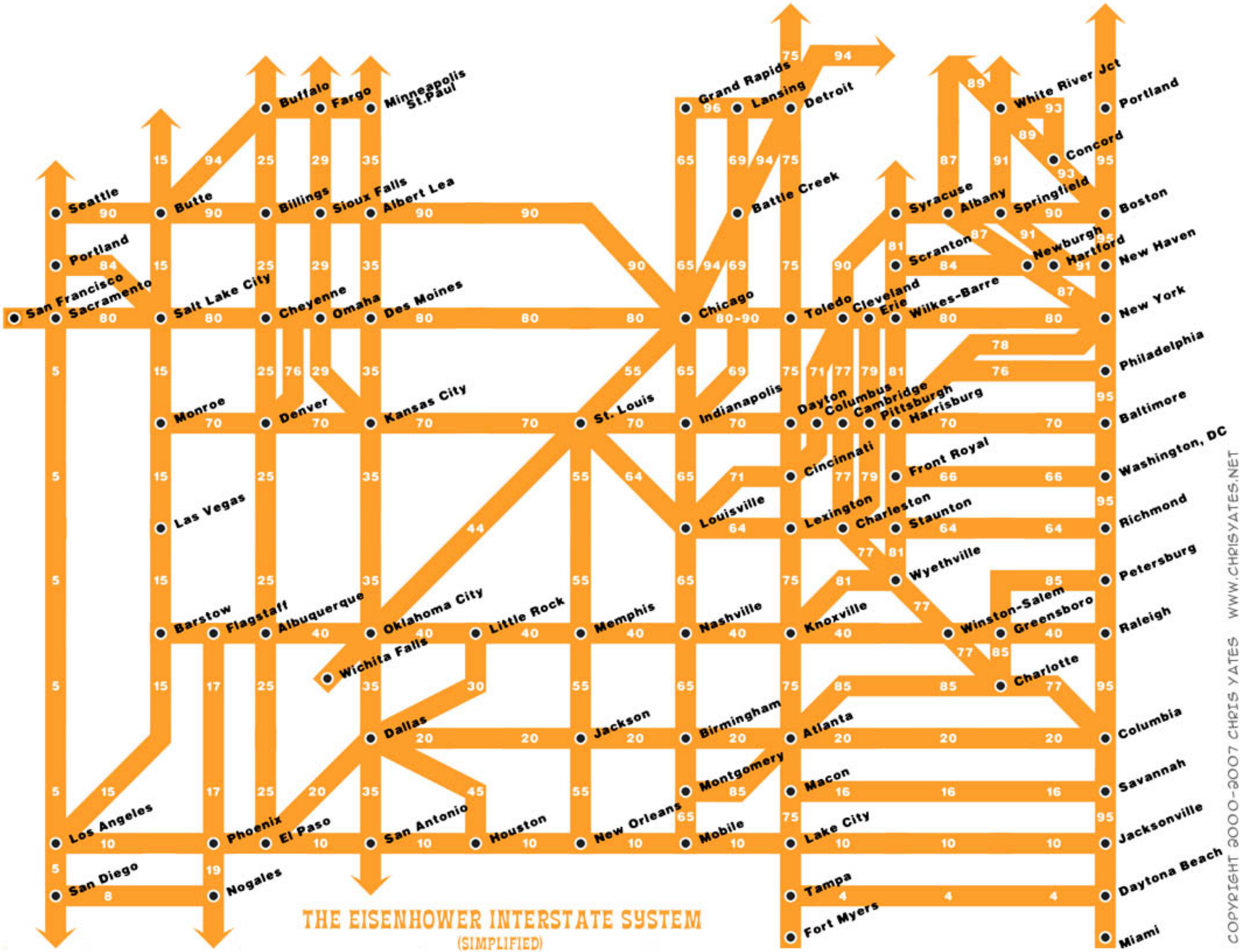
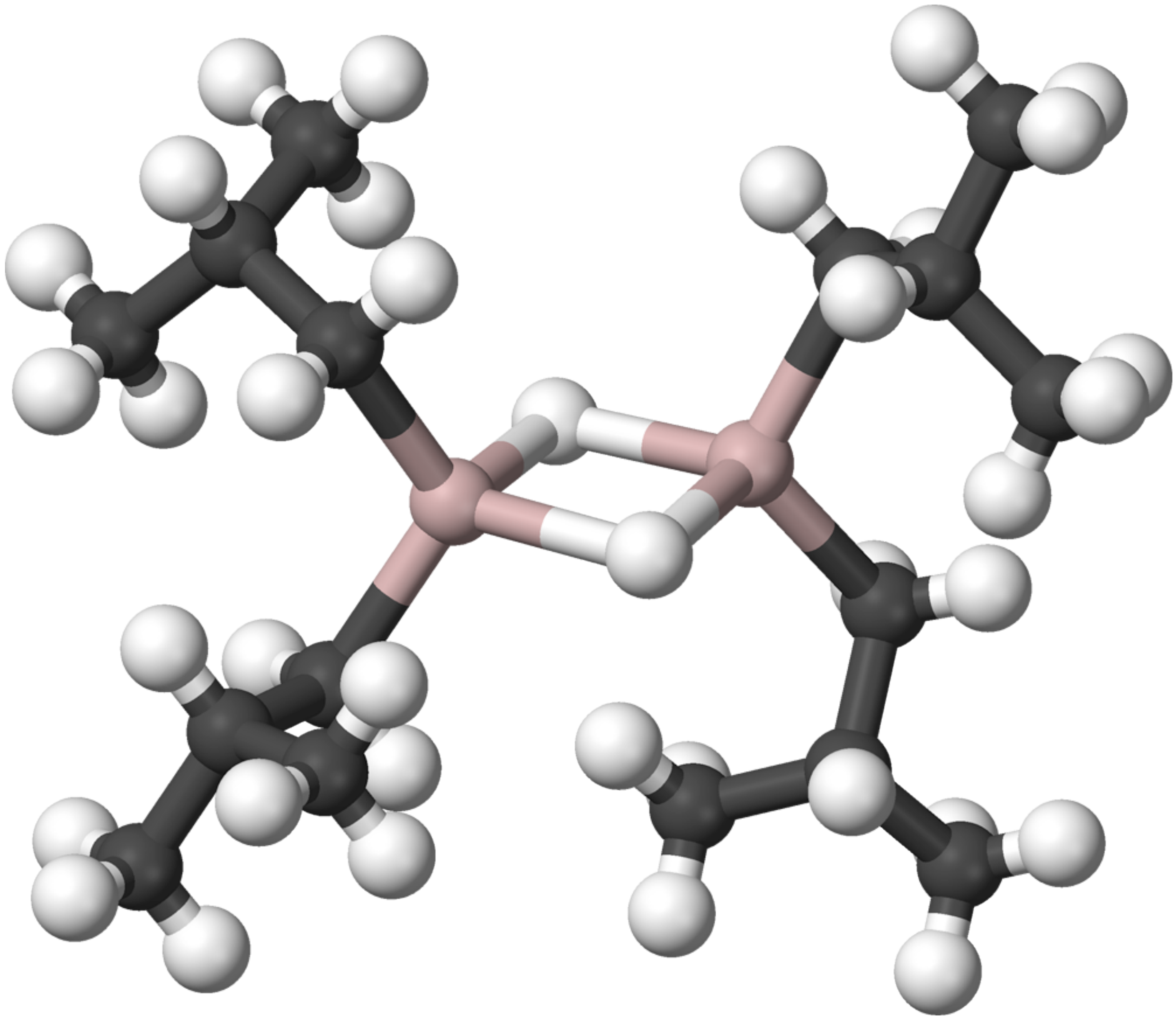
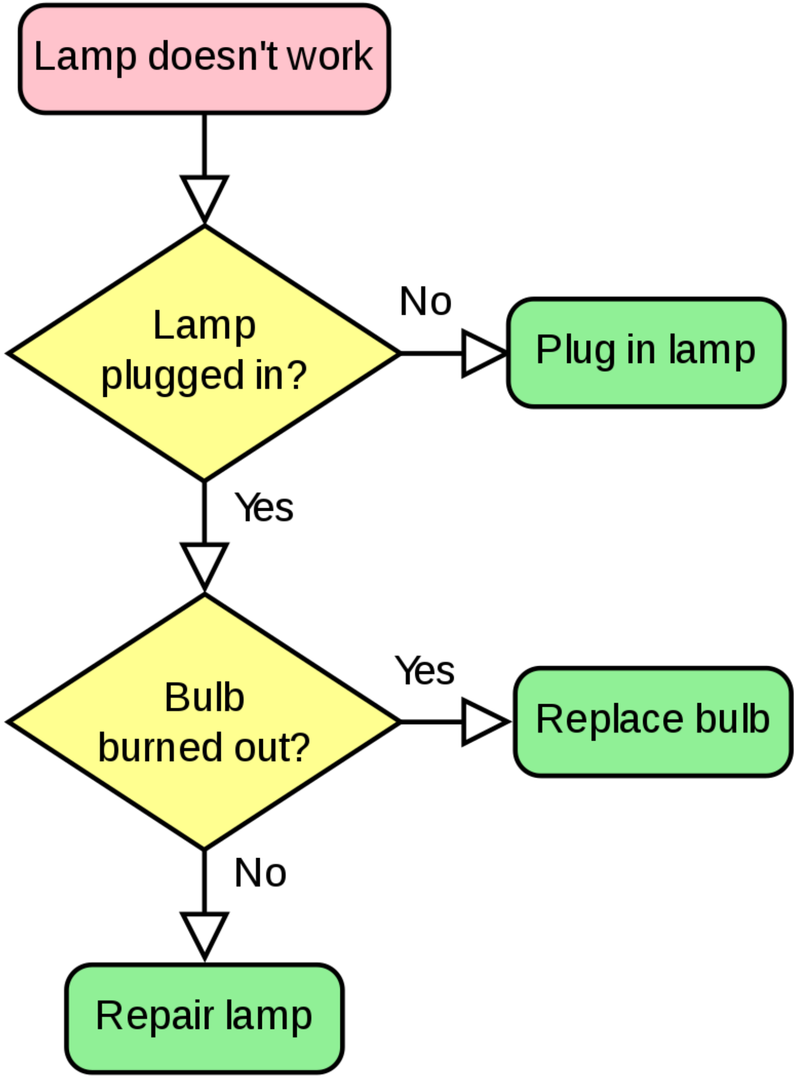
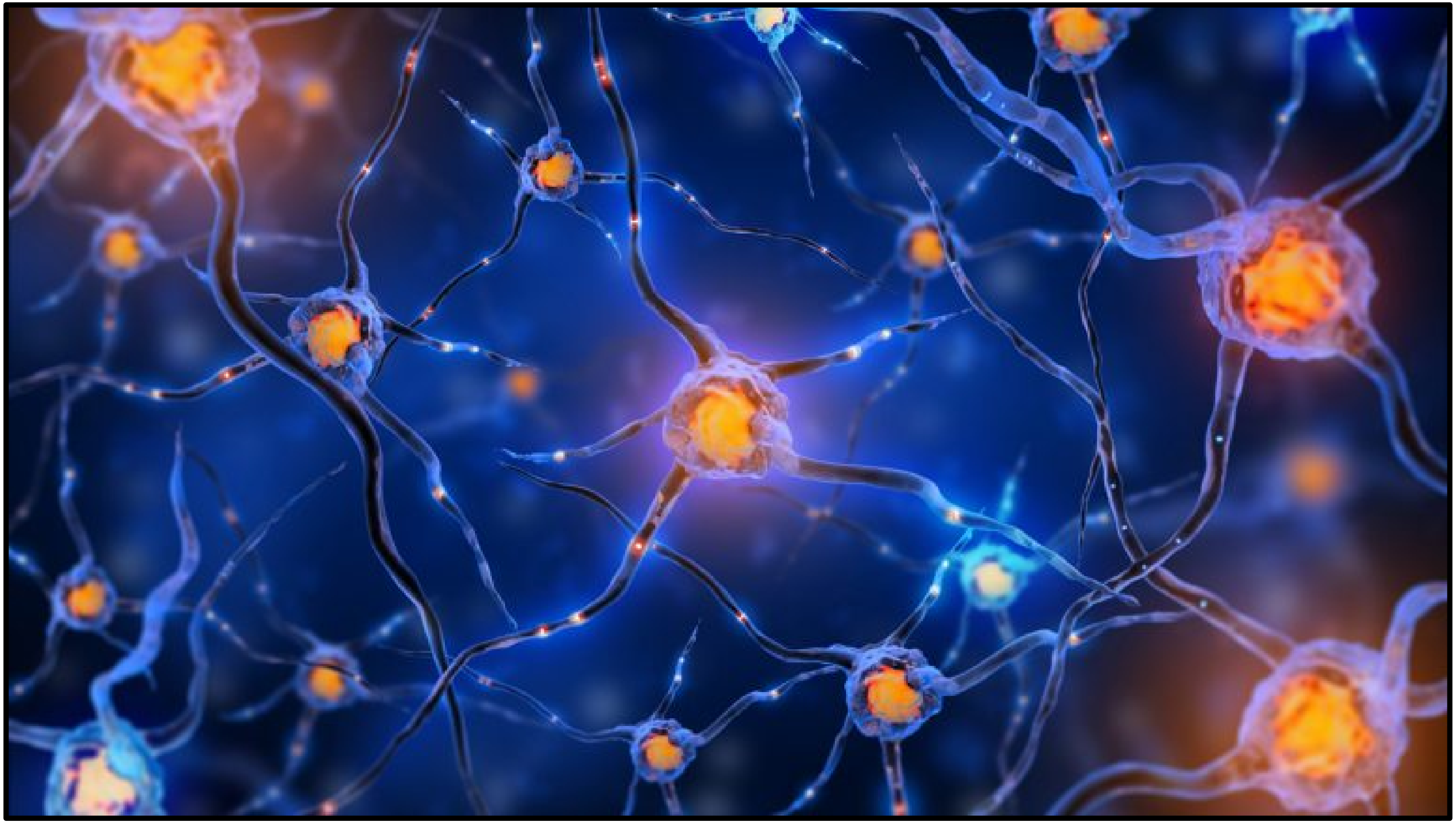
Teoria dos Grafos



THE EISENHOWER INTERSTATE SYSTEM
(SIMPLIFIED)




Lamp doesn't work
Lamp plugged in?
No
Plug in lamp
Yes
Bulb burned out?
Yes
Replace bulb
No
Repair lamp

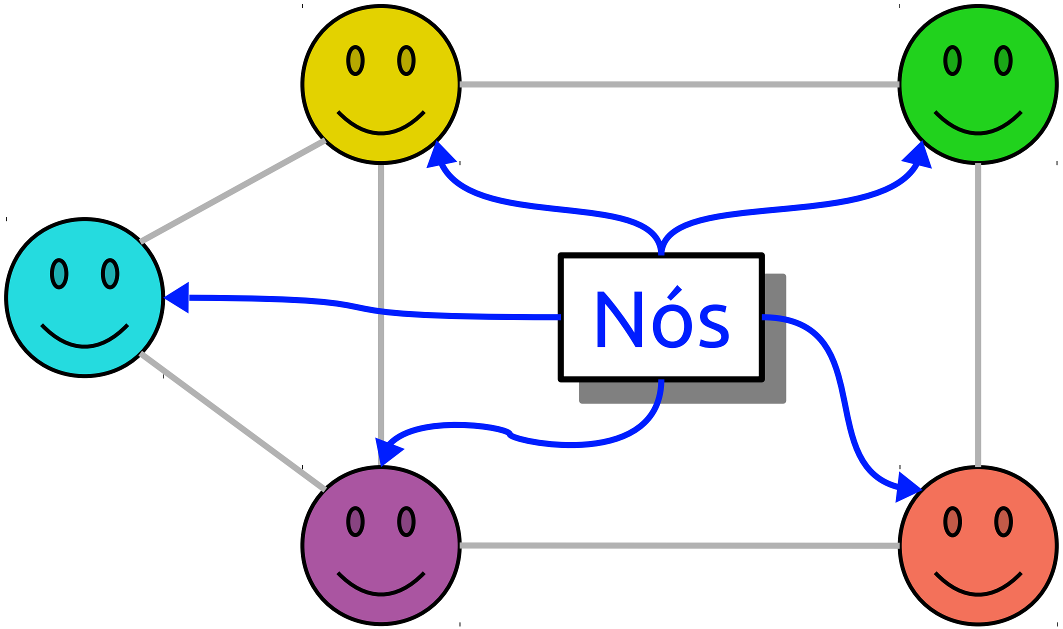


facebook

O que há em Comum

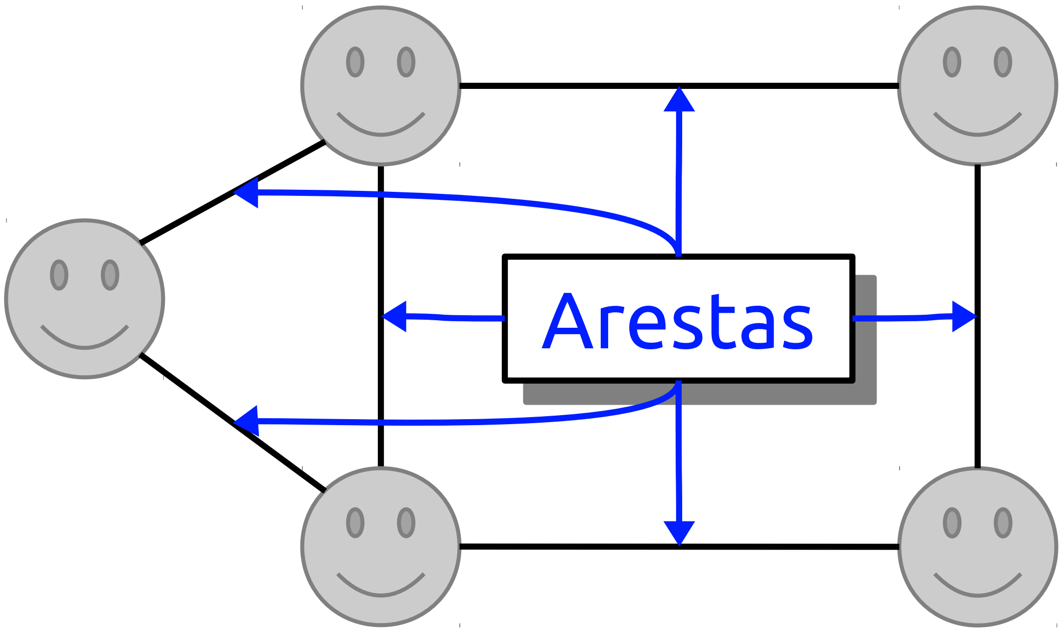
- Cada uma dessas estruturas consiste em
  - uma coleção de objetos e
  - ligações entre esses objetos.
- **Objetivo:** encontrar uma estrutura geral para descrever esses objetos e suas propriedades.

Um **grafo** é uma estrutura matemática para representar relacionamentos.



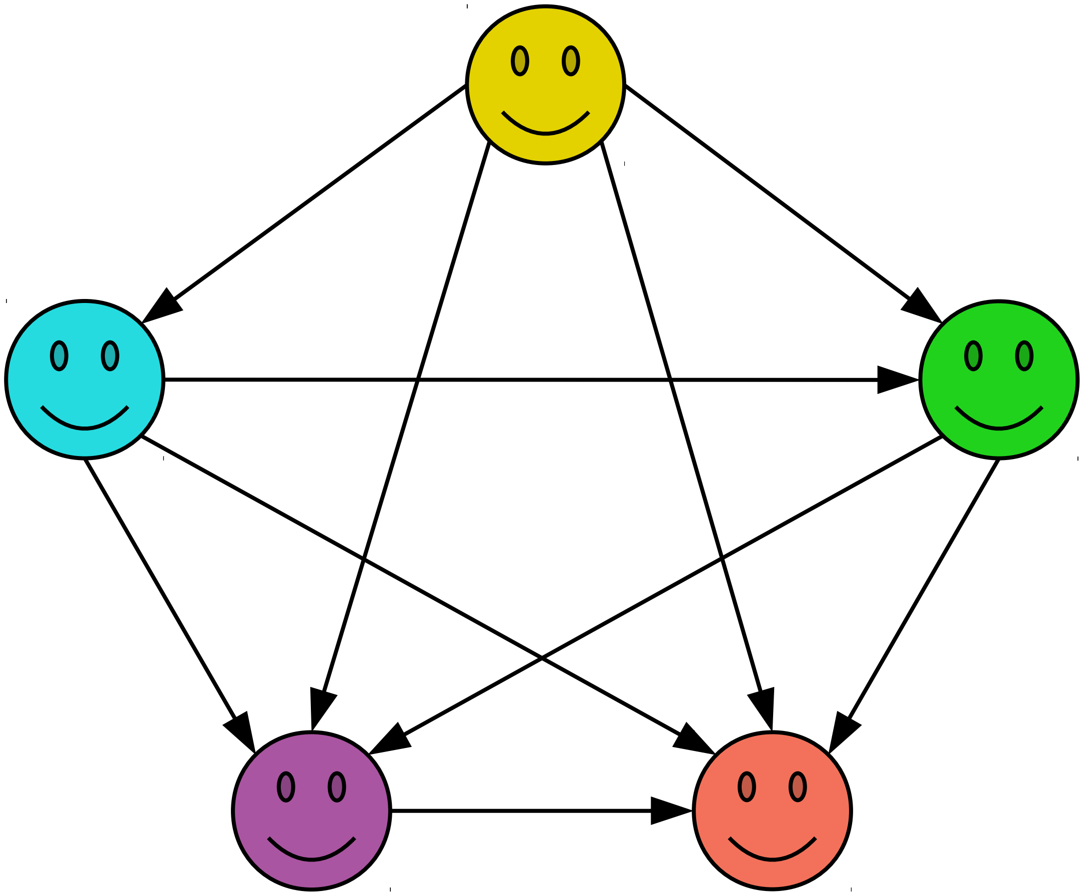
Um **grafo** consiste em um conjunto de **nós** (ou **vértices**) conectados por **arestas** (ou **arcos**)

Um **grafo** é uma estrutura matemática para representar relacionamentos.

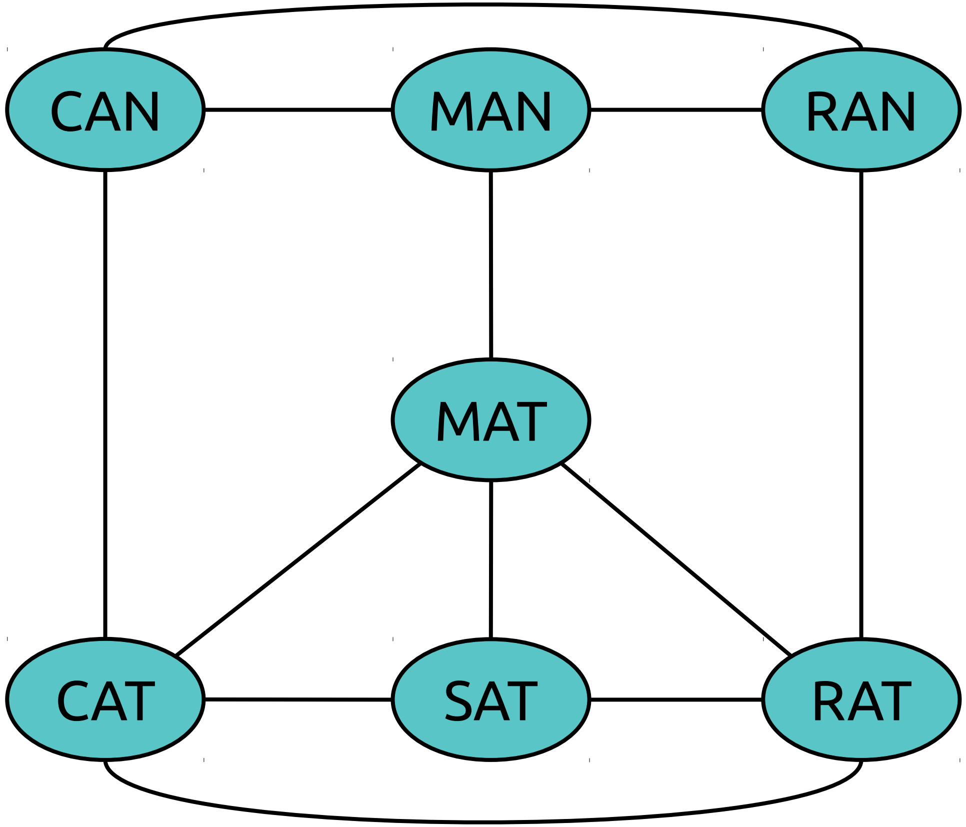


Um **grafo** consiste em um conjunto de **nós** (ou **vértices**) conectados por **arestas** (ou **arcos**)

Alguns gráficos são **directionados**.



Alguns gráficos são **não-direcionados**.



Daqui para frente, vamos nos concentrar principalmente em grafos não-direcionados.

O termo "grafo" geralmente se refere a grafos não-direcionados com um número finito de nós, a menos que especificado de outra forma.

Formalizando Grafos

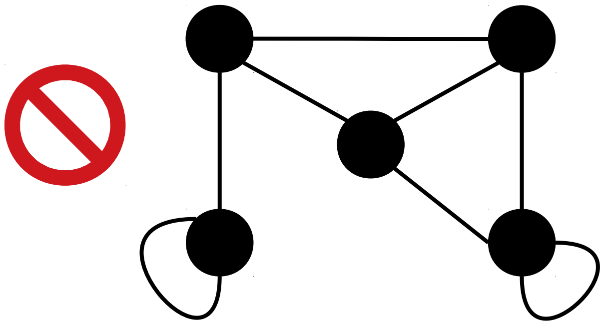
- Como podemos definir um grafo matematicamente?
- Precisamos especificar
  - quais são os nós no grafo, e
  - quais arestas estão no grafo.
- Os nós podem ser praticamente qualquer coisa.
- E quanto às arestas?

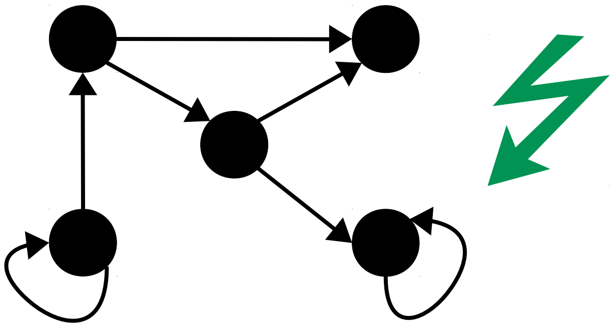
Formalizando Grafos

- Um **par não-ordenado** é um conjunto {a, b} de dois elementos a ≠ b. (Lembre-se de que os conjuntos não estão ordenados).
  - {0, 1} = {1, 0}
- Um **grafo não-direcionado** é um par ordenado G = (V, E), onde
  - V é um conjunto de nós, que pode ser qualquer coisa, e
  - E é um conjunto de arestas, que são pares não ordenados de nós extraídos de V.
- Um **grafo direcionado** é um par ordenado G = (V, E), onde
  - V é um conjunto de nós, que pode ser qualquer coisa, e
  - E é um conjunto de arestas, que são pares ordenados de nós extraídos de V.

Auto-Loops

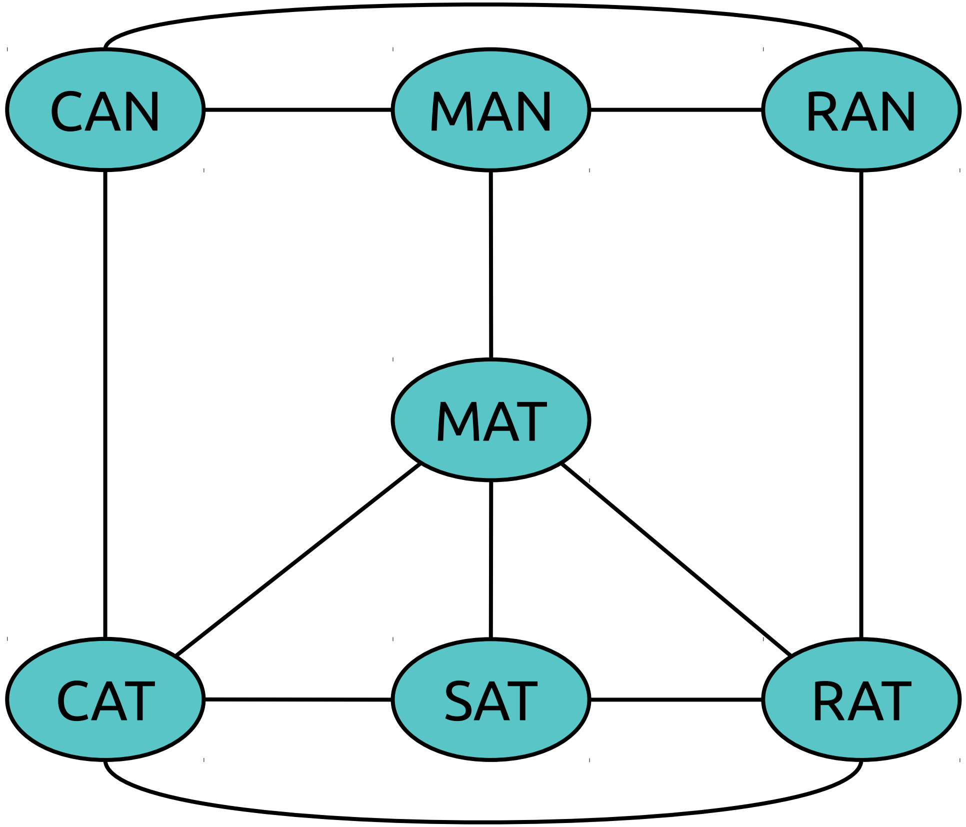
- Uma aresta de um nó para si mesmo é chamada de auto-loop.
- Em grafos não-direcionados, auto-loops geralmente não são permitidos.
- No grafo direcionado, os auto-loops são geralmente permitidos, a menos que seja especificado de outra forma.





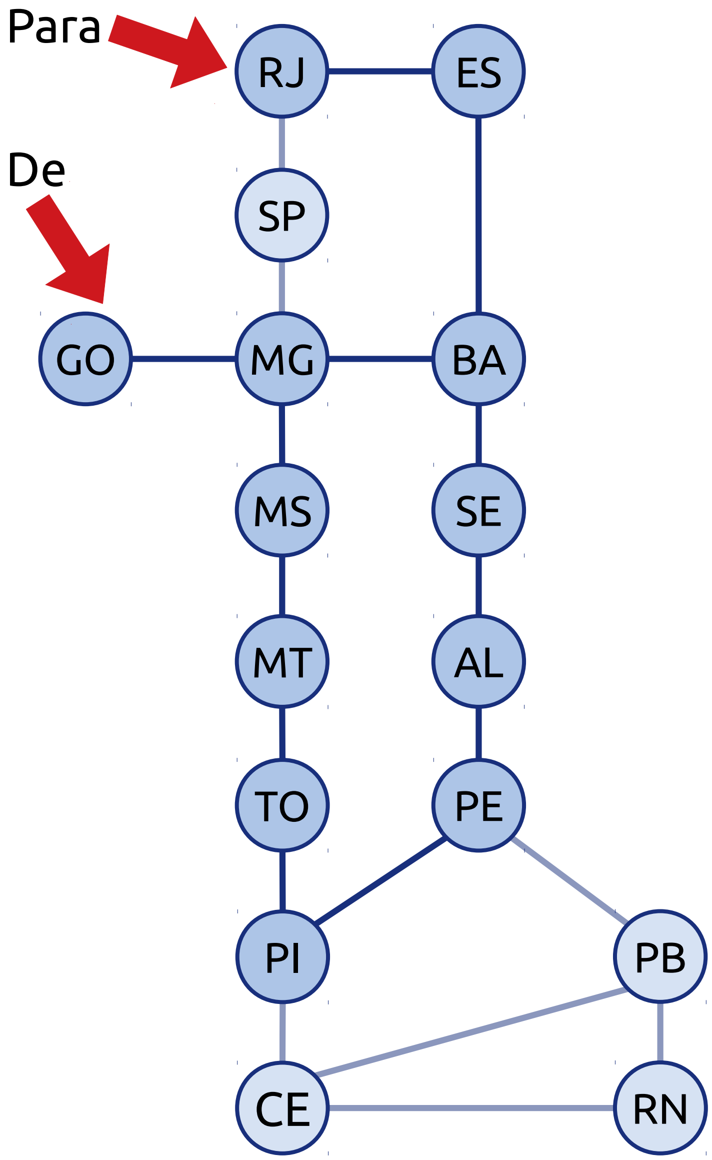
Terminologia Padrão de Grafos

Dois nós são chamados de **adjacentes** se houver uma aresta entre eles.



Usando nossos Formalismos

- Seja $G = (V, E)$ um grafo.
- Intuitivamente, dois nós são adjacentes se estiverem ligados por uma aresta.
- Falando formalmente, dizemos que dois nós $u, v \in V$ são **adjacentes** se $\{u, v\} \in E$.

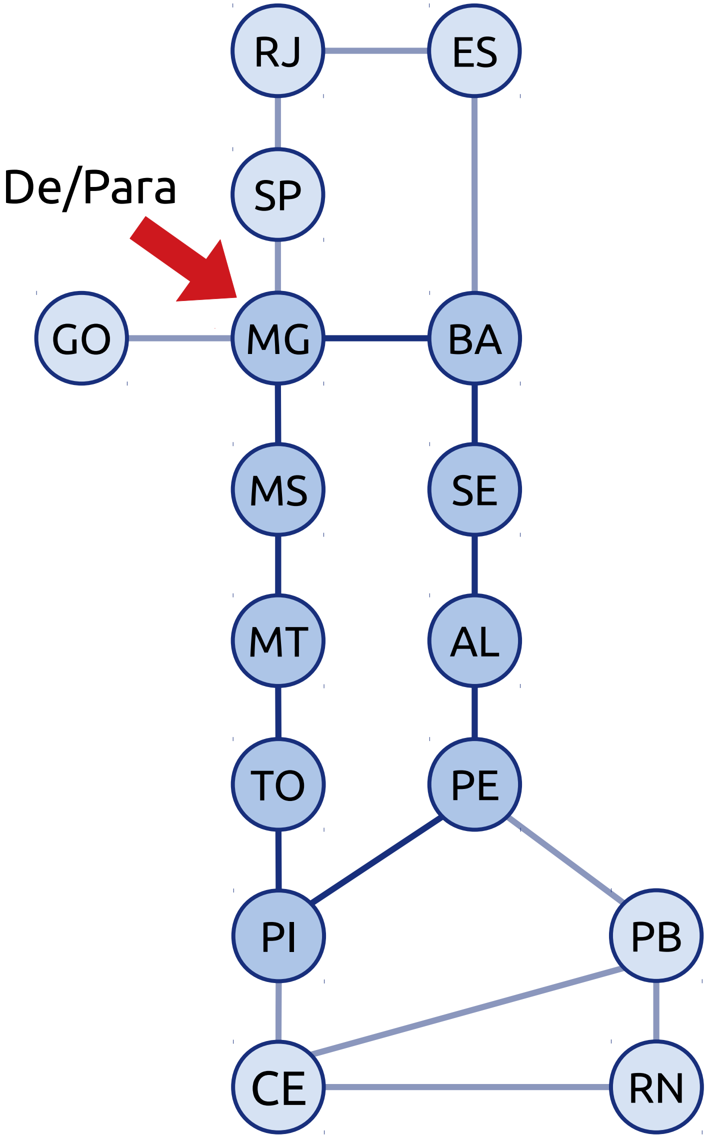


Um **caminho** em um grafo G = (V, E) é uma sequência de um ou mais nós $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ tal que quaisquer dois nós consecutivos na sequência sejam adjacentes.

O **comprimento** do caminho $v_1, \ldots, v_n$ é $n - 1$

Este caminho tem comprimento 11, mas visita 12 estados.)

GO, MG, MS, MT, TO, PI, PE, AL, SE, BA, ES, RJ



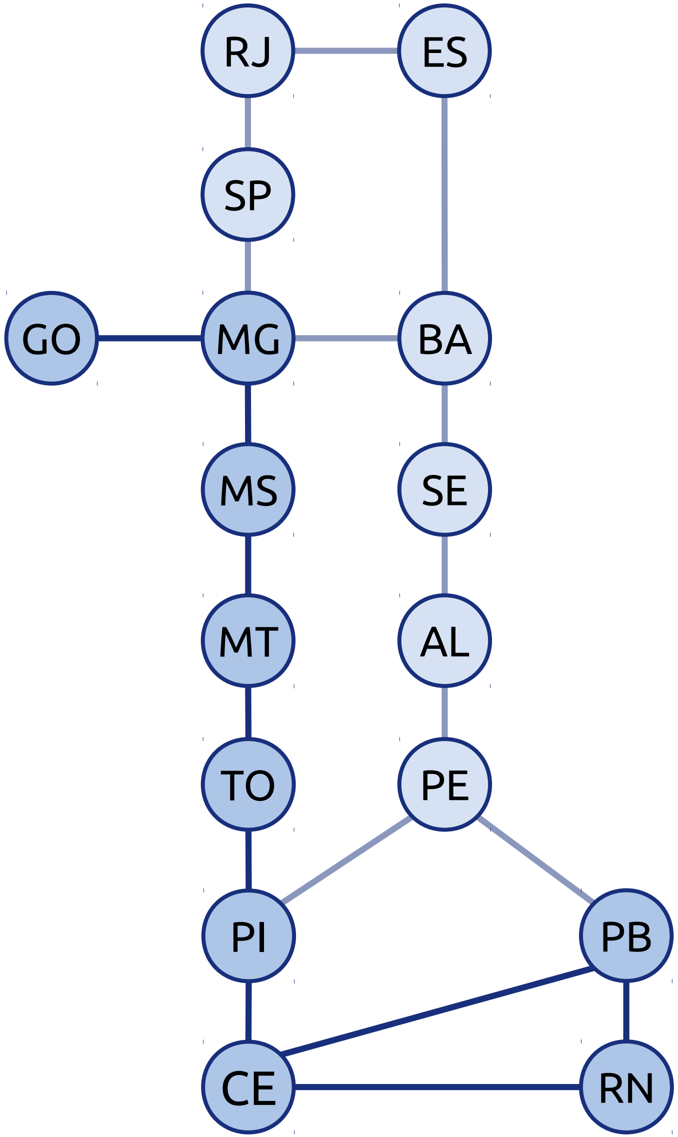
Um **caminho** em um grafo G = (V, E) é uma sequência de um ou mais nós $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ tal que quaisquer dois nós consecutivos na sequência sejam adjacentes.

O **comprimento** do caminho $v_1, \ldots, v_n$ é $n - 1$

Um **ciclo** em um grafo é um caminho de um nó de volta a si mesmo. (Por convenção, um ciclo não pode ter comprimento zero.)

Este ciclo tem comprimento 9,
e visita 9 diferentes estados.)

MG, MS, MT, TO, PI, PE, AL, SE, BA, MG



Um **caminho** em um grafo G = (V, E) é uma sequência de um ou mais nós $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ tal que quaisquer dois nós consecutivos na sequência sejam adjacentes.

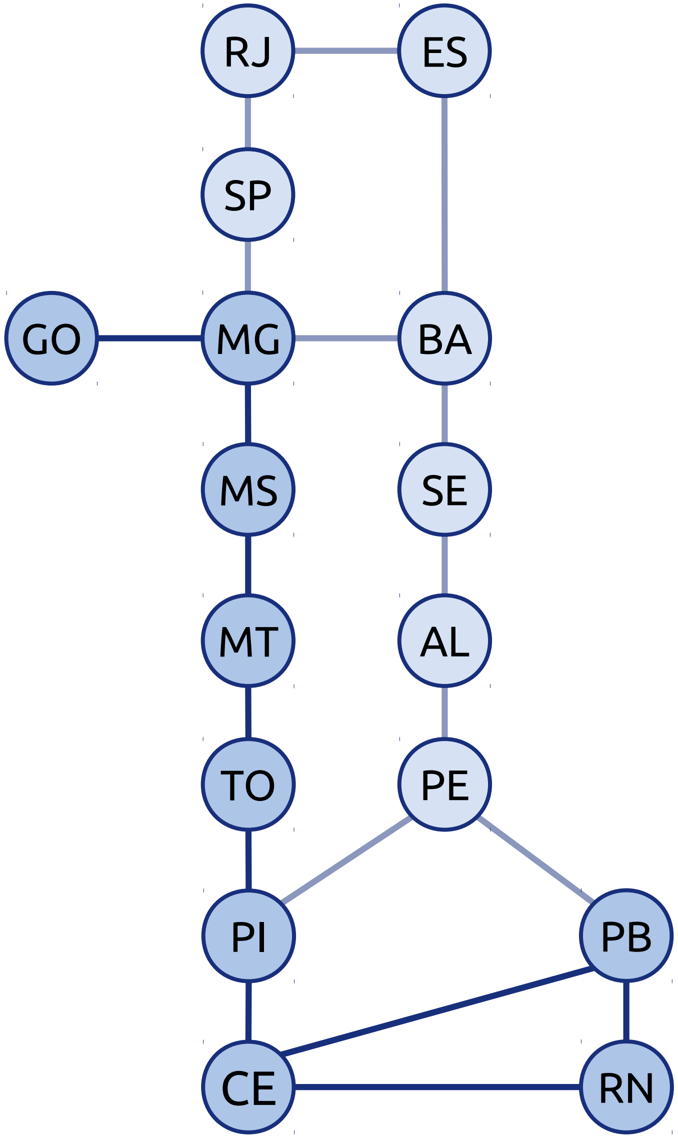
O **comprimento** do caminho $v_1, \ldots, v_n$ é $n - 1$

Um **ciclo** em um grafo é um caminho de um nó de volta a si mesmo. (Por convenção, um ciclo não pode ter comprimento zero.)

Um **caminho simples** em um grafo é um caminho que não repete nenhum nó ou aresta

Este caminho não é um caminho simples.

GO, MG, MS, MT, TO, PI, CE, RN, PB, CE



Um **caminho** em um grafo G = (V, E) é uma sequência de um ou mais nós $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ tal que quaisquer dois nós consecutivos na sequência sejam adjacentes.

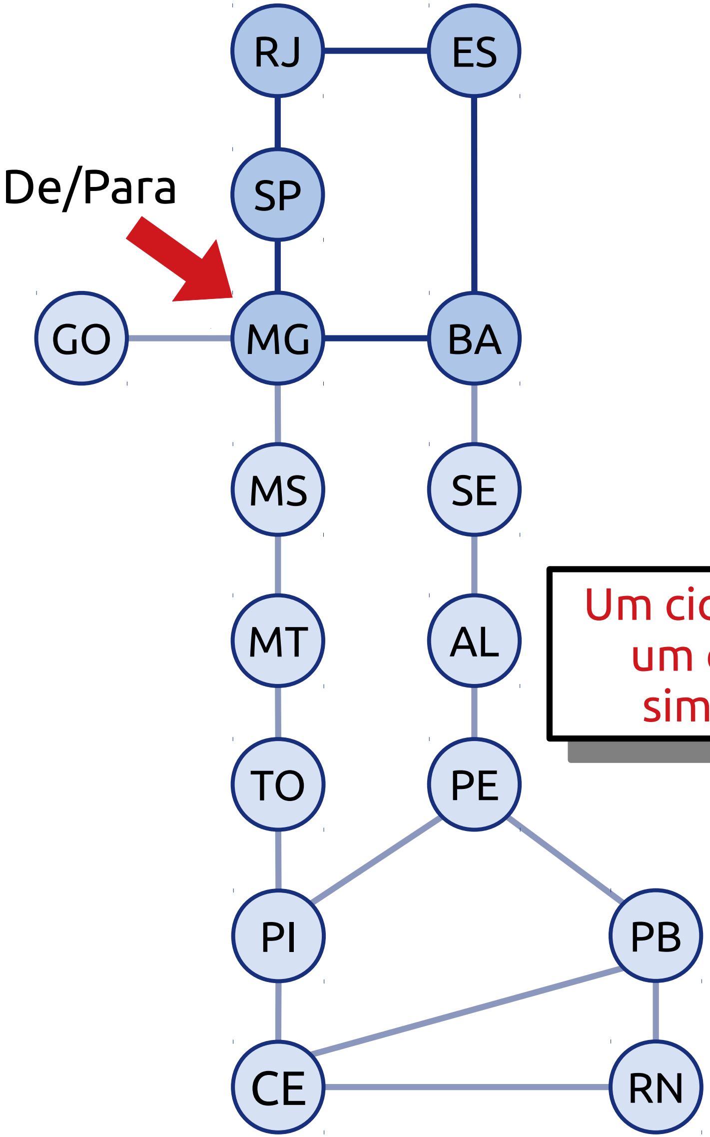
O **comprimento** do caminho $v_1, \ldots, v_n$ é $n - 1$

Um **ciclo** em um grafo é um caminho de um nó de volta a si mesmo. (Por convenção, um ciclo não pode ter comprimento zero.)

Um **caminho simples** em um grafo é um caminho que não repete nenhum nó ou aresta

Este caminho tem comprimento 9.

GO, MG, MS, MT, TO, PI, CE, RN, PB, CE



Um **caminho** em um grafo G = (V, E) é uma sequência de um ou mais nós $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ tal que quaisquer dois nós consecutivos na sequência sejam adjacentes.

O **comprimento** do caminho $v_1, \ldots, v_n$ é $n - 1$

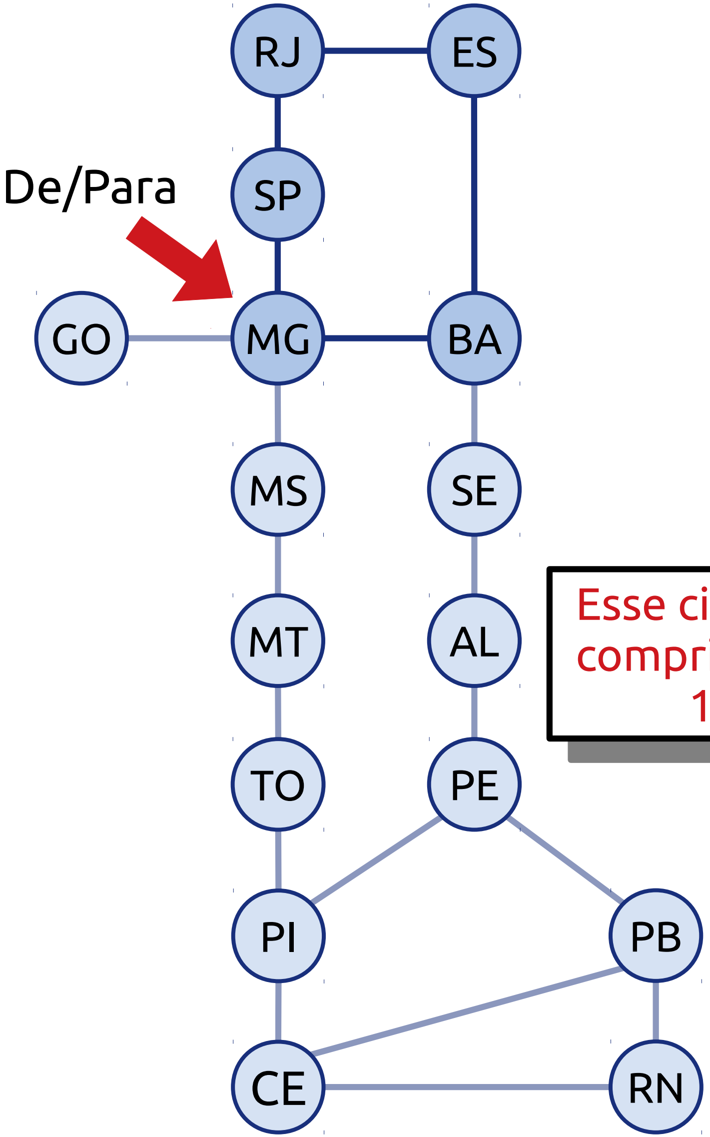
Um **ciclo** em um grafo é um caminho de um nó de volta a si mesmo. (Por convenção, um ciclo não pode ter comprimento zero.)

Um **caminho simples** em um grafo é um caminho que não repete nenhum nó ou aresta

Um **ciclo simples** em um grafo é um ciclo que não repete nenhum nó ou aresta, exceto o primeiro/último nó.

Um ciclo, não um ciclo simples

MG, BA, ES, RJ, SP, MG, BA, ES, RJ, SP, MG



Um **caminho** em um grafo G = (V, E) é uma sequência de um ou mais nós $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ tal que quaisquer dois nós consecutivos na sequência sejam adjacentes.

O **comprimento** do caminho $v_1, \ldots, v_n$ é n - 1

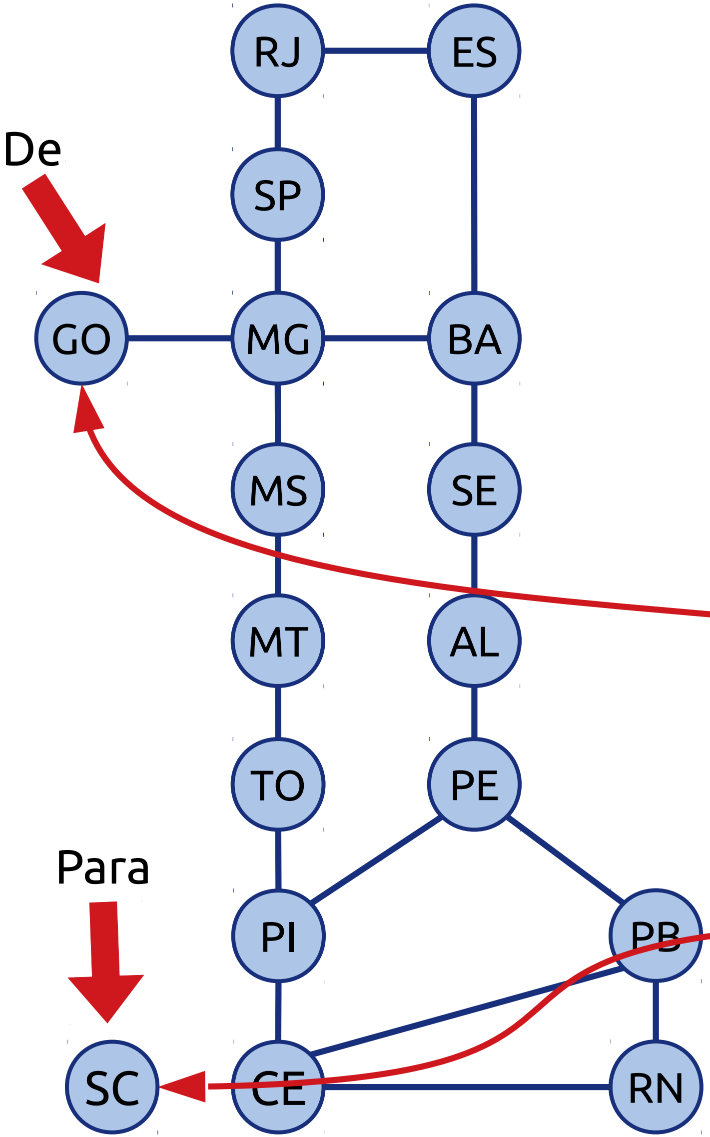
Um **ciclo** em um grafo é um caminho de um nó de volta a si mesmo. (Por convenção, um ciclo não pode ter comprimento zero.)

Um **caminho simples** em um grafo é um caminho que não repete nenhum nó ou aresta

Um **ciclo simples** em um grafo é um ciclo que não repete nenhum nó ou aresta, exceto o primeiro/último nó.

Esse ciclo tem comprimento 10.

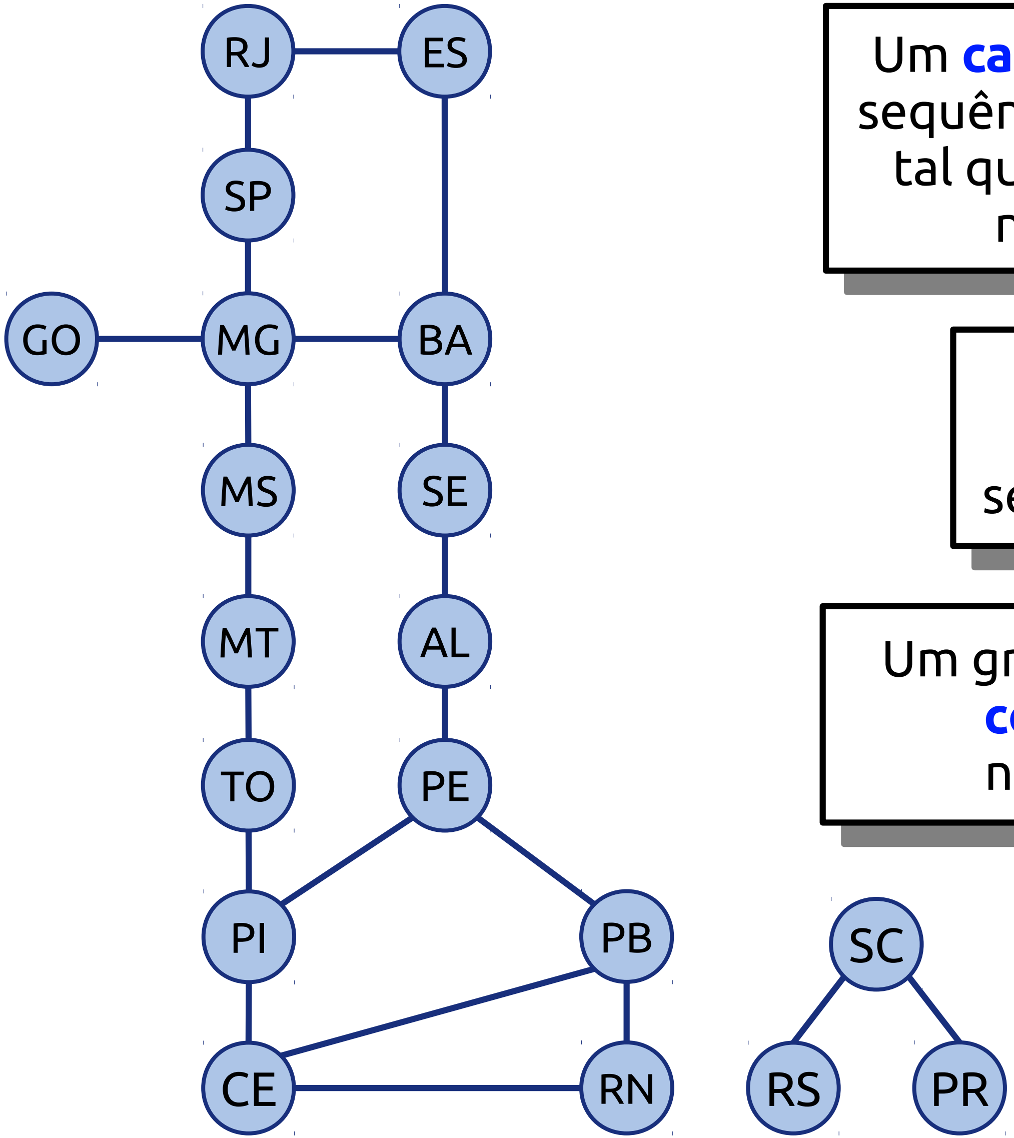
MG, BA, ES, RJ, SP, MG, BA, ES, RJ, SP, MG



Um **caminho** em um grafo G = (V, E) é uma sequência de um ou mais nós $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ tal que quaisquer dois nós consecutivos na sequência sejam adjacentes.

Dois nós em um grafo são chamados **conectados** se houver um caminho entre eles

Estes nós não estão conectados.



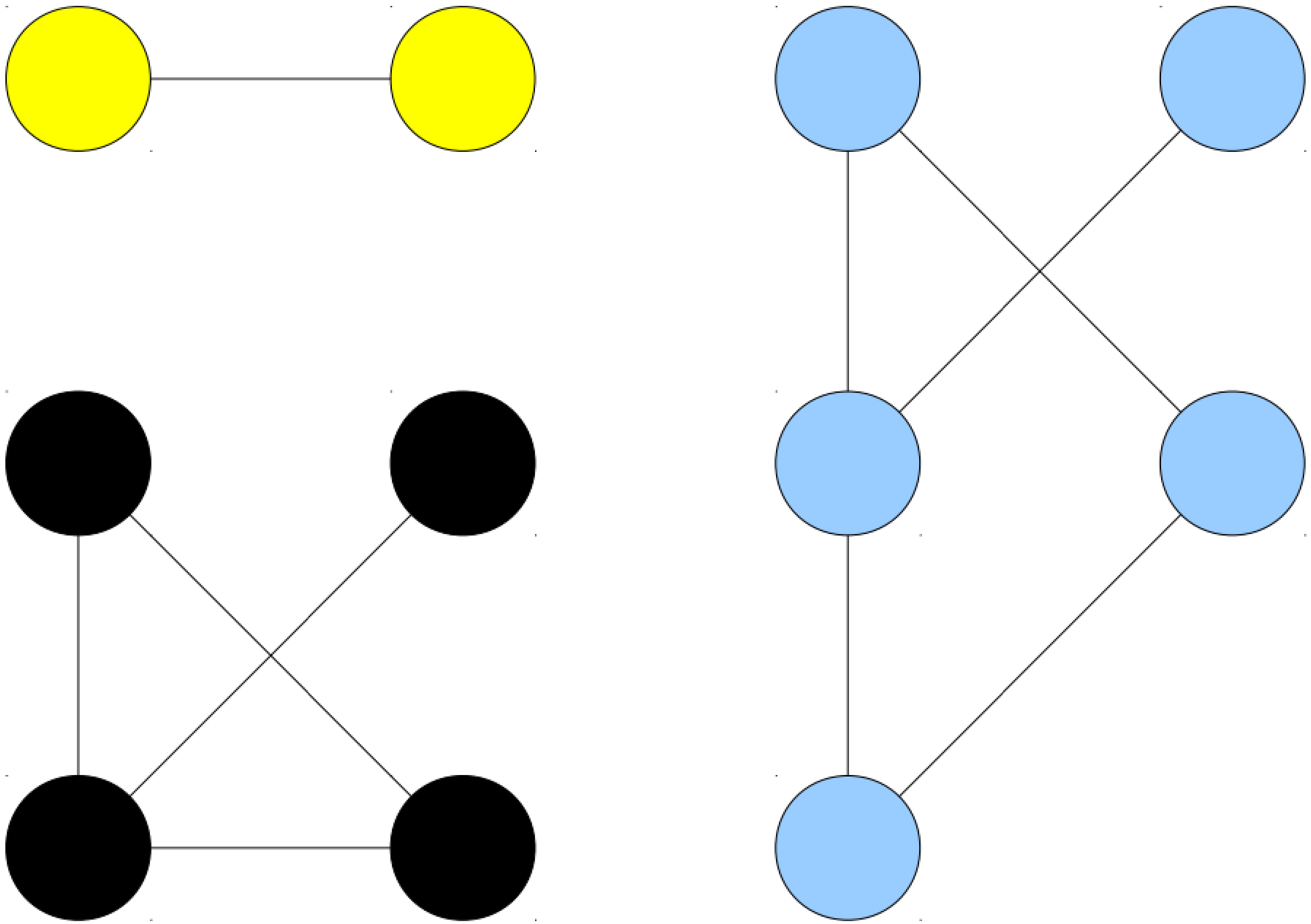
Um **caminho** em um grafo G = (V, E) é uma sequência de um ou mais nós $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ tal que quaisquer dois nós consecutivos na sequência sejam adjacentes.

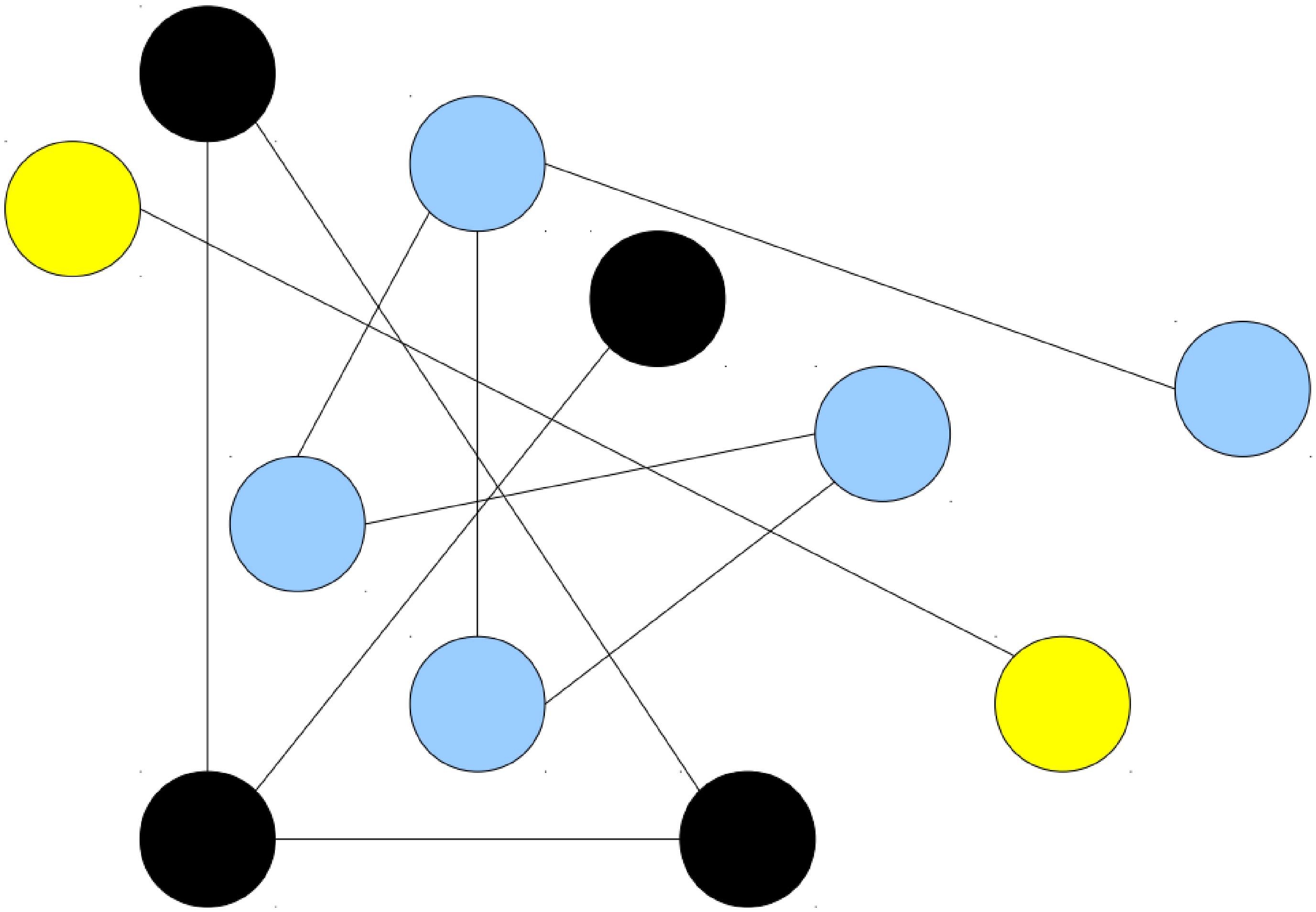
Dois nós em um grafo são chamados **conectados** se houver um caminho entre eles

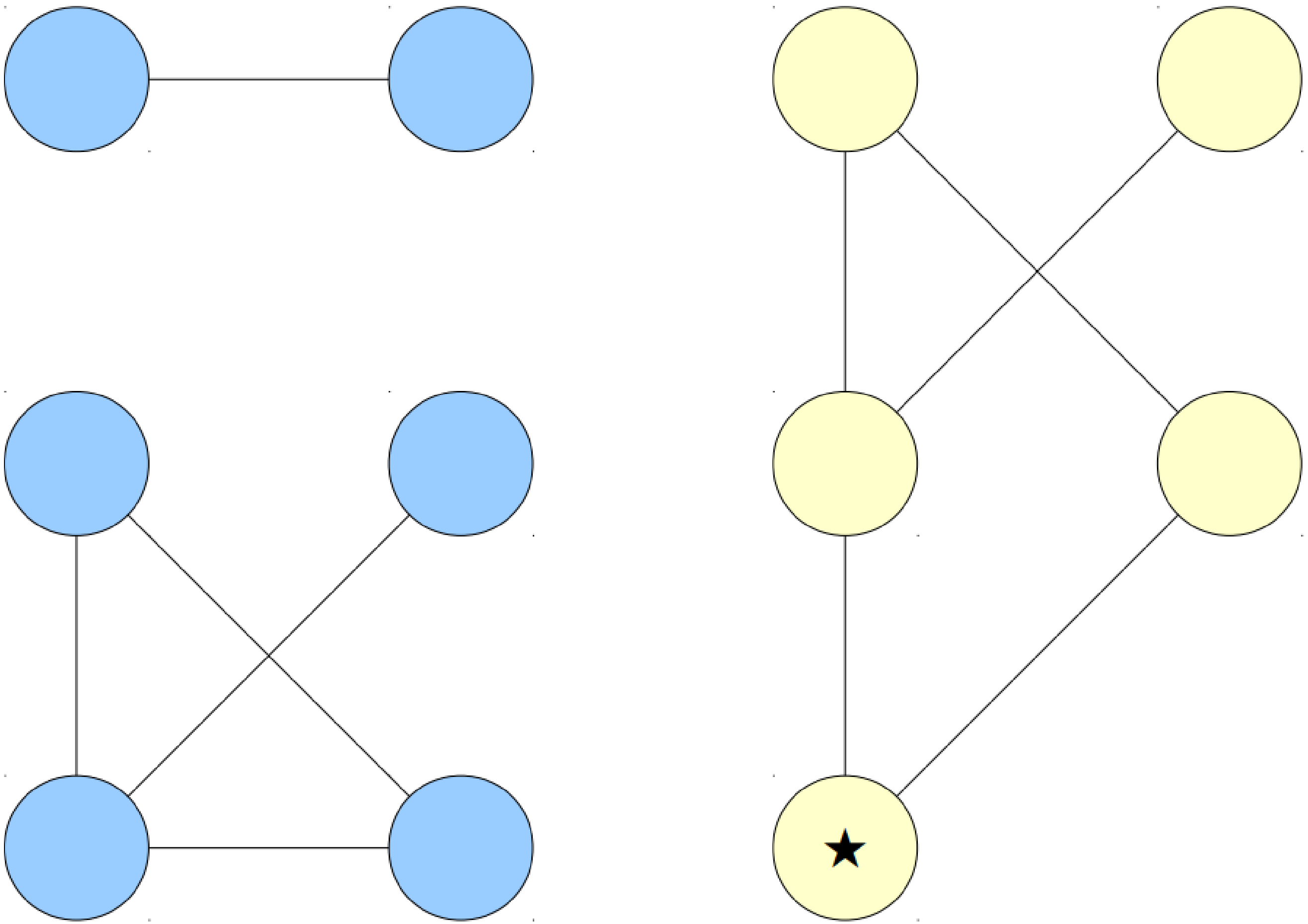
Um grafo G como um todo é chamado de **conectado** se todos os pares de nós em G estiverem conectados.

Este grafo não é conectado

Componentes Conectados







Componentes Conectados

- Seja $G = (V, E)$ um grafo. Para cada $v \in V$, o **componente conectado** contendo v é o conjunto

  $$[v] = \{x \in V \mid v \text{ está conectado a } x\}$$

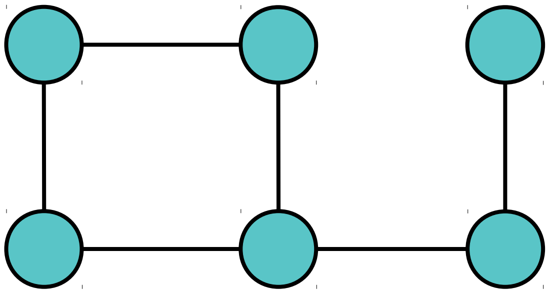
- Intuitivamente, um componente conectado é um "pedaço" de um grafo no sentido que acabamos de falar.
- **Pergunta:** Como sabemos que esta definição particular de uma "parte" de um grafo é boa?
- **Objetivo:** Provar que qualquer grafo pode ser dividido em diferentes componentes conectados.

Estamos tentando raciocinar sobre uma maneira de particionar os nós de um grafo em grupos diferentes.

Que estrutura estudamos que capta a ideia de uma partição?

Conectividade

- **Afirmação:** Para qualquer grafo G, a relação “está conectado a” é uma relação de equivalência.
  - É reflexivo?
  - É simétrico?
  - É transitivo?



Conectividade

Afirmação: Para qualquer grafo G, a relação "está conectado a" é uma relação de equivalência.

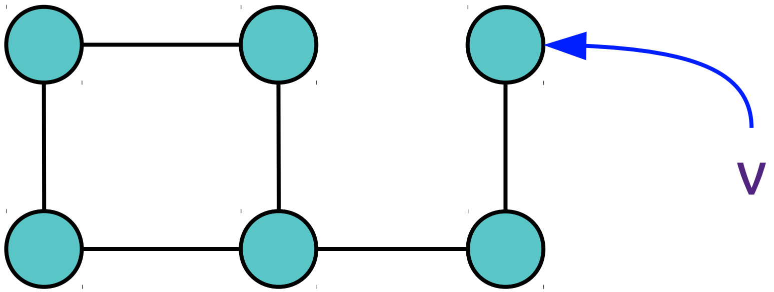
- É reflexivo?

É simétrico?

É transitivo?

$\forall v \in V.\ \mathrm{Conn}(v, v)$

Um **caminho** em um grafo G = (V, E) é uma sequência de um ou mais nós $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ tal que quaisquer dois nós consecutivos na sequência sejam adjacentes.



Conectividade

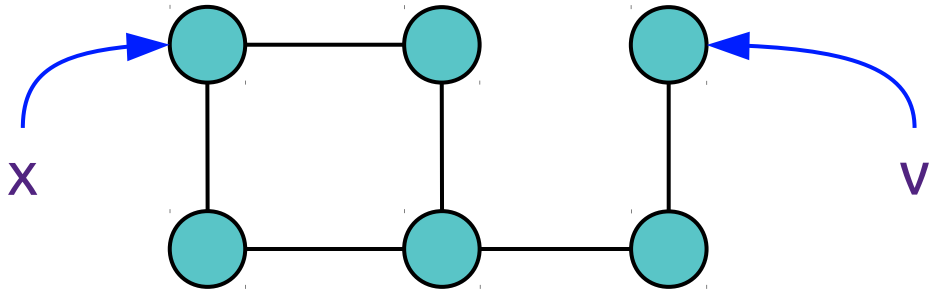
Afirmação: Para qualquer grafo G, a relação “está conectado a” é uma relação de equivalência.

É reflexivo?

- É simétrico?

É transitivo?

$$\forall x \in V.\ \forall y \in V.\ (Conn(x, y) \to Conn(y, x))$$

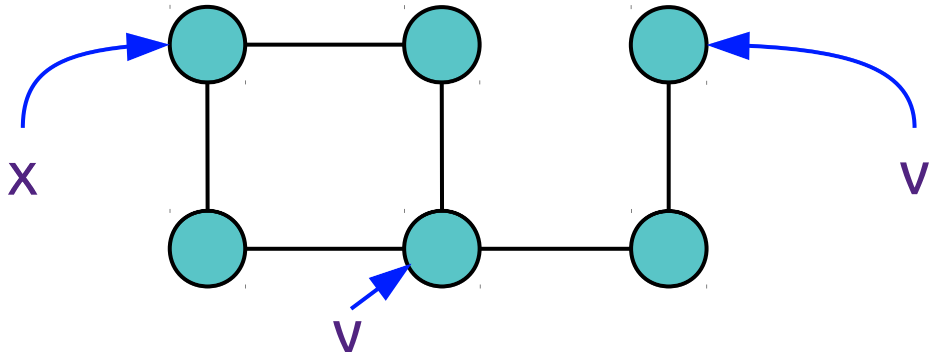


Conectividade

Afirmação: Para qualquer grafo G, a relação “está conectado a” é uma relação de equivalência.

- É reflexivo?
- É simétrico?
- É transitivo?

$$\forall x \in V.\ \forall y \in V.\ \forall z \in V.\ (Conn(x, y)\ \land\ Conn(y, z) \to Conn(x, z))$$



Teorema: Seja G = (V, E) um grafo. Então, a relação de conectividade sobre V é uma relação de equivalência.

Prova: considere um grafo arbitrário G = (V, E). Vamos provar que a relação de conectividade em V é reflexiva, simétrica e transitiva.

Para mostrar que a conectividade é reflexiva, considere qualquer $v \in V$. Então o caminho singleton v é um caminho de v para si mesmo. Portanto, v está conectado a si mesmo, conforme necessário.

Para mostrar que a conectividade é simétrica, considere qualquer $x, y \in V$ onde x está conectado a y. Precisamos mostrar que y está conectado a x. Como x está conectado a y, existe algum caminho $x, v_1, ..., v_n, y$ de x para y. Então $y, v_n, \ldots, v_1, x$ é um caminho de y de volta para x, então y está conectado a x.

Finalmente, para mostrar que a conectividade é transitiva, sejam $x, y, z \in V$ nós arbitrários onde x está conectado a y e y está conectado a z. Vamos provar que x está conectado a z. Como x está conectado com y, existe um caminho $x, u_1, ..., u_n, y$ de x para y. Como y está conectado a z, existe um caminho $y, v_1, ..., v_k, z$ de y a z. Então, o caminho $x, u_1, ..., u_n, y, v_1, ..., v_k, z$ vai de x para z. Portanto, x é conectado a z, conforme necessário.■

Juntando as Coisas

- Anteriormente, definimos o componente conectado de um nó v para ser

  $[v] = \{x \in V \mid v \text{ está conectado a } x\}$

- Conectividade é uma relação de equivalência! Então, qual é a classe de equivalência de um nó v com respeito à conectividade?

  $[v] = \{x \in V \mid v \text{ está conectado a } x\}$

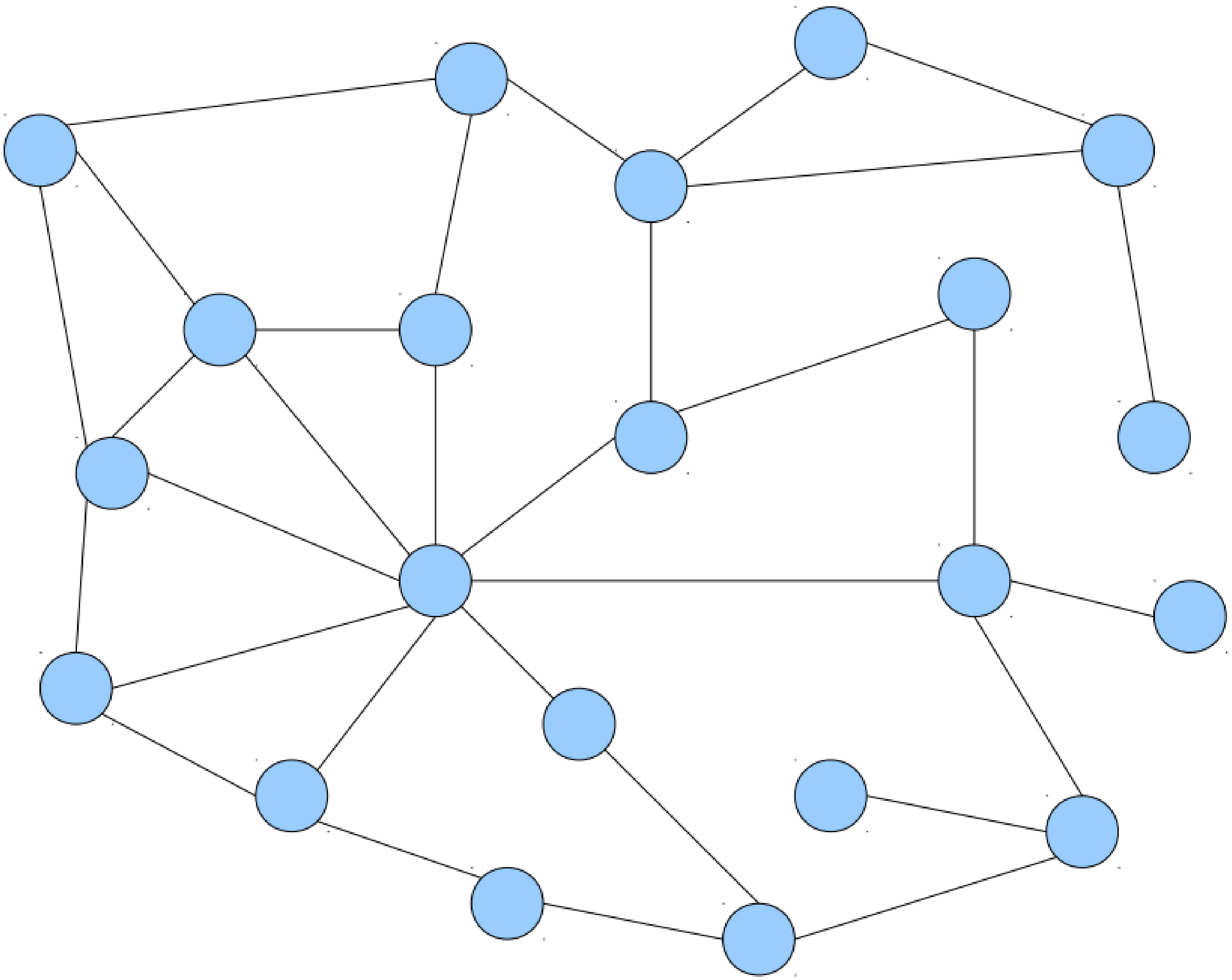
- **Os componentes conectados são classes de equivalência da relação de conectividade!**

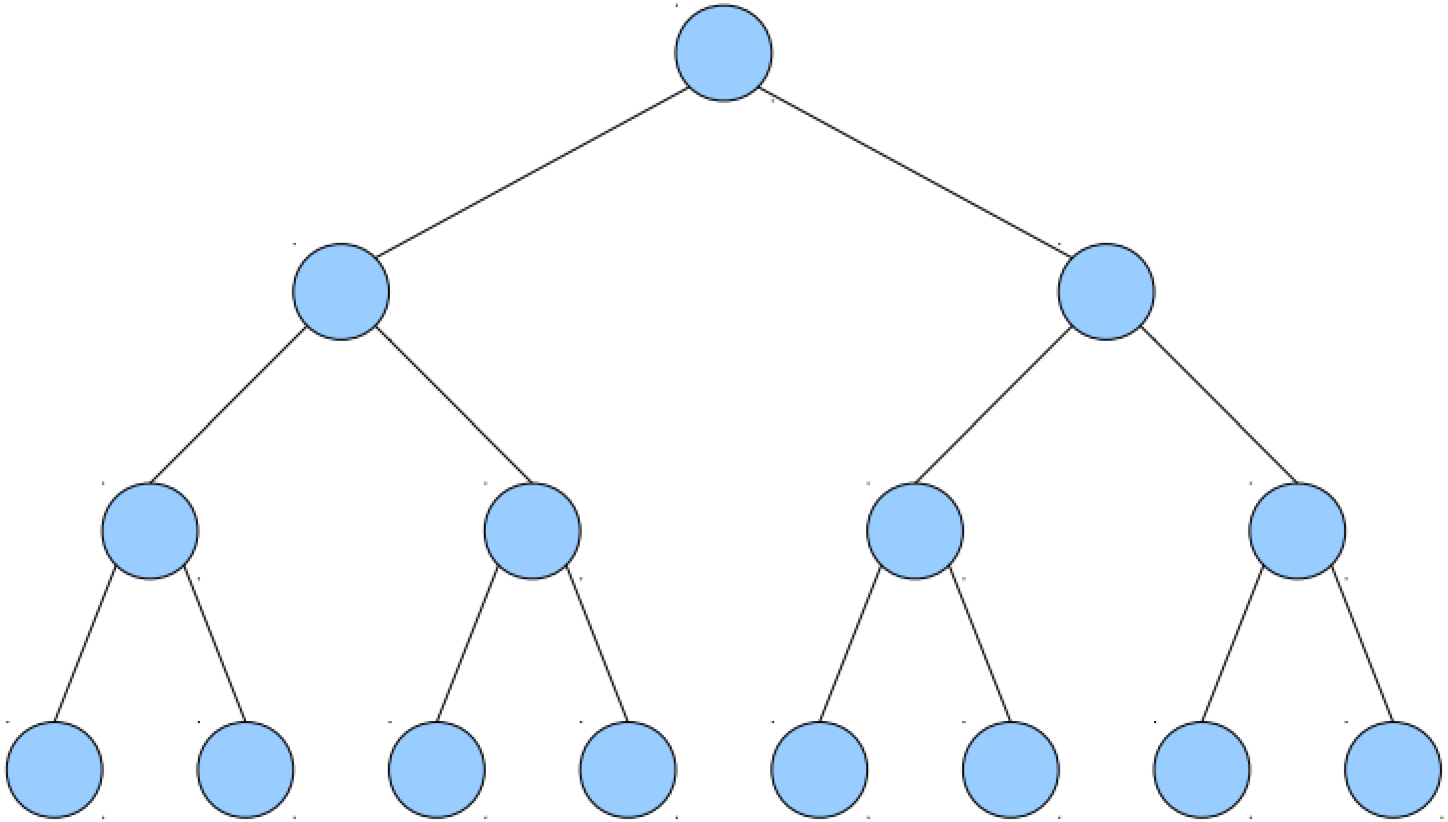
Teorema: Se $G = (V, E)$ é um grafo, então cada nó em G pertence a exatamente um componente conectado de G.

Prova: Seja $G = (V, E)$ um grafo arbitrário e seja $v \in V$ qualquer nó em G. Os componentes conectados de G são apenas as classes de equivalência da relação de conectividade em G.

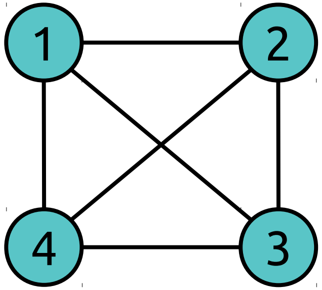
O Teorema Fundamental das Relações de Equivalência garante que v pertence a exatamente uma classe de equivalência da relação de conectividade. Portanto, v pertence a exatamente um componente conectado em G.■

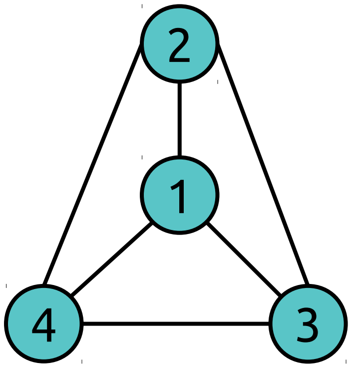
Grafos Planares

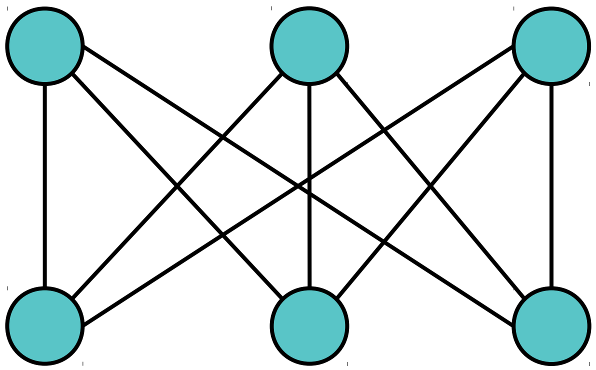




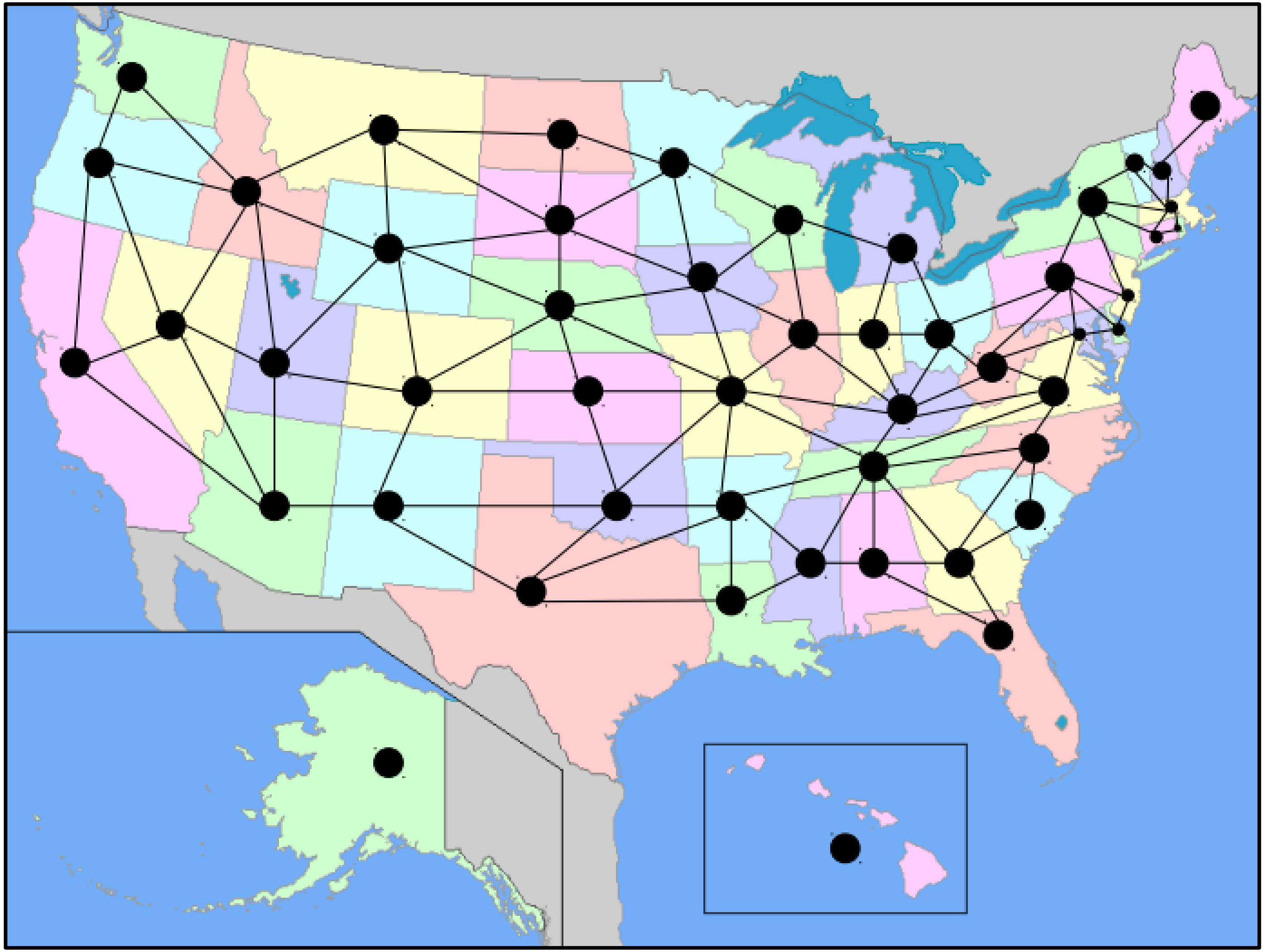
Um grafo é chamado de **grafo planar** se houver alguma maneira de desenhá-lo em um plano 2D sem que nenhuma das arestas se cruze.

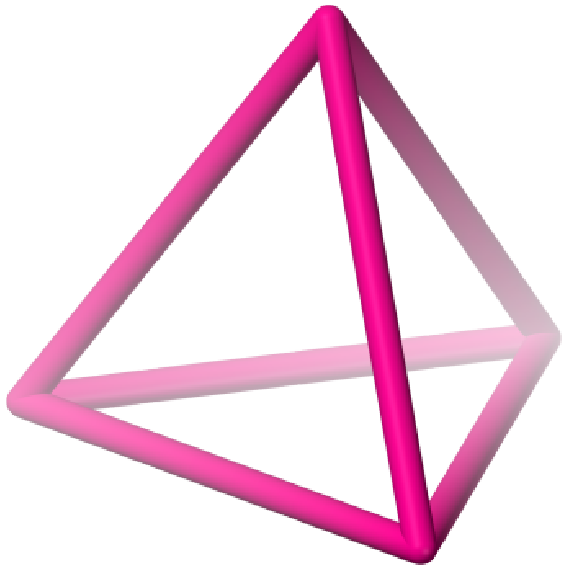

1
2
4
3

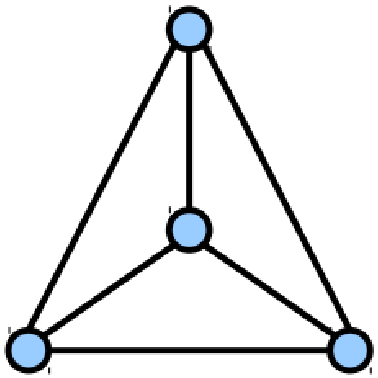

2
1
4
3

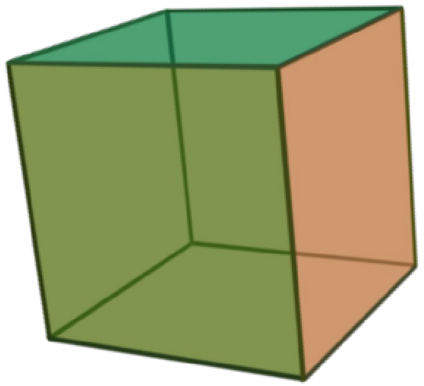


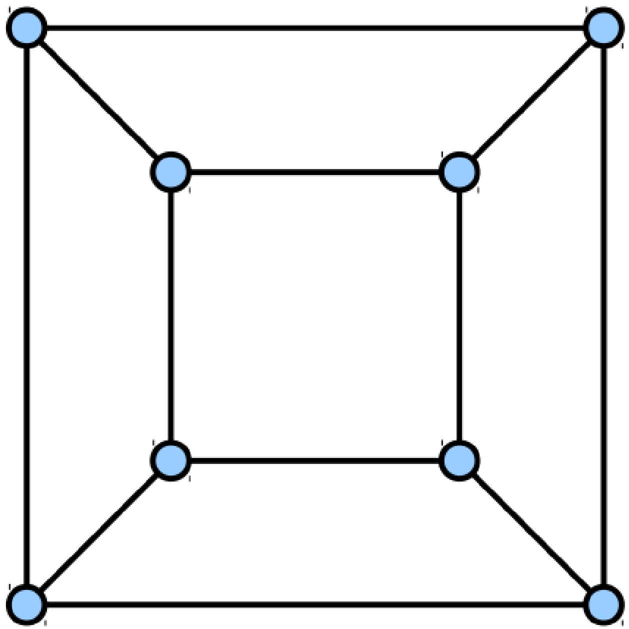
Este grafo é denominado
grafo de utilidade. Não há como desenhá-lo
no plano sem que as arestas se cruzem.

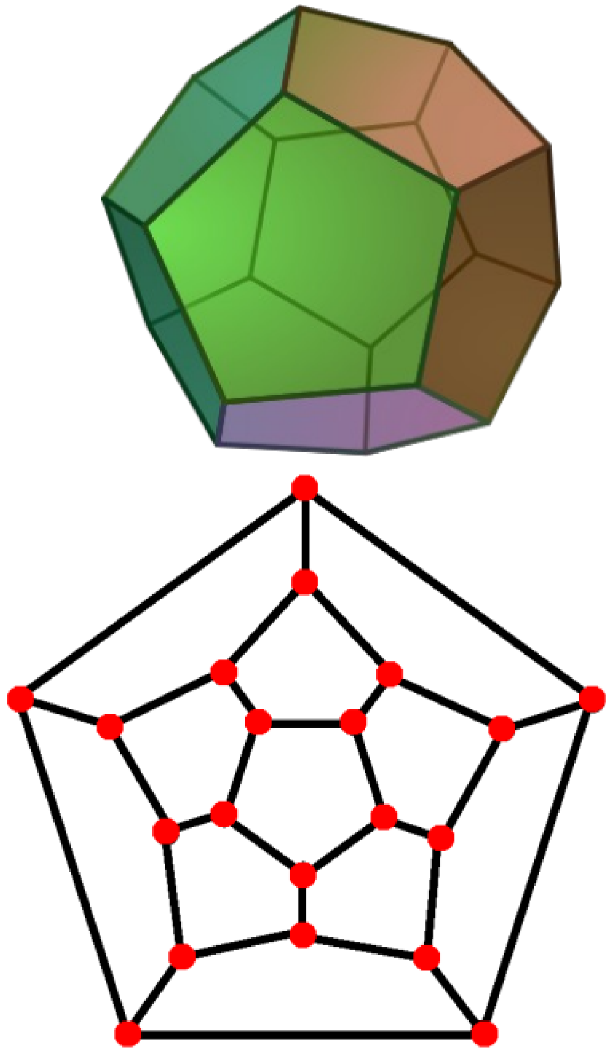




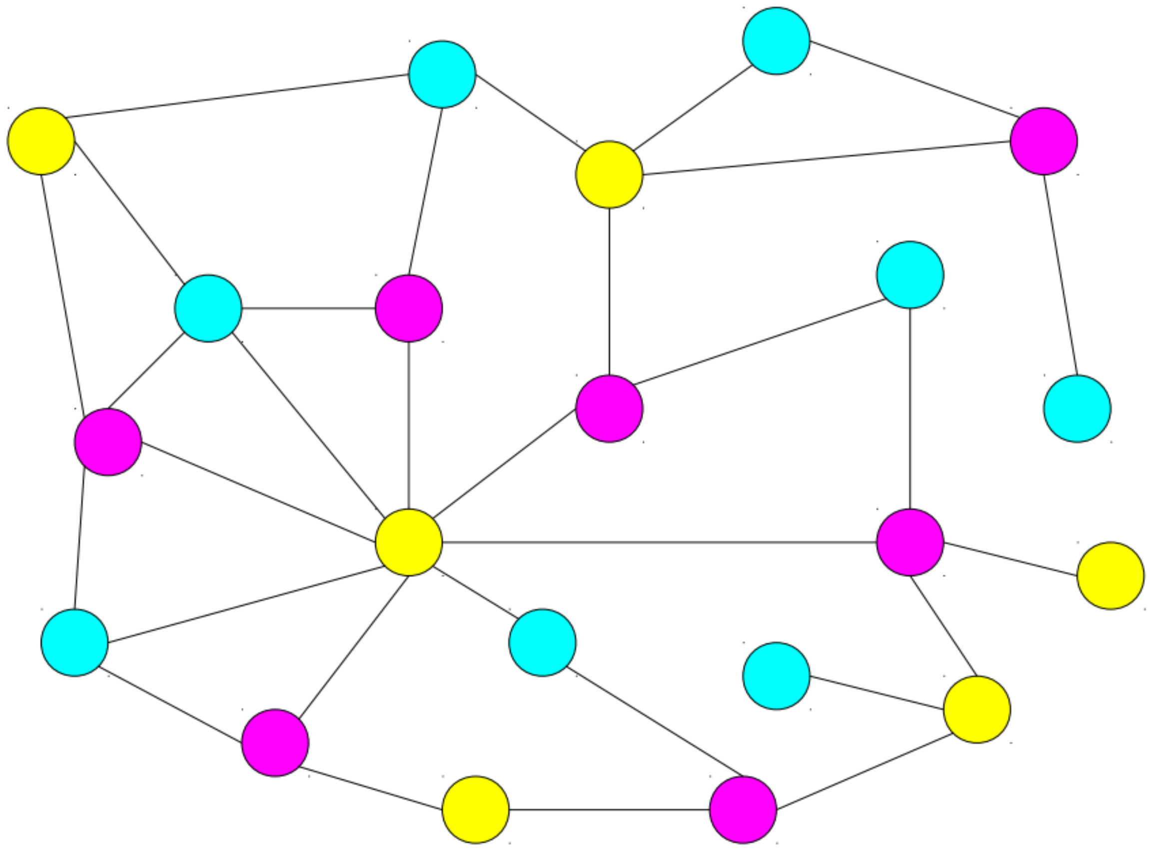


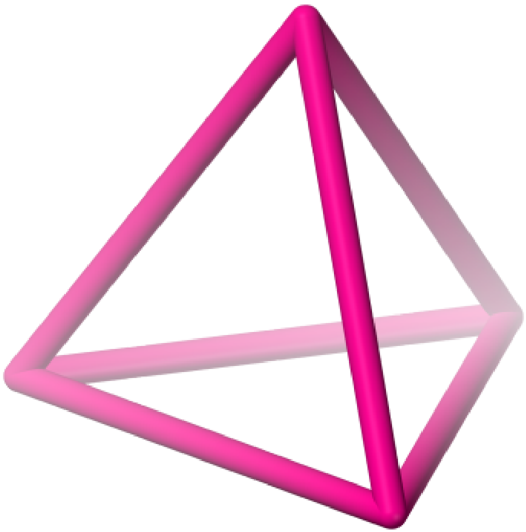


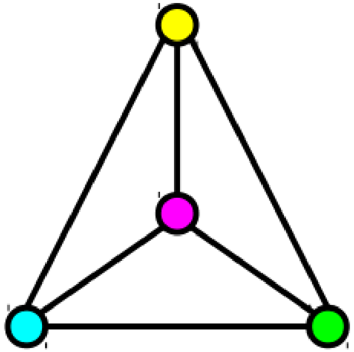


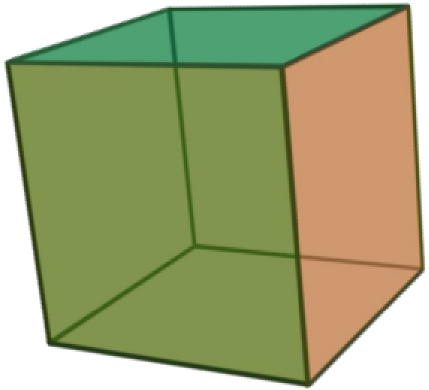


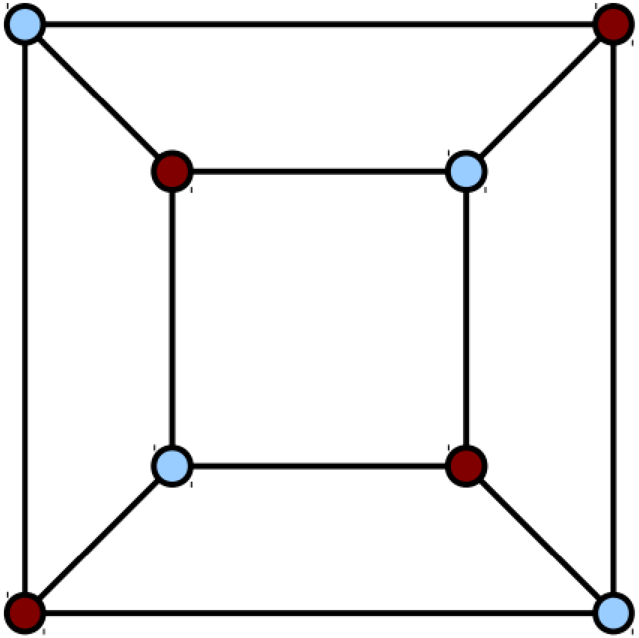
Coloração de Grafos











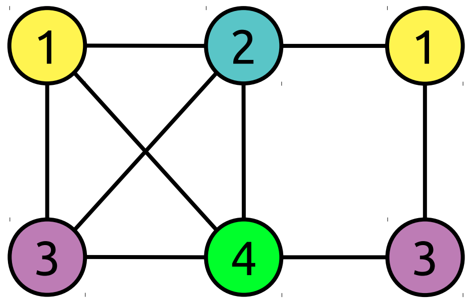
Coloração de Grafos

- Intuitivamente, uma coloração do vértice k de um grafo G = (V, E) é uma maneira de colorir cada nó em V com uma de k cores diferentes, de modo que não haja dois nós adjacentes em V da mesma cor.
- A **coloração do vértice k** de um gráfico G = (V, E) é uma função

  $$f : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$$

  de tal modo que

  $$\forall u \in V.\ \forall v \in V.\ (\{u, v\} \in E \to f(u) \neq f(v))$$



Coloração de Grafos

- Intuitivamente, uma coloração do vértice k de um grafo G = (V, E) é uma maneira de colorir cada nó em V com uma de k cores diferentes, de modo que não haja dois nós adjacentes em V da mesma cor.
- A **coloração do vértice k** de um gráfico G = (V, E) é uma função

$$f : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$$

de tal modo que

$$\forall u \in V.\ \forall v \in V.\ (\{u, v\} \in E \to f(u) \neq f(v))$$

Embora esta seja a definição formal de uma coloração do vértice k, você raramente a vê usada em provas. É mais comum falar apenas sobre a atribuição de cores aos nós. No entanto, esta definição é muito útil se você quiser escrever programas para raciocinar sobre as cores dos grafos!

Coloração de Grafos

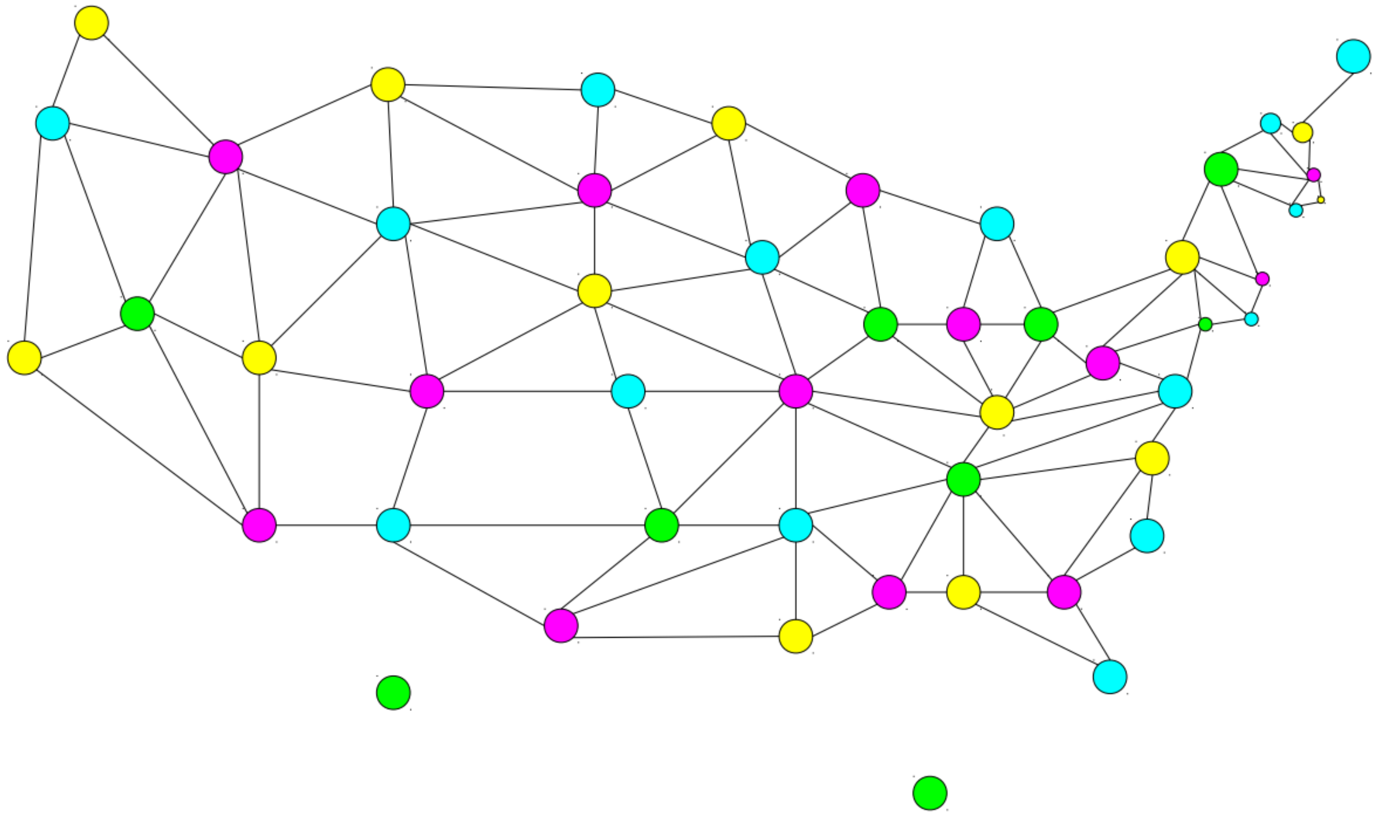
- Intuitivamente, uma coloração do vértice k de um grafo G = (V, E) é uma maneira de colorir cada nó em V com uma de k cores diferentes, de modo que não haja dois nós adjacentes em V da mesma cor.
- A **coloração do vértice k** de um gráfico G = (V, E) é uma função

  $$f : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$$

  de tal modo que

  $$\forall u \in V.\ \forall v \in V.\ (\{u, v\} \in E \to f(u) \neq f(v))$$
- Um grafo G pode ser **colorido por k** se existir uma coloração do vértice k de G.
- O menor k para o qual G é k-colorível é seu **número cromático**.
  - O número cromático de um gráfico G é denotado **x(G)**, do grego χρώμα, que significa "cor".

Coloração de Grafos



Teorema (Teorema das Quatro Cores): Todo grafo planar é quadricolor.

- **Década de 1850:** Apresentada conjectura de quatro cores.
- **1879:** Kempe prova o Teorema das Quatro Cores.
- **1890:** Heawood encontra uma falha na prova de Kempe.
- **1976:** Appel e Haken projetam um programa de computador que prova o Teorema das Quatro Cores. O programa verificou 1.936 casos específicos que são "contra-exemplos mínimos"; qualquer contra-exemplo ao teorema deve conter um dos 1.936 casos específicos.
- **Década de 1980:** Dúvidas são levantadas sobre a validade da prova devido a erros no software.
- **1989:** Appel e Haken revisam sua prova e mostram que ela está realmente correta. Eles publicam um livro incluindo um apêndice de 400 páginas com todos os casos a serem verificados.
- **1996:** Roberts, Sanders, Seymour e Thomas reduzem o número de casos a verificar para 633.
- **2005:** Werner e Gonthier repetem a prova usando um established automatic theorem prover (Coq), melhorando a confiança na verdade do teorema.

Pergunta filosófica: Um teorema é verdadeiro se nenhum ser humano jamais leu a prova?