Nicole Salomons

① a) Se G é um grafo de 14 vértices e 25 arestas cujos vértices tem graus 3 ou 5, quantos vértices tem grau 3 e quantos tem grau 5?

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_E(v) = 2 * |E(G)|$$

$$3a + 5b = 2 * 25 \rightarrow 3a + 5b = 50$$

$$a + b = 14$$

$$a = 14 - b$$

$$3(14-b) + 5b = 50$$

$$42 - 3b + 5b = 50$$

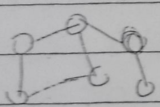
$$2b = 8 \quad \boxed{b = 4} \qquad a + 4 = 14 \quad \boxed{a = 10}$$

- 10 tem grau 3
- 4 tem grau 5

b) Generalize o raciocínio para um grafo de n vértices e m arestas cujos vértices tem graus d_1 ou d_2.

$$d_1 * a + d_2 * b = 2 * m \qquad d_1 \rightarrow \text{grau}$$

$$a + b = n \qquad d_2 \rightarrow \text{grau}$$



② Prove que se G é um grafo satisfazendo

$\delta(G) > 0$, soma de todos os graus

$|E(G)| < |V(G)|$,

então G tem pelo menos dois vértices de grau 1.

Pelo teorema 1 temos que $\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2 * |E($

dividindo os lados por 2: $|E(G)| = \delta(G)/2$

Colocando isso em $|E(G)| < V(G)|$:

$$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v)/2 < |V(G)| \Rightarrow \sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) < 2 * |V(G)|$$

(PODERIA DEIXAR EXPLÍCITO)
PELO COROLÁRIO 2, TEMOS NO MÍNIMO
2 VÉRTICES COM GRAU ÍMPAR. COM AS
CONDIÇÕES ANTERIORES É QUE TEMOS COM GRAU 1

$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) < 2 * |V(G)|$. Então o grau de G tem que ser menor do que 2 para cada vértice. Considerando que cada vértice tem no mínimo uma aresta, então pelo menos um vértice tem apenas uma aresta. Pelo corolário 2, temos que no mínimo 2 vértices tem apenas 1 aresta.

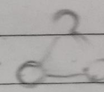
③ Quantos grafos diferentes existem com o conjunto de vértices $\{1, \dots, n\}$? Justifique

Existem um total de $\binom{n}{2}$ arestas num grafo. Para realizarmos todas as combinações:

$\sum_{i=0}^{\binom{n}{2}} \binom{\binom{n}{2}}{i}$. E isso é equivalente à $2^{\binom{n}{2}}$

$\sum_{i=0}^{3} ($ $\frac{6}{2} = 3$

3



④ Prove que se G é um grafo de n vértices, então,
a) G tem no máximo $n(n-1)/2$ arestas, e
b) G tem $n(n-1)/2$ arestas se e somente se é completo

Para termos o máximo de arestas, combinamos todos os vértices dois a dois: $\binom{n}{2}$.

Teremos: $\frac{n!}{(n-2)!\,2!}$ expandindo $\frac{n*(n-1)*\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}\,2*1}$

Ou seja o máximo é $\frac{n*(n-1)}{2}$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

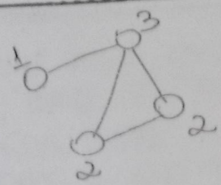
$\frac{1+9 * 9}{2}$ 10

b) • se tem $(n*(n-1))/2$ então é completo
As arestas de um grafo G é um subconjunto de $\binom{V(G)}{2}$. $\binom{V(G)}{2}$ tem $\frac{n*(n-1)}{2}$ elementos.
Então se 'ligarmos' todas as arestas, todos os elementos estão conectados uns com os outros e portanto temos um grafo completo
• Se o grafo é completo então tem $n(n-1)/2$ arestas
O grafo completo tem todos os vértices conectados com os outros. Ou seja o primeiro vértice é conectado com todos: $(n-1)$ arestas. O segundo com os demais: $(n-2)$ arestas. Se somarmos todos: $(n-1)+(n-2)+\ldots+(0)$, temos o número de arestas. Como isso é equivalente à $\frac{((n-1)+1)*(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

(5) Existe algum grafo não trivial em que todos os vértices tem graus distintos? Justifique
Não. Pois vamos dizer que temos n vértices, para todos serem distintos o n-ésimo tem no mínimo grau n-1. Exemplo com 4 vértices, os graus serão 0, 1, 2, 3.. Ou seja o grau do n-ésimo sempre é n-1 ou maior. Mas não é possível um vértice se conectar com n+ outros vértices, pois só o n-ésimo teria que conectar com todos os outros incluindo com o vértice de grau 0. E este não pode ter conexões.

© Menininhas

tilibra



$\delta(G) = 1$
$\Delta(G) = 3$
$\bar{\delta}(G) = 2$

⑥ a) Denotando por $\bar{\delta}(G)$ o grau médio de um grafo G, proponha uma expressão para $\bar{\delta}(G)$, em função de $|V(G)|$ e $|E(G)|$.
b) Prove que para todo grafo $\delta(G) \leq \frac{2|E(G)|}{|V(G)|} \leq \Delta(G)$.

a) $\bar{\delta}(G) = \frac{2|E(G)|}{|V(G)|}$

b) $\underset{\text{grau mínimo}}{\delta(G)} \leq \frac{2 * |E(G)|}{|V(G)|} \leq \underset{\text{grau máximo}}{\Delta(G)}$

Temos pelo teorema 1 que a soma de todos os graus de um grafo é equivalente à $2 * |E(G)|$. Se pegarmos esse mesmo grafo e assumirmos que todos os vértices tem o menor grau, teremos que a soma dos graus é $|V(G)| * \delta(G)$. Sabemos que $|V(G)| * \delta(G)$ é necessariamente menor ou equivalente à $\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v)$. Então:

$|V(G)| * \delta(G) \leq 2 * |E(G)|$ (teorema 1). Dividindo ambos os lados pelo número de vértices:

$$\delta(G) \leq \frac{2 * |E(G)|}{|V(G)|}$$

$\frac{2|E(G)|}{|V(G)|} \leq \Delta(G)$ é equivalente à prova acima.

⑦ Quantas arestas ~~[illegible]~~ tem um grafo k-regular de n vértices? Justifique

DEVERIA SE $\sum_{v \in V(G)} d_G(v)$, $d(G)$ É O GRAU MÍNIMO

$\delta(G) = k * n$, pois todos os n vértices tem grau k. Pelo teorema 1 temos que $\delta(G) = 2 * |E(G)|$. Então $2 * |E(G)| = k * n$

E daí $|E(G)| = \dfrac{k*n}{2}$

⑧ Uma sequência $(d_1, d_2, \dots d_n)$ é gráfica se existe um grafo de n vértices cujos graus sejam $d_1, \dots d_n$, respectivamente.

a) A sequência (2, 3, 3, 4, 4, 5) é gráfica? Justifique.

Não é gráfico pois o corolário 2 diz que em todo grafo, o número de vértices de grau ímpar é par. E na sequência tem 3 de grau ímpar.

b) A sequência (2, 3, 4, 4, 5) é gráfica? Justifique

Não, pois tem um vértice de grau 5, e em um grafo comum o máximo grau de um vértice é ligando com todos os outros menos ele. Ou seja o grau máximo de um vértice é (n-1)

d_1

c) Seja $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ uma sequência não crescente de inteiros com $\sum_{i=1}^{n} d_i \leq \binom{n}{2}$ seja

$d' := (d_2 - 1, d_3 - 1, \dots d_{i+1} - 1, d_{d_i+2}, \dots d_n$

i) Prove que d é gráfica se e somente se d' é gráfica

Vamos supor que temos um grafo que é gráfica e que tem n-1 vértices. E que os graus são:

$d'_G(v_2) = d_2 - 1, \dots, d_G(v_{d+1}) = d_{d_{i+1}} - 1$

$d'_G(v_{d_1+2}) = d_{d_1+2}, \dots, d_G(v_n) = d_n.$

Se neste grafo adicionarmos um novo vértice v_1 E que este vértice tem uma aresta com todos os vértices $v_i \ \forall\ i \in [2, d_{i+1}]$. O novo grafo então teria $dH(v_1) = d_1$, e $dH(v_i) = d_i \ \forall\ i$.

E temos novamente o grafo inicial que então também é gráfico.

FALTA A VOLTA

É PROVADO QUE (d' É GRÁFICA ⇒ d É GRÁFICA)

PRA PROVAR QUE (d É GRÁFICA ⇒ d' É GRÁFICA), ANTES É PRECISO PROVAR QUE SE d É GRÁFICA, É POSSÍVEL FAZER UM GRAFO COM ESSA SEQUÊNCIA COM O VÉRTICE DE MAIOR GRAU LIGADO AOS PRÓXIMOS NA SEQUÊNCIA, CASO CONTRÁRIO AO REMOVÊ-LO E ~~REMOVER~~ DIMINUIR O GRAU DOS PRÓXIMOS VÉRTICES DE 1, NÃO É GARANTIDO QUE O REMOVIDO ESTAVA LIGADO A ELES ANTES.

0 1 0
-1 0 1

(9) Prove que, se G é um grafo direcionado, então $\sum_{v\in V(G)} \delta^+(v) = |A(G)| = \sum_{v\in V(G)} \delta^-(v)$.

$$M_G[v,a] = \begin{cases} 1, & \text{se } a \text{ sai de } v \\ -1, & \text{se } a \text{ chega em } v \\ \emptyset & \text{caso contrário} \end{cases}$$

↓ ∅
→ grau

Utilizando a matriz de incidência.

Vamos provar que $\sum_{v\in V(G)} \delta^+(v) = |A(G)|$

temos que $\delta^+(G) = \sum_{\substack{a\in E(G)\\ v\in (v)}} M^+[v,a] = \sum_{v\in (G)} \sum_{a\in E(G)} M^+[v,a]$.

que é equivalente à $\sum_{v\in (G)} \frac{\delta_G(v)}{2}$, pois para cada $v\in V(G)$ $\sum_{a\in E(G)} \left(M^+[v,a] = \frac{\delta_G(v)}{2}\right)$.

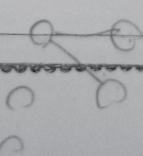
Se somarmos pelas colunas: $\sum_{a\in E(G)} \sum_{v\in V(G)} M^+[v,a] =$

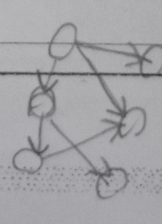
$= \sum_{a\in E(G)} 1$ pois para todo $a \in E(G)$ $\sum_{v\in V(G)} M^+[v,a] = 1$.

Logo $\sum_{v\in V(G)} \delta^+(v) = 1 * |E(G)|$.

Consideramos que $M^+[v,a]$ só conta 1's e $M^-[v,a]$ só conta '−1''s

✓





10) Proponha uma definição para o conceito de densidade de um grafo não trivial de tal maneira que se $\rho(G)$ é a densidade de um grafo não trivial G, então

$0 \leq \rho(G) \leq 1$, e

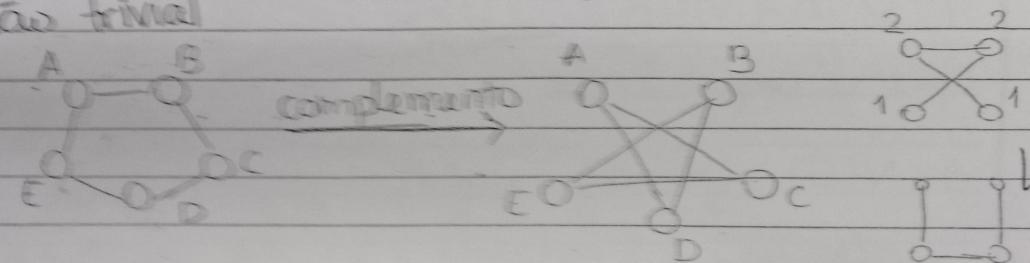
$\rho(G) = 0$ se e somente se $E(G) = \emptyset$

$\rho(G) = 1$ se e somente se G é completo

$$\boxed{\rho(G) = \frac{|E(G)|}{n(n-1)/2}}$$

11) Um grafo é auto-complementar se é isomorfo ao seu complemento

a) Dê um exemplo de um grafo auto-complementar não trivial



b) Prove que se G é autocomplementar, então $|V(G)|$ ou $|V(G)|-1$ é múltiplo de 4.

isomorfo: $|E(G1)| = |E(G2)| =$

complemento: $|E(G1)| = \binom{V(G1)}{2} - E(G2)$.

Então $|E(G1)| + |E(G2)| = \binom{V(G)}{2} \rightarrow 2|E(G)| = \frac{|V(G1)|\,|V(G1)-1|}{2}$

$E(G) = \frac{|V(G1)|\,|V(G1)-1|}{4}$

Então $|V(G1)|$ ou $|V(G1)-1|$ deve ser divisível por quatro.

Nicole Salomons

(12) Prove que, para todo grafo G temos

$$M_G^2[v,v] = \delta_G(v), \text{ para todo } v \in V(G).$$

M_G^2 representa o número de caminhos que existem para chegar de um vértice u para um vértice v de tamanho 2.

Se considerarmos os caminhos de tamanho 2 saindo de v e chegando em v, existe um caminho para cada aresta que contem v. O caminho é vuv $\forall$ u que contem $\{u,v\}$. Vai haver $|u|$ caminhos. Mas $|u|$ é o grau de v por definição. Então $M_G^2[v,v]$ representa o $\delta_G(v)$ $\forall$ v.

(13) Quantos grafos direcionados diferenciados existem com o conjunto de vértices $\{1, \dots, n\}$? Justifique. Quantos deles não tem laços?

Em um grafo não direcionado existem $\binom{n}{2}$ arestas e $2^{\binom{n}{2}}$ combinações. O direcionado sem laço tem o dobro de arestas: $2\binom{n}{2}$. Então $2^{2\binom{n}{2}}$ combinações, pois cada aresta tem duas direções. Com laços existem um total de n^2 arestas, pois cada aresta pode apontar pra qualquer vértice. Então existem 2^{n^2} grafos diferentes com laços.

$n(n-1)$

2^{n^2-n} ✓

(14) Prove que $M_{(G^T)} = (M_G)^T$ para todo grafo direcionado G, onde M^T denota a matriz transposta da matriz M.

$M[v,v]$

Queremos provar que as linhas de M_{G^T} são iguais às linhas de $(M_G)^T$. Como o segundo é transposto é equivalente a provar as linhas de $M(G)^T$ iguais às colunas de M_G. As linhas de M_G são:

$$\sum_{v \in V(G)} \sum_{u \in V(G)} M[v,u] = \sum_{v \in V(G)} \delta^+_G(v).$$

Mas sabemos que a soma de todos que saem é equivalente ao grau de chegada

$$\sum_{v \in V(G)} \delta^+(v) = \sum_{u \in V(G)} \delta^-(u).$$

E o transposto considera que todos que chegaram na verdade saíram e vice-versa. Então

$$\sum_{u \in V(G)} \delta^-(u) \Rightarrow \sum_{u \in V(G)} \delta^+(u).$$

Por outro lado fazendo pelas colunas de $(M_G)^T$:

$$\sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in V(G)} [u,v] = \sum_{u \in V(G)} \delta^+(u).$$

Como os dois são equivalentes, está provado ✓

⑮ Dado um grafo G, o grafo direcionado $D(G)$ é dado por

$$V(D(G)) = V(G)$$

$$A(D(G)) = \bigcup_{\{u,v\} \in E(G)} \{(u,v),(v,u)\}$$

Prove que $M_G = M_{D(G)}$.

A matriz de adjacência de $M_{D(G)}$ pode ser a soma das arestas de $u \to v$ com as arestas $v \to u$. Então:

$\sum_{v \in V(G)} \sum_{u \in V(G)} (M[v,u] + M[u,v])$. Podemos separar:

$\sum_{v \in V(G)} \sum_{u \in V(G)} M[v,u] + \sum_{v \in V(G)} \sum_{u \in V(G)} M[u,v]$. É equivalente à

$\sum_{v \in V(G)} \delta^+_G(v) + \sum_{v \in V(G)} \delta^-_G(v)$. Usando o teorema 3:

$\sum_{v \in V(G)} \delta^+_G(v) + \sum_{v \in V(G)} \delta^-_G(v) = 2|A(G)|$. Agora fazendo M_G

$\sum_{v \in V(G)} \sum_{u \in V(G)} M[v,u] = \sum_{v \in V(G)} \delta_G(v)$. Pelo teorema 1:

$\sum_{v \in V(G)} \delta_G(v) = 2|A(G)|$. Como os dois são equivalentes à $2|A(G)|$. Está provado ✓

© Menininhas

tilibra

(16) Prove que, para todo grafo direcionado G temos

$$M_G M_G^T[v,v] = \delta_G^+(v), \forall v \in V(G).$$

Para cada v temos que a multiplicação é:
$[v][1] * [v][1] + [v][2] * [v][2] + \dots + [v][n][v][n]$.
Para cada posição $[v][i]$ será 1 se tiver uma aresta (v, v_i). E $1 * 1$ sempre é 1. Então $[v][i]^2$ é um onde tem (v, v_i) e $\emptyset$ onde não existe a aresta (v, v_i). Somando $([v][i])^2$ para cada i, temos a quantidade de v_i para qual há saída de v e entrada de v_i. Ou seja $\delta^+(v) \; \forall v \in V(G)$.

✓

(17) Descreva como computar eficientemente o grafo transposto de um grafo direcionado G, quando G é representado
a) por listas de adjacência
b) pela matriz de adjacência

Grafo transposto: de um grafo direcionado G é o grafo direcionado G^T que se obtém ao substituir cada arco por outro com as mesmas pontas mas com a mesma direção invertida:

$V(G^T) := V(G)$

$A(G^T) := \{(u,v) \text{ tal que } (v,u) \in A(G)\}$

```
a) for (int i=0; i<|V(G)|; i++)
   {
       for (a(u,v) in V[i])
       {
           addtonew(V2[i], a(v,u))
       }
   }
```

FALTA DIZER QUE É $O(n^2)$ NOS DOIS

11(11) 12(21) 13(31) 14(4
22(22) 23(32) 24(42)
33(33) 34(43)
44(44)

```
b) for (int i=0; i<|V(G)|; i++)
   {
       for (int j=i; j<|V(G)|; j++)
       {
           trade(V[i][j], V[j][i])
       }
   }
```

↳ ~~TROCAR NA MESMA MATRIZ ENQUANTO PERCORRE DARIA ERRO - É PRECISO CRIAR OUTRA~~ (NÃO TINHA VISTO j=i).

OBS: NA a), SE HOUVER 2 PONTEIROS PRA 2 LISTAS, UMA DE SAÍDA E OUTRA DE ENTRADA, BASTA TROCAR OS 2 PONTEIROS EM CADA VÉRTICE - $O(n)$.

(18) Para evitar desperdicar espaço na representação da matriz de adjacência de um grafo G com n vértices usando um vetor m contendo somente os elementos acima da diagonal principal de M_G, de tal maneira que

$$M_G[u,v] = \begin{cases} m[f(u,v)], & \text{se } u < v \\ 0, & \text{se } u = v, \\ m[f(u,v)], & \text{se } u > v, \end{cases}$$

onde $f : \{(u,v) \in V(G) \times V(G) \mid u < v\} \rightarrow \{0, \ldots, N(n) - 1\}$ é a função que faz a correspondência entre os elementos de M_G e m, e $N(n)$ é o tamanho do vetor m.

a) Dê uma expressão para $N(n)$.
b) Dê uma expressão para $f(u,v)$.
c) Dê uma expressão para $f^{-1}(k) : 0 \leq k < N(n)$.
d) Escreva uma função:
unsigned int vizinho(unsigned int *m, unsigned int u, unsigned v que devolve o valor de $M_G[u,v]$, onde M_G é representado pelo vetor m tal como descrito acima.

a) $(n+1) * (n) / 2$ $\quad (n-1) * n / 2$, SEM LAÇOS (É O NÚMERO MÁXIMO DE ARESTAS)
b) $f(u,v) \leftarrow n * u + v - (n(n-1)/2)$
c) $f^{-1}(k)$ retorna u, v

$u, v \in \{1 \ldots n\}$ [illegible] $\in$ $k \in \{0, \ldots n-1\}$

b) $f(u,v) = \underbrace{n*(u-1) + (v-1)}_{} - \underbrace{N(u) - u}_{}$

SE FOSSE GUARDAR A MATRIZ INTEIRA NO VETOR

NÚMERO DE ÍNDICES QUE ESTARIAM NA MATRIZ INTEIRA, MAS NÃO SÃO GUARDADOS NO VETOR (CONTANDO DIAGONAL PRINCIPAL) → OU $-(u(u+1)/2)$

CALCULA K QUANDO $u < v$, PRA $u > v$ A EXPRESSÃO SERIA OUTRA (OU BASTARIA TROCAR OS ÍNDICES)

(19) Se G é um grafo e u e v são vértices de G, é verdade que $(G-u)-v=(G-v)-u$? Justifique

Por definição $G-u$ é $V(G-u):=V(G)-u$ e $E(G-u):=E(G)-\{a\in E(u)\}$

Por um lado temos $(G-u)-v$. Aplicando a definição: $V(G-u)-v:=(V(G)-u)-v$

$(V(G)-u)-v:=V(G)-u-v$.

E $E(G-u)-v:=(E(G)-\{a\in E(u)\})-v$

$(E(G)-\{a\in E(u)\})-v:=E(G)-\{a\in E(u)\}-\{a\in E(v)$

Por outro lado: $V(G-v)-u:=(V(G)-v)-u$

$(V(G)-v)-v:(V(G)-v-u$

E $(E(G)-v)-u:=(E(G)-\{a\in E(v)\})-u$

$(E(G)-\{a\in E(v)\})-v:=(E(G)-\{a\in E(v)\})-\{a\in E(u)\}$

Como os dois são iguais, está provado ✓

(20) Seja G um grafo e seja X um conjunto de vértices de G. É verdade que $G-X=G[V(G)-X]$?

Por um lado temos $G-X$:

$V(G-X):=V(G)-X$

$E(G-X):=E(G)-\{a\in E(G)\mid a\cap X\neq\emptyset\}$

Por outro lado temos $G[V(G)-X]$

$V(G[V(G)-X])=V(G)-X$

$E(G[V(G)-X])=V(G)\cap\binom{V(G)-X}{2}$

São iguais. Pois as arestas de $E(G-X)$ são todas menos as que tavam em X igualmente para $E(G[V(G)-X])$ ✓

tilibra

(21) Se G é um grafo e α e β são arestas de G, é verdade que $(G-\alpha)-\beta = (G-\beta)-\alpha$?

Por definição $V(G-\alpha) := V(G)$

$E(G-\alpha) := E(G)-\alpha$

Por um lado temos: $V(G-\alpha)-\beta := V(G)-\beta$

$V(G)-\beta := V(G)$

$E(G-\alpha)-\beta := (E(G)-\alpha)-\beta$

$(E(G)-\alpha)-\beta := E(G)-\alpha-\beta$

Pelo outro lado: $V(G-\beta)-\alpha := (V(G))-\alpha$

$V(G)-\alpha := V(G)$

$E(G-\beta)-\alpha := (E(G)-\beta)-\alpha$

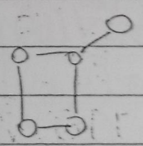
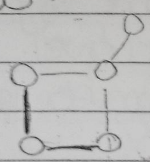
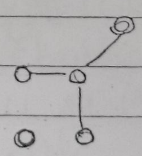
$(E(G)-\beta)-\alpha := (E(G)-\beta-\alpha$

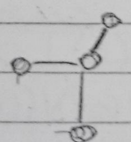
Como os dois lados são iguais. Está provado

(22) Seja G um grafo e X um conjunto de arestas de G. É verdade que: $G-X = G[E(G)-X]$?

São diferentes.

Contra exemplo.

G:  $X =$  $G-X$: 

$G[E(G)-X]$  Tem um vértice que some

É verdade que todo subgrafo de G induzido por arestas pode ser obtido a partir de G por uma sequência de remoção de arestas

Não, pois não faz "sumir" os vértices que não pertencem ao subgrafo.

23) Prove que todo subgrafo induzido por vértices de um grafo completo é completo.

Pela definição: $V(G[X]) := X$

$E(G[X]) := V(G) \cap \binom{X}{2}$

V(G) como é completo tem todas as arestas então contém todas as arestas de $\binom{V(G)}{2}$. X é um subconjunto de E(G). E como a intersecção entre um conjunto e um subconjunto desse conjunto, sempre será o conjunto inteiro ✓

24) Seja G um grafo e seja v um vértice de G. Prove que: $|E(G-v)| = |E(G)| - \delta_G(v)$.

Por um lado temos $|E(G-v)|$

$E(G-v) = E(G) - \{a \in E(G) \mid a \cap v \neq \emptyset\}$.

Como $a \cap v = \emptyset$ para toda aresta que sai de v então $|a \cap v = \emptyset| =$ grau de $v \rightarrow \delta_G(v)$

Então $|E(G-v)| = |E(G) - \delta_G(v)$. Então está provado ✓

(25) Seja G um grafo e sejam $A \subseteq E(G)$ e $V = \bigcup_{a \in A} a$.
É verdade que $G[A] = G[V]$. Justifique.

$G[A] \Rightarrow V(G[A]) := \bigcup_A a$,

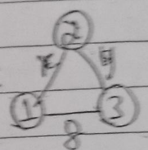
$E(G[A]) := A$

$G[V] \Rightarrow V(G[V]) := V$

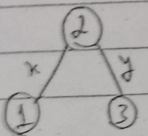
$E(G[V]) := E(G) \cap \binom{V}{2}$

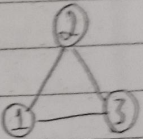
Pelo anunciado $V = \bigcup_{a \in A} a$.

CONTRA EXEMPLO:

G: 

$A = \{x, y\}$
$V = \{1, 2, 3\}$

$G[A]$: 

$G[V]$: 

OBS: MAS ÀS VEZES PODE SER QUE $G[A] = G[V]$. PELA PERGUNTA, OU PROVAMOS QUE É VERDADE PRA ~~TODOS~~ TODOS OU MOSTRAMOS QUE NÃO É PRA ALGUM.

(26) Prove que se G é um grafo, então

a) Um conjunto X é independente em G se e somente se X é clique em $\overline{G}$.

b) $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

a) X é independente quando $G[X]$ não tem arestas

X é clique se $G[X]$ é completo

As arestas e vértices de $\overline{G}$ são:

$V(\overline{G}) := V(G)$

$E(\overline{G}) := \{\{u,v\} \in \binom{V(G)}{2} \mid \{u,v\} \notin E(G)\}$.

Vamos supor que um conjunto $X \subseteq V(G)$ é independente então $V(X) = X$. E $E(X) := \emptyset$. Vamos provar que se é independente então é clique em $\overline{G}$

a) MOSTRAR QUE SE X É INDEPENDENTE EM G, X É CLIQUE EM $\overline{G}$, E TAMBÉM A VOLTA, QUE SE X É CLIQUE EM $\overline{G}$, É INDEPENDENTE EM G.

b) ~~MOSTRAR QUE~~ SE X É INDEPENDENTE MÁXIMO, X É CLIQUE EM $\overline{G}$ (LOGO, $\omega(\overline{G}) \geq \alpha(G)$), E A VOLTA, QUE SE X É CLIQUE EM $\overline{G}$, ENTÃO É INDEPENDENTE EM G, LOGO, $\alpha(G) \geq \omega(\overline{G})$, PORTANTO $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

Nicole Salomons

(27) Prove que todo grafo com pelo menos 6 vértices tem um clique ou um conjunto independente com 3 vértices.

Clique: $X \subseteq V(G)$ se $G[X]$ é completo
Conj. Ind: $X \subseteq V(G)$ se $G[X]$ não tem arestas
Vamos considerar que H seja o subgrafo induzido por G e que ele tem 6 vértices. Podemos pintar cada relação de vértices com uma cor: azul se existe uma aresta entre eles e vermelho se não existe. Seja v um vértice em H. E v liga com 5 outros vértices (a 'ligação' pode ser azul ou vermelho). O vértice v vai ou ter pelo menos 3 ligações vermelhas ou pelo menos 3 ligações azuis. Seja a, b e c os três vértices que contem a mesma cor (cor x). Se entre a, b, e c eles também tiverem uma ligação x, então ja formarão um clique ou conjunto independente entre x e esses dois vértices. Agora se entre a b c eles não tiverem nenhum da cor x, então entre a, b, c eles terão um clique ou conjunto independente.

✓

OBS: CONJUNTO MÁXIMO É O MAIOR DOS CONJUNTOS MAXIMAIS

(28) Prove que, para todo grafo G,

a) $\alpha(G) \geq \frac{|V(G)|}{\Delta(G)+1}$ $\alpha(G) \to$ tamanho do maior conjunto independente.

$\Delta(G)$ grau máximo de um grafo

É UM MAXIMAL, NÃO O MAIOR

Vamos tentar achar o maior conjunto independente em G. ~~Se~~ chamaremos $|V(G)|$ de m. Escolhemos um vértice v para pertencer ao conjunto independente, então nenhum dos vértices com ~~o~~ qual v liga, pode mais participar. No pior caso estamos removendo $\Delta(G) + |v|$. Fazemos isso a cada iteração, no pior caso tiramos $\Delta(G)+1$. Mas podemos fazer isso só $\alpha(G)$ vezes até acabarem os vértices: $\alpha(G) * (\Delta(G)+1) = |V(G)|$. Ou seja, $\alpha(G) = \frac{|V(G)|}{\Delta(G)+1}$. Mas isso é o pior caso, em todos os casos teríamos $\alpha(G) \geq |V(G)|/\Delta(G)+1$.

b) $\alpha(G)\,\delta(G) \leq |E(G)|$. | $\alpha(G) \leq |E(G)/\delta(G)$

~~POR~~ $\alpha(G)$ É TAMANHO DO MAIOR C.I., NÃO O CONJUNTO (PODE HAVER MAIS DE 1 ATÉ)

Vamos tentar achar o maior ~~MAXIMAL~~ (IGNORE) conjunto independente. Escolhemos um vértice v para participar de $\alpha(G)$, então todos os vizinhos de v também são tirados. No melhor caso sempre escolhemos o vértice com grau mínimo de vizinhos. Podemos fazer isso até não sobrar mais arestas. Então $\alpha(G) * \delta(G) = E(G)$. Mas isso é o melhor caso, em todos os casos temos $\alpha(G)\delta(G) \leq |E(G)|$

→ SE $\delta(G) \cdot \alpha(G) = |E(G)|$

ENTÃO $E(G)$ = ARESTAS DOS VÉRTICES DO CONJUNTO INDEPENDENTE, MAIS NENHUMA

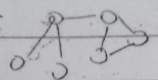
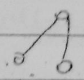
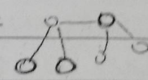
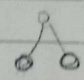
(NÃO BASTA SÓ TODOS SEREM DE GRAU = $\delta(G)$)

(O RESTO VALE)

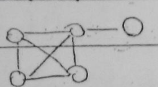
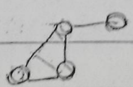
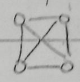
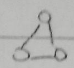
29) Seja H um subgrafo de um grafo G. Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou não. Justifique

a) $\alpha(H) \leq \alpha(G)$? É verdadeiro, pois G tem k vértices pertencentes ao conjunto independente. H vai ter um subconjunto de K. E ~~um~~ subconjunto não pode ser maior que o conjunto.

b) $\alpha(G) \leq \alpha(H)$? Falso. Contra-exemplo:

G:  H:  $\alpha(G) =$  $\alpha(H) =$ 

c) $\omega(G) \leq \omega(H)$? Falso. Contra-exemplo:

G:  H:  $\omega(G) =$  $\omega(H)$ 

d) $\omega(H) \leq \omega(G)$ Verdadeiro, pois se G tem um clique com K vértices. H vai ter um subconjunto dos vértices de G. Então vai ter k ou menos dos mesmos vértices do clique. E se adicionassemos qualquer outro vértice além de K, e fizesse parte do clique de H, ele deveria fazer parte do clique de G também.

a) CONTRAEXEMPLO:

G: o—o $\quad \alpha(G)=1 \quad \alpha(H) > \alpha(G)$, PRA ESSES

H: o o $\quad \alpha(H)=2 \quad$ 2 $G \subset H$, NÃO PRA TODOS.

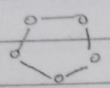
OU SEJA, α DE UM SUBGRAFO PODE SER MAIOR, MENOR OU IGUAL AO DO GRAFO ORIGINAL. MAS É IMPOSSÍVEL QUE O SUBGRAFO TENHA UM CLIQUE MAIOR QUE O DO GRAFO ORIGINAL.

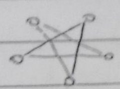
(30) Um grafo e seu complemento podem ser

a) ambos conexos?

Sim. Exemplo:

GRAFO G: COMPLEMENTO G





Ambos são conexos

b) ambos desconexos?

Não. Vamos supor que um grafo G é desconexo e tem dois componentes a e b. Nenhum vértice de a é conectado com nenhum vértice de b. Mas o complemento de G diz que $E(\bar{G}) := \{\{u,v\} \in \binom{V(G)}{2} \mid \{u,v\} \notin E(G)\}$. Então agora todos os vértices de a estão conectados com todos os vértices de b. E os elementos de a ainda continuam conexos entre si pois qualquer vértice de a tem um caminho para outro vértice de a, usando qualquer vértice de b.

(31) Seja G um grafo e seja M_G a sua matriz de adjacência booleana. Prove que

a) $M_G^+ = \sum_{k=1}^{d} M_G^k$

b) $M_G^* = \sum_{k=0}^{d} M_G^k$

onde $d = \max\{diam(C) \mid C \in C(G)\}$.

a) $M_G^k[u,v] = 1$ só se tiver um passeio de tamanho k de u a v. Somando $\sum_{k=1}^{d} M_G^k$ será 1 somente se existir algum caminho entre u e v. Como d é o diâmetro, então não existe nenhum caminho maior que d que vai de u a v.

b) inclui o caminho trivial.

(32) Prove que um grafo e seu complemento não podem ambos ter diâmetro maior que 3.

Se o grafo inicial tiver diametro 3 ou menor então já é verdadeiro.

Vamos supor que o grafo G tem diâmetro maior que 3. Vamos provar que $\bar{G}$ tem no máximo o diametro igual a 3. Se G for desconexo, então é verdadeiro pois cada pai de vértices em componentes diferentes de G será conectado diretamente em $\bar{G}$. E cada 2 vértices do mesmo componente será ligado por um caminho de tam 2, usando um vértice de um outro componente em $\bar{G}$.

Se G é conectado com diametro > 3. Então existe um caminho com tamanho > 3 em G. Mas o maior caminho de u a v será uma aresta agora em $\bar{G}$. Vamos considerar então dois outros vértices quaisquer de G: x e $y \neq u$ e v. Se algum de x e y em G tiver uma aresta em comum em $\bar{G}$ então o caminho xuy ou xvy é possível. ≤ 3

Caso contrário haverá o caminho $xuvy$ ou $xvuy$. distância = 3.

(Em $\bar{G}$ qualquer vértice é adjacente à u ou v pois não existe caminho com tamanho 2 connectando u a v.)

✓

© Menininhas

tilibra

(33) Prove que o diâmetro de um grafo auto-complementar é no máximo 3.

Se G é auto-complementar então seu diametro deve ser igual ao de seu complemento. Seja G tal que diam(G) >= 3 Então por (32) diam(¬G) <= 3, portanto diam(G) = 3.

(34) Seja G um grafo. Prove que

a) a relação de alcançabilidade sobre $V(G)$ dada por $u \sim_G v :=$ u é alcançavel a partir de v em G é uma relação de equivalência?

b) as classes de equivalência desta relação são os conjuntos de vértices dos componentes de G.

a) devemos provar as 3 propriedades.

Reflexiva: $u \sim u$, pois há um caminho de tam $= 0$

Transitiva: se $u \sim v$ e $v \sim w$, então existe caminho $(u, \ldots, v, \ldots, w)$ portanto $u \sim w$

Simetrica: se $u \sim v$, então $v \sim u$ (mesmo caminho no sentido contrário).

b) Em um componente de G é possível chegar de qualquer vértice do componente em qualquer outro vértice do componente. Então $u \sim v$ para u e v do mesmo componente. ✓

(35) Explique como computar os componentes conexos de um grafo G em tempo $O(|V(G)|^4)$.

Pelo corolário 8 é possível computar M_G^+ em tempo $O(|V(G)|^4)$. Para computar os componentes conexos de G usando M_G^+ fazemos:

```
lista con[|V|]
for (i=0; i<|V(G)|; i++)
    for (j=0; j<|V(G)|; j++)
        if M_G^+[i,j] ≠ 0
            con[i].add(j)
return con[];
```

OBS: PRA CADA V EM C (COMPONENTES), RETORNARIA UMA CÓPIA DE C NO ÍNDICE DE V, NÃO É CONTRA O ENUNCIADO.

✓

Como o algoritmo custa $|V(G)|^2$. $\therefore |V(G)|^4 + |V(G)|^2 \in O(|V(G)|^4)$ está provado.

(36) Explique como computar as distâncias entre todos os pares de vértices de um grafo G em tempo $O(|V(G)|^4)$

```
d[all i][all j] ← ∞
for (i=0; i<|V(G)|; i++)
    d[i][i] = 0
for each edge [i,j]
    d[i][j] = 1
for (k=0; k<|V(G)|; k++)
    for (j=0; j<|V(G)|; j++)
        for (i=0; i<|V(G)|; i++)
            if (d[i][j] > d[i][k] + d[k][j])
                d[i][j] ← d[i][k] + d[k][j]
```

→ SERIA $O(|V(G)|^3)$

✗

ALTERAR A MATRIZ ENQUANTO ELA É PERCORRIDA PODE DAR ERRO.

→ O CERTO SERIA ATUALIZAR A MATRIZ DE DISTÂNCIAS AO CALCULAR M_G^*. CADA VEZ QUE CALCULA M_G^k, ATUALIZA AS DISTÂNCIAS COM K NOS ÍNDICES ONDE HÁ CONEXÃO NOVA.

(37) Explique como computar o diâmetro de um grafo G em tempo $O(|V(G)|^4)$.

Usando (36), percorrer a matriz (tempo $|V(G)|^2$) e procurar a maior distância. V.

(38) Explique como, dado um grafo G, computar em tempo $O(|V(G)|^4)$ uma estrutura de dados de tamanho $O(|V(G)|^2)$ que permite decidir se dois vértices estão conectados em G.

Retornar M_G^+ booleana. Quando tiver 1 é conectado, com $\emptyset$ não é conectado. V

~~(39) Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência. Prove que M_G^k =~~

39) Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência. Prove que $M_G^k[u,v]$ é o número de passeios de tamanho k de u para v em G, $\forall k \in \mathbb{N}$

Vamos provar por indução.

Base $k=1$ é trivial, pois há um 1 onde tem uma aresta entre dois vértices.

Hipótese: Vamos assumir para $M_G^n[u,v]$ é o número de passeios de tamanho n. Vamos provar para $k+1$. $M_G^{k+1} = M_G^k * M$

Temos em M_G^k uma posição b_{ij} que representa o número de passeios de tamanho k entre os vértices v_i e v_j. Para M_G^{k+1} na posição b_{ij} temos $b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \dots b_{in}a_{nj}$. Notamos que em cada $b_{ix}a_{xj}$ representa o número de passeios com tamanho $k+1$ entre os vértices v_i e v_j que estão em x depois de k passos. Somando todos os diferentes x, temos o número de passeios de tamanho $k+1$ de u para v.

Nicole Salomons

(40) Seja G um grafo direcionado e seja M_G sua matriz (booleana) de adjacência. Prove que.

a) $M_G^k[u,v] = 1$ se e somente se existe passeio direcionado de u a v em G de tamanho k.

Por indução: a base $M_G^1[u,v]$ será um quando existe aresta (u,v) por definição.

Hipótese: $M_G^n[u,v] = 1$ se existe passeio direcionado de u a v. DE TAMANHO n.

Passo: Vamos provar $M_G^{n+1}[u,v]$ que pode ser escrito $M_G^n[u,v] * M_G^1[u,v]$. Pela hipótese $M_G^n[u,v]$ será 1 quando tem caminho direcionado de tamanho n. E pela base $M_G^1[u,v]$ será 1 quando existe caminho de tamanho 1. Então $M_G^n[u,v] * M_G^1[u,v] = n+1$. ✓

b) $M_G^*[u,v] = 1$ se e somente se v é alcançavel a partir de u em G.

$M_G^*[u,v] = \Sigma_{k=0}^{d}$. Soma de todos os caminhos de tamanhos diferentes. Como d representa a maior distância entre quaisquer vértices, não vai haver nenhum caminho maior que d.

(DETALHE) PODE HAVER CAMINHO MAIOR QUE d, MAS NÃO CAMINHO MÍNIMO (~~ARESTAS~~ =DISTÂNCIA), E SE NÃO HÁ CAMINHO MÍNIMO NÃO PODE HAVER UM MAIOR.

→ SERIA MELHOR ORGANIZAR POR SER "SE E SOMENTE SE"

⇒

⇐

41) Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adj bool. Prove que $M_G^*[U,V] = 1$ se e somente se u e v estão no mesmo componente de G.

$M_G^* = \sum_{i=0} M_G^i$. d = diametro do grafo.

é por (40) $M_G^k[u,v]$ será 1 quando existe caminho de tamanho k de u à v. Somando todos de $i=0$ até d, temos que Σ_G^* será 1 quando existir caminho de u a v. Se não existir caminho de u a v, então eles estão em componentes diferentes.

Provar o outro lado

Se u e v estão no mesmo componente de G, então existe caminho de u a v. Pode existir caminho de tamanho 1 até caminho de tamanho do diâmetro do grafo. Somando todos termos $\sum_{k=0}^{d} M_G^k[u,v]$. E isso é equivalente à $M_G^*[u,v]$.

42) Descreva um algoritmo que computa em tempo $O(|V(G)|^4)$ o grafo condensado de um grafo direcionado G a partir da matriz de adjacência de G.

```
v[|V(G)|]; t[|V(G)|]; v[i] ← 1; ci = ∅; cj = ∅
for (i=∅; i<|V(G)|; i++)
    t ← M[i,*]
    for (j=0; j<|V(G)|; j++)
        if (i≠j) & (t = M[j,*])
            v[j] ← ∅;
for (i=∅; i<|V(G)|; i++)
    if (v[i] == 1)
        for (j=∅; j<|V(G)|; j++)
            if(v[j] == 1)
                Co[ci][cj] ← M[i][j]
                cj++
        ci++
```

Custo

$O(|V(G)|^4) + n*(n+n*n) = n^3 + n^2 +$

$+ n^2 \approx n^4 + n^3 + 2n^2 \in O(|V(G)|^4)$

(43) Seja G um grafo direcionado e seja M_G sua matriz de adjacência. Prove que, $M_G^k[u,v]$ é o número de passeios direcionados de tamanho k de u a v em G, $\forall\ k \in \mathbb{N}$.

Vamos provar por indução.

Base: $k=1$ é trivial, pois há 1 onde tem arco de u à v.

Hipótese: Vamos assumir para $M_G^n[u,v]$ é o número de passeios de tamanho n. Vamos provar $n+1$.

Passo: Temos em M_G^n uma posição b_{ij} que representa o número de passeios de tamanho n entre os vértices v_i e v_j. Para M_G^{n+1} na posição b_{ij} temos $b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \dots + b_{in}a_{nj}$. Notamos que em cada $b_{ix}a_{xj}$ representa o número de passos com tamanho $k+1$ entre os vértices v_i e v_j que estão em x depois de k passos. Somando todos os diferentes x, temos o número de passeios de tamanho $k+1$ de u para v.

✓

© Menininhas

tilibra

(44) Prove que todo segmento de caminho mínimo e um grafo G, é caminho mínimo em G.

Vamos tentar provar que um segmento de caminho mínimo, não é caminho mínimo em G.
Se um caminho de u à v é mínimo, vamos considerar um segmento de x à y. Se ele não for mínimo, há um outro caminho de x a y que é mínimo. Mas como de u a v passa por x e depois por y, então ele também usaria o outro caminho por ser mais curto, então de u à v também não é caminho mínimo. Mas sabemos que é, então de x a y também é.

(45) Descreva em palavras os grafos k-regulares para $k \in \{0,1,2\}$

k-regular → todos os vértices tem grau k.
Para $k=\emptyset$, todos os vértices não tem arestas.
Para $k=1$, temos n pares de vértices, conectados 2 a dois.
Para $k=2$, temos n circuitos

(46) Prove que se P e Q são dois caminhos de tamanho máximo em um grafo conexo G, então P e Q tem um vértice em comum.

Vamos dizer que P e Q são dois caminhos distintos, máximos em G com tamanho n. Então P passa por $u_0, u_1 \ldots u_n$ e Q: $v_0, v_1 \ldots v_n$.
Como o grafo é conexo então tem que haver um conjunto de arestas ligando algum u à algum v: $w_0 \ldots w_j$. Mas daí P e Q não seriam mais caminhos máximos pois teria o caminho

(47) Seja G um grafo conexo e seja P um caminho de tamanho máximo em G. Prove que o tamanho de um caminho de tamanho máximo em $G - V(P)$ é menor que $|P|$. Por (46) para ter dois caminhos máximos de tamanho m, eles devem ter algum vértice em comum. Mas neste caso quando tiramos $V(P)$ então perderíamos os dois caminhos máximos. Então qualquer caminho encontrado deve ser menor que o caminho máximo de G.

✓

(48) É verdade que existe circuito num grafo se e somente se existe um passeio fechado nesse grafo? Justifique

Passeio fechado: passeio em que suas pontas coincidem. Circuito: trilha fechada cujos vértices internos são todos distintos

É verdadeiro. Se existe um passeio, então vai-se da aresta v e chega-se nela novamente. Mesmo se nesse passeio houvesse uma repetição de vértices: $v_0, \ldots v_i, \ldots v_i, \ldots v_0$. Seria possível cortar parte deste passeio transformando-o num circuito: $v_0, \ldots, v_i, \ldots v_0$. Se existe um circuito, este circuito já é um passeio. Está provado para os dois lados.

✓

49) Seja G um grafo e seja G'' o grafo que se obtém ao acrescentar à G um novo vértice v e uma aresta ligando cada vértice de G.

Prove que G'' é hamiltiano se e somente se G tem caminho hamiltiano.

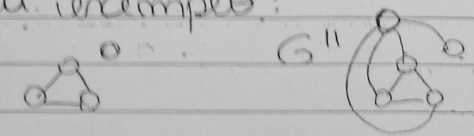
Caminho hamiltiano - um caminho que passa por todos os vértices de G.

Se G é hamiltiano então existe um caminho que passa por todos os vértices: $u_0, \dots, u_n$.
O novo vértice de G'' é ligado com todos os vértices de G. Chamaremos esse vértice de v.
Então existe o caminho hamiltiano: $u_0, \dots, u_n, v$.

Agora vamos provar que G é hamiltiano se G'' é hamiltiano. Mas isso é falso

Contra-exemplo:

G: G''



· GRAFO HAMILTONIANO: QUE CONTÉM CICLO HAMILTONIANO

· CAMINHO HAMILTONIANO NÃO PRECISA SER CICLO

– SE G'' É HAMILTONIANO, HÁ CICLO HAMILTONIANO $= (u_0, u_1, \dots u_n, V, u_0)$, E DEPOIS DE REMOVER V E OBTER G AINDA TEMOS UM CAMINHO HAMILTONIANO EM $G = (u_0, u_1, \dots u_n)$.

(50) Explique como detectar se um grafo G tem triângulos (circuitos de tamanho 3) em tempo $O(|V(G)|^2)$.

(51) Prove que $\gamma(G) > 3$ se e somente se as vizinhanças de u e v são ~~distintas~~ disjuntas $\forall$ aresta $\{u,v\} \in A(G)$.

$\gamma(G) \to$ tamanho de seu menor circuito.

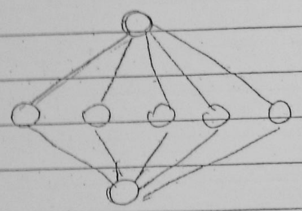
disjuntas $\Rightarrow$ u e v não tem um vizinho em comum

Vamos considerar que o menor circuito tem os vértices u e v, e que há uma aresta (u,v). Saímos de u, passamos por n outras arestas, daí chegamos em v, e depois para u, fechando o circuito: $u, u_0, \dots v, u$. Como u e v são disjuntos, então não pode ter só u_0, então n deverá ser maior que um. Incluindo u e v (+2). Então deverá ter mais que 3 no circuito mínimo.

(52) Prove que se d e d' são os graus dos dois vértices de maior grau em G e $\gamma(G) > 3$, então G tem pelo menos $d+d'$ vértices.

Como $g(G) > 3$, temos por (51) que todas as vizinhanças são disjuntas

Contra-exemplo:



$d = 5$

$d'' = 5$

$d + d' = 10$

$|V(G)| = 7$

(53) Prove que todo grafo k-regular de cintura 5 tem pelo menos $2k$ vértices.

52

(54) Prove que os componentes de um grafo G são caminhos ou circuitos se e somente se $\Delta(G) \leq 2$.

$\Delta(G) \rightarrow$ grau máximo do grafo
caminho $\rightarrow$ passeio cujos vértices são todos distintos
circuito $\rightarrow$ trilha fechada com vértices distintos

Vamos provar a ida e a volta

Se nossos componentes são caminhos ou circuitos então $\Delta(G) \leq 2$.

Um caminho é representado assim:
$u_0, u_1, \ldots u_n$. Com cada u_i diferente um do outro. Como u_0 e u_n tem grau 1 e $u_2 \ldots u_{n-1}$ tem grau 2, então eles tem $\Delta(G) \leq 2$

Um circuito é representado assim:
$v_0, v_1, \ldots, v_0$. Com cada v_i diferente, a não ser v_0. V_0 tem grau 2, assim como todos os outros vértices. Está provado

Agora vamos provar que se $\Delta(G) \leq 2$ então todos os componentes são caminhos ou circuitos.

Vamos dizer que $\Delta(G) > 2$. Então esse grafo não é mais um caminho pois para o vértice com grau maior que 3 vai ter que passar mais do que uma vez por ele, quebrando a definição de caminho. Também não será mais circuito pois para cada vértice interno não pode passar por mais de uma vez nele. E na ponta ele pode sair e no final entrar. Mas não pode usar o terceiro grau para sair novamente. Como $\Delta(G) > 2$ não pode ser nem circuito nem caminho, então $\Delta(G)$ deverá ser menor que 2

(55) Prove que todo grafo G tem

a) caminho de tamanho (pelo menos) $\delta(G)$

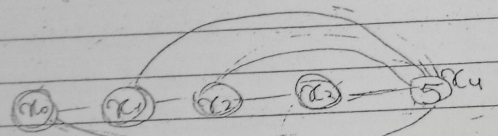
b) circuito de tamanho (pelo menos) $\delta(G)+1$, se $\delta(G) \geq 2$.

a) Consideramos que o caminho C passe por $x_0, x_1, \dots, x_k$ e seja o maior caminho. Então todos os vizinhos de x_k estão em $V(P)$

Então tamanho de $(x_0, x_1 \dots x_k) = k$ e

$k \geq \delta(x_k) \geq \delta(G)$

$\delta(G) = 4$



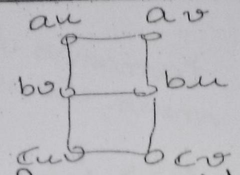
b) Seja $i < k$ o mais longe de k em um caminho $x_0, x_1, \dots, x_k$, tal que $(x_i, x_k) \in A(G)$.
Então $v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_i$ é um ciclo de tamanho com tamanho maior ou igual a $\delta(G)+1$, pois todos os vizinhos de v_k estão no ciclo.

64

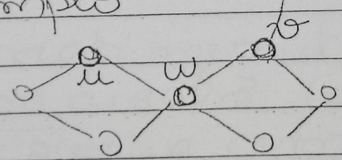
(56) Prove que, se $k \geq 1$, então todo grafo k-regular tem
a) um caminho de tamanho k
b) um circuito de tamanho pelo menos k+1.

a) O grau mínimo de um grafo k-regular é k. Então $\delta(G) = k$. Usando (55) então todo grafo com grau mínimo k tem pelo menos um caminho de tamanho k.

b) grau mínimo $\delta(G)+1$ será $k+1$. Usando (55b), então tem um circuito de tamanho pelo menos $\delta(G)+1$ ou $k+1$.



(54) Seja G um grafo e considere a relação
∘: V(G) → V(G) dada por
u ∘ v := existe circuito em G envolvendo u e v.
A relação ∘ é uma relação de equivalência? Justifique
Reflexiva u∘u: Verdadeiro pois existe o circuito de tom u.
Simétrica v∘u: Verdadeiro pois os dois continuam no circuito.
Transitiva u∘w e w∘v. Então u∘v.
Falso. Exemplo



Não é uma relação de equivalência.

(56) relação ∘E(G) → E(G) dada por a∘b := existe circuito em G envolvendo a e b. É uma relação de equivalência?
Reflexiva. a∘a. Verdadeiro pois a aresta a está no circuito
Simétrica b∘a. Continuam no circuito
Transitiva a∘b e b∘c. Então a∘c.
Verdadeiro. Vértices de a serão au e av
Etc. O circuito contendo a e b:
(au, av, x_0, ... x_i, bu, bv, x_{i+1}, .. x_n, au) E b
(bu, bv, y_0, ... y_i, cu, cv, y_{i+1}, ... y_m, bu).
Então existe o circuito:
(au, av, x_0, ... x_i, bu, , y_0, ... y_i, cu, cv, y_{i+1}, ... y_m, bv, x_{i+1}, x_n, au)

© Menininhas

tilibra

maior distância entre dois vértices

tamanho de menor circuito

(57) Prove que diam(G) $\geq \frac{g(G)}{2}$ $\forall$ grafo G.

Prova por contradição. Assumiremos que $g(G) \geq 2d(G)+2$ e que C é o menor ciclo. Então C tem dois vértices u e v cuja distância é pelo menos d(G)+1. Em G, u e v devem ter distância menor pois o diâmetro de G do grafo é d(G). Então deve existir um caminho mais curto entre u e v. Então o ciclo na verdade é menor usando esse novo caminho entre u e v.

Se u e v tiverem dois caminhos do mesmo tamanho d(G). Então o ciclo será usando os dois caminhos, ou seja 2d(G). Então d(G) $\geq$ g(G)/2.

(58) Seja G um grafo e seja D(G) o grafo direcionado dado por V(D(G)) = V(G)

$$A(D(G)) = \bigcup_{\{u,v\} \in A(G)} \{(u,v),(v,u)\}$$

Prove que G é hamiltiano se e somente se D(G) é hamiltiano.

Se em G temos um caminho hamiltiano, então em D(G) também teremos um caminho usando os {u,v} criados de cada aresta de G.

Se D(G) é hamiltiano, então G também será pois o caminho direcionado em D(G) pode ser usado novamente, mas agora não consideramos direção.

© Menininhas

tilibra

61) Prove que o grafo condensado de um grafo direcionado acíclico é um grafo direcionado acíclico.

Se houvesse um ciclo em um grafo condensado poderíamos chegar de qualquer componente nesse ciclo para qualquer outro componente nesse ciclo. Mas então esses componentes deveriam ser um componente só, e não vários. Então nenhum grafo, acíclico ou não, tem um grafo condensado com ciclos.

Árvores e Florestas

~~(60)~~ (61)

(63) Prove que se G é um grafo conexo com $|V(G)|-1$ arestas, então G é árvore. (não tem ciclos)

Vamos provar por indução em $|V(G)|$

BASE: $|V(G)|=1$. É apenas um vértice ñ tem ciclos.

HIPÓTESE: temos uma árvore v com n vértices e $n-1$ arestas, chamada T

PASSO: adicionando um vértice em T, temos $n+1$ vértices e n arestas. Ou seja, adicionamos um vértice e uma aresta. Como o grafo é conexo, esta aresta deve ligar o novo vértice à um dos vértices de T. Ou seja o vértice v, participa da aresta nova: $\{v, x\}$ e x é um dos vértices de T. Adicionando a aresta e o vértice a T, não tem como criar nenhum novo ciclo. Então o novo T também é acíclico. Então está provado.

~~(61)~~ (62)

(64) Prove que toda árvore T tem (pelo menos) $\Delta(T)$ folhas.

Se o vértice v tem grau máximo $=k$. Existem k caminhos diferentes saindo de v. E cada caminho máximo saindo em cada uma das direções, termina em uma folha. E as folhas são distintas, senão teríamos um ciclo e não seria uma árvore.

(65) Prove que se T é uma árvore então
$|T-v| = \delta_T(v)-1, \ \forall \ v \in V(T)$.

(66) Dê um exemplo de um grafo com $c>1$ componentes, n vértices e $n-c$ arestas que não é floresta.
Não é possível tem que haver componente com menos número de arestas menor ou igual ao número de vértices do componente e isso não é possível

(67) É verdade que todo grafo de n vértices com n (ou mais) arestas tem circuito? Justifique.
É verdade, pois quando tem $n-1$ arestas é uma árvore, por (63). E adicionando uma aresta nessa árvore, obrigatoriamente criamos um circuito.

(6)

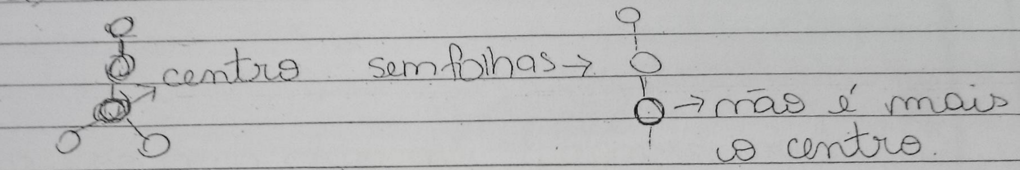
(68) Um vértice v é central em um grafo G se a maior distância de v a qualquer outro vértice de G é a menor possível, isto é, se

$\max\{d_G(v,u) \mid u \in V(G)\}$ é mínimo.

a) T com $|V(G)| \geq 3$. $T' = T - F$, F é o conjunto de folhas de T. Prove que T e T' tem os mesmos centros.

b) Conclua daí que toda árvore tem um único centro ou tem 2 centros vizinhos.

a) CONTRA EXEMPLO



Vamos provar pra quando tem um único centro. Então a distância pro topo da árvore é igual pras folhas da árvore = d. Retirando as folhas a distância para as folhas será d-1 e distância para o topo continua d. Então a maior distância continua d. Se trocassemos o centro um para cima, não faria diferença na distância, então o centro continua o mesmo.

b) A maior distância entre o topo e uma de suas folhas será d. Temos que pegar o meio disso ou seja d/2. Se o caminho tiver par de vértices terá um unico centro. Se for impar, terá 2 centros vizinhos.

67

(69) Prove que uma sequência $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ de inteiros positivos é sequência gráfica de uma árvore se e somente se $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$.

Somando todos os di de um lado temos a soma de todos os graus do vértice ou pelo teorema 1, duas vezes o número de arestas: $2A(G)$. No outro lado temos $2(n-1)$ que é $2n-2$. Ou seja $2|A(G)| = 2n-2$, ou seja: $A(G) = n-1$. Como n é o número de vértices. E pelo teorema 21 $|E(G)| = |V(G)|-1$ Então está provado.

(70) Prove que um grafo direcionado G tem arborescência geradora se e somente se G tem um vértice r a partir do qual todo vértice de G é alcançável.

(69)

69/70 É possível que toda aresta/vértice de um grafo não trivial seja de corte.

Arestas sim, mas somente quando o grafo é uma árvore (não contem ciclos)

Vértices não pois se cortarmos um vértice da raiz ou da folha de uma árvore, não cria mais componentes.

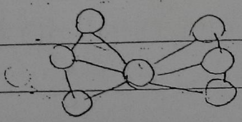
71) Dê um exemplo de um grafo G para o qual $\kappa(G) < \lambda(G) < \delta(G)$. É verdade que $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ $\forall$ G? Justifique.

$\kappa(G) \rightarrow$ tamanho do menor corte de vértices

$\lambda(G) \rightarrow$ tamanho do menor corte de arestas

$\delta(G) \rightarrow$ grau mínimo de um grafo

Exemplo:



$\kappa(G) = 1$

$\lambda(G) = 2$

$\delta(G) = 2$

(77) É verdade que se um grafo com pesos (G, w) é tal que os pesos das arestas são todos distintos entre si tem uma única árvore geradora mínima? Justifique.

Sim pois o algoritmo AGM que constrói a árvore mínima sempre escolhe a aresta da fronteira atual que tem o peso mínimo. Como todas as arestas tem pesos diferentes, sempre será criado a mesma árvore, e essa árvore é a árvore geradora mínima.

(78) Prove que se (G, w) é um grafo conexo com pesos então existe uma arborescência de caminhos mínimos geradora de G com raiz v para todo $v \in V(G)$.

O algoritmo CM tem como entrada um grafo e o vértice que será a raiz, e devolve a árvore geradora mínima. Podemos dar como entrada qualquer $v \in V(G)$.

19) Prove que uma arborescência em um grafo G é de caminhos mínimos se e somente se é arborescência em largura de G.

Vamos primeiro provar que se uma arborescência é em largura de G então é uma arborescência de caminhos mínimos.

Sabemos que toda aresta em G-T é uma aresta ligando vértices cujas distâncias à raiz de T diferem de no máximo 1. Então se ao invés de T tivessemos escolhido outra aresta, esta aresta teria ou a mesma distância ou uma distância de tamanho 1 maior. Portanto a árvore gerada é mínima.

Vamos provar agora que se arb. em um grafo G é de caminhos mínimos então é arborescência em largura de G.

Vamos considerar que não é arborescência em largura, portanto existe uma aresta (u,v) ligando o vértice u e v que estão com diferença de distância até a raiz maior que 1 em G-T. Mas então para chegar aos vértices cujo ancestral é v, seria mais curto usar (u,v) do que o atual (x,v) portanto a atual arborescência não é mínima. Portanto se tem caminhos mínimos então é arborescência em largura.

Como está provado a ida e volta, provamos que é verdade

80) Caracterize

a) as árvores em largura de um grafo completo

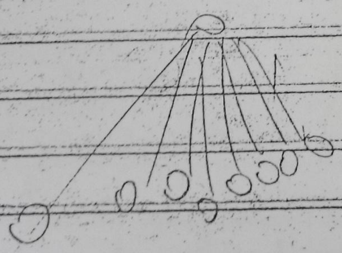
Em um grafo completo, a árvore tem dois níveis, no primeiro tem só a raíz e no segundo nível estão todos os outros vértices conectados com a raíz.

b) as árvores em profundidade de um grafo completo

Tem o mesmo número de níveis do número de vértices do grafo. E cada nível tem apenas um vértice

81) Seja T uma árvore de distâncias mínimas de raiz r de um grafo com pesos (G, w). Prove que

$$\text{diam}(T) \leq 2\,\text{diam}(G).$$



(82) Proponha um algoritmo baseado no algoritmo de busca em largura para detectar um circuito de tamanho ímpar em um grafo, caso exista.

BuscaCircuito (G, r)
    Q ← fila vazia
    r.pai ← λ   r.dist = 0
    enfile r em Q
    Enquanto Q ≠ ∅
        Desenfile o primeiro vértice de Q
            Para cada u ∈ $\Gamma_G(v)$
                Se u.pai = λ
                    u.pai ← v
                    enfile u em Q
                    u.dist ← u.pai.dist + 1
    Para todo (u, v) ∈ G − T
        Se u.dist = v.dist
            return "existe circuito ímpar"

(83) Prove que um vértice de um grafo G faz parte de dois blocos distintos de G se e somente se é vértice de corte.
Por definição um bloco de um grafo é o subgrafo maximal conexo de G que não contem nenhum vértice de corte.
Vamos primeiro provar que se um vértice faz parte de dois blocos distintos então é vértice de corte.
Vamos dizer que o vértice v faz parte do bloco A e do bloco B e ele não é vértice de corte. Como não é vértice de corte deve existir algum u_A em A que tem uma aresta com algum u_B em B. Mas nesse caso como existe a aresta (u_A, u_B), na verdade A e B deveriam ser um bloco só, portanto não é possível ter um vértice em blocos diferentes e que não seja de corte.
Vamos provar a volta: se v é vértice de corte então pertence a dois blocos distintos.
Vamos assumir que o vértice v seja de corte, mas pertence apenas ao bloco A. Ou seja retirando ele divide A em 2 ou mais componentes. Mas isso vai contra a definição que diz que o bloco não contém nenhum vértice de corte. Portanto o vértice v deve pertencer a pelo menos 2 blocos.
Provamos a ida e volta, portanto está provado.

(84) Seja T uma arborescência em profundidade geradora de um grafo G. Prove que

a) A raiz de T é vértice de corte de G se e somente se tem mais de um filho.

Se a raiz r é vértice de corte então tem mais de um filho. Vamos dizer que r só tem um filho e é vértice de corte. Retirando r não terá mais componentes, então não seria de corte, portanto r tem mais de um filho.

Vamos provar que se r tem mais de um filho então é vértice de corte. Uma árvore não tem nenhum ciclo, portanto nenhum descendente de (r, u) tem uma aresta em comum com algum descendente de (r, v). Retirando r, não teria nada conectando os descendentes de u, com os de v, portanto teríamos dois componentes portanto r é de corte.

b) Um vértice v que não é raiz de T é vértice de corte de G se e somente se tem um filho w tal que nenhum descendente de w é vizinho de um ancestral próprio de v.

Primeiro provar que se v é vértice de corte então tem um filho w tal que nenhum descendente de w é vizinho de um ancestral próprio de v

Se existisse um w', que é descendente de w que tem uma aresta ligando com um ancestral u de v, então existiria um caminho ... $u, w', \dots w''$, onde w'' representa qualquer descendente de w', portanto v não seria vértice de corte.
Se para todo filho w, existisse arco de retorno então v não seria vértice de corte.
Prova volta: Se tem um filho w de v tal que nenhum descendente de w é vizinho de um ancestral próprio de v então v é vértice de corte de G.

V V V
V F F

(86) Prove que um grafo direcionado G admite ordenação topológica se e somente se é acíclico.

Primeiro provaremos um grafo direcionado G admite ordenação topológica então é acíclico.

Em uma ordenação topológica temos uma ordem total que respeita todas as direções dos arcos. Se temos um ciclo como $a \to b$, $b \to c$, $c \to a$. Então é impossível ter uma ordem total, pois ao mesmo tempo c deverá estar antes e depois de a. Portanto se G tem ordenação topológica então é acíclico.

Vamos provar agora que se G é acíclico então admite ordenação topológica.

Se não tem ciclos, então no grafo G existe um vértice v_0 que não depende de ninguém. E escolhemos este primeiro na ordenação topológica. Retirando ele, agora aparecem mais vértices que não dependem de ninguém ou só dependiam de v_0 que já está na ordenação topológica. Podemos seguir esses passos até completar a ordenação topológica.

(87) Modifique Ordenação Topológica, para que
a) devolva uma ordenação topológica se é acíclico
b) ou um circuito direcionado de G, caso contrário.

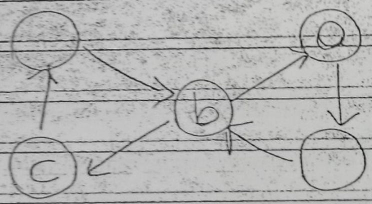
Ordena (G, r)
r. processado ← verdadeiro
Para cada v ∈ $\Gamma^+(r)$
Se NÃO v.Processado
Verifica (v, G)
v.pai ← r
Ordena (G, v)
Acrescente r ao início de G ℓ

Verefica (v, G)
Para cada u ∈ G ℓ
if (v, u) ∈ A(G)

(88) Seja G um grafo direcionado. Prove que
a) a relação ~ sobre os vértices de G dada por
$u \sim v :\equiv$ ($u = v$ ou existe circuito direcionado em G)
envolvendo u e v é uma relação de equivalência.

relação de equivalência

reflexividade → Está provado pois pelo enunciado
u pode ser igual a v
simetria aRB → bRA. → Ou são iguais ou
os dois pertencem a um circuito. Não importa
a ordem de u e v em um circuito
aRb, bRc → aRc. No caso em que não são
iguais. CONTRAEXEMPLO



$\partial_G(X)$

(90) Prove que um grafo G é bipartido se e somente se $E(G) = \partial_G(X)$ para algum $X \subseteq V(G)$ e que, neste caso, X, $V(G)-X$, é uma bipartição de G.

$\Rightarrow$ Se um grafo é bipartido então $E(G)=\partial_G(X)$ para algum $X \subseteq V(G)$

Se um grafo é bipartido então podemos separa-lo em dois grupos A e B. A só tem arestas indo para B e B para A. Um vértice de A não tem nenhuma aresta indo para outro vértice de A e o mesmo com B. Portanto todas as arestas de G estão com uma ponta em A e outra em B. Então se escolhermos o conjunto A e pegarmos a vizinhança de fora, teremos B. Portanto $E(G)=\partial_G(X)$

$\Leftarrow$ Se $E(G)=\partial_G(X)$ então G é bipartido

Temos um conjunto X e pegamos todos os vizinhos de fora dele que chamaremos de B. Como $E(G)=\partial_G(X)$, então todas as arestas de G vão de A para B. Portanto G é bipartido

91) Prove que se X, Y é uma bipartição do grafo G, então G tem no máximo $|X||Y|$ arestas.

O numero maior de arestas que podemos ter é de todos do conjunto X com todos do conjunto Y. Escolhendo X: cada elemento liga com todos de Y. Portanto tem $|X||Y|$ arestas.

(92) Prove que um grafo bipartido de n vértices tem no máximo $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arestas

Usaremos o seguinte fato.

$\max(x * y \mid n = x + y)$

se n par: $x = y$ $\quad x * x$

e n ímpar: $x = y + 1$ $\quad x * (x - 1)$

Por (91) temos que um grafo tem no máximo $|X||Y|$ arestas. Com $|X| + |Y| = n$ vértices. No caso par, para maximizar faremos $|X| = |Y|$. Portanto $n = 2|X|$, $|X| = n/2$. O número de arestas é $|X|^2$. Substituindo teremos $(n/2)^2$ ou $n^2/4$

No caso ímpar $|X| + |X - 1| = n$ $\quad |X| + |X| - 1 = n$

$2|X| = n - 1$, $|X| = n - 1/2$, $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 =$ [illegible]^2 que é menor que $n^2/4$ Está provado

(94) Prove que um grafo é bipartido se e somente se não tem circuito ímpar

$\Rightarrow$ X e Y denotamos os conjuntos bipartidos, e o ciclo C é $v_1, v_2, \ldots v_m v_1$. Se assumirmos que v_1 está em X, então $v_2, v_4, \ldots$ está em Y. E $v_1, v_3 \ldots$ está em X. Então v_p está em X se p é ímpar e em Y se é par. Como v_m vem antes de v_1, então v_m é par e está em Y, portanto C é um circuito par.

$\Leftarrow$ Let v be a vertex of G, and define the set X to be: $X = \{x \in V(G) \mid$ the shortest path from x to v is even$\}$ an let $Y = V(G) \setminus X$. Now let x and x' be vertices of X, and suppose that x and x' are adjacent. If $x = v$ then the shortest path from x to x' has to be one. But this implies that $x' \in Y$, a contradiction. So $x \neq v$ and $x' \neq v$. Let P1 be a path from v to x of shortest length and P2 be a shortest v-x' path. P1 is $v = v_0, v_1, \ldots v_{2k} = x$ and P2 $\Rightarrow v = w_0, w_1, \ldots w_{2t} = x'$. P1 & P2 have v in common