Analysis für Informatiker 2012/13

bei Prof. Dr. Lau

October 11, 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen

1.1 Definition

1)
Eine Menge ist eine Ansammlung verschiedener Objekte.

2)
Die Objekte einer Menge heißen Elemente.

Notation:
$a \in M$ heißt: a ist Element der Menge M
$a \notin M$ heißt: a ist kein Element der Menge M **3)**

Sei M eine Menge. Eine Menge U heißt Teilmenge von M, wenn jedes Element von U auch ein Element von M ist.

Notation:
$U \subseteq M$ heißt: U ist Teilmenge der Menge M
$U \nsubseteq M$ heißt: U ist keine Teilmenge der Menge M

1.2 Beispiele

1)
Sei M die Menge aller Studierenden in L1,
W die Menge aller weiblichen Studierenden in L1,
F die Menge aller Frauen.

Dann gilt: $W \subseteq M, W \subseteq F, M \nsubseteq F, F \nsubseteq M$.

2)
Die Menge der natürlichen Zahlen: $+N = \{1, 2, 3, ..\}$

G sei Menge der geraden natürlichen Zahlen.
$G := \{n \in \mathbb{N} |\ n \text{ gerade } \}$
$:= \{2m | m \in \mathbb{N}\}$
$:= \{2, 4, 6, 8, ...\}$

Es gilt $G \subseteq \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \nsubseteq G$.

3)
Die Menge der ganzen Zahlen:
$\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, ...\}$

4)
Menge der rationalen Zahlen:
$\mathbb{Q} = \frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

5)
Die Menge ohne Elemente heißt <u>leere Menge</u>.
Symbol: $\emptyset = \{\}$

$\boxed{\text{Bemerkung}}$

Für jede Menge M gilt: $\emptyset \subseteq M$
$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

1.3 Definition

Sei M eine Menge, $U, V \subseteq M$ Teilmengen.

1)
Die Vereinigung von U und V ist $U \cup V := \{x \in M | x \in U \text{ oder } x \in V\}$

2)
Der Durchschnitt von U und V ist $U \cap V := \{x \in M | x \in U \text{ oder } x \in V\}$

3)
Die Differenzmenge von U und V ist $U/V := \{x \in U | x \notin V\}$

4)
Das Komplement von U ist $U^c = M/U = \{x \in M | x \notin U\}$

Beispiel
Sei $M = \mathbb{N}$.
$\{1, 3\} \cup \{3, 5\} = \{1, 3, 5\}$
$\{1, 3\} \cap \{3, 5\} = \{3\}$
$\{1, 3\} \cap \{2, 4, 7\} = \emptyset$,also sind $\{1, 3\}$ und $\{2, 4, 7\}$ disjunkt.
$\{1, 2, 3\}/\{3, 4, 5\} = \{1, 2\}$
$\{1, 3, 5\}^c = \{2, 4, 6, 7, 8, ...\}$

1.4 (de Morgansche Regeln)

M Menge, $U, V \subseteq M$ Teilmengen.

1) $(U \cup V)^c = U^c \cap V^c$
2) $(U \cap V)^c = U^c \cup V^c$

Beweis

1)
Sei $x \in M$. Es gilt:
$x \in (U \cup V)^c \Leftrightarrow x \notin U \cup V \Leftrightarrow x \notin U$ und $x \notin V$
$\Leftrightarrow x \in U^c$ und $x \in V^c \Leftrightarrow x \in U^c \cap V^c$

$\square$

2)
Übungsaufgabe

Vollständige Induktion

1.5 Prinzip der vollständigen Induktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben.
Ziel: Beweisen, dass $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.
Dafür reicht es zu zeigen:

1)
Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr.

2)
Induktionsschritt: Wenn für ein $n \in \mathbb{N}$ $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr.

1.6 Satz / Beispiel

Für jede natürliche Zahl n gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Probe:

n	1	2	3	4
$1 + 2 + ... + n$	1	3	6	10
$\frac{n(n+1)}{2}$	1	3	6	10

Beweis des Satzes (mit Induktion)

Abkürzung: $S(n) = 1 + 2 + ... + n$
Aussage: $A(n) : S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

1) IA: $n = 1$ $S(1) = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$
2) IS: $n \to n + 1$

Annahme: $A(n)$ gilt, $S(n) = \frac{n(n-1)}{2}$
Zu zeigen: $A(n+1)$ gilt, $S(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$S(n+1) = S(n) + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Dies beendet den Beweis. $\square$

Zur Vereinfachung der Notation: Seien a_1, a_2, a_3,...,a_n Zahlen $n \in \mathbb{N}$
Setze $\sum\limits_{k=1}^{n} := a_1 + a_2 + ... + a_n$

Allgemeiner: Sei $l, m \in \mathbb{N}, l \leq m \leq n$
$\Rightarrow \sum\limits_{k=l}^{m} a_k := a_l + a_{l+1} + ... + a_m$

Aussage von Satz 1.6:
$\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Kombinatorik

1.7 Definition

Seien A,B Mengen. Das kartesische Produkt von A und B ist definiert als $A \times B := \{(a,b)|a \in A, b \in B\}$
Die Elemente von $A \times B$ heißen geordnete Paare.

Beispiel: $\{1,7\} \times \{2,3\} = \{(1,2),(1,3),(7,2),(7,3)\}$

Allgemeiner: Gegeben seien Mengen $A_1, ..., A_k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Das kartesische Produkt von $A_1, ..., A_k$ ist $A_1 \times ... \times A_k = \{(a_1, ..., a_k)|a_i \in A_i \text{ für } i = 1, ..., k\}$
Elemente von $A_1 \times ... \times A_k$ heißen k-Tupel.
Falls $A_1 = A_2 = ... = A_k = A$, schreibe auch $\underbrace{A \times ... \times A}_{k-Mal} = A^k$

1.8 Definition

Eine Menge A ist endlihc, wenn A nur endlich viele Elemente hat. Dann bezeichnet $\#A = |A|$ die Anzahl der Elemente von A.
Wenn A nicht endlich ist, dann schreiben wir $\#A = \infty$.

Beispiele: $\#\emptyset = 0$, $\#\mathbb{N} = \infty$, $\#\{1,3,5,1\} = 3$

1.9 Bemerkung

1)
Sei A Menge, $U, V \subseteq A$ <u>disjunkte</u> Teilmengen.
Dann: $\#(U \cup V) = \#U + \#V$

2)
Seien $A_1, ..., A_k$ endliche Mengen, $k \in \mathbb{N}$.
Dann: $\#(A_1 \times A_2 \times ... \times A_k = \#A_1 \cdot \#A_2 \cdot ... \cdot \#A_k$

1.10 Definition

1)
Für $n \in \mathbb{N}$ setze $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = \prod\limits_{k=1}^{n} k$ $\quad \leftarrow$ Produkt
Setze $0! = 1$

2)
Für $k, n \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq k \leq n$ sei $\binom{n}{k := \frac{n!}{k!(n-k)!}}$ $\quad \leftarrow$ <u>Binomialkoeffizient</u>

– TABELLE –

Beispiel: $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$

Bemerkung: $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

1.11 Lemma

Für $0 \leq k \leq n$ gilt: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Beweis
$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$
$= \frac{k(n-k)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

$\square$