

# Градиент и дифференциальные операторы

*Верецагин Антон Сергеевич*

д-р. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

QR-код презентации



19 марта 2024 г.

Скалярные и векторные поля. Поверхности уровня. Векторные линии. Градиент и его свойства. Потенциальный вектор и его свойства. Градиент вектора по вектору. Субстанциональная производная.

## Определение

*Если в каждой точке пространства задана скалярная или векторная величина, то это означает, что задано **скалярное** или **векторное поле**.*

## Определение

*Если в каждой точке пространства задана скалярная или векторная величина, то это означает, что задано **скалярное** или **векторное поле**. Если поле зависит от времени, то говорят о **нестационарном поле**.*

## Определение

*Если в каждой точке пространства задана скалярная или векторная величина, то это означает, что задано **скалярное** или **векторное поле**. Если поле зависит от времени, то говорят о **нестационарном поле**.*

## Определение

***Поверхностью уровня** или **изоповерхностью** называется поверхность, на которой скалярная величина остаётся постоянной.*

## Определение

Линия в векторном поле  $\vec{a}(\vec{r})$ , для которой в каждой точке вектор  $\vec{a}$  её касается, называется **векторной линией**.

## Определение

Линия в векторном поле  $\vec{a}(\vec{r})$ , для которой в каждой точке вектор  $\vec{a}$  её касается, называется **векторной линией**.

Пусть  $\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$  – векторная линия.

## Определение

Линия в векторном поле  $\vec{a}(\vec{r})$ , для которой в каждой точке вектор  $\vec{a}$  её касается, называется **векторной линией**.

Пусть  $\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$  – векторная линия. По определению вектор касательной  $\vec{\sigma} = \frac{d\vec{r}}{ds}$  параллелен вектору  $\vec{a}(\vec{r})$  во всех точках области определения  $s$ ,



## Определение

Линия в векторном поле  $\vec{a}(\vec{r})$ , для которой в каждой точке вектор  $\vec{a}$  её касается, называется **векторной линией**.

Пусть  $\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$  – векторная линия. По определению вектор касательной  $\vec{\sigma} = \frac{d\vec{r}}{ds}$  параллелен вектору  $\vec{a}(\vec{r})$  во всех точках области определения  $s$ , следовательно

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= ka_x(x, y, z), \\ \frac{dy}{ds} &= ka_y(x, y, z), \\ \frac{dz}{ds} &= ka_z(x, y, z).\end{aligned}$$

## Определение

Линия в векторном поле  $\vec{a}(\vec{r})$ , для которой в каждой точке вектор  $\vec{a}$  её касается, называется **векторной линией**.

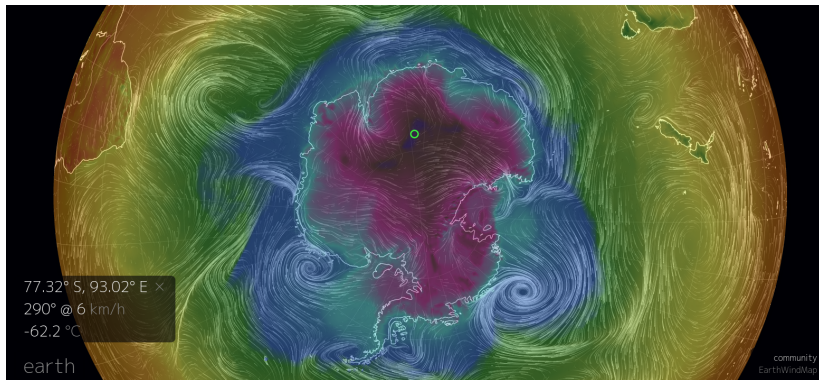
Пусть  $\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$  – векторная линия. По определению вектор касательной  $\vec{\sigma} = \frac{d\vec{r}}{ds}$  параллелен вектору  $\vec{a}(\vec{r})$  во всех точках области определения  $s$ , следовательно

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= ka_x(x, y, z), \\ \frac{dy}{ds} &= ka_y(x, y, z), \\ \frac{dz}{ds} &= ka_z(x, y, z).\end{aligned}$$

Или, по-другому,

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)}.$$

# Поле температуры и ветра в Антарктиде 20.03.2016



<http://earth.nullschool.net/>

# Производная вдоль кривой

Рассмотрим скалярное поле функции  $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$ .

# Производная вдоль кривой

Рассмотрим скалярное поле функции  $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$ . Проведём некоторую кривую  $L$ , параметризованную с помощью параметра  $s$  – расстояния до некоторой точки  $M$ :

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

# Производная вдоль кривой

Рассмотрим скалярное поле функции  $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$ . Проведём некоторую кривую  $L$ , параметризованную с помощью параметра  $s$  – расстояния до некоторой точки  $M$ :

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Тогда производная вдоль кривой имеет вид:

$$\frac{d}{ds}\varphi(x(s), y(s), z(s)) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds}.$$

# Производная вдоль кривой

Рассмотрим скалярное поле функции  $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$ . Проведём некоторую кривую  $L$ , параметризованную с помощью параметра  $s$  – расстояния до некоторой точки  $M$ :

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Тогда производная вдоль кривой имеет вид:

$$\frac{d}{ds} \varphi(x(s), y(s), z(s)) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds}.$$

Обыкновенные производные в равенстве – направляющие косинусы ( $\vec{s}$  – единичный вектор касательных)

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\vec{s}, x), \quad \frac{dy}{ds} = \cos(\vec{s}, y), \quad \frac{dz}{ds} = \cos(\vec{s}, z),$$

# Производная вдоль кривой

Рассмотрим скалярное поле функции  $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$ . Проведём некоторую кривую  $L$ , параметризованную с помощью параметра  $s$  – расстояния до некоторой точки  $M$ :

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Тогда производная вдоль кривой имеет вид:

$$\frac{d}{ds} \varphi(x(s), y(s), z(s)) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds}.$$

Обыкновенные производные в равенстве – направляющие косинусы ( $\vec{s}$  – единичный вектор касательных)

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\vec{s}, x), \quad \frac{dy}{ds} = \cos(\vec{s}, y), \quad \frac{dz}{ds} = \cos(\vec{s}, z),$$

то

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(\vec{s}, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(\vec{s}, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(\vec{s}, z).$$



# Производная вдоль кривой

Рассмотрим скалярное поле функции  $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$ . Проведём некоторую кривую  $L$ , параметризованную с помощью параметра  $s$  – расстояния до некоторой точки  $M$ :

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Тогда производная вдоль кривой имеет вид:

$$\frac{d}{ds} \varphi(x(s), y(s), z(s)) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds}.$$

Обыкновенные производные в равенстве – направляющие косинусы ( $\vec{s}$  – единичный вектор касательных)

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\vec{s}, x), \quad \frac{dy}{ds} = \cos(\vec{s}, y), \quad \frac{dz}{ds} = \cos(\vec{s}, z),$$

то

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(\vec{s}, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(\vec{s}, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(\vec{s}, z).$$

Таким образом,  $\frac{d\varphi}{ds}$  – проекция вектора  $(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z})$  на вектор  $\vec{s}$ .

## Определение

Вектор с компонентами  $(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z})$  называется *градиентом функции*  $\varphi$  в точке  $M$  и обозначается  $\text{grad } \varphi$ .

## Определение

Вектор с компонентами  $(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z})$  называется *градиентом функции*  $\varphi$  в точке  $M$  и обозначается  $\text{grad } \varphi$ .

Отсюда

$$\text{grad } \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

# Определение градиента

## Определение

Вектор с компонентами  $(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z})$  называется *градиентом функции*  $\varphi$  в точке  $M$  и обозначается  $\text{grad } \varphi$ .

Отсюда

$$\text{grad } \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Длина вектора

$$|\text{grad } \varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

# Альтернативное определение градиента

Еще одно выражение для производной вдоль направления  $\vec{s}$ :

$$\frac{d\varphi}{ds} =$$

# Альтернативное определение градиента

Еще одно выражение для производной вдоль направления  $\vec{s}$ :

$$\frac{d\varphi}{ds} = \vec{s} \cdot \text{grad } \varphi =$$

# Альтернативное определение градиента

Еще одно выражение для производной вдоль направления  $\vec{s}$ :

$$\frac{d\varphi}{ds} = \vec{s} \cdot \text{grad } \varphi = |\text{grad } \varphi| \cos(\text{grad } \varphi, \vec{s}),$$

из которого вытекает следующее определение:

Еще одно выражение для производной вдоль направления  $\vec{s}$ :

$$\frac{d\varphi}{ds} = \vec{s} \cdot \text{grad } \varphi = |\text{grad } \varphi| \cos(\text{grad } \varphi, \vec{s}),$$

из которого вытекает следующее определение:

## Определение

*Градиентом функции  $\varphi$  называется вектор, имеющий направление быстрого роста функции  $\varphi$  и по величине равный производной в этом направлении.*



# Оператор набла или оператор Гамильтона

## Определение

*Дифференциальный оператор*

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

называется *наблой* или *оператором Гамильтона*.

# Оператор набла или оператор Гамильтона

## Определение

*Дифференциальный оператор*

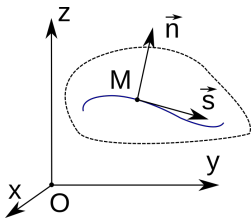
$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

называется *наблой* или *оператором Гамильтона*.

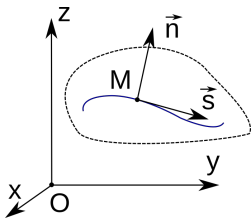
В терминах оператора набла градиент функции можно записать в виде:

$$\nabla \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

# Поверхность уровня



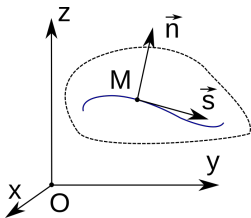
# Поверхность уровня



Через произвольную точку  $M$  проведем поверхность уровня

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.}$$

# Поверхность уровня



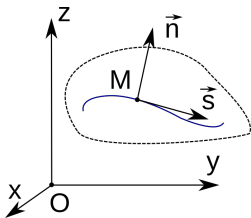
Через произвольную точку  $M$  проведем поверхность уровня

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.}$$

Т.к. производная вдоль любой кривой, лежащей на поверхности уровня, от  $\varphi(x, y, z)$  равна

$$\frac{d}{ds} \varphi(x(s), y(s), z(s)) =$$

# Поверхность уровня



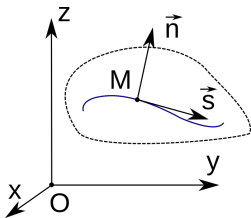
Через произвольную точку  $M$  проведем поверхность уровня

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.}$$

Т.к. производная вдоль любой кривой, лежащей на поверхности уровня, от  $\varphi(x, y, z)$  равна

$$\frac{d}{ds} \varphi(x(s), y(s), z(s)) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi(x(s + \Delta s), y(s + \Delta s), z(s + \Delta s)) - \varphi(x(s), y(s), z(s))}{\Delta s} =$$

# Поверхность уровня



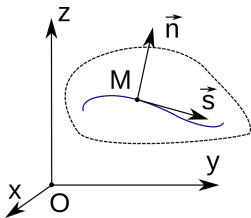
Через произвольную точку  $M$  проведем поверхность уровня

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.}$$

Т.к. производная вдоль любой кривой, лежащей на поверхности уровня, от  $\varphi(x, y, z)$  равна

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \varphi(x(s), y(s), z(s)) &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi(x(s + \Delta s), y(s + \Delta s), z(s + \Delta s)) - \varphi(x(s), y(s), z(s))}{\Delta s} = \\ &= \text{grad } \varphi \cdot \vec{s} = \end{aligned}$$

# Поверхность уровня



Через произвольную точку  $M$  проведем поверхность уровня

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.}$$

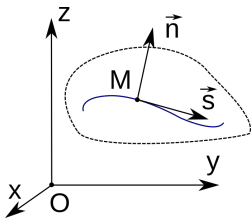
Т.к. производная вдоль любой кривой, лежащей на поверхности уровня, от  $\varphi(x, y, z)$  равна

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \varphi(x(s), y(s), z(s)) &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi(x(s + \Delta s), y(s + \Delta s), z(s + \Delta s)) - \varphi(x(s), y(s), z(s))}{\Delta s} = \\ &= \text{grad } \varphi \cdot \vec{s} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно градиент ортогонален касательной плоскости в т.  $M$ ,



# Поверхность уровня



Через произвольную точку  $M$  проведем поверхность уровня

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.}$$

Т.к. производная вдоль любой кривой, лежащей на поверхности уровня, от  $\varphi(x, y, z)$  равна

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \varphi(x(s), y(s), z(s)) &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi(x(s + \Delta s), y(s + \Delta s), z(s + \Delta s)) - \varphi(x(s), y(s), z(s))}{\Delta s} = \\ &= \text{grad } \varphi \cdot \vec{s} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно градиент ортогонален касательной плоскости в т.  $M$ , и

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \vec{n},$$

где  $\vec{n}$  – вектор единичной нормали к поверхности уровня.

# Поверхность и трубка тока

## Определение

*Поверхностью тока* вектора  $\vec{v}$  называется поверхность, образованная линиями тока, проходящими через некоторую наперед заданную кривую.

# Поверхность и трубка тока

## Определение

*Поверхностью тока* вектора  $\vec{v}$  называется поверхность, образованная линиями тока, проходящими через некоторую наперед заданную кривую.

## Определение

*Трубкой тока* вектора  $\vec{v}$  называется часть пространства, заключенная внутри поверхности тока, образованной замкнутой кривой.

# Поверхность и трубка тока

## Определение

*Поверхностью тока* вектора  $\vec{v}$  называется поверхность, образованная линиями тока, проходящими через некоторую наперед заданную кривую.

## Определение

*Трубкой тока* вектора  $\vec{v}$  называется часть пространства, заключенная внутри поверхности тока, образованной замкнутой кривой.

Пусть векторные линии для поля скоростей  $\vec{v}(x, y, z)$  определяются соотношением

$$\Phi(x, y, z) = 0.$$

# Поверхность и трубка тока

## Определение

*Поверхностью тока* вектора  $\vec{v}$  называется поверхность, образованная линиями тока, проходящими через некоторую наперед заданную кривую.

## Определение

*Трубкой тока* вектора  $\vec{v}$  называется часть пространства, заключенная внутри поверхности тока, образованной замкнутой кривой.

Пусть векторные линии для поля скоростей  $\vec{v}(x, y, z)$  определяются соотношением

$$\Phi(x, y, z) = 0.$$

По определению поверхности тока  $\vec{v}$  является касательным в любой точке этой поверхности и следовательно

$$\vec{v} \cdot \text{grad } \Phi = 0,$$

что является уравнением поверхности тока.

# Представление дифференциала функции через градиент

Пусть

$$d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz,$$

# Представление дифференциала функции через градиент

Пусть

$$d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz,$$

тогда

$$d\vec{r} \cdot \text{grad } \varphi =$$

# Представление дифференциала функции через градиент

Пусть

$$d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz,$$

тогда

$$d\vec{r} \cdot \text{grad } \varphi = \left( \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz \right) \cdot \left( \vec{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) =$$



# Представление дифференциала функции через градиент

Пусть

$$d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz,$$

тогда

$$\begin{aligned} d\vec{r} \cdot \text{grad } \varphi &= (\vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz) \cdot \left( \vec{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz = \end{aligned}$$

# Представление дифференциала функции через градиент

Пусть

$$d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz,$$

тогда

$$\begin{aligned} d\vec{r} \cdot \text{grad } \varphi &= (\vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz) \cdot \left( \vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = d\varphi \end{aligned}$$

# Представление дифференциала функции через градиент

Пусть

$$d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz,$$

тогда

$$\begin{aligned} d\vec{r} \cdot \text{grad } \varphi &= \left( \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz \right) \cdot \left( \vec{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz = d\varphi \end{aligned}$$

Таким образом для произвольного вектора  $d\vec{r}$

$$d\varphi = d\vec{r} \cdot \text{grad } \varphi.$$

# Теорема о градиенте

## Теорема (о градиенте функции)

Если для некоторой скалярной функции  $\varphi(\vec{r})$  найдется такой вектор  $\vec{a}$ ,

# Теорема о градиенте

## Теорема (о градиенте функции)

Если для некоторой скалярной функции  $\varphi(\vec{r})$  найдется такой вектор  $\vec{a}$ , что для произвольных векторов  $d\vec{r}$  справедливо равенство

$$d\varphi = d\vec{r} \cdot \vec{a},$$

# Теорема о градиенте

## Теорема (о градиенте функции)

Если для некоторой скалярной функции  $\varphi(\vec{r})$  найдется такой вектор  $\vec{a}$ , что для произвольных векторов  $d\vec{r}$  справедливо равенство

$$d\varphi = d\vec{r} \cdot \vec{a},$$

то вектор  $\vec{a}$  есть градиент функции  $\varphi(\vec{r})$  :  $\vec{a} = \text{grad } \varphi$ .

# Теорема о градиенте

## Теорема (о градиенте функции)

Если для некоторой скалярной функции  $\varphi(\vec{r})$  найдется такой вектор  $\vec{a}$ , что для произвольных векторов  $d\vec{r}$  справедливо равенство

$$d\varphi = d\vec{r} \cdot \vec{a},$$

то вектор  $\vec{a}$  есть градиент функции  $\varphi(\vec{r})$  :  $\vec{a} = \text{grad } \varphi$ .

## Доказательство.

Из равенства для полного дифференциала  $d\varphi$  вычтем равенство из условия теоремы, тогда

$$0 = d\vec{r} \cdot (\vec{a} - \text{grad } \varphi).$$

# Теорема о градиенте

## Теорема (о градиенте функции)

Если для некоторой скалярной функции  $\varphi(\vec{r})$  найдется такой вектор  $\vec{a}$ , что для произвольных векторов  $d\vec{r}$  справедливо равенство

$$d\varphi = d\vec{r} \cdot \vec{a},$$

то вектор  $\vec{a}$  есть градиент функции  $\varphi(\vec{r})$  :  $\vec{a} = \text{grad } \varphi$ .

## Доказательство.

Из равенства для полного дифференциала  $d\varphi$  вычтем равенство из условия теоремы, тогда

$$0 = d\vec{r} \cdot (\vec{a} - \text{grad } \varphi).$$

В силу произвольности  $d\vec{r}$   $\vec{a} = \text{grad } \varphi$ .





## Пример

Градиент функции, зависящий только от расстояния до начала координат

Пусть  $\varphi = \varphi(r)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

## Пример

Градиент функции, зависящий только от расстояния до начала координат

Пусть  $\varphi = \varphi(r)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Рассмотрим выражение

$$2\vec{r} \cdot d\vec{r} =$$

## Пример

Градиент функции, зависящий только от расстояния до начала координат

Пусть  $\varphi = \varphi(r)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Рассмотрим выражение

$$2\vec{r} \cdot d\vec{r} = d(\vec{r} \cdot \vec{r}) =$$

## Пример

Градиент функции, зависящий только от расстояния до начала координат

Пусть  $\varphi = \varphi(r)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Рассмотрим выражение

$$2\vec{r} \cdot d\vec{r} = d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = dr^2 =$$

## Пример

Градиент функции, зависящий только от расстояния до начала координат

Пусть  $\varphi = \varphi(r)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Рассмотрим выражение

$$2\vec{r} \cdot d\vec{r} = d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = dr^2 = 2rdr \quad \Rightarrow$$

## Пример

Градиент функции, зависящий только от расстояния до начала координат

Пусть  $\varphi = \varphi(r)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Рассмотрим выражение

$$2\vec{r} \cdot d\vec{r} = d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = dr^2 = 2rdr \quad \Rightarrow \quad dr = d\vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Тогда

$$d\varphi =$$

## Пример

Градиент функции, зависящий только от расстояния до начала координат

Пусть  $\varphi = \varphi(r)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Рассмотрим выражение

$$2\vec{r} \cdot d\vec{r} = d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = dr^2 = 2rdr \quad \Rightarrow \quad dr = d\vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Тогда

$$d\varphi = \varphi'(r)dr =$$

## Пример

Градиент функции, зависящий только от расстояния до начала координат

Пусть  $\varphi = \varphi(r)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Рассмотрим выражение

$$2\vec{r} \cdot d\vec{r} = d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = dr^2 = 2rdr \quad \Rightarrow \quad dr = d\vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Тогда

$$d\varphi = \varphi'(r)dr = d\vec{r} \cdot \frac{\varphi'(r)}{r}\vec{r}.$$



# Пример

Градиент функции, зависящий только от расстояния до начала координат

Пусть  $\varphi = \varphi(r)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Рассмотрим выражение

$$2\vec{r} \cdot d\vec{r} = d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = dr^2 = 2rdr \quad \Rightarrow \quad dr = d\vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Тогда

$$d\varphi = \varphi'(r)dr = d\vec{r} \cdot \frac{\varphi'(r)}{r}\vec{r}.$$

По теореме о градиенте

$$\text{grad } r = \frac{\vec{r}}{r},$$

# Пример

Градиент функции, зависящий только от расстояния до начала координат

Пусть  $\varphi = \varphi(r)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Рассмотрим выражение

$$2\vec{r} \cdot d\vec{r} = d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = dr^2 = 2rdr \quad \Rightarrow \quad dr = d\vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Тогда

$$d\varphi = \varphi'(r)dr = d\vec{r} \cdot \frac{\varphi'(r)}{r}\vec{r}.$$

По теореме о градиенте

$$\text{grad } r = \frac{\vec{r}}{r}, \quad \text{grad } \varphi = \frac{\varphi'(r)}{r}\vec{r}.$$

## Определение

Вектор, являющийся градиентом некоторой скалярной функции, называется *потенциальным вектором*,

## Определение

*Вектор, являющийся градиентом некоторой скалярной функции, называется **потенциальным вектором**, а поле такого вектора – **потенциальным** и сама скалярная функция **потенциалом**.*

## Определение

Вектор, являющийся градиентом некоторой скалярной функции, называется *потенциальным вектором*, а поле такого вектора – *потенциальным* и сама скалярная функция *потенциалом*.

## Пример потенциального поля $\vec{a}(\vec{r})$

Для следующих функций  $\vec{a} = \text{grad } \varphi$ :

## Определение

Вектор, являющийся градиентом некоторой скалярной функции, называется *потенциальным вектором*, а поле такого вектора – *потенциальным* и сама скалярная функция *потенциалом*.

## Пример потенциального поля $\vec{a}(\vec{r})$

Для следующих функций  $\vec{a} = \text{grad } \varphi$ :

$$\vec{a}(\vec{r}) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{r},$$

## Определение

Вектор, являющийся градиентом некоторой скалярной функции, называется *потенциальным вектором*, а поле такого вектора – *потенциальным* и сама скалярная функция *потенциалом*.

## Пример потенциального поля $\vec{a}(\vec{r})$

Для следующих функций  $\vec{a} = \text{grad } \varphi$ :

$$\vec{a}(\vec{r}) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{r}, \quad \varphi(\vec{r}) = 1/2(x^2 + y^2 + z^2) = r^2/2;$$

# Потенциальный вектор

## Определение

Вектор, являющийся градиентом некоторой скалярной функции, называется *потенциальным вектором*, а поле такого вектора – *потенциальным* и сама скалярная функция *потенциалом*.

## Пример потенциального поля $\vec{a}(\vec{r})$

Для следующих функций  $\vec{a} = \text{grad } \varphi$ :

$$\vec{a}(\vec{r}) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{r}, \quad \varphi(\vec{r}) = 1/2(x^2 + y^2 + z^2) = r^2/2;$$

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{r}/r,$$



## Определение

Вектор, являющийся градиентом некоторой скалярной функции, называется *потенциальным вектором*, а поле такого вектора – *потенциальным* и сама скалярная функция *потенциалом*.

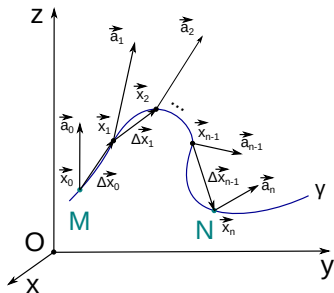
## Пример потенциального поля $\vec{a}(\vec{r})$

Для следующих функций  $\vec{a} = \text{grad } \varphi$ :

$$\vec{a}(\vec{r}) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{r}, \quad \varphi(\vec{r}) = 1/2(x^2 + y^2 + z^2) = r^2/2;$$

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{r}/r, \quad \varphi(\vec{r}) = r.$$

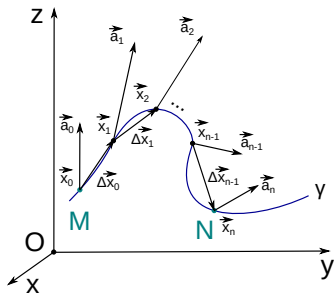
# Линейный интеграл от векторной функции вдоль кривой



## Определение

*Линейным интегралом по кривой  $\gamma$  от векторной функции  $\vec{a}(\vec{r})$ , между точками  $M$  и  $N$  назовем выражение*

# Линейный интеграл от векторной функции вдоль кривой

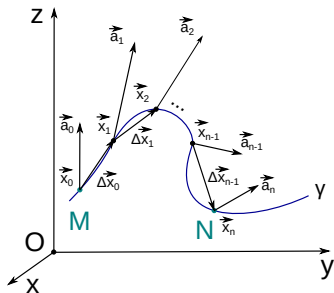


## Определение

*Линейным интегралом по кривой  $\gamma$  от векторной функции  $\vec{a}(\vec{r})$ , между точками  $M$  и  $N$  назовем выражение*

$$\int_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \lim_{\Delta \vec{x}_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \vec{a}_i \cdot \Delta \vec{x}_i$$

# Линейный интеграл от векторной функции вдоль кривой



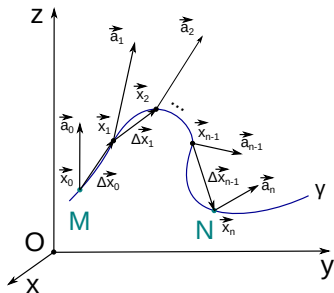
## Определение

*Линейным интегралом по кривой  $\gamma$  от векторной функции  $\vec{a}(\vec{r})$ , между точками  $M$  и  $N$  назовем выражение*

$$\int_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \lim_{\Delta \vec{x}_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \vec{a}_i \cdot \Delta \vec{x}_i$$

*независимо от способа разбиения дуги  $MN$ .*

# Линейный интеграл от векторной функции вдоль кривой



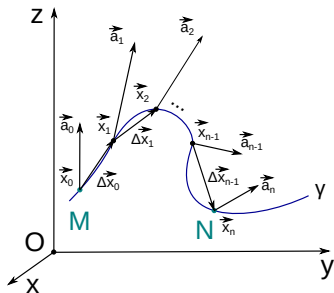
## Определение

Линейным интегралом по кривой  $\gamma$  от векторной функции  $\vec{a}(\vec{r})$ , между точками  $M$  и  $N$  назовем выражение

$$\int_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \lim_{\Delta \vec{x}_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \vec{a}_i \cdot \Delta \vec{x}_i$$

независимо от способа разбиения дуги  $MN$ . Здесь  $\vec{x}_0 = M$ ,  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{x}_n = N$  – разбиение дуги  $MN$  на  $n$  частей;

# Линейный интеграл от векторной функции вдоль кривой



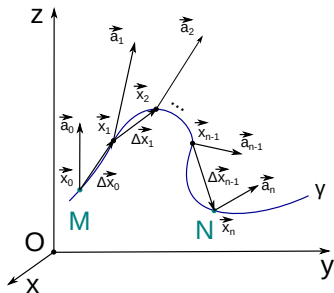
## Определение

Линейным интегралом по кривой  $\gamma$  от векторной функции  $\vec{a}(\vec{r})$ , между точками  $M$  и  $N$  назовем выражение

$$\int_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \lim_{\Delta \vec{x}_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \vec{a}_i \cdot \Delta \vec{x}_i$$

независимо от способа разбиения дуги  $MN$ . Здесь  $\vec{x}_0 = M$ ,  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{x}_n = N$  – разбиение дуги  $MN$  на  $n$  частей;  $\Delta \vec{x}_i = \vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i$  ( $i = \overline{0, n-1}$ );

# Линейный интеграл от векторной функции вдоль кривой



## Определение

Линейным интегралом по кривой  $\gamma$  от векторной функции  $\vec{a}(\vec{r})$ , между точками  $M$  и  $N$  назовем выражение

$$\int_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \lim_{\Delta \vec{x}_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \vec{a}_i \cdot \Delta \vec{x}_i$$

независимо от способа разбиения дуги  $MN$ . Здесь  $\vec{x}_0 = M$ ,  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n-1}, \vec{x}_n = N$  – разбиение дуги  $MN$  на  $n$  частей;  $\Delta \vec{x}_i = \vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i$  ( $i = \overline{0, n-1}$ );  $\vec{a}_i = \vec{a}(\vec{x}_i)$ .

# Разные записи интеграла

Пусть задана кривая  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ , параметризованная параметром, связанным с длиной дуги  $s$ :

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$



# Разные записи интеграла

Пусть задана кривая  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ , параметризованная параметром, связанным с длиной дуги  $s$ :

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Вектор  $\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$  – единичный касательный вектор,

# Разные записи интеграла

Пусть задана кривая  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ , параметризованная параметром, связанным с длиной дуги  $s$ :

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Вектор  $\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$  – единичный касательный вектор, а  $a_s = \vec{a} \cdot \vec{s}$  – длина проекции  $\vec{a}$  на  $\vec{s}$  в заданной точке.

# Разные записи интеграла

Пусть задана кривая  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ , параметризованная параметром, связанным с длиной дуги  $s$ :

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Вектор  $\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$  – единичный касательный вектор, а  $a_s = \vec{a} \cdot \vec{s}$  – длина проекции  $\vec{a}$  на  $\vec{s}$  в заданной точке.

Тогда

$$\int_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} =$$

# Разные записи интеграла

Пусть задана кривая  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ , параметризованная параметром, связанным с длиной дуги  $s$ :

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Вектор  $\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$  – единичный касательный вектор, а  $a_s = \vec{a} \cdot \vec{s}$  – длина проекции  $\vec{a}$  на  $\vec{s}$  в заданной точке.

Тогда

$$\int_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} (a_x dx + a_y dy + a_z dz) =$$

# Разные записи интеграла

Пусть задана кривая  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ , параметризованная параметром, связанным с длиной дуги  $s$ :

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Вектор  $\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$  – единичный касательный вектор, а  $a_s = \vec{a} \cdot \vec{s}$  – длина проекции  $\vec{a}$  на  $\vec{s}$  в заданной точке.

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} &= \int_{\gamma} (a_x dx + a_y dy + a_z dz) = \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \left( a_x \frac{dx}{ds} + a_y \frac{dy}{ds} + a_z \frac{dz}{ds} \right) ds = \end{aligned}$$

# Разные записи интеграла

Пусть задана кривая  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ , параметризованная параметром, связанным с длиной дуги  $s$ :

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Вектор  $\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$  – единичный касательный вектор, а  $a_s = \vec{a} \cdot \vec{s}$  – длина проекции  $\vec{a}$  на  $\vec{s}$  в заданной точке.

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} &= \int_{\gamma} (a_x dx + a_y dy + a_z dz) = \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \left( a_x \frac{dx}{ds} + a_y \frac{dy}{ds} + a_z \frac{dz}{ds} \right) ds = \int_{s_0}^{s_1} \vec{a} \cdot \vec{s} ds = \end{aligned}$$

# Разные записи интеграла

Пусть задана кривая  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ , параметризованная параметром, связанным с длиной дуги  $s$ :

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Вектор  $\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$  – единичный касательный вектор, а  $a_s = \vec{a} \cdot \vec{s}$  – длина проекции  $\vec{a}$  на  $\vec{s}$  в заданной точке.

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} &= \int_{\gamma} (a_x dx + a_y dy + a_z dz) = \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \left( a_x \frac{dx}{ds} + a_y \frac{dy}{ds} + a_z \frac{dz}{ds} \right) ds = \int_{s_0}^{s_1} \vec{a} \cdot \vec{s} ds = \int_{s_0}^{s_1} a_s ds. \end{aligned}$$

## Определение

*Линейный интеграл вектора  $\vec{a}$  вдоль замкнутой кривой  $C$*



# Циркуляция вектора

## Определение

Линейный интеграл вектора  $\vec{a}$  вдоль замкнутой кривой  $C$  называется *циркуляцией вектора* по замкнутому контуру  $C$

# Циркуляция вектора

## Определение

Линейный интеграл вектора  $\vec{a}$  вдоль замкнутой кривой  $C$  называется *циркуляцией вектора* по замкнутому контуру  $C$  и обозначается

$$\Gamma_C(\vec{a}) = \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

# Циркуляция вектора

## Определение

Линейный интеграл вектора  $\vec{a}$  вдоль замкнутой кривой  $C$  называется *циркуляцией вектора* по замкнутому контуру  $C$  и обозначается

$$\Gamma_C(\vec{a}) = \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

## Аддитивность циркуляции

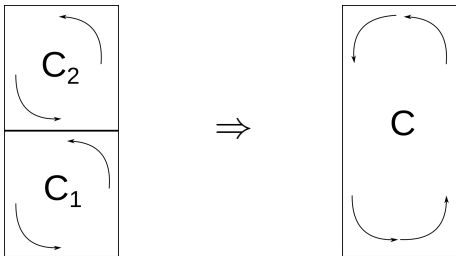
# Циркуляция вектора

## Определение

Линейный интеграл вектора  $\vec{a}$  вдоль замкнутой кривой  $C$  называется **циркуляцией вектора** по замкнутому контуру  $C$  и обозначается

$$\Gamma_C(\vec{a}) = \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

## Аддитивность циркуляции



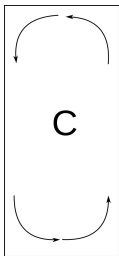
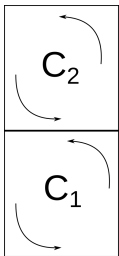
# Циркуляция вектора

## Определение

Линейный интеграл вектора  $\vec{a}$  вдоль замкнутой кривой  $C$  называется **циркуляцией вектора** по замкнутому контуру  $C$  и обозначается

$$\Gamma_C(\vec{a}) = \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

## Аддитивность циркуляции



$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} &= \\ &= \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r}. \end{aligned}$$

# Линейный интеграл от потенциального вектора

## Теорема

*Линейный интеграл вектора  $\vec{a} = \text{grad } \varphi$  вдоль любой кривой  $L$ ,*

# Линейный интеграл от потенциального вектора

## Теорема

*Линейный интеграл вектора  $\vec{a} = \text{grad } \varphi$  вдоль любой кривой  $L$ , соединяющей точки  $M_0(\vec{r}_0)$  и  $M_1(\vec{r}_1)$ ,*

# Линейный интеграл от потенциального вектора

## Теорема

*Линейный интеграл вектора  $\vec{a} = \text{grad } \varphi$  вдоль любой кривой  $L$ , соединяющей точки  $M_0(\vec{r}_0)$  и  $M_1(\vec{r}_1)$ , равен разности значений функций  $\varphi$  в этих точках.*



# Линейный интеграл от потенциального вектора

## Теорема

*Линейный интеграл вектора  $\vec{a} = \text{grad } \varphi$  вдоль любой кривой  $L$ , соединяющей точки  $M_0(\vec{r}_0)$  и  $M_1(\vec{r}_1)$ , равен разности значений функций  $\varphi$  в этих точках.*

## Доказательство.

Пусть кривая  $L$  задана соотношением  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  и  $\vec{r}_0 = \vec{r}(s_0)$ ,  $\vec{r}_1 = \vec{r}(s_1)$ ,

# Линейный интеграл от потенциального вектора

## Теорема

Линейный интеграл вектора  $\vec{a} = \text{grad } \varphi$  вдоль любой кривой  $L$ , соединяющей точки  $M_0(\vec{r}_0)$  и  $M_1(\vec{r}_1)$ , равен разности значений функций  $\varphi$  в этих точках.

## Доказательство.

Пусть кривая  $L$  задана соотношением  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  и  $\vec{r}_0 = \vec{r}(s_0)$ ,  $\vec{r}_1 = \vec{r}(s_1)$ , тогда

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} =$$

# Линейный интеграл от потенциального вектора

## Теорема

Линейный интеграл вектора  $\vec{a} = \text{grad } \varphi$  вдоль любой кривой  $L$ , соединяющей точки  $M_0(\vec{r}_0)$  и  $M_1(\vec{r}_1)$ , равен разности значений функций  $\varphi$  в этих точках.

## Доказательство.

Пусть кривая  $L$  задана соотношением  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  и  $\vec{r}_0 = \vec{r}(s_0)$ ,  $\vec{r}_1 = \vec{r}(s_1)$ , тогда

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{s_0}^{s_1} \left( a_x \frac{dx}{ds} + a_y \frac{dy}{ds} + a_z \frac{dz}{ds} \right) ds =$$

# Линейный интеграл от потенциального вектора

## Теорема

Линейный интеграл вектора  $\vec{a} = \text{grad } \varphi$  вдоль любой кривой  $L$ , соединяющей точки  $M_0(\vec{r}_0)$  и  $M_1(\vec{r}_1)$ , равен разности значений функций  $\varphi$  в этих точках.

## Доказательство.

Пусть кривая  $L$  задана соотношением  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  и  $\vec{r}_0 = \vec{r}(s_0)$ ,  $\vec{r}_1 = \vec{r}(s_1)$ , тогда

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} &= \int_{s_0}^{s_1} (a_x \frac{dx}{ds} + a_y \frac{dy}{ds} + a_z \frac{dz}{ds}) ds = \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds} \right) ds = \end{aligned}$$

# Линейный интеграл от потенциального вектора

## Теорема

Линейный интеграл вектора  $\vec{a} = \text{grad } \varphi$  вдоль любой кривой  $L$ , соединяющей точки  $M_0(\vec{r}_0)$  и  $M_1(\vec{r}_1)$ , равен разности значений функций  $\varphi$  в этих точках.

## Доказательство.

Пусть кривая  $L$  задана соотношением  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  и  $\vec{r}_0 = \vec{r}(s_0)$ ,  $\vec{r}_1 = \vec{r}(s_1)$ , тогда

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} &= \int_{s_0}^{s_1} (a_x \frac{dx}{ds} + a_y \frac{dy}{ds} + a_z \frac{dz}{ds}) ds = \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds} \right) ds = \int_{s_0}^{s_1} \frac{d}{ds} \varphi(x(s), y(s), z(s)) ds = \end{aligned}$$

# Линейный интеграл от потенциального вектора

## Теорема

Линейный интеграл вектора  $\vec{a} = \text{grad } \varphi$  вдоль любой кривой  $L$ , соединяющей точки  $M_0(\vec{r}_0)$  и  $M_1(\vec{r}_1)$ , равен разности значений функций  $\varphi$  в этих точках.

## Доказательство.

Пусть кривая  $L$  задана соотношением  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  и  $\vec{r}_0 = \vec{r}(s_0)$ ,  $\vec{r}_1 = \vec{r}(s_1)$ , тогда

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} &= \int_{s_0}^{s_1} (a_x \frac{dx}{ds} + a_y \frac{dy}{ds} + a_z \frac{dz}{ds}) ds = \\ &= \int_{s_0}^{s_1} (\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds}) ds = \int_{s_0}^{s_1} \frac{d}{ds} \varphi(x(s), y(s), z(s)) ds = \\ &= \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_0). \end{aligned}$$



Два следствия теоремы:

## Два следствия теоремы:

значение интеграла от градиента функции зависит только от конечной и начальной точки и не зависит от пути интегрирования;



### Два следствия теоремы:

значение интеграла от градиента функции зависит только от конечной и начальной точки и не зависит от пути интегрирования;

интеграл от градиента функции по замкнутому контуру равен 0

## Два следствия теоремы:

значение интеграла от градиента функции зависит только от конечной и начальной точки и не зависит от пути интегрирования;

интеграл от градиента функции по замкнутому контуру равен 0 (или циркуляция потенциального вектора по любому контуру равна 0).

# Критерий потенциальности векторного поля

## Теорема

Если циркуляция вектора  $\vec{a}$  по любому замкнутому контуру равна нулю в некоторой области,

# Критерий потенциальности векторного поля

## Теорема

Если циркуляция вектора  $\vec{a}$  по любому замкнутому контуру равна нулю в некоторой области, то вектор  $\vec{a}$  – потенциальный вектор,

# Критерий потенциальности векторного поля

## Теорема

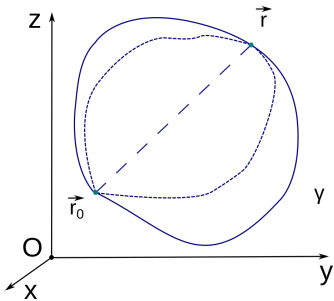
Если циркуляция вектора  $\vec{a}$  по любому замкнутому контуру равна нулю в некоторой области, то вектор  $\vec{a}$  – потенциальный вектор, т.е. равен градиенту некоторой скалярной функции  $\varphi$ .

# Критерий потенциальности векторного поля

## Теорема

Если циркуляция вектора  $\vec{a}$  по любому замкнутому контуру равна нулю в некоторой области, то вектор  $\vec{a}$  – потенциальный вектор, т.е. равен градиенту некоторой скалярной функции  $\varphi$ .

## Доказательство.



# Критерий потенциальности векторного поля

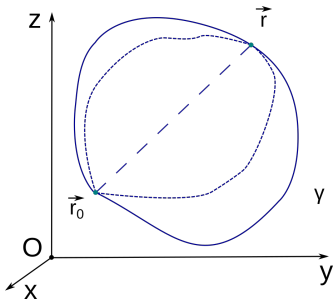
## Теорема

Если циркуляция вектора  $\vec{a}$  по любому замкнутому контуру равна нулю в некоторой области, то вектор  $\vec{a}$  – потенциальный вектор, т.е. равен градиенту некоторой скалярной функции  $\varphi$ .

## Доказательство.

Введем  $\varphi(\vec{r})$  вида:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$



# Критерий потенциальности векторного поля

## Теорема

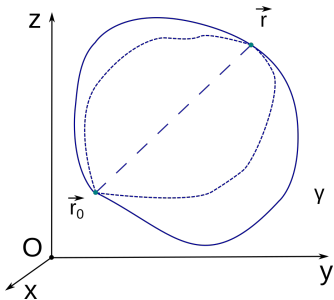
Если циркуляция вектора  $\vec{a}$  по любому замкнутому контуру равна нулю в некоторой области, то вектор  $\vec{a}$  – потенциальный вектор, т.е. равен градиенту некоторой скалярной функции  $\varphi$ .

## Доказательство.

Введем  $\varphi(\vec{r})$  вида:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

Интеграл в правой части не зависит от пути интегрирования в силу условия теоремы.





# Критерий потенциальности векторного поля

## Теорема

Если циркуляция вектора  $\vec{a}$  по любому замкнутому контуру равна нулю в некоторой области, то вектор  $\vec{a}$  – потенциальный вектор, т.е. равен градиенту некоторой скалярной функции  $\varphi$ .

## Доказательство.

Введем  $\varphi(\vec{r})$  вида:

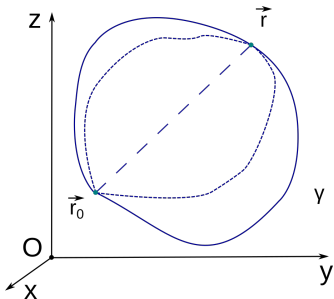
$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

Интеграл в правой части не зависит от пути интегрирования в силу условия теоремы.

Полный дифференциал введенной функции

$$d\varphi = \vec{a} \cdot d\vec{r},$$

справедлив для любых  $d\vec{r}$ ,



# Критерий потенциальности векторного поля

## Теорема

Если циркуляция вектора  $\vec{a}$  по любому замкнутому контуру равна нулю в некоторой области, то вектор  $\vec{a}$  – потенциальный вектор, т.е. равен градиенту некоторой скалярной функции  $\varphi$ .

## Доказательство.

Введем  $\varphi(\vec{r})$  вида:

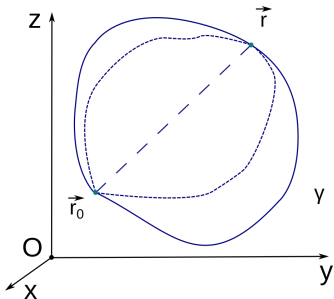
$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

Интеграл в правой части не зависит от пути интегрирования в силу условия теоремы.

Полный дифференциал введенной функции

$$d\varphi = \vec{a} \cdot d\vec{r},$$

справедлив для любых  $d\vec{r}$ , значит  $\vec{a} = \text{grad } \varphi$ .



# Производная вдоль направления

Пусть задана кривая  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ , параметризованная параметром, связанным с длиной дуги  $s$ :

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

# Производная вдоль направления

Пусть задана кривая  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ , параметризованная параметром, связанным с длиной дуги  $s$ :

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Вектор  $\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$  – единичный касательный вектор.

# Производная вдоль направления

Пусть задана кривая  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ , параметризованная параметром, связанным с длиной дуги  $s$ :

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Вектор  $\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$  – единичный касательный вектор.

Введем оператор

$$\vec{s} \cdot \nabla = \cos(\vec{s}, x) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(\vec{s}, y) \frac{\partial}{\partial y} + \cos(\vec{s}, z) \frac{\partial}{\partial z},$$

# Производная вдоль направления

Пусть задана кривая  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ , параметризованная параметром, связанным с длиной дуги  $s$ :

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Вектор  $\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$  – единичный касательный вектор.

Введем оператор

$$\vec{s} \cdot \nabla = \cos(\vec{s}, x) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(\vec{s}, y) \frac{\partial}{\partial y} + \cos(\vec{s}, z) \frac{\partial}{\partial z},$$

тогда

$$\frac{\partial}{\partial s} a(x(s), y(s), z(s)) = \vec{s} \cdot \text{grad } a = (\vec{s} \cdot \nabla) a.$$

# Производная вдоль направления

Пусть задана кривая  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ , параметризованная параметром, связанным с длиной дуги  $s$ :

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Вектор  $\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$  – единичный касательный вектор.

Введем оператор

$$\vec{s} \cdot \nabla = \cos(\vec{s}, x) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(\vec{s}, y) \frac{\partial}{\partial y} + \cos(\vec{s}, z) \frac{\partial}{\partial z},$$

тогда

$$\frac{\partial}{\partial s} a(x(s), y(s), z(s)) = \vec{s} \cdot \text{grad } a = (\vec{s} \cdot \nabla) a.$$

## Определение

Оператор

$$(\vec{v} \cdot \nabla) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

называется *производной вдоль направления*,

# Производная вдоль направления

Пусть задана кривая  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ , параметризованная параметром, связанным с длиной дуги  $s$ :

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Вектор  $\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$  – единичный касательный вектор.

Введем оператор

$$\vec{s} \cdot \nabla = \cos(\vec{s}, x) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(\vec{s}, y) \frac{\partial}{\partial y} + \cos(\vec{s}, z) \frac{\partial}{\partial z},$$

тогда

$$\frac{\partial}{\partial s} a(x(s), y(s), z(s)) = \vec{s} \cdot \text{grad } a = (\vec{s} \cdot \nabla) a.$$

## Определение

Оператор

$$(\vec{v} \cdot \nabla) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

называется **производной вдоль направления**, где  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  – заданное направление.



## Пример

Рассмотрим нестационарное движение жидкости, в которой определено нестационарное скалярное поле  $\varphi(t, x, y, z)$ ,

## Пример

Рассмотрим нестационарное движение жидкости, в которой определено нестационарное скалярное поле  $\varphi(t, x, y, z)$ , тогда введем понятие местной производной

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} =$$

## Пример

Рассмотрим нестационарное движение жидкости, в которой определено нестационарное скалярное поле  $\varphi(t, x, y, z)$ , тогда введем понятие местной производной

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t, M) - \varphi(t, M)}{\Delta t}.$$

## Пример

Рассмотрим нестационарное движение жидкости, в которой определено нестационарное скалярное поле  $\varphi(t, x, y, z)$ , тогда введем понятие местной производной

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t, M) - \varphi(t, M)}{\Delta t}.$$

Если же рассматривать изменения функции, перемещаясь вместе с жидкостью, тогда

$$\frac{d\varphi}{dt} =$$

## Пример

Рассмотрим нестационарное движение жидкости, в которой определено нестационарное скалярное поле  $\varphi(t, x, y, z)$ , тогда введем понятие местной производной

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t, M) - \varphi(t, M)}{\Delta t}.$$

Если же рассматривать изменения функции, перемещаясь вместе с жидкостью, тогда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t, \vec{r}_0 + \vec{v}\Delta t) - \varphi(t, \vec{r}_0)}{\Delta t}.$$

## Пример

Рассмотрим нестационарное движение жидкости, в которой определено нестационарное скалярное поле  $\varphi(t, x, y, z)$ , тогда введем понятие местной производной

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t, M) - \varphi(t, M)}{\Delta t}.$$

Если же рассматривать изменения функции, перемещаясь вместе с жидкостью, тогда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t, \vec{r}_0 + \vec{v}\Delta t) - \varphi(t, \vec{r}_0)}{\Delta t}.$$

И тогда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \varphi, \quad \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{a}.$$