Relações Binárias

Roteiro

- **Terminar da última vez**
  - Parte 3 de nossa prova de que ~ é uma relação de equivalência
- **Propriedades das relações de equivalência**
  - O que há de tão especial nessas três regras?
- **Ordens Estritas**
  - Um tipo diferente de estrutura matemática
- **Diagramas de Hasse**
  - Como visualizar rankings

Terminar da Última Vez

$$\forall a \in A.\ aRa$$

$$\forall a \in A.\ \forall b \in A.\ (aRb \to bRa)$$

$$\forall a \in A.\ \forall b \in A.\ \forall c \in A. (aRb \land bRc \to aRc)$$

$a \sim b$ se $a + b$ for par

- **Lema 1:** A relação binária $\sim$ é reflexiva.
- **Prova:** Considere um $a \in \mathbb{Z}$ arbitrário. Precisamos provar que $a \sim a$. A partir da definição da relação $\sim$, isso significa que precisamos provar que $a + a$ é par.

  Para ver isso, observe que $a + a = 2a$, então a soma $a + a$ pode ser escrita como $2k$ para algum inteiro k (nomeadamente, a), então $a + a$ é par. Portanto, $a \sim a$ é válido, conforme necessário.■

a ~ b se a + b for par

- **Lema 2:** A relação binária ~ é simétrica.
- **Prova:** Considere quaisquer inteiros a e b onde a ~ b. Precisamos mostrar que b ~ a.

  Como a ~ b, sabemos que a + b é par. Como a + b = b + a, isso significa que b + a é par. Como b + a é par, sabemos que b ~ a, conforme necessário.■

a ~ b se a + b for par

- **Lema 3:** A relação binária ~ é transitiva.
- **Prova:**

Qual é a definição formal de transitividade?

$$\forall a \in \mathbb{Z}.\ \forall b \in \mathbb{Z}.\ \forall c \in \mathbb{Z}.\ (a \sim b \land b \sim c \to a \sim c)$$

Sendo assim, escolhemos integers arbitrários a, b e c
onde a ~ b e b ~ c, então provamos que a ~ c.

$a \sim b$ se $a + b$ for par

- **Lema 3:** A relação binária ~ é transitiva.
- Prova: Considere inteiros arbitrários a, b e c, onde $a \sim b$ e $b \sim c$. Precisamos provar que $a \sim c$, o que significa que precisamos mostrar que $a + c$ é par.

  Como $a \sim b$ e $b \sim c$, sabemos que $a + b$ e $b + c$ são pares. Isso significa que existem inteiros k e m onde $a + b = 2k$ e $b + c = 2m$. Note que

  $$(a+b) + (b+c) = 2k + 2m.$$

  Reorganizando, vemos que

  $$a+c + 2b = 2k + 2m,$$

  Então

  $$a+c = 2k + 2m - 2b = 2(k+m-b).$$

  Portanto, há um inteiro r, nomeadamente, $k + m - b$, tal que $a + c = 2r$. Assim, $a + c$ é par, então $a \sim c$, conforme necessário. ■

Lógica de Primeira Ordem e Provas

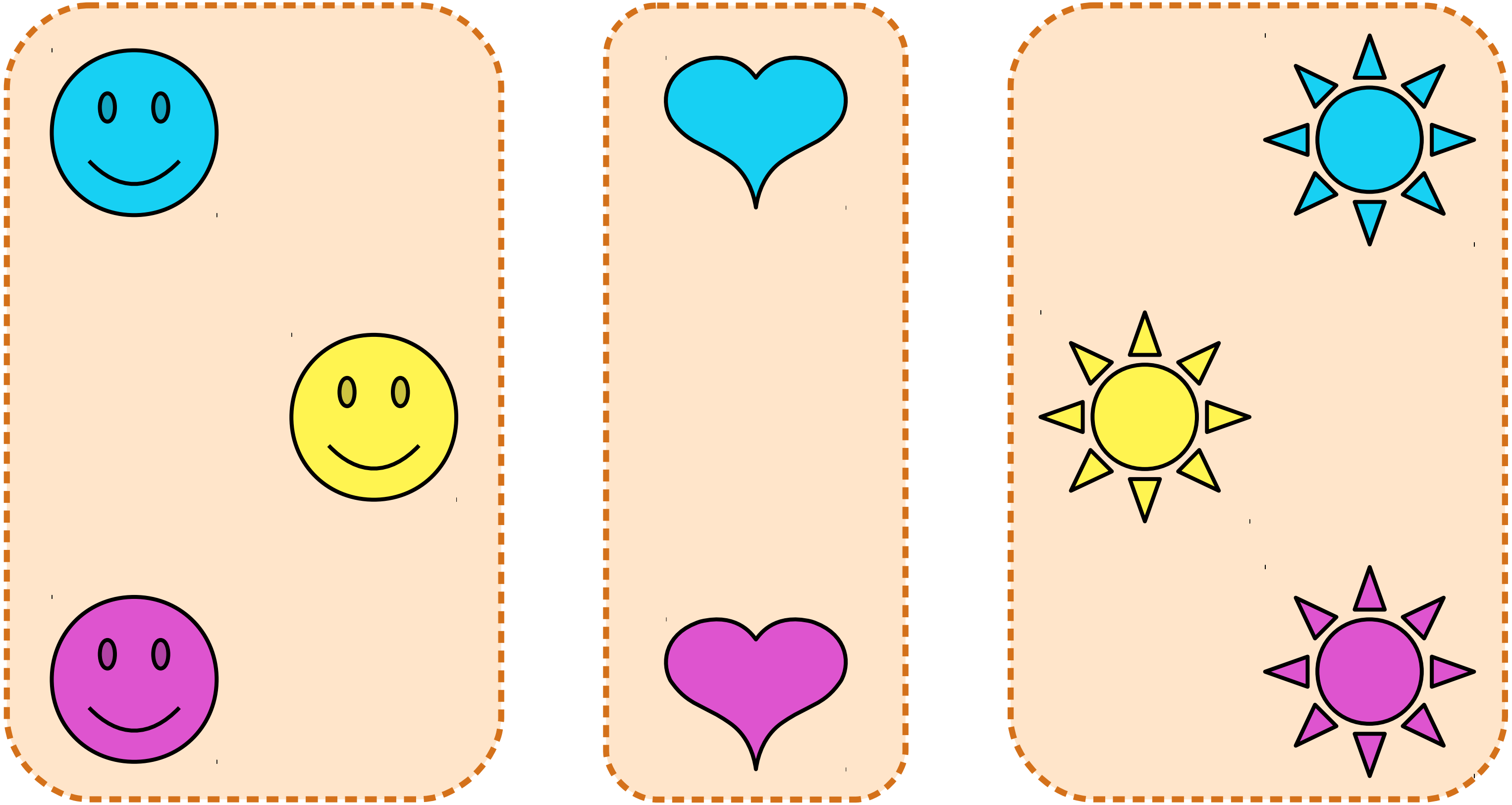
- A lógica de primeira ordem é uma excelente ferramenta para dar definições formais aos termos-chave.
- Embora a lógica de primeira ordem oriente a estrutura das provas, é extremamente raro ver a lógica de primeira ordem em provas escritas.
- Siga o exemplo dessas provas:
  - Use as definições da lógica de primeira ordem para determinar o que assumir e o que provar.
  - Escreva a prova em português simples, usando as convenções que aprendemos em apresentações anteriores.

$$\forall a \in A.\ aRa$$

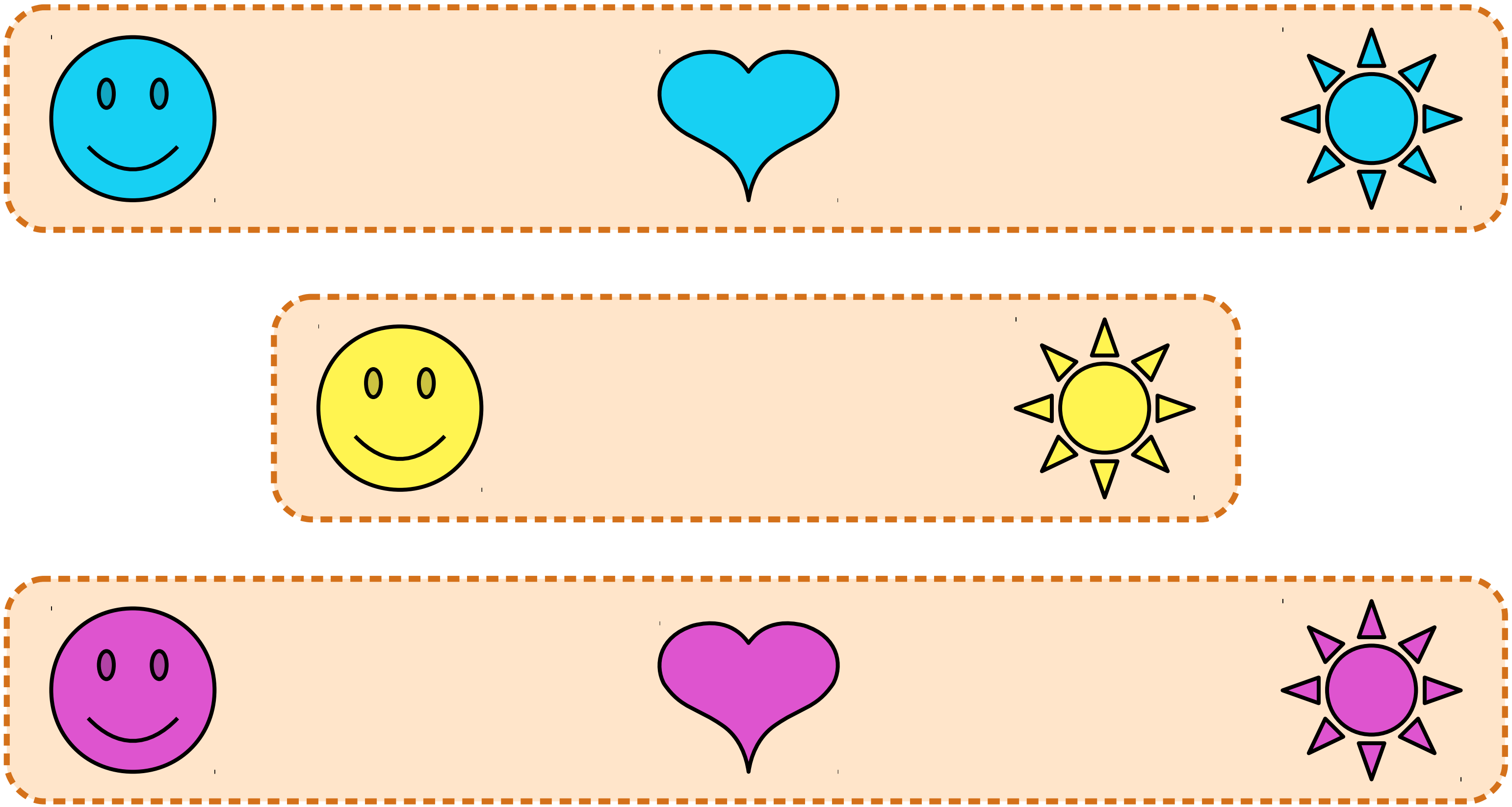
$$\forall a \in A.\ \forall b \in A.\ (aRb \to bRa)$$

$$\forall a \in A.\ \forall b \in A.\ \forall c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$$

Propriedades das Relações de Equivalência



xRy se x e y tiverem a mesma forma



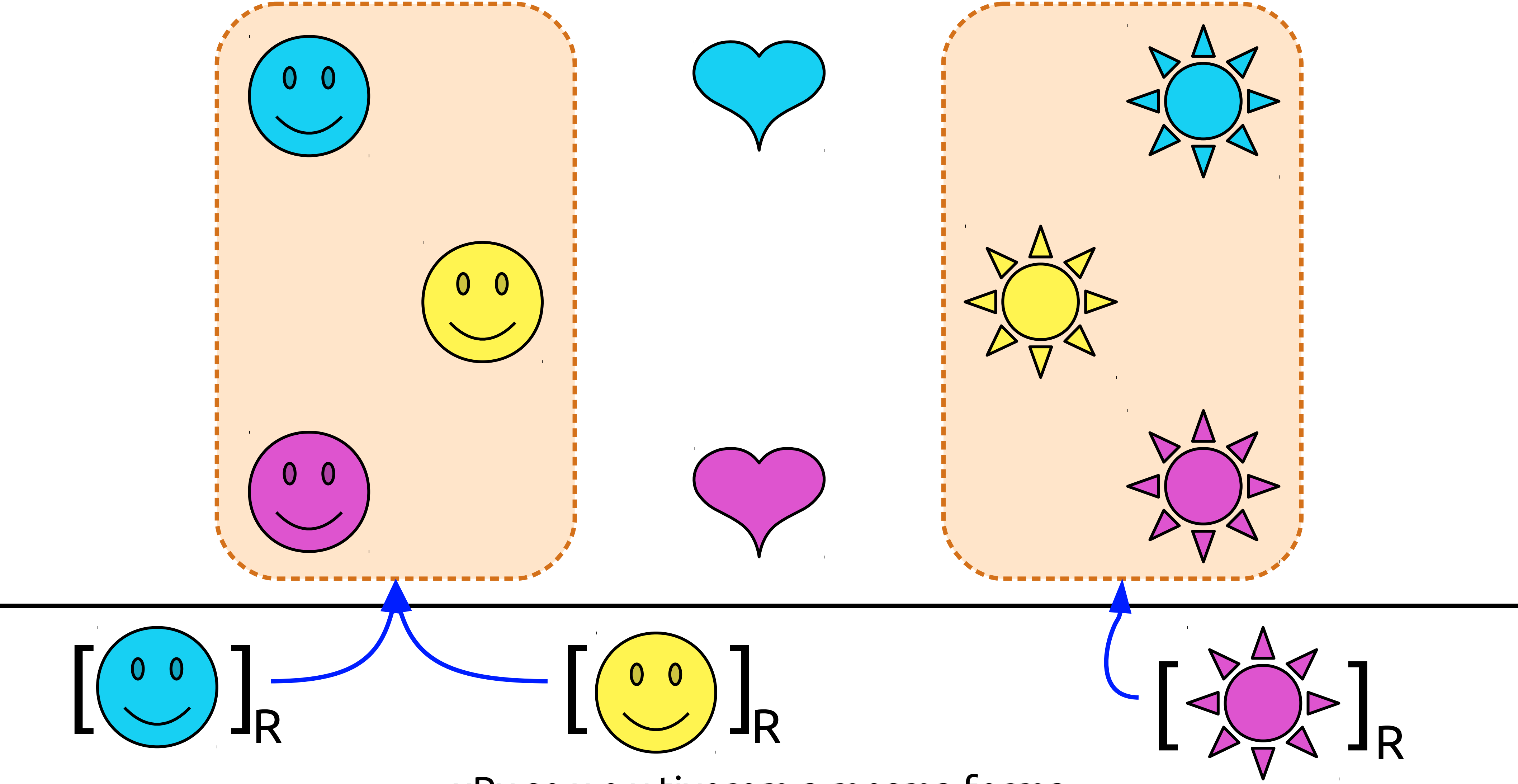
xTy se x e y tiverem a mesma cor

Classes de Equivalência

- Dada uma relação de equivalência R sobre um conjunto A, para qualquer $x \in A$, a **classe de equivalência de x** é o conjunto

  $$[x]_R = \{ y \in A \mid xRy \}$$

- Intuitivamente, o conjunto $[x]_R$ contém todos os elementos de A que estão relacionados a x pela relação R.



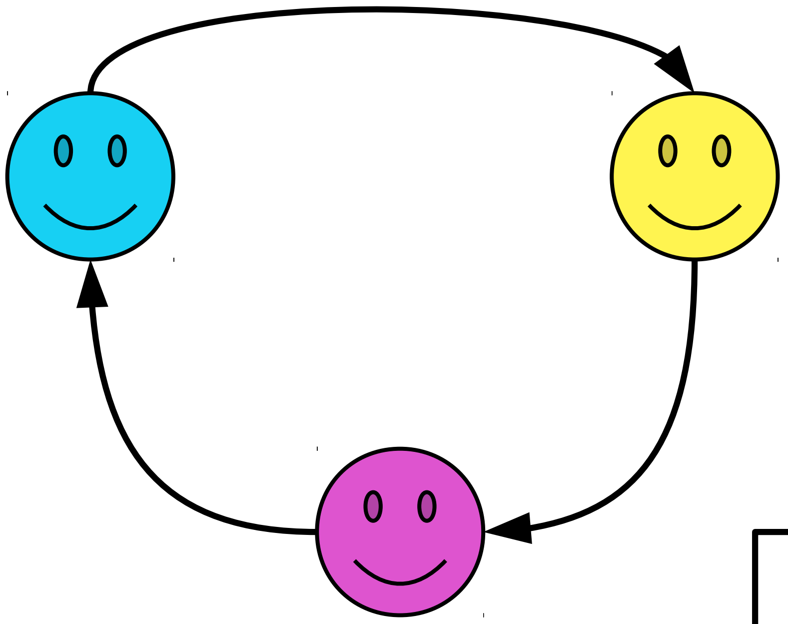
xRy se x e y tiverem a mesma forma

O Teorema Fundamental das Relações de Equivalência: Seja R uma relação de equivalência sobre um conjunto A. Então cada elemento $a \in A$ pertence a exatamente uma classe de equivalência de R.

Como Chegamos Aqui?

- Descobrimos relações de equivalência pensando nas **partições** de um conjunto de elementos.
- Vimos que, se tivéssemos uma relação binária que nos informa se dois elementos estão no mesmo grupo, ela deve ser reflexiva, simétrica e transitiva.
- O **Teorema Fundamental das Relações de Equivalência** diz que, em certo sentido, essas regras capturam com precisão o que significa ser uma partição.
- **Pergunta:** O que há de tão especial nessas três regras?

$$\forall a \in A.\ \forall b \in A.\ \forall c \in A.\ (aRb \land bRc \rightarrow cRa)$$



Uma relação binária com essa propriedade é chamada de **cíclica**.

$$\forall a \in A.\ \forall b \in A.\ \forall c \in A.\ (aRb \land bRc \rightarrow cRa)$$

Teorema: Uma relação binária R sobre um conjunto A é uma relação de equivalência se e somente se for reflexiva e cíclica.

Lema 1: Se R é uma relação de equivalência sobre um conjunto A, então R é reflexivo e cíclico.

Lema 2: Se R é uma relação binária sobre um conjunto A que é reflexivo e cíclico, então R é uma relação de equivalência.

Lema 1: Se R é uma relação de equivalência sobre um conjunto A, então R é reflexivo e cíclico.

O que estamos presumindo	O que precisamos mostrar

• R é uma relação de equivalência.
  • R é reflexivo.
  • R é simétrico.
  • R é transitivo.
	• R é reflexivo.
	• R é cíclico.

Lema 1: Se R é uma relação de equivalência sobre um conjunto A, então R é reflexivo e cíclico.

O que estamos presumindo	O que precisamos mostrar

• R é uma relação de equivalência.
  • R é reflexivo.
  • R é simétrico.
  • R é transitivo.
	R é reflexivo.
	R é cíclico.
	  • Se aRb e bRc, então cRa.

Lema 1: Se R é uma relação de equivalência sobre um conjunto A, então R é reflexivo e cíclico.

O que estamos presumindo

R é uma relação de equivalência.

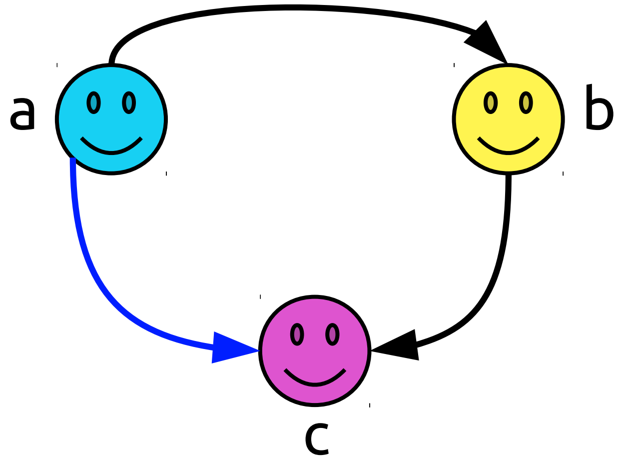
R é reflexivo.

R é simétrico.

- R é transitivo.

O que precisamos mostrar

- Se aRb e bRc, então cRa.



Lema 1: Se R é uma relação de equivalência sobre um conjunto A, então R é reflexivo e cíclico.

O que estamos presumindo

R é uma relação de equivalência.

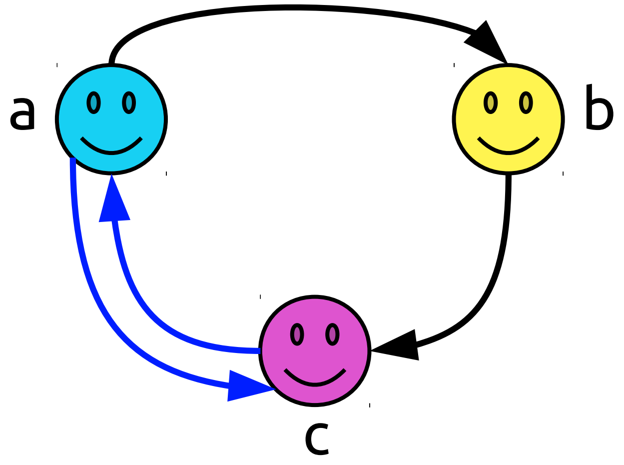
R é reflexivo.

- R é simétrico.

R é transitivo.

O que precisamos mostrar

- Se aRb e bRc, então cRa.



Lema 1: Se R é uma relação de equivalência sobre um conjunto A, então R é reflexivo e cíclico.

Prova: Seja R uma relação de equivalência arbitrária sobre algum conjunto A. Precisamos provar que R é reflexivo e cíclico.

Como R é uma relação de equivalência, sabemos que R é reflexivo, simétrico e transitivo. Conseqüentemente, já sabemos que R é reflexivo, então só precisamos mostrar que R é cíclico.

Para provar que R é cíclico, considere qualquer a, b, c $\in$ A arbitrário onde aRb e bRc. Precisamos provar que o cRa é válido. Como R é transitivo, de aRb e bRc vemos que aRc. Então, como R é simétrico, de aRc vemos que cRa, que é o que precisávamos provar.■

Lema 1: Se R é uma relação de equivalência sobre um conjunto A, então R é reflexivo e cíclico.

Prova: Seja R uma relação de equivalência arbitrária sobre algum conjunto A. Precisamos provar que R é reflexivo e cíclico.

Como R é uma relação de equivalência, sabemos que R é reflexivo, simétrico e tra
sabemos que R é reflexi
é cíclico.

Observe como as primeiras frases desta prova espelham a estrutura do que precisa ser provado. Estamos apenas seguindo os modelos das primeiras apresentações!

Para provar que R é cícli
arbitrário onde aRb e bRc. Precisamos provar que o cRa é válido. Como R é transitivo, de aRb e bRc vemos que aRc. Então, como R é simétrico, de aRc vemos que cRa, que é o que precisávamos provar. ■

Lema 1: Se R é uma relação de equivalência sobre um conjunto A, então R é reflexivo e cíclico.

Pro

algu … lico.

Con

refl

sab … e R

é cí

Observe como essa configuração reflete a definição de ciclicidade de primeira ordem:

$$\forall a \in A.\ \forall b \in A.\ \forall c \in A.\ (aRb \land bRc \rightarrow cRa)$$

Ao escrever provas sobre termos com definições de primeira ordem, é fundamental voltar a essas definições!

Para provar que R é cíclico, considere qualquer a, b, c ∈ A arbitrário onde aRb e bRc. Precisamos provar que o cRa é válido. Como R é transitivo, de aRb e bRc vemos que aRc. Então, como R é simétrico, de aRc vemos que cRa, que é o que precisávamos provar. ■

Lema 1 [partially covered] onjunto A, entã [partially covered]

Embora essa prova seja profundamente informada pelas definições de primeira ordem, observe que não há notação lógica de primeira ordem em qualquer lugar da prova.
Isso é normal - na verdade é muito raro ver a lógica de primeira ordem em provas escritas.

Prova: S [partially covered] re algum c [partially covered] e cíclico.

Como R é uma relação de equivalência, sabemos que R é reflexivo, simétrico e transitivo. Conseqüentemente, já sabemos que R é reflexivo, então só precisamos mostrar que R é cíclico.

Para provar que R é cíclico, considere qualquer $a, b, c \in A$ arbitrário onde aRb e bRc. Precisamos provar que o cRa é válido. Como R é transitivo, de aRb e bRc vemos que aRc. Então, como R é simétrico, de aRc vemos que cRa, que é o que precisávamos provar. ■

Lema 1: Se R é uma relação de equivalência sobre um conjunto A, então R é reflexivo e cíclico.

Prova: Seja R uma relação de equivalência arbitrária sobre algum conjunto A. Precisamos provar que R é reflexivo e cíclico.

Como R é uma relação de equivalência, sabemos que R é reflexivo, simétrico e transitivo. Conseqüentemente, já sabemos que R é reflexivo, então só precisamos mostrar que R é cíclico.

Para provar que R é cíclico, considere qualquer $a, b, c \in A$ arbitrário onde aRb e bRc. Precisamos provar que o cRa é válido. Como R é transitivo, de aRb e bRc vemos que aRc. Então, como R é simétrico, de aRc vemos que cRa, que é o que precisávamos provar. $\blacksquare$

Lema 2: Se R é uma relação binária sobre um conjunto A que é reflexivo e cíclico, então R é uma relação de equivalência.

O que estamos presumindo	O que precisamos mostrar

• R é reflexivo.
• R é cíclico.
	• R é uma relação de equivalência.
	  • R é reflexivo.
	  • R é simétrico.
	  • R é transitivo.

Lema 2: Se R é uma relação binária sobre um conjunto A que é reflexivo e cíclico, então R é uma relação de equivalência.

O que estamos presumindo	O que precisamos mostrar
• R é reflexivo. • R é cíclico.	R é uma relação de equivalência. R é reflexivo. • R é simétrico. R é transitivo.

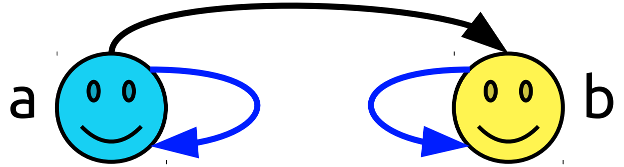
Lema 2: Se R é uma relação binária sobre um conjunto A que é reflexivo e cíclico, então R é uma relação de equivalência.

O que estamos presumindo

- R é reflexivo.
  - $\forall x \in A.\ xRx$
- R é cíclico.
  - $xRy \land yRz \to zRx$

O que precisamos mostrar

- R é simétrico.
  - Se aRb, então bRa.



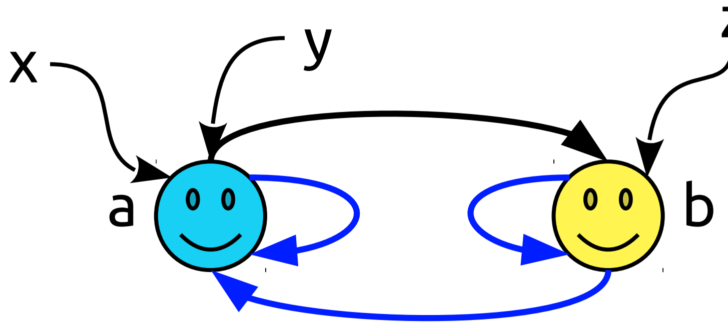
Lema 2: Se R é uma relação binária sobre um conjunto A que é reflexivo e cíclico, então R é uma relação de equivalência.

O que estamos presumindo

- R é reflexivo.
  - $\forall x \in A.\ xRx$
- R é cíclico.
  - $xRy \land yRz \to zRx$

O que precisamos mostrar

- R é simétrico.
  - Se aRb, então bRa.



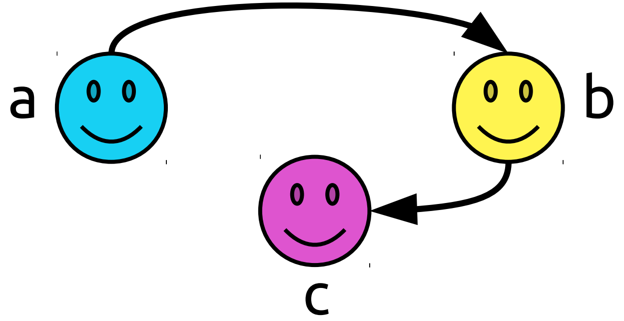
Lema 2: Se R é uma relação binária sobre um conjunto A que é reflexivo e cíclico, então R é uma relação de equivalência.

O que estamos presumindo

- R é reflexivo.
  - $\forall x \in A.\ xRx$
- R é cíclico.
  - $xRy \land yRz \to zRx$

O que precisamos mostrar

- R é transitivo.
  - Se aRb, então bRa então aRc.



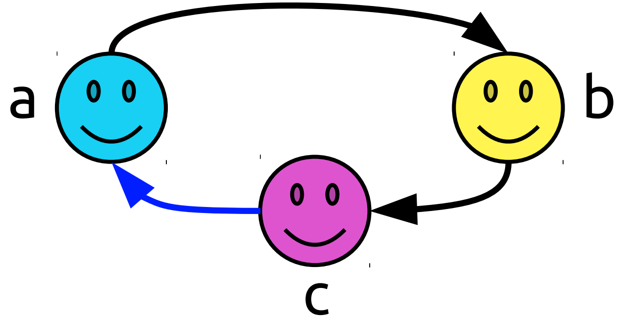
Lema 2: Se R é uma relação binária sobre um conjunto A que é reflexivo e cíclico, então R é uma relação de equivalência.

O que estamos presumindo

- R é reflexivo.
  - $\forall x \in A.\ xRx$
- R é cíclico.
  - $xRy \land yRz \rightarrow zRx$

O que precisamos mostrar

- R é transitivo.
  - Se aRb, então bRa então aRc.



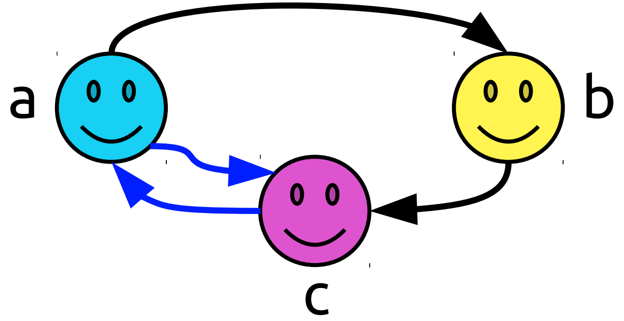
Lema 2: Se R é uma relação binária sobre um conjunto A que é reflexivo e cíclico, então R é uma relação de equivalência.

O que estamos presumindo

- R é reflexivo.
  - $\forall x \in A.\ xRx$
- R é cíclico.
  - $xRy \land yRz \to zRx$
- R é simétrico.
  - $xRy \to yRx$

O que precisamos mostrar

- R é transitivo.
  - Se aRb, então bRa então aRc.



Lema 2: Se R é uma relação binária sobre um conjunto A que é reflexivo e cíclico, então R é uma relação de equivalência.

Prova: Seja R uma relação binária arbitrária sobre um conjunto A que é cíclico e reflexivo. Precisamos provar que R é uma relação de equivalência. Para fazer isso, precisamos mostrar que R é reflexivo, simétrico e transitivo. Como já sabemos por suposição que R é reflexivo, só precisamos mostrar que R é simétrico e transitivo.

Primeiro, vamos provar que R é simétrico. Para fazer isso, escolha qualquer a, b ∈ A arbitrário onde aRb é válido. Precisamos provar que bRa é verdade. Como R é reflexivo, sabemos que aRa é válido. Portanto, por ciclicidade, uma vez que aRa e aRb, aprendemos que bRa, conforme necessário.

A seguir, vamos provar que R é transitivo. Sejam a, b e c quaisquer elementos de A onde aRb e bRc. Precisamos provar que aRc. Como R é cíclico, de aRb e bRc vemos que cRa. Anteriormente, mostramos que R é simétrico. Portanto, a partir de cRa, vemos que aRc é verdadeiro, conforme necessário. ■

Lema … e
cíclic…

Prova …
cíclic… …ia.
Para … …ivo.
Como … …r
que R…

Observe como essa configuração reflete a definição de simetria de primeira ordem:

$$\forall a \in A.\ \forall b \in A.\ (aRb \to bRa)$$

Ao escrever provas sobre termos com definições de primeira ordem, é fundamental voltar a essas definições!

Primeiro, vamos provar que R é simétrico. Para fazer isso, escolha qualquer a, b ∈ A arbitrário onde aRb é válido. Precisamos provar que bRa é verdade. Como R é reflexivo, sabemos que aRa é válido. Portanto, por ciclicidade, uma vez que aRa e aRb, aprendemos que bRa, conforme necessário.

A seguir, vamos provar que R é transitivo. Sejam a, b e c quaisquer elementos de A onde aRb e bRc. Precisamos provar que aRc. Como R é cíclico, de aRb e bRc vemos que cRa. Anteriormente, mostramos que R é simétrico. Portanto, a partir de cRa, vemos que aRc é verdadeiro, conforme necessário. ■

Lema 2: Se R é uma relação binária sobre um conjunto A que é reflexivo e cíclico, então R é uma relação de equivalência.

Prova ... cíclico ... ia. Para ... tivo. Como ... ar que R ...

Observe como essa configuração reflete a definição de transitividade de primeira ordem:

$$\forall a \in A.\ \forall b \in A.\ \forall c \in A.\ (aRb \land bRc \to aRc)$$

Ao escrever provas sobre termos com definições de primeira ordem, é fundamental voltar a essas definições!

Prime ... uer a, b ∈ ... ade. Como R é reflexivo, sabemos que aRa é válido. Portanto, por ciclicidade, uma vez que aRa e aRb, aprendemos que bRa, conforme necessário.

A seguir, vamos provar que R é transitivo. Sejam a, b e c quaisquer elementos de A onde aRb e bRc. Precisamos provar que aRc. Como R é cíclico, de aRb e bRc vemos que cRa. Anteriormente, mostramos que R é simétrico. Portanto, a partir de cRa, vemos que aRc é verdadeiro, conforme necessário. ■

Lema 2: Se R é uma relação binária sobre um conjunto A que é reflexivo e cíclico, então R é uma relação de equivalência.

Prova: Seja R uma relação binária arbitrária sobre um conjunto A que é cíclico e reflexivo. Precisamos provar que R é uma relação de equivalência. Para fazer isso, precisamos mostrar que R é reflexivo, simétrico e transitivo. Como já sabemos por suposição que R é reflexivo, só precisamos mostrar que R é simétrico e transitivo.

Primeiro, vamos provar que R é simétrico. Para fazer isso, escolha qualquer $a, b \in A$ arbitrário onde aRb é válido. Precisamos provar que bRa é verdade. Como R é reflexivo, sabemos que aRa é válido. Portanto, por ciclicidade, uma vez que aRa e aRb, aprendemos que bRa, conforme necessário.

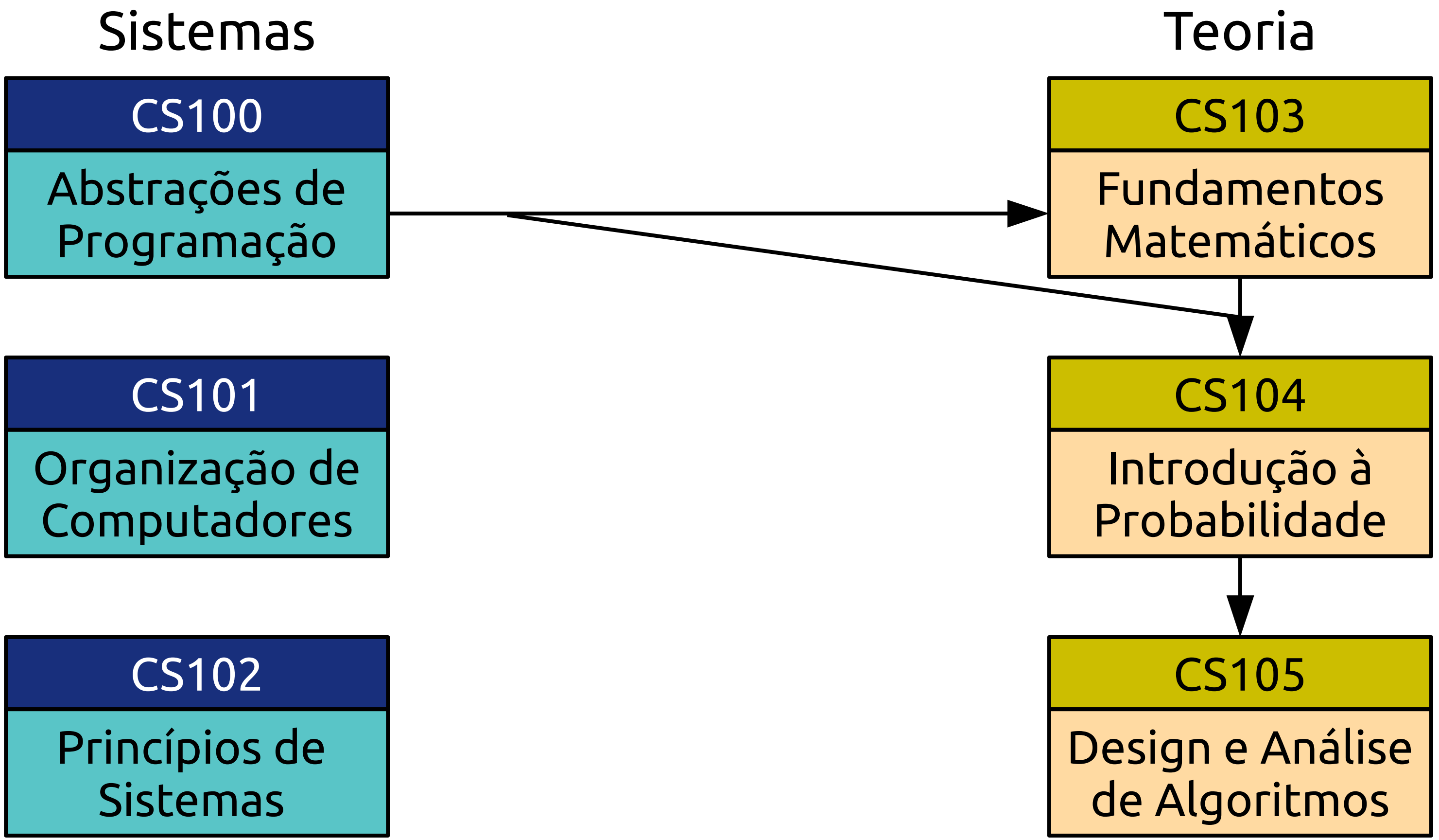
A seguir, vamos provar que R é transitivo. Sejam a, b e c quaisquer elementos de A onde aRb e bRc. Precisamos provar que aRc. Como R é cíclico, de aRb e bRc vemos que cRa. Anteriormente, mostramos que R é simétrico. Portanto, a partir de cRa, vemos que aRc é verdadeiro, conforme necessário. ■

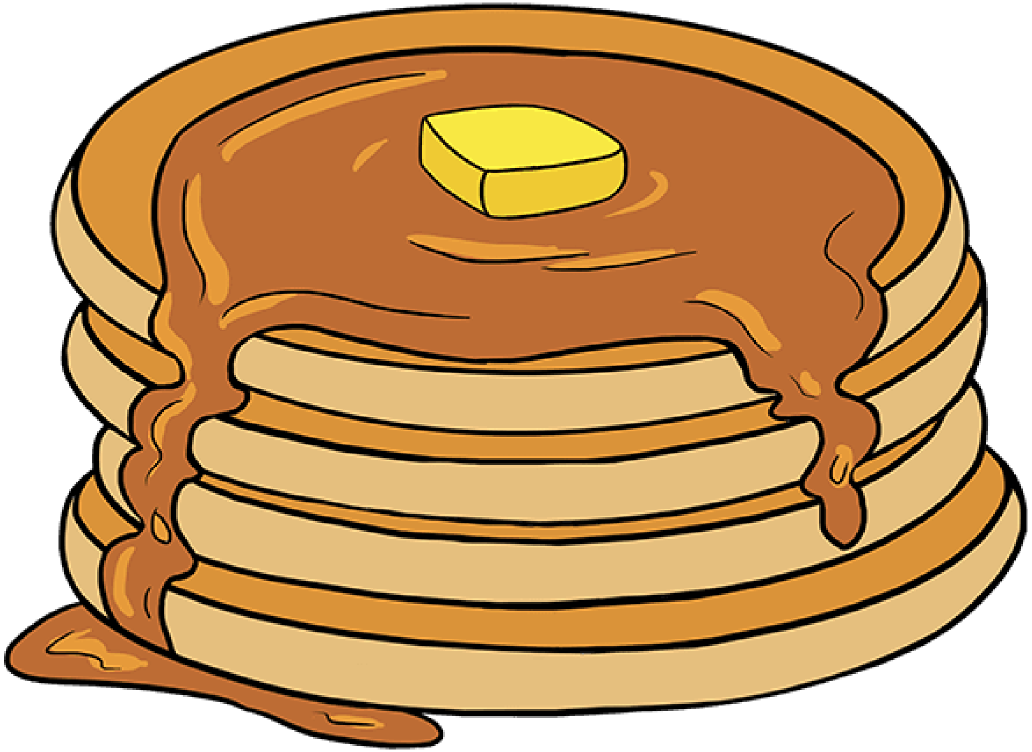
Refinando sua Escrita de Provas

- Ao escrever provas sobre termos com definições formais, você **deve** recorrer a essas definições.
  - Use a definição de primeira ordem para ver o que você presumirá e o que precisará provar.
- Ao escrever provas sobre termos com definições formais, você **não deve** incluir nenhuma lógica de primeira ordem em suas provas.
  - Embora você não use nenhuma notação de lógica de primeira ordem em suas provas, sua prova implicitamente chama de volta as definições de lógica de primeira ordem.

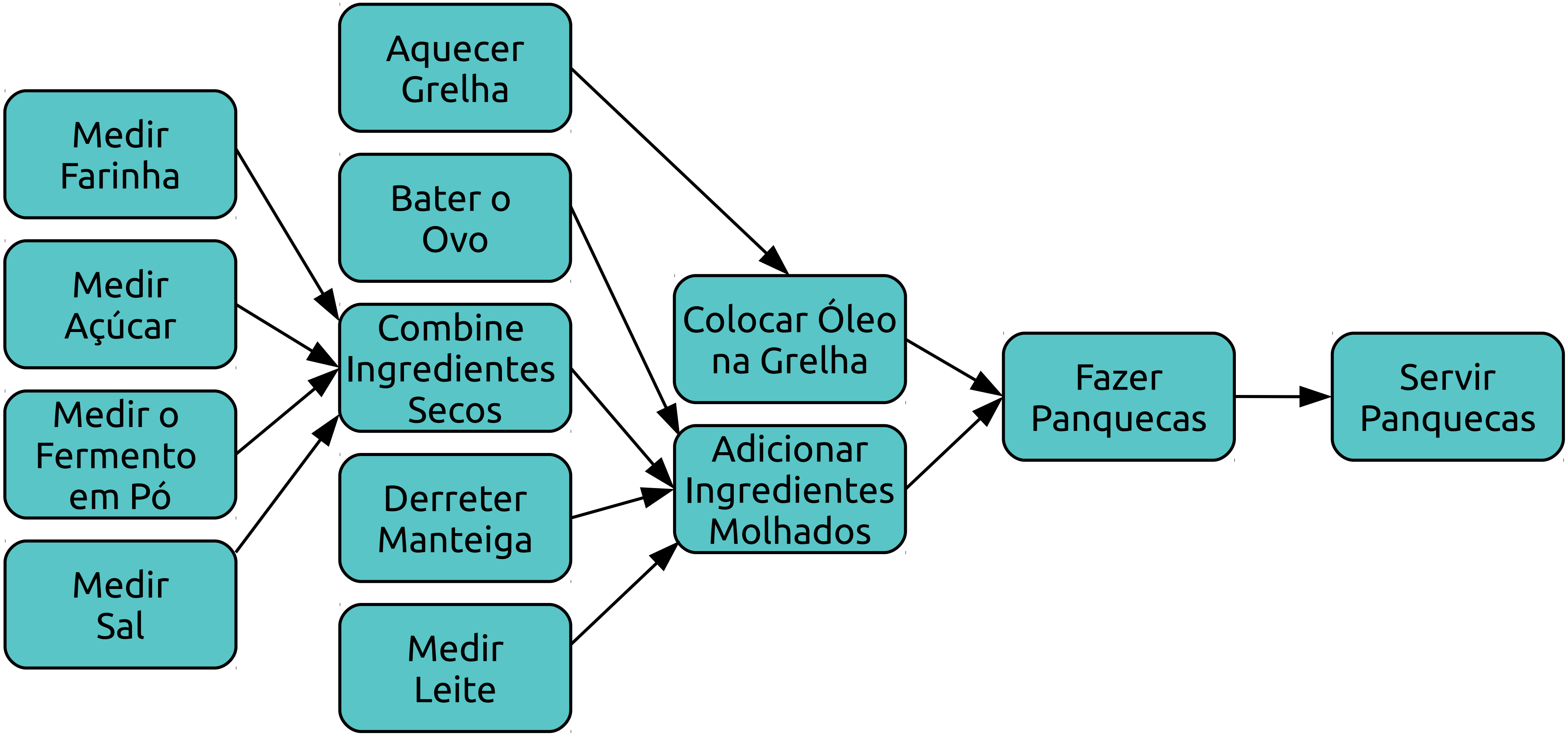
Estruturas de Pré-requisitos

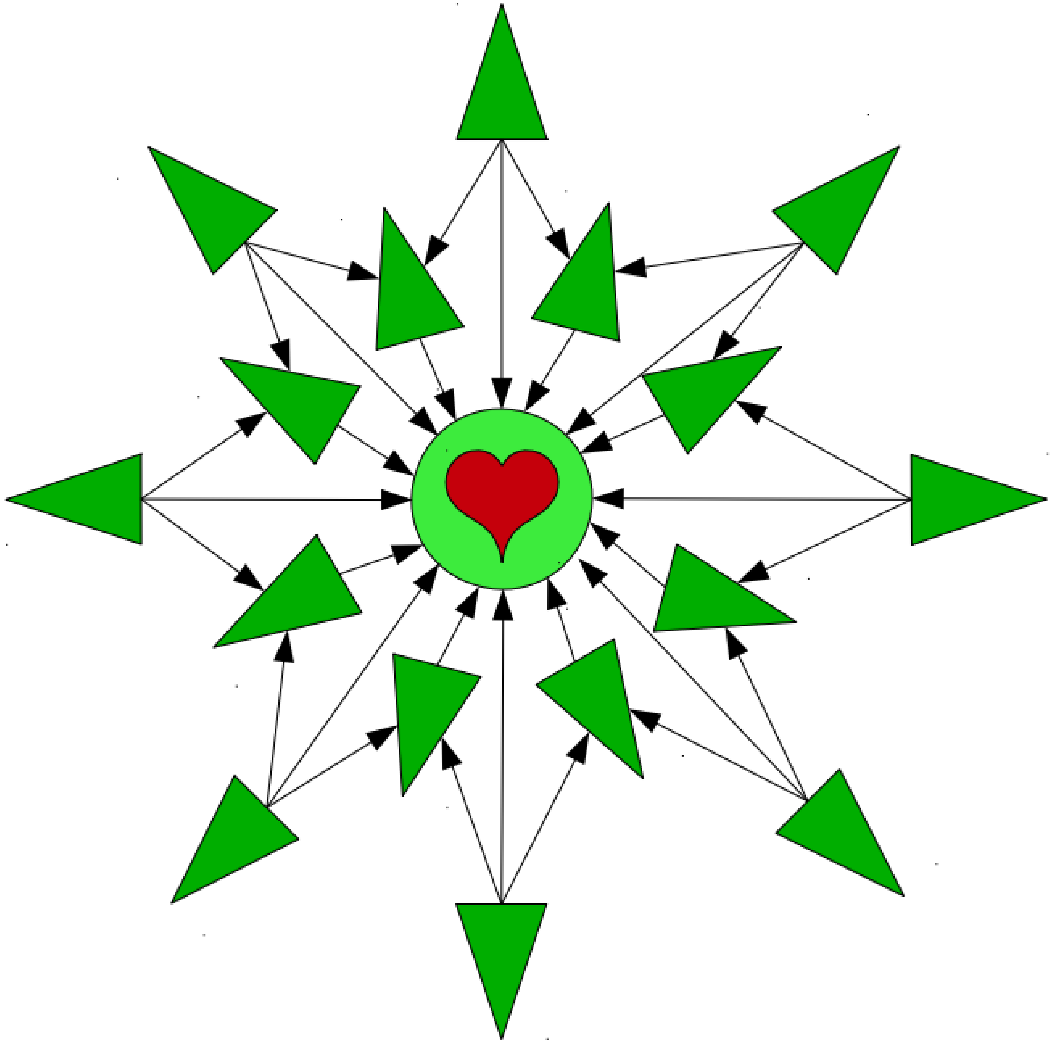
O Núcleo da Ciência da Computação





- **Panquecas**
- Ingredientes
  - 1 1/2 xícara de farinha de trigo
  - 3 1/2 colher de chá de fermento em pó
  - 1 colher de chá de sal
  - 1 colher de sopa de açúcar
  - 1 1/4 xícara de leite
  - 1 ovo
  - 3 colheres de sopa de manteiga derretida
- Direções
  1. Peneire os ingredientes secos juntos.
  2. Junte a manteiga, o ovo e o leite. Bata para formar a massa.
  3. Aqueça uma frigideira grande ou grelha em fogo médio-alto. Adicione um pouco de óleo.
  4. Faça panquecas, uma de cada vez, usando 1/4 de xícara de massa para cada uma. Eles estão prontos para virar quando o centro das panquecas começarem a borbulhar.


Aquecer Grelha
Medir Farinha
Bater o Ovo
Medir Açúcar
Combine Ingredientes Secos
Colocar Óleo na Grelha
Medir o Fermento em Pó
Fazer Panquecas
Servir Panquecas
Derreter Manteiga
Adicionar Ingredientes Molhados
Medir Sal
Medir Leite

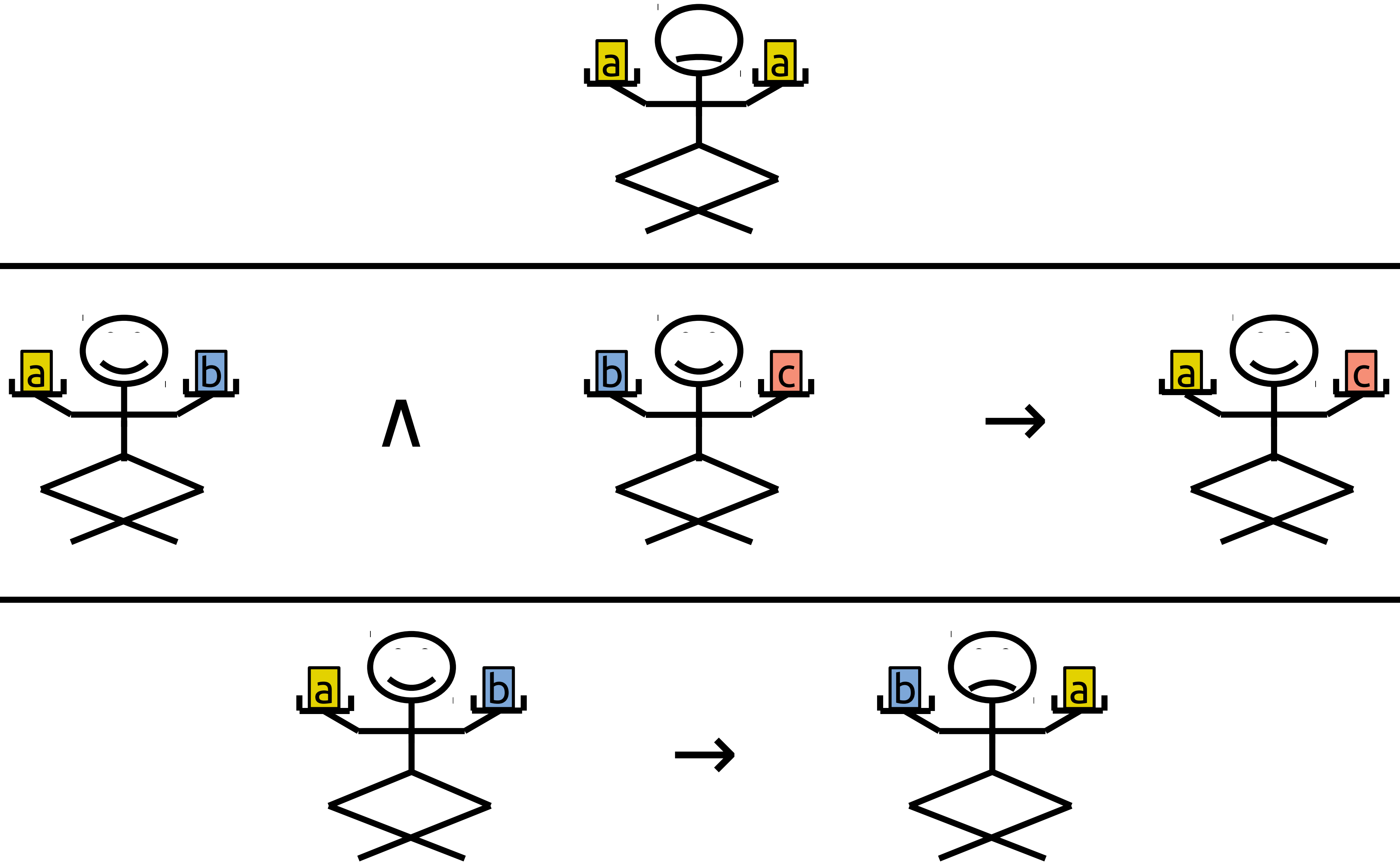



Relações e Pré-requisitos

- Vamos imaginar que temos uma estrutura de pré-requisito sem dependências circulares.
- Podemos pensar sobre uma relação binária R onde aRb significa

  “A deve acontecer antes de b”

- Que propriedades de R podemos deduzir apenas disso?


a a
a b ∧ b c → a c
a b → b a

$$\forall a \in A.\ a \not R a$$

$$\forall a \in A.\ \forall b \in A.\ \forall c \in A.\ (aRb \land bRc \rightarrow aRc)$$

$$\forall a \in A.\ \forall b \in A.\ (aRb \rightarrow b \not R a)$$

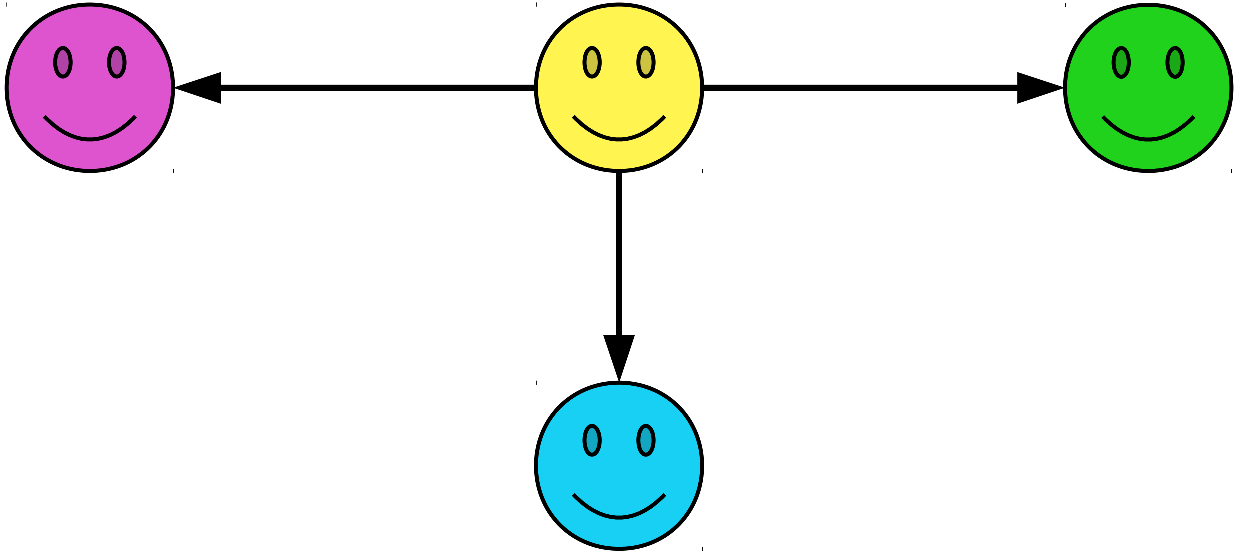
Irreflexividade

- Algumas relações nunca se mantêm de qualquer elemento para si mesmo.
- Como exemplo, $x \not< x$ para qualquer x.
- Relações desse tipo são chamadas de **irreflexivas**.
- Falando formalmente, uma relação binária R sobre um conjunto A é irreflexiva se a seguinte declaração de lógica de primeira ordem é verdadeira sobre R:

$$\forall a \in A.\ a \not R a$$

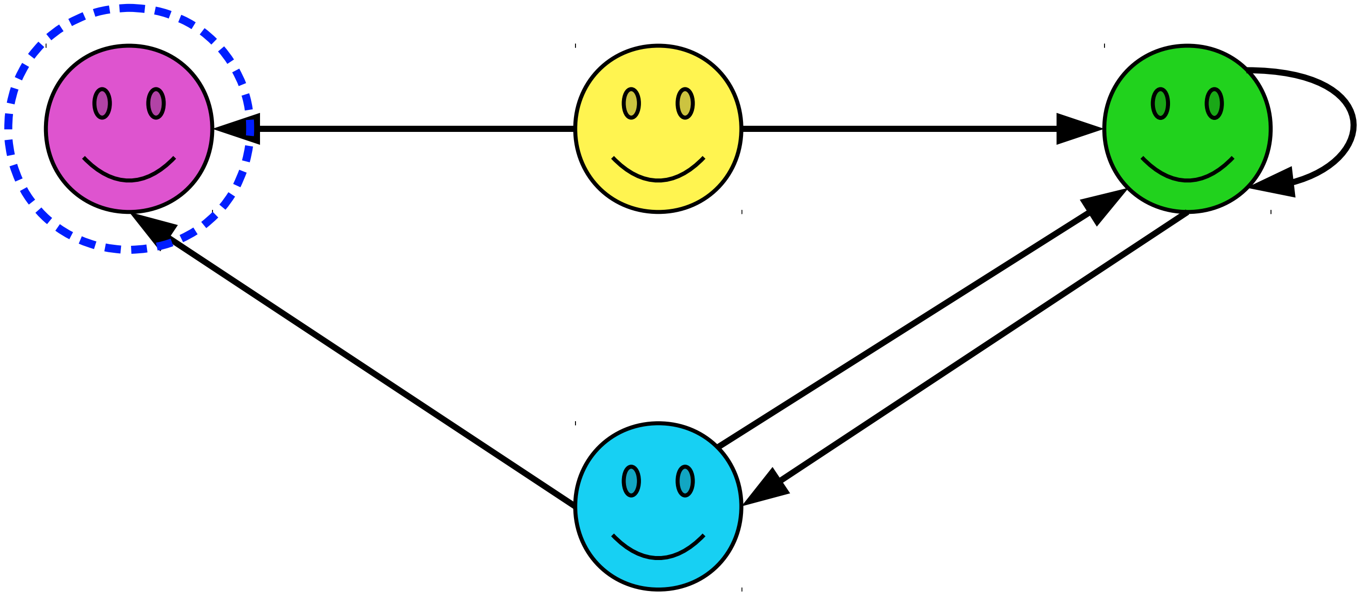
("Nenhum elemento está relacionado a si mesmo.")

Irreflexividade Visualizada



$$\forall a \in A.\ a \not{R} a$$

("Nenhum elemento está relacionado a si mesmo.")



Essa relação é reflexiva?

$$\forall a \in A.\ aRa$$

("Cada elemento está relacionado consigo mesmo.")

Reflexividade e Irreflexividade

- Reflexividade e irreflexividade não são opostas!
- Aqui está a definição de reflexividade:

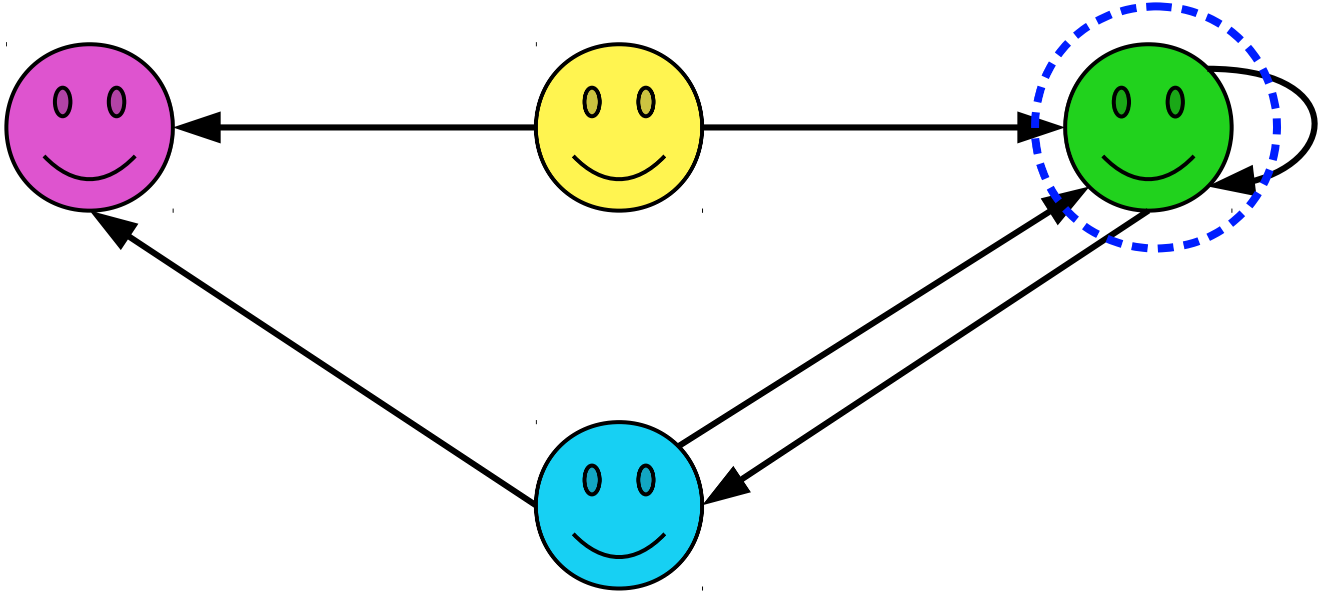
$$\forall a \in A.\ aRa$$

- Qual é a negação da afirmação acima?

$$\boldsymbol{\exists a \in A.\ a \not R a}$$

- Qual é a definição de irreflexividade?

$$\boldsymbol{\forall a \in A.\ a \not R a}$$



Essa relação é irreflexiva?

$$\forall a \in A.\ a \not\mathrel{R} a$$

("Nenhum elemento está relacionado a si mesmo.")

$$\forall a \in A.\ a \cancel{R} a$$

Transitividade

$$\forall a \in A.\ \forall b \in A.\ (aRb \rightarrow b \cancel{R} a)$$

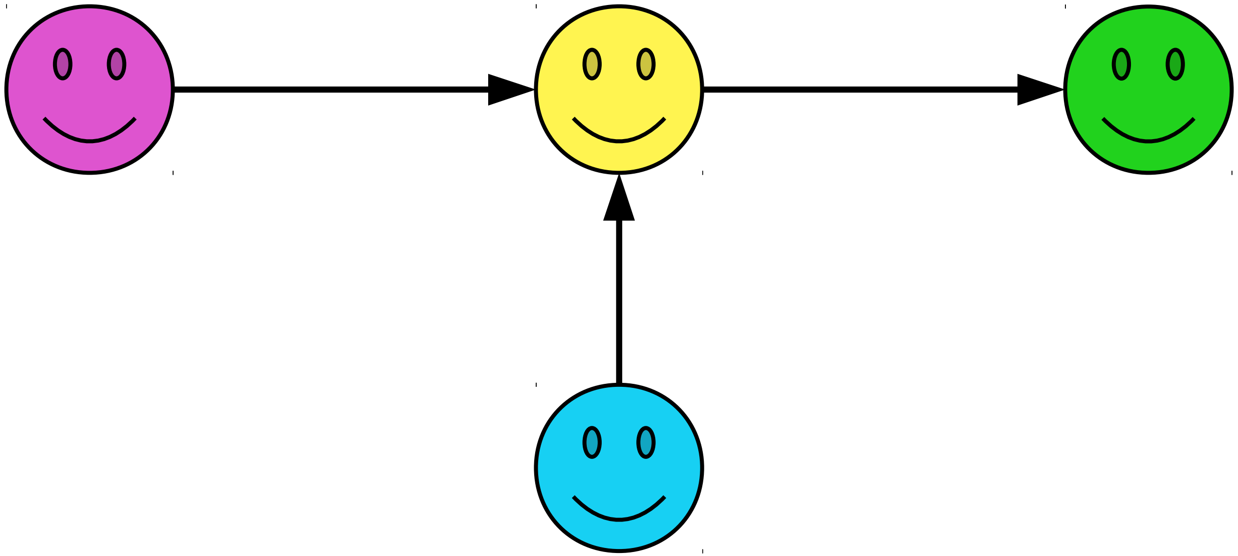
Assimetria

- Em algumas relações, a ordem relativa dos objetos nunca pode ser revertida.
- Por exemplo, se $x < y$, então $y \not< x$.
- Essas relações são chamadas de **assimétricas**.
- Formalmente: uma relação binária R sobre um conjunto A é chamada assimétrica se a seguinte declaração lógica de primeira ordem for verdadeira sobre R:

$$\forall a \in A. \forall b \in A. (aRb \rightarrow b \not R a)$$

("Se a se relaciona com b, então b não se relaciona com a.")

Assimetria Visualizada



$\forall a \in A. \forall b \in A. (aRb \rightarrow b\not{R}a)$

("Se a se relaciona com b, então b não se relaciona com a.")

Pergunta a ponderar: A simetria e a assimetria são opostas uma da outra?

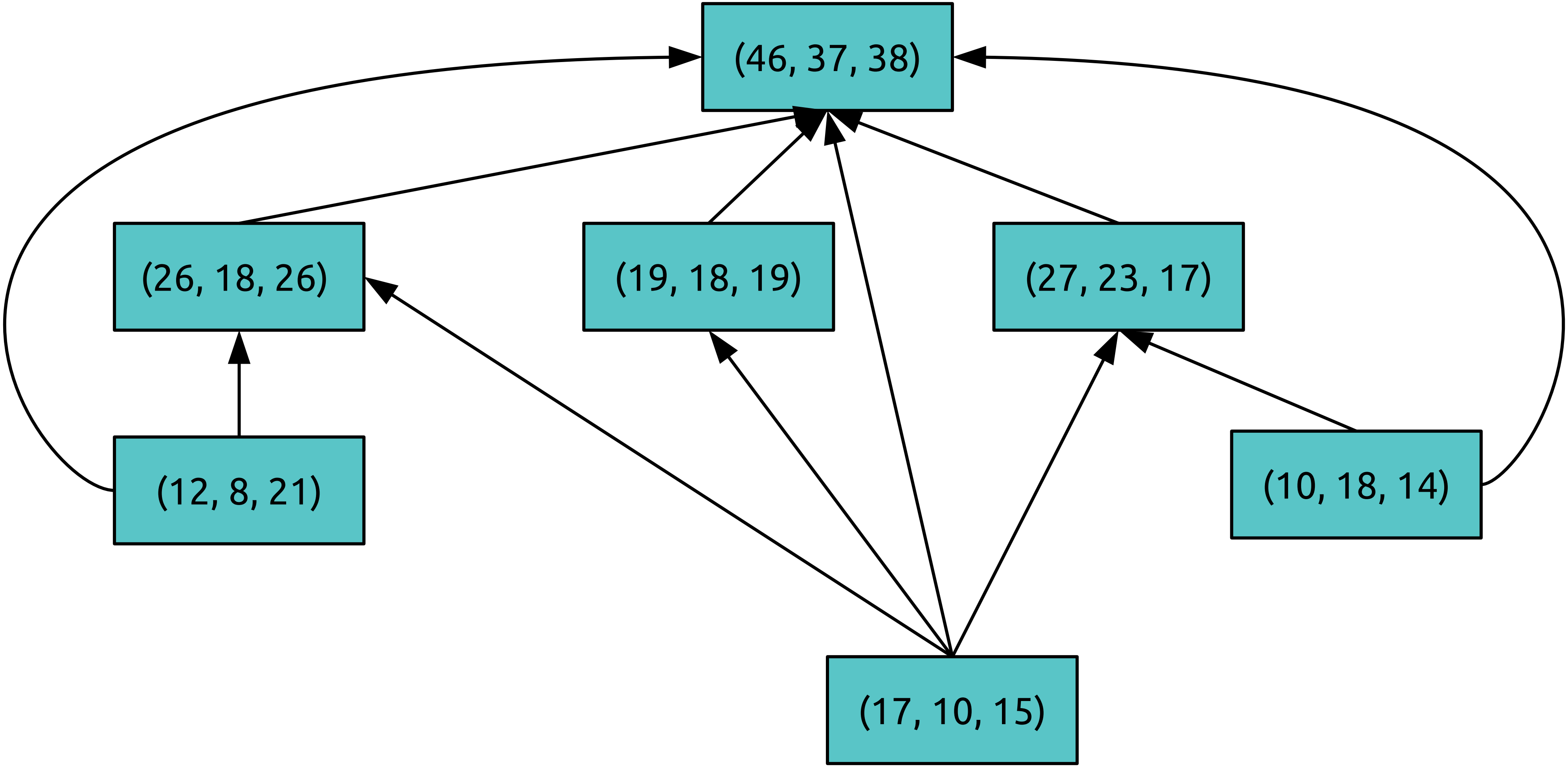
Ordens Estritas

- Uma **ordem estrita** é uma relação irreflexiva, assimétrica e transitiva.
- Alguns Exemplos:
  - $x \nless y$.
  - a pode correr mais rápido do que b.
  - $A \subsetneq B$ (ou seja, $A \subseteq B$ e $A \neq B$).
- As ordens estritas são úteis para representar estruturas de pré-requisito e têm aplicações na teoria da complexidade (noções de medição de dureza relativa) e algoritmos (pesquisa e ordenação).

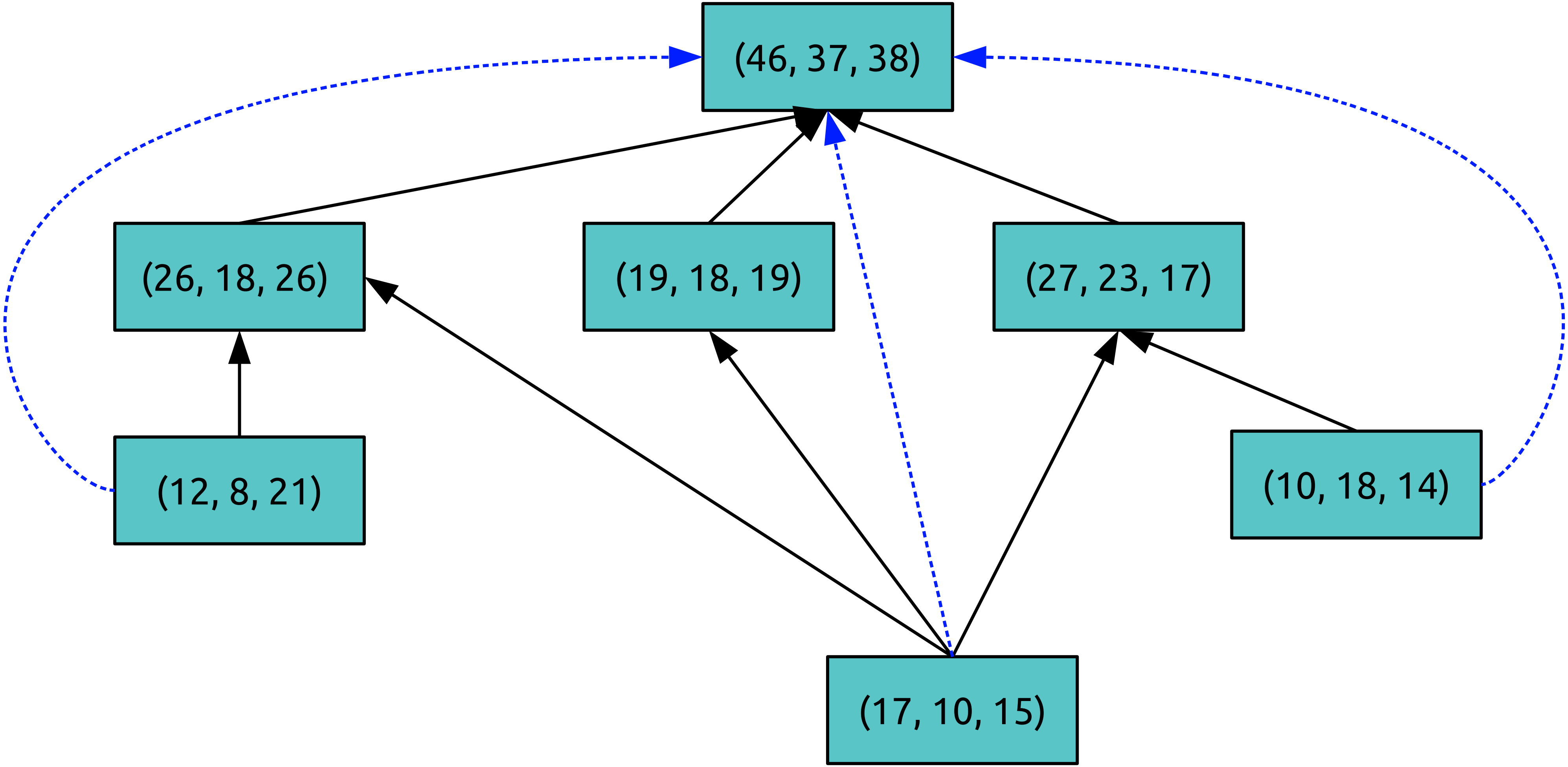
Desenhando Ordens Estritas

Rio2016™

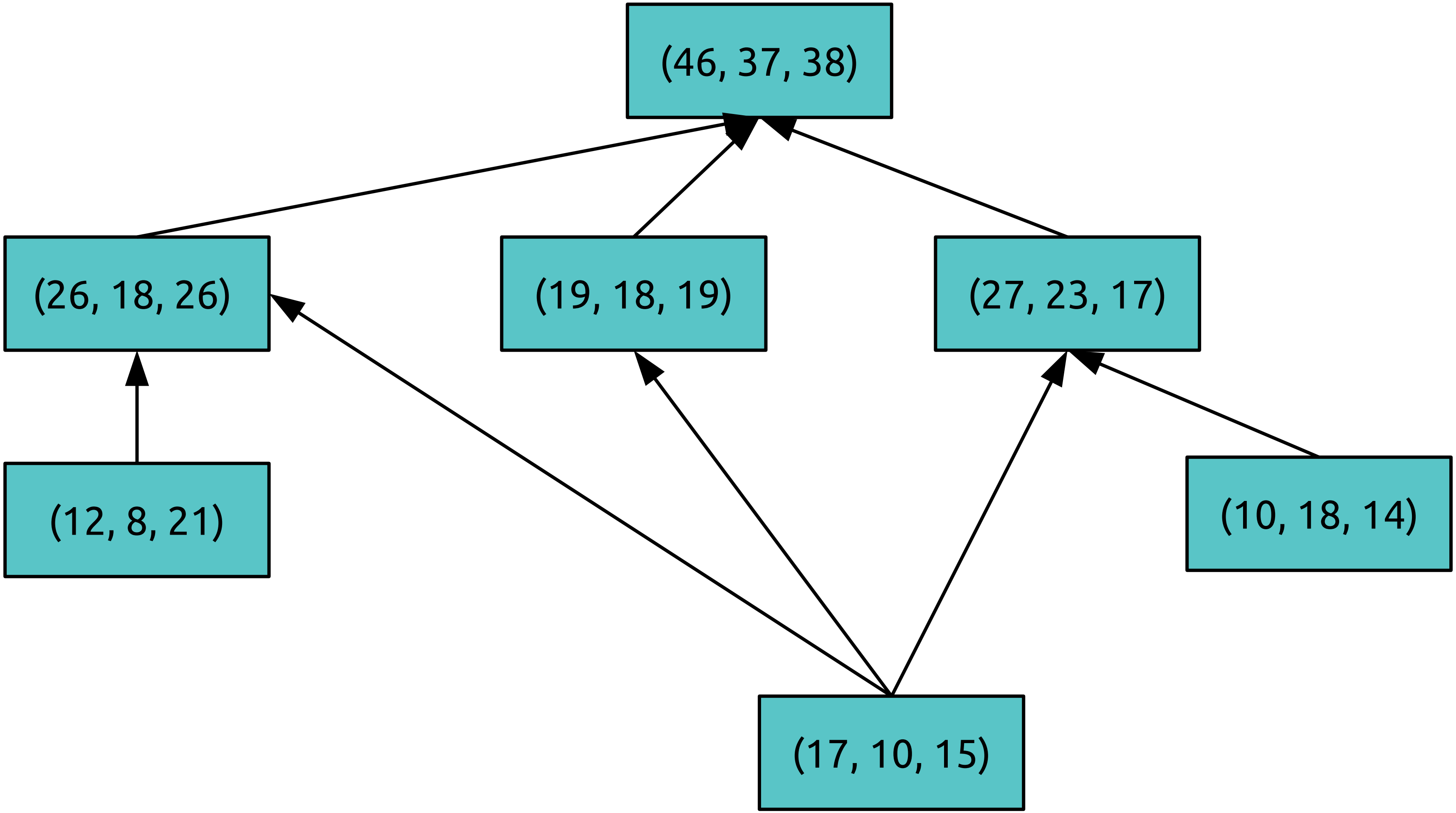
Gold	Silver	Bronze
46	37	38
27	23	17
26	18	26
19	18	19
17	10	15
12	8	21
10	18	14
9	3	9
8	12	8
8	11	10
8	7	4
8	3	4
7	6	6
7	4	6
6	6	1
6	3	2



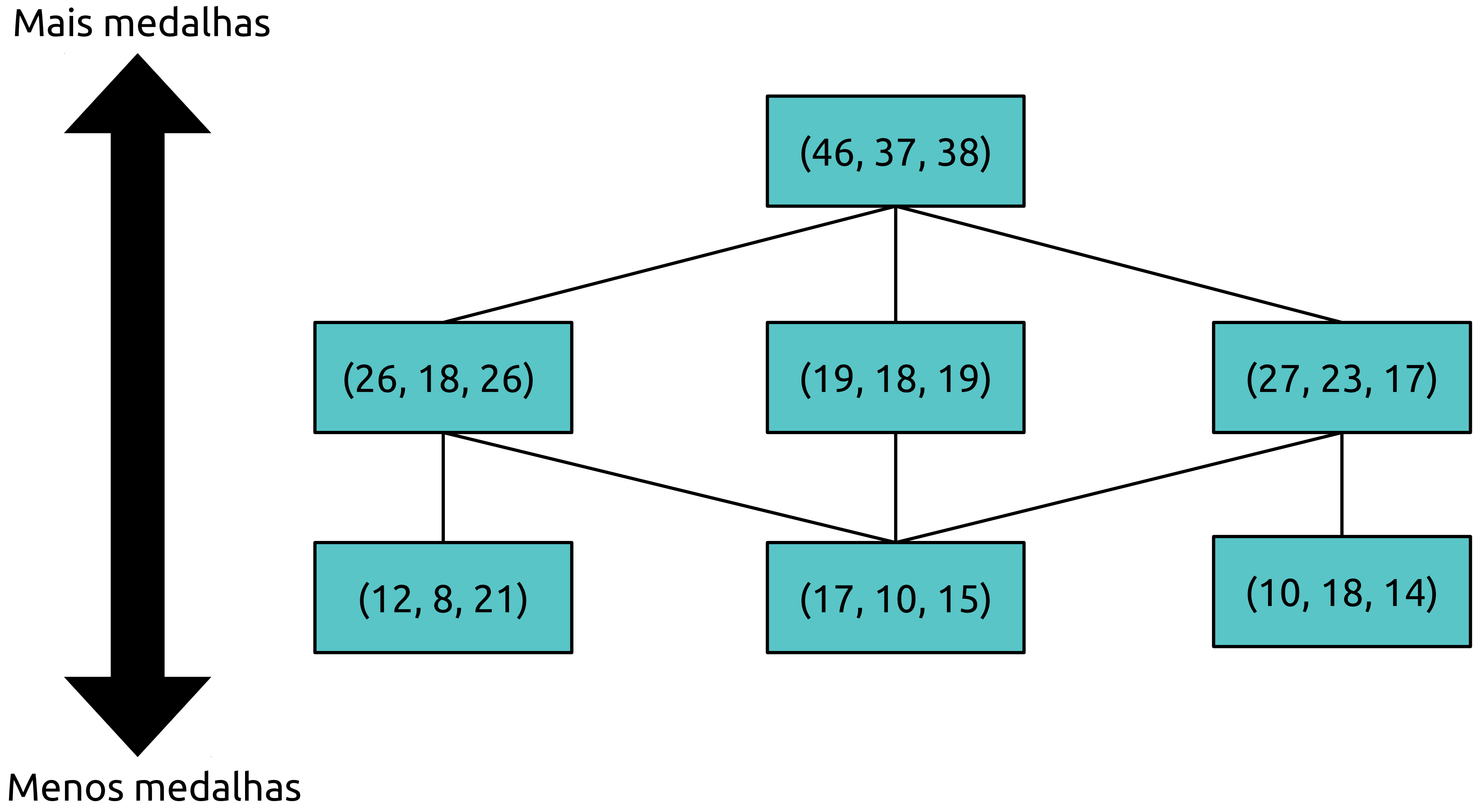
$$(g_1, s_1, b_1)\ R\ (g_2, s_2, b_2) \quad \text{se} \quad g_1 < g_2 \land s_1 < s_2 \land b_1 < b_2$$



$$(g_1, s_1, b_1)\ R\ (g_2, s_2, b_2) \quad \text{se} \quad g_1 < g_2 \wedge s_1 < s_2 \wedge b_1 < b_2$$



$$(g_1, s_1, b_1)\ R\ (g_2, s_2, b_2) \quad \text{se} \quad g_1 < g_2 \wedge s_1 < s_2 \wedge b_1 < b_2$$



$$(g_1, s_1, b_1)\ R\ (g_2, s_2, b_2) \quad \text{se} \quad g_1 < g_2 \wedge s_1 < s_2 \wedge b_1 < b_2$$

Diagramas de Hasse

- Um **diagrama de Hasse** é uma representação gráfica de uma ordem estrita.
- Os elementos são desenhados de baixo para cima.
- Nenhum auto-loop é desenhado e nenhum é necessário! Por **irreflexividade**, sabemos que eles não deveriam estar lá.
- Os elementos superiores são maiores do que os elementos inferiores: por **assimetria**, as arestas só podem ir em uma direção.
- Sem bordas redundantes: por **transitividade**, podemos inferir as bordas ausentes.

(46, 37, 38)
379

(27, 23, 17)
221

(26, 18, 26)
210

(19, 18, 19)
168

(17, 10, 15)
130

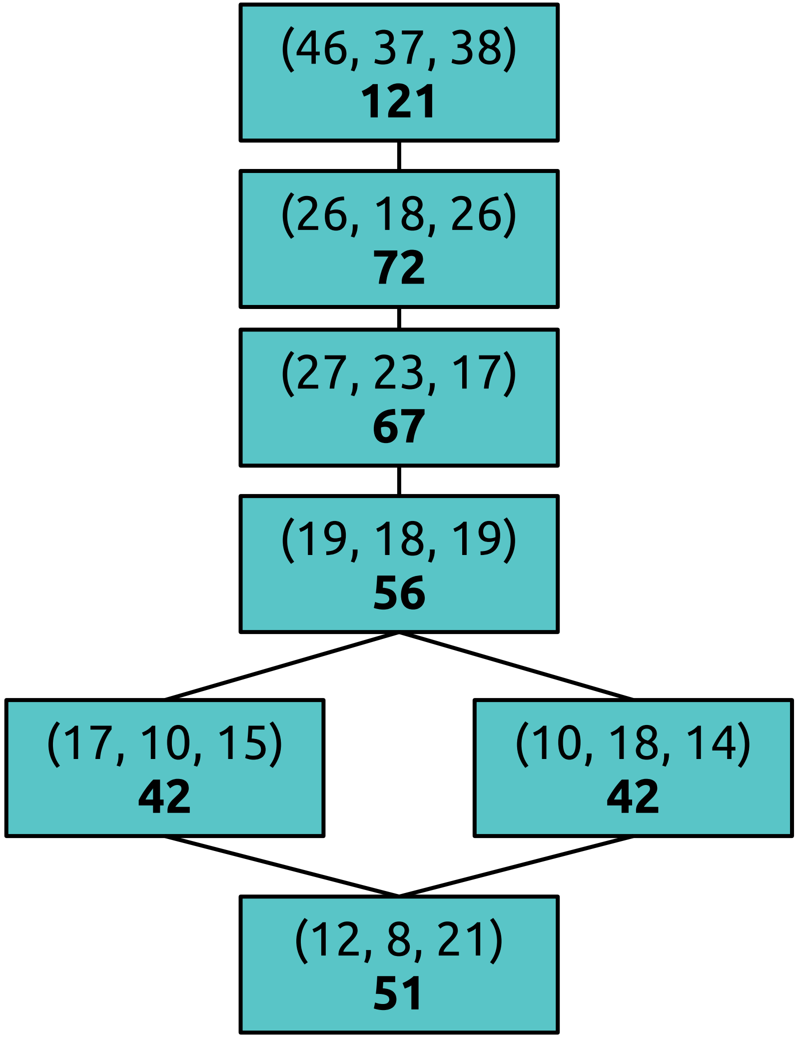
(10, 18, 14)
118

(12, 8, 21)
105

$$(g_1, s_1, b_1)\ T\ (g_2, s_2, b_2)$$

se

$$5g_1 + 3s_1 + b_1 < 5g_2 + 3s_2 + b_2$$

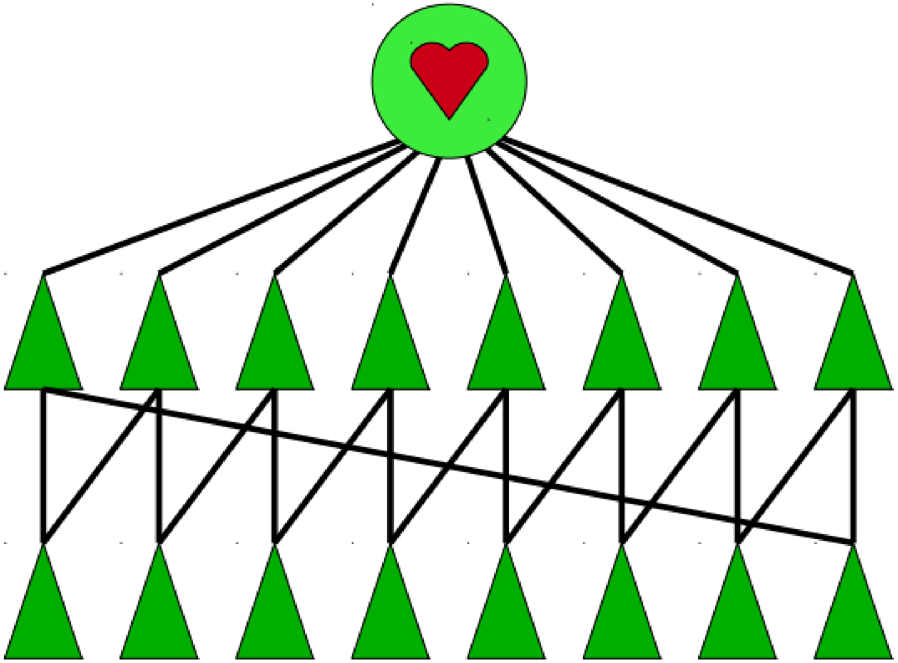


$$(g_1, s_1, b_1) \text{ U } (g_2, s_2, b_2)$$

se

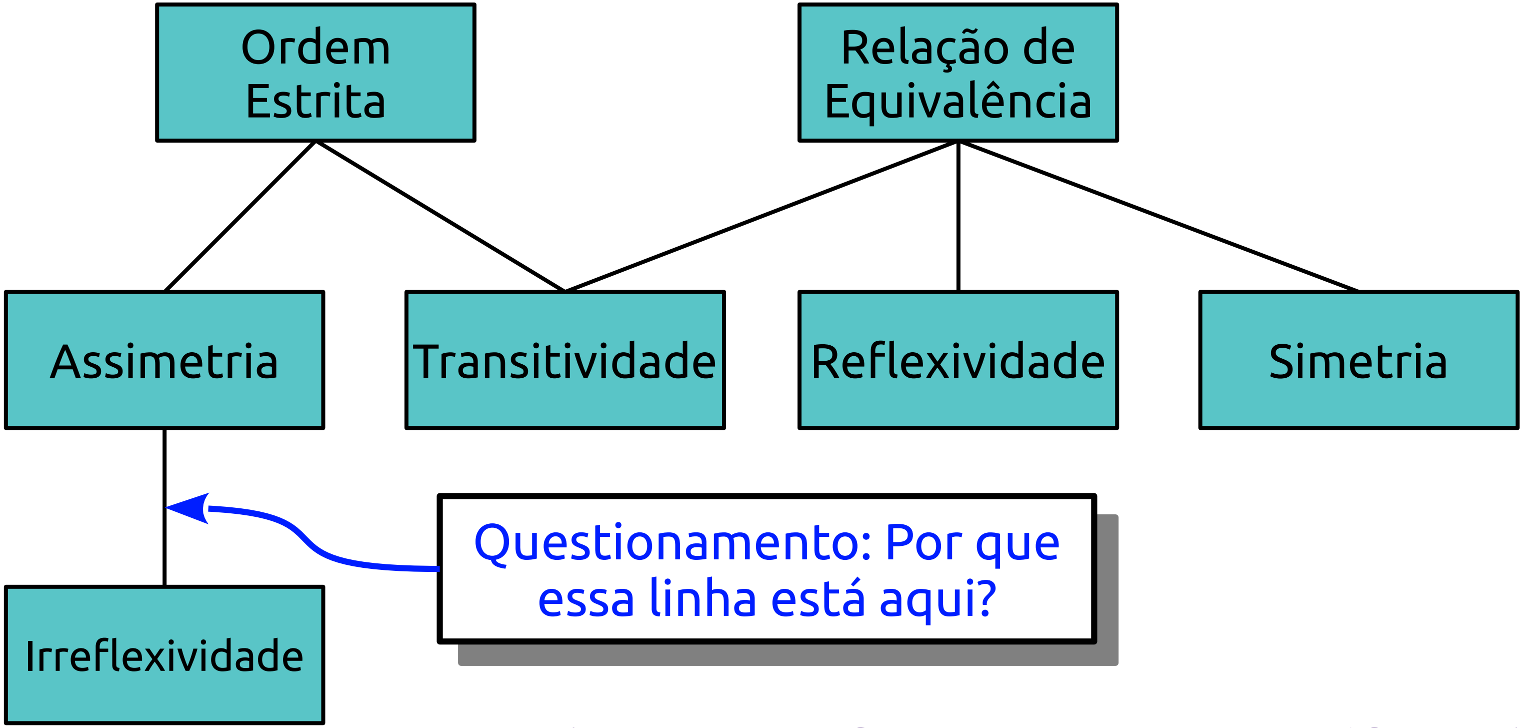
$$g_1 + s_1 + b_1 < g_2 + s_2 + b_2$$

Alcachofras Hasse



xRy se x deve ser comido antes de y

A Ordem Metaestrita



aRb se a for menos específico do que b