Дифференциальные операторы в криволинейной системе координат

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

QR-код презентации

30 апреля 2021 г.

Аннотация

Криволинейные координаты. Коэффициенты Ляме. Дифференциальные операторы в криволинейных координатах.

Криволинейные системы координат

Определение

Три скалярные величины (q_1, q_2, q_3), однозначно определяющие точку в пространстве, называются криволинейными координатами точки.

Определение

Три скалярные величины (q_1, q_2, q_3), однозначно определяющие точку в пространстве, называются криволинейными координатами точки.

Пусть в декартовой системе координат точка имеет координаты (x, y, z), тогда существует взаимнооднозначное отображение, связывающее различные системы координат:

Криволинейные системы координат

Определение

Три скалярные величины (q_1, q_2, q_3), однозначно определяющие точку в пространстве, называются криволинейными координатами точки.

Пусть в декартовой системе координат точка имеет координаты (x, y, z), тогда существует взаимнооднозначное отображение, связывающее различные системы координат:

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3), \\ y = y(q_1, q_2, q_3), \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases}$$

Определение

Три скалярные величины (q_1, q_2, q_3), однозначно определяющие точку в пространстве, называются криволинейными координатами точки.

Пусть в декартовой системе координат точка имеет координаты (x, y, z), тогда существует взаимнооднозначное отображение, связывающее различные системы координат:

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3), \\ y = y(q_1, q_2, q_3), \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \quad \text{и наоборот} \quad \begin{cases} q_1 = q_1(x, y, z), \\ q_2 = q_2(x, y, z), \\ q_3 = q_3(x, y, z). \end{cases}$$

Линии и поверхности уровня

Определение

Линии $q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$ *называются поверхностями уровня или координатными поверхностями.*

Линии и поверхности уровня

Определение

Линии $q_1 = \mathrm{const}$, $q_2 = \mathrm{const}$, $q_3 = \mathrm{const}$ *называются* ***поверхностями уровня*** *или* ***координатными поверхностями****. А линии пересечения двух таких поверхностей называются* ***координатными линиями****.*

Линии и поверхности уровня

Определение

Линии $q_1 = \mathrm{const}$, $q_2 = \mathrm{const}$, $q_3 = \mathrm{const}$ *называются поверхностями уровня или координатными поверхностями. А линии пересечения двух таких поверхностей называются координатными линиями.*

Цилиндрическая система координат

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Линии и поверхности уровня

Определение

Линии $q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$ *называются* ***поверхностями уровня*** *или* ***координатными поверхностями****. А линии пересечения двух таких поверхностей называются* ***координатными линиями****.*

Цилиндрическая система координат

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \varphi = \arctan y/x, \\ z = z. \end{cases}$$

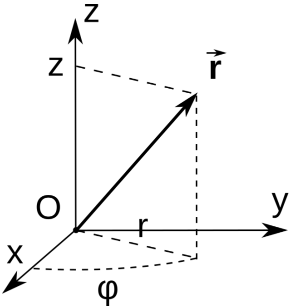
Определение

Линии $q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$ *называются поверхностями уровня или координатными поверхностями. А линии пересечения двух таких поверхностей называются координатными линиями.*

Цилиндрическая система координат

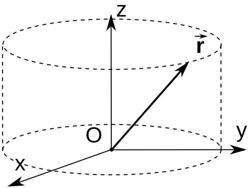
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \arctan y/x, \\ z = z. \end{cases}$$



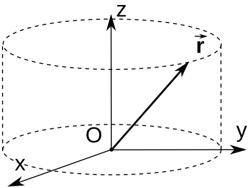
Координатные линии и координатные поверхности в цилиндрической системе координат

$r = const$	$\varphi = const$	$z = const$

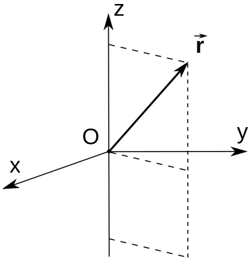


Координатные линии и координатные поверхности в цилиндрической системе координат

$r = const$



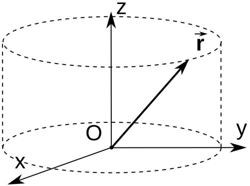
$\varphi = const$



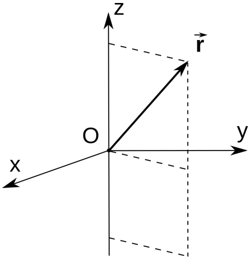
$z = const$

Координатные линии и координатные поверхности в цилиндрической системе координат

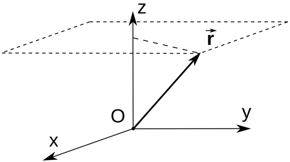
$r = const$

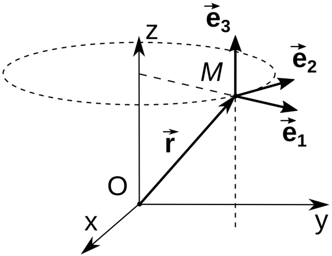


$\varphi = const$



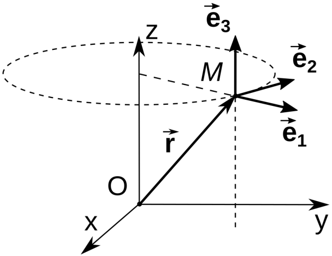
$z = const$





$\vec{e}_3$
z
$\vec{e}_2$
M
$\vec{e}_1$
$\vec{r}$
O
x
y

Коэффициенты Ляме

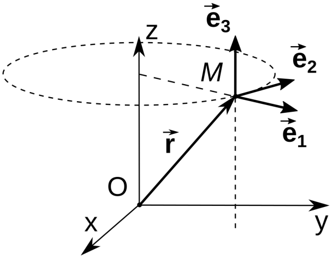


Рассмотрим фиксированную точку M, и введем единичные векторы

$$\vec{e}_1, \quad \vec{e}_2, \quad \vec{e}_3$$
$$(||\vec{e}_1|| = ||\vec{e}_2|| = ||\vec{e}_3|| = 1),$$

направленные вдоль касательных к координатным линиям в сторону возрастания координат.

Коэффициенты Ляме



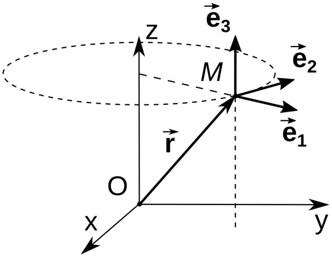
Рассмотрим фиксированную точку M, и введем единичные векторы

$$\vec{e}_1, \quad \vec{e}_2, \quad \vec{e}_3$$
$$(||\vec{e}_1|| = ||\vec{e}_2|| = ||\vec{e}_3|| = 1),$$

направленные вдоль касательных к координатным линиям в сторону возрастания координат.

Пусть

$$\vec{r} = x(q_1, q_2, q_3)\vec{\mathbf{i}} + y(q_1, q_2, q_3)\vec{\mathbf{j}} + z(q_1, q_2, q_3)\vec{\mathbf{k}},$$



Рассмотрим фиксированную точку M, и введем единичные векторы

$$\vec{e}_1, \quad \vec{e}_2, \quad \vec{e}_3$$
$$(||\vec{e}_1|| = ||\vec{e}_2|| = ||\vec{e}_3|| = 1),$$

направленные вдоль касательных к координатным линиям в сторону возрастания координат.

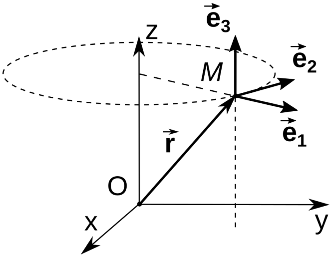
Пусть

$$\vec{r} = x(q_1, q_2, q_3)\vec{\mathbf{i}} + y(q_1, q_2, q_3)\vec{\mathbf{j}} + z(q_1, q_2, q_3)\vec{\mathbf{k}},$$

тогда рассмотрим

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\vec{\mathbf{k}} =$$

Коэффициенты Ляме



Рассмотрим фиксированную точку M, и введем единичные векторы

$$\vec{e}_1, \quad \vec{e}_2, \quad \vec{e}_3$$
$$(||\vec{e}_1|| = ||\vec{e}_2|| = ||\vec{e}_3|| = 1),$$

направленные вдоль касательных к координатным линиям в сторону возрастания координат.

Пусть

$$\vec{r} = x(q_1, q_2, q_3)\vec{\mathbf{i}} + y(q_1, q_2, q_3)\vec{\mathbf{j}} + z(q_1, q_2, q_3)\vec{\mathbf{k}},$$

тогда рассмотрим

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\vec{\mathbf{k}} = H_1 \vec{e}_1, \quad H_1 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right|.$$

Коэффициенты Ляме

Общие формулы

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = H_i \vec{e}_i, \quad H_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Коэффициенты Ляме

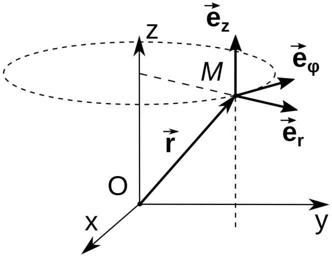
Общие формулы

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = H_i \vec{e}_i, \quad H_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2 \quad (i = 1, 2, 3).$$

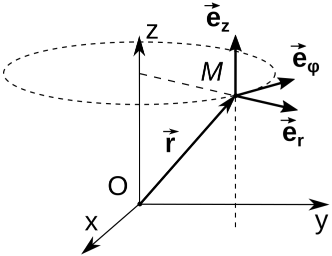
Определение

Величины H_i $(i = 1, 2, 3)$ *называются коэффициентами Ляме.*

Коэффициенты Ляме для цилиндрической системы координат

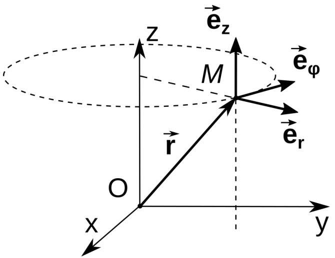


Коэффициенты Ляме для цилиндрической системы координат



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

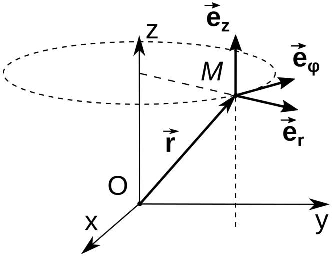
Коэффициенты Ляме для цилиндрической системы координат



$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1,$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Коэффициенты Ляме для цилиндрической системы координат

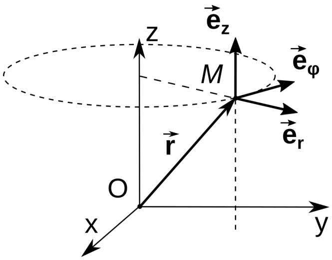


$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1,$$

$$H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r,$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Коэффициенты Ляме для цилиндрической системы координат



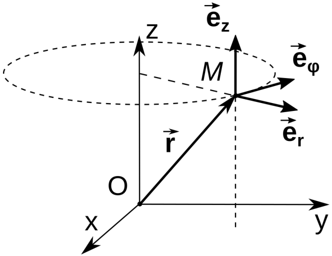
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1,$$

$$H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r,$$

$$H_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1.$$

Коэффициенты Ляме для цилиндрической системы координат



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1,$$

$$H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r,$$

$$H_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1.$$

Из построения векторов $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ и $\vec{e}_z$ видно, что они взаимно ортогональны.

Предположение об ортогональности криволинейной системы координат

Далее будем рассматривать только ортогональные криволинейные системы координат:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$$(i, j = 1, 2, 3).$$

Предположение об ортогональности криволинейной системы координат

Далее будем рассматривать только ортогональные криволинейные системы координат:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$$(i, j = 1, 2, 3).$$

δ_{ij} называется символом Кронекера.

Градиент в криволинейной системе координат

Из выражений

$$dq_i = \operatorname{grad} q_i \cdot d\vec{r} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

Градиент в криволинейной системе координат

Из выражений

$$dq_i = \operatorname{grad} q_i \cdot d\vec{r} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

и

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \tag{2}$$

Градиент в криволинейной системе координат

Из выражений

$$dq_i = \operatorname{grad} q_i \cdot d\vec{r} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

и

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \tag{2}$$

подстановкой (2) в (1) при $i = 1$ получим

$$dq_1 = \operatorname{grad} q_1 \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \right)$$

Градиент в криволинейной системе координат

Из выражений

$$dq_i = \operatorname{grad} q_i \cdot d\vec{r} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

и

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \tag{2}$$

подстановкой (2) в (1) при $i = 1$ получим

$$dq_1 = \operatorname{grad} q_1 \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \right)$$

$$0 = \left(\operatorname{grad} q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} - 1 \right) dq_1 + \left(\operatorname{grad} q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \right) dq_2 + \left(\operatorname{grad} q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right) dq_3$$

Градиент в криволинейной системе координат

Из выражений

$$dq_i = \operatorname{grad} q_i \cdot d\vec{r} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

и

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \tag{2}$$

подстановкой (2) в (1) при $i = 1$ получим

$$dq_1 = \operatorname{grad} q_1 \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \right)$$

$$0 = \left(\operatorname{grad} q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} - 1 \right) dq_1 + \left(\operatorname{grad} q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \right) dq_2 + \left(\operatorname{grad} q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right) dq_3$$

В силу произвольности dq_i $(i = 1, 2, 3)$

$$\operatorname{grad} q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = 1, \quad \operatorname{grad} q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = 0, \quad \operatorname{grad} q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = 0.$$

Градиент в криволинейной системе координат

$$\operatorname{grad} q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = 1, \quad \operatorname{grad} q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = 0, \quad \operatorname{grad} q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = 0.$$

Градиент в криволинейной системе координат

$$\operatorname{grad} q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = 1, \quad \operatorname{grad} q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = 0, \quad \operatorname{grad} q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = 0.$$

Т.к. $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = H_i \vec{e}_i$ и $\vec{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ взаимноортогональны,

Градиент в криволинейной системе координат

$$\operatorname{grad} q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = 1, \quad \operatorname{grad} q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = 0, \quad \operatorname{grad} q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = 0.$$

Т.к. $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = H_i \vec{e}_i$ и $\vec{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ взаимноортогональны, тогда

$$\operatorname{grad} q_1 = \frac{1}{H_1} \vec{e}_1.$$

Градиент в криволинейной системе координат

$$\operatorname{grad} q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = 1, \quad \operatorname{grad} q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = 0, \quad \operatorname{grad} q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = 0.$$

Т.к. $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = H_i \vec{e}_i$ и $\vec{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ взаимноортогональны, тогда

$$\operatorname{grad} q_1 = \frac{1}{H_1} \vec{e}_1.$$

Повторяя проделанную процедуру для $i = 2, 3$, получим что

$$\operatorname{grad} q_i = \frac{1}{H_i} \vec{e}_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Градиент в криволинейной системе координат

Воспользуемся для разложения градиента

$$\operatorname{grad}\varphi(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\operatorname{grad} q_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\operatorname{grad} q_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\operatorname{grad} q_3.$$

Градиент в криволинейной системе координат

Воспользуемся для разложения градиента

$$\operatorname{grad}\varphi(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\operatorname{grad} q_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\operatorname{grad} q_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\operatorname{grad} q_3.$$

И тогда

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\vec{e}_1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_2}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_3}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}.$$

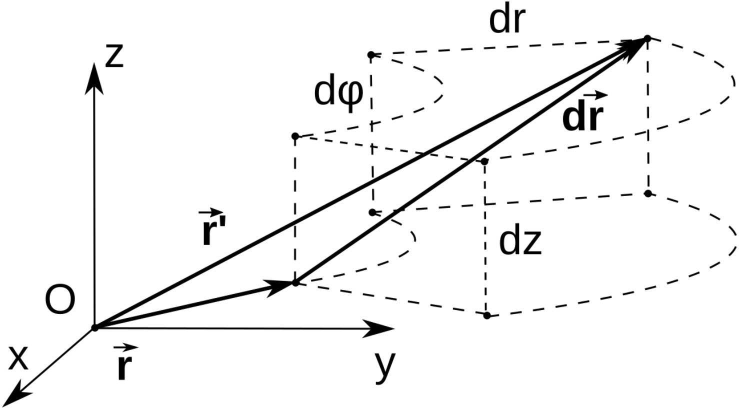
Криволинейные составляющие вектора

В локальной системе координат произвольный вектор можно разложить по базису

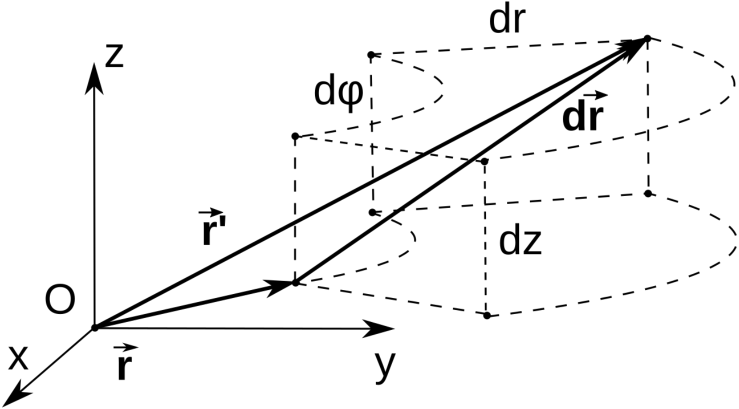
$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3.$$

Скалярные величины a_i $(i = 1, 2, 3)$ называются криволинейными составляющими вектора $\vec{a}$.

Элементарный параллелепипед

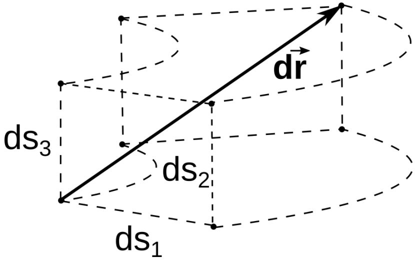


Элементарный параллелепипед

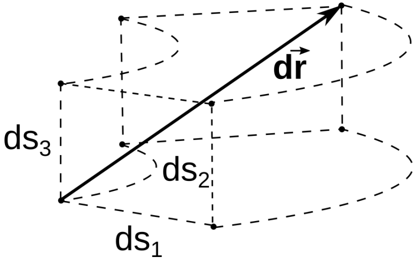


$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 = H_1 dq_1 \vec{e}_1 + H_2 dq_2 \vec{e}_2 + H_3 dq_3 \vec{e}_3.$$

Длины сторон элементарного параллелепипеда



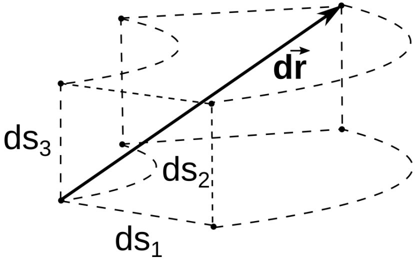
Длины сторон элементарного параллелепипеда



Отсюда составляющие длины

$$ds_i = H_i dq_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Длины сторон элементарного параллелепипеда



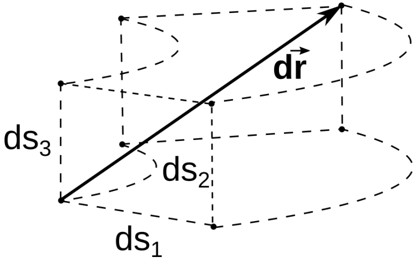
Отсюда составляющие длины

$$ds_i = H_i dq_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

и

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2.$$

Длины сторон элементарного параллелепипеда



Отсюда составляющие длины

$$ds_i = H_i dq_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

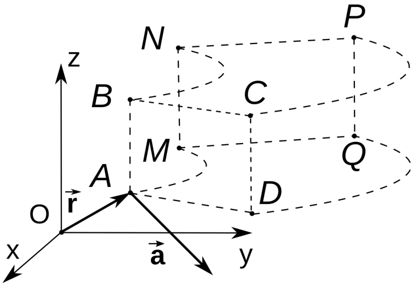
и

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2.$$

Объем элементарного параллелепипеда

$$dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

Дивергенция в криволинейной системе координат



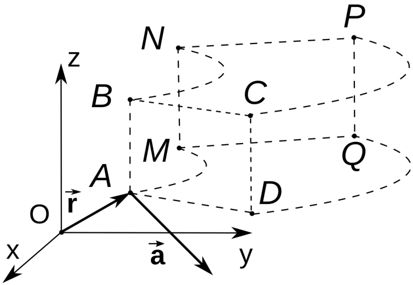
$$\operatorname{div}\vec{a} = \lim_{V\to 0}\frac{\int_S \vec{a}\cdot\vec{n}dS}{V},$$

где $\vec{a}$ – заданное векторное поле; $\vec{n}$ – вектор внешней единичной нормали; S – площадь поверхности объема V.

Для элементарного параллелепипеда $ABCDMNPQ$

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{n}_{ABCD}S_{ABCD} + \dots}{V_{ABCDPQNM}}.$$

Дивергенция в криволинейной системе координат



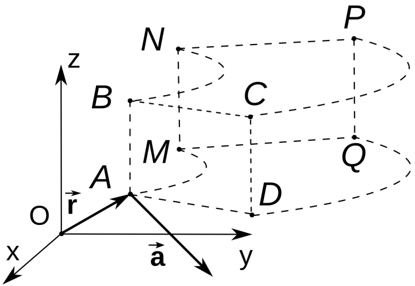
$$\operatorname{div}\vec{a} = \lim_{V\to 0}\frac{\int\limits_S \vec{a}\cdot\vec{n}dS}{V},$$

где $\vec{a}$ – заданное векторное поле; $\vec{n}$ – вектор внешней единичной нормали; S – площадь поверхности объема V.

Потоки векторов через элементарные площадки равны

$$\vec{a}\cdot\vec{n}_{ABCD}S_{ABCD} = -a_2 ds_1 ds_3 = -a_2 H_1 H_3 dq_1 dq_3,$$
$$\vec{a}\cdot\vec{n}_{AMNB}S_{AMNB} = -a_1 ds_2 ds_3 = -a_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3,$$
$$\vec{a}\cdot\vec{n}_{AMQD}S_{AMQD} = -a_3 ds_1 ds_2 = -a_3 H_1 H_2 dq_1 dq_2,$$

Дивергенция в криволинейной системе координат



$$\operatorname{div}\vec{a} = \lim_{V\to 0}\frac{\int_S \vec{a}\cdot\vec{n}dS}{V},$$

где $\vec{a}$ – заданное векторное поле; $\vec{n}$ – вектор внешней единичной нормали; S – площадь поверхности объема V.

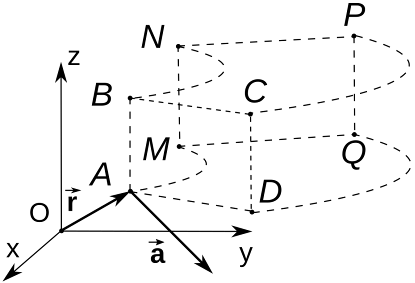
Потоки векторов через элементарные площадки равны

$$\vec{a}\cdot\vec{n}_{MNPQ}S_{MNPQ} = (a_2H_1H_3 + \frac{\partial a_2H_1H_3}{\partial q_2}dq_2)dq_1dq_3,$$

$$\vec{a}\cdot\vec{n}_{DCPQ}S_{DCPQ} = (a_1H_2H_3 + \frac{\partial a_1H_2H_3}{\partial q_1}dq_1)dq_2dq_3,$$

$$\vec{a}\cdot\vec{n}_{BNPC}S_{BNPC} = (a_3H_1H_2 + \frac{\partial a_3H_1H_2}{\partial q_3}dq_3)dq_1dq_2.$$

Дивергенция в криволинейной системе координат



$$\operatorname{div}\vec{a} = \lim_{V\to 0}\frac{\int\limits_S \vec{a}\cdot\vec{n}dS}{V},$$

где $\vec{a}$ – заданное векторное поле; $\vec{n}$ – вектор внешней единичной нормали; S – площадь поверхности объема V.

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{n}_{ABCD}S_{ABCD} + \vec{a}\cdot\vec{n}_{MNPQ}S_{MNPQ}) + \ldots}{V_{ABCDPQNM}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\partial a_2 H_1 H_3}{\partial q_2}dq_2dq_1dq_3 + \dfrac{\partial a_1 H_2 H_3}{\partial q_1}dq_1dq_2dq_3 + \dfrac{\partial a_3 H_1 H_2}{\partial q_3}dq_3dq_1dq_2}{H_1H_2H_3dq_1dq_2dq_3} =$$

$$= \frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial(H_2H_3a_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(H_1H_3a_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(H_1H_2a_3)}{\partial q_3}\right).$$