

# Элементы дифференциальной геометрии

*Верецагин Антон Сергеевич*

д-р. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

QR-код презентации



19 марта 2024 г.

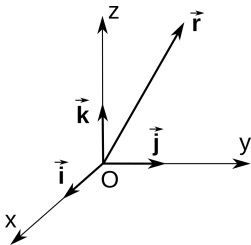
# Аннотация

Кривая в пространстве. Ортогональная система координат, связанная с кривой. Формулы Френе.

Введем в векторном пространстве  $\mathbb{R}^3$  систему координат

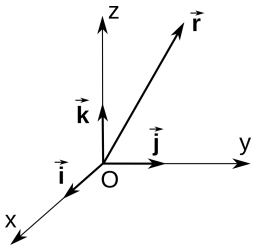
# Система координат в $\mathbb{R}^3$

Введем в векторном пространстве  $\mathbb{R}^3$  систему координат и три базисных ортонормированных вектора  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{k}$ .



# Система координат в $\mathbb{R}^3$

Введем в векторном пространстве  $\mathbb{R}^3$  систему координат и три базисных ортонормированных вектора  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{k}$ .

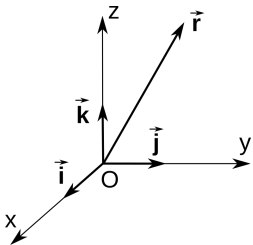


Тогда произвольный вектор  $\vec{r}$  можно представить в виде:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

# Система координат в $\mathbb{R}^3$

Введем в векторном пространстве  $\mathbb{R}^3$  систему координат и три базисных ортонормированных вектора  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{k}$ .



Тогда произвольный вектор  $\vec{r}$  можно представить в виде:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где  $x, y, z$  – координаты вектора  $\vec{r}$  в указанном базисе.

# Вектор, зависящий от параметра

В  $\mathbb{R}^3$  рассмотрим переменный вектор

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{\mathbf{i}} + a_y(t)\vec{\mathbf{j}} + a_z(t)\vec{\mathbf{k}},$$

# Вектор, зависящий от параметра

В  $\mathbb{R}^3$  рассмотрим переменный вектор

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{\mathbf{i}} + a_y(t)\vec{\mathbf{j}} + a_z(t)\vec{\mathbf{k}},$$

где  $a_x(t)$ ,  $a_y(t)$ ,  $a_z(t)$  – декартовы координаты вектора, непрерывно зависящие от  $t$ .

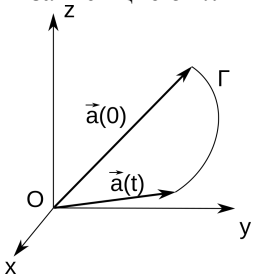


# Вектор, зависящий от параметра

В  $\mathbb{R}^3$  рассмотрим переменный вектор

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k},$$

где  $a_x(t)$ ,  $a_y(t)$ ,  $a_z(t)$  – декартовы координаты вектора, непрерывно зависящие от  $t$ .

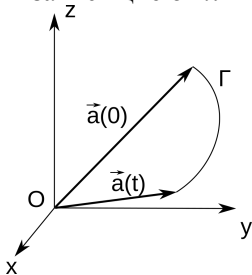


# Вектор, зависящий от параметра

В  $\mathbb{R}^3$  рассмотрим переменный вектор

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k},$$

где  $a_x(t)$ ,  $a_y(t)$ ,  $a_z(t)$  – декартовы координаты вектора, непрерывно зависящие от  $t$ .



## Определение

Геометрическое место точек  $\Gamma$  концов вектора  $\vec{a}(t)$ , отложенных из общего начала  $O$ , называется *годографом* вектора.

# Производная вектора

## Определение

*Производной* векторной функции называется

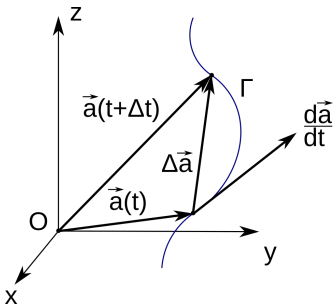
$$\vec{a}'(t) = \frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}.$$

# Производная вектора

## Определение

*Производной* векторной функции называется

$$\vec{a}'(t) = \frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}.$$

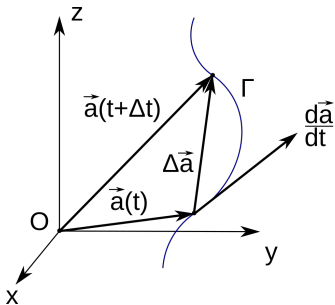


# Производная вектора

## Определение

*Производной* векторной функции называется

$$\vec{a}'(t) = \frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}.$$



$\frac{d\vec{a}}{dt}$  по направлению совпадает с касательной к годографу  $\Gamma$  вектора  $\vec{a}(t)$ .

На рисунке  $\Delta\vec{a} = \vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)$ .

# Свойства производной вектора

Пусть  $\vec{a}(t), \vec{b}(t)$  – векторные функции;  $c(t)$  – скалярная функция;  $\cdot, \times$  – операции скалярного и векторного произведения, тогда

# Свойства производной вектора

Пусть  $\vec{a}(t), \vec{b}(t)$  – векторные функции;  $c(t)$  – скалярная функция;  $\cdot, \times$  – операции скалярного и векторного произведения, тогда

1)  $\vec{a}'(t) =$

# Свойства производной вектора

Пусть  $\vec{a}(t), \vec{b}(t)$  – векторные функции;  $c(t)$  – скалярная функция;  $\cdot, \times$  – операции скалярного и векторного произведения, тогда

$$1) \vec{a}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} =$$



# Свойства производной вектора

Пусть  $\vec{a}(t)$ ,  $\vec{b}(t)$  – векторные функции;  $c(t)$  – скалярная функция;  $\cdot$ ,  $\times$  – операции скалярного и векторного произведения, тогда

$$\begin{aligned} 1) \quad \vec{a}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{a_x(t + \Delta t) - a_x(t)}{\Delta t} \vec{i} + \frac{a_y(t + \Delta t) - a_y(t)}{\Delta t} \vec{j} + \frac{a_z(t + \Delta t) - a_z(t)}{\Delta t} \vec{k} \right) = \end{aligned}$$

# Свойства производной вектора

Пусть  $\vec{a}(t)$ ,  $\vec{b}(t)$  – векторные функции;  $c(t)$  – скалярная функция;  $\cdot$ ,  $\times$  – операции скалярного и векторного произведения, тогда

$$\begin{aligned} 1) \quad \vec{a}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{a_x(t + \Delta t) - a_x(t)}{\Delta t} \vec{i} + \frac{a_y(t + \Delta t) - a_y(t)}{\Delta t} \vec{j} + \frac{a_z(t + \Delta t) - a_z(t)}{\Delta t} \vec{k} \right) = \\ &= \frac{da_x}{dt} \vec{i} + \frac{da_y}{dt} \vec{j} + \frac{da_z}{dt} \vec{k}; \end{aligned}$$

# Свойства производной вектора

Пусть  $\vec{a}(t)$ ,  $\vec{b}(t)$  – векторные функции;  $c(t)$  – скалярная функция;  $\cdot$ ,  $\times$  – операции скалярного и векторного произведения, тогда

$$\begin{aligned} 1) \quad \vec{a}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{a_x(t + \Delta t) - a_x(t)}{\Delta t} \vec{i} + \frac{a_y(t + \Delta t) - a_y(t)}{\Delta t} \vec{j} + \frac{a_z(t + \Delta t) - a_z(t)}{\Delta t} \vec{k} \right) = \\ &= \frac{da_x}{dt} \vec{i} + \frac{da_y}{dt} \vec{j} + \frac{da_z}{dt} \vec{k}; \end{aligned}$$

$$2) \quad \frac{d(c\vec{a})}{dt} = \frac{dc}{dt} \vec{a} + c \frac{d\vec{a}}{dt};$$

# Свойства производной вектора

Пусть  $\vec{a}(t)$ ,  $\vec{b}(t)$  – векторные функции;  $c(t)$  – скалярная функция;  $\cdot$ ,  $\times$  – операции скалярного и векторного произведения, тогда

$$\begin{aligned} 1) \quad \vec{a}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{a_x(t + \Delta t) - a_x(t)}{\Delta t} \vec{i} + \frac{a_y(t + \Delta t) - a_y(t)}{\Delta t} \vec{j} + \frac{a_z(t + \Delta t) - a_z(t)}{\Delta t} \vec{k} \right) = \\ &= \frac{da_x}{dt} \vec{i} + \frac{da_y}{dt} \vec{j} + \frac{da_z}{dt} \vec{k}; \end{aligned}$$

$$2) \quad \frac{d(c\vec{a})}{dt} = \frac{dc}{dt} \vec{a} + c \frac{d\vec{a}}{dt};$$

$$3) \quad \frac{d(\vec{a} \cdot \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt};$$

# Свойства производной вектора

Пусть  $\vec{a}(t)$ ,  $\vec{b}(t)$  – векторные функции;  $c(t)$  – скалярная функция;  $\cdot$ ,  $\times$  – операции скалярного и векторного произведения, тогда

$$\begin{aligned} 1) \quad \vec{a}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{a_x(t + \Delta t) - a_x(t)}{\Delta t} \vec{i} + \frac{a_y(t + \Delta t) - a_y(t)}{\Delta t} \vec{j} + \frac{a_z(t + \Delta t) - a_z(t)}{\Delta t} \vec{k} \right) = \\ &= \frac{da_x}{dt} \vec{i} + \frac{da_y}{dt} \vec{j} + \frac{da_z}{dt} \vec{k}; \end{aligned}$$

$$2) \quad \frac{d(c\vec{a})}{dt} = \frac{dc}{dt} \vec{a} + c \frac{d\vec{a}}{dt};$$

$$3) \quad \frac{d(\vec{a} \cdot \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt};$$

$$4) \quad \frac{d(\vec{a} \times \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

# Свойства производной вектора

Пусть  $\vec{a}(t)$ ,  $\vec{b}(t)$  – векторные функции;  $c(t)$  – скалярная функция;  $\cdot$ ,  $\times$  – операции скалярного и векторного произведения, тогда

$$\begin{aligned} 1) \quad \vec{a}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{a_x(t + \Delta t) - a_x(t)}{\Delta t} \vec{i} + \frac{a_y(t + \Delta t) - a_y(t)}{\Delta t} \vec{j} + \frac{a_z(t + \Delta t) - a_z(t)}{\Delta t} \vec{k} \right) = \\ &= \frac{da_x}{dt} \vec{i} + \frac{da_y}{dt} \vec{j} + \frac{da_z}{dt} \vec{k}; \end{aligned}$$

$$2) \quad \frac{d(c\vec{a})}{dt} = \frac{dc}{dt} \vec{a} + c \frac{d\vec{a}}{dt};$$

$$3) \quad \frac{d(\vec{a} \cdot \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt};$$

$$4) \quad \frac{d(\vec{a} \times \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Справедливость выражений пунктов 2-4 следует из пункта 1.

# Производная вектора постоянного направления

Пусть  $\vec{a}(t) = a(t)\vec{a}_0$ , где  $\|\vec{a}_0\| = 1$  – постоянный вектор,  $a(t)$  – длина вектора  $\vec{a}(t)$ ,

# Производная вектора постоянного направления

Пусть  $\vec{a}(t) = a(t)\vec{a}_0$ , где  $\|\vec{a}_0\| = 1$  – постоянный вектор,  $a(t)$  – длина вектора  $\vec{a}(t)$ , тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\vec{a}_0.$$



# Производная вектора постоянного направления

Пусть  $\vec{a}(t) = a(t)\vec{a}_0$ , где  $\|\vec{a}_0\| = 1$  – постоянный вектор,  $a(t)$  – длина вектора  $\vec{a}(t)$ , тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\vec{a}_0.$$

Отсюда следует, что  $\frac{d\vec{a}}{dt} \parallel \vec{a}$ .

# Производная вектора постоянной длины

Пусть  $\vec{a}(t) = a_0 \vec{b}(t)$ , где  $a_0$  – заданная длина,  $\|\vec{b}(t)\| = 1$  – направление вектора  $\vec{a}(t)$ ,

# Производная вектора постоянной длины

Пусть  $\vec{a}(t) = a_0 \vec{b}(t)$ , где  $a_0$  – заданная длина,  $||\vec{b}(t)|| = 1$  – направление вектора  $\vec{a}(t)$ , тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = a_0 \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

# Производная вектора постоянной длины

Пусть  $\vec{a}(t) = a_0 \vec{b}(t)$ , где  $a_0$  – заданная длина,  $||\vec{b}(t)|| = 1$  – направление вектора  $\vec{a}(t)$ , тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = a_0 \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{a})}{dt} =$$

# Производная вектора постоянной длины

Пусть  $\vec{a}(t) = a_0 \vec{b}(t)$ , где  $a_0$  – заданная длина,  $||\vec{b}(t)|| = 1$  – направление вектора  $\vec{a}(t)$ , тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = a_0 \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{a})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} =$$

# Производная вектора постоянной длины

Пусть  $\vec{a}(t) = a_0 \vec{b}(t)$ , где  $a_0$  – заданная длина,  $\|\vec{b}(t)\| = 1$  – направление вектора  $\vec{a}(t)$ , тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = a_0 \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{a})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 2\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt}.$$

# Производная вектора постоянной длины

Пусть  $\vec{a}(t) = a_0 \vec{b}(t)$ , где  $a_0$  – заданная длина,  $||\vec{b}(t)|| = 1$  – направление вектора  $\vec{a}(t)$ , тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = a_0 \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{a})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 2\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt}.$$

С другой стороны,

$$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{a})}{dt} = \frac{da_0^2}{dt} = 0.$$

# Производная вектора постоянной длины

Пусть  $\vec{a}(t) = a_0 \vec{b}(t)$ , где  $a_0$  – заданная длина,  $||\vec{b}(t)|| = 1$  – направление вектора  $\vec{a}(t)$ , тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = a_0 \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{a})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 2\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt}.$$

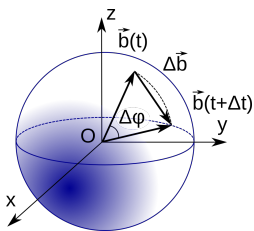
С другой стороны,

$$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{a})}{dt} = \frac{da_0^2}{dt} = 0.$$

Отсюда следует, что  $\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 0$  или  $\vec{a} \perp \frac{d\vec{a}}{dt}$ .



# Длина производной вектора единичной длины

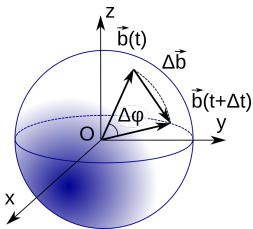


# Длина производной вектора единичной длины

На рисунке:  $\Delta\varphi$  – угол между двумя положениями  $\vec{b}$ ,

$$\Delta\vec{b} = \vec{b}(t + \Delta t) - \vec{b}(t),$$

$$||\Delta\vec{b}|| = 2 \sin(\Delta\varphi/2).$$

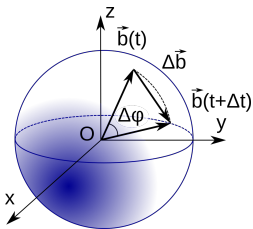


# Длина производной вектора единичной длины

На рисунке:  $\Delta\varphi$  – угол между двумя положениями  $\vec{b}$ ,

$$\Delta\vec{b} = \vec{b}(t + \Delta t) - \vec{b}(t),$$

$$||\Delta\vec{b}|| = 2 \sin(\Delta\varphi/2).$$



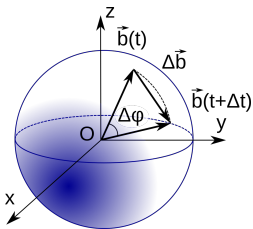
$$\left\| \frac{d\vec{b}}{dt} \right\| =$$

# Длина производной вектора единичной длины

На рисунке:  $\Delta\varphi$  – угол между двумя положениями  $\vec{b}$ ,

$$\Delta\vec{b} = \vec{b}(t + \Delta t) - \vec{b}(t),$$

$$||\Delta\vec{b}|| = 2 \sin(\Delta\varphi/2).$$



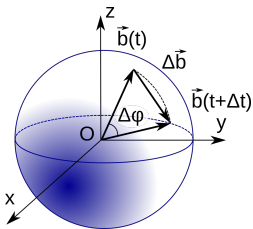
$$\left\| \frac{d\vec{b}}{dt} \right\| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{||\Delta\vec{b}||}{\Delta t} =$$

# Длина производной вектора единичной длины

На рисунке:  $\Delta\varphi$  – угол между двумя положениями  $\vec{b}$ ,

$$\Delta\vec{b} = \vec{b}(t + \Delta t) - \vec{b}(t),$$

$$||\Delta\vec{b}|| = 2 \sin(\Delta\varphi/2).$$



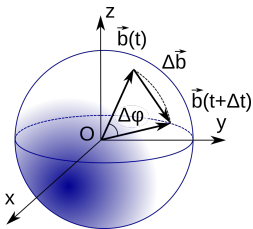
$$\left\| \frac{d\vec{b}}{dt} \right\| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{||\Delta\vec{b}||}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta t} =$$

# Длина производной вектора единичной длины

На рисунке:  $\Delta\varphi$  – угол между двумя положениями  $\vec{b}$ ,

$$\Delta\vec{b} = \vec{b}(t + \Delta t) - \vec{b}(t),$$

$$||\Delta\vec{b}|| = 2 \sin(\Delta\varphi/2).$$



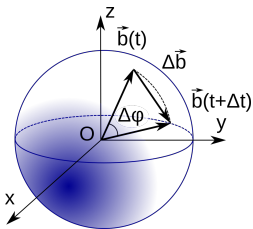
$$\begin{aligned} \left\| \frac{d\vec{b}}{dt} \right\| &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{||\Delta\vec{b}||}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \end{aligned}$$

# Длина производной вектора единичной длины

На рисунке:  $\Delta\varphi$  – угол между двумя положениями  $\vec{b}$ ,

$$\Delta\vec{b} = \vec{b}(t + \Delta t) - \vec{b}(t),$$

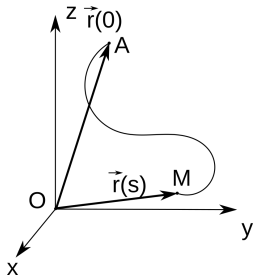
$$||\Delta\vec{b}|| = 2 \sin(\Delta\varphi/2).$$



$$\begin{aligned} \left\| \frac{d\vec{b}}{dt} \right\| &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{||\Delta\vec{b}||}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \end{aligned}$$

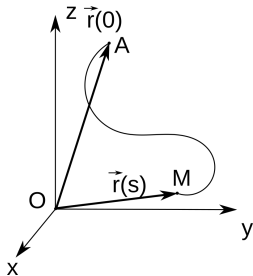
$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$  – называется **угловой скоростью**.

# Параметризация кривой с помощью длины $s$



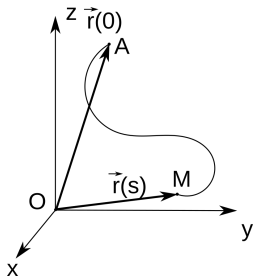


# Параметризация кривой с помощью длины $s$



Пусть кривая параметризована с помощью расстояния  $s$  от точки  $A$

# Параметризация кривой с помощью длины $s$

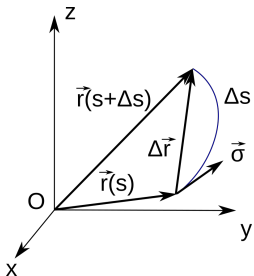


Пусть кривая параметризована с помощью расстояния  $s$  от точки  $A$  и её уравнение задано некоторым радиус вектором

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$$

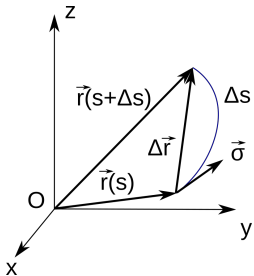
в некоторой декартовой системе координат, где  $s$  – длина дуги  $AM$ .

# Вектор касательной к кривой



# Вектор касательной к кривой

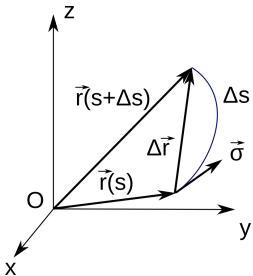
Вектор  $\frac{d\vec{r}}{ds}$  направлен по касательной к рассматриваемой кривой,



# Вектор касательной к кривой

Вектор  $\frac{d\vec{r}}{ds}$  направлен по касательной к рассматриваемой кривой, кроме того

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \right\| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\|\Delta \vec{r}\|}{\Delta s} = 1.$$



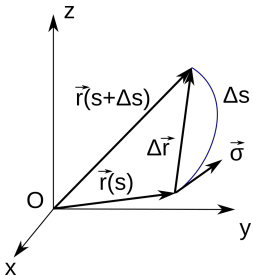
# Вектор касательной к кривой

Вектор  $\frac{d\vec{r}}{ds}$  направлен по касательной к рассматриваемой кривой, кроме того

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \right\| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\|\Delta\vec{r}\|}{\Delta s} = 1.$$

Таким образом единичный вектор касательной к кривой

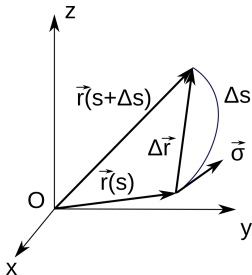
$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \sigma_x \vec{i} + \sigma_y \vec{j} + \sigma_z \vec{k}, \quad \|\vec{\sigma}\| = 1.$$



# Вектор касательной к кривой

Вектор  $\frac{d\vec{r}}{ds}$  направлен по касательной к рассматриваемой кривой, кроме того

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \right\| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\|\Delta \vec{r}\|}{\Delta s} = 1.$$



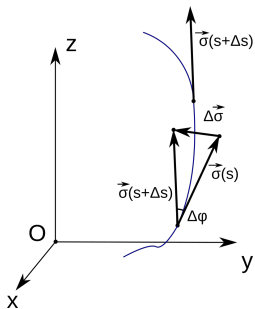
Таким образом единичный вектор касательной к кривой

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \sigma_x \vec{i} + \sigma_y \vec{j} + \sigma_z \vec{k}, \quad \|\vec{\sigma}\| = 1.$$

Компоненты вектора  $\vec{\sigma}$  по осям

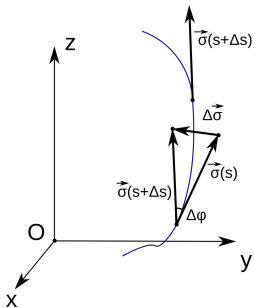
$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{dx}{ds} = \cos(\vec{\sigma}, x), \\ \sigma_y &= \frac{dy}{ds} = \cos(\vec{\sigma}, y), \\ \sigma_z &= \frac{dz}{ds} = \cos(\vec{\sigma}, z). \end{aligned}$$

# Радиус кривизны



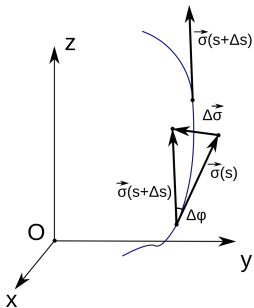


# Радиус кривизны



Рассмотрим длину производной касательного вектора.

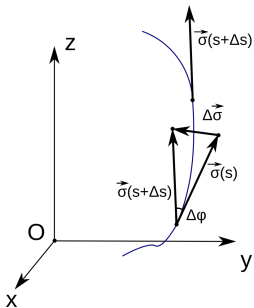
# Радиус кривизны



Рассмотрим длину производной касательного вектора. Так как  $\|\vec{\sigma}'(s)\| = 1$ , тогда справедливо

$$\left\| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right\| =$$

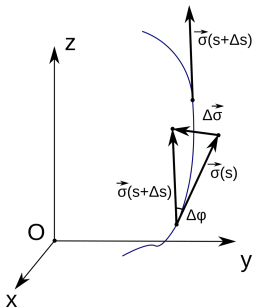
# Радиус кривизны



Рассмотрим длину производной касательного вектора. Так как  $\|\vec{\sigma}(s)\| = 1$ , тогда справедливо

$$\left\| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right\| = \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \right\| =$$

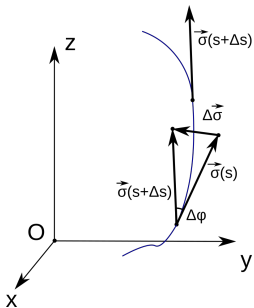
# Радиус кривизны



Рассмотрим длину производной касательного вектора. Так как  $\|\vec{\sigma}(s)\| = 1$ , тогда справедливо

$$\left\| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right\| = \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \right\| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} =$$

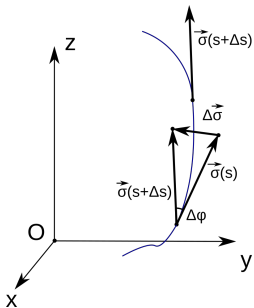
# Радиус кривизны



Рассмотрим длину производной касательного вектора. Так как  $\|\vec{\sigma}(s)\| = 1$ , тогда справедливо

$$\left\| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right\| = \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \right\| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{R(s)}.$$

# Радиус кривизны



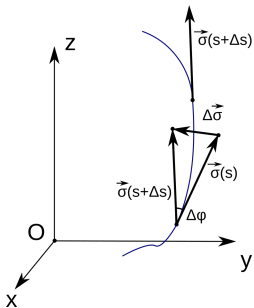
Рассмотрим длину производной касательного вектора. Так как  $\|\vec{\sigma}(s)\| = 1$ , тогда справедливо

$$\left\| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right\| = \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \right\| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{R(s)}.$$

## Определение

Величина  $R(s)$ , определяемая формулой, называется *радиусом кривизны* кривой.

# Радиус кривизны



Рассмотрим длину производной касательного вектора. Так как  $\|\vec{\sigma}(s)\| = 1$ , тогда справедливо

$$\left\| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right\| = \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \right\| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{R(s)}.$$

## Определение

Величина  $R(s)$ , определяемая формулой, называется **радиусом кривизны** кривой.

Радиус кривизны кривой определяется соотношением

$$R(s) = 1 / \sqrt{\left( \frac{d^2 x}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2 y}{ds^2} \right)^2 + \left( \frac{d^2 z}{ds^2} \right)^2}.$$

## Определение

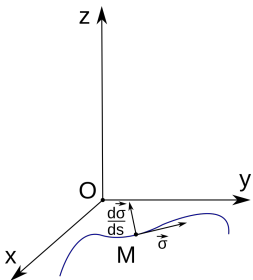
*Соприкасающаяся плоскость* – плоскость, в которой лежит данная точка и вектора  $\frac{d\vec{\sigma}}{ds}$  и  $\vec{\sigma}$ .



# Соприкасающаяся плоскость

## Определение

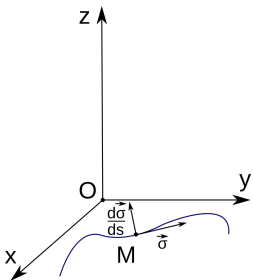
*Соприкасающаяся плоскость* – плоскость, в которой лежит данная точка и вектора  $\frac{d\vec{\sigma}}{ds}$  и  $\vec{\sigma}$ .



# Соприкасающаяся плоскость

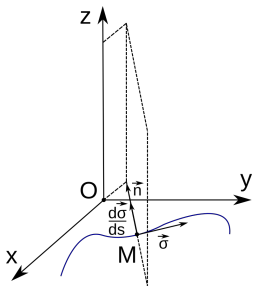
## Определение

**Соприкасающаяся плоскость** – плоскость, в которой лежит данная точка и вектора  $\frac{d\vec{\sigma}}{ds}$  и  $\vec{\sigma}$ .



На рисунке кривая лежит в плоскости  $Oxy$ , следовательно касательная и её производная тоже лежат в этой плоскости. Поэтому  $Oxy$  является **соприкасающейся плоскостью**.

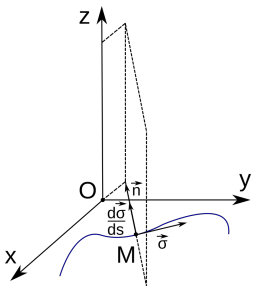
# Вектор нормали к кривой



# Вектор нормали к кривой

## Определение

Прямые, перпендикулярные касательной, называются **нормальями** к кривой, а плоскость, их содержащая – **нормальной плоскостью** к кривой в данной точке.



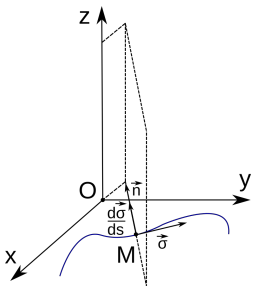
# Вектор нормали к кривой

## Определение

Прямые, перпендикулярные касательной, называются **нормальями** к кривой, а плоскость, их содержащая – **нормальной плоскостью** к кривой в данной точке.

## Определение

Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, называется **главной нормалью**.



# Вектор нормали к кривой

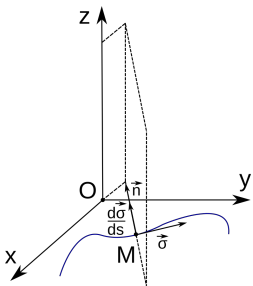
## Определение

Прямые, перпендикулярные касательной, называются **нормальями** к кривой, а плоскость, их содержащая – **нормальной плоскостью** к кривой в данной точке.

## Определение

Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, называется **главной нормалью**.

Т.к вектор  $\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \perp \vec{\sigma}$  и лежит в соприкасающейся плоскости,



# Вектор нормали к кривой

## Определение

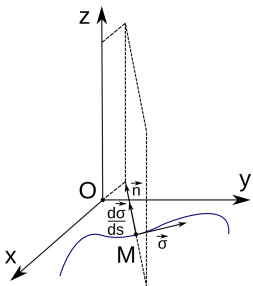
Прямые, перпендикулярные касательной, называются **нормальями** к кривой, а плоскость, их содержащая – **нормальной плоскостью** к кривой в данной точке.

## Определение

Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, называется **главной нормалью**.

Т.к вектор  $\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \perp \vec{\sigma}$  и лежит в соприкасающейся плоскости, то

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R},$$



# Вектор нормали к кривой

## Определение

Прямые, перпендикулярные касательной, называются **нормальями** к кривой, а плоскость, их содержащая – **нормальной плоскостью** к кривой в данной точке.

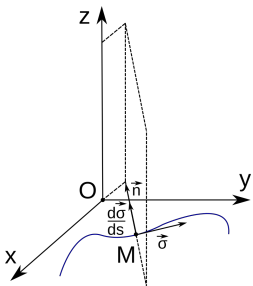
## Определение

Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, называется **главной нормалью**.

Т.к вектор  $\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \perp \vec{\sigma}$  и лежит в соприкасающейся плоскости, то

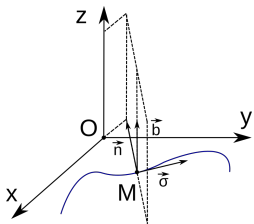
$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R},$$

$\vec{n}$  – единичный вектор, направленный в сторону главной нормали.

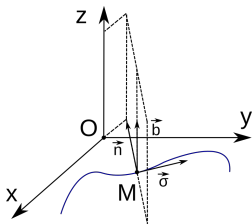




# Вектор бинормали



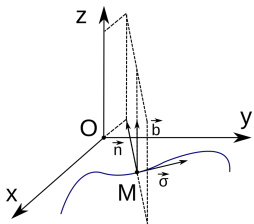
# Вектор бинормали



## Определение

Нормаль к кривой, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, называется **бинормалью**.

# Вектор бинормали



## Определение

Нормаль к кривой, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, называется **бинормалью**. В качестве бинормали будем подразумевать вектор

$$\vec{b} = \vec{\sigma} \times \vec{n}.$$

# Производная от бинормали

Рассмотрим  $\frac{d\vec{b}}{ds} =$

# Производная от бинормали

Рассмотрим  $\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} =$

## Производная от бинормали

Рассмотрим  $\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds}.$

# Производная от бинормали

Рассмотрим  $\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds}.$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} =$$

# Производная от бинормали

Рассмотрим  $\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds}.$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} = \frac{\vec{n}}{R} \times \vec{n} =$$



## Производная от бинормали

Рассмотрим  $\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds}.$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} = \frac{\vec{n}}{R} \times \vec{n} = 0 \text{ в силу коллинеарности } \vec{n} \parallel \vec{n};$$

# Производная от бинормали

Рассмотрим  $\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds}.$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} = \frac{\vec{n}}{R} \times \vec{n} = 0 \text{ в силу коллинеарности } \vec{n} \parallel \vec{n};$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds} \perp \vec{\sigma}$$

# Производная от бинормали

Рассмотрим  $\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds}.$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} = \frac{\vec{n}}{R} \times \vec{n} = 0 \text{ в силу коллинеарности } \vec{n} \parallel \vec{n};$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds} \perp \vec{\sigma} \text{ и, так как } \|\vec{b}\| = 1, \text{ то } \frac{d\vec{b}}{ds} \perp \vec{b},$$

# Производная от бинормали

Рассмотрим  $\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds}.$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} = \frac{\vec{n}}{R} \times \vec{n} = 0 \text{ в силу коллинеарности } \vec{n} \parallel \vec{n};$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds} \perp \vec{\sigma} \text{ и, так как } \|\vec{b}\| = 1, \text{ то } \frac{d\vec{b}}{ds} \perp \vec{b}, \text{ поэтому}$$

$$\vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds} \parallel \vec{n}.$$

# Производная от бинормали

Рассмотрим  $\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds}.$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} = \frac{\vec{n}}{R} \times \vec{n} = 0 \text{ в силу коллинеарности } \vec{n} \parallel \vec{n};$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds} \perp \vec{\sigma} \text{ и, так как } \|\vec{b}\| = 1, \text{ то } \frac{d\vec{b}}{ds} \perp \vec{b}, \text{ поэтому}$$

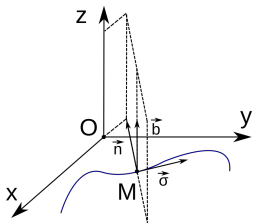
$$\vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds} \parallel \vec{n}.$$

## Связь бинормали и нормали

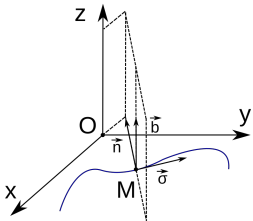
$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{T(s)},$$

где  $1/T$  называется кручением,  $T$  – радиус кручения. Кручение – мера отклонения от плоской кривой.

# Производная от нормали

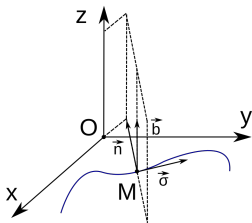


# Производная от нормали



Т.к. вектора  $\vec{\sigma}$ ,  $\vec{n}$  и  $\vec{b}$  составляют правую тройку ортонормированных векторов,

# Производная от нормали

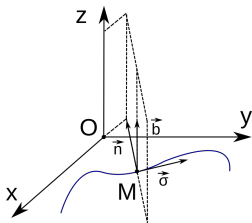


Т.к. вектора  $\vec{\sigma}$ ,  $\vec{n}$  и  $\vec{b}$  составляют правую тройку ортонормированных векторов, то

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\sigma}.$$



# Производная от нормали



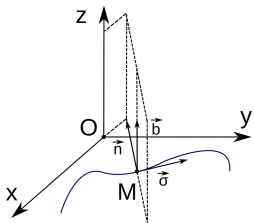
Т.к. вектора  $\vec{\sigma}$ ,  $\vec{n}$  и  $\vec{b}$  составляют правую тройку ортонормированных векторов, то

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\sigma}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d\vec{n}}{ds} =$$

# Производная от нормали



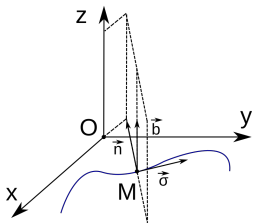
Т.к. вектора  $\vec{\sigma}$ ,  $\vec{n}$  и  $\vec{b}$  составляют правую тройку ортонормированных векторов, то

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\sigma}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d\vec{b}}{ds} \times \vec{\sigma} + \vec{b} \times \frac{d\vec{\sigma}}{ds} =$$

# Производная от нормали



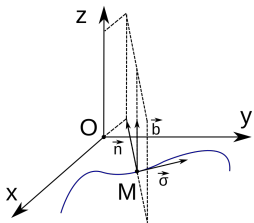
Т.к. вектора  $\vec{\sigma}$ ,  $\vec{n}$  и  $\vec{b}$  составляют правую тройку ортонормированных векторов, то

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\sigma}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d\vec{b}}{ds} \times \vec{\sigma} + \vec{b} \times \frac{d\vec{\sigma}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{T(s)} \times \vec{\sigma} + \vec{b} \times \frac{\vec{n}}{R(s)} =$$

# Производная от нормали



Т.к. вектора  $\vec{\sigma}$ ,  $\vec{n}$  и  $\vec{b}$  составляют правую тройку ортонормированных векторов, то

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\sigma}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d\vec{b}}{ds} \times \vec{\sigma} + \vec{b} \times \frac{d\vec{\sigma}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{T(s)} \times \vec{\sigma} + \vec{b} \times \frac{\vec{n}}{R(s)} = \frac{\vec{b}}{T(s)} - \frac{\vec{\sigma}}{R(s)}.$$

## Определение Соотношения

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{\vec{b}}{T(s)} - \frac{\vec{\sigma}}{R(s)}, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{T(s)}, \quad \frac{d\vec{\sigma}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R(s)},$$

где  $R(s)$ ,  $T(s)$  – радиусы кривизны и кручения кривой;  $\vec{\sigma}$ ,  $\vec{n}$  и  $\vec{b}$  – единичные касательный вектор, вектор главной нормали и бинормали, называются *формулами Френе*.