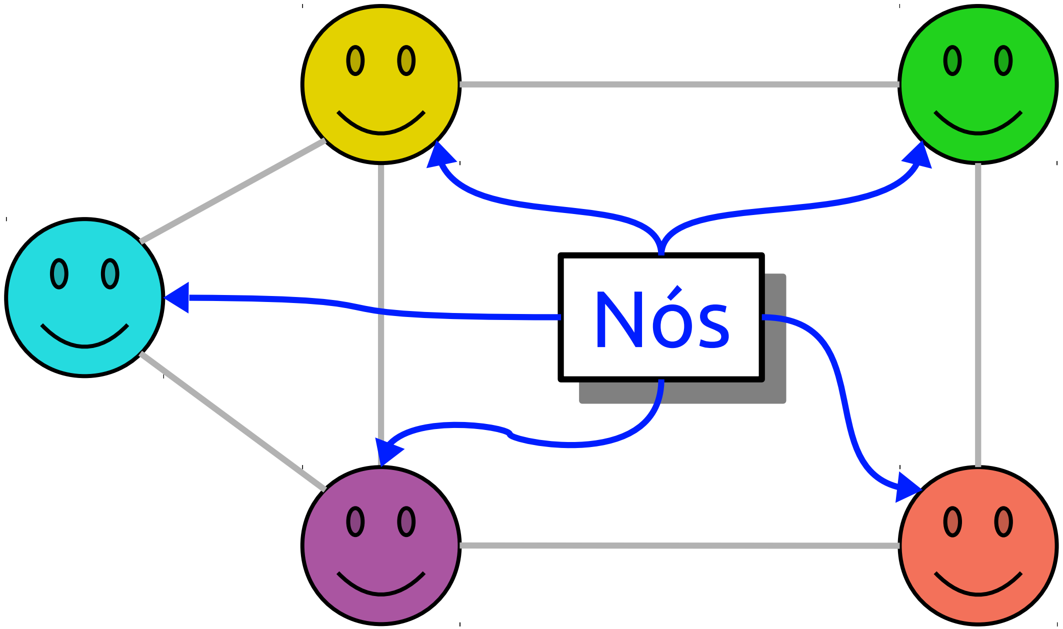
Teoria dos Grafos

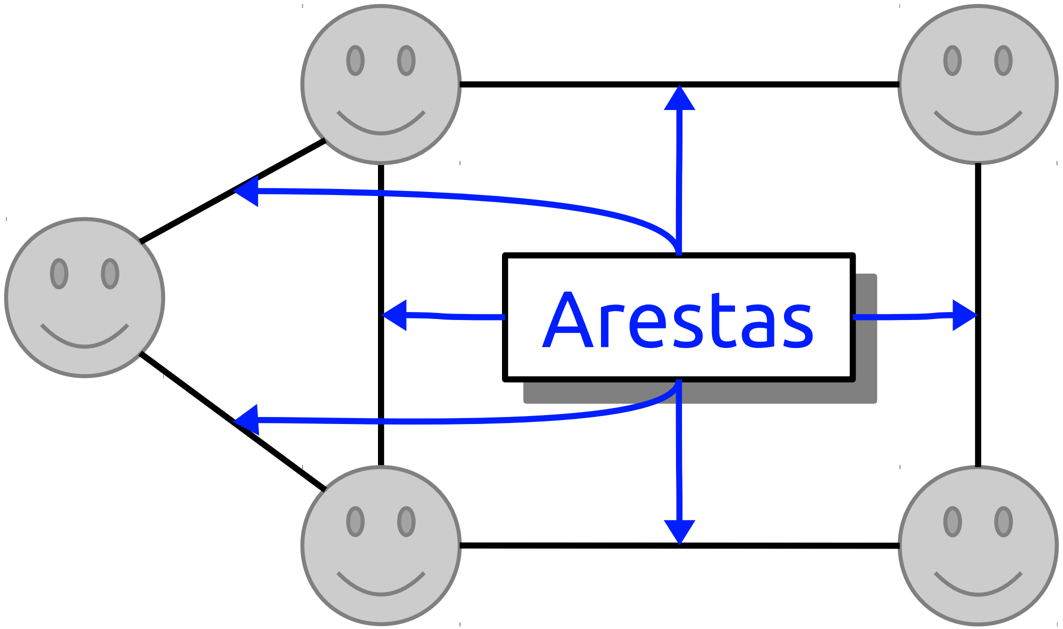
Revisando

Um **grafo** é uma estrutura matemática para representar relacionamentos.



Um **grafo** consiste em um conjunto de **nós** (ou **vértices**) conectados por **arestas** (ou **arcos**)

Um **grafo** é uma estrutura matemática para representar relacionamentos.



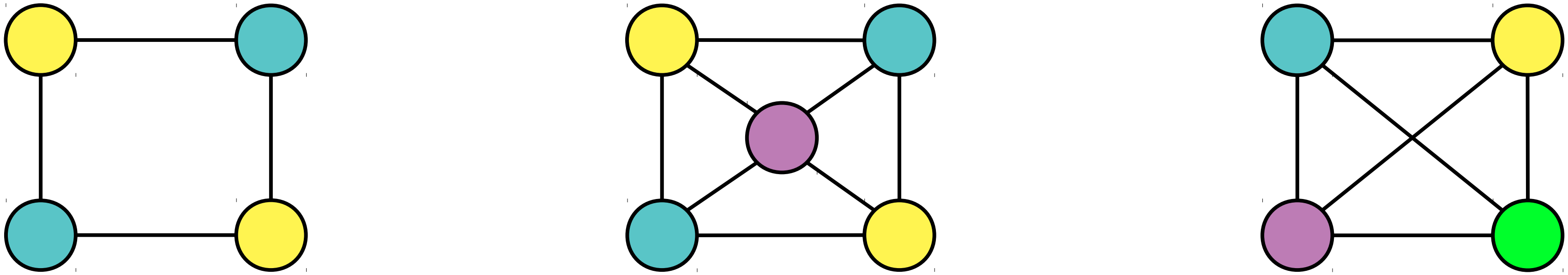
Um **grafo** consiste em um conjunto de **nós** (ou **vértices**) conectados por **arestas** (ou **arcos**)

Adjacência e Conectividade

- Dois nós em um grafo são chamados de **adjacentes** se houver uma aresta entre eles.
- Dois nós em um grafo são chamados de **conectados** se houver um caminho entre eles.
  - Um caminho é uma série de um ou mais nós onde nós consecutivos são adjacentes.

Coloração k-Vértices

- Se G = (V, E) é um grafo, uma coloração do vértice k de G é uma maneira de atribuir cores aos nós de G, usando no máximo k cores, de modo que não haja dois nós da mesma cor adjacentes.

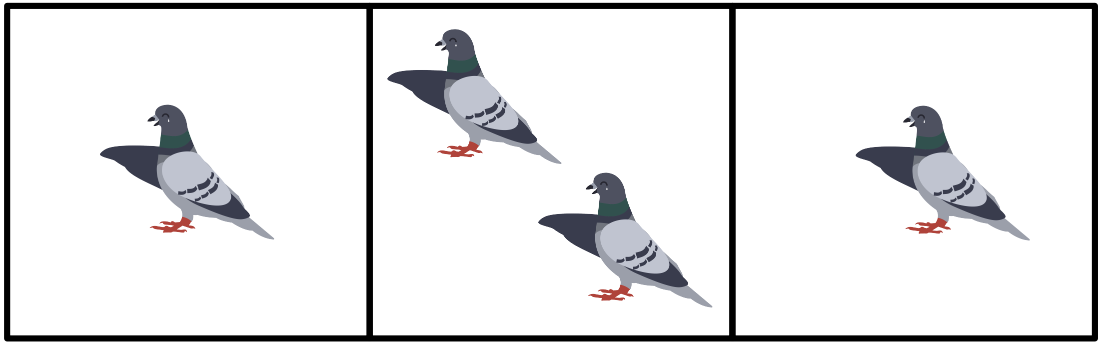


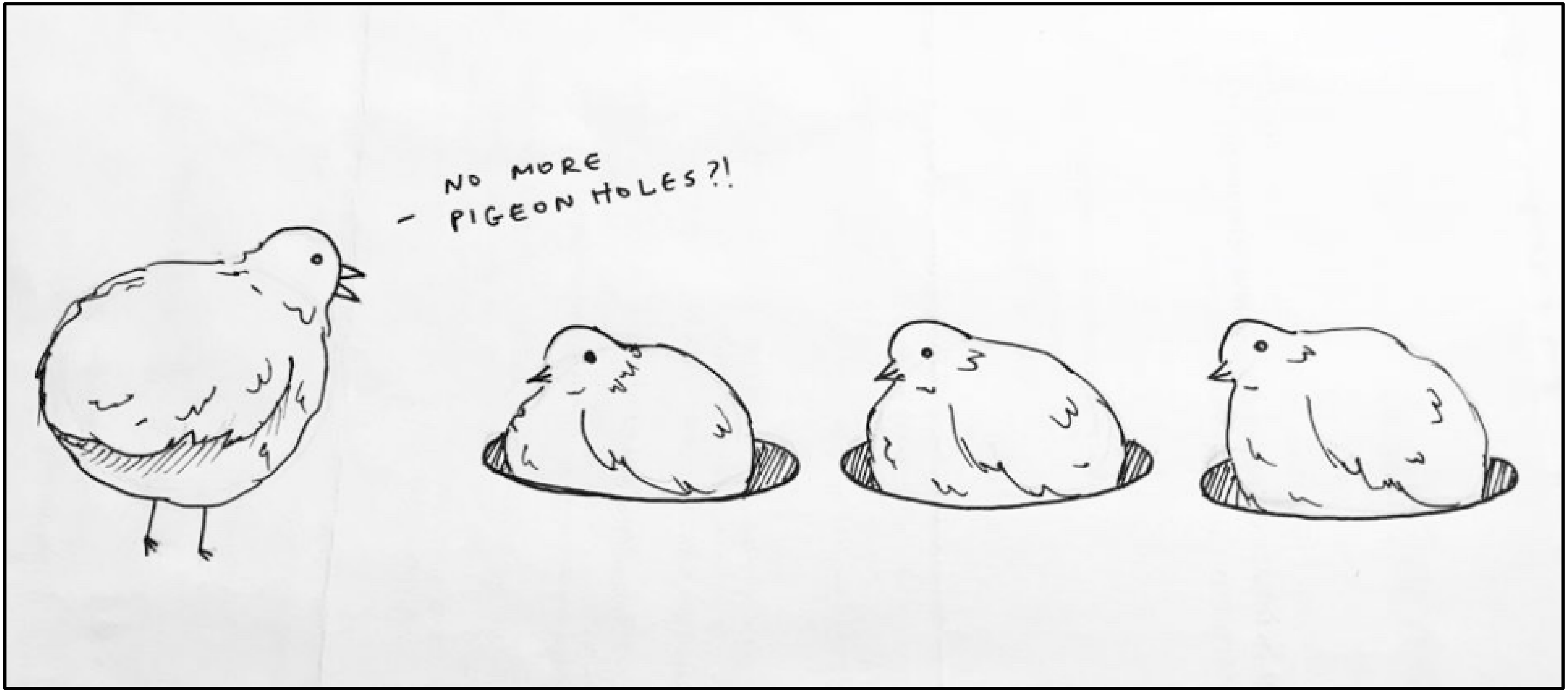
- O **número cromático** de G, denotado por **x(G)**, é o número mínimo de cores necessárias em qualquer k-coloração de G.

Princípio da Casa dos Pombos

Princípio da Casa dos Pombos

- **Teorema (O princípio da Casa dos Pombos):** Se **m** objetos são distribuídos em **n** caixas e **m** > **n**, então pelo menos uma caixa conterá pelo menos dois objetos.





$m = 4, n = 3$

Obrigado a Amy Liu por este desenho incrível!

Algumas Aplicações Simples

- Qualquer grupo de 367 pessoas deve ter um par de pessoas que compartilham o mesmo aniversário.
  - 366 aniversários possíveis (casas de pombo)
  - 367 pessoas (pombos)
- Duas pessoas em São Francisco têm exatamente o mesmo número de fios de cabelo na cabeça.
  - O número máximo de fios de cabelo já encontrado em uma cabeça humana não é maior que 500.000.
  - Existem mais de 800.000 pessoas em São Francisco.

Teorema: Se m objetos são distribuídos em n compartimentos e $m > n$, então deve haver algum compartimento que contenha pelo menos dois objetos.

Prova: Suponha, para fins de contradição, que, para alguns m e n onde $m > n$, há uma maneira de distribuir m objetos em n caixas de modo que cada caixa contenha no máximo um objeto.

Numere os compartimentos 1, 2, 3,…, n e deixe x_i denotar o número de objetos no compartimento i. Existem m objetos no total, então sabemos que

$$m = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Como cada compartimento tem no máximo um objeto, sabemos que $x_i \leq 1$ para cada i. Isso significa que

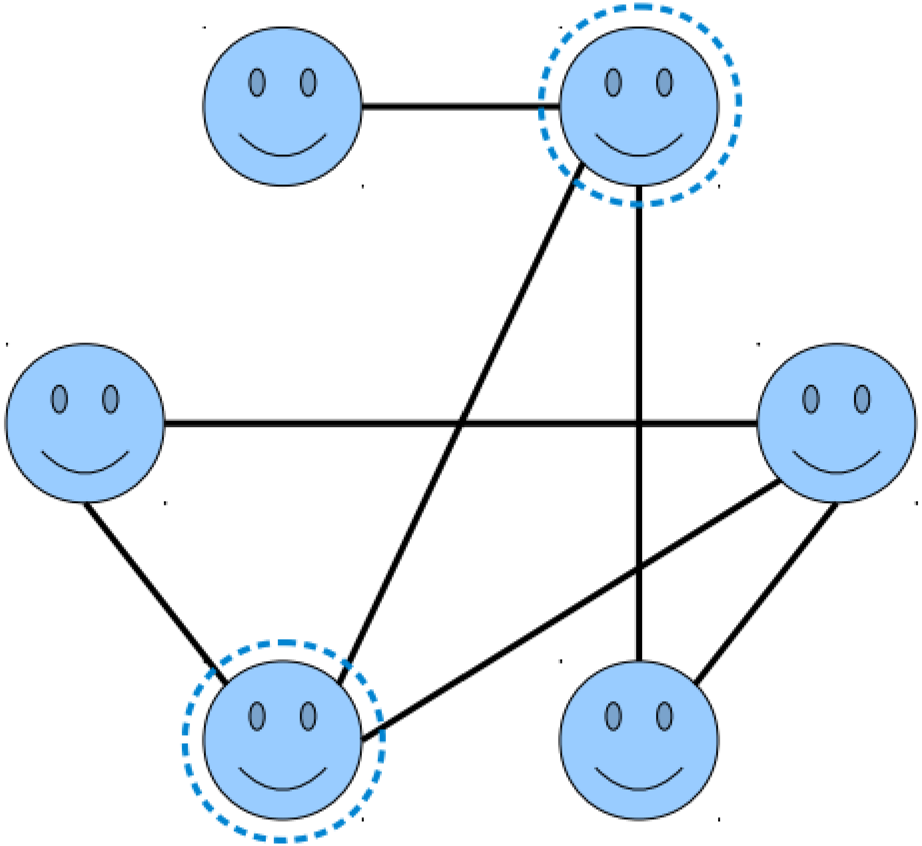
$$m = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

$$m \leq 1 + 1 + \ldots + 1 \text{ (n vezes)}$$

$$m = n.$$

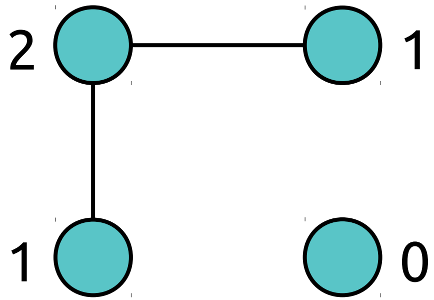
Isso significa que $m \leq n$, contradizendo que $m > n$. Chegamos a uma contradição, então nossa suposição deve estar errada. Portanto, se m objetos são distribuídos em n compartimentos com $m > n$, algum compartimento deve conter pelo menos dois objetos.■

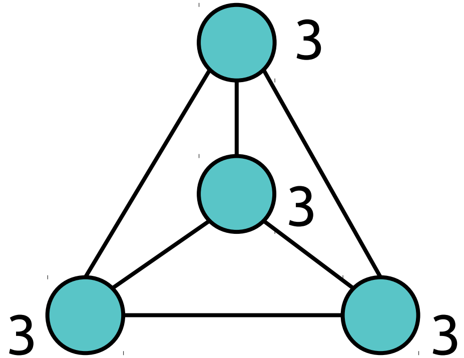
Princípio da Casa dos Pombos: Truques



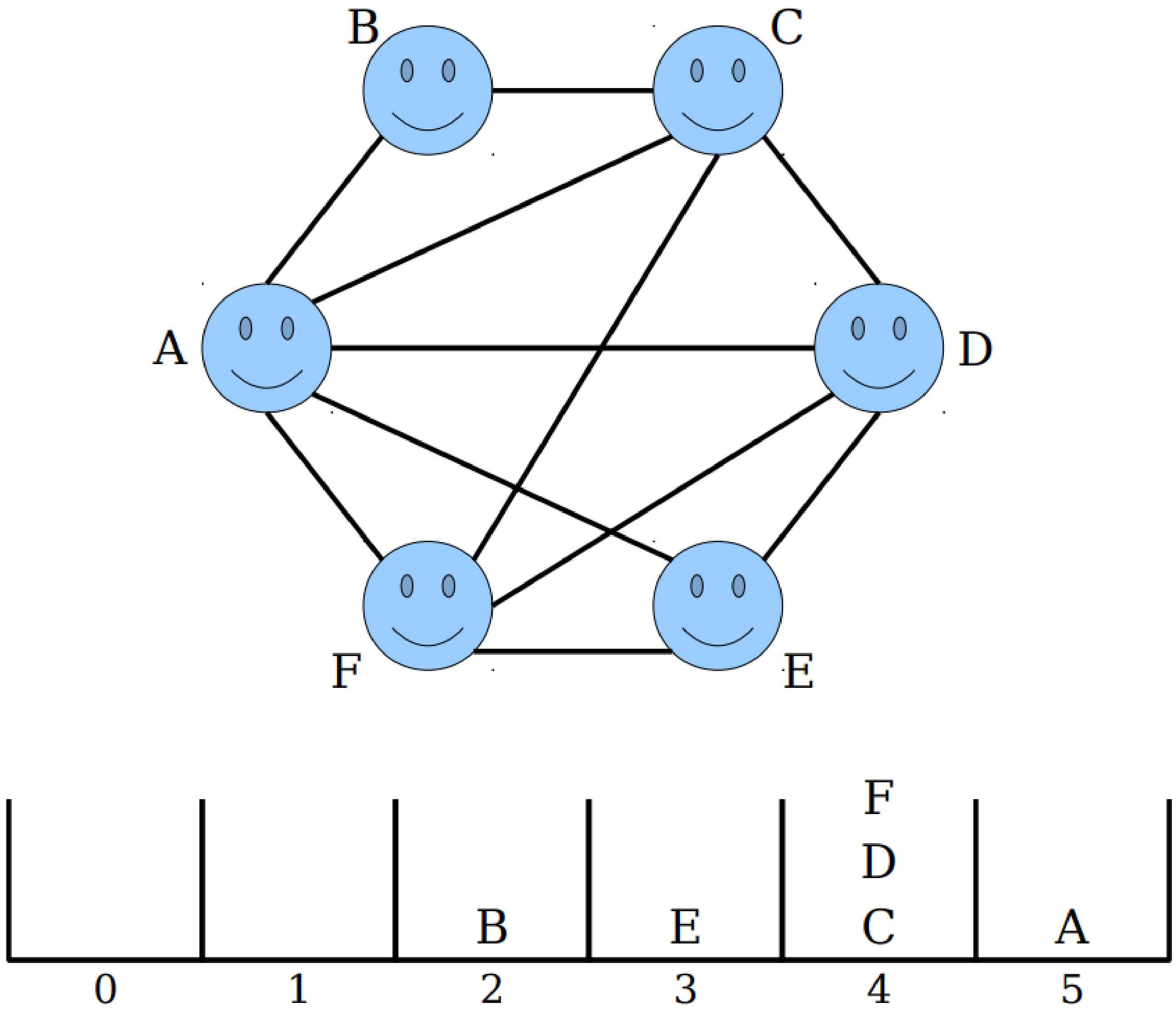
Graus

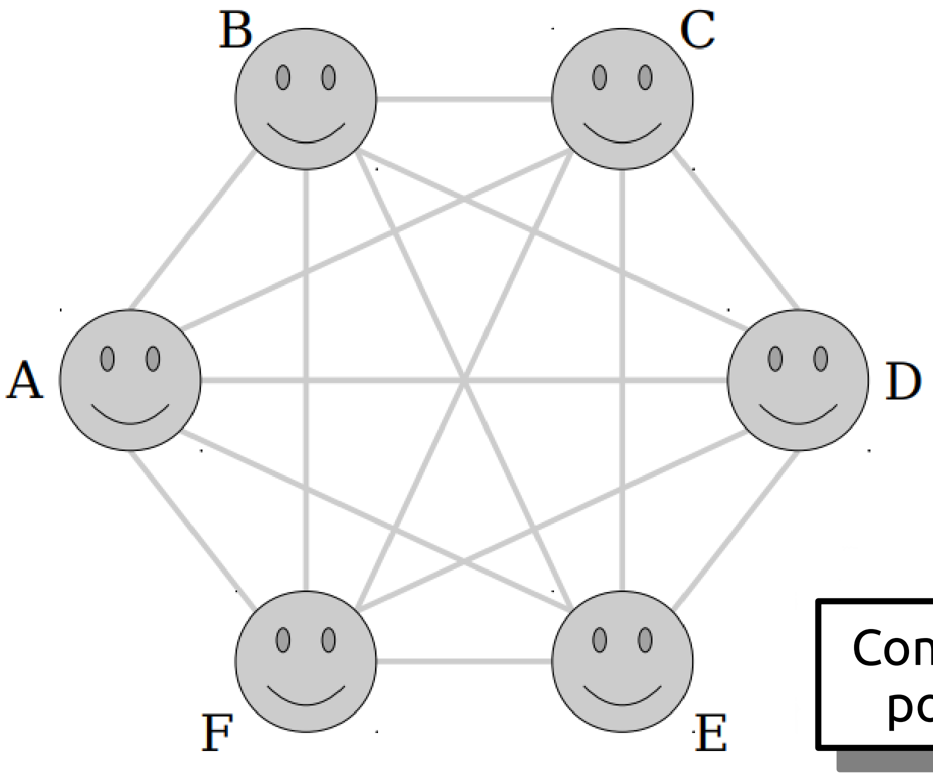
- O **grau** de um nó v em um grafo é o número de nós aos quais v é adjacente.



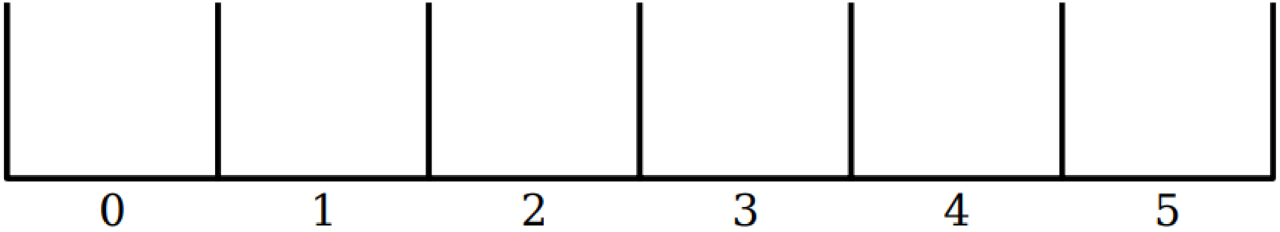


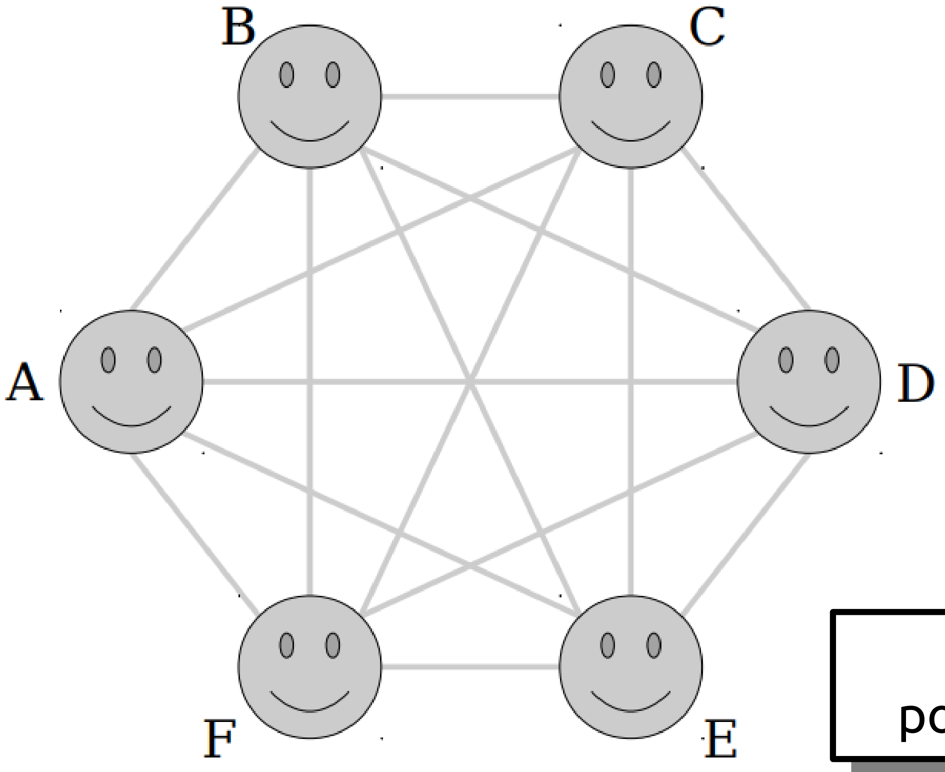
- **Teorema:** Todo grafo com pelo menos dois nós possui pelo menos dois nós com o mesmo grau.
  - Equivalentemente: em qualquer festa com pelo menos duas pessoas, há pelo menos duas pessoas com o mesmo número de amigos do Facebook na festa.


B
C
A
D
F
E
F
D
B
E
C
A
0
1
2
3
4
5

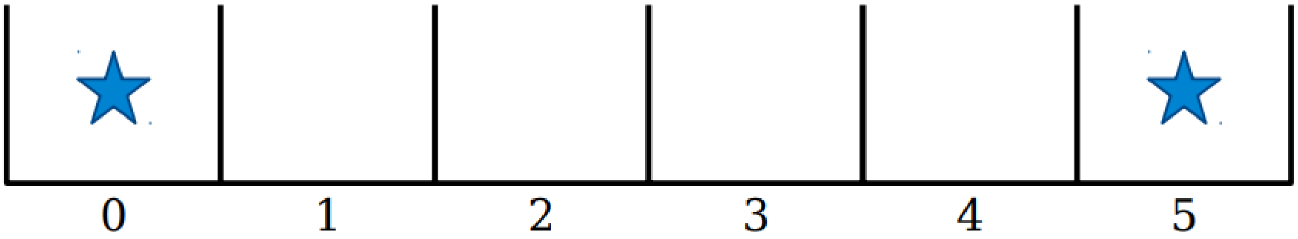


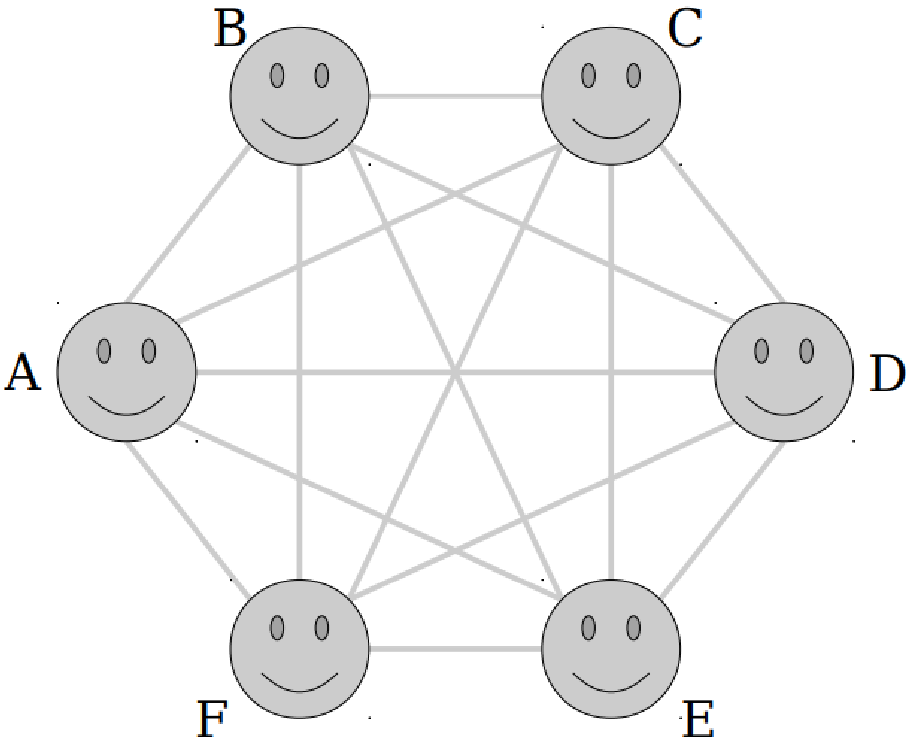
Com n nós, existem n graus possíveis (0, 1, 2, ..., n - 1)

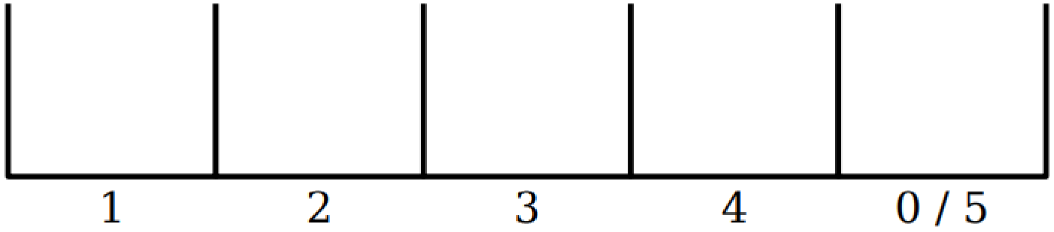




Ambos os baldes
podem estar não vazios?




B
C
A
D
F
E


1
2
3
4
0 / 5

Teorema: Em qualquer grafo com pelo menos dois nós, existem pelo menos dois nós do mesmo grau.

Prova 1: Seja G um grafo com $n \geq 2$ nós. Existem n escolhas possíveis para os graus de nós em G, a saber, 0, 1, 2, ... e $n - 1$.

Afirmamos que G não pode ter simultaneamente um nó u de grau 0 e um nó v de grau n - 1: se existissem tais nós, então o nó u seria adjacente a nenhum outro nó e o nó v seria adjacente a todos os outros nós, incluindo u. (Observe que u e v devem ser nós diferentes, uma vez que v tem grau pelo menos 1 e u tem grau 0.)

Vemos, portanto, que as opções possíveis para graus de nós em G são extraídas de 0, 1, ..., n - 2 ou de 1, 2, ..., n - 1. Em ambos os casos, há n nós e n - 1 graus possíveis, portanto, pelo princípio da casa dos pombos, dois nós em G devem ter o mesmo grau.■

Teorema: Em qualquer grafo com pelo menos dois nós, existem pelo menos dois nós do mesmo grau.

Prova 2: Suponha, por uma questão de contradição, que existe um grafo G com $n \geq 2$ nós onde não há dois nós com o mesmo grau. Existem n escolhas possíveis para os graus de nós em G, a saber 0, 1, 2, ..., n - 1, então isso significa que G deve ter exatamente um nó de cada grau. No entanto, isso significa que G tem um nó de grau 0 e um nó de grau n - 1. (Estes não podem ser o mesmo nó, uma vez que $n \geq 2$.) Este primeiro nó não é adjacente a outros nós, mas este segundo nó é adjacente a todos os outros nós, o que é impossível.

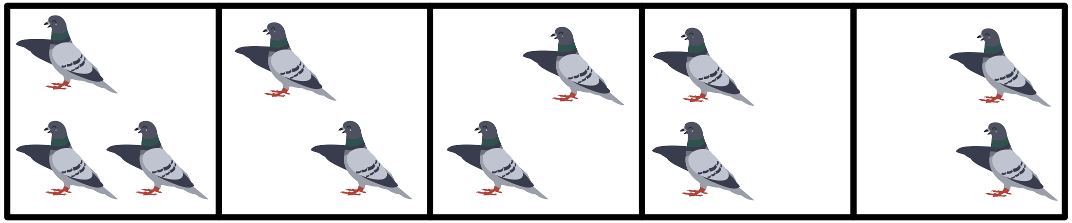
Chegamos a uma contradição, então nossa suposição deve estar errada. Assim, se G é um grafo com pelo menos dois nós, G deve ter pelo menos dois nós do mesmo grau. ■

Princípio da Casa dos Pombos: Generalizado

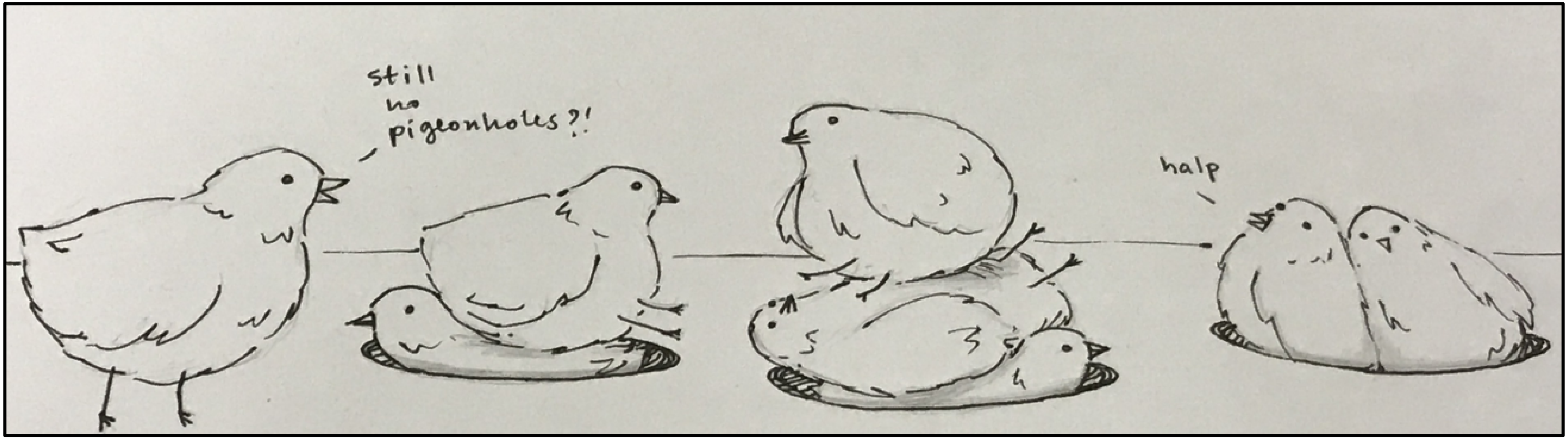
Uma Versão mais Geral

- O princípio da casa dos pombos generalizado diz que se você distribuir m objetos em n caixas, então
  - Alguma caixa terá pelo menos $\lceil m/n \rceil$ objetos nele, e
  - Alguma caixa terá no máximo objetos $\lfloor m/n \rfloor$ nele.

$\lceil M/n \rceil$ significa “m/n, arredondado para cima”.
$\lfloor M/n \rfloor$ significa “m/n, arredondado para baixo”.



$m = 11$
$n = 5$
$\lceil m/n \rceil = 3$
$\lfloor m/n \rfloor = 2$



$m = 8, n = 3$

Obrigado a Amy Liu por este desenho incrível!

Teorema: Se m objetos são distribuídos em $n > 0$ compartimentos, então algum compartimento conterá pelo menos $\lceil m/n \rceil$ objetos.

Prova: vamos provar que se m objetos são distribuídos em n compartimentos, então algum compartimento contém pelo menos m/n objetos. Visto que o número de objetos em cada compartimento é um inteiro, isso provará que alguma caixa deve conter pelo menos $\lceil m/n \rceil$ objetos.

Para fazer isso, procedemos por contradição. Suponha que, para alguns m e n, haja uma maneira de distribuir m objetos em n compartimento, de forma que cada compartimento contenha menos do que m/n objetos.

Numere os compartimentos 1, 2, 3,…, n e deixe x_i denotar o número de objetos no compartimento i. Uma vez que existem m objetos no total, sabemos que

$$m = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Como cada compartimento contém menos do que m/n objetos, vemos que $x_i < m/n$ para cada i. Portanto, temos que

$$m = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

$$m < m/n + m/n + \ldots + m/n \text{ (n vezes)}$$

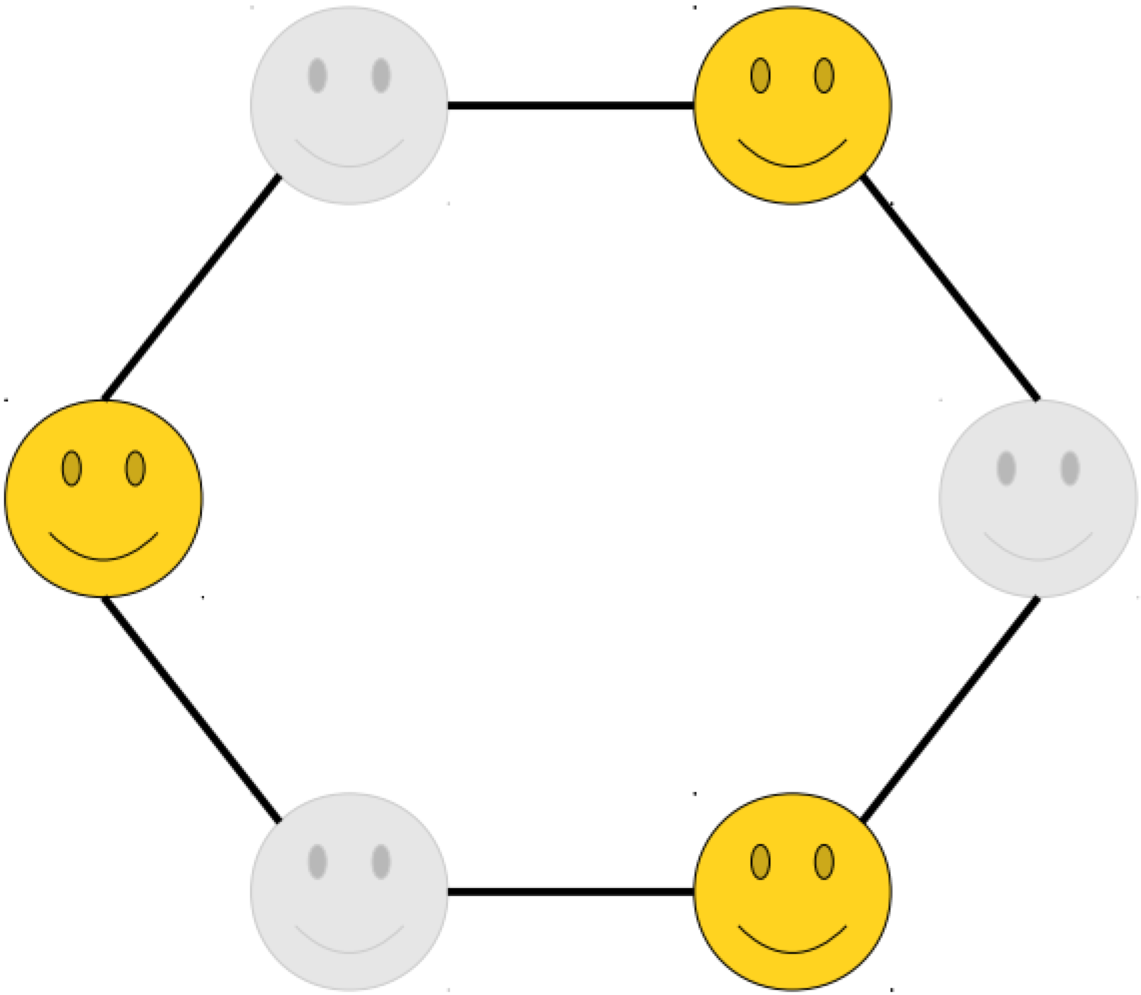
$$m = m$$

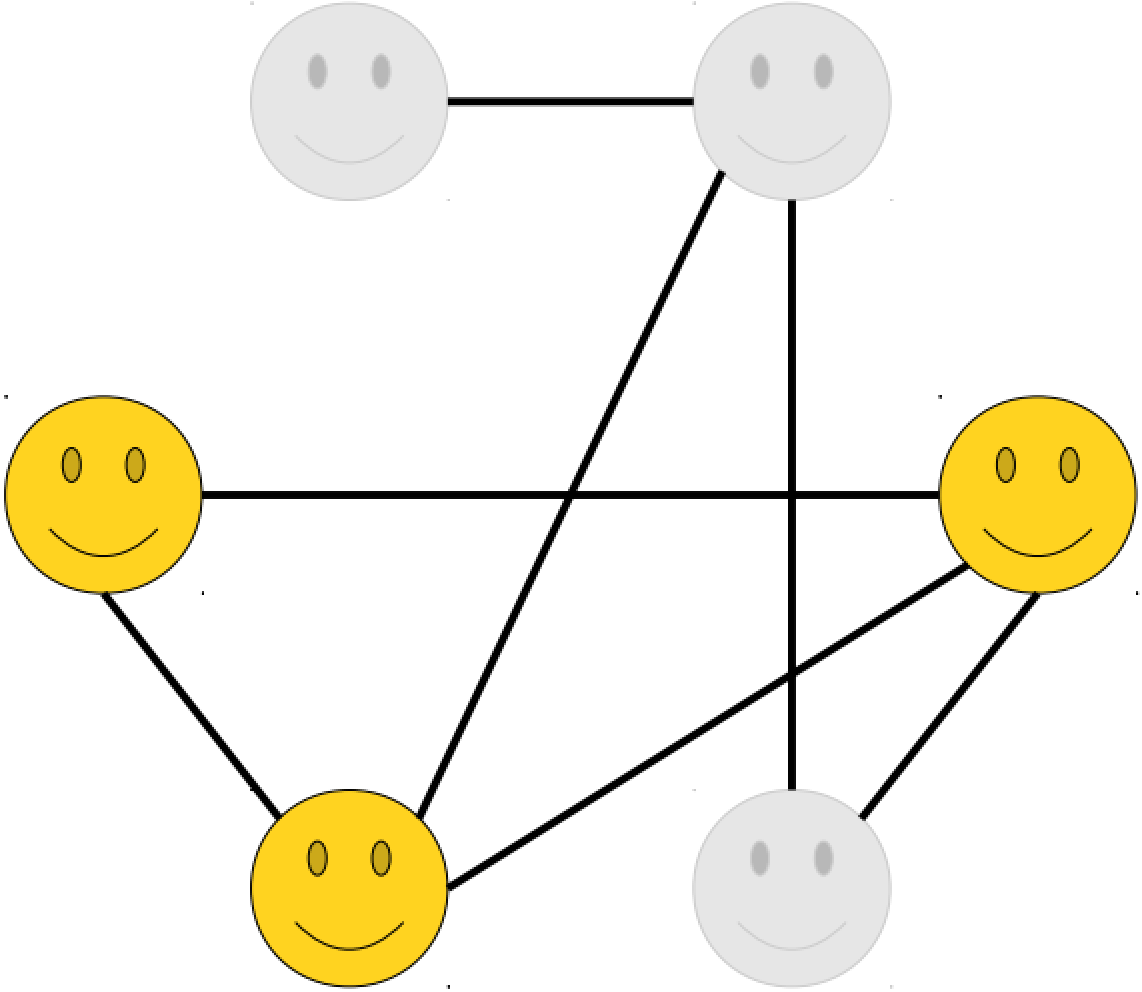
Mas isso significa que $m < m$, o que é impossível. Chegamos a uma contradição, então nossa suposição inicial deve estar errada. Portanto, se m objetos são distribuídos em n compartimentos, algum compartimento deve conter pelo menos $\lceil m/n \rceil$ objetos. ■

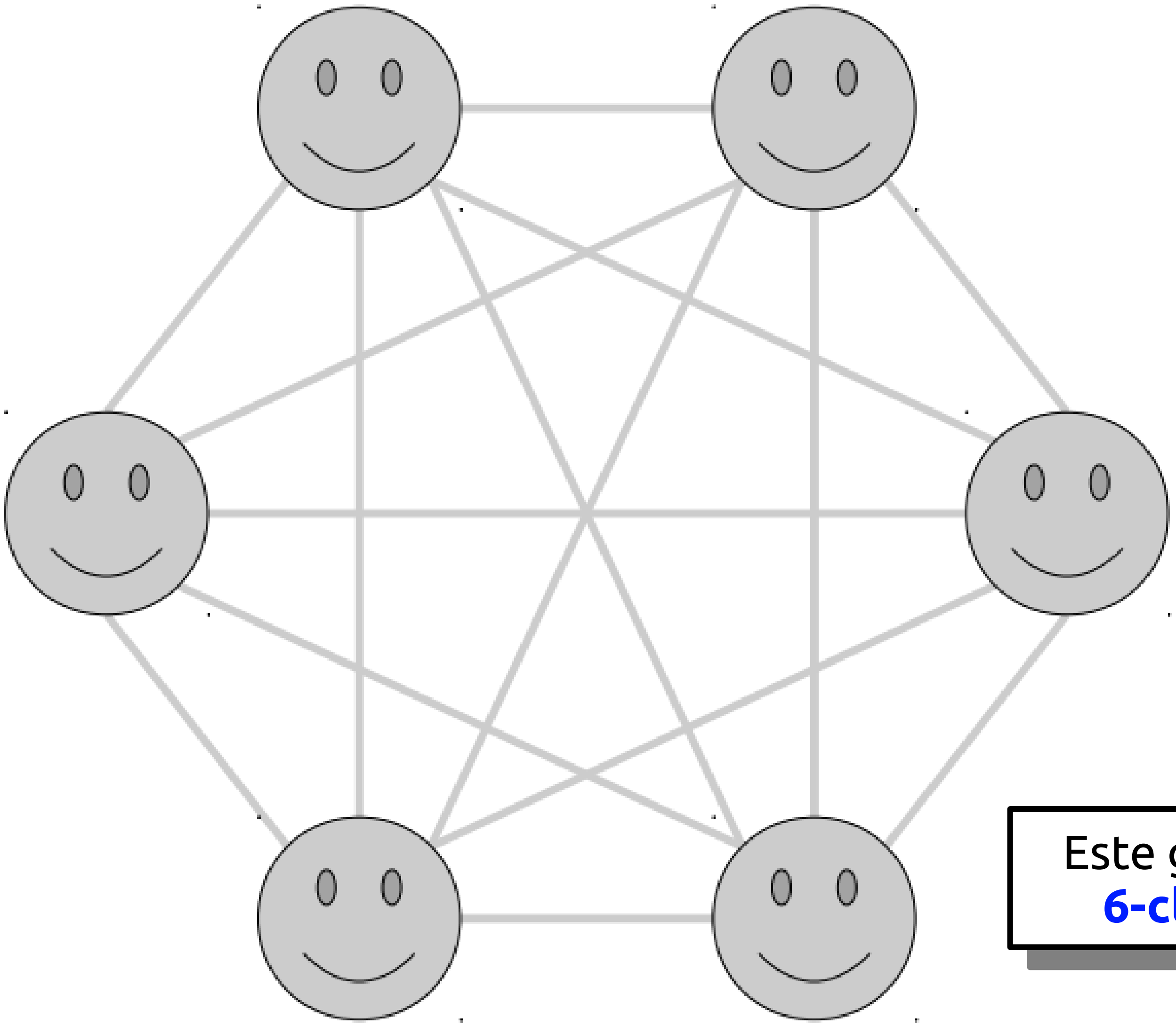
Uma Aplicação:
Amigos e Estranhos

Amigos e Estranhos

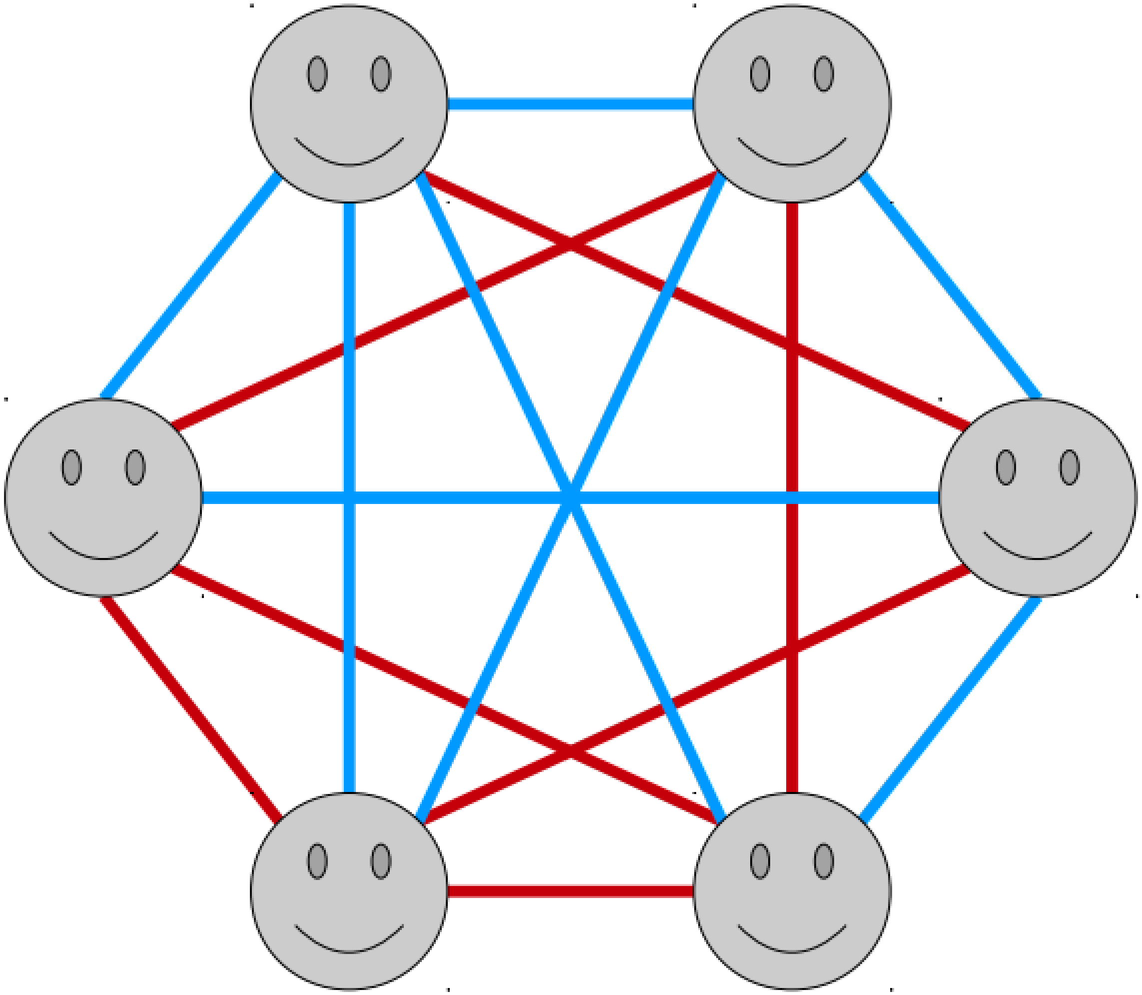
- Suponha que você tenha um grupo de seis pessoas. Cada par de pessoas ou são amigos (eles se conhecem) ou estranhos (eles não se conhecem).
- **Teorema:** Qualquer uma dessas partes deve ter um grupo de três amigos em comum (três pessoas que se conhecem) ou três estranhos em comum (três pessoas, nenhuma das quais conhece nenhuma das outras).

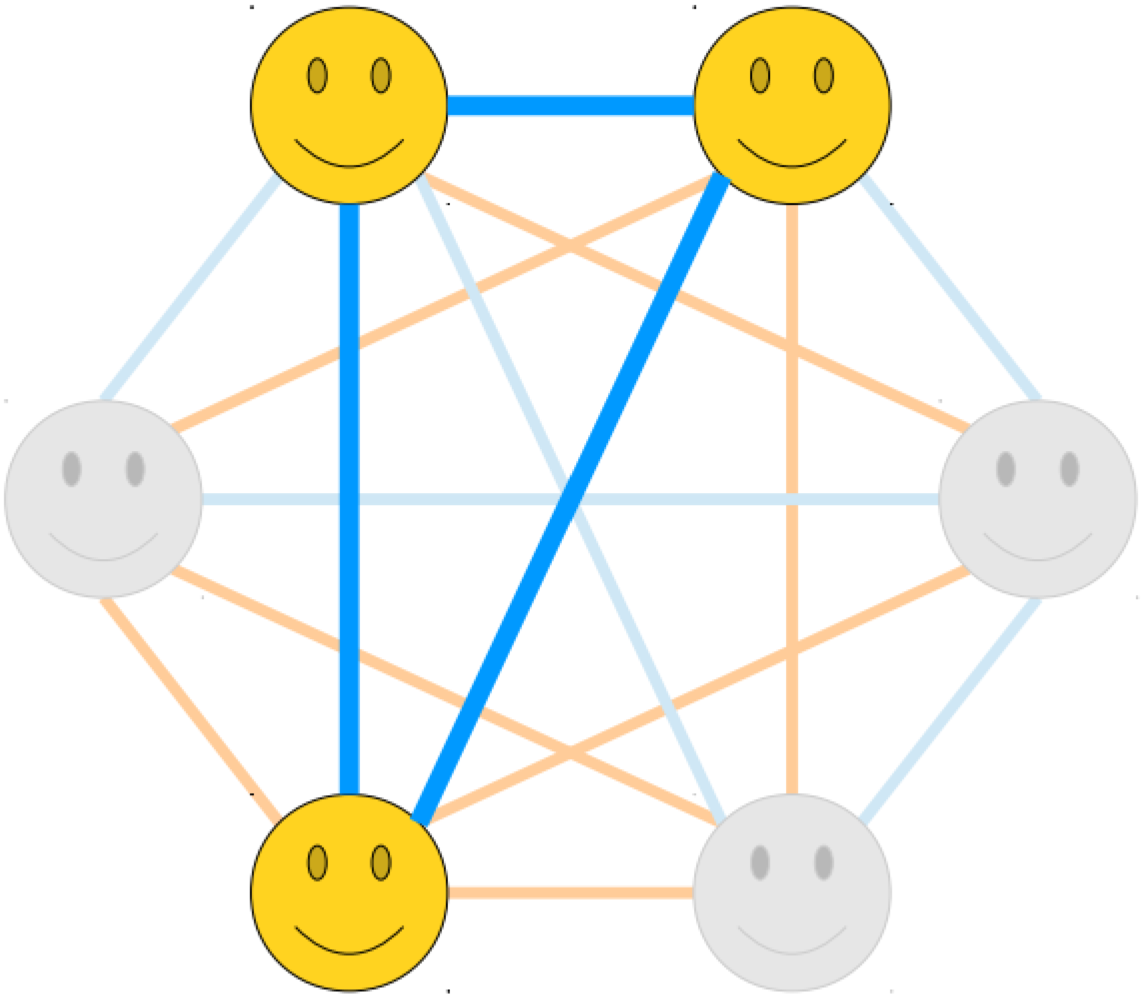


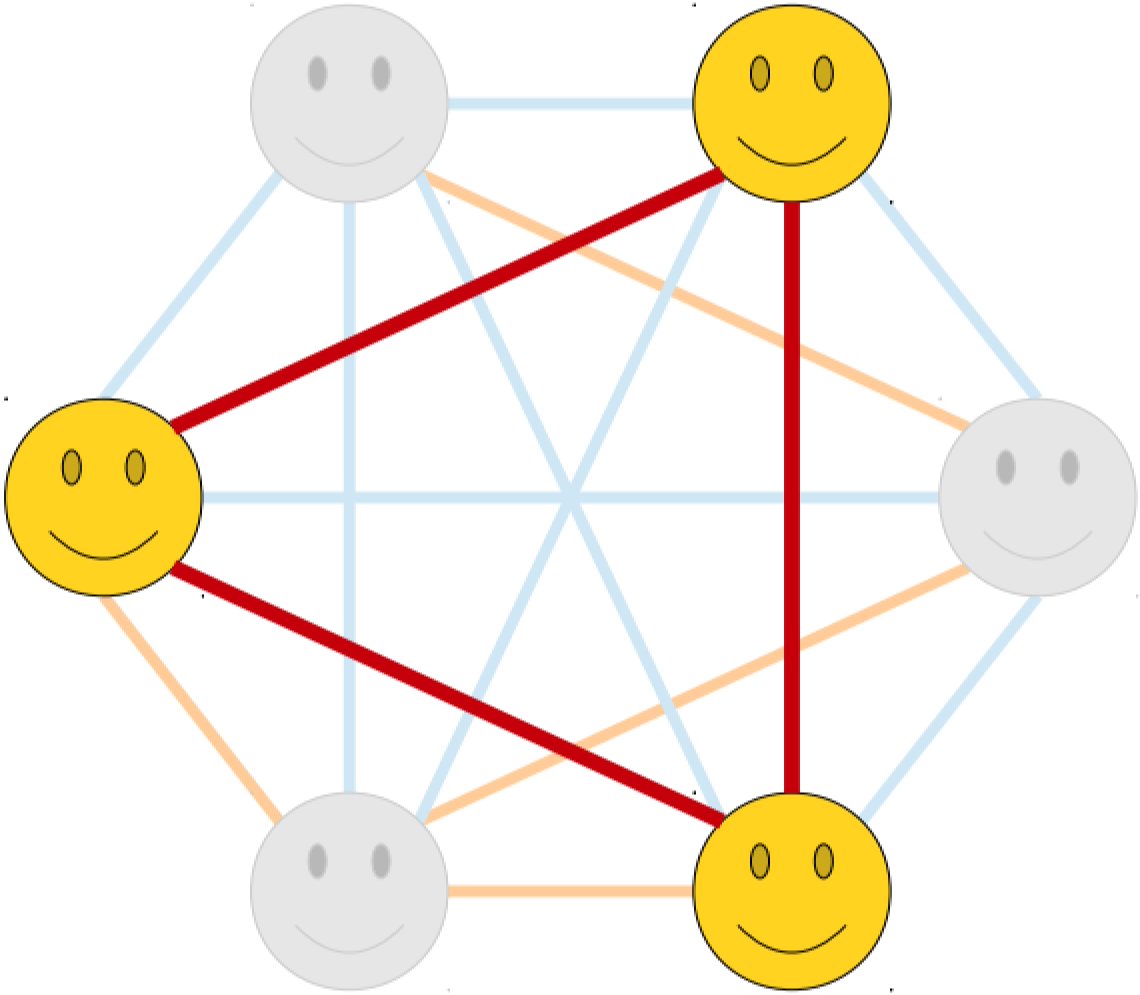




Este grafo é chamado de **6-clique**, a propósito.

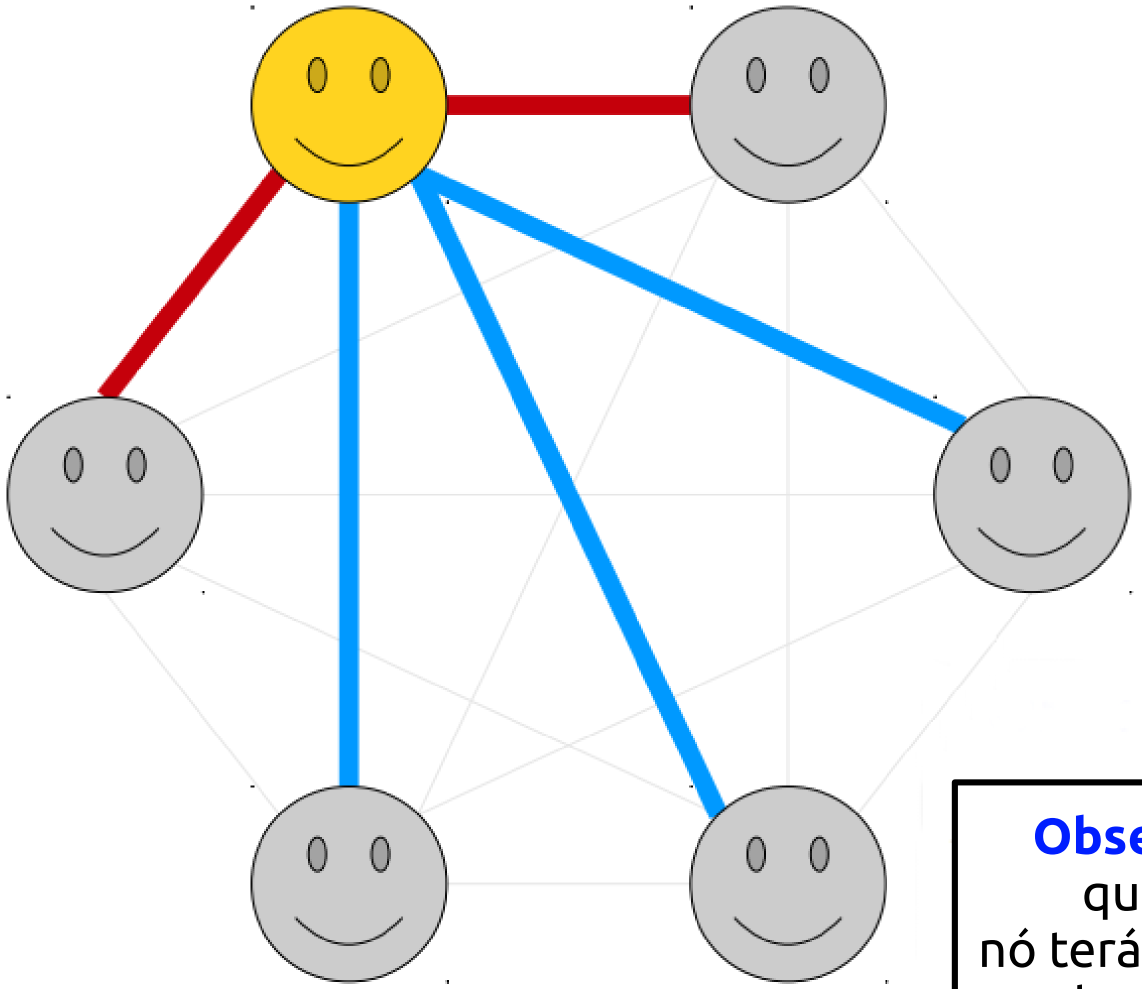




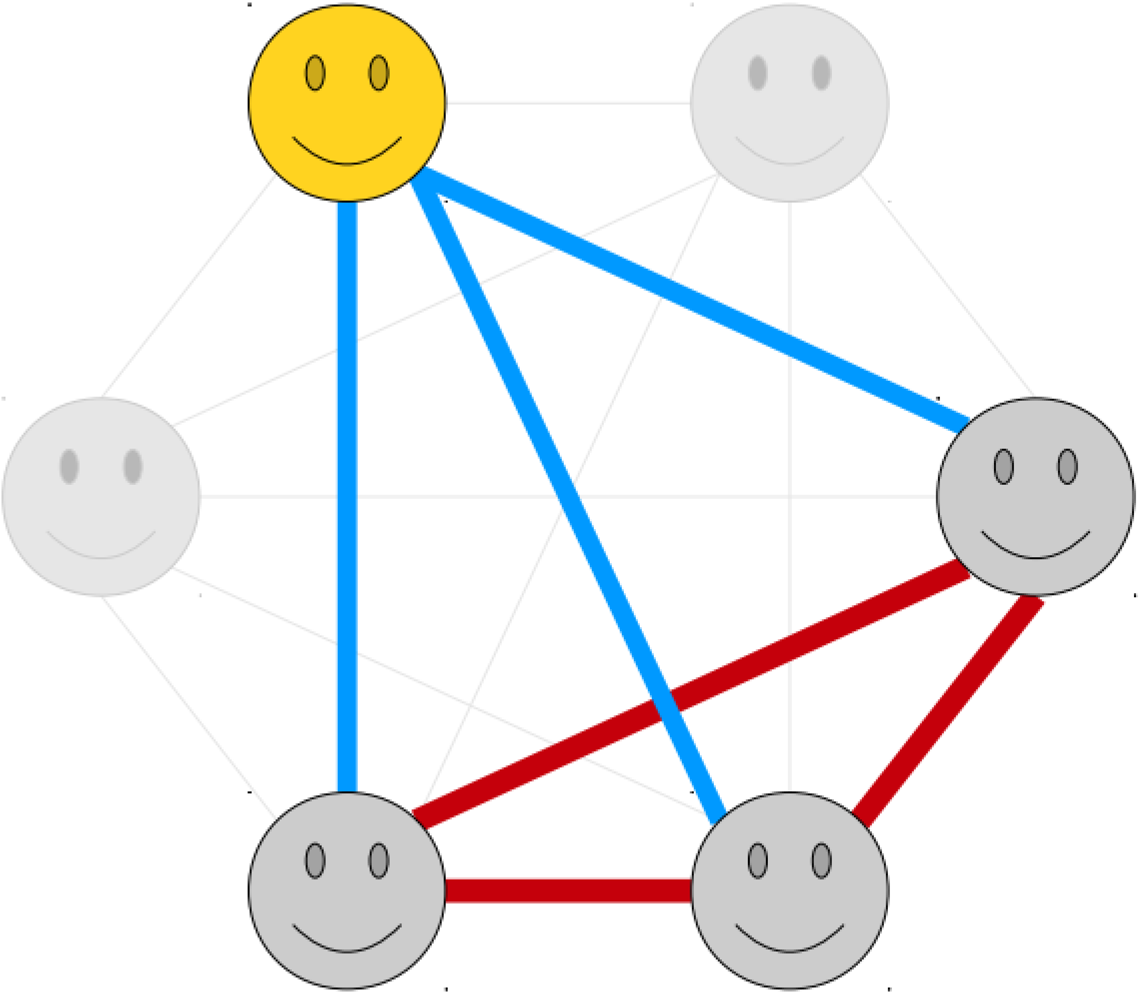


Amigos e Estranhos

- De uma perspectiva da teoria dos grafos, o Teorema sobre Amigos e Estranhos pode ser reformulado da seguinte forma:
- **Teorema:** Considere um 6-clique em que todas as arestas são coloridas de vermelho ou azul. O grafo contém um triângulo vermelho, um triângulo azul ou ambos.
- Como podemos provar isso?



Observação 1: Se escolhermos qualquer nó no grafo, esse nó terá pelo menos [5/2] = 3 arestas da mesma cor incidentes a ele



Teorema: Considere um 6-clique em que cada aresta é colorida de vermelho ou azul. Em seguida, deve haver um triângulo de bordas vermelhas, um triângulo de bordas azuis ou ambos.

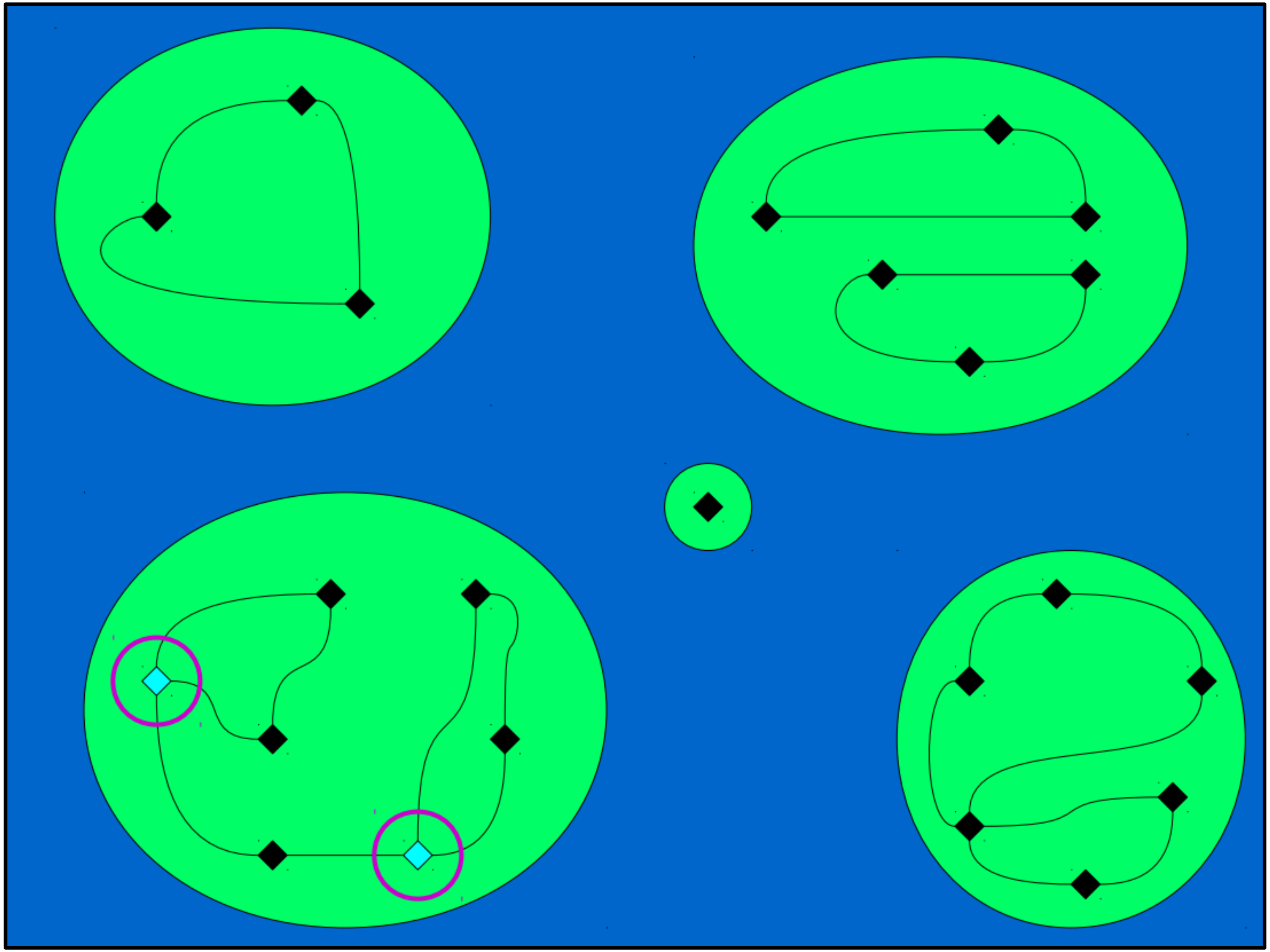
Prova: Pinte as bordas do 6-clique em vermelho ou azul arbitrariamente. Seja x qualquer nó no 6-clique. É incidente a cinco arestas e há duas cores possíveis para essas arestas. Portanto, pelo princípio da casa dos pombos generalizado, pelo menos $\lceil 5/2 \rceil = 3$ dessas arestas devem ser da mesma cor. Chame essa cor de c_1 e deixe a outra cor ser c_2.

Sejam r, s e t três dos nós adjacentes ao nó x ao longo de uma aresta de cor c_1. Se qualquer uma das arestas $\{r, s\}$, $\{r, t\}$ ou $\{s, t\}$ são da cor c_1, então uma dessas arestas mais as duas arestas conectando de volta ao nó x formam um triângulo da cor c_1. Caso contrário, todas as três arestas são da cor c_2 e formam um triângulo da cor c_2. No geral, isso dá um triângulo vermelho ou um triângulo azul, conforme necessário.■

Teoria Ramsey

- A prova que fizemos é um caso especial de um resultado mais amplo.
- **Teorema (Teorema de Ramsey):** Para qualquer número natural n, há um menor número natural R(n) tal que se as arestas de um R(n)-clique são coloridas de vermelho ou azul, o grafo resultante conterá um n-clique vermelho ou um n-clique azul.
  - Nossa prova foi que $R(3) \leq 6$.
- Uma abordagem mais filosófica sobre este teorema: a verdadeira desordem é impossível em grande escala, já que não importa como você organize as coisas, é garantido que você encontrará alguma subestrutura interessante.

Um Pequeno
Quebra-Cabeça Matemático



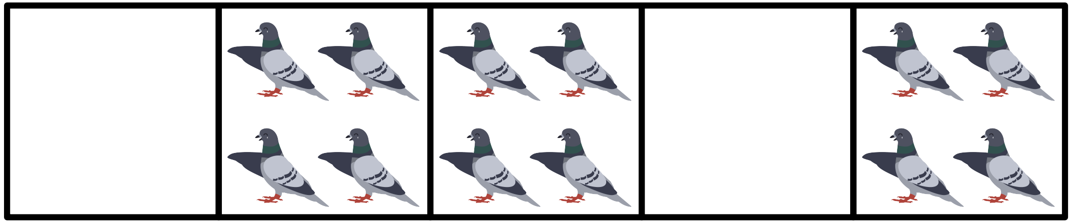
Outra Visão de Casas de Pombos

- O princípio da casa dos pombos é um resultado que, em termos gerais, segue este modelo:

  m objetos não podem ser distribuídos em n compartimentos sem que a propriedade X seja verdadeira.

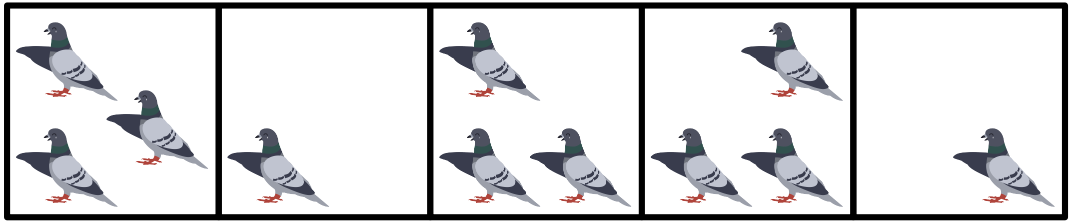
- Que outros tipos de propriedades podemos dizer sobre como os objetos são distribuídos?

Observação: O número de caixas contendo um número ímpar de pombos parece sempre ser par!



m = 12 pombos
n = 5 caixas

Observação: agora o número de caixas contendo um número ímpar de pombos parece sempre ser ímpar!



m = 11 pombos
n = 5 caixas

Teorema: Suponha que m objetos sejam distribuídos em algum número de caixas. Seja k o número de caixas contendo um número ímpar de objetos. Então k é par se e somente se m for par.

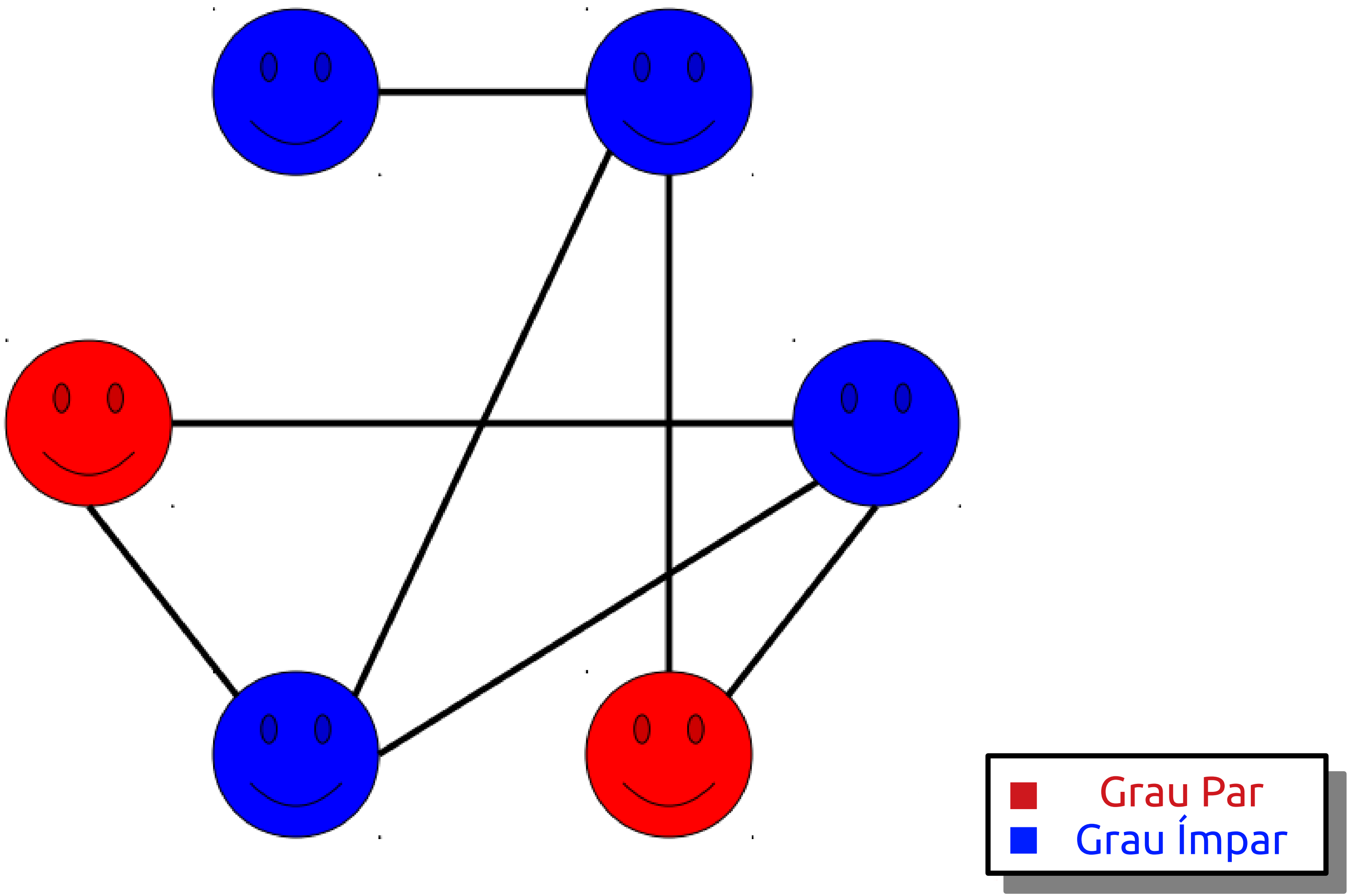
Prova: Escolha qualquer $m \in \mathbb{N}$ e suponha que m objetos são distribuídos em caixas. Seja k o número de caixas contendo um número ímpar de objetos. Provaremos que k é par se e somente se m for par.

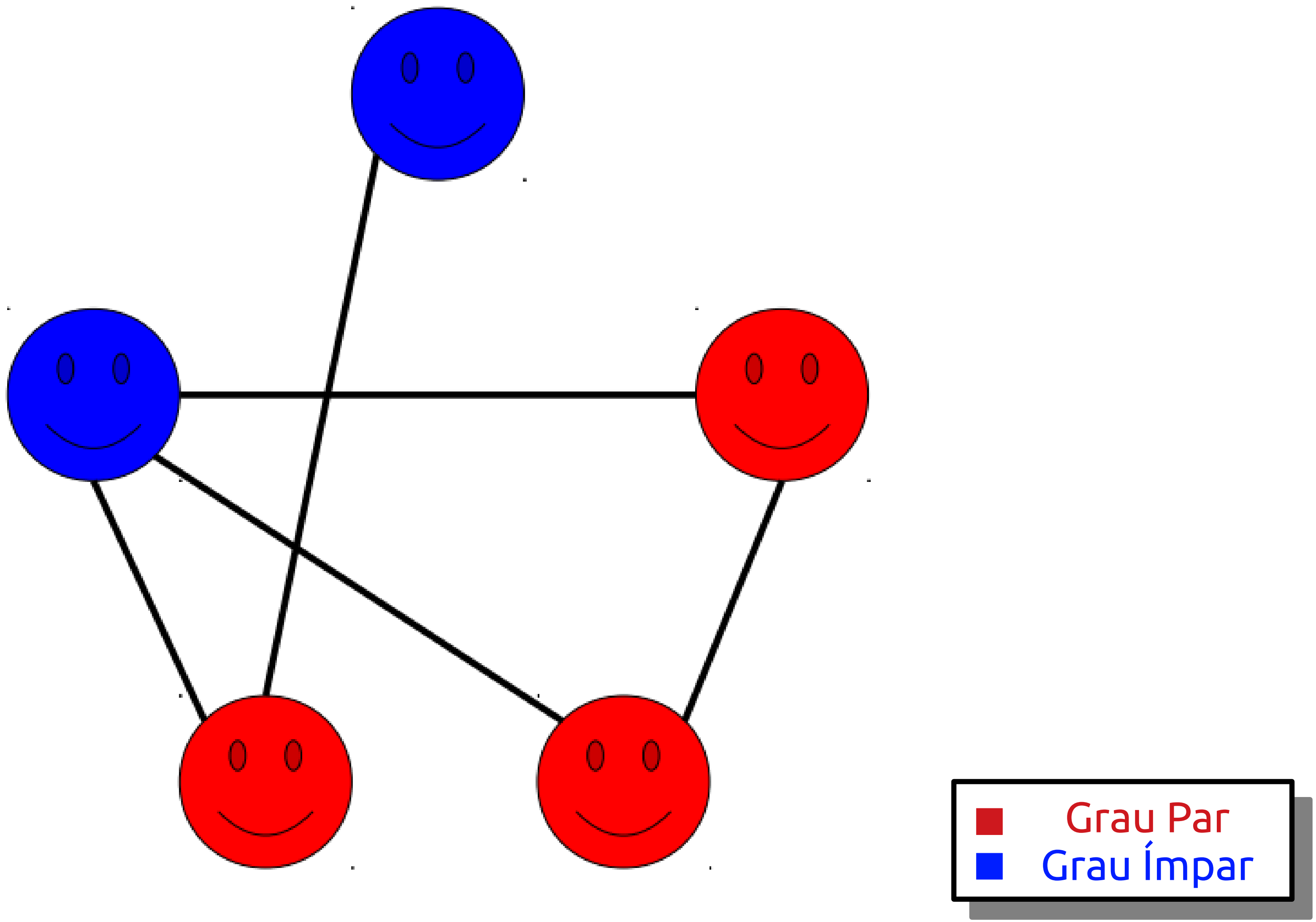
Comece removendo um objeto de cada caixa com um número ímpar de objetos nele. Como existem m objetos e k caixas contendo um número ímpar de objetos, agora temos $m - k$ objetos restantes em nossas caixas. Para simplificar a notação, seja $r = m - k$. Isso também significa $m = r + k$.

Afirmamos que r é par. Para ver isso, observe que cada caixa agora contém um número par de objetos; cada caixa começou com um número par de objetos ou com um número ímpar de objetos e teve um objeto removido dela. Isso significa que r é a soma de alguns números pares naturais, então r é par.

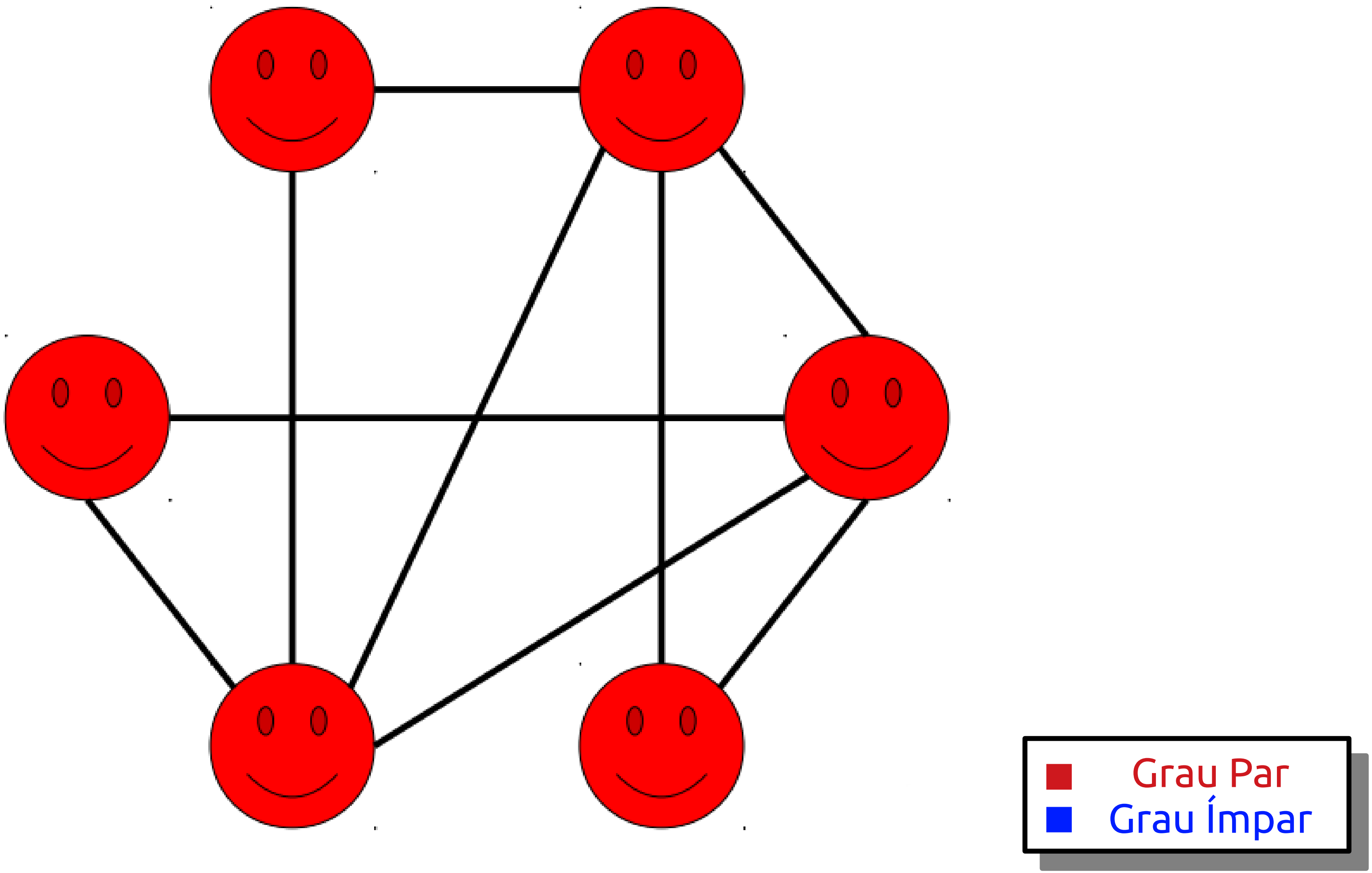
Vamos agora provar o teorema. Primeiro, vamos provar que se k é par, então m é par. Para ver isso, suponha que k seja par. Então $m = r + k$ é a soma de dois números pares, então m é par. A seguir, vamos provar que se k é ímpar, então m é ímpar. Para ver isso, suponha que k é ímpar. Então, uma vez que $m = r + k$ é a soma de um número par e um número ímpar, vemos que m é ímpar, como necessário. ■

O Lema do Aperto de Mão

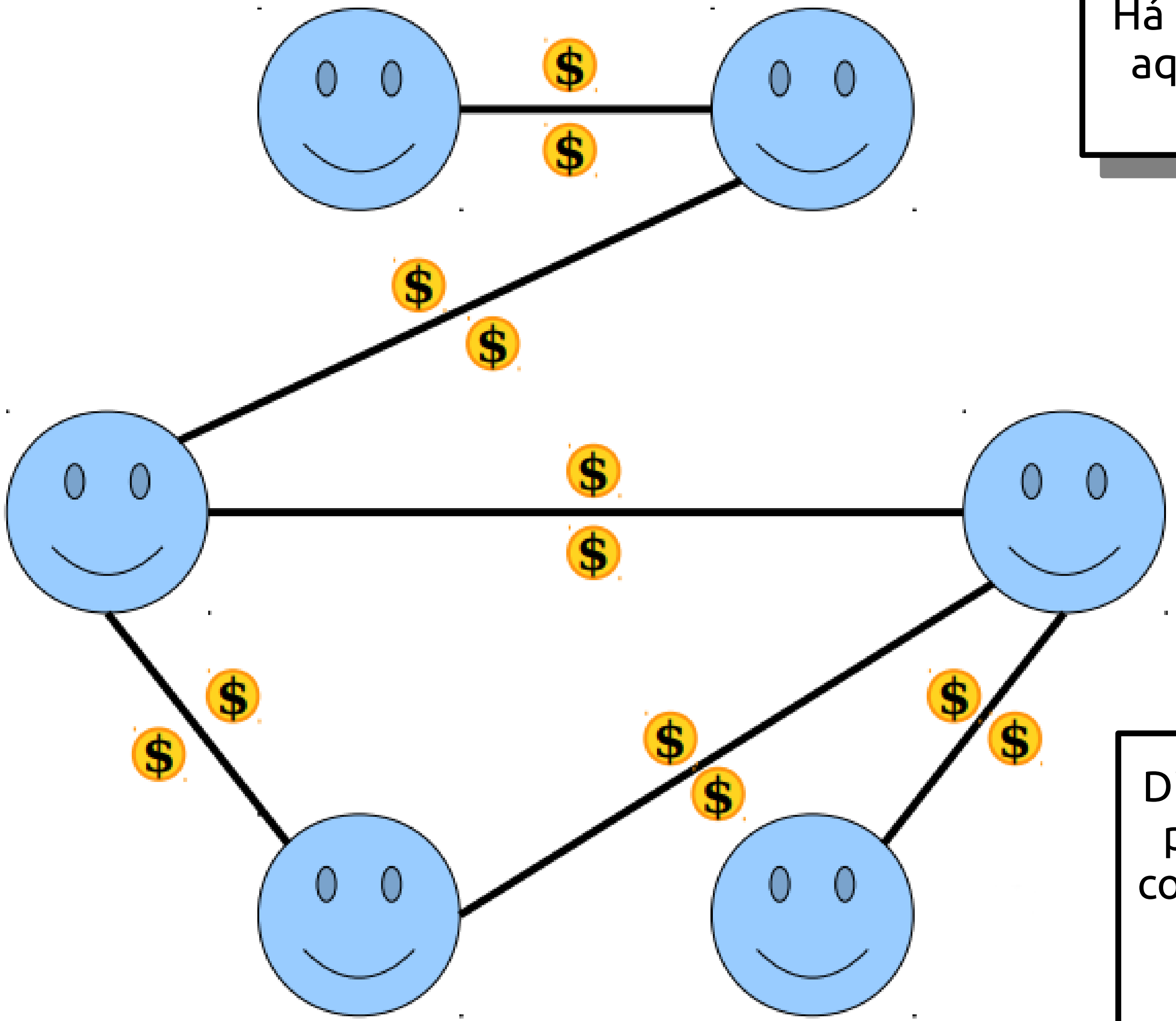

Grau Par
Grau Ímpar



Grau Par
Grau Ímpar


Grau Par
Grau Ímpar

Teorema (Lema do aperto de mão): Seja G = (V, E) um grafo. Então, cada componente conectado de G tem um número par de nós de grau ímpar.



Há 2m de moedas no total aqui, onde m é o número de arestas.

Distribuímos um número par de moedas em uma coleção de nós. Portanto, o número de nós de grau ímpar é par!

Teorema (Lema do aperto de mão): Se G for um grafo, cada componente conectado de G terá um número par de nós de grau ímpar.

Prova: Seja G = (V, E) um grafo e seja C um componente conectado de G. Coloque uma moeda em cada nó em C para cada aresta em E incidente a ele. Observe que o número de moedas em qualquer nó v é igual a grau(v).

Afirmamos que existe um total uniforme de moedas distribuídas por todos os nós de G. Observe que cada aresta contribui com duas moedas para o total, uma para cada um de seus pontos finais. Isso significa que há 2m no total de moedas distribuídas pelos nós de V, onde m é o número de arestas adjacentes aos nós em C, e 2m é par.

Como há um número par de moedas distribuídas pelos nós, nosso teorema anterior nos diz que o número de nós em G com um número ímpar de moedas deve ser par. O número de moedas em cada nó é o grau desse nó e, portanto, deve haver um número par de nós de grau ímpar. ■

Um Corolário Divertido

- O **corolário** de um teorema é uma afirmação que segue bem do teorema.
- O teorema anterior tem este adorável acompanhamento:
  - **Corolário:** Se G é um grafo com exatamente dois nós de grau ímpar, esses nós estão conectados.

Corolário: Se G é um grafo com exatamente dois nós de grau ímpar, então esses dois nós estão conectados em G.

Prova: Seja G um grafo com exatamente dois nós u e v de grau ímpar. Considere o componente conectado C contendo o nó u. Pelo Lema do Aperto de Mão, sabemos que C deve conter um número par de nós de grau ímpar. Portanto, C deve conter pelo menos um nó de grau ímpar diferente de u, caso contrário, C teria exatamente um nó de grau ímpar. Uma vez que v é o único nó em G além de u que tem grau ímpar, vemos que v deve pertencer a C. No geral, isso significa que u e v estão no mesmo componente conectado, então u e v estão conectados em G, como necessário. ■

Algumas Aplicações

- O corolário que acabamos de apresentar tem algumas aplicações bastante inesperadas:
  - **O teorema da escalada**. Suponha que duas pessoas comecem a escalar a mesma montanha, começando em quaisquer dois pontos que gostariam. Os dois escaladores podem escolher cada um um caminho para o cume de forma que cheguem ao mesmo tempo e tenham a mesma altitude durante toda a jornada.
  - **Lema de Sperner**. Um poderoso primitivo matemático que permite encontrar maneiras equitativas de dividir o aluguel em um apartamento ou mostrar que, não importa como você mexa seu café, sempre há alguma partícula que permanece no mesmo lugar.