Элементы дифференциальной геометрии. Скалярные и векторные поля.

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

QR-код презентации

26 марта 2021 г.

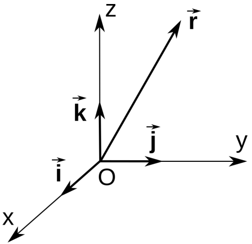
Аннотация

Кривая в пространстве. Ортогональная система координат, связанная с кривой. Формулы Френе. Скалярные и векторные поля. Поверхности уровня. Векторные линии.

Введем в векторном пространстве $\mathbb{R}^3$ систему координат

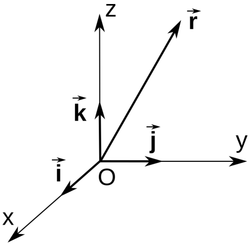
Система координат в $\mathbb{R}^3$

Введем в векторном пространстве $\mathbb{R}^3$ систему координат и три базисных ортонормированных вектора $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ и $\vec{\mathbf{k}}$.



Система координат в $\mathbb{R}^3$

Введем в векторном пространстве $\mathbb{R}^3$ систему координат и три базисных ортонормированных вектора $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ и $\vec{\mathbf{k}}$.

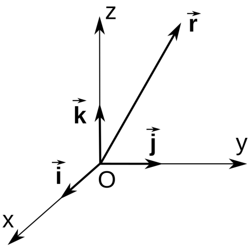


Тогда произвольный вектор $\vec{r}$ можно представить в виде:

$$\vec{r} = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}},$$

Система координат в $\mathbb{R}^3$

Введем в векторном пространстве $\mathbb{R}^3$ систему координат и три базисных ортонормированных вектора $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ и $\vec{\mathbf{k}}$.



Тогда произвольный вектор $\vec{r}$ можно представить в виде:

$$\vec{r} = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}},$$

где x, y, z – координаты вектора $\vec{r}$ в указанном базисе.

Вектор, зависящий от параметра

В $\mathbb{R}^3$ рассмотрим переменный вектор

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{\mathbf{i}} + a_y(t)\vec{\mathbf{j}} + a_z(t)\vec{\mathbf{k}},$$

Вектор, зависящий от параметра

В $\mathbb{R}^3$ рассмотрим переменный вектор

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{\mathbf{i}} + a_y(t)\vec{\mathbf{j}} + a_z(t)\vec{\mathbf{k}},$$

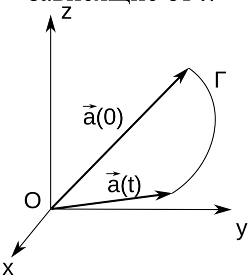
где $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ – декартовы координаты вектора, непрерывно зависящие от t.

Вектор, зависящий от параметра

В $\mathbb{R}^3$ рассмотрим переменный вектор

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{\mathbf{i}} + a_y(t)\vec{\mathbf{j}} + a_z(t)\vec{\mathbf{k}},$$

где $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ – декартовы координаты вектора, непрерывно зависящие от t.

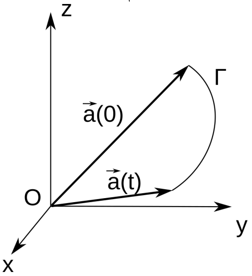


Вектор, зависящий от параметра

В $\mathbb{R}^3$ рассмотрим переменный вектор

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{\mathbf{i}} + a_y(t)\vec{\mathbf{j}} + a_z(t)\vec{\mathbf{k}},$$

где $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ – декартовы координаты вектора, непрерывно зависящие от t.



Определение

Геометрическое место точек Г концов вектора $\vec{a}(t)$, отложенных из общего начала O, называется ***годографом*** *вектора.*

Определение

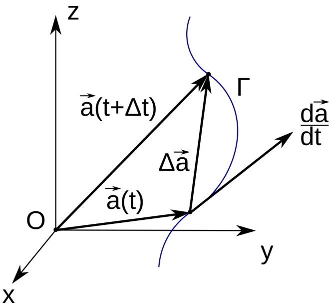
Производной векторной функции называется

$$\vec{a}'(t) = \frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}.$$

Определение

Производной векторной функции называется

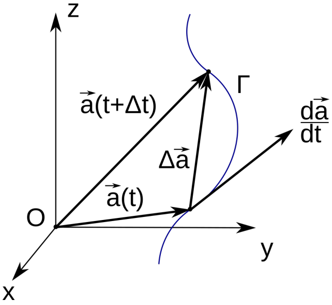
$$\vec{a}'(t) = \frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}.$$



Определение

Производной векторной функции называется

$$\vec{a}'(t) = \frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}.$$



$\dfrac{d\vec{a}}{dt}$ по направлению совпадает с касательной к годографу Γ вектора $\vec{a}(t)$.

На рисунке $\Delta\vec{a} = \vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)$.

Свойства производной вектора

Пусть $\vec{a}(t), \vec{b}(t)$ – векторные функции; $c(t)$ – скалярная функция; $\cdot$, $\times$ – операции скалярного и векторного произведения, тогда

Свойства производной вектора

Пусть $\vec{a}(t), \vec{b}(t)$ – векторные функции; $c(t)$ – скалярная функция; $\cdot, \times$ – операции скалярного и векторного произведения, тогда

1) $\vec{a}'(t) =$

Свойства производной вектора

Пусть $\vec{a}(t), \vec{b}(t)$ – векторные функции; $c(t)$ – скалярная функция; $\cdot$, $\times$ – операции скалярного и векторного произведения, тогда

1) $\vec{a}'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} =$

Свойства производной вектора

Пусть $\vec{a}(t), \vec{b}(t)$ – векторные функции; $c(t)$ – скалярная функция; $\cdot$, $\times$ – операции скалярного и векторного произведения, тогда

1) $\vec{a}'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} =$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{a_x(t+\Delta t) - a_x(t)}{\Delta t} \vec{\mathbf{i}} + \frac{a_y(t+\Delta t) - a_y(t)}{\Delta t} \vec{\mathbf{j}} + \frac{a_z(t+\Delta t) - a_z(t)}{\Delta t} \vec{\mathbf{k}} \right) =$$

Свойства производной вектора

Пусть $\vec{a}(t), \vec{b}(t)$ – векторные функции; $c(t)$ – скалярная функция; $\cdot$, $\times$ – операции скалярного и векторного произведения, тогда

1) $$\vec{a}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{a_x(t+\Delta t) - a_x(t)}{\Delta t}\vec{\mathbf{i}} + \frac{a_y(t+\Delta t) - a_y(t)}{\Delta t}\vec{\mathbf{j}} + \frac{a_z(t+\Delta t) - a_z(t)}{\Delta t}\vec{\mathbf{k}} \right) =$$

$$= \frac{da_x}{dt}\vec{\mathbf{i}} + \frac{da_y}{dt}\vec{\mathbf{j}} + \frac{da_z}{dt}\vec{\mathbf{k}};$$

Свойства производной вектора

Пусть $\vec{a}(t), \vec{b}(t)$ – векторные функции; $c(t)$ – скалярная функция; $\cdot$, $\times$ – операции скалярного и векторного произведения, тогда

1) $$\vec{a}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{a_x(t+\Delta t) - a_x(t)}{\Delta t}\vec{\mathbf{i}} + \frac{a_y(t+\Delta t) - a_y(t)}{\Delta t}\vec{\mathbf{j}} + \frac{a_z(t+\Delta t) - a_z(t)}{\Delta t}\vec{\mathbf{k}} \right) =$$

$$= \frac{da_x}{dt}\vec{\mathbf{i}} + \frac{da_y}{dt}\vec{\mathbf{j}} + \frac{da_z}{dt}\vec{\mathbf{k}};$$

2) $$\frac{d(c\vec{a})}{dt} = \frac{dc}{dt}\vec{a} + c\frac{d\vec{a}}{dt};$$

Свойства производной вектора

Пусть $\vec{a}(t), \vec{b}(t)$ – векторные функции; $c(t)$ – скалярная функция; $\cdot$, $\times$ – операции скалярного и векторного произведения, тогда

1) $$\vec{a}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{a_x(t+\Delta t) - a_x(t)}{\Delta t}\vec{\mathbf{i}} + \frac{a_y(t+\Delta t) - a_y(t)}{\Delta t}\vec{\mathbf{j}} + \frac{a_z(t+\Delta t) - a_z(t)}{\Delta t}\vec{\mathbf{k}} \right) =$$

$$= \frac{da_x}{dt}\vec{\mathbf{i}} + \frac{da_y}{dt}\vec{\mathbf{j}} + \frac{da_z}{dt}\vec{\mathbf{k}};$$

2) $$\frac{d(c\vec{a})}{dt} = \frac{dc}{dt}\vec{a} + c\frac{d\vec{a}}{dt};$$

3) $$\frac{d(\vec{a}\cdot\vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt};$$

Свойства производной вектора

Пусть $\vec{a}(t), \vec{b}(t)$ – векторные функции; $c(t)$ – скалярная функция; $\cdot$, $\times$ – операции скалярного и векторного произведения, тогда

1) $$\vec{a}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{a_x(t+\Delta t) - a_x(t)}{\Delta t}\vec{\mathbf{i}} + \frac{a_y(t+\Delta t) - a_y(t)}{\Delta t}\vec{\mathbf{j}} + \frac{a_z(t+\Delta t) - a_z(t)}{\Delta t}\vec{\mathbf{k}} \right) =$$

$$= \frac{da_x}{dt}\vec{\mathbf{i}} + \frac{da_y}{dt}\vec{\mathbf{j}} + \frac{da_z}{dt}\vec{\mathbf{k}};$$

2) $$\frac{d(c\vec{a})}{dt} = \frac{dc}{dt}\vec{a} + c\frac{d\vec{a}}{dt};$$

3) $$\frac{d(\vec{a}\cdot\vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt};$$

4) $$\frac{d(\vec{a}\times\vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b} + \vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Свойства производной вектора

Пусть $\vec{a}(t), \vec{b}(t)$ – векторные функции; $c(t)$ – скалярная функция; $\cdot$, $\times$ – операции скалярного и векторного произведения, тогда

1) $$\vec{a}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{a_x(t+\Delta t) - a_x(t)}{\Delta t}\vec{\mathbf{i}} + \frac{a_y(t+\Delta t) - a_y(t)}{\Delta t}\vec{\mathbf{j}} + \frac{a_z(t+\Delta t) - a_z(t)}{\Delta t}\vec{\mathbf{k}} \right) =$$

$$= \frac{da_x}{dt}\vec{\mathbf{i}} + \frac{da_y}{dt}\vec{\mathbf{j}} + \frac{da_z}{dt}\vec{\mathbf{k}};$$

2) $$\frac{d(c\vec{a})}{dt} = \frac{dc}{dt}\vec{a} + c\frac{d\vec{a}}{dt};$$

3) $$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt};$$

4) $$\frac{d(\vec{a} \times \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Справедливость выражений пунктов 2-4 следует из пункта 1.

Производная вектора постоянного направления

Пусть $\vec{a}(t) = a(t)\vec{a}_0$, где $||\vec{a}_0|| = 1$ – постоянный вектор, $a(t)$ – длина вектора $\vec{a}(t)$,

Производная вектора постоянного направления

Пусть $\vec{a}(t) = a(t)\vec{a}_0$, где $||\vec{a}_0|| = 1$ – постоянный вектор, $a(t)$ – длина вектора $\vec{a}(t)$, тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\vec{a}_0.$$

Производная вектора постоянного направления

Пусть $\vec{a}(t) = a(t)\vec{a}_0$, где $||\vec{a}_0|| = 1$ – постоянный вектор, $a(t)$ – длина вектора $\vec{a}(t)$, тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\vec{a}_0.$$

Отсюда следует, что $\frac{d\vec{a}}{dt} || \vec{a}$.

Производная вектора постоянной длины

Пусть $\vec{a}(t) = a_0\vec{b}(t)$, где a_0 – заданная длина, $||\vec{b}(t)|| = 1$ – направление вектора $\vec{a}(t)$,

Производная вектора постоянной длины

Пусть $\vec{a}(t) = a_0\vec{b}(t)$, где a_0 – заданная длина, $||\vec{b}(t)|| = 1$ – направление вектора $\vec{a}(t)$, тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = a_0\frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Производная вектора постоянной длины

Пусть $\vec{a}(t) = a_0\vec{b}(t)$, где a_0 – заданная длина, $||\vec{b}(t)|| = 1$ – направление вектора $\vec{a}(t)$, тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = a_0\frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d(\vec{a}\cdot\vec{a})}{dt} =$$

Производная вектора постоянной длины

Пусть $\vec{a}(t) = a_0\vec{b}(t)$, где a_0 – заданная длина, $||\vec{b}(t)|| = 1$ – направление вектора $\vec{a}(t)$, тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = a_0\frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d(\vec{a}\cdot\vec{a})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\frac{d\vec{a}}{dt} =$$

Производная вектора постоянной длины

Пусть $\vec{a}(t) = a_0\vec{b}(t)$, где a_0 – заданная длина, $||\vec{b}(t)|| = 1$ – направление вектора $\vec{a}(t)$, тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = a_0\frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d(\vec{a}\cdot\vec{a})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\frac{d\vec{a}}{dt} = 2\vec{a}\cdot\frac{d\vec{a}}{dt}.$$

Производная вектора постоянной длины

Пусть $\vec{a}(t) = a_0\vec{b}(t)$, где a_0 – заданная длина, $||\vec{b}(t)|| = 1$ – направление вектора $\vec{a}(t)$, тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = a_0\frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d(\vec{a}\cdot\vec{a})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\frac{d\vec{a}}{dt} = 2\vec{a}\cdot\frac{d\vec{a}}{dt}.$$

С другой стороны,

$$\frac{d(\vec{a}\cdot\vec{a})}{dt} = \frac{da_0^2}{dt} = 0.$$

Производная вектора постоянной длины

Пусть $\vec{a}(t) = a_0\vec{b}(t)$, где a_0 – заданная длина, $||\vec{b}(t)|| = 1$ – направление вектора $\vec{a}(t)$, тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = a_0\frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Рассмотрим

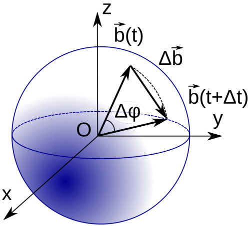
$$\frac{d(\vec{a}\cdot\vec{a})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\frac{d\vec{a}}{dt} = 2\vec{a}\cdot\frac{d\vec{a}}{dt}.$$

С другой стороны,

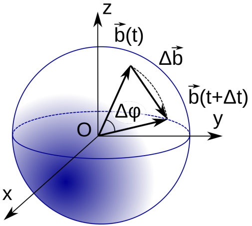
$$\frac{d(\vec{a}\cdot\vec{a})}{dt} = \frac{da_0^2}{dt} = 0.$$

Отсюда следует, что $\vec{a}\cdot\dfrac{d\vec{a}}{dt} = 0$ или $\vec{a}\perp\dfrac{d\vec{a}}{dt}$.

Длина производной вектора единичной длины



Длина производной вектора единичной длины

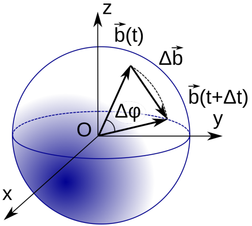


На рисунке: $\Delta\varphi$ – угол между двумя положениями $\vec{b}$,

$$\Delta\vec{b} = \vec{b}(t+\Delta t) - \vec{b}(t),$$

$$||\Delta\vec{b}|| = 2\sin(\Delta\varphi/2).$$

Длина производной вектора единичной длины



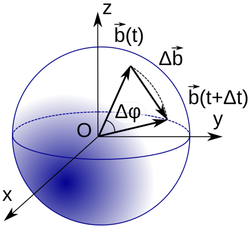
На рисунке: $\Delta\varphi$ – угол между двумя положениями $\vec{b}$,

$$\Delta\vec{b} = \vec{b}(t + \Delta t) - \vec{b}(t),$$

$$||\Delta\vec{b}|| = 2\sin(\Delta\varphi/2).$$

$$\left\|\frac{d\vec{b}}{dt}\right\| =$$

Длина производной вектора единичной длины



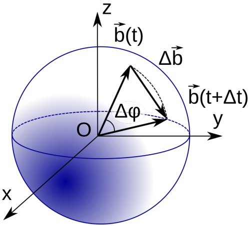
На рисунке: $\Delta\varphi$ – угол между двумя положениями $\vec{b}$,

$$\Delta\vec{b} = \vec{b}(t+\Delta t) - \vec{b}(t),$$

$$||\Delta\vec{b}|| = 2\sin(\Delta\varphi/2).$$

$$\left|\left|\frac{d\vec{b}}{dt}\right|\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{||\Delta\vec{b}||}{\Delta t} =$$

Длина производной вектора единичной длины



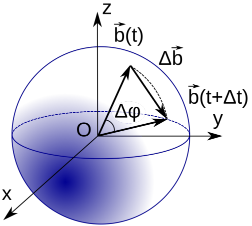
На рисунке: $\Delta\varphi$ – угол между двумя положениями $\vec{b}$,

$$\Delta\vec{b} = \vec{b}(t+\Delta t) - \vec{b}(t),$$

$$||\Delta\vec{b}|| = 2\sin(\Delta\varphi/2).$$

$$\left\|\frac{d\vec{b}}{dt}\right\| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{||\Delta\vec{b}||}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta t} =$$

Длина производной вектора единичной длины



На рисунке: $\Delta\varphi$ – угол между двумя положениями $\vec{b}$,

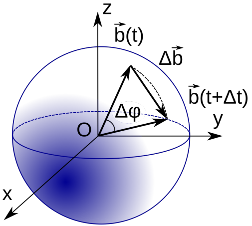
$$\Delta\vec{b} = \vec{b}(t+\Delta t) - \vec{b}(t),$$

$$||\Delta\vec{b}|| = 2\sin(\Delta\varphi/2).$$

$$\left\|\frac{d\vec{b}}{dt}\right\| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{||\Delta\vec{b}||}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Длина производной вектора единичной длины



На рисунке: $\Delta\varphi$ – угол между двумя положениями $\vec{b}$,

$$\Delta\vec{b} = \vec{b}(t+\Delta t) - \vec{b}(t),$$

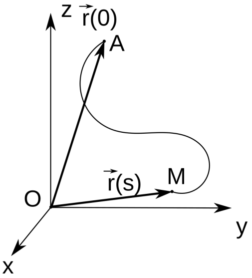
$$||\Delta\vec{b}|| = 2\sin(\Delta\varphi/2).$$

$$\left\|\frac{d\vec{b}}{dt}\right\| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{||\Delta\vec{b}||}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta t} =$$

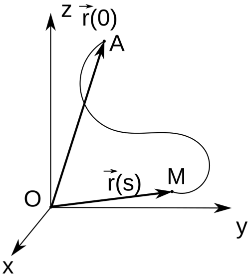
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

$\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ – называется угловой скоростью.

Параметризация кривой с помощью длины s

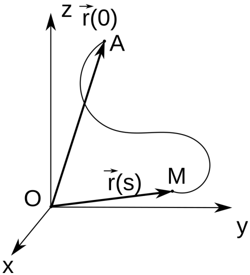


Параметризация кривой с помощью длины s



Пусть кривая параметризована с помощью расстояния s от точки A

Параметризация кривой с помощью длины s

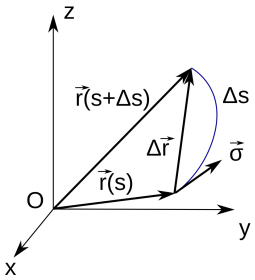


Пусть кривая параметризована с помощью расстояния s от точки A и её уравнение задано некоторым радиус вектором

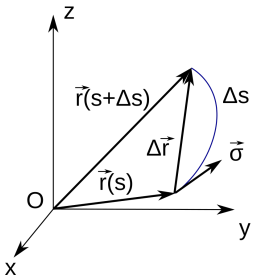
$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{\mathbf{i}} + y(s)\vec{\mathbf{j}} + z(s)\vec{\mathbf{k}}$$

в некоторой декартовой системе координат, где s – длина дуги AM.

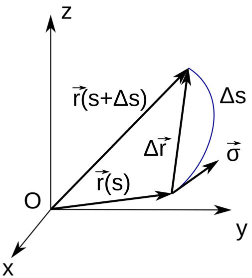
Вектор касательной к кривой



Вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$ направлен по касательной к рассматриваемой кривой,



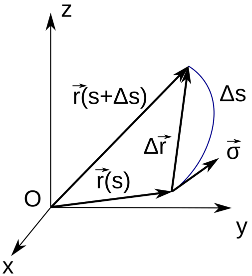
Вектор касательной к кривой



Вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$ направлен по касательной к рассматриваемой кривой, кроме того

$$\left\|\frac{d\vec{r}}{ds}\right\| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\|\Delta\vec{r}\|}{\Delta s} = 1.$$

Вектор касательной к кривой



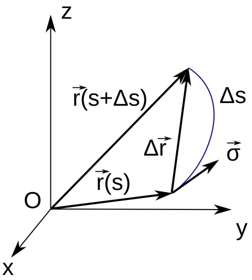
Вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$ направлен по касательной к рассматриваемой кривой, кроме того

$$\left\|\frac{d\vec{r}}{ds}\right\| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{||\Delta \vec{r}||}{\Delta s} = 1.$$

Таким образом единичный вектор касательной к кривой

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \sigma_x \vec{\mathbf{i}} + \sigma_y \vec{\mathbf{j}} + \sigma_z \vec{\mathbf{k}}, \quad ||\vec{\sigma}|| = 1.$$

Вектор касательной к кривой



Вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$ направлен по касательной к рассматриваемой кривой, кроме того

$$\left|\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{||\Delta\vec{r}||}{\Delta s} = 1.$$

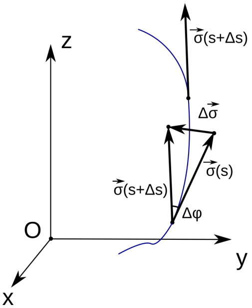
Таким образом единичный вектор касательной к кривой

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \sigma_x \vec{\mathbf{i}} + \sigma_y \vec{\mathbf{j}} + \sigma_z \vec{\mathbf{k}}, \quad ||\vec{\sigma}|| = 1.$$

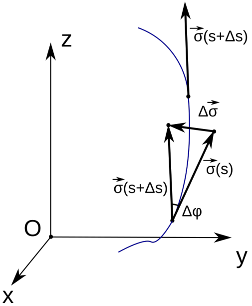
Компоненты вектора $\vec{\sigma}$ по осям

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \tfrac{dx}{ds} = cos(\vec{\sigma}, x), \\ \sigma_y &= \tfrac{dy}{ds} = cos(\vec{\sigma}, y), \\ \sigma_z &= \tfrac{dz}{ds} = cos(\vec{\sigma}, z). \end{aligned}$$

Радиус кривизны

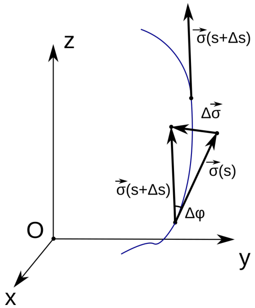


Радиус кривизны



Рассмотрим длину производной касательного вектора.

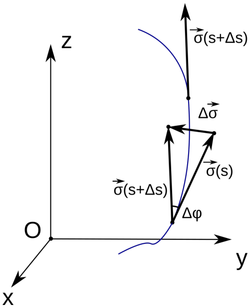
Радиус кривизны



Рассмотрим длину производной касательного вектора. Так как $||\vec{\sigma}(s)|| = 1$, тогда справедливо

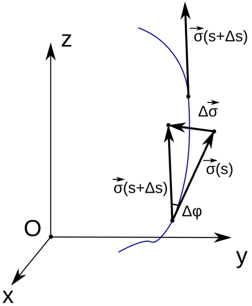
$$\left|\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|\right| =$$

Радиус кривизны



Рассмотрим длину производной касательного вектора. Так как $||\vec{\sigma}(s)|| = 1$, тогда справедливо

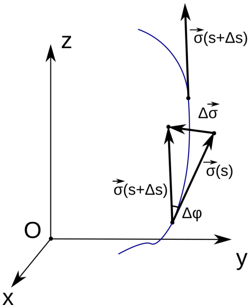
$$\left|\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|\right| = \left|\left|\frac{d\vec{\sigma}}{ds}\right|\right| =$$



Рассмотрим длину производной касательного вектора. Так как $||\vec{\sigma}(s)|| = 1$, тогда справедливо

$$\left|\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|\right| = \left|\left|\frac{d\vec{\sigma}}{ds}\right|\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} =$$

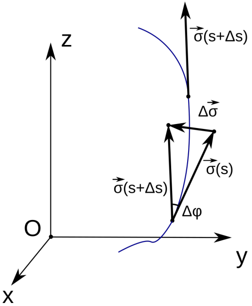
Радиус кривизны



Рассмотрим длину производной касательного вектора. Так как $||\vec{\sigma}(s)|| = 1$, тогда справедливо

$$\left|\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|\right| = \left|\left|\frac{d\vec{\sigma}}{ds}\right|\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{R(s)}.$$

Радиус кривизны

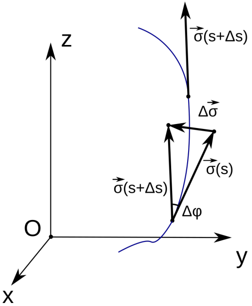


Рассмотрим длину производной касательного вектора. Так как $||\vec{\sigma}(s)|| = 1$, тогда справедливо

$$\left|\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|\right| = \left|\left|\frac{d\vec{\sigma}}{ds}\right|\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{1}{R(s)}.$$

Определение

Величина $R(s)$, определяемая формулой, называется радиусом кривизны кривой.



Рассмотрим длину производной касательного вектора. Так как $||\vec{\sigma}(s)|| = 1$, тогда справедливо

$$\left|\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|\right| = \left|\left|\frac{d\vec{\sigma}}{ds}\right|\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{R(s)}.$$

Определение

Величина $R(s)$, определяемая формулой, называется радиусом кривизны кривой.

Радиус кривизны кривой определяется соотношением

$$R(s) = 1/\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

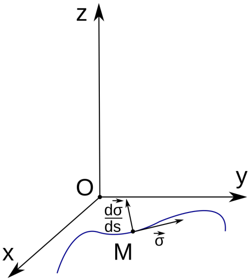
Соприкасающаяся плоскость

Определение

Соприкасающая плоскость – *плоскость, в которой лежит данная точка и вектора* $\frac{d\vec{\sigma}}{ds}$ *и* $\vec{\sigma}$.

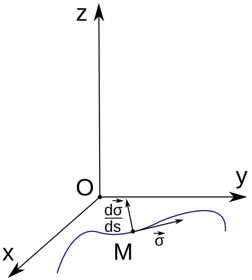
Определение

Соприкасающая плоскость – *плоскость, в которой лежит данная точка и вектора* $\frac{d\vec{\sigma}}{ds}$ *и* $\vec{\sigma}$.



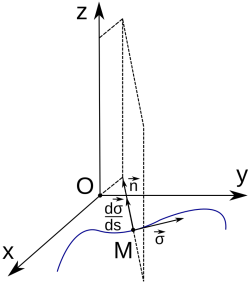
Определение

Соприкасающая плоскость – плоскость, в которой лежит данная точка и вектора $\frac{d\vec{\sigma}}{ds}$ и $\vec{\sigma}$.

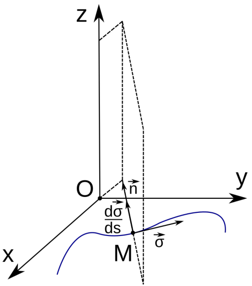


На рисунке кривая лежит в плоскости Oxy, следовательно касательная и её производная тоже лежат в этой плоскости. Поэтому Oxy является соприкасающейся плоскостью.

Вектор нормали к кривой



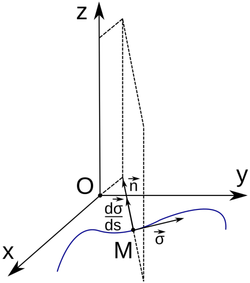
Вектор нормали к кривой



Определение

Прямые, перпендикулярные касательной, называются ***нормалями*** *к кривой, а плоскость, их содержащая – **нормальной плоскостью** к кривой в данной точке.*

Вектор нормали к кривой

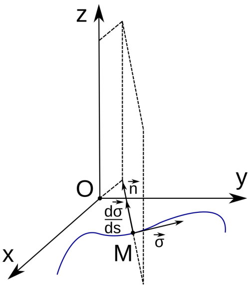


Определение

*Прямые, перпендикулярные касательной, называются **нормалями** к кривой, а плоскость, их содержащая – **нормальной плоскостью** к кривой в данной точке.*

Определение

*Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, называется **главной нормалью**.*



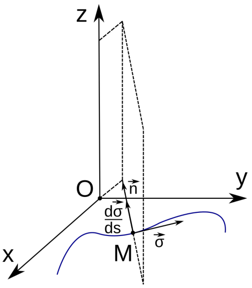
Определение

*Прямые, перпендикулярные касательной, называются **нормалями** к кривой, а плоскость, их содержащая – **нормальной плоскостью** к кривой в данной точке.*

Определение

*Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, называется **главной нормалью**.*

Т.к вектор $\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \perp \vec{\sigma}$ и лежит в соприкасающей плоскости,



Определение

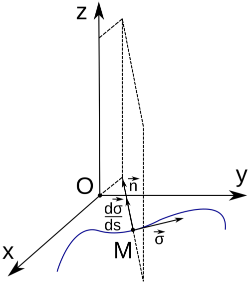
Прямые, перпендикулярные касательной, называются нормалями к кривой, а плоскость, их содержащая – нормальной плоскостью к кривой в данной точке.

Определение

Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, называется главной нормалью.

Т.к вектор $\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \perp \vec{\sigma}$ и лежит в соприкасающей плоскости, то

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R},$$



Определение

Прямые, перпендикулярные касательной, называются нормалями к кривой, а плоскость, их содержащая – нормальной плоскостью к кривой в данной точке.

Определение

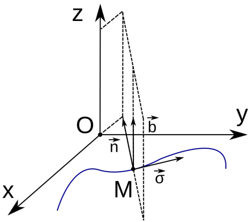
Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, называется главной нормалью.

Т.к вектор $\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \perp \vec{\sigma}$ и лежит в соприкасающей плоскости, то

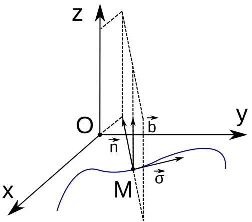
$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R},$$

$\vec{n}$ – единичный вектор, направленный в сторону главной нормали.

Вектор бинормали



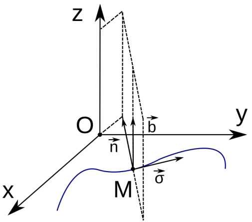
Вектор бинормали



Определение

Нормаль к кривой, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, называется бинормалью.

Вектор бинормали



Определение

Нормаль к кривой, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, называется бинормалью. В качестве бинормали будем подразумевать вектор

$$\vec{b} = \vec{\sigma} \times \vec{n}.$$

Производная от бинормали

Рассмотрим $\dfrac{d\vec{b}}{ds} =$

Производная от бинормали

Рассмотрим $\dfrac{d\vec{b}}{ds} = \dfrac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} =$

Производная от бинормали

Рассмотрим $\dfrac{d\vec{b}}{ds} = \dfrac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \dfrac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \dfrac{d\vec{n}}{ds}$.

Производная от бинормали

Рассмотрим $\dfrac{d\vec{b}}{ds} = \dfrac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \dfrac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \dfrac{d\vec{n}}{ds}$.

$$\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} =$$

Производная от бинормали

Рассмотрим $\dfrac{d\vec{b}}{ds} = \dfrac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \dfrac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \dfrac{d\vec{n}}{ds}$.

$$\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} = \frac{\vec{n}}{R} \times \vec{n} =$$

Производная от бинормали

Рассмотрим $\dfrac{d\vec{b}}{ds} = \dfrac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \dfrac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \dfrac{d\vec{n}}{ds}$.

$\dfrac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} = \dfrac{\vec{n}}{R} \times \vec{n} = 0$ в силу коллинеарности $\vec{n}||\vec{n}$;

Производная от бинормали

Рассмотрим $\dfrac{d\vec{b}}{ds} = \dfrac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \dfrac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \dfrac{d\vec{n}}{ds}$.

$\dfrac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} = \dfrac{\vec{n}}{R} \times \vec{n} = 0$ в силу коллинеарности $\vec{n}||\vec{n}$;

$\dfrac{d\vec{b}}{ds} = \vec{\sigma} \times \dfrac{d\vec{n}}{ds} \perp \vec{\sigma}$

Производная от бинормали

Рассмотрим $\dfrac{d\vec{b}}{ds} = \dfrac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \dfrac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \dfrac{d\vec{n}}{ds}$.

$\dfrac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} = \dfrac{\vec{n}}{R} \times \vec{n} = 0$ в силу коллинеарности $\vec{n}||\vec{n}$;

$\dfrac{d\vec{b}}{ds} = \vec{\sigma} \times \dfrac{d\vec{n}}{ds} \perp \vec{\sigma}$ и, так как $||\vec{b}|| = 1$, то $\dfrac{d\vec{b}}{ds} \perp \vec{b}$,

Производная от бинормали

Рассмотрим $\dfrac{d\vec{b}}{ds} = \dfrac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \dfrac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \dfrac{d\vec{n}}{ds}$.

$\dfrac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} = \dfrac{\vec{n}}{R} \times \vec{n} = 0$ в силу коллинеарности $\vec{n}||\vec{n}$;

$\dfrac{d\vec{b}}{ds} = \vec{\sigma} \times \dfrac{d\vec{n}}{ds} \perp \vec{\sigma}$ и, так как $||\vec{b}|| = 1$, то $\dfrac{d\vec{b}}{ds} \perp \vec{b}$, поэтому

$$\vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds} || \vec{n}.$$

Производная от бинормали

Рассмотрим $\dfrac{d\vec{b}}{ds} = \dfrac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \dfrac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \dfrac{d\vec{n}}{ds}$.

$\dfrac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} = \dfrac{\vec{n}}{R} \times \vec{n} = 0$ в силу коллинеарности $\vec{n}||\vec{n}$;

$\dfrac{d\vec{b}}{ds} = \vec{\sigma} \times \dfrac{d\vec{n}}{ds} \perp \vec{\sigma}$ и, так как $||\vec{b}|| = 1$, то $\dfrac{d\vec{b}}{ds} \perp \vec{b}$, поэтому

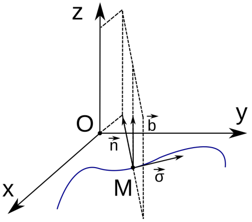
$$\vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds} || \vec{n}.$$

Связь бинормали и нормали

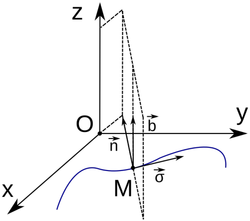
$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{T(s)},$$

где $1/T$ называется кручением, T – радиус кручения. Кручение – мера отклонения от плоской кривой.

Производная от нормали

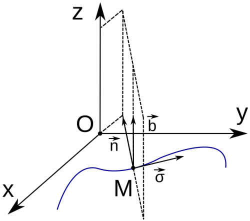


Производная от нормали



Т.к. вектора $\vec{\sigma}$, $\vec{n}$ и $\vec{b}$ составляют правую тройку ортонормированных векторов,

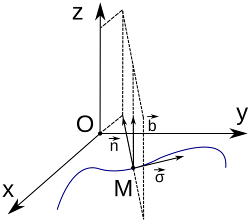
Производная от нормали



Т.к. вектора $\vec{\sigma}$, $\vec{n}$ и $\vec{b}$ составляют правую тройку ортонормированных векторов, то

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\sigma}.$$

Производная от нормали



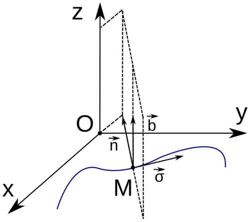
Т.к. вектора $\vec{\sigma}$, $\vec{n}$ и $\vec{b}$ составляют правую тройку ортонормированных векторов, то

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\sigma}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d\vec{n}}{ds} =$$

Производная от нормали

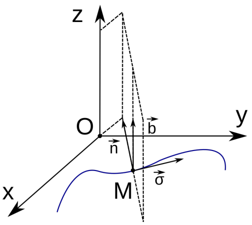


Т.к. вектора $\vec{\sigma}$, $\vec{n}$ и $\vec{b}$ составляют правую тройку ортонормированных векторов, то

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\sigma}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d\vec{b}}{ds} \times \vec{\sigma} + \vec{b} \times \frac{d\vec{\sigma}}{ds} =$$



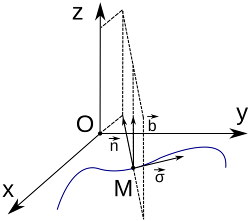
Т.к. вектора $\vec{\sigma}$, $\vec{n}$ и $\vec{b}$ составляют правую тройку ортонормированных векторов, то

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\sigma}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d\vec{b}}{ds} \times \vec{\sigma} + \vec{b} \times \frac{d\vec{\sigma}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{T(s)} \times \vec{\sigma} + \vec{b} \times \frac{\vec{n}}{R(s)} =$$

Производная от нормали



Т.к. вектора $\vec{\sigma}$, $\vec{n}$ и $\vec{b}$ составляют правую тройку ортонормированных векторов, то

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\sigma}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d\vec{b}}{ds} \times \vec{\sigma} + \vec{b} \times \frac{d\vec{\sigma}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{T(s)} \times \vec{\sigma} + \vec{b} \times \frac{\vec{n}}{R(s)} = \frac{\vec{b}}{T(s)} - \frac{\vec{\sigma}}{R(s)}.$$

Формулы Френе

Определение

Соотношения

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{\vec{b}}{T(s)} - \frac{\vec{\sigma}}{R(s)}, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{T(s)}, \quad \frac{d\vec{\sigma}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R(s)},$$

где $R(s)$, $T(s)$ – радиусы кривизны и кручения кривой; $\vec{\sigma}$, $\vec{n}$ и $\vec{b}$ – единичные касательный вектор, вектор главной нормали и бинормали, называются формулами Френе.

Определение

Если в каждой точке пространства задана скалярная или векторная величина, то это означает, что задано скалярное или векторное поле.

Скалярное и векторное поле

Определение

Если в каждой точке пространства задана скалярная или векторная величина, то это означает, что задано скалярное или векторное поле. Если поле зависит от времени, то говорят о нестационарном поле.

Скалярное и векторное поле

Определение

Если в каждой точке пространства задана скалярная или векторная величина, то это означает, что задано скалярное или векторное поле. Если поле зависит от времени, то говорят о нестационарном поле.

Определение

Поверхностью уровня или изоповерхностью называется поверхность, на которой скалярная величина остаётся постоянной.

Определение

Линия в векторном поле $\vec{a}(\vec{r})$, для которой в каждой точке вектор $\vec{a}$ её касается, называется векторной линией.

Определение

Линия в векторном поле $\vec{a}(\vec{r})$, для которой в каждой точке вектор $\vec{a}$ её касается, называется векторной линией.

Пусть $\vec{r}(s) = x(s)\vec{\mathbf{i}} + y(s)\vec{\mathbf{j}} + z(s)\vec{\mathbf{k}}$ – векторная линия.

Определение

Линия в векторном поле $\vec{a}(\vec{r})$, для которой в каждой точке вектор $\vec{a}$ её касается, называется векторной линией.

Пусть $\vec{r}(s) = x(s)\vec{\mathbf{i}} + y(s)\vec{\mathbf{j}} + z(s)\vec{\mathbf{k}}$ – векторная линия. По определению вектор касательной $\vec{\sigma} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ параллелен вектору $\vec{a}(\vec{r})$ во всех точках области определения s,

Определение

Линия в векторном поле $\vec{a}(\vec{r})$, для которой в каждой точке вектор $\vec{a}$ её касается, называется векторной линией.

Пусть $\vec{r}(s) = x(s)\vec{\mathbf{i}} + y(s)\vec{\mathbf{j}} + z(s)\vec{\mathbf{k}}$ – векторная линия. По определению вектор касательной $\vec{\sigma} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ параллелен вектору $\vec{a}(\vec{r})$ во всех точках области определения s, следовательно

$$\frac{dx}{ds} = ka_x(x,y,z),$$
$$\frac{dy}{ds} = ka_y(x,y,z),$$
$$\frac{dz}{ds} = ka_z(x,y,z).$$

Определение

Линия в векторном поле $\vec{a}(\vec{r})$, для которой в каждой точке вектор $\vec{a}$ её касается, называется векторной линией.

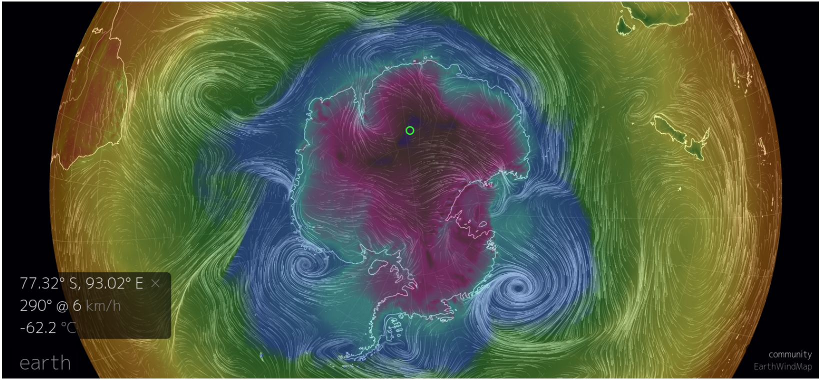
Пусть $\vec{r}(s) = x(s)\vec{\mathbf{i}} + y(s)\vec{\mathbf{j}} + z(s)\vec{\mathbf{k}}$ – векторная линия. По определению вектор касательной $\vec{\sigma} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ параллелен вектору $\vec{a}(\vec{r})$ во всех точках области определения s, следовательно

$$\frac{dx}{ds} = ka_x(x,y,z),$$
$$\frac{dy}{ds} = ka_y(x,y,z),$$
$$\frac{dz}{ds} = ka_z(x,y,z).$$

Или, по-другому,

$$\frac{dx}{a_x(x,y,z)} = \frac{dy}{a_y(x,y,z)} = \frac{dz}{a_z(x,y,z)}.$$

Поле температуры и ветра в Антарктиде 20.03.2016



http://earth.nullschool.net/