$$

É permitido para quantificar sobre conjuntos.

Expressando Exclusividade

Usando o predicado

- Nível(l), que afirma que l é um nível,
- $x \in y$, que afirma que x é um elemento de y,

escreva uma frase na lógica de primeira ordem que significa "há apenas um nível".

$$\exists l.\ (\text{Nível}(l) \land$$
$$\quad \forall x.\ (x \neq l \to \neg\text{Nível}(x))$$
$$)$$

$$
\exists l.\ (\text{Nível}(l)\ \wedge \\
\quad \forall x.\ (\text{Nível}(x) \rightarrow x = l) \\
)
$$

Expressando Exclusividade

- Para expressar a ideia de que existe exatamente um objeto com alguma propriedade, escrevemos que
  - existe pelo menos um objeto com essa propriedade, e que
  - não existem outros objetos com essa propriedade.
- Às vezes, você vê um "quantificador de exclusividade" especial usado para expressar isso:

$$\exists! x.\ P(x)$$