

# Линейные преобразования векторных пространств и их свойства.

*Верецагин Антон Сергеевич*  
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

QR-код презентации



20 февраля 2021 г.

Векторное пространство. Отображение  $n$ -мерного вектора в  $m$ -мерный. Линейные операторы. Матрица, соответствующая линейному оператору. Сложение и умножение линейных операторов. Преобразования координат. Эквивалентные матрицы.

## Определение

**Группой** называется упорядоченная двойка  $\{X, \cdot\}$ , где  $X$  – множество элементов, а  $\cdot : X^2 \rightarrow X$  – операция между элементами множества  $X$ , обладающая следующими свойствами:

- 1)  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \ (\forall a, b, c \in X)$
- 2)  $\exists 0 \in X: 0 + x = x + 0 = x \ (\forall x \in X)$
- 3)  $\forall x \in X \exists (-x) \in X: x \cdot (-x) = (-x) \cdot x = 0$

Если выполнено дополнительно следующее свойство, то группа называется **абелевой**:

4.  $x \cdot y = y \cdot x \ (\forall x, y \in X)$

## Определение

**Векторным пространством** называется упорядоченная тройка  $\{V, R, \cdot\}$ , где  $V$  – абелева группа по сложению с элементами, которые будем обозначать  $\vec{x}$  и называть векторами.  $R$  – поле скаляров.  $\cdot : R \times V \rightarrow V$  – однозначно определенная операция умножения скаляра на вектор. При этом должны выполняться следующие условия:

## Определение

**Векторным пространством** называется упорядоченная тройка  $\{V, R, \cdot\}$ , где  $V$  – абелева группа по сложению с элементами, которые будем обозначать  $\vec{x}$  и называть векторами.  $R$  – поле скаляров.  $\cdot : R \times V \rightarrow V$  – однозначно определенная операция умножения скаляра на вектор. При этом должны выполняться следующие условия:

$$1) \quad 1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad \forall x \in V$$

## Определение

**Векторным пространством** называется упорядоченная тройка  $\{V, R, \cdot\}$ , где  $V$  – абелева группа по сложению с элементами, которые будем обозначать  $\vec{x}$  и называть векторами.  $R$  – поле скаляров.  $\cdot : R \times V \rightarrow V$  – однозначно определенная операция умножения скаляра на вектор. При этом должны выполняться следующие условия:

$$1) 1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad \forall x \in V$$

$$2) \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{x}$$

## Определение

**Векторным пространством** называется упорядоченная тройка  $\{V, R, \cdot\}$ , где  $V$  – абелева группа по сложению с элементами, которые будем обозначать  $\vec{x}$  и называть векторами.  $R$  – поле скаляров.  $\cdot : R \times V \rightarrow V$  – однозначно определенная операция умножения скаляра на вектор. При этом должны выполняться следующие условия:

- 1)  $1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad \forall x \in V$
- 2)  $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{x}$
- 3)  $(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$

## Определение

**Векторным пространством** называется упорядоченная тройка  $\{V, R, \cdot\}$ , где  $V$  – абелева группа по сложению с элементами, которые будем обозначать  $\vec{x}$  и называть векторами.  $R$  – поле скаляров.  $\cdot : R \times V \rightarrow V$  – однозначно определенная операция умножения скаляра на вектор. При этом должны выполняться следующие условия:

- 1)  $1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad \forall x \in V$
- 2)  $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{x}$
- 3)  $(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$
- 4)  $\alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$



# Линейная зависимость и линейная независимость векторов

## Определение

Линейной комбинацией векторов  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  с коэффициентами  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  называется следующая сумма

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n$$

# Линейная зависимость и линейная независимость векторов

## Определение

Векторы  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$  называются **линейно зависимыми**, если существуют такие скаляры  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , причем один из них отличен от 0, такие что

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} + \dots = \vec{0}.$$

# Линейная зависимость и линейная независимость векторов

## Определение

Векторы  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$  называются **линейно зависимыми**, если существуют такие скаляры  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , причем один из них отличен от 0, такие что

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} + \dots = \vec{0}.$$

## Определение

Векторы  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$  называются **линейно независимыми**, если из равенства

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} + \dots = \vec{0}$$

следует, что все  $\alpha = \beta = \gamma = \dots = 0$ .

## Определение

Векторное пространство  $V$  называется  **$n$ -мерным**, если в нем существуют  $n$  линейно независимых векторов, а любые  $n + 1$  будут линейно зависимы.  $n$ -мерное векторное пространство обозначается  $V^n$ .

## Определение

Векторное пространство  $V$  называется  **$n$ -мерным**, если в нем существуют  $n$  линейно независимых векторов, а любые  $n + 1$  будут линейно зависимы.  $n$ -мерное векторное пространство обозначается  $V^n$ .

## Определение

**Базисом**  $n$ -мерного пространства  $V^n$  называется система любых  $n$  линейно независимых векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ .

# Пример конечномерного пространства

## Пространство $\mathbb{R}^3$

Рассмотрим четыре вектора в пространстве  $\mathbb{R}^3$

$$\vec{x}_i = \{x_i^1, x_i^2, x_i^3\} \quad (i = 1, \dots, 4)$$

Ранг матрицы, составленный из координат этих векторов не может превышать 3, значит любые 4 вектора в  $\mathbb{R}^3$  будут всегда линейно зависимы.

## Базис в $\mathbb{R}^3$

Базисом в  $\mathbb{R}^3$  будут три любые линейно независимых вектора, например,

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \{1, 0, 0\}, \\ \vec{e}_2 &= \{0, 1, 0\}, \\ \vec{e}_3 &= \{0, 0, 1\}.\end{aligned}$$

# Разложение вектора по базису пространства

## Теорема

В векторном  $n$ -мерном пространстве  $V^n$  каждый вектор может быть единственным способом представлен в виде линейной комбинации векторов базиса.

# Разложение вектора по базису пространства

## Доказательство.

Рассмотрим базис векторного пространства  $V^n$   $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  и произвольный вектор  $\vec{x} \in V^n$ .





# Разложение вектора по базису пространства

## Доказательство.

Рассмотрим базис векторного пространства  $V^n$   $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  и произвольный вектор  $\vec{x} \in V^n$ .

Система векторов  $\vec{x}, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  состоит из  $n+1$  вектора, поэтому является линейно зависимой.



# Разложение вектора по базису пространства

## Доказательство.

Рассмотрим базис векторного пространства  $V^n$   $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  и произвольный вектор  $\vec{x} \in V^n$ .

Система векторов  $\vec{x}, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  состоит из  $n+1$  вектора, поэтому является линейно зависимой.

Следовательно существуют коэффициенты  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta$ , причем один из  $\alpha_i \neq 0$  (пусть  $i = 1$ ) и  $\beta \neq 0$ , такие что

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n + \beta \vec{x} = 0.$$



# Разложение вектора по базису пространства

## Доказательство.

Рассмотрим базис векторного пространства  $V^n$   $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  и произвольный вектор  $\vec{x} \in V^n$ .

Система векторов  $\vec{x}, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  состоит из  $n+1$  вектора, поэтому является линейно зависимой.

Следовательно существуют коэффициенты  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta$ , причем один из  $\alpha_i \neq 0$  (пусть  $i = 1$ ) и  $\beta \neq 0$ , такие что

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n + \beta \vec{x} = 0.$$

Следовательно

$$\vec{x} = -\frac{\alpha_1}{\beta} \vec{e}_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} \vec{e}_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\beta} \vec{e}_n.$$



# Единственность разложения по базису

Доказательство.

Пусть вектор

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \dots + \beta_n \vec{e}_n,$$

где  $\alpha_i \neq \beta_i$  для некоторого  $i$ .



# Единственность разложения по базису

Доказательство.

Пусть вектор

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \dots + \beta_n \vec{e}_n,$$

где  $\alpha_i \neq \beta_i$  для некоторого  $i$ .

$$(\alpha_1 - \beta_1) \vec{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \vec{e}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \vec{e}_n = 0, \text{ где } \alpha_i - \beta_i \neq 0.$$



# Единственность разложения по базису

## Доказательство.

Пусть вектор

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \dots + \beta_n \vec{e}_n,$$

где  $\alpha_i \neq \beta_i$  для некоторого  $i$ .

$$(\alpha_1 - \beta_1) \vec{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \vec{e}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \vec{e}_n = 0, \text{ где } \alpha_i - \beta_i \neq 0.$$

Это невозможно в силу линейной независимости базиса  $\vec{e}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).



# Единственность разложения по базису

## Доказательство.

Пусть вектор

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \dots + \beta_n \vec{e}_n,$$

где  $\alpha_i \neq \beta_i$  для некоторого  $i$ .

$$(\alpha_1 - \beta_1) \vec{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \vec{e}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \vec{e}_n = 0, \text{ где } \alpha_i - \beta_i \neq 0.$$

Это невозможно в силу линейной независимости базиса  $\vec{e}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).



## Определение

Коэффициенты в разложении вектора  $\vec{x}$  по базису  $\vec{e}_i$  называются координатами вектора  $\vec{x}$  в базисе  $\vec{e}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

# Теорема о линейной независимости векторов

## Теорема (о линейной независимости векторов)

Для того, чтобы векторы  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m$  в пространстве  $R^n$  были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы, составленной из координат этих векторов в произвольном базисе, был равен числу этих векторов. В противном случае они линейно зависимы.



## Определение

Отображение одного конечномерного пространства в другое  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется линейным, если

$$\mathcal{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathcal{A}\vec{x} + \mathcal{A}\vec{y}, \quad \mathcal{A}(\alpha\vec{x}) = \alpha\mathcal{A}\vec{x}.$$

# Матрица линейного оператора

## Теорема

Пусть  $\mathcal{A}$  – линейное преобразования  $n$ -мерного векторного пространства  $R^n$  в  $m$ -мерное векторное пространство  $S^m$

$$\mathcal{A} : R^n \rightarrow S^m.$$

# Матрица линейного оператора

## Теорема

Пусть  $\mathcal{A}$  – линейное преобразование  $n$ -мерного векторного пространства  $R^n$  в  $m$ -мерное векторное пространство  $S^m$

$$\mathcal{A} : R^n \rightarrow S^m.$$

Пусть  $\vec{e}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) – базис  $R^n$ , а  $\vec{g}_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) – базис  $S^m$ .

# Матрица линейного оператора

## Теорема

Пусть  $\mathcal{A}$  – линейное преобразование  $n$ -мерного векторного пространства  $R^n$  в  $m$ -мерное векторное пространство  $S^m$

$$\mathcal{A} : R^n \rightarrow S^m.$$

Пусть  $\vec{e}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) – базис  $R^n$ , а  $\vec{g}_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) – базис  $S^m$ .

Пусть для произвольного вектора  $\vec{x} \in R^n$   $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} \in S^m$ .

# Матрица линейного оператора

## Теорема

Пусть  $\mathcal{A}$  – линейное преобразование  $n$ -мерного векторного пространства  $R^n$  в  $m$ -мерное векторное пространство  $S^m$

$$\mathcal{A} : R^n \rightarrow S^m.$$

Пусть  $\vec{e}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) – базис  $R^n$ , а  $\vec{g}_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) – базис  $S^m$ .

Пусть для произвольного вектора  $\vec{x} \in R^n$   $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} \in S^m$ .

Тогда существует матрица  $A$  размера  $m \times n$  такая, что

$$y = Ax,$$

где  $y$  – вектор столбец, составленный из координат вектора  $\vec{y}$  в базисе  $\vec{g}_k$ ,  $x$  – вектор столбец, составленный из координат вектора  $\vec{x}$  в базисе  $\vec{e}_i$ .

# Доказательство теоремы представления линейного оператора

Доказательство.

Пусть  $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} \in S^m$  для некоторого  $\vec{x} \in R^n$ .

# Доказательство теоремы представления линейного оператора

## Доказательство.

Пусть  $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} \in S^m$  для некоторого  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ .

$$\text{Тогда } \vec{y} = \sum_{k=1}^m y_k \vec{g}_k, \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i.$$

# Доказательство теоремы представления линейного оператора

## Доказательство.

Пусть  $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} \in S^m$  для некоторого  $\vec{x} \in R^n$ .

Тогда  $\vec{y} = \sum_{k=1}^m y_k \vec{g}_k$ ,  $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$ .

В силу линейности оператора  $\mathcal{A}$ :

$$\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A} \left( \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i (\mathcal{A}\vec{e}_i).$$



# Доказательство теоремы представления линейного оператора

## Доказательство.

Пусть  $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} \in S^m$  для некоторого  $\vec{x} \in R^n$ .

Тогда  $\vec{y} = \sum_{k=1}^m y_k \vec{g}_k$ ,  $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$ .

В силу линейности оператора  $\mathcal{A}$ :

$$\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A} \left( \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i (\mathcal{A}\vec{e}_i).$$

Т.к.  $\mathcal{A}\vec{e}_i \in S^m$ , тогда существуют такие числа  $\alpha_{ij}$ , что

$$\mathcal{A}\vec{e}_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \vec{g}_j \quad (i = 1, \dots, n).$$

# Доказательство теоремы представления линейного оператора

Доказательство.

Тогда

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i (\mathcal{A} \vec{e}_i) = \sum_{i=1}^n x_i \left( \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \vec{g}_j \right) = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n x_i \alpha_{ij} \right) \vec{g}_j.$$

# Доказательство теоремы представления линейного оператора

Доказательство.

Тогда

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i (\mathcal{A}\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^n x_i \left( \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \vec{g}_j \right) = \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^n x_i \alpha_{ij} \right) \vec{g}_j.$$

Из единственности представления вектора  $\vec{y}$  по базису  $\vec{g}_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) следует, что

$$y_j = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_{ij}.$$



# Иллюстрация теоремы о представлении линейного оператора

Пусть  $x$  – вектор столбец, составленный из координат, вектора  $\vec{x}$  в базисе  $\vec{e}_i$   $x_i$ .

# Иллюстрация теоремы о представлении линейного оператора

Пусть  $x$  – вектор столбец, составленный из координат, вектора  $\vec{x}$  в базисе  $\vec{e}_i$   $x_i$ .

Пусть  $y$  – вектор столбец, составленный из координат, вектора  $\vec{y}$  в базисе  $\vec{g}_k$   $y_k$ .

# Иллюстрация теоремы о представлении линейного оператора

Пусть  $x$  – вектор столбец, составленный из координат, вектора  $\vec{x}$  в базисе  $\vec{e}_i$   $x_i$ .

Пусть  $y$  – вектор столбец, составленный из координат, вектора  $\vec{y}$  в базисе  $\vec{g}_k$   $y_k$ .

Пусть  $A = (a_{ij})$  –  $m \times n$  матрица, составленная из координат образов векторов  $A\vec{e}_i$  по столбцам ( $a_{ij} = \alpha_{ji}$ )

$$A = ( A\vec{e}_1 \mid A\vec{e}_2 \mid \dots \mid A\vec{e}_n ) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

# Иллюстрация теоремы о представлении линейного оператора

Тогда

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

## Определение

Пусть  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  – линейные операторы, действующие из пространства  $R^n$  в  $S^m$ .



## Определение

Пусть  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  – линейные операторы, действующие из пространства  $R^n$  в  $S^m$ .

Оператор  $\mathcal{C} : R^n \rightarrow S^m$  называется суммой  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  и обозначается

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B},$$

## Определение

Пусть  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  – линейные операторы, действующие из пространства  $R^n$  в  $S^m$ .

Оператор  $\mathcal{C} : R^n \rightarrow S^m$  называется суммой  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  и обозначается

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B},$$

тогда и только тогда, когда

$$\forall \vec{x} \in R^n \quad \mathcal{C}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{x} + \mathcal{B}\vec{x}.$$

## Определение

Пусть  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^m$ ,  $\mathcal{B} : \mathbb{Q}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$  – линейные операторы.

## Определение

Пусть  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^m$ ,  $\mathcal{B} : \mathbb{Q}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$  – линейные операторы.

Оператор  $\mathcal{C} : \mathbb{Q}^l \rightarrow \mathbb{S}^m$  называется произведением  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  и обозначается

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B},$$

## Определение

Пусть  $\mathcal{A} : R^n \rightarrow S^m$ ,  $\mathcal{B} : Q^l \rightarrow R^n$  – линейные операторы.

Оператор  $\mathcal{C} : Q^l \rightarrow S^m$  называется произведением  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  и обозначается

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B},$$

тогда и только тогда, когда

$$\forall \vec{x} \in Q^l \quad \mathcal{C}\vec{x} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\vec{x}).$$

# Связь между координатами векторов в различных базисах

Пусть  $\vec{e}_i, \vec{g}_j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) два различных базиса векторного пространства  $\mathbb{R}^n$ .

# Связь между координатами векторов в различных базисах

Пусть  $\vec{e}_i, \vec{g}_j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) два различных базиса векторного пространства  $R^n$ .

Существуют числа  $t_{ij}$  и матрица  $T = (t_{ij})$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) ( $|T| \neq 0$ ), такая что

# Связь между координатами векторов в различных базисах

Пусть  $\vec{e}_i, \vec{g}_j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) два различных базиса векторного пространства  $\mathbb{R}^n$ .

Существуют числа  $t_{ij}$  и матрица  $T = (t_{ij})$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) ( $|T| \neq 0$ ), такая что

$$\vec{e}_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} \vec{g}_j \quad (i = 1, \dots, n).$$



# Связь между координатами векторов в различных базисах

Пусть  $\vec{e}_i, \vec{g}_j$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) два различных базиса векторного пространства  $R^n$ .

Существуют числа  $t_{ij}$  и матрица  $T = (t_{ij})$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) ( $|T| \neq 0$ ), такая что

$$\vec{e}_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} \vec{g}_j \quad (i = 1, \dots, n).$$

Пусть  $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n x'_i \vec{g}_i$  – два различных представления одного вектора в различных базисах.

# Связь между координатами векторов в различных базисах

Рассмотрим

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n x_i \left( \sum_{j=1}^n t_{ij} \vec{g}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n x_i t_{ij} \right) \vec{g}_j.$$

# Связь между координатами векторов в различных базисах

Рассмотрим

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n x_i \left( \sum_{j=1}^n t_{ij} \vec{g}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n x_i t_{ij} \right) \vec{g}_j.$$

Из единственности разложения  $\vec{x}$  по базису  $\vec{g}_j$  следует, что

$$x'_j = \sum_{i=1}^n x_i t_{ij},$$

# Связь между координатами векторов в различных базисах

Рассмотрим

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n x_i \left( \sum_{j=1}^n t_{ij} \vec{g}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n x_i t_{ij} \right) \vec{g}_j.$$

Из единственности разложения  $\vec{x}$  по базису  $\vec{g}_j$  следует, что

$$x'_j = \sum_{i=1}^n x_i t_{ij},$$

что в матричном виде запишется

$$x' = T^t x,$$

где  $x'$ ,  $x$  – вектор столбцы координат вектора  $\vec{x}$  в соответствующих базисах.

## Определение

Матрицы  $A, B$  размера  $m \times n$  называются **эквивалентными**, если существуют матрица  $P$  размера  $m \times m$  ( $|P| \neq 0$ ) и матрица  $Q$  ( $|Q| \neq 0$ ) размера  $n \times n$  такие, что

$$A = PBQ.$$

# Связь между матричным представлением линейного оператора в различных базисах

## Теорема

Матрицы, соответствующие линейному оператору  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , в различных базисах пространств  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^m$  эквивалентны.

## Доказательство.

Пусть  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  и  $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$  базис пространства  $R^n$ , а векторы  $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_m$  и  $\vec{g}'_1, \dots, \vec{g}'_m$  базисы пространства  $S^m$ .

## Доказательство.

Пусть  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  и  $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$  базис пространства  $R^n$ , а векторы  $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_m$  и  $\vec{g}'_1, \dots, \vec{g}'_m$  базисы пространства  $S^m$ .

Пусть  $\mathcal{A}$  – линейное преобразование  $R^n$  в  $S^m$ .



## Доказательство.

Пусть  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  и  $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$  базис пространства  $R^n$ , а векторы  $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_m$  и  $\vec{g}'_1, \dots, \vec{g}'_m$  базисы пространства  $S^m$ .

Пусть  $\mathcal{A}$  – линейное преобразование  $R^n$  в  $S^m$ .

Пусть  $A$  – матрица преобразования, соответствующая оператору  $\mathcal{A}$  в базисах  $e$  и  $g$ , а  $A'$  – в базисах  $e'$  и  $g'$ .

## Доказательство.

Пусть  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  и  $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$  базис пространства  $R^n$ , а векторы  $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_m$  и  $\vec{g}'_1, \dots, \vec{g}'_m$  базисы пространства  $S^m$ .

Пусть  $\mathcal{A}$  – линейное преобразование  $R^n$  в  $S^m$ .

Пусть  $A$  – матрица преобразования, соответствующая оператору  $\mathcal{A}$  в базисах  $e$  и  $g$ , а  $A'$  – в базисах  $e'$  и  $g'$ .

Пусть для некоторых  $\vec{x}$  из  $R^n$  и  $\vec{y}$  из  $S^m$

$$\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}.$$

## Доказательство.

Пусть  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  и  $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$  базис пространства  $R^n$ , а векторы  $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_m$  и  $\vec{g}'_1, \dots, \vec{g}'_m$  базисы пространства  $S^m$ .

Пусть  $\mathcal{A}$  – линейное преобразование  $R^n$  в  $S^m$ .

Пусть  $A$  – матрица преобразования, соответствующая оператору  $\mathcal{A}$  в базисах  $e$  и  $g$ , а  $A'$  – в базисах  $e'$  и  $g'$ .

Пусть для некоторых  $\vec{x}$  из  $R^n$  и  $\vec{y}$  из  $S^m$

$$\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}.$$

Тогда в матричной записи в соответствующих базисах  $y = Ax$  и  $y' = A'x'$

## Доказательство.

Пусть  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  и  $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$  базис пространства  $R^n$ , а векторы  $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_m$  и  $\vec{g}'_1, \dots, \vec{g}'_m$  базисы пространства  $S^m$ .

Пусть  $\mathcal{A}$  – линейное преобразование  $R^n$  в  $S^m$ .

Пусть  $A$  – матрица преобразования, соответствующая оператору  $\mathcal{A}$  в базисах  $e$  и  $g$ , а  $A'$  – в базисах  $e'$  и  $g'$ .

Пусть для некоторых  $\vec{x}$  из  $R^n$  и  $\vec{y}$  из  $S^m$

$$\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}.$$

Тогда в матричной записи в соответствующих базисах  $y = Ax$  и  $y' = A'x'$

Пусть  $Q$  –  $n \times n$ -матрица перехода между координатами векторов в установленных базисах  $x = Qx'$  в  $R^n$ ,

## Доказательство.

Пусть  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  и  $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$  базис пространства  $R^n$ , а векторы  $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_m$  и  $\vec{g}'_1, \dots, \vec{g}'_m$  базисы пространства  $S^m$ .

Пусть  $\mathcal{A}$  – линейное преобразование  $R^n$  в  $S^m$ .

Пусть  $A$  – матрица преобразования, соответствующая оператору  $\mathcal{A}$  в базисах  $e$  и  $g$ , а  $A'$  – в базисах  $e'$  и  $g'$ .

Пусть для некоторых  $\vec{x}$  из  $R^n$  и  $\vec{y}$  из  $S^m$

$$\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}.$$

Тогда в матричной записи в соответствующих базисах  $y = Ax$  и  $y' = A'x'$

Пусть  $Q$  –  $n \times n$ -матрица перехода между координатами векторов в установленных базисах  $x = Qx'$  в  $R^n$ ,

а  $N$  –  $m \times m$ -матрица перехода между координатами вектора в  $S^m$   $y = Ny'$ .



Доказательство.

С одной стороны

$$y = Ax = AQx'$$

## Доказательство.

С одной стороны

$$y = Ax = AQx'$$

С другой стороны

$$y = Ny' = NA'x'.$$

## Доказательство.

С одной стороны

$$y = Ax = AQx'$$

С другой стороны

$$y = Ny' = NA'x'.$$

Таким образом,

$$\forall x' \quad NA'x' = AQx'.$$



## Доказательство.

С одной стороны

$$y = Ax = AQx'$$

С другой стороны

$$y = Ny' = NA'x'.$$

Таким образом,

$$\forall x' \quad NA'x' = AQx'.$$

Следовательно

$$A' = N^{-1}AQ.$$



# Теорема об эквивалентности матриц

## Теорема (об эквивалентности матриц)

Для того чтобы две прямоугольные матрицы  $A$  и  $B$  одинаковых размеров  $m \times n$  были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их ранги совпадали  $r_A = r_B$ .