Линейные операторы в n-мерном пространстве

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

QR-код презентации

20 февраля 2021 г.

Аннотация

Линейные операторы в n-мерном пространстве. Подобные матрицы. Определитель оператора. Обратный оператор. Характеристические числа и собственные векторы линейного оператора. Две теоремы о собственных векторах. Линейные операторы простой структуры.

Векторное пространство

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A} : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$, *отображающий n-мерное векторное пространство* R^n *само в себя, называется* ***линейным оператором в*** R^n.

Векторное пространство

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A} : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$, *отображающий n-мерное векторное пространство* R^n *само в себя, называется* *линейным оператором в* R^n.

Особенности линейных операторов над R^n

Векторное пространство

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A} : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$, *отображающий n-мерное векторное пространство* R^n *само в себя, называется* *линейным оператором в* R^n.

Особенности линейных операторов над R^n

1) Существует оператор $\mathcal{E}$ (называемый единичным) такой, что для любого вектора $\vec{x}$ из R^n

$$\mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}.$$

Векторное пространство

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A} : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$, *отображающий n-мерное векторное пространство* R^n *само в себя, называется линейным оператором в* R^n.

Особенности линейных операторов над R^n

1) Существует оператор $\mathcal{E}$ (называемый единичным) такой, что для любого вектора $\vec{x}$ из R^n

$$\mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}.$$

2) Для любого оператора $\mathcal{A}$ из R^n справедливо соотношение

$$\mathcal{A}\mathcal{E} = \mathcal{E}\mathcal{A} = \mathcal{A}.$$

О матрице соответствующей линейному оператору в R^n

Выберем базис в R^n: $\vec{e_1}, ..., \vec{e_n}$.

О матрице соответствующей линейному оператору в R^n

Выберем базис в R^n: $\vec{e_1}$, ..., $\vec{e_n}$. В этом базисе оператору $\mathcal{A}$ соответствует квадратная $n \times n$ матрица A.

О матрице соответствующей линейному оператору в R^n

Выберем базис в R^n: $\vec{e_1}$, ..., $\vec{e_n}$. В этом базисе оператору $\mathcal{A}$ соответствует квадратная $n \times n$ матрица A. Столбцы этой матрицы составлены из координат вектора $\mathcal{A}\vec{e_j}$ в базисе $\vec{e_i}$ $i, j = \overline{1, n}$.

О матрице соответствующей линейному оператору в R^n

Выберем базис в R^n: $\vec{e_1}$, ..., $\vec{e_n}$. В этом базисе оператору $\mathcal{A}$ соответствует квадратная $n \times n$ матрица A. Столбцы этой матрицы составлены из координат вектора $\mathcal{A}\vec{e_j}$ в базисе $\vec{e_i}$ $i, j = \overline{1, n}$.

$$A = \left(\ \mathcal{A}\vec{e}_1 \ \middle| \ \mathcal{A}\vec{e}_2 \ \middle| \ \ldots \ \middle| \ \mathcal{A}\vec{e}_n \ \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

О действиях над линейными операторами в R^n

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ – линейные операторы в R^n.

О действиях над линейными операторами в R^n

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ – линейные операторы в R^n. Пусть A, B, C – $n \times n$ матрицы соответствующие линейным операторам $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$,

О действиях над линейными операторами в R^n

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ – линейные операторы в R^n. Пусть A, B, C – $n \times n$ матрицы соответствующие линейным операторам $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, а x – вектор столбец из координат вектора $\vec{x}$, в базисе $\vec{e_i}$ $(i = \overline{1, n})$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, тогда

О действиях над линейными операторами в R^n

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ – линейные операторы в R^n. Пусть A, B, C – $n \times n$ матрицы соответствующие линейным операторам $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, а x – вектор столбец из координат вектора $\vec{x}$, в базисе $\vec{e_i}$ $(i = \overline{1,n})$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, тогда

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad C = A + B;$$

О действиях над линейными операторами в R^n

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ – линейные операторы в R^n. Пусть A, B, C – $n \times n$ матрицы соответствующие линейным операторам $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, а x – вектор столбец из координат вектора $\vec{x}$, в базисе $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, тогда

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad C = A + B;$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad C = AB;$$

О действиях над линейными операторами в R^n

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ – линейные операторы в R^n. Пусть A, B, C – $n \times n$ матрицы соответствующие линейным операторам $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, а x – вектор столбец из координат вектора $\vec{x}$, в базисе $\vec{e_i}$ $(i = \overline{1, n})$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, тогда

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad C = A + B;$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad C = AB;$$

$$\mathcal{C} = \alpha\mathcal{A} \quad \Leftrightarrow \quad C = \alpha A.$$

(Доказательство вытекает из определения операций).

Следствие

Множество линейных операторов линейно относительно сложения и умножения на число.

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть $\mathcal{E}$ – единичный оператор в R^n,

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть $\mathcal{E}$ – единичный оператор в R^n, т.е. $\forall \vec{x} \in \mathrm{R}^n \ \mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$.

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть $\mathcal{E}$ – единичный оператор в R^n, т.е. $\forall \vec{x} \in \mathrm{R}^n \; \mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$.
Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть $\mathcal{E}$ – единичный оператор в R^n, т.е. $\forall \vec{x} \in \mathrm{R}^n \ \mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$.
Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ – разложение вектора $\vec{x}$ по базису пространства R^n $\vec{e}_i$ $i = \overline{1, n}$.

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть $\mathcal{E}$ – единичный оператор в R^n, т.е. $\forall \vec{x} \in \mathrm{R}^n$ $\mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$.
Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ – разложение вектора $\vec{x}$ по базису пространства R^n $\vec{e}_i$ $i = \overline{1,n}$.
Тогда

$$\mathcal{E}\vec{e}_1 \quad = \quad 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{e}_n$$

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть $\mathcal{E}$ – единичный оператор в R^n, т.е. $\forall \vec{x} \in \mathrm{R}^n\ \mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$.
Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ – разложение вектора $\vec{x}$ по базису пространства R^n $\vec{e}_i$ $i = \overline{1, n}$.
Тогда

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\vec{e}_1 &= 1\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 + \ldots + 0\cdot\vec{e}_n \\
\mathcal{E}\vec{e}_2 &= 0\cdot\vec{e}_1 + 1\cdot\vec{e}_2 + \ldots + 0\cdot\vec{e}_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть $\mathcal{E}$ – единичный оператор в R^n, т.е. $\forall \vec{x} \in \mathrm{R}^n\ \mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$.
Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ – разложение вектора $\vec{x}$ по базису пространства R^n $\vec{e}_i$ $i = \overline{1, n}$.
Тогда

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\vec{e}_1 &= 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{e}_n \\
\mathcal{E}\vec{e}_2 &= 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{e}_n \\
&\vdots \\
\mathcal{E}\vec{e}_n &= 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 1 \cdot \vec{e}_n
\end{aligned}$$

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть $\mathcal{E}$ – единичный оператор в R^n, т.е. $\forall \vec{x} \in \mathrm{R}^n \; \mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$.
Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ – разложение вектора $\vec{x}$ по базису пространства R^n $\vec{e}_i$ $i = \overline{1, n}$.
Тогда

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\vec{e}_1 &= 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{e}_n \\
\mathcal{E}\vec{e}_2 &= 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{e}_n \\
&\vdots \\
\mathcal{E}\vec{e}_n &= 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 1 \cdot \vec{e}_n
\end{aligned}$$

Следовательно оператору $\mathcal{E}$ соответствует единичная матрица:

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть $\mathcal{E}$ – единичный оператор в R^n, т.е. $\forall\vec{x} \in \mathrm{R}^n\ \mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$.
Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ – разложение вектора $\vec{x}$ по базису пространства R^n $\vec{e}_i$ $i = \overline{1, n}$.
Тогда

$$\begin{array}{lcl}
\mathcal{E}\vec{e}_1 & = & 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{e}_n \\
\mathcal{E}\vec{e}_2 & = & 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{e}_n \\
\vdots & & \\
\mathcal{E}\vec{e}_n & = & 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 1 \cdot \vec{e}_n
\end{array}$$

Следовательно оператору $\mathcal{E}$ соответствует единичная матрица:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение

Две матрицы A и B,

О подобных матрицах

Определение

Две матрицы A и B, связанные соотношением $B = TAT^{-1}$,

О подобных матрицах

Определение

Две матрицы A и B, связанные соотношением $B = TAT^{-1}$, называются подобными*,*

О подобных матрицах

Определение

Две матрицы A и B, связанные соотношением $B = TAT^{-1}$, называются подобными*, где T – неособенная матрица.*

О подобных матрицах

Определение

Две матрицы A и B, связанные соотношением $B = TAT^{-1}$, называются подобными*, где T – неособенная матрица.*

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n,

О подобных матрицах

Определение

Две матрицы A и B, связанные соотношением $B = TAT^{-1}$, называются **подобными**, *где T – неособенная матрица.*

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, A – матрица, соответствующая оператору $\mathcal{A}$

О подобных матрицах

Определение

Две матрицы A и B, связанные соотношением $B = TAT^{-1}$, называются *подобными*, *где T – неособенная матрица.*

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, A – матрица, соответствующая оператору $\mathcal{A}$ в базисе $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$,

О подобных матрицах

Определение

Две матрицы A и B, связанные соотношением $B = TAT^{-1}$, называются подобными, где T – неособенная матрица.

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, A – матрица, соответствующая оператору $\mathcal{A}$ в базисе $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$, а A' – матрица, соответствующая оператору $\mathcal{A}$

О подобных матрицах

Определение

Две матрицы A и B, связанные соотношением $B = TAT^{-1}$, называются подобными, где T – неособенная матрица.

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, A – матрица, соответствующая оператору $\mathcal{A}$ в базисе $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$, а A' – матрица, соответствующая оператору $\mathcal{A}$ в базисе $\vec{g}_i$ $(i = \overline{1, n})$.

О подобных матрицах

Определение

Две матрицы A и B, связанные соотношением $B = TAT^{-1}$, называются подобными, где T – неособенная матрица.

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, A – матрица, соответствующая оператору $\mathcal{A}$ в базисе $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1,n})$, а A' – матрица, соответствующая оператору $\mathcal{A}$ в базисе $\vec{g}_i$ $(i = \overline{1,n})$. Тогда матрицы A и A' подобны.

О подобных матрицах

Доказательство.
Пусть T^{t} – неособенная матрица перехода

Доказательство.
Пусть T^{t} – неособенная матрица перехода между базисами $\vec{e}_i$ и $\vec{g}_j$ $(i, j = \overline{1, n})$.

О подобных матрицах

Доказательство.
Пусть T^{t} – неособенная матрица перехода между базисами $\vec{e}_i$ и $\vec{g}_j$ $(i, j = \overline{1, n})$. Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$ – образ вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$.

Доказательство.
Пусть T^{t} – неособенная матрица перехода между базисами $\vec{e}_i$ и $\vec{g}_j$ $(i, j = \overline{1, n})$. Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$ – образ вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$. Пусть x и x' – координаты вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$,

О подобных матрицах

Доказательство.
Пусть T^{t} – неособенная матрица перехода между базисами $\vec{e}_i$ и $\vec{g}_j$ $(i, j = \overline{1, n})$. Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$ – образ вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$. Пусть x и x' – координаты вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$, а y и y' – координаты вектора $\vec{y} \in \mathrm{R}^n$ в заданных базисах.

О подобных матрицах

Доказательство.
Пусть T^{t} – неособенная матрица перехода между базисами $\vec{e}_i$ и $\vec{g}_j$ $(i, j = \overline{1, n})$. Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$ – образ вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$. Пусть x и x' – координаты вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$, а y и y' – координаты вектора $\vec{y} \in \mathrm{R}^n$ в заданных базисах. Тогда

$$y = Ax, \quad y' = A'x'.$$

Доказательство.
Пусть T^{t} – неособенная матрица перехода между базисами $\vec{e}_i$ и $\vec{g}_j$ $(i,j = \overline{1,n})$. Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$ – образ вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$. Пусть x и x' – координаты вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$, а y и y' – координаты вектора $\vec{y} \in \mathrm{R}^n$ в заданных базисах. Тогда

$$y = Ax, \quad y' = A'x'.$$

По теореме о связи векторов в различных базисах

$$y' = Ty, \quad x' = Tx.$$

Доказательство.
Пусть T^{t} – неособенная матрица перехода между базисами $\vec{e}_i$ и $\vec{g}_j$ $(i, j = \overline{1, n})$. Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$ – образ вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$. Пусть x и x' – координаты вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$, а y и y' – координаты вектора $\vec{y} \in \mathrm{R}^n$ в заданных базисах. Тогда

$$y = Ax, \quad y' = A'x'.$$

По теореме о связи векторов в различных базисах

$$y' = Ty, \quad x' = Tx.$$

Подставляя выражение для y' и x' в предыдущие соотношения, получаем

$$y = \left(T^{-1}A'T\right)x.$$

О подобных матрицах

Доказательство.
Пусть T^{t} – неособенная матрица перехода между базисами $\vec{e}_i$ и $\vec{g}_j$ $(i, j = \overline{1, n})$. Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$ – образ вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$. Пусть x и x' – координаты вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$, а y и y' – координаты вектора $\vec{y} \in \mathrm{R}^n$ в заданных базисах. Тогда

$$y = Ax, \quad y' = A'x'.$$

По теореме о связи векторов в различных базисах

$$y' = Ty, \quad x' = Tx.$$

Подставляя выражение для y' и x' в предыдущие соотношения, получаем

$$y = \left(T^{-1}A'T\right)x.$$

Т.к. $y = Ax$, то в силу произвольности $\vec{x}$: $A = T^{-1}A'T$. □

Пусть A и B – подобные матрицы.

Определитель линейного оператора в R^n

Пусть A и B – подобные матрицы. Тогда $A = TBT^{-1}$ для некоторой неособой T

Определитель линейного оператора в R^n

Пусть A и B – подобные матрицы. Тогда $A = TBT^{-1}$ для некоторой неособой T и

$$|A| = |TBT^{-1}| = |T||B||T^{-1}| = |T||B|/|T| = |B|.$$

Определитель линейного оператора в R^n

Пусть A и B – подобные матрицы. Тогда $A = TBT^{-1}$ для некоторой неособой T и

$$|A| = |TBT^{-1}| = |T||B||T^{-1}| = |T||B|/|T| = |B|.$$

Определение

Определителем оператора $\mathcal{A} : R^n \to R^n$

Определитель линейного оператора в R^n

Пусть A и B – подобные матрицы. Тогда $A = TBT^{-1}$ для некоторой неособой T и

$$|A| = |TBT^{-1}| = |T||B||T^{-1}| = |T||B|/|T| = |B|.$$

Определение

Определителем оператора $\mathcal{A} : R^n \to R^n$ называется определитель матрицы преобразования этого оператора в любом базисе.

Определитель линейного оператора в R^n

Пусть A и B – подобные матрицы. Тогда $A = TBT^{-1}$ для некоторой неособой T и

$$|A| = |TBT^{-1}| = |T||B||T^{-1}| = |T||B|/|T| = |B|.$$

Определение

Определителем оператора $\mathcal{A} : R^n \to R^n$ называется определитель матрицы преобразования этого оператора в любом базисе. Если $|\mathcal{A}| = 0$, то оператор называется особенным,

Определитель линейного оператора в R^n

Пусть A и B – подобные матрицы. Тогда $A = TBT^{-1}$ для некоторой неособой T и

$$|A| = |TBT^{-1}| = |T||B||T^{-1}| = |T||B|/|T| = |B|.$$

Определение

Определителем оператора $\mathcal{A} : R^n \to R^n$ называется определитель матрицы преобразования этого оператора в любом базисе. Если $|\mathcal{A}| = 0$, то оператор называется особенным, в противном случае $|\mathcal{A}| \neq 0$, оператор – неособенный.

Свойства особенного оператора

Свойство
Для особенного оператора $\mathcal{A}$

Свойства особенного оператора

Свойство

Для особенного оператора $\mathcal{A}$ существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из R^n,

Свойства особенного оператора

Свойство

Для особенного оператора $\mathcal{A}$ существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из R^n, что $\mathcal{A}\vec{x} = 0$.

Свойства особенного оператора

Свойство
Для особенного оператора $\mathcal{A}$ существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из R^n, что $\mathcal{A}\vec{x} = 0$.

Доказательство.
Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$.

Свойства особенного оператора

Свойство
Для особенного оператора $\mathcal{A}$ существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из R^n, что $\mathcal{A}\vec{x} = 0$.

Доказательство.
Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе.

Свойства особенного оператора

Свойство
Для особенного оператора $\mathcal{A}$ существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из R^n, что $\mathcal{A}\vec{x} = 0$.

Доказательство.
Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = 0$

Свойства особенного оператора

Свойство

Для особенного оператора $\mathcal{A}$ существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из R^n, что $\mathcal{A}\vec{x} = 0$.

Доказательство.

Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ равнозначно матричному

$$Ax = 0.$$

Свойства особенного оператора

Свойство
Для особенного оператора $\mathcal{A}$ существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из R^n, что $\mathcal{A}\vec{x} = 0$.

Доказательство.
Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ равнозначно матричному

$$Ax = 0.$$

Оператор $\mathcal{A}$ особенный, значит $|A| = 0$.

Свойства особенного оператора

Свойство
Для особенного оператора $\mathcal{A}$ существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из R^n, что $\mathcal{A}\vec{x} = 0$.

Доказательство.
Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ равнозначно матричному

$$Ax = 0.$$

Оператор $\mathcal{A}$ особенный, значит $|A| = 0$. Следовательно матричное уравнение имеет нетривиальное решение $x \neq 0$.

Свойства особенного оператора

Свойство
Для особенного оператора $\mathcal{A}$ существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из R^n, что $\mathcal{A}\vec{x} = 0$.

Доказательство.
Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ равнозначно матричному

$$Ax = 0.$$

Оператор $\mathcal{A}$ особенный, значит $|A| = 0$. Следовательно матричное уравнение имеет нетривиальное решение $x \neq 0$. $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \neq 0$ — решение операторного уравнения.

□

Свойства неособенного оператора

Теорема

Неособенный оператор $\mathcal{A}$ в R^n имеет следующие свойства:

Свойства неособенного оператора

Теорема

Неособенный оператор $\mathcal{A}$ в R^n имеет следующие свойства:

1) Из равенства $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ всегда следует, что $\vec{x} = 0$.

Свойства неособенного оператора

Теорема

Неособенный оператор $\mathcal{A}$ в R^n имеет следующие свойства:

1) Из равенства $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ всегда следует, что $\vec{x} = 0$.
2) $\mathcal{A}\mathrm{R}^n = \mathrm{R}^n$ (полнота).

Свойства неособенного оператора

Теорема

Неособенный оператор $\mathcal{A}$ в R^n имеет следующие свойства:

1) Из равенства $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ всегда следует, что $\vec{x} = 0$.
2) $\mathcal{A}\mathrm{R}^n = \mathrm{R}^n$ (полнота).
3) $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{y}$ (взаимнооднозначность).

1. $\mathcal{A}\vec{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = 0$

Доказательство.
Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$.

1. $\mathcal{A}\vec{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = 0$

Доказательство.
Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе.

Доказательство.

Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ равнозначно матричному

$$Ax = 0.$$

1. $\mathcal{A}\vec{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = 0$

Доказательство.
Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ равнозначно матричному

$$Ax = 0.$$

Оператор $\mathcal{A}$ неособенный, значит $|A| \neq 0$.

1. $\mathcal{A}\vec{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = 0$

Доказательство.
Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ равнозначно матричному

$$Ax = 0.$$

Оператор $\mathcal{A}$ неособенный, значит $|A| \neq 0$. Следовательно матричное уравнение имеет только одно решение $x = 0$ и, следовательно, $\vec{x} = 0$.

□

2. $\mathcal{A}R^n = R^n$ (полнота)

Доказательство.
Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n.

2. $\mathcal{A}\mathrm{R}^n = \mathrm{R}^n$ (полнота)

Доказательство.
Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n. Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$.

2. $\mathcal{A}\mathrm{R}^n = \mathrm{R}^n$ (полнота)

Доказательство.
Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n. Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе.

2. $\mathcal{A}\mathrm{R}^n = \mathrm{R}^n$ (полнота)

Доказательство.

Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n. Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Нужно показать, что операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет решение для любого вектора $\vec{y} \in \mathrm{R}^n$.

2. $\mathcal{A}\mathrm{R}^n = \mathrm{R}^n$ (полнота)

Доказательство.
Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n. Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Нужно показать, что операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет решение для любого вектора $\vec{y} \in \mathrm{R}^n$. Пусть x, y – вектор-столбцы координат векторов $\vec{x}, \vec{y}$ в выбранном базисе соответственно.

2. $\mathcal{A}\mathrm{R}^n = \mathrm{R}^n$ (полнота)

Доказательство.
Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n. Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Нужно показать, что операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет решение для любого вектора $\vec{y} \in \mathrm{R}^n$. Пусть x, y – вектор-столбцы координат векторов $\vec{x}, \vec{y}$ в выбранном базисе соответственно. В матричном виде уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет вид

$$Ax = y.$$

2. $\mathcal{A}\mathrm{R}^n = \mathrm{R}^n$ (полнота)

Доказательство.
Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n. Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Нужно показать, что операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет решение для любого вектора $\vec{y} \in \mathrm{R}^n$. Пусть x, y – вектор-столбцы координат векторов $\vec{x}, \vec{y}$ в выбранном базисе соответственно. В матричном виде уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет вид

$$Ax = y.$$

Оператор $\mathcal{A}$ неособенный, значит $|A| \neq 0$.

2. $\mathcal{A}\mathrm{R}^n = \mathrm{R}^n$ (полнота)

Доказательство.
Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n. Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1,n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Нужно показать, что операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет решение для любого вектора $\vec{y} \in \mathrm{R}^n$. Пусть x, y – вектор-столбцы координат векторов $\vec{x}, \vec{y}$ в выбранном базисе соответственно. В матричном виде уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет вид

$$Ax = y.$$

Оператор $\mathcal{A}$ неособенный, значит $|A| \neq 0$. Следовательно матричное уравнение имеет решение вида $x = A^{-1}y$.

2. $\mathcal{A}\mathrm{R}^n = \mathrm{R}^n$ (полнота)

Доказательство.

Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n. Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Нужно показать, что операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет решение для любого вектора $\vec{y} \in \mathrm{R}^n$. Пусть x, y – вектор-столбцы координат векторов $\vec{x}, \vec{y}$ в выбранном базисе соответственно. В матричном виде уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет вид

$$Ax = y.$$

Оператор $\mathcal{A}$ неособенный, значит $|A| \neq 0$. Следовательно матричное уравнение имеет решение вида $x = A^{-1}y$.

$\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i \neq 0$ — решение операторного уравнения.

□

3. $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{y}$ (взаимнооднозначность)

Доказательство.
Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1,n})$.

3. $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{y}$ (взаимнооднозначность)

Доказательство.
Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе.

3. $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{y}$ (взаимнооднозначность)

Доказательство.

Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе.

Пусть $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y}$, т.е. $\mathcal{A}(\vec{x} - \vec{y}) = 0$.

3. $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{y}$ (взаимнооднозначность)

Доказательство.

Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе.

Пусть $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y}$, т.е. $\mathcal{A}(\vec{x} - \vec{y}) = 0$. Тогда из пункта 1 для неособенного оператора следует, что $\vec{x} - \vec{y} = 0$ или $\vec{x} = \vec{y}$.

3. $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{y}$ (взаимнооднозначность)

Доказательство.

Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе.

Пусть $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y}$, т.е. $\mathcal{A}(\vec{x} - \vec{y}) = 0$. Тогда из пункта 1 для неособенного оператора следует, что $\vec{x} - \vec{y} = 0$ или $\vec{x} = \vec{y}$.

Оператор $\mathcal{A}$ является однозначной функцией и не может принимать различные значения.

$\square$

Обратный оператор

Из доказанных свойств вытекает следующая теорема

Теорема

Неособенный оператор $\mathcal{A}$ в R^n имеет обратный оператор такой, что:

$$\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\vec{x}) = \vec{x},$$

Обратный оператор

Из доказанных свойств вытекает следующая теорема

Теорема

Неособенный оператор $\mathcal{A}$ в R^n имеет обратный оператор такой, что:

$$\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\vec{x}) = \vec{x},$$

т.е.

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}.$$

Оператор $\mathcal{A}^{-1}$ является линейным оператором.

Обратный оператор

Из доказанных свойств вытекает следующая теорема

Теорема

Неособенный оператор $\mathcal{A}$ в R^n имеет обратный оператор такой, что:

$$\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\vec{x}) = \vec{x},$$

т.е.

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}.$$

Оператор $\mathcal{A}^{-1}$ является линейным оператором.

Линейность обратного оператора

Доказательство.
Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$, $\vec{u} = \mathcal{A}\vec{w}$,

Линейность обратного оператора

Доказательство.

Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$, $\vec{u} = \mathcal{A}\vec{w}$, и $\mathcal{A}$ неособенный оператор в R^n.

Линейность обратного оператора

Доказательство.
Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$, $\vec{u} = \mathcal{A}\vec{w}$, и $\mathcal{A}$ неособенный оператор в R^n.

$$\alpha\vec{y} + \beta\vec{u} =$$

Линейность обратного оператора

Доказательство.
Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$, $\vec{u} = \mathcal{A}\vec{w}$, и $\mathcal{A}$ неособенный оператор в R^n.

$$\alpha\vec{y} + \beta\vec{u} = \alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{w} =$$

Линейность обратного оператора

Доказательство.
Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$, $\vec{u} = \mathcal{A}\vec{w}$, и $\mathcal{A}$ неособенный оператор в R^n.

$$\alpha\vec{y} + \beta\vec{u} = \alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{w} = \mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{w})$$

Линейность обратного оператора

Доказательство.
Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$, $\vec{u} = \mathcal{A}\vec{w}$, и $\mathcal{A}$ неособенный оператор в R^n.

$$\alpha\vec{y} + \beta\vec{u} = \alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{w} = \mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{w})$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{A}^{-1}(\alpha\vec{y} + \beta\vec{u}) = \alpha\vec{x} + \beta\vec{w} =$$

Линейность обратного оператора

Доказательство.
Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$, $\vec{u} = \mathcal{A}\vec{w}$, и $\mathcal{A}$ неособенный оператор в R^n.

$$\alpha\vec{y} + \beta\vec{u} = \alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{w} = \mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{w})$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{A}^{-1}(\alpha\vec{y} + \beta\vec{u}) = \alpha\vec{x} + \beta\vec{w} = \alpha\mathcal{A}^{-1}\vec{y} + \beta\mathcal{A}^{-1}\vec{u}.$$

□

Теорема

Если в некотором базисе оператору $\mathcal{A}$ отвечает матрица A,

Матрица обратного оператора

Теорема

Если в некотором базисе оператору $\mathcal{A}$ отвечает матрица A, тогда в этом же базисе оператору $\mathcal{A}^{-1}$ будет отвечать матрица A^{-1}.

Матрица обратного оператора

Доказательство.
Пусть $\mathcal{A}$ неособенный оператор в R^n.

Матрица обратного оператора

Доказательство.

Пусть $\mathcal{A}$ неособенный оператор в R^n. Пусть $\mathcal{A}^{-1}$ – обратный оператор к $\mathcal{A}$.

Матрица обратного оператора

Доказательство.
Пусть $\mathcal{A}$ неособенный оператор в R^n. Пусть $\mathcal{A}^{-1}$ – обратный оператор к $\mathcal{A}$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$, B – матрица оператора $\mathcal{A}^{-1}$ в некотором базисе,

Доказательство.

Пусть $\mathcal{A}$ неособенный оператор в R^n. Пусть $\mathcal{A}^{-1}$ – обратный оператор к $\mathcal{A}$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$, B – матрица оператора $\mathcal{A}^{-1}$ в некотором базисе, тогда

$$\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\vec{x}) = \vec{x} = \mathcal{E}\vec{x}.$$

Матрица обратного оператора

Доказательство.
Пусть $\mathcal{A}$ неособенный оператор в R^n. Пусть $\mathcal{A}^{-1}$ – обратный оператор к $\mathcal{A}$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$, B – матрица оператора $\mathcal{A}^{-1}$ в некотором базисе, тогда

$$\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\vec{x}) = \vec{x} = \mathcal{E}\vec{x}.$$

Таким образом, $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}$, и, в матричном виде

$$BA = E,$$

т.е.

$$B = A^{-1}.$$

□

Характеристические числа и собственные векторы

Определение

Пусть $\mathcal{A}$ *– линейный оператор в* R^n*,*

Характеристические числа и собственные векторы

Определение

Пусть $\mathcal{A}$ *– линейный оператор в* R^n*, тогда числа* λ *и векторы* $\vec{x}$*,*

Характеристические числа и собственные векторы

Определение

Пусть $\mathcal{A}$ *– линейный оператор в* R^n*, тогда числа* λ *и векторы* $\vec{x}$*, удовлетворяющие равенству*

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (\vec{x} \neq \vec{0}),$$

Характеристические числа и собственные векторы

Определение

Пусть $\mathcal{A}$ *– линейный оператор в* R^n*, тогда числа* λ *и векторы* $\vec{x}$*, удовлетворяющие равенству*

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (\vec{x} \neq \vec{0}),$$

называются собственными (характеристическими) числами

Характеристические числа и собственные векторы

Определение

Пусть $\mathcal{A}$ *– линейный оператор в* R^n*, тогда числа* λ *и векторы* $\vec{x}$*, удовлетворяющие равенству*

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (\vec{x} \neq \vec{0}),$$

называются собственными (характеристическими) числами и соответствующие им векторы – собственными векторами линейного оператора $\mathcal{A}$*.*

Харастеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

Характеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x}$$

Харастеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x} \Leftrightarrow \left(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}\right)\vec{x} = 0.$$

Характеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x} \Leftrightarrow \left(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}\right)\vec{x} = 0.$$

Вектор $\vec{x} \neq 0$ и число λ существует,

Характеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x} \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\,\vec{x} = 0.$$

Вектор $\vec{x} \neq 0$ и число λ существует, когда $|\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}|$=0,

Харастеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x} \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\,\vec{x} = 0.$$

Вектор $\vec{x} \neq 0$ и число λ существует, когда $|\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}|$=0, или в некотором базисе

$$\chi(\lambda) =$$

Характеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x} \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\,\vec{x} = 0.$$

Вектор $\vec{x} \neq 0$ и число λ существует, когда $|\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}|$=0, или в некотором базисе

$$\chi(\lambda) = |A - \lambda E| =$$

Харастеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x} \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\,\vec{x} = 0.$$

Вектор $\vec{x} \neq 0$ и число λ существует, когда $|\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}|$=0, или в некотором базисе

$$\chi(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x} \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\,\vec{x} = 0.$$

Вектор $\vec{x} \neq 0$ и число λ существует, когда $|\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}|$=0, или в некотором базисе

$$\chi(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Определение

Функция $\chi(\lambda)$, приведенного вида,

Харастеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x} \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\,\vec{x} = 0.$$

Вектор $\vec{x} \neq 0$ и число λ существует, когда $|\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}|$=0, или в некотором базисе

$$\chi(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Определение

Функция $\chi(\lambda)$, приведенного вида, называется характеристическим многочленом (характеристической функцией) оператора $\mathcal{A}$.

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n не зависит от выбора базиса.

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы,

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору $\mathcal{A}$ в различных базисах пространства R^n.

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору $\mathcal{A}$ в различных базисах пространства R^n. По свойству они подобны,

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору $\mathcal{A}$ в различных базисах пространства R^n. По свойству они подобны, значит существует $|T| \neq 0$: $A = TA'T^{-1}$,

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору $\mathcal{A}$ в различных базисах пространства R^n. По свойству они подобны, значит существует $|T| \neq 0$: $A = TA'T^{-1}$, тогда

$$|A - \lambda E| =$$

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору $\mathcal{A}$ в различных базисах пространства R^n. По свойству они подобны, значит существует $|T| \neq 0$: $A = TA'T^{-1}$, тогда

$$|A - \lambda E| = |TA'T^{-1} - T\lambda ET^{-1}| =$$

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору $\mathcal{A}$ в различных базисах пространства R^n. По свойству они подобны, значит существует $|T| \neq 0$: $A = TA'T^{-1}$, тогда

$$|A - \lambda E| = |TA'T^{-1} - T\lambda ET^{-1}| = |T(A' - \lambda E)T^{-1}| =$$

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору $\mathcal{A}$ в различных базисах пространства R^n. По свойству они подобны, значит существует $|T| \neq 0$: $A = TA'T^{-1}$, тогда

$$|A - \lambda E| = |TA'T^{-1} - T\lambda ET^{-1}| = |T(A' - \lambda E)T^{-1}| =$$

$$= |T||A' - \lambda E||T^{-1}| =$$

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору $\mathcal{A}$ в различных базисах пространства R^n. По свойству они подобны, значит существует $|T| \neq 0$: $A = TA'T^{-1}$, тогда

$$|A - \lambda E| = |TA'T^{-1} - T\lambda ET^{-1}| = |T(A' - \lambda E)T^{-1}| =$$

$$= |T||A' - \lambda E||T^{-1}| = |T||A' - \lambda E|/|T| =$$

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору $\mathcal{A}$ в различных базисах пространства R^n. По свойству они подобны, значит существует $|T| \neq 0$: $A = TA'T^{-1}$, тогда

$$|A - \lambda E| = |TA'T^{-1} - T\lambda ET^{-1}| = |T(A' - \lambda E)T^{-1}| =$$

$$= |T||A' - \lambda E||T^{-1}| = |T||A' - \lambda E|/|T| = |A' - \lambda E|.$$

□

Алгоритм поиска собственных чисел и собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n

Алгоритм поиска собственных чисел и собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n

1) Выбирается базис в R^n.

Алгоритм поиска собственных чисел и собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n

1) Выбирается базис в R^n.
2) Находим матрицу A, соответствующую $\mathcal{A}$ в выбранном базисе.

Алгоритм поиска собственных чисел и собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n

1) Выбирается базис в R^n.
2) Находим матрицу A, соответствующую $\mathcal{A}$ в выбранном базисе.
3) Находим собственные значения из решения уравнения

$$\chi(\lambda) = 0.$$

Алгоритм поиска собственных чисел и собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n

1) Выбирается базис в R^n.
2) Находим матрицу A, соответствующую $\mathcal{A}$ в выбранном базисе.
3) Находим собственные значения из решения уравнения

$$\chi(\lambda) = 0.$$

4) Для каждого найденного λ находим пространство решений x из соотношения

$$(A - \lambda E)x = 0.$$

Свойства собственных векторов

Теорема

Если $\vec{x}$, $\vec{y}$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$,

Свойства собственных векторов

Теорема

Если $\vec{x}$, $\vec{y}$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, соответствующие одному и тому же собственному числу λ,

Свойства собственных векторов

Теорема

Если $\vec{x}$, $\vec{y}$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, соответствующие одному и тому же собственному числу λ, то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ.

Свойства собственных векторов

Теорема

Если $\vec{x}$, $\vec{y}$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, соответствующие одному и тому же собственному числу λ, то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ.

Доказательство.

Из условия теоремы $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\mathcal{A}\vec{y} = \lambda\vec{y}$.

Свойства собственных векторов

Теорема

Если $\vec{x}$, $\vec{y}$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, соответствующие одному и тому же собственному числу λ, то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ.

Доказательство.

Из условия теоремы $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\mathcal{A}\vec{y} = \lambda\vec{y}$. Умножим первое соотношение на α, второе на β, сложим,

Свойства собственных векторов

Теорема
Если $\vec{x}$, $\vec{y}$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, соответствующие одному и тому же собственному числу λ, то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ.

Доказательство.
Из условия теоремы $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\mathcal{A}\vec{y} = \lambda\vec{y}$. Умножим первое соотношение на α, второе на β, сложим, и, пользуясь линейностью, произведем преобразования

$$\alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{y} =$$

Свойства собственных векторов

Теорема
Если $\vec{x}$, $\vec{y}$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, соответствующие одному и тому же собственному числу λ, то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ.

Доказательство.
Из условия теоремы $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\mathcal{A}\vec{y} = \lambda\vec{y}$. Умножим первое соотношение на α, второе на β, сложим, и, пользуясь линейностью, произведем преобразования

$$\alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{y} = \alpha\lambda\vec{x} + \beta\lambda\vec{y}$$

Свойства собственных векторов

Теорема
Если $\vec{x}$, $\vec{y}$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, соответствующие одному и тому же собственному числу λ, то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ.

Доказательство.
Из условия теоремы $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\mathcal{A}\vec{y} = \lambda\vec{y}$. Умножим первое соотношение на α, второе на β, сложим, и, пользуясь линейностью, произведем преобразования

$$\begin{aligned} \alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{y} &= \alpha\lambda\vec{x} + \beta\lambda\vec{y} \\ \mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) &= \end{aligned}$$

Свойства собственных векторов

Теорема

Если $\vec{x}$, $\vec{y}$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, соответствующие одному и тому же собственному числу λ, то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ.

Доказательство.

Из условия теоремы $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\mathcal{A}\vec{y} = \lambda\vec{y}$. Умножим первое соотношение на α, второе на β, сложим, и, пользуясь линейностью, произведем преобразования

$$\alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{y} = \alpha\lambda\vec{x} + \beta\lambda\vec{y}$$
$$\mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \lambda(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}).$$

Свойства собственных векторов

Теорема

Если $\vec{x}$, $\vec{y}$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, соответствующие одному и тому же собственному числу λ, то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ.

Доказательство.

Из условия теоремы $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\mathcal{A}\vec{y} = \lambda\vec{y}$. Умножим первое соотношение на α, второе на β, сложим, и, пользуясь линейностью, произведем преобразования

$$\alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{y} = \alpha\lambda\vec{x} + \beta\lambda\vec{y}$$
$$\mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \lambda(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}).$$

Следовательно вектор $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ для любых $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$

Свойства собственных векторов

Теорема

Если $\vec{x}$, $\vec{y}$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, соответствующие одному и тому же собственному числу λ, то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ.

Доказательство.

Из условия теоремы $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\mathcal{A}\vec{y} = \lambda\vec{y}$. Умножим первое соотношение на α, второе на β, сложим, и, пользуясь линейностью, произведем преобразования

$$\alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{y} = \alpha\lambda\vec{x} + \beta\lambda\vec{y}$$
$$\mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \lambda(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}).$$

Следовательно вектор $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ для любых $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ также является собственным вектором $\mathcal{A}$, соответствующим собственному числу λ.

$\square$

Свойства собственных векторов

Теорема

Собственные векторы соответствующие различным собственным числам являются линейно независимыми.

Свойства собственных векторов

Теорема

Собственные векторы соответствующие различным собственным числам являются линейно независимыми.

Доказательство.

Пусть $\vec{x}_1, \ \ldots, \ \vec{x}_k$ – собственные векторы,

Свойства собственных векторов

Теорема

Собственные векторы соответствующие различным собственным числам являются линейно независимыми.

Доказательство.

Пусть $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_k$ – собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$,

Свойства собственных векторов

Теорема

Собственные векторы соответствующие различным собственным числам являются линейно независимыми.

Доказательство.

Пусть $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_k$ – собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$.

Свойства собственных векторов

Теорема
Собственные векторы соответствующие различным собственным числам являются линейно независимыми.

Доказательство.
Пусть $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_k$ – собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$.
Предположим, что существует линейная комбинация

$$\vec{l}(\alpha_i, \vec{x}_j) = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k = 0 \quad (\alpha_k \neq 0).$$

Свойства собственных векторов

Теорема
Собственные векторы соответствующие различным собственным числам являются линейно независимыми.

Доказательство.
Пусть $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_k$ – собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$.
Предположим, что существует линейная комбинация

$$\vec{l}(\alpha_i, \vec{x}_j) = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k = 0 \quad (\alpha_k \neq 0).$$

Подействуем линейными операторами $\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{E}$ $(j = \overline{1, k-1})$ на $\vec{l}(\alpha_i, \vec{x}_j)$:

Свойства собственных векторов

Теорема

Собственные векторы соответствующие различным собственным числам являются линейно независимыми.

Доказательство.

Пусть $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_k$ – собственные векторы, соответствующие собственным числам λ_1,…,λ_k, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$.

Предположим, что существует линейная комбинация

$$\vec{l}(\alpha_i, \vec{x}_j) = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k \vec{x}_k = 0 \quad (\alpha_k \neq 0).$$

Подействуем линейными операторами $\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{E}$ $(j = \overline{1, k-1})$ на $\vec{l}(\alpha_i, \vec{x}_j)$:

$$(\mathcal{A} - \lambda_{k-1}\mathcal{E}) \ldots (\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{E})(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{l}(\alpha_i, \vec{x}_j).$$

$\square$

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k \vec{x}_k) =$$

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k \vec{x}_k) =$$
$$= \alpha_1 (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_1 +$$

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+$$

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k=$$

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k) =$$
$$= \alpha_1(\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1 + \alpha_2(\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k(\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k =$$
$$= \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{x}_2 +$$

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=\\
&=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k=\\
&=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+
\end{aligned}
$$

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k=$$
$$=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k=0$$

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k) =$$
$$=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k =$$
$$=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k = 0$$

$$(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{E})(\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k) =$$

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k=$$
$$=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k=0$$

$$(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{E})(\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\vec{x}_3+$$

Доказательство.

$$(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k=$$
$$=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k=0$$

$$(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{E})(\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\vec{x}_k)=0$$

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k=$$
$$=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k=0$$

$$(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{E})(\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\vec{x}_k)=0$$
$$\vdots$$
$$\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})\vec{x}_k=0$$

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=\\
&=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k=\\
&=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{E})(\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k)=\\
&=\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\vec{x}_k)=0\\
&\vdots\\
&\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})\vec{x}_k=0
\end{aligned}
$$

Последнее равенство невозможно в силу того,

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k=$$
$$=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k=0$$

$$(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{E})(\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\vec{x}_k)=0$$
$$\vdots$$
$$\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})\vec{x}_k=0$$

Последнее равенство невозможно в силу того, что $\alpha_k\neq 0$ (из предположения от противного);

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=\\
&=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k=\\
&=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{E})(\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k)=\\
&=\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\vec{x}_k)=0\\
&\vdots\\
&\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})\vec{x}_k=0
\end{aligned}
$$

Последнее равенство невозможно в силу того, что $\alpha_k\neq 0$ (из предположения от противного); $\lambda_k-\lambda_i\neq 0$, т.к. $\lambda_i\neq\lambda_j$ $(i\neq j)$;

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k=$$
$$=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k=0$$

$$(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{E})(\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\vec{x}_k)=0$$
$$\vdots$$
$$\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})\vec{x}_k=0$$

Последнее равенство невозможно в силу того, что $\alpha_k\neq 0$ (из предположения от противного); $\lambda_k-\lambda_i\neq 0$, т.к. $\lambda_i\neq\lambda_j$ $(i\neq j)$; $\vec{x_k}\neq 0$ по определению собственного вектора.

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=\\
&=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k=\\
&=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{E})(\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k)=\\
&=\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\vec{x}_k)=0\\
&\vdots\\
&\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})\vec{x}_k=0
\end{aligned}
$$

Последнее равенство невозможно в силу того, что $\alpha_k \neq 0$ (из предположения от противного); $\lambda_k-\lambda_i\neq 0$, т.к. $\lambda_i\neq\lambda_j$ $(i\neq j)$; $\vec{x_k}\neq 0$ по определению собственного вектора.
Следовательно векторы $\vec{x}_1$, …, $\vec{x}_k$ линейно независимы.

□

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ *в пространстве* R^n

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n называется оператором простой структуры,

Линейный оператор простой структуры

Определение

*Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n называется **операто-ром простой структуры**, если он имеет n различных собственных чисел.*

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n называется оператором простой структуры, если он имеет n различных собственных чисел.

Вид оператора простой структуры

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n называется оператором простой структуры, если он имеет n различных собственных чисел.

Вид оператора простой структуры

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n называется оператором простой структуры, если он имеет n различных собственных чисел.

Вид оператора простой структуры

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n имеет n различных собственных векторов $\vec{x}_i$,

Линейный оператор простой структуры

Определение

*Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n называется **оператором простой структуры**, если он имеет n различных собственных чисел.*

Вид оператора простой структуры

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n имеет n различных собственных векторов $\vec{x}_i$, соответствующие различным собственным числам λ_i $(i = \overline{1, n})$.

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n называется оператором простой структуры, если он имеет n различных собственных чисел.

Вид оператора простой структуры

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n имеет n различных собственных векторов $\vec{x}_i$, соответствующие различным собственным числам λ_i $(i = \overline{1, n})$. По только что доказанной теореме система из n векторов $\vec{x}_i$ $(i = \overline{1, n})$ линейно независима,

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n называется оператором простой структуры, если он имеет n различных собственных чисел.

Вид оператора простой структуры

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n имеет n различных собственных векторов $\vec{x}_i$, соответствующие различным собственным числам λ_i $(i = \overline{1, n})$. По только что доказанной теореме система из n векторов $\vec{x}_i$ $(i = \overline{1, n})$ линейно независима, а значит является базисом.

Линейный оператор простой структуры

Определение

*Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n называется **оператором простой структуры**, если он имеет n различных собственных чисел.*

Вид оператора простой структуры

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n имеет n различных собственных векторов $\vec{x}_i$, соответствующие различным собственным числам λ_i $(i = \overline{1, n})$. По только что доказанной теореме система из n векторов $\vec{x}_i$ $(i = \overline{1, n})$ линейно независима, а значит является базисом. Получим вид матрицы A в этом базисе.

Вид оператора простой структуры

Разложение образов базисных векторов по базису пространства R^n

Вид оператора простой структуры

Разложение образов базисных векторов по базису пространства R^n

$$\mathcal{A}\vec{x}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{x}_n,$$

Вид оператора простой структуры

Разложение образов базисных векторов по базису пространства R^n

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}\vec{x}_1 &= \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{x}_n, \\
\mathcal{A}\vec{x}_2 &= 0 \cdot \vec{x}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{x}_n, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Вид оператора простой структуры

Разложение образов базисных векторов по базису пространства R^n

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\vec{x}_1 &= \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{x}_n, \\
\mathcal{A}\vec{x}_2 &= 0 \cdot \vec{x}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{x}_n, \\
&\vdots \\
\mathcal{A}\vec{x}_n &= 0 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{x}_n.
\end{aligned}$$

Вид оператора простой структуры

Разложение образов базисных векторов по базису пространства R^n

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\vec{x}_1 &= \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{x}_n, \\
\mathcal{A}\vec{x}_2 &= 0 \cdot \vec{x}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{x}_n, \\
&\vdots \\
\mathcal{A}\vec{x}_n &= 0 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{x}_n.
\end{aligned}$$

Матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\vec{x}_i$ $(i = \overline{1, n})$

Вид оператора простой структуры

Разложение образов базисных векторов по базису пространства R^n

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\vec{x}_1 &= \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{x}_n, \\
\mathcal{A}\vec{x}_2 &= 0 \cdot \vec{x}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{x}_n, \\
&\vdots \\
\mathcal{A}\vec{x}_n &= 0 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{x}_n.
\end{aligned}$$

Матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\vec{x}_i$ $(i = \overline{1, n})$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Свойства собственных векторов

Теорема (без доказательства)

Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны,

Свойства собственных векторов

Теорема (без доказательства)

Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны, и существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Свойства собственных векторов

Теорема (без доказательства)

Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны, и существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Свойства собственных векторов

Теорема (без доказательства)
Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны, и существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

Свойства собственных векторов

Теорема (без доказательства)

Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны, и существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

Свойства собственных векторов

Теорема (без доказательства)
Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны, и существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1.$$

Свойства собственных векторов

Теорема (без доказательства)

Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны, и существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1.$$

$$\vec{g}_1 \quad = \quad (1/\sqrt{2}, \qquad 1/\sqrt{2}),$$

Свойства собственных векторов

Теорема (без доказательства)

Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны, и существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1.$$

$$\begin{aligned} \vec{g}_1 &= (1/\sqrt{2}, \quad 1/\sqrt{2}), \\ \vec{g}_2 &= (-1/\sqrt{2}, \ 1/\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Свойства собственных векторов

Теорема (без доказательства)
Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны, и существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1.$$

$$\begin{aligned} \vec{g}_1 &= (1/\sqrt{2}, \quad 1/\sqrt{2}), \\ \vec{g}_2 &= (-1/\sqrt{2}, \quad 1/\sqrt{2}). \end{aligned}$$

$$\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2 = 0, \quad \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_1 = 1, \quad \vec{g}_2 \cdot \vec{g}_2 = 1.$$