Линейные операторы в n-мерном пространстве

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

1 марта 2019 г.

Аннотация

Линейные операторы в n-мерном пространстве. Подобные матрицы. Определитель оператора. Обратный оператор. Характеристические числа и собственные векторы линейного оператора. Две теоремы о собственных векторах. Линейные операторы простой структуры.

Векторное пространство

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A} : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$, *отображающий n-мерное векторное пространство* R^n *само в себя, называется линейным оператором в* R^n.

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A} : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$, отображающий n-мерное векторное пространство R^n само в себя, называется линейным оператором в R^n.

Особенности линейных операторов над R^n

Векторное пространство

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A} : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$, отображающий n-мерное векторное пространство R^n само в себя, называется линейным оператором в R^n.

Особенности линейных операторов над R^n

1. Существует оператор $\mathcal{E}$ (называемый единичным) такой, что для любого вектора $\vec{x}$ из R^n

$$\mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}.$$

Векторное пространство

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A} : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$, отображающий n-мерное векторное пространство R^n само в себя, называется линейным оператором в R^n.

Особенности линейных операторов над R^n

1. Существует оператор $\mathcal{E}$ (называемый единичным) такой, что для любого вектора $\vec{x}$ из R^n

$$\mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}.$$

2. Для любого оператора $\mathcal{A}$ из R^n справедливо соотношение

$$\mathcal{A}\mathcal{E} = \mathcal{E}\mathcal{A} = \mathcal{A}.$$

О матрице соответствующей линейному оператору в R^n

Выберем базис в R^n: $\vec{e_1}$, ..., $\vec{e_n}$.

О матрице соответствующей линейному оператору в R^n

Выберем базис в R^n: $\vec{e_1}$, ..., $\vec{e_n}$. В этом базисе оператору $\mathcal{A}$ соответствует квадратная $n \times n$ матрица A.

О матрице соответствующей линейному оператору в R^n

Выберем базис в R^n: $\vec{e_1}$, ..., $\vec{e_n}$. В этом базисе оператору $\mathcal{A}$ соответствует квадратная $n \times n$ матрица A. Столбцы этой матрицы составлены из координат вектора $\mathcal{A}\vec{e_j}$ в базисе $\vec{e_i}$ $i, j = \overline{1, n}$.

О матрице соответствующей линейному оператору в R^n

Выберем базис в R^n: $\vec{e}_1$, ..., $\vec{e}_n$. В этом базисе оператору $\mathcal{A}$ соответствует квадратная $n \times n$ матрица A. Столбцы этой матрицы составлены из координат вектора $\mathcal{A}\vec{e}_j$ в базисе $\vec{e}_i$ $i, j = \overline{1, n}$.

$$A = \left(\, \mathcal{A}\vec{e}_1 \, \middle| \, \mathcal{A}\vec{e}_2 \, \middle| \, \dots \, \middle| \, \mathcal{A}\vec{e}_n \, \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

О действиях над линейными операторами в R^n

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ – линейные операторы в R^n.

О действиях над линейными операторами в R^n

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ – линейные операторы в R^n. Пусть A, B, C – $n \times n$ матрицы соответствующие линейным операторам $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$,

О действиях над линейными операторами в R^n

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ – линейные операторы в R^n. Пусть A, B, C – $n \times n$ матрицы соответствующие линейным операторам $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, а x – вектор столбец из координат вектора $\vec{x}$, в базисе $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, тогда

О действиях над линейными операторами в R^n

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ – линейные операторы в R^n. Пусть A, B, C – $n \times n$ матрицы соответствующие линейным операторам $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, а x – вектор столбец из координат вектора $\vec{x}$, в базисе $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, тогда

- $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad C = A + B$;

О действиях над линейными операторами в R^n

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ – линейные операторы в R^n. Пусть A, B, C – $n \times n$ матрицы соответствующие линейным операторам $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, а x – вектор столбец из координат вектора $\vec{x}$, в базисе $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, тогда

- $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad C = A + B;$
- $\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad C = AB;$

О действиях над линейными операторами в R^n

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ – линейные операторы в R^n. Пусть A, B, C – $n \times n$ матрицы соответствующие линейным операторам $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, а x – вектор столбец из координат вектора $\vec{x}$, в базисе $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, тогда

- $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad C = A + B;$
- $\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad C = AB;$
- $\mathcal{C} = \alpha\mathcal{A} \quad \Leftrightarrow \quad C = \alpha A.$

(Доказательство вытекает из определения операций).

Следствие

Множество линейных операторов линейно относительно сложения и умножения на число.

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть $\mathcal{E}$ – единичный оператор в R^n,

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть $\mathcal{E}$ – единичный оператор в R^n, т.е. $\forall \vec{x} \in \mathrm{R}^n \ \mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$.

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть $\mathcal{E}$ – единичный оператор в R^n, т.е. $\forall \vec{x} \in \mathrm{R}^n \ \mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$.
Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть $\mathcal{E}$ – единичный оператор в R^n, т.е. $\forall \vec{x} \in \mathrm{R}^n\ \mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$.
Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ – разложение вектора $\vec{x}$ по базису пространства R^n $\vec{e}_i$ $i = \overline{1, n}$.

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть $\mathcal{E}$ – единичный оператор в R^n, т.е. $\forall \vec{x} \in \mathrm{R}^n$ $\mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$.
Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ – разложение вектора $\vec{x}$ по базису пространства R^n $\vec{e}_i$ $i = \overline{1, n}$.
Тогда

$$\mathcal{E}\vec{e}_1 \quad = \quad 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{e}_n$$

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть $\mathcal{E}$ – единичный оператор в R^n, т.е. $\forall \vec{x} \in \mathrm{R}^n \ \mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$.
Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ – разложение вектора $\vec{x}$ по базису пространства R^n $\vec{e}_i$ $i = \overline{1, n}$.
Тогда

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\vec{e}_1 &= 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{e}_n \\
\mathcal{E}\vec{e}_2 &= 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{e}_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть $\mathcal{E}$ – единичный оператор в R^n, т.е. $\forall \vec{x} \in \mathrm{R}^n\ \mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$.
Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ – разложение вектора $\vec{x}$ по базису пространства R^n $\vec{e}_i$ $i = \overline{1, n}$.
Тогда

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{E}\vec{e}_1 & = & 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{e}_n \\
\mathcal{E}\vec{e}_2 & = & 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{e}_n \\
\vdots & & \\
\mathcal{E}\vec{e}_n & = & 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 1 \cdot \vec{e}_n
\end{array}$$

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть $\mathcal{E}$ – единичный оператор в R^n, т.е. $\forall \vec{x} \in \mathrm{R}^n\ \mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$.
Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ – разложение вектора $\vec{x}$ по базису пространства R^n $\vec{e}_i$ $i = \overline{1, n}$.
Тогда

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E}\vec{e}_1 & = & 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{e}_n \\ \mathcal{E}\vec{e}_2 & = & 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{e}_n \\ \vdots & & \\ \mathcal{E}\vec{e}_n & = & 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 1 \cdot \vec{e}_n \end{array}$$

Следовательно оператору $\mathcal{E}$ соответствует единичная матрица:

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть $\mathcal{E}$ – единичный оператор в R^n, т.е. $\forall \vec{x} \in \mathrm{R}^n\ \mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$.
Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ – разложение вектора $\vec{x}$ по базису пространства R^n $\vec{e}_i$ $i = \overline{1, n}$.
Тогда

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{E}\vec{e}_1 & = & 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{e}_n \\
\mathcal{E}\vec{e}_2 & = & 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{e}_n \\
\vdots & & \\
\mathcal{E}\vec{e}_n & = & 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 1 \cdot \vec{e}_n
\end{array}$$

Следовательно оператору $\mathcal{E}$ соответствует единичная матрица:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

О подобных матрицах

Определение

Две матрицы A и B,

О подобных матрицах

Определение

Две матрицы A *и* B*, связанные соотношением* $B = TAT^{-1}$*,*

О подобных матрицах

Определение

Две матрицы A и B, связанные соотношением $B = TAT^{-1}$, называются подобными,

О подобных матрицах

Определение

Две матрицы A и B, связанные соотношением $B = TAT^{-1}$, называются подобными*, где T – неособенная матрица.*

О подобных матрицах

Определение

Две матрицы A и B, связанные соотношением $B = TAT^{-1}$, называются подобными, где T – неособенная матрица.

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n,

О подобных матрицах

Определение

Две матрицы A и B, связанные соотношением $B = TAT^{-1}$, называются подобными*, где T – неособенная матрица.*

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, A – матрица, соответствующая оператору $\mathcal{A}$

О подобных матрицах

Определение

Две матрицы A и B, связанные соотношением $B = TAT^{-1}$, называются *подобными**, где T – неособенная матрица.*

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, A – матрица, соответствующая оператору $\mathcal{A}$ в базисе $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$,

О подобных матрицах

Определение

Две матрицы A и B, связанные соотношением $B = TAT^{-1}$, называются подобными*, где T – неособенная матрица.*

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, A – матрица, соответствующая оператору $\mathcal{A}$ в базисе $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$, а A' – матрица, соответствующая оператору $\mathcal{A}$

О подобных матрицах

Определение

Две матрицы A и B, связанные соотношением $B = TAT^{-1}$, называются подобными, где T – неособенная матрица.

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, A – матрица, соответствующая оператору $\mathcal{A}$ в базисе $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$, а A' – матрица, соответствующая оператору $\mathcal{A}$ в базисе $\vec{g}_i$ $(i = \overline{1, n})$.

О подобных матрицах

Определение

Две матрицы A и B, связанные соотношением $B = TAT^{-1}$, называются **подобными**, *где T – неособенная матрица.*

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, A – матрица, соответствующая оператору $\mathcal{A}$ в базисе $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$, а A' – матрица, соответствующая оператору $\mathcal{A}$ в базисе $\vec{g}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Тогда матрицы A и A' подобны.

О подобных матрицах

Доказательство.

Пусть T^{t} – неособенная матрица перехода

О подобных матрицах

Доказательство.

Пусть T^{t} – неособенная матрица перехода между базисами $\vec{e}_i$ и $\vec{g}_j$ $(i, j = \overline{1, n})$.

О подобных матрицах

Доказательство.

Пусть T^{t} – неособенная матрица перехода между базисами $\vec{e}_i$ и $\vec{g}_j$ $(i, j = \overline{1, n})$. Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$ – образ вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$.

О подобных матрицах

Доказательство.

Пусть T^{t} – неособенная матрица перехода между базисами $\vec{e}_i$ и $\vec{g}_j$ $(i, j = \overline{1, n})$. Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$ – образ вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$. Пусть x и x' – координаты вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$,

О подобных матрицах

Доказательство.

Пусть T^{t} – неособенная матрица перехода между базисами $\vec{e}_i$ и $\vec{g}_j$ $(i, j = \overline{1, n})$. Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$ – образ вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$. Пусть x и x' – координаты вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$, а y и y' – координаты вектора $\vec{y} \in \mathrm{R}^n$ в заданных базисах.

О подобных матрицах

Доказательство.

Пусть T^{t} – неособенная матрица перехода между базисами $\vec{e}_i$ и $\vec{g}_j$ $(i, j = \overline{1, n})$. Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$ – образ вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$. Пусть x и x' – координаты вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$, а y и y' – координаты вектора $\vec{y} \in \mathrm{R}^n$ в заданных базисах. Тогда

$$y = Ax, \quad y' = A'x'.$$

Доказательство.
Пусть T^{t} – неособенная матрица перехода между базисами $\vec{e}_i$ и $\vec{g}_j$ $(i, j = \overline{1, n})$. Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$ – образ вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$. Пусть x и x' – координаты вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$, а y и y' – координаты вектора $\vec{y} \in \mathrm{R}^n$ в заданных базисах. Тогда

$$y = Ax, \quad y' = A'x'.$$

По теореме о связи векторов в различных базисах

$$y' = Ty, \quad x' = Tx.$$

Доказательство.
Пусть T^{t} – неособенная матрица перехода между базисами $\vec{e}_i$ и $\vec{g}_j$ $(i, j = \overline{1, n})$. Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$ – образ вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$. Пусть x и x' – координаты вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$, а y и y' – координаты вектора $\vec{y} \in \mathrm{R}^n$ в заданных базисах. Тогда

$$y = Ax, \quad y' = A'x'.$$

По теореме о связи векторов в различных базисах

$$y' = Ty, \quad x' = Tx.$$

Подставляя выражение для y' и x' в предыдущие соотношения, получаем

$$y = \left(T^{-1}A'T\right)x.$$

О подобных матрицах

Доказательство.

Пусть T^{t} – неособенная матрица перехода между базисами $\vec{e}_i$ и $\vec{g}_j$ $(i, j = \overline{1, n})$. Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$ – образ вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$. Пусть x и x' – координаты вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$, а y и y' – координаты вектора $\vec{y} \in \mathrm{R}^n$ в заданных базисах. Тогда

$$y = Ax, \quad y' = A'x'.$$

По теореме о связи векторов в различных базисах

$$y' = Ty, \quad x' = Tx.$$

Подставляя выражение для y' и x' в предыдущие соотношения, получаем

$$y = \left(T^{-1}A'T\right)x.$$

Т.к. $y = Ax$, то в силу произвольности $\vec{x}$: $A = T^{-1}A'T$.

Определитель линейного оператора в $\mathbb{R}^n$

Пусть A и B – подобные матрицы.

Определитель линейного оператора в $\mathbb{R}^n$

Пусть A и B – подобные матрицы. Тогда $A = TBT^{-1}$ для некоторой неособой T

Определитель линейного оператора в $\mathbb{R}^n$

Пусть A и B – подобные матрицы. Тогда $A = TBT^{-1}$ для некоторой неособой T и

$$|A| = |TBT^{-1}| = |T||B||T^{-1}| = |T||B|/|T| = |B|.$$

Пусть A и B – подобные матрицы. Тогда $A = TBT^{-1}$ для некоторой неособой T и

$$|A| = |TBT^{-1}| = |T||B||T^{-1}| = |T||B|/|T| = |B|.$$

Определение

Определителем оператора $\mathcal{A} : R^n \to R^n$

Определитель линейного оператора в R^n

Пусть A и B – подобные матрицы. Тогда $A = TBT^{-1}$ для некоторой неособой T и

$$|A| = |TBT^{-1}| = |T||B||T^{-1}| = |T||B|/|T| = |B|.$$

Определение

Определителем оператора $\mathcal{A} : R^n \to R^n$ называется определитель матрицы преобразования этого оператора в любом базисе.

Определитель линейного оператора в R^n

Пусть A и B – подобные матрицы. Тогда $A = TBT^{-1}$ для некоторой неособой T и

$$|A| = |TBT^{-1}| = |T||B||T^{-1}| = |T||B|/|T| = |B|.$$

Определение

Определителем оператора $\mathcal{A} : R^n \to R^n$ называется определитель матрицы преобразования этого оператора в любом базисе. Если $|\mathcal{A}| = 0$, то оператор называется особенным,

Определитель линейного оператора в R^n

Пусть A и B – подобные матрицы. Тогда $A = TBT^{-1}$ для некоторой неособой T и

$$|A| = |TBT^{-1}| = |T||B||T^{-1}| = |T||B|/|T| = |B|.$$

Определение

Определителем оператора $\mathcal{A} : R^n \to R^n$ называется определитель матрицы преобразования этого оператора в любом базисе. Если $|\mathcal{A}| = 0$, то оператор называется особенным, в противном случае $|\mathcal{A}| \neq 0$, оператор – неособенный.

Свойства особенного оператора

Свойство

Для особенного оператора $\mathcal{A}$

Свойства особенного оператора

Свойство

Для особенного оператора $\mathcal{A}$ существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из R^n,

Свойства особенного оператора

Свойство

Для особенного оператора $\mathcal{A}$ существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из R^n, что $\mathcal{A}\vec{x} = 0$.

Свойства особенного оператора

Свойство

Для особенного оператора $\mathcal{A}$ существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из R^n, что $\mathcal{A}\vec{x} = 0$.

Доказательство.

Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$.

Свойства особенного оператора

Свойство
Для особенного оператора $\mathcal{A}$ существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из R^n, что $\mathcal{A}\vec{x} = 0$.

Доказательство.
Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе.

Свойства особенного оператора

Свойство

Для особенного оператора $\mathcal{A}$ существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из R^n, что $\mathcal{A}\vec{x} = 0$.

Доказательство.

Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = 0$

Свойства особенного оператора

Свойство

Для особенного оператора $\mathcal{A}$ существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из R^n, что $\mathcal{A}\vec{x} = 0$.

Доказательство.

Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ равнозначно матричному

$$Ax = 0.$$

Свойства особенного оператора

Свойство
Для особенного оператора $\mathcal{A}$ существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из R^n, что $\mathcal{A}\vec{x} = 0$.

Доказательство.
Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ равнозначно матричному

$$Ax = 0.$$

Оператор $\mathcal{A}$ особенный, значит $|A| = 0$.

Свойства особенного оператора

Свойство

Для особенного оператора $\mathcal{A}$ существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из R^n, что $\mathcal{A}\vec{x} = 0$.

Доказательство.

Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ равнозначно матричному

$$Ax = 0.$$

Оператор $\mathcal{A}$ особенный, значит $|A| = 0$. Следовательно матричное уравнение имеет нетривиальное решение $x \neq 0$.

Свойства особенного оператора

Свойство

Для особенного оператора $\mathcal{A}$ существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из R^n, что $\mathcal{A}\vec{x} = 0$.

Доказательство.

Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ равнозначно матричному

$$Ax = 0.$$

Оператор $\mathcal{A}$ особенный, значит $|A| = 0$. Следовательно матричное уравнение имеет нетривиальное решение $x \neq 0$.

$\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \neq 0$ — решение операторного уравнения.

□

Свойства неособенного оператора

Теорема

Неособенный оператор $\mathcal{A}$ в R^n имеет следующие свойства:

Свойства неособенного оператора

Теорема

Неособенный оператор $\mathcal{A}$ в R^n имеет следующие свойства:

1. Из равенства $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ всегда следует, что $\vec{x} = 0$.

Свойства неособенного оператора

Теорема

Неособенный оператор $\mathcal{A}$ в R^n имеет следующие свойства:

1. Из равенства $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ всегда следует, что $\vec{x} = 0$.
2. $\mathcal{A}\mathrm{R}^n = \mathrm{R}^n$ (полнота).

Свойства неособенного оператора

Теорема

Неособенный оператор $\mathcal{A}$ в R^n имеет следующие свойства:

1. Из равенства $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ всегда следует, что $\vec{x} = 0$.
2. $\mathcal{A}\mathrm{R}^n = \mathrm{R}^n$ (полнота).
3. $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{y}$ (взаимнооднозначность).

1. $\mathcal{A}\vec{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = 0$

Доказательство.
Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$.

1. $\mathcal{A}\vec{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = 0$

Доказательство.

Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе.

1. $\mathcal{A}\vec{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = 0$

Доказательство.
Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ равнозначно матричному

$$Ax = 0.$$

1. $\mathcal{A}\vec{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = 0$

Доказательство.
Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ равнозначно матричному

$$Ax = 0.$$

Оператор $\mathcal{A}$ неособенный, значит $|A| \neq 0$.

1. $\mathcal{A}\vec{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = 0$

Доказательство.

Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ равнозначно матричному

$$Ax = 0.$$

Оператор $\mathcal{A}$ неособенный, значит $|A| \neq 0$. Следовательно матричное уравнение имеет только одно решение $x = 0$ и, следовательно, $\vec{x} = 0$.

$\square$

2. $\mathcal{A}\mathrm{R}^n = \mathrm{R}^n$ (полнота)

Доказательство.
Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n.

2. $\mathcal{A}\mathrm{R}^n = \mathrm{R}^n$ (полнота)

Доказательство.
Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n. Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$.

2. $\mathcal{A}\mathrm{R}^n = \mathrm{R}^n$ (полнота)

Доказательство.

Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n. Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе.

2. $\mathcal{A}\mathrm{R}^n = \mathrm{R}^n$ (полнота)

Доказательство.
Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n. Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Нужно показать, что операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет решение для любого вектора $\vec{y} \in \mathrm{R}^n$.

2. $\mathcal{A}\mathrm{R}^n = \mathrm{R}^n$ (полнота)

Доказательство.

Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n. Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Нужно показать, что операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет решение для любого вектора $\vec{y} \in \mathrm{R}^n$. Пусть x, y – вектор-столбцы координат векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ в выбранном базисе соответственно.

2. $\mathcal{A}\mathrm{R}^n = \mathrm{R}^n$ (полнота)

Доказательство.
Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n. Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Нужно показать, что операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет решение для любого вектора $\vec{y} \in \mathrm{R}^n$. Пусть x, y – вектор-столбцы координат векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ в выбранном базисе соответственно. В матричном виде уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет вид

$$Ax = y.$$

2. $\mathcal{A}\mathrm{R}^n = \mathrm{R}^n$ (полнота)

Доказательство.
Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n. Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Нужно показать, что операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет решение для любого вектора $\vec{y} \in \mathrm{R}^n$. Пусть x, y – вектор-столбцы координат векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ в выбранном базисе соответственно. В матричном виде уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет вид

$$Ax = y.$$

Оператор $\mathcal{A}$ неособенный, значит $|A| \neq 0$.

2. $\mathcal{A}\mathrm{R}^n = \mathrm{R}^n$ (полнота)

Доказательство.

Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n. Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Нужно показать, что операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет решение для любого вектора $\vec{y} \in \mathrm{R}^n$. Пусть x, y – вектор-столбцы координат векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ в выбранном базисе соответственно. В матричном виде уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет вид

$$Ax = y.$$

Оператор $\mathcal{A}$ неособенный, значит $|A| \neq 0$. Следовательно матричное уравнение имеет решение вида $x = A^{-1}y$.

2. $\mathcal{A}\mathrm{R}^n = \mathrm{R}^n$ (полнота)

Доказательство.
Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n. Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Нужно показать, что операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет решение для любого вектора $\vec{y} \in \mathrm{R}^n$. Пусть x, y – вектор-столбцы координат векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ в выбранном базисе соответственно. В матричном виде уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет вид

$$Ax = y.$$

Оператор $\mathcal{A}$ неособенный, значит $|A| \neq 0$. Следовательно матричное уравнение имеет решение вида $x = A^{-1}y$.

$\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \neq 0$ — решение операторного уравнения.

3. $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{y}$ (взаимнооднозначность)

Доказательство.

Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$.

3. $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{y}$ (взаимнооднозначность)

Доказательство.
Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе.

3. $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{y}$ (взаимнооднозначность)

Доказательство.

Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе.

- Пусть $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y}$, т.е. $\mathcal{A}(\vec{x} - \vec{y}) = 0$.

3. $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{y}$ (взаимнооднозначность)

Доказательство.

Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе.

- Пусть $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y}$, т.е. $\mathcal{A}(\vec{x} - \vec{y}) = 0$. Тогда из пункта 1 для неособенного оператора следует, что $\vec{x} - \vec{y} = 0$ или $\vec{x} = \vec{y}$.

3. $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{y}$ (взаимнооднозначность)

Доказательство.

Выберем базис пространства R^n $\vec{e}_i$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе.

- Пусть $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y}$, т.е. $\mathcal{A}(\vec{x} - \vec{y}) = 0$. Тогда из пункта 1 для неособенного оператора следует, что $\vec{x} - \vec{y} = 0$ или $\vec{x} = \vec{y}$.
- Оператор $\mathcal{A}$ является однозначной функцией и не может принимать различные значения.

$\square$

Обратный оператор

Из доказанных свойств вытекает следующая теорема

Теорема

Неособенный оператор $\mathcal{A}$ в R^n имеет обратный оператор такой, что:

$$\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\vec{x}) = \vec{x},$$

Обратный оператор

Из доказанных свойств вытекает следующая теорема

Теорема

Неособенный оператор $\mathcal{A}$ в R^n имеет обратный оператор такой, что:

$$\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\vec{x}) = \vec{x},$$

т.е.

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}.$$

Оператор $\mathcal{A}^{-1}$ является линейным оператором.

Обратный оператор

Из доказанных свойств вытекает следующая теорема

Теорема
Неособенный оператор $\mathcal{A}$ в R^n имеет обратный оператор такой, что:

$$\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\vec{x}) = \vec{x},$$

т.е.

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}.$$

Оператор $\mathcal{A}^{-1}$ является линейным оператором.

Линейность обратного оператора

Доказательство.
Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$, $\vec{u} = \mathcal{A}\vec{w}$,

Линейность обратного оператора

Доказательство.
Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$, $\vec{u} = \mathcal{A}\vec{w}$, и $\mathcal{A}$ неособенный оператор в R^n.

Линейность обратного оператора

Доказательство.
Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$, $\vec{u} = \mathcal{A}\vec{w}$, и $\mathcal{A}$ неособенный оператор в R^n.

$$\alpha\vec{y} + \beta\vec{u} =$$

Линейность обратного оператора

Доказательство.
Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$, $\vec{u} = \mathcal{A}\vec{w}$, и $\mathcal{A}$ неособенный оператор в R^n.

$$\alpha\vec{y} + \beta\vec{u} = \alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{w} =$$

Линейность обратного оператора

Доказательство.
Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$, $\vec{u} = \mathcal{A}\vec{w}$, и $\mathcal{A}$ неособенный оператор в R^n.

$$\alpha\vec{y} + \beta\vec{u} = \alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{w} = \mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{w})$$

Линейность обратного оператора

Доказательство.
Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$, $\vec{u} = \mathcal{A}\vec{w}$, и $\mathcal{A}$ неособенный оператор в R^n.

$$\alpha\vec{y} + \beta\vec{u} = \alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{w} = \mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{w})$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{A}^{-1}(\alpha\vec{y} + \beta\vec{u}) = \alpha\vec{x} + \beta\vec{w} =$$

Линейность обратного оператора

Доказательство.
Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$, $\vec{u} = \mathcal{A}\vec{w}$, и $\mathcal{A}$ неособенный оператор в R^n.

$$\alpha\vec{y} + \beta\vec{u} = \alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{w} = \mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{w})$$
$$\Downarrow$$
$$\mathcal{A}^{-1}(\alpha\vec{y} + \beta\vec{u}) = \alpha\vec{x} + \beta\vec{w} = \alpha\mathcal{A}^{-1}\vec{y} + \beta\mathcal{A}^{-1}\vec{u}.$$

$\square$

Матрица обратного оператора

Теорема

Если в некотором базисе оператору $\mathcal{A}$ отвечает матрица A,

Матрица обратного оператора

Теорема

Если в некотором базисе оператору $\mathcal{A}$ отвечает матрица A, тогда в этом же базисе оператору $\mathcal{A}^{-1}$ будет отвечать матрица A^{-1}.

Матрица обратного оператора

Доказательство.

Пусть $\mathcal{A}$ неособенный оператор в R^n.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{A}$ неособенный оператор в R^n. Пусть $\mathcal{A}^{-1}$ – обратный оператор к $\mathcal{A}$.

Матрица обратного оператора

Доказательство.

Пусть $\mathcal{A}$ неособенный оператор в R^n. Пусть $\mathcal{A}^{-1}$ – обратный оператор к $\mathcal{A}$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$, B – матрица оператора $\mathcal{A}^{-1}$ в некотором базисе,

Доказательство.

Пусть $\mathcal{A}$ неособенный оператор в R^n. Пусть $\mathcal{A}^{-1}$ – обратный оператор к $\mathcal{A}$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$, B – матрица оператора $\mathcal{A}^{-1}$ в некотором базисе, тогда

$$\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\vec{x}) = \vec{x} = \mathcal{E}\vec{x}.$$

Доказательство.
Пусть $\mathcal{A}$ неособенный оператор в R^n. Пусть $\mathcal{A}^{-1}$ – обратный оператор к $\mathcal{A}$. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$, B – матрица оператора $\mathcal{A}^{-1}$ в некотором базисе, тогда

$$\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\vec{x}) = \vec{x} = \mathcal{E}\vec{x}.$$

Таким образом, $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}$, и, в матричном виде

$$BA = E,$$

т.е.

$$B = A^{-1}.$$

$\square$

Определение

Пусть $\mathcal{A}$ *– линейный оператор в* R^n,

Характеристические числа и собственные векторы

Определение

Пусть $\mathcal{A}$ *– линейный оператор в* R^n, *тогда числа* λ *и векторы* $\vec{x}$,

Характеристические числа и собственные векторы

Определение

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, тогда числа λ и векторы $\vec{x}$, удовлетворяющие равенству

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (\vec{x} \neq \vec{0}),$$

Определение

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, тогда числа λ и векторы $\vec{x}$, удовлетворяющие равенству

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (\vec{x} \neq \vec{0}),$$

называются собственными (характеристическими) числами

Определение

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, тогда числа λ и векторы $\vec{x}$, удовлетворяющие равенству

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (\vec{x} \neq \vec{0}),$$

называются собственными (характеристическими) числами и соответствующие им векторы – собственными векторами линейного оператора $\mathcal{A}$.

Характеристический многочлен

$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$

Харастеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x}$$

Харастеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x} \Leftrightarrow \left(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}\right)\vec{x} = 0.$$

Характеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x} \Leftrightarrow \left(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}\right)\vec{x} = 0.$$

Вектор $\vec{x} \neq 0$ и число λ существует,

Харастеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x} \Leftrightarrow \left(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}\right)\vec{x} = 0.$$

Вектор $\vec{x} \neq 0$ и число λ существует, когда $|\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}|$=0,

Харастеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x} \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\,\vec{x} = 0.$$

Вектор $\vec{x} \neq 0$ и число λ существует, когда $|\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}|$=0, или в некотором базисе

$$\chi(\lambda) =$$

Характеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x} \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\,\vec{x} = 0.$$

Вектор $\vec{x} \neq 0$ и число λ существует, когда $|\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}|$=0, или в некотором базисе

$$\chi(\lambda) = |A - \lambda E| =$$

Харастеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x} \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\,\vec{x} = 0.$$

Вектор $\vec{x} \neq 0$ и число λ существует, когда $|\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}|$=0, или в некотором базисе

$$\chi(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x} \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\,\vec{x} = 0.$$

Вектор $\vec{x} \neq 0$ и число λ существует, когда $|\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}|$=0, или в некотором базисе

$$\chi(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Определение

Функция $\chi(\lambda)$, приведенного вида,

Характеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x} \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\,\vec{x} = 0.$$

Вектор $\vec{x} \neq 0$ и число λ существует, когда $|\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}|$=0, или в некотором базисе

$$\chi(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Определение

Функция $\chi(\lambda)$, приведенного вида, называется характеристическим многочленом (характеристической функцией) оператора $\mathcal{A}$.

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n не зависит от выбора базиса.

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы,

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору $\mathcal{A}$ в различных базисах пространства R^n.

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору $\mathcal{A}$ в различных базисах пространства R^n. По свойству они подобны,

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору $\mathcal{A}$ в различных базисах пространства R^n. По свойству они подобны, значит существует $|T| \neq 0$: $A = TA'T^{-1}$,

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору $\mathcal{A}$ в различных базисах пространства R^n. По свойству они подобны, значит существует $|T| \neq 0$: $A = TA'T^{-1}$, тогда

$$|A - \lambda E| =$$

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору $\mathcal{A}$ в различных базисах пространства R^n. По свойству они подобны, значит существует $|T| \neq 0$: $A = TA'T^{-1}$, тогда

$$|A - \lambda E| = |TA'T^{-1} - T\lambda ET^{-1}| =$$

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору $\mathcal{A}$ в различных базисах пространства R^n. По свойству они подобны, значит существует $|T| \neq 0$: $A = TA'T^{-1}$, тогда

$$|A - \lambda E| = |TA'T^{-1} - T\lambda ET^{-1}| = |T(A' - \lambda E)T^{-1}| =$$

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору $\mathcal{A}$ в различных базисах пространства R^n. По свойству они подобны, значит существует $|T| \neq 0$: $A = TA'T^{-1}$, тогда

$$|A - \lambda E| = |TA'T^{-1} - T\lambda ET^{-1}| = |T(A' - \lambda E)T^{-1}| =$$

$$= |T||A' - \lambda E||T^{-1}| =$$

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору $\mathcal{A}$ в различных базисах пространства R^n. По свойству они подобны, значит существует $|T| \neq 0$: $A = TA'T^{-1}$, тогда

$$|A - \lambda E| = |TA'T^{-1} - T\lambda ET^{-1}| = |T(A' - \lambda E)T^{-1}| =$$

$$= |T||A' - \lambda E||T^{-1}| = |T||A' - \lambda E|/|T| =$$

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору $\mathcal{A}$ в различных базисах пространства R^n. По свойству они подобны, значит существует $|T| \neq 0$: $A = TA'T^{-1}$, тогда

$$|A - \lambda E| = |TA'T^{-1} - T\lambda ET^{-1}| = |T(A' - \lambda E)T^{-1}| =$$

$$= |T||A' - \lambda E||T^{-1}| = |T||A' - \lambda E|/|T| = |A' - \lambda E|.$$

Алгоритм поиска собственных чисел и собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n

Алгоритм поиска собственных чисел и собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n

1. Выбирается базис в R^n.

Алгоритм поиска собственных чисел и собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n

1. Выбирается базис в R^n.
2. Находим матрицу A, соответствующую $\mathcal{A}$ в выбранном базисе.

Алгоритм поиска собственных чисел и собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n

1. Выбирается базис в R^n.
2. Находим матрицу A, соответствующую $\mathcal{A}$ в выбранном базисе.
3. Находим собственные значения из решения уравнения

$$\chi(\lambda) = 0.$$

Алгоритм поиска собственных чисел и собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$ в R^n

1. Выбирается базис в R^n.
2. Находим матрицу A, соответствующую $\mathcal{A}$ в выбранном базисе.
3. Находим собственные значения из решения уравнения
$$\chi(\lambda) = 0.$$
4. Для каждого найденного λ находим пространство решений x из соотношения
$$(A - \lambda E)x = 0.$$

Свойства собственных векторов

Теорема

Если $\vec{x}$, $\vec{y}$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$,

Свойства собственных векторов

Теорема

Если $\vec{x}$, $\vec{y}$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, соответствующие одному и тому же собственному числу λ,

Свойства собственных векторов

Теорема

Если $\vec{x}$, $\vec{y}$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, соответствующие одному и тому же собственному числу λ, то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ.

Свойства собственных векторов

Теорема

Если $\vec{x}$, $\vec{y}$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, соответствующие одному и тому же собственному числу λ, то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ.

Доказательство.

Из условия теоремы $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\mathcal{A}\vec{y} = \lambda\vec{y}$.

Свойства собственных векторов

Теорема
Если $\vec{x}$, $\vec{y}$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, соответствующие одному и тому же собственному числу λ, то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ.

Доказательство.
Из условия теоремы $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\mathcal{A}\vec{y} = \lambda\vec{y}$. Умножим первое соотношение на α, второе на β, сложим,

Свойства собственных векторов

Теорема

Если $\vec{x}$, $\vec{y}$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, соответствующие одному и тому же собственному числу λ, то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ.

Доказательство.

Из условия теоремы $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\mathcal{A}\vec{y} = \lambda\vec{y}$. Умножим первое соотношение на α, второе на β, сложим, и, пользуясь линейностью, произведем преобразования

$$\alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{y} =$$

Свойства собственных векторов

Теорема
Если $\vec{x}$, $\vec{y}$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, соответствующие одному и тому же собственному числу λ, то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ.

Доказательство.
Из условия теоремы $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\mathcal{A}\vec{y} = \lambda\vec{y}$. Умножим первое соотношение на α, второе на β, сложим, и, пользуясь линейностью, произведем преобразования

$$\alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{y} = \alpha\lambda\vec{x} + \beta\lambda\vec{y}$$

Свойства собственных векторов

Теорема

Если $\vec{x}$, $\vec{y}$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, соответствующие одному и тому же собственному числу λ, то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ.

Доказательство.

Из условия теоремы $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\mathcal{A}\vec{y} = \lambda\vec{y}$. Умножим первое соотношение на α, второе на β, сложим, и, пользуясь линейностью, произведем преобразования

$$\begin{aligned} &\alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{y} = \alpha\lambda\vec{x} + \beta\lambda\vec{y} \\ &\mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \end{aligned}$$

Свойства собственных векторов

Теорема

Если $\vec{x}$, $\vec{y}$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, соответствующие одному и тому же собственному числу λ, то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ.

Доказательство.

Из условия теоремы $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\mathcal{A}\vec{y} = \lambda\vec{y}$. Умножим первое соотношение на α, второе на β, сложим, и, пользуясь линейностью, произведем преобразования

$$\alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{y} = \alpha\lambda\vec{x} + \beta\lambda\vec{y}$$
$$\mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \lambda(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}).$$

Свойства собственных векторов

Теорема

Если $\vec{x}$, $\vec{y}$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, соответствующие одному и тому же собственному числу λ, то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ.

Доказательство.

Из условия теоремы $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\mathcal{A}\vec{y} = \lambda\vec{y}$. Умножим первое соотношение на α, второе на β, сложим, и, пользуясь линейностью, произведем преобразования

$$\alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{y} = \alpha\lambda\vec{x} + \beta\lambda\vec{y}$$
$$\mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \lambda(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}).$$

Следовательно вектор $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ для любых $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$

Свойства собственных векторов

Теорема

Если $\vec{x}$, $\vec{y}$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, соответствующие одному и тому же собственному числу λ, то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ.

Доказательство.

Из условия теоремы $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\mathcal{A}\vec{y} = \lambda\vec{y}$. Умножим первое соотношение на α, второе на β, сложим, и, пользуясь линейностью, произведем преобразования

$$\alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{y} = \alpha\lambda\vec{x} + \beta\lambda\vec{y}$$
$$\mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \lambda(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}).$$

Следовательно вектор $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ для любых $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ также является собственным вектором $\mathcal{A}$, соответствующим собственному числу λ.

Свойства собственных векторов

Теорема

Собственные векторы соответствующие различным собственным числам являются линейно независимыми.

Свойства собственных векторов

Теорема

Собственные векторы соответствующие различным собственным числам являются линейно независимыми.

Доказательство.

Пусть $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ – собственные векторы,

Свойства собственных векторов

Теорема

Собственные векторы соответствующие различным собственным числам являются линейно независимыми.

Доказательство.

Пусть $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ – собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$,

Свойства собственных векторов

Теорема

Собственные векторы соответствующие различным собственным числам являются линейно независимыми.

Доказательство.

Пусть $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ – собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$.

Свойства собственных векторов

Теорема

Собственные векторы соответствующие различным собственным числам являются линейно независимыми.

Доказательство.

Пусть $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ – собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$. Предположим, что существует линейная комбинация

$$\vec{l}(\alpha_i, \vec{x}_j) = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k \vec{x}_k = 0 \quad (\alpha_k \neq 0).$$

Свойства собственных векторов

Теорема

Собственные векторы соответствующие различным собственным числам являются линейно независимыми.

Доказательство.

Пусть $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ – собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$.
Предположим, что существует линейная комбинация

$$\vec{l}(\alpha_i, \vec{x}_j) = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k = 0 \quad (\alpha_k \neq 0).$$

Подействуем линейными операторами $\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{E}$ $(j = \overline{1, k-1})$ на $\vec{l}(\alpha_i, \vec{x}_j)$:

Свойства собственных векторов

Теорема

Собственные векторы соответствующие различным собственным числам являются линейно независимыми.

Доказательство.

Пусть $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ – собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$.
Предположим, что существует линейная комбинация

$$\vec{l}(\alpha_i, \vec{x}_j) = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k = 0 \quad (\alpha_k \neq 0).$$

Подействуем линейными операторами $\mathcal{A} - \lambda_j\mathcal{E}$ $(j = \overline{1, k-1})$ на $\vec{l}(\alpha_i, \vec{x}_j)$:

$$(\mathcal{A} - \lambda_{k-1}\mathcal{E})\ldots(\mathcal{A} - \lambda_2\mathcal{E})(\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E})\vec{l}(\alpha_i, \vec{x}_j).$$

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k \vec{x}_k) =$$

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+$$

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+$$

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k=$$

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k=$$
$$=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+$$

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k) =$$
$$= \alpha_1(\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1 + \alpha_2(\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k(\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k =$$
$$= \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{x}_2 + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)\vec{x}_3 +$$

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k=$$
$$=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k=0$$

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k=$$
$$=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k=0$$

$$(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{E})(\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k)=$$

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k=$$
$$=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k=0$$

$$(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{E})(\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\vec{x}_3+$$

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k=$$
$$=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k=0$$

$$(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{E})(\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\vec{x}_k)=0$$

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k=$$
$$=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k=0$$

$$(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{E})(\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\vec{x}_k)=0$$
$$\vdots$$
$$\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})\vec{x}_k=0$$

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=\\
&=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k=\\
&=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{E})(\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k)=\\
&=\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\vec{x}_k)=0\\
&\vdots\\
&\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})\vec{x}_k=0
\end{aligned}
$$

Последнее равенство невозможно в силу того,

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k=$$
$$=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k=0$$

$$(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{E})(\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\vec{x}_k)=0$$
$$\vdots$$
$$\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})\vec{x}_k=0$$

Последнее равенство невозможно в силу того, что $\alpha_k\neq 0$ (из предположения от противного);

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k=$$
$$=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k=0$$

$$(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{E})(\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\vec{x}_k)=0$$
$$\vdots$$
$$\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})\vec{x}_k=0$$

Последнее равенство невозможно в силу того, что $\alpha_k\neq 0$ (из предположения от противного); $\lambda_k-\lambda_i\neq 0$, т.к. $\lambda_i\neq\lambda_j$ $(i\neq j)$;

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k=$$
$$=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k=0$$

$$(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{E})(\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k)=$$
$$=\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\vec{x}_k)=0$$
$$\vdots$$
$$\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})\vec{x}_k=0$$

Последнее равенство невозможно в силу того, что $\alpha_k\neq 0$ (из предположения от противного); $\lambda_k-\lambda_i\neq 0$, т.к. $\lambda_i\neq\lambda_j$ $(i\neq j)$; $\vec{x}_k\neq 0$ по определению собственного вектора.

Свойства собственных векторов

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})(\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k\vec{x}_k)=\\
&=\alpha_1(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_1+\alpha_2(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_2+\ldots+\alpha_k(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{E})\vec{x}_k=\\
&=\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{E})(\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{x}_2+\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{x}_3+\ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{x}_k)=\\
&=\alpha_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)\vec{x}_3+\ \ldots+\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\vec{x}_k)=0\\
&\vdots\\
&\alpha_k(\lambda_k-\lambda_1)(\lambda_k-\lambda_2)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})\vec{x}_k=0
\end{aligned}
$$

Последнее равенство невозможно в силу того, что $\alpha_k \neq 0$ (из предположения от противного); $\lambda_k-\lambda_i \neq 0$, т.к. $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$; $\vec{x}_k \neq 0$ по определению собственного вектора.
Следовательно векторы $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k$ линейно независимы.

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ *в пространстве* R^n

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n называется оператором простой структуры,

Линейный оператор простой структуры

Определение

*Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n называется **оператором простой структуры**, если он имеет n различных собственных чисел.*

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n называется оператором простой структуры, если он имеет n различных собственных чисел.

Вид оператора простой структуры

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n называется оператором простой структуры, если он имеет n различных собственных чисел.

Вид оператора простой структуры

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n называется оператором простой структуры, если он имеет n различных собственных чисел.

Вид оператора простой структуры

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n имеет n различных собственных векторов $\vec{x}_i$,

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n называется оператором простой структуры, если он имеет n различных собственных чисел.

Вид оператора простой структуры

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n имеет n различных собственных векторов $\vec{x}_i$, соответствующие различным собственным числам λ_i $(i = \overline{1, n})$.

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n называется оператором простой структуры, если он имеет n различных собственных чисел.

Вид оператора простой структуры

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n имеет n различных собственных векторов $\vec{x}_i$, соответствующие различным собственным числам λ_i $(i = \overline{1, n})$. По только что доказанной теореме система из n векторов $\vec{x}_i$ $(i = \overline{1, n})$ линейно независима,

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n называется оператором простой структуры, если он имеет n различных собственных чисел.

Вид оператора простой структуры

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n имеет n различных собственных векторов $\vec{x}_i$, соответствующие различным собственным числам λ_i $(i = \overline{1, n})$. По только что доказанной теореме система из n векторов $\vec{x}_i$ $(i = \overline{1, n})$ линейно независима, а значит является базисом.

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n называется оператором простой структуры, если он имеет n различных собственных чисел.

Вид оператора простой структуры

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ в пространстве R^n имеет n различных собственных векторов $\vec{x}_i$, соответствующие различным собственным числам λ_i $(i = \overline{1, n})$. По только что доказанной теореме система из n векторов $\vec{x}_i$ $(i = \overline{1, n})$ линейно независима, а значит является базисом. Получим вид матрицы A в этом базисе.

Вид оператора простой структуры

Разложение образов базисных векторов по базису пространства R^n

Вид оператора простой структуры

Разложение образов базисных векторов по базису пространства R^n

$$\mathcal{A}\vec{x}_1 \quad = \quad \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{x}_n,$$

Вид оператора простой структуры

Разложение образов базисных векторов по базису пространства R^n

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}\vec{x}_1 & = & \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{x}_n, \\ \mathcal{A}\vec{x}_2 & = & 0 \cdot \vec{x}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{x}_n, \\ \vdots & & \end{array}$$

Вид оператора простой структуры

Разложение образов базисных векторов по базису пространства R^n

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\vec{x}_1 &= \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{x}_n,\\
\mathcal{A}\vec{x}_2 &= 0 \cdot \vec{x}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{x}_n,\\
&\vdots\\
\mathcal{A}\vec{x}_n &= 0 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{x}_n.
\end{aligned}$$

Вид оператора простой структуры

Разложение образов базисных векторов по базису пространства R^n

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{A}\vec{x}_1 & = & \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{x}_n, \\
\mathcal{A}\vec{x}_2 & = & 0 \cdot \vec{x}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{x}_n, \\
\vdots & & \\
\mathcal{A}\vec{x}_n & = & 0 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{x}_n.
\end{array}$$

Матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\vec{x}_i$ $(i = \overline{1, n})$

Вид оператора простой структуры

Разложение образов базисных векторов по базису пространства R^n

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\vec{x}_1 &= \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{x}_n, \\
\mathcal{A}\vec{x}_2 &= 0 \cdot \vec{x}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{x}_n, \\
\vdots \\
\mathcal{A}\vec{x}_n &= 0 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{x}_n.
\end{aligned}$$

Матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\vec{x}_i$ $(i = \overline{1, n})$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Свойства собственных векторов

Теорема (без доказательства)

Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны,

Свойства собственных векторов

Теорема (без доказательства)

Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны, и существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Свойства собственных векторов

Теорема (без доказательства)

Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны, и существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Свойства собственных векторов

Теорема (без доказательства)

Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны, и существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

Свойства собственных векторов

Теорема (без доказательства)

Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны, и существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

Свойства собственных векторов

Теорема (без доказательства)

Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны, и существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1.$$

Свойства собственных векторов

Теорема (без доказательства)

Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны, и существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1.$$

$$\vec{g}_1 \quad = \quad (1/\sqrt{2}, \qquad 1/\sqrt{2}),$$

Свойства собственных векторов

Теорема (без доказательства)
Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны, и существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1.$$

$$\begin{aligned} \vec{g}_1 &= (1/\sqrt{2}, \quad 1/\sqrt{2}), \\ \vec{g}_2 &= (-1/\sqrt{2}, \quad 1/\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Свойства собственных векторов

Теорема (без доказательства)

Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны, и существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1.$$

$$\begin{aligned} \vec{g}_1 &= (1/\sqrt{2}, \quad 1/\sqrt{2}), \\ \vec{g}_2 &= (-1/\sqrt{2}, \quad 1/\sqrt{2}). \end{aligned}$$

$$\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2 = 0, \quad \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_1 = 1, \quad \vec{g}_2 \cdot \vec{g}_2 = 1.$$