Градиент и дифференциальные операторы

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

QR-код презентации

15 апреля 2021 г.

Аннотация

Градиент и его свойства. Потенциальный вектор и его свойства. Градиент вектора по вектору. Субстанциональная производная.

Производная вдоль кривой

Рассмотрим скалярное поле функции $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$.

Производная вдоль кривой

Рассмотрим скалярное поле функции $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$. Проведём некоторую кривую L, параметризованную с помощью параметра s – расстояния до некоторой точки M:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Производная вдоль кривой

Рассмотрим скалярное поле функции $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$. Проведём некоторую кривую L, параметризованную с помощью параметра s – расстояния до некоторой точки M:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Тогда производная вдоль кривой имеет вид:

$$\frac{d}{ds}\varphi(x(s), y(s), z(s)) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds}.$$

Производная вдоль кривой

Рассмотрим скалярное поле функции $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$. Проведём некоторую кривую L, параметризованную с помощью параметра s – расстояния до некоторой точки M:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Тогда производная вдоль кривой имеет вид:

$$\frac{d}{ds}\varphi(x(s), y(s), z(s)) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds}.$$

Обыкновенные производные в равенстве – направляющие косинусы ($\vec{s}$ – единичный вектор касательных)

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\vec{s}, x), \quad \frac{dy}{ds} = \cos(\vec{s}, y), \quad \frac{dz}{ds} = \cos(\vec{s}, z),$$

Производная вдоль кривой

Рассмотрим скалярное поле функции $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$. Проведём некоторую кривую L, параметризованную с помощью параметра s – расстояния до некоторой точки M:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Тогда производная вдоль кривой имеет вид:

$$\frac{d}{ds}\varphi(x(s), y(s), z(s)) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds}.$$

Обыкновенные производные в равенстве – направляющие косинусы ($\vec{s}$ – единичный вектор касательных)

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\vec{s}, x), \quad \frac{dy}{ds} = \cos(\vec{s}, y), \quad \frac{dz}{ds} = \cos(\vec{s}, z),$$

то

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(\vec{s}, x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(\vec{s}, y) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(\vec{s}, z).$$

Производная вдоль кривой

Рассмотрим скалярное поле функции $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x,y,z)$. Проведём некоторую кривую L, параметризованную с помощью параметра s – расстояния до некоторой точки M:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Тогда производная вдоль кривой имеет вид:

$$\frac{d}{ds}\varphi(x(s),y(s),z(s)) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds}.$$

Обыкновенные производные в равенстве – направляющие косинусы ($\vec{s}$ – единичный вектор касательных)

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\vec{s},x), \quad \frac{dy}{ds} = \cos(\vec{s},y), \quad \frac{dz}{ds} = \cos(\vec{s},z),$$

то

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(\vec{s},x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(\vec{s},y) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(\vec{s},z).$$

Таким образом, $\dfrac{d\varphi}{ds}$ – проекция вектора $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$ на вектор $\vec{s}$.

Определение градиента

Определение

Вектор с компонентами $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$ *называется* ***градиентом функции*** φ *в точке* M *и обозначается* $\operatorname{grad}\varphi$.

Определение градиента

Определение

Вектор с компонентами $(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z})$ *называется* ***градиентом функции*** φ *в точке* M *и обозначается* $\operatorname{grad}\varphi$.

Отсюда

$$\operatorname{grad}\varphi = \vec{\mathbf{i}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Определение градиента

Определение

Вектор с компонентами $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$ *называется градиентом функции* φ *в точке* M *и обозначается* $\operatorname{grad}\varphi$.

Отсюда

$$\operatorname{grad}\varphi = \vec{\mathbf{i}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Длина вектора

$$|\operatorname{grad}\varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

Альтернативное определение градиента

Еще одно выражение для производной вдоль направления $\vec{s}$:

$$\frac{d\varphi}{ds} =$$

Альтернативное определение градиента

Еще одно выражение для производной вдоль направления $\vec{s}$:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \vec{s} \cdot \operatorname{grad} \varphi =$$

Альтернативное определение градиента

Еще одно выражение для производной вдоль направления $\vec{s}$:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \vec{s} \cdot \operatorname{grad} \varphi = |\operatorname{grad} \varphi| \cos(\operatorname{grad} \varphi, \vec{s}),$$

из которого вытекает следующее определение:

Альтернативное определение градиента

Еще одно выражение для производной вдоль направления $\vec{s}$:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \vec{s} \cdot \operatorname{grad} \varphi = |\operatorname{grad} \varphi| \cos(\operatorname{grad} \varphi, \vec{s}),$$

из которого вытекает следующее определение:

Определение

Градиентом функции φ *называется вектор, имеющий направление быстрейшего роста функции* φ *и по величине равный производной в этом направлении.*

Оператор набла или оператор Гамильтона

Определение

Дифференциальный оператор

$$\nabla = \vec{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}$$

называется наблой или оператором Гамильтона.

Оператор набла или оператор Гамильтона

Определение

Дифференциальный оператор

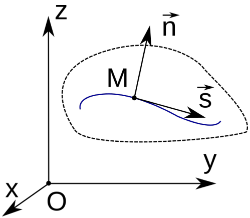
$$\nabla = \vec{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}$$

называется наблой или оператором Гамильтона.

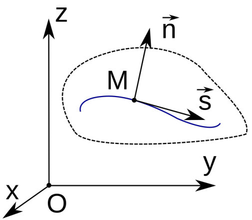
В терминах оператора набла градиент функции можно записать в виде:

$$\nabla\varphi = \vec{\mathbf{i}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Поверхность уровня

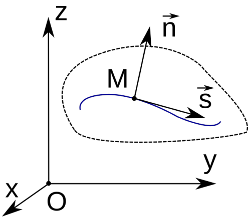


Поверхность уровня



Через произвольную точку M проведем поверхность уровня

$$\varphi(x, y, z) = \text{const}.$$



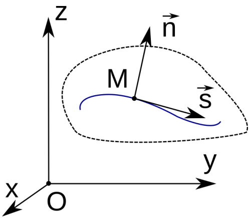
Через произвольную точку M проведем поверхность уровня

$$\varphi(x, y, z) = \text{const}.$$

Т.к. производная вдоль любой кривой, лежащей на поверхности уровня, от $\varphi(x, y, z)$ равна

$$\frac{d}{ds}\varphi(x(s), y(s), z(s)) =$$

Поверхность уровня



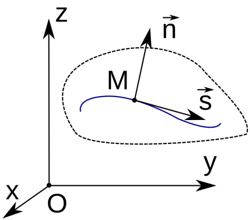
Через произвольную точку M проведем поверхность уровня

$$\varphi(x, y, z) = \text{const}.$$

Т.к. производная вдоль любой кривой, лежащей на поверхности уровня, от $\varphi(x, y, z)$ равна

$$\frac{d}{ds}\varphi(x(s), y(s), z(s)) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi(x(s+\Delta s), y(s+\Delta s), z(s+\Delta s)) - \varphi(x(s), y(s), z(s))}{\Delta s} =$$

Поверхность уровня



Через произвольную точку M проведем поверхность уровня

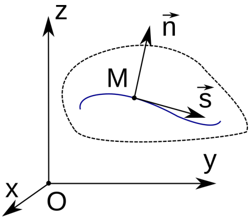
$$\varphi(x, y, z) = \mathrm{const}.$$

Т.к. производная вдоль любой кривой, лежащей на поверхности уровня, от $\varphi(x, y, z)$ равна

$$\frac{d}{ds}\varphi(x(s), y(s), z(s)) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi(x(s+\Delta s), y(s+\Delta s), z(s+\Delta s)) - \varphi(x(s), y(s), z(s))}{\Delta s} =$$

$$= \operatorname{grad}\varphi \cdot \vec{s} =$$

Поверхность уровня



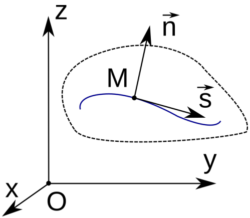
Через произвольную точку M проведем поверхность уровня

$$\varphi(x, y, z) = \text{const}.$$

Т.к. производная вдоль любой кривой, лежащей на поверхности уровня, от $\varphi(x, y, z)$ равна

$$\frac{d}{ds}\varphi(x(s), y(s), z(s)) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi(x(s+\Delta s), y(s+\Delta s), z(s+\Delta s)) - \varphi(x(s), y(s), z(s))}{\Delta s} =$$
$$= \operatorname{grad}\varphi \cdot \vec{s} = 0.$$

Следовательно градиент ортогонален касательной плоскости в т. M,



Через произвольную точку M проведем поверхность уровня

$$\varphi(x, y, z) = \text{const}.$$

Т.к. производная вдоль любой кривой, лежащей на поверхности уровня, от $\varphi(x, y, z)$ равна

$$\frac{d}{ds}\varphi(x(s), y(s), z(s)) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi(x(s+\Delta s), y(s+\Delta s), z(s+\Delta s)) - \varphi(x(s), y(s), z(s))}{\Delta s} =$$
$$= \operatorname{grad}\varphi \cdot \vec{s} = 0.$$

Следовательно градиент ортогонален касательной плоскости в т. M, и

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n}\vec{n},$$

где $\vec{n}$ – вектор единичной нормали к поверхности уровня.

Поверхность и трубка тока

Определение

Поверхностью тока вектора $\vec{v}$ называется поверхность, образованная линиями тока, проходящими через некоторую наперед заданную кривую.

Поверхность и трубка тока

Определение

Поверхностью тока вектора $\vec{v}$ называется поверхность, образованная линиями тока, проходящими через некоторую наперед заданную кривую.

Определение

Трубкой тока вектора $\vec{v}$ называется часть пространства, заключенная внутри поверхности тока, образованной замкнутой кривой.

Поверхность и трубка тока

Определение

Поверхностью тока вектора $\vec{v}$ называется поверхность, образованная линиями тока, проходящими через некоторую наперед заданную кривую.

Определение

Трубкой тока вектора $\vec{v}$ называется часть пространства, заключенная внутри поверхности тока, образованной замкнутой кривой.

Пусть векторные линии для поля скоростей $\vec{v}(x, y, z)$ определяются соотношением

$$\Phi(x, y, z) = 0.$$

Поверхность и трубка тока

Определение

Поверхностью тока вектора $\vec{v}$ называется поверхность, образованная линиями тока, проходящими через некоторую наперед заданную кривую.

Определение

Трубкой тока вектора $\vec{v}$ называется часть пространства, заключенная внутри поверхности тока, образованной замкнутой кривой.

Пусть векторные линии для поля скоростей $\vec{v}(x, y, z)$ определяются соотношением

$$\Phi(x, y, z) = 0.$$

По определению поверхности тока $\vec{v}$ является касательным в любой точке этой поверхности и следовательно

$$\vec{v} \cdot \operatorname{grad} \Phi = 0,$$

что является уравнением поверхности тока.

Представление дифференциала функции через градиент

Пусть

$$d\vec{r} = \vec{\mathbf{i}}dx + \vec{\mathbf{j}}dy + \vec{\mathbf{k}}dz,$$

Представление дифференциала функции через градиент

Пусть

$$d\vec{r} = \vec{\mathbf{i}}dx + \vec{\mathbf{j}}dy + \vec{\mathbf{k}}dz,$$

тогда

$$d\vec{r} \cdot \operatorname{grad}\varphi =$$

Представление дифференциала функции через градиент

Пусть

$$d\vec{r} = \vec{\mathbf{i}}dx + \vec{\mathbf{j}}dy + \vec{\mathbf{k}}dz,$$

тогда

$$d\vec{r} \cdot \operatorname{grad}\varphi = \left(\vec{\mathbf{i}}dx + \vec{\mathbf{j}}dy + \vec{\mathbf{k}}dz\right) \cdot \left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) =$$

Представление дифференциала функции через градиент

Пусть

$$d\vec{r} = \vec{\mathbf{i}}dx + \vec{\mathbf{j}}dy + \vec{\mathbf{k}}dz,$$

тогда

$$d\vec{r} \cdot \operatorname{grad} \varphi = \left(\vec{\mathbf{i}}dx + \vec{\mathbf{j}}dy + \vec{\mathbf{k}}dz\right) \cdot \left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) =$$
$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz =$$

Представление дифференциала функции через градиент

Пусть

$$d\vec{r} = \vec{\mathbf{i}}dx + \vec{\mathbf{j}}dy + \vec{\mathbf{k}}dz,$$

тогда

$$d\vec{r} \cdot \operatorname{grad}\varphi = \left(\vec{\mathbf{i}}dx + \vec{\mathbf{j}}dy + \vec{\mathbf{k}}dz\right) \cdot \left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) =$$
$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = d\varphi$$

Представление дифференциала функции через градиент

Пусть

$$d\vec{r} = \vec{\mathbf{i}}dx + \vec{\mathbf{j}}dy + \vec{\mathbf{k}}dz,$$

тогда

$$d\vec{r} \cdot \operatorname{grad} \varphi = \left(\vec{\mathbf{i}}dx + \vec{\mathbf{j}}dy + \vec{\mathbf{k}}dz\right) \cdot \left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) =$$
$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz = d\varphi$$

Таким образом для произвольного вектора $d\vec{r}$

$$d\varphi = d\vec{r} \cdot \operatorname{grad} \varphi.$$

Теорема о градиенте

Теорема (о градиенте функции)

Если для некоторой скалярной функции $\varphi(\vec{r})$ найдется такой вектор $\vec{a}$,

Теорема (о градиенте функции)

Если для некоторой скалярной функции $\varphi(\vec{r})$ найдется такой вектор $\vec{a}$, что для произвольных векторов $d\vec{r}$ справедливо равенство

$$d\varphi = d\vec{r} \cdot \vec{a},$$

Теорема (о градиенте функции)
Если для некоторой скалярной функции $\varphi(\vec{r})$ найдется такой вектор $\vec{a}$, что для произвольных векторов $d\vec{r}$ справедливо равенство

$$d\varphi = d\vec{r} \cdot \vec{a},$$

то вектор $\vec{a}$ есть градиент функции $\varphi(\vec{r}) : \vec{a} = \operatorname{grad} \varphi$.

Теорема о градиенте

Теорема (о градиенте функции)
Если для некоторой скалярной функции $\varphi(\vec{r})$ найдется такой вектор $\vec{a}$, что для произвольных векторов $d\vec{r}$ справедливо равенство

$$d\varphi = d\vec{r} \cdot \vec{a},$$

то вектор $\vec{a}$ есть градиент функции $\varphi(\vec{r}) : \vec{a} = \operatorname{grad} \varphi$.

Доказательство.
Из равенства для полного дифференциала $d\varphi$ вычтем равенство из условия теоремы, тогда

$$0 = d\vec{r} \cdot (\vec{a} - \operatorname{grad} \varphi).$$

Теорема (о градиенте функции)

Если для некоторой скалярной функции $\varphi(\vec{r})$ найдется такой вектор $\vec{a}$, что для произвольных векторов $d\vec{r}$ справедливо равенство

$$d\varphi = d\vec{r} \cdot \vec{a},$$

то вектор $\vec{a}$ есть градиент функции $\varphi(\vec{r}) : \vec{a} = \operatorname{grad} \varphi$.

Доказательство.

Из равенства для полного дифференциала $d\varphi$ вычтем равенство из условия теоремы, тогда

$$0 = d\vec{r} \cdot (\vec{a} - \operatorname{grad} \varphi).$$

В силу произвольности $d\vec{r}$ $\vec{a} = \operatorname{grad} \varphi$.

□

Пример

Градиент функции, зависящий только от расстояния до начала координат

Пусть $\varphi = \varphi(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Пример

Градиент функции, зависящий только от расстояния до начала координат

Пусть $\varphi = \varphi(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Рассмотрим выражение

$$2\vec{r} \cdot d\vec{r} =$$

Пример

Градиент функции, зависящий только от расстояния до начала координат

Пусть $\varphi = \varphi(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Рассмотрим выражение

$$2\vec{r} \cdot d\vec{r} = d(\vec{r} \cdot \vec{r}) =$$

Пример

Градиент функции, зависящий только от расстояния до начала координат

Пусть $\varphi = \varphi(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Рассмотрим выражение

$$2\vec{r} \cdot d\vec{r} = d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = dr^2 =$$

Пример

Градиент функции, зависящий только от расстояния до начала координат

Пусть $\varphi = \varphi(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Рассмотрим выражение

$$2\vec{r} \cdot d\vec{r} = d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = dr^2 = 2r dr \quad \Rightarrow$$

Пример

Градиент функции, зависящий только от расстояния до начала координат

Пусть $\varphi = \varphi(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Рассмотрим выражение

$$2\vec{r} \cdot d\vec{r} = d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = dr^2 = 2rdr \quad \Rightarrow \quad dr = d\vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Тогда

$$d\varphi =$$

Пример

Градиент функции, зависящий только от расстояния до начала координат

Пусть $\varphi = \varphi(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Рассмотрим выражение

$$2\vec{r} \cdot d\vec{r} = d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = dr^2 = 2rdr \quad \Rightarrow \quad dr = d\vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Тогда

$$d\varphi = \varphi'(r)dr =$$

Пример

Градиент функции, зависящий только от расстояния до начала координат

Пусть $\varphi = \varphi(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Рассмотрим выражение

$$2\vec{r} \cdot d\vec{r} = d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = dr^2 = 2rdr \quad \Rightarrow \quad dr = d\vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Тогда

$$d\varphi = \varphi'(r)dr = d\vec{r} \cdot \frac{\varphi'(r)}{r}\vec{r}.$$

Пример

Градиент функции, зависящий только от расстояния до начала координат

Пусть $\varphi = \varphi(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Рассмотрим выражение

$$2\vec{r} \cdot d\vec{r} = d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = dr^2 = 2rdr \quad \Rightarrow \quad dr = d\vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Тогда

$$d\varphi = \varphi'(r)dr = d\vec{r} \cdot \frac{\varphi'(r)}{r}\vec{r}.$$

По теореме о градиенте

$$\operatorname{grad} r = \frac{\vec{r}}{r},$$

Пример

Градиент функции, зависящий только от расстояния до начала координат

Пусть $\varphi = \varphi(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Рассмотрим выражение

$$2\vec{r} \cdot d\vec{r} = d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = dr^2 = 2rdr \quad \Rightarrow \quad dr = d\vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Тогда

$$d\varphi = \varphi'(r)dr = d\vec{r} \cdot \frac{\varphi'(r)}{r}\vec{r}.$$

По теореме о градиенте

$$\operatorname{grad} r = \frac{\vec{r}}{r}, \qquad \operatorname{grad} \varphi = \frac{\varphi'(r)}{r}\vec{r}.$$

Потенциальный вектор

Определение

Вектор, являющийся градиентом некоторой скалярной функции, называется потенциальным вектором,

Потенциальный вектор

Определение

Вектор, являющийся градиентом некоторой скалярной функции, называется потенциальным вектором, а поле такого вектора – потенциальным и сама скалярная функция потенциалом.

Потенциальный вектор

Определение

Вектор, являющийся градиентом некоторой скалярной функции, называется потенциальным вектором, а поле такого вектора – потенциальным и сама скалярная функция потенциалом.

Пример потенциального поля $\vec{a}(\vec{r})$

Для следующих функций $\vec{a} = \operatorname{grad} \varphi$:

Потенциальный вектор

Определение

*Вектор, являющийся градиентом некоторой скалярной функции, называется **потенциальным вектором**, а поле такого вектора – **потенциальным** и сама скалярная функция **потенциалом**.*

Пример потенциального поля $\vec{a}(\vec{r})$

Для следующих функций $\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi$:

$$\vec{a}(\vec{r}) = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}} = \vec{r},$$

Потенциальный вектор

Определение

Вектор, являющийся градиентом некоторой скалярной функции, называется потенциальным вектором, а поле такого вектора – потенциальным и сама скалярная функция потенциалом.

Пример потенциального поля $\vec{a}(\vec{r})$

Для следующих функций $\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi$:

$$\vec{a}(\vec{r}) = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}} = \vec{r}, \varphi(\vec{r}) = 1/2(x^2 + y^2 + z^2) = r^2/2;$$

Потенциальный вектор

Определение

Вектор, являющийся градиентом некоторой скалярной функции, называется потенциальным вектором, а поле такого вектора – потенциальным и сама скалярная функция потенциалом.

Пример потенциального поля $\vec{a}(\vec{r})$

Для следующих функций $\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi$:

$$\vec{a}(\vec{r}) = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}} = \vec{r}, \varphi(\vec{r}) = 1/2(x^2 + y^2 + z^2) = r^2/2;$$

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{r}/r,$$

Потенциальный вектор

Определение

Вектор, являющийся градиентом некоторой скалярной функции, называется потенциальным вектором, а поле такого вектора – потенциальным и сама скалярная функция потенциалом.

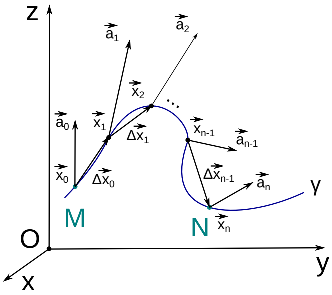
Пример потенциального поля $\vec{a}(\vec{r})$

Для следующих функций $\vec{a} = \operatorname{grad} \varphi$:

$$\vec{a}(\vec{r}) = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}} = \vec{r}, \varphi(\vec{r}) = 1/2(x^2 + y^2 + z^2) = r^2/2;$$

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{r}/r, \varphi(\vec{r}) = r.$$

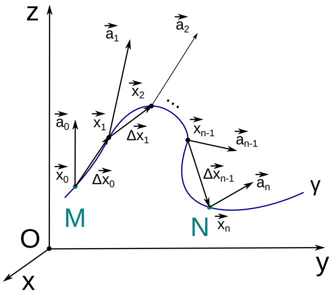
Линейный интеграл от векторной функции вдоль кривой



Определение

Линейным интегралом по кривой γ от векторной функции $\vec{a}(\vec{r})$, между точками M и N назовем выражение

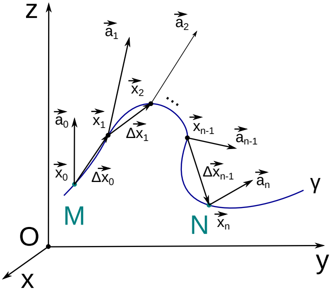
Линейный интеграл от векторной функции вдоль кривой



Определение

Линейным интегралом по кривой γ от векторной функции $\vec{a}(\vec{r})$, между точками M и N назовем выражение

$$\int\limits_{\gamma} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \lim_{\Delta\vec{x}_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\vec{a}_i\cdot\Delta\vec{x}_i$$

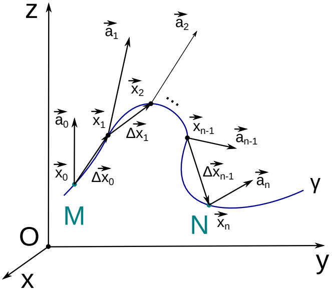


Определение

Линейным интегралом по кривой γ от векторной функции $\vec{a}(\vec{r})$, между точками M и N назовем выражение

$$\int\limits_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \lim_{\Delta\vec{x}_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \vec{a}_i \cdot \Delta\vec{x}_i$$

независимо от способа разбиения дуги MN.

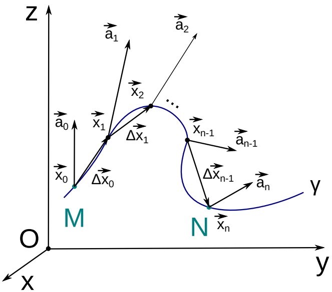


Определение

Линейным интегралом по кривой γ от векторной функции $\vec{a}(\vec{r})$, между точками M и N назовем выражение

$$\int\limits_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \lim_{\Delta\vec{x}_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \vec{a}_i \cdot \Delta\vec{x}_i$$

независимо от способа разбиения дуги MN. Здесь $\vec{x}_0 = M$, $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{n-1}, \vec{x}_n = N$ – разбиение дуги MN на n частей;

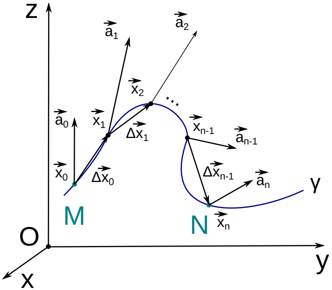


Определение

Линейным интегралом по кривой γ от векторной функции $\vec{a}(\vec{r})$, между точками M и N назовем выражение

$$\int\limits_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \lim_{\Delta\vec{x}_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \vec{a}_i \cdot \Delta\vec{x}_i$$

независимо от способа разбиения дуги MN. Здесь $\vec{x}_0 = M$, $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{n-1}, \vec{x}_n = N$ – разбиение дуги MN на n частей; $\Delta\vec{x}_i = \vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i$ $(i = \overline{0, n-1})$;



Определение

Линейным интегралом по кривой γ от векторной функции $\vec{a}(\vec{r})$, между точками M и N назовем выражение

$$\int\limits_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \lim_{\Delta\vec{x}_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \vec{a}_i \cdot \Delta\vec{x}_i$$

независимо от способа разбиения дуги MN. Здесь $\vec{x}_0 = M$, $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{n-1}, \vec{x}_n = N$ – разбиение дуги MN на n частей; $\Delta\vec{x}_i = \vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i$ $(i = \overline{0, n-1})$; $\vec{a}_i = \vec{a}(\vec{x}_i)$.

Разные записи интеграла

Пусть задана кривая $\vec{r} = \vec{r}(s)$, параметризованная параметром, связанным с длиной дуги s:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Разные записи интеграла

Пусть задана кривая $\vec{r} = \vec{r}(s)$, параметризованная параметром, связанным с длиной дуги s:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Вектор $\vec{s} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ – единичный касательный вектор,

Разные записи интеграла

Пусть задана кривая $\vec{r} = \vec{r}(s)$, параметризованная параметром, связанным с длиной дуги s:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Вектор $\vec{s} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ – единичный касательный вектор, а $a_s = \vec{a} \cdot \vec{s}$ – длина проекции $\vec{a}$ на $\vec{s}$ в заданной точке.

Разные записи интеграла

Пусть задана кривая $\vec{r} = \vec{r}(s)$, параметризованная параметром, связанным с длиной дуги s:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Вектор $\vec{s} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ – единичный касательный вектор, а $a_s = \vec{a} \cdot \vec{s}$ – длина проекции $\vec{a}$ на $\vec{s}$ в заданной точке.
Тогда

$$\int\limits_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} =$$

Разные записи интеграла

Пусть задана кривая $\vec{r} = \vec{r}(s)$, параметризованная параметром, связанным с длиной дуги s:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Вектор $\vec{s} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ – единичный касательный вектор, а $a_s = \vec{a} \cdot \vec{s}$ – длина проекции $\vec{a}$ на $\vec{s}$ в заданной точке.
Тогда

$$\int\limits_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{\gamma} (a_x dx + a_y dy + a_z dz) =$$

Разные записи интеграла

Пусть задана кривая $\vec{r} = \vec{r}(s)$, параметризованная параметром, связанным с длиной дуги s:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Вектор $\vec{s} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ – единичный касательный вектор, а $a_s = \vec{a} \cdot \vec{s}$ – длина проекции $\vec{a}$ на $\vec{s}$ в заданной точке.

Тогда

$$\int\limits_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{\gamma} (a_x dx + a_y dy + a_z dz) =$$

$$= \int\limits_{s_0}^{s_1} (a_x \frac{dx}{ds} + a_y \frac{dy}{ds} + a_z \frac{dz}{ds}) ds =$$

Разные записи интеграла

Пусть задана кривая $\vec{r} = \vec{r}(s)$, параметризованная параметром, связанным с длиной дуги s:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Вектор $\vec{s} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ – единичный касательный вектор, а $a_s = \vec{a} \cdot \vec{s}$ – длина проекции $\vec{a}$ на $\vec{s}$ в заданной точке.
Тогда

$$\int\limits_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{\gamma} (a_x dx + a_y dy + a_z dz) =$$

$$= \int\limits_{s_0}^{s_1} (a_x \frac{dx}{ds} + a_y \frac{dy}{ds} + a_z \frac{dz}{ds}) ds = \int\limits_{s_0}^{s_1} \vec{a} \cdot \vec{s} ds =$$

Разные записи интеграла

Пусть задана кривая $\vec{r} = \vec{r}(s)$, параметризованная параметром, связанным с длиной дуги s:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Вектор $\vec{s} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ – единичный касательный вектор, а $a_s = \vec{a} \cdot \vec{s}$ – длина проекции $\vec{a}$ на $\vec{s}$ в заданной точке.
Тогда

$$\int\limits_{\gamma} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{\gamma} (a_x dx + a_y dy + a_z dz) =$$

$$= \int\limits_{s_0}^{s_1} (a_x \frac{dx}{ds} + a_y \frac{dy}{ds} + a_z \frac{dz}{ds}) ds = \int\limits_{s_0}^{s_1} \vec{a} \cdot \vec{s} ds = \int\limits_{s_0}^{s_1} a_s ds.$$

Циркуляция вектора

Определение

Линейный интеграл вектора $\vec{a}$ *вдоль замкнутой кривой* C

Циркуляция вектора

Определение

Линейный интеграл вектора $\vec{a}$ *вдоль замкнутой кривой* C *называется* ***циркуляцией вектора*** *по замкнутому контуру* C

Циркуляция вектора

Определение

Линейный интеграл вектора $\vec{a}$ вдоль замкнутой кривой C называется циркуляцией вектора по замкнутому контуру C и обозначается

$$\Gamma_C(\vec{a}) = \oint\limits_C \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

Определение

Линейный интеграл вектора $\vec{a}$ вдоль замкнутой кривой C называется *циркуляцией вектора* *по замкнутому контуру C и обозначается*

$$\Gamma_C(\vec{a}) = \oint\limits_C \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

Аддитивность циркуляции

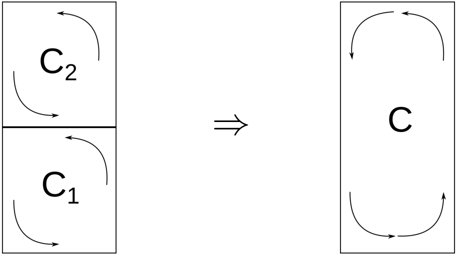
Циркуляция вектора

Определение

Линейный интеграл вектора $\vec{a}$ вдоль замкнутой кривой C называется *циркуляцией вектора* *по замкнутому контуру C и обозначается*

$$\Gamma_C(\vec{a}) = \oint\limits_C \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

Аддитивность циркуляции



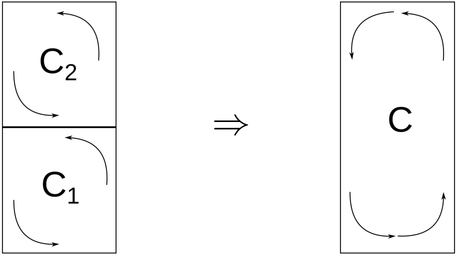
Циркуляция вектора

Определение

Линейный интеграл вектора $\vec{a}$ вдоль замкнутой кривой C называется *циркуляцией вектора* *по замкнутому контуру C и обозначается*

$$\Gamma_C(\vec{a}) = \oint\limits_C \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

Аддитивность циркуляции



$$\oint\limits_{C_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} + \oint\limits_{C_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} =$$

$$= \oint\limits_{C} \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

Линейный интеграл от потенциального вектора

Теорема

Линейный интеграл вектора $\vec{a} = \operatorname{grad} \varphi$ *вдоль любой кривой* L*,*

Линейный интеграл от потенциального вектора

Теорема

Линейный интеграл вектора $\vec{a} = \operatorname{grad} \varphi$ *вдоль любой кривой* L*, соединяющей точки* $M_0(\vec{r}_0)$ *и* $M_1(\vec{r}_1)$*,*

Линейный интеграл от потенциального вектора

Теорема

Линейный интеграл вектора $\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi$ *вдоль любой кривой* L*, соединяющей точки* $M_0(\vec{r}_0)$ *и* $M_1(\vec{r}_1)$*, равен разности значений функций* φ *в этих точках.*

Линейный интеграл от потенциального вектора

Теорема

Линейный интеграл вектора $\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi$ вдоль любой кривой L, соединяющей точки $M_0(\vec{r}_0)$ и $M_1(\vec{r}_1)$, равен разности значений функций φ в этих точках.

Доказательство.

Пусть кривая L задана соотношением $\vec{r} = \vec{r}(s)$ и $\vec{r}_0 = \vec{r}(s_0)$, $\vec{r}_1 = \vec{r}(s_1)$,

Линейный интеграл от потенциального вектора

Теорема

Линейный интеграл вектора $\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi$ вдоль любой кривой L, соединяющей точки $M_0(\vec{r}_0)$ и $M_1(\vec{r}_1)$, равен разности значений функций φ в этих точках.

Доказательство.

Пусть кривая L задана соотношением $\vec{r} = \vec{r}(s)$ и $\vec{r}_0 = \vec{r}(s_0)$, $\vec{r}_1 = \vec{r}(s_1)$, тогда

$$\int\limits_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} =$$

Линейный интеграл от потенциального вектора

Теорема

Линейный интеграл вектора $\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi$ вдоль любой кривой L, соединяющей точки $M_0(\vec{r}_0)$ и $M_1(\vec{r}_1)$, равен разности значений функций φ в этих точках.

Доказательство.

Пусть кривая L задана соотношением $\vec{r} = \vec{r}(s)$ и $\vec{r}_0 = \vec{r}(s_0)$, $\vec{r}_1 = \vec{r}(s_1)$, тогда

$$\int\limits_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{s_0}^{s_1} (a_x \frac{dx}{ds} + a_y \frac{dy}{ds} + a_z \frac{dz}{ds}) ds =$$

Линейный интеграл от потенциального вектора

Теорема

Линейный интеграл вектора $\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi$ вдоль любой кривой L, соединяющей точки $M_0(\vec{r}_0)$ и $M_1(\vec{r}_1)$, равен разности значений функций φ в этих точках.

Доказательство.

Пусть кривая L задана соотношением $\vec{r} = \vec{r}(s)$ и $\vec{r}_0 = \vec{r}(s_0)$, $\vec{r}_1 = \vec{r}(s_1)$, тогда

$$\int\limits_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{s_0}^{s_1} (a_x \frac{dx}{ds} + a_y \frac{dy}{ds} + a_z \frac{dz}{ds}) ds =$$

$$= \int\limits_{s_0}^{s_1} (\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds}) ds =$$

Линейный интеграл от потенциального вектора

Теорема

Линейный интеграл вектора $\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi$ вдоль любой кривой L, соединяющей точки $M_0(\vec{r}_0)$ и $M_1(\vec{r}_1)$, равен разности значений функций φ в этих точках.

Доказательство.

Пусть кривая L задана соотношением $\vec{r} = \vec{r}(s)$ и $\vec{r}_0 = \vec{r}(s_0)$, $\vec{r}_1 = \vec{r}(s_1)$, тогда

$$\int\limits_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{s_0}^{s_1} (a_x \frac{dx}{ds} + a_y \frac{dy}{ds} + a_z \frac{dz}{ds}) ds =$$

$$= \int\limits_{s_0}^{s_1} (\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds}) ds = \int\limits_{s_0}^{s_1} \frac{d}{ds}\varphi(x(s), y(s), z(s)) ds =$$

Линейный интеграл от потенциального вектора

Теорема

Линейный интеграл вектора $\vec{a} = \operatorname{grad} \varphi$ вдоль любой кривой L, соединяющей точки $M_0(\vec{r}_0)$ и $M_1(\vec{r}_1)$, равен разности значений функций φ в этих точках.

Доказательство.

Пусть кривая L задана соотношением $\vec{r} = \vec{r}(s)$ и $\vec{r}_0 = \vec{r}(s_0)$, $\vec{r}_1 = \vec{r}(s_1)$, тогда

$$\int\limits_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{s_0}^{s_1} (a_x \frac{dx}{ds} + a_y \frac{dy}{ds} + a_z \frac{dz}{ds}) ds =$$

$$= \int\limits_{s_0}^{s_1} (\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds}) ds = \int\limits_{s_0}^{s_1} \frac{d}{ds} \varphi(x(s), y(s), z(s)) ds =$$

$$= \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_0).$$

□

Следствия из теоремы

Два следствия теоремы:

Следствия из теоремы

Два следствия теоремы:

значение интеграла от градиента функции зависит только от конечной и начальной точки и не зависит от пути интегрирования;

Следствия из теоремы

Два следствия теоремы:

- значение интеграла от градиента функции зависит только от конечной и начальной точки и не зависит от пути интегрирования;
- интеграл от градиента функции по замкнутому контуру равен 0

Следствия из теоремы

Два следствия теоремы:

- значение интеграла от градиента функции зависит только от конечной и начальной точки и не зависит от пути интегрирования;
- интеграл от градиента функции по замкнутому контуру равен 0 (или циркуляция потенциального вектора по любому контуру равна 0).

Критерий потенциальности векторного поля

Теорема

Если циркуляция вектора $\vec{a}$ по любому замкнутому контуру равна нулю в некоторой области,

Критерий потенциальности векторного поля

Теорема

Если циркуляция вектора $\vec{a}$ по любому замкнутому контуру равна нулю в некоторой области, то вектор $\vec{a}$ – потенциальный вектор,

Критерий потенциальности векторного поля

Теорема

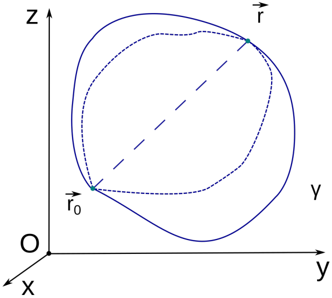
Если циркуляция вектора $\vec{a}$ по любому замкнутому контуру равна нулю в некоторой области, то вектор $\vec{a}$ – потенциальный вектор, т.е. равен градиенту некоторой скалярной функции φ.

Критерий потенциальности векторного поля

Теорема

Если циркуляция вектора $\vec{a}$ по любому замкнутому контуру равна нулю в некоторой области, то вектор $\vec{a}$ – потенциальный вектор, т.е. равен градиенту некоторой скалярной функции φ.

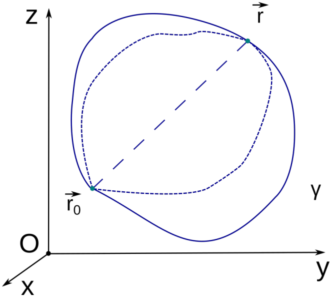
Доказательство.



Теорема

Если циркуляция вектора $\vec{a}$ по любому замкнутому контуру равна нулю в некоторой области, то вектор $\vec{a}$ – потенциальный вектор, т.е. равен градиенту некоторой скалярной функции φ.

Доказательство.



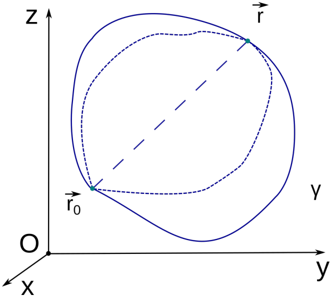
Введем $\varphi(\vec{r})$ вида:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) + \int\limits_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

Теорема

Если циркуляция вектора $\vec{a}$ по любому замкнутому контуру равна нулю в некоторой области, то вектор $\vec{a}$ – потенциальный вектор, т.е. равен градиенту некоторой скалярной функции φ.

Доказательство.



Введем $\varphi(\vec{r})$ вида:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) + \int\limits_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

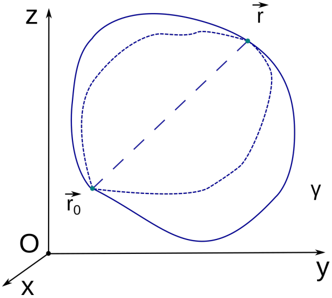
Интеграл в правой части не зависит от пути интегрирования в силу условия теоремы.

Критерий потенциальности векторного поля

Теорема

Если циркуляция вектора $\vec{a}$ по любому замкнутому контуру равна нулю в некоторой области, то вектор $\vec{a}$ – потенциальный вектор, т.е. равен градиенту некоторой скалярной функции φ.

Доказательство.



Введем $\varphi(\vec{r})$ вида:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) + \int\limits_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

Интеграл в правой части не зависит от пути интегрирования в силу условия теоремы.

Полный дифференциал введенной функции

$$d\varphi = \vec{a} \cdot d\vec{r},$$

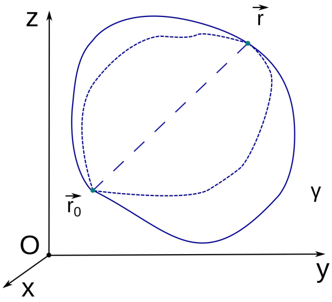
справедлив для любых $d\vec{r}$,

Критерий потенциальности векторного поля

Теорема

Если циркуляция вектора $\vec{a}$ по любому замкнутому контуру равна нулю в некоторой области, то вектор $\vec{a}$ – потенциальный вектор, т.е. равен градиенту некоторой скалярной функции φ.

Доказательство.



Введем $\varphi(\vec{r})$ вида:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) + \int\limits_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

Интеграл в правой части не зависит от пути интегрирования в силу условия теоремы.

Полный дифференциал введенной функции

$$d\varphi = \vec{a} \cdot d\vec{r},$$

справедлив для любых $d\vec{r}$, значит $\vec{a} = \operatorname{grad} \varphi$. $\square$

Производная вдоль направления

Пусть задана кривая $\vec{r} = \vec{r}(s)$, параметризованная параметром, связанным с длиной дуги s:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Производная вдоль направления

Пусть задана кривая $\vec{r} = \vec{r}(s)$, параметризованная параметром, связанным с длиной дуги s:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Вектор $\vec{s} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ – единичный касательный вектор.

Производная вдоль направления

Пусть задана кривая $\vec{r} = \vec{r}(s)$, параметризованная параметром, связанным с длиной дуги s:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Вектор $\vec{s} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ – единичный касательный вектор.
Введем оператор

$$\vec{s} \cdot \nabla = \cos(\vec{s}, x)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(\vec{s}, y)\frac{\partial}{\partial y} + \cos(\vec{s}, z)\frac{\partial}{\partial z},$$

Производная вдоль направления

Пусть задана кривая $\vec{r} = \vec{r}(s)$, параметризованная параметром, связанным с длиной дуги s:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Вектор $\vec{s} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ – единичный касательный вектор.
Введем оператор

$$\vec{s}\cdot\nabla = \cos(\vec{s},x)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(\vec{s},y)\frac{\partial}{\partial y} + \cos(\vec{s},z)\frac{\partial}{\partial z},$$

тогда

$$\frac{\partial}{\partial s}a(x(s),y(s),z(s)) = \vec{s}\cdot\operatorname{grad}a = (\vec{s}\cdot\nabla)a.$$

Производная вдоль направления

Пусть задана кривая $\vec{r} = \vec{r}(s)$, параметризованная параметром, связанным с длиной дуги s:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Вектор $\vec{s} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ – единичный касательный вектор.
Введем оператор

$$\vec{s} \cdot \nabla = \cos(\vec{s}, x)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(\vec{s}, y)\frac{\partial}{\partial y} + \cos(\vec{s}, z)\frac{\partial}{\partial z},$$

тогда

$$\frac{\partial}{\partial s} a(x(s), y(s), z(s)) = \vec{s} \cdot \operatorname{grad} a = (\vec{s} \cdot \nabla) a.$$

Определение

Оператор

$$(\vec{v} \cdot \nabla) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

называется производной вдоль направления,

Производная вдоль направления

Пусть задана кривая $\vec{r} = \vec{r}(s)$, параметризованная параметром, связанным с длиной дуги s:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s).$$

Вектор $\vec{s} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ – единичный касательный вектор.
Введем оператор

$$\vec{s} \cdot \nabla = \cos(\vec{s}, x) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(\vec{s}, y) \frac{\partial}{\partial y} + \cos(\vec{s}, z) \frac{\partial}{\partial z},$$

тогда

$$\frac{\partial}{\partial s} a(x(s), y(s), z(s)) = \vec{s} \cdot \operatorname{grad} a = (\vec{s} \cdot \nabla) a.$$

Определение

Оператор

$$(\vec{v} \cdot \nabla) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$$

называется производной вдоль направления, где $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ *– заданное направление.*

Пример

Рассмотрим нестационарное движение жидкости, в которой определено нестационарное скалярное поле $\varphi(t, x, y, z)$,

Пример

Рассмотрим нестационарное движение жидкости, в которой определено нестационарное скалярное поле $\varphi(t, x, y, z)$, тогда введем понятие местной производной

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} =$$

Пример

Рассмотрим нестационарное движение жидкости, в которой определено нестационарное скалярное поле $\varphi(t, x, y, z)$, тогда введем понятие местной производной

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t + \Delta t, M) - \varphi(t, M)}{\Delta t}.$$

Пример

Рассмотрим нестационарное движение жидкости, в которой определено нестационарное скалярное поле $\varphi(t, x, y, z)$, тогда введем понятие местной производной

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t + \Delta t, M) - \varphi(t, M)}{\Delta t}.$$

Если же рассматривать изменения функции, перемещаясь вместе с жидкостью, тогда

$$\frac{d\varphi}{dt} =$$

Пример

Рассмотрим нестационарное движение жидкости, в которой определено нестационарное скалярное поле $\varphi(t, x, y, z)$, тогда введем понятие местной производной

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t + \Delta t, M) - \varphi(t, M)}{\Delta t}.$$

Если же рассматривать изменения функции, перемещаясь вместе с жидкостью, тогда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t + \Delta t, \vec{r}_0 + \vec{v}\Delta t) - \varphi(t, \vec{r}_0)}{\Delta t}.$$

Пример

Рассмотрим нестационарное движение жидкости, в которой определено нестационарное скалярное поле $\varphi(t, x, y, z)$, тогда введем понятие местной производной

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t + \Delta t, M) - \varphi(t, M)}{\Delta t}.$$

Если же рассматривать изменения функции, перемещаясь вместе с жидкостью, тогда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t + \Delta t, \vec{r}_0 + \vec{v}\Delta t) - \varphi(t, \vec{r}_0)}{\Delta t}.$$

И тогда

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\varphi, \quad \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{a}.$$