Линейные преобразования векторных пространств и их свойства.

Верещагин Антон Сергеевич
д-р. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

QR-код презентации

13 февраля 2024 г.

Аннотация

Векторное пространство. Отображение n-мерного вектора в m-мерный. Линейные операторы. Матрица, соответствующая линейному оператору. Сложение и умножение линейных операторов. Преобразования координат. Эквивалентные матрицы.

Определение группы

Определение

Группой называется упорядоченная двойка $\{X, \cdot\}$, где X – множество элементов, а $\cdot : X^2 \to X$ – операция между элементами множества X, обладающая следующими свойствами:

1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $(\forall a, b, c \in X)$
2) $\exists 0 \in X \colon 0 + x = x + 0 = x$ $(\forall x \in X)$
3) $\forall x \in X\, \exists (-x) \in X \colon x \cdot (-x) = (-x) \cdot x = 0$

Если выполнено дополнительно следующее свойство, то группа называется **абелевой**:

4. $x \cdot y = y \cdot x$ $(\forall x, y \in X)$

Определение

Векторным пространством называется упорядоченная тройка $\{V, R, \cdot\}$, где V – абелева группа по сложению с элементами, которые будем обозначать $\vec{x}$ и называть векторами. R – поле скаляров. $\cdot : R \times V \to V$ – однозначно определенная операция умножения скаляра на вектор. При этом должны выполнятся следующие условия:

Векторное пространство

Определение

Векторным пространством называется упорядоченная тройка $\{V, R, \cdot\}$, где V – абелева группа по сложению с элементами, которые будем обозначать $\vec{x}$ и называть векторами. R – поле скаляров. $\cdot : R \times V \to V$ – однозначно определенная операция умножения скаляра на вектор. При этом должны выполнятся следующие условия:

1) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad \forall x \in V$

Векторное пространство

Определение

Векторным пространством называется упорядоченная тройка $\{V, R, \cdot\}$, где V – абелева группа по сложению с элементами, которые будем обозначать $\vec{x}$ и называть векторами. R – поле скаляров. $\cdot : R \times V \to V$ – однозначно определенная операция умножения скаляра на вектор. При этом должны выполнятся следующие условия:

1) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad \forall x \in V$
2) $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{x}$

Векторное пространство

Определение

Векторным пространством называется упорядоченная тройка $\{V, R, \cdot\}$, где V – абелева группа по сложению с элементами, которые будем обозначать $\vec{x}$ и называть векторами. R – поле скаляров. $\cdot : R \times V \to V$ – однозначно определенная операция умножения скаляра на вектор. При этом должны выполнятся следующие условия:

1) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad \forall x \in V$
2) $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{x}$
3) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$

Определение

Векторным пространством называется упорядоченная тройка $\{V, R, \cdot\}$, где V – абелева группа по сложению с элементами, которые будем обозначать $\vec{x}$ и называть векторами. R – поле скаляров. $\cdot : R \times V \to V$ – однозначно определенная операция умножения скаляра на вектор. При этом должны выполнятся следующие условия:

1) $1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad \forall x \in V$
2) $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{x}$
3) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$
4) $\alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$

Линейная зависимость и линейная независимость векторов

Определение

Линейной комбинацией векторов $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n$ с коэффициетами α_1, …, α_n называется следующая сумма

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{x}_n$$

Линейная зависимость и линейная независимость векторов

Определение

Векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, …называются **линейно зависимыми**, если существуют такие скаляры α, β, γ, …, причем один из них отличен от 0, такие что

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} + \ldots = \vec{0}.$$

Линейная зависимость и линейная независимость векторов

Определение

Векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, …называются **линейно зависимыми**, если существуют такие скаляры α, β, γ, …, причем один из них отличен от 0, такие что

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} + \ldots = \vec{0}.$$

Определение

Векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, …называются **линейно независимыми**, если из равенства

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} + \ldots = \vec{0}$$

следует, что все $\alpha = \beta = \gamma = \ldots = 0$.

Размерность и базис векторного пространства

Определение

Векторное пространство V называется **n-мерным**, если в нем существуют n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ будут линейно зависимы. n-мерное векторное пространство обозначается V^n.

Размерность и базис векторного пространства

Определение

Векторное пространство V называется **n-мерным**, если в нем существуют n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ будут линейно зависимы. n-мерное векторное пространство обозначается V^n.

Определение

Базисом n-мерного пространства V^n называется система любых n линейно независимых векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

Пример конечномерного пространства

Пространство $\mathbb{R}^3$

Рассмотрим четыре вектора в пространстве $\mathbb{R}^3$

$$\vec{x_i} \quad = \quad \{x_i^1, x_i^2, x_i^3\} \; (i = 1, \ldots, 4)$$

Ранг матрицы, составленный из координат этих векторов не может превышать 3, значит любые 4 вектора в $\mathbb{R}^3$ будут всегда линейно зависимы.

Базис в $\mathbb{R}^3$

Базисом в $\mathbb{R}^3$ будут три любые линейно независимых вектора, например,

$$\begin{aligned} \vec{e_1} &= \{1, 0, 0\}, \\ \vec{e_2} &= \{0, 1, 0\}, \\ \vec{e_3} &= \{0, 0, 1\}. \end{aligned}$$

Разложение вектора по базису пространства

Теорема

В вектороном n-мерном пространстве V^n каждый вектор может быть единственным способом представлен в виде линейной комбинации векторов базиса.

Разложение вектора по базису пространства

Доказательство.

Рассмотрим базис векторного пространства V^n $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ и произвольный вектор $\vec{x} \in \mathrm{V}^n$.

$\square$

Разложение вектора по базису пространства

Доказательство.

Рассмотрим базис векторного пространства V^n $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ и произвольный вектор $\vec{x} \in \mathrm{V}^n$.

Система векторов $\vec{x}, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ состоит из $n+1$ вектора, поэтому является линейно зависимой.

$\square$

Доказательство.

Рассмотрим базис векторного пространства V^n $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ и произвольный вектор $\vec{x} \in \mathrm{V}^n$.

Система векторов $\vec{x}, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ состоит из $n+1$ вектора, поэтому является линейно зависимой.

Следовательно существуют коэффициенты $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, β, причем один из $\alpha_i \neq 0$ (пусть $i = 1$) и $\beta \neq 0$, такие что

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n + \beta\vec{x} = 0.$$

□

Разложение вектора по базису пространства

Доказательство.

Рассмотрим базис векторного пространства V^n $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ и произвольный вектор $\vec{x} \in \mathrm{V}^n$.

Система векторов $\vec{x}, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ состоит из $n+1$ вектора, поэтому является линейно зависимой.

Следовательно существуют коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, β, причем один из $\alpha_i \neq 0$ (пусть $i = 1$) и $\beta \neq 0$, такие что

$$\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n + \beta\vec{x} = 0.$$

Следовательно

$$\vec{x} = -\frac{\alpha_1}{\beta}\vec{e_1} - \frac{\alpha_2}{\beta}\vec{e_2} - \ldots - \frac{\alpha_n}{\beta}\vec{e_n}.$$

□

Единственность разложения по базису

Доказательство.

Пусть вектор

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \ldots + \beta_n\vec{e}_n,$$

где $\alpha_i \neq \beta_i$ для некоторого i.

$\square$

Единственность разложения по базису

Доказательство.

Пусть вектор

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \ldots + \beta_n\vec{e}_n,$$

где $\alpha_i \neq \beta_i$ для некоторого i.

$(\alpha_1-\beta_1)\vec{e}_1+(\alpha_2-\beta_2)\vec{e}_2+\ldots+(\alpha_n-\beta_n)\vec{e}_n = 0$, где $\alpha_i-\beta_i \neq 0$.

$\square$

Единственность разложения по базису

Доказательство.

Пусть вектор

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \ldots + \beta_n\vec{e}_n,$$

где $\alpha_i \neq \beta_i$ для некоторого i.

$(\alpha_1-\beta_1)\vec{e}_1+(\alpha_2-\beta_2)\vec{e}_2+\ldots+(\alpha_n-\beta_n)\vec{e}_n = 0$, где $\alpha_i-\beta_i \neq 0$.

Это невозможно в силу линейной независимости базиса $\vec{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

□

Единственность разложения по базису

Доказательство.

Пусть вектор

$$\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \ldots + \beta_n\vec{e}_n,$$

где $\alpha_i \neq \beta_i$ для некоторого i.

$(\alpha_1 - \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{e}_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\vec{e}_n = 0$, где $\alpha_i - \beta_i \neq 0$.

Это невозможно в силу линейной независимости базиса $\vec{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

$\square$

Определение

Коэффициенты в разложении вектора $\vec{x}$ по базису $\vec{e}_i$ называются координатами вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Теорема о линейной независимости векторов

Теорема (о линейной независимости векторов)

Для того, чтобы векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ в пространстве R^n были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы, составленной из координат этих векторов в произвольном базисе, был равен числу этих векторов. В противном случае они линейно зависимы.

Линейный оператор

Определение

Отображение одного конечномерного пространства в другое $\mathcal{A} : \mathrm{R}^n \to \mathrm{S}^m$ называется линейным, если

$$\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y}) = \mathcal{A}\vec{x}+\mathcal{A}\vec{y}, \quad \mathcal{A}(\alpha\vec{x}) = \alpha\mathcal{A}\vec{x}.$$

Матрица линейного оператора

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ – линейное преобразования n-мерного векторного пространства R^n в m-мерное векторное пространство S^m

$$\mathcal{A} : \mathrm{R}^n \to \mathrm{S}^m.$$

Матрица линейного оператора

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ – линейное преобразования n-мерного векторного пространства R^n в m-мерное векторное пространство S^m

$$\mathcal{A} : \mathrm{R}^n \to \mathrm{S}^m.$$

Пусть $\vec{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ – базис R^n, а $\vec{g}_k$ $(k = 1, \ldots, m)$ – базис S^m.

Матрица линейного оператора

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ – линейное преобразования n-мерного векторного пространства R^n в m-мерное векторное пространство S^m

$$\mathcal{A} : \mathrm{R}^n \to \mathrm{S}^m.$$

Пусть $\vec{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ – базис R^n, а $\vec{g}_k$ $(k = 1, \ldots, m)$ – базис S^m. Пусть для произвольного вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$ $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} \in \mathrm{S}^m$.

Матрица линейного оператора

Теорема

Пусть $\mathcal{A}$ – линейное преобразования n-мерного векторного пространства R^n в m-мерное векторное пространство S^m

$$\mathcal{A} : \mathrm{R}^n \to \mathrm{S}^m.$$

Пусть $\vec{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ – базис R^n, а $\vec{g}_k$ $(k = 1, \ldots, m)$ – базис S^m.
Пусть для произвольного вектора $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$ $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} \in \mathrm{S}^m$.
Тогда существует матрица A размера $m \times n$ такая, что

$$y = Ax,$$

где y – вектор столбец, составленный из координат вектора $\vec{y}$ в базисе $\vec{g}_k$, x – вектор столбец, составленный из координат вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_i$.

Доказательство теоремы представлении линейного оператора

Доказательство.

Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} \in \mathrm{S}^m$ для некоторого $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$.

Доказательство теоремы представлении линейного оператора

Доказательство.

Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} \in \mathrm{S}^m$ для некоторого $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$.

Тогда $\vec{y} = \sum\limits_{k=1}^{m} y_k \vec{g}_k$, $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$.

Доказательство теоремы представлении линейного оператора

Доказательство.

Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} \in \mathrm{S}^m$ для некоторого $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$.

Тогда $\vec{y} = \sum\limits_{k=1}^{m} y_k \vec{g}_k, \vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$.

В силу линейности оператора $\mathcal{A}$:

$$\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i (\mathcal{A}\vec{e}_i).$$

Доказательство теоремы представлении линейного оператора

Доказательство.

Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} \in \mathrm{S}^m$ для некоторого $\vec{x} \in \mathrm{R}^n$.

Тогда $\vec{y} = \sum\limits_{k=1}^{m} y_k \vec{g}_k, \vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$.

В силу линейности оператора $\mathcal{A}$:

$$\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i (\mathcal{A}\vec{e}_i).$$

Т.к. $\mathcal{A}\vec{e}_i \in \mathrm{S}^m$, тогда существуют такие числа α_{ij}, что

$$\mathcal{A}\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \vec{g}_j \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Доказательство теоремы представлении линейного оператора

Доказательство.

Тогда

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i(\mathcal{A}\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\vec{g}_j \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_{ij} \right) \vec{g}_j.$$

Доказательство теоремы представлении линейного оператора

Доказательство.

Тогда

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i(\mathcal{A}\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\vec{g}_j \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_{ij} \right) \vec{g}_j.$$

Из единственности представления вектора $\vec{y}$ по базису $\vec{g}_k$ $(k = 1, \ldots, m)$ следует, что

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_{ij}.$$

$\square$

Иллюстрация теоремы о представлении линейного оператора

Пусть x – вектор столбец, составленный из координат, вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_i$ x_i.

Иллюстрация теоремы о представлении линейного оператора

Пусть x – вектор столбец, составленный из координат, вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_i$ x_i.

Пусть y – вектор столбец, составленный из координат, вектора $\vec{y}$ в базисе $\vec{g}_k$ y_k.

Иллюстрация теоремы о представлении линейного оператора

Пусть x – вектор столбец, составленный из координат, вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_i$ x_i.

Пусть y – вектор столбец, составленный из координат, вектора $\vec{y}$ в базисе $\vec{g}_k$ y_k.

Пусть $A = (a_{ij}) - m \times n$ матрица, составленная из координат образов векторов $\mathcal{A}\vec{e}_i$ по столбцам $(a_{ij} = \alpha_{ji})$

$$A = \left(\ \mathcal{A}\vec{e}_1 \ \middle| \ \mathcal{A}\vec{e}_2 \ \middle| \ \ldots \ \middle| \ \mathcal{A}\vec{e}_n \ \right) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \ldots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

Иллюстрация теоремы о представлении линейного оператора

Тогда

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Сложение операторов

Определение

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – линейные операторы, действующие из пространства R^n в S^m.

Сложение операторов

Определение

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – линейные операторы, действующие из пространства R^n в S^m.

Оператор $\mathcal{C} : R^n \to S^m$ называется суммой $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ и обозначается

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B},$$

Сложение операторов

Определение

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – линейные операторы, действующие из пространства R^n в S^m.

Оператор $\mathcal{C} : \mathrm{R}^n \to \mathrm{S}^m$ называется суммой $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ и обозначается

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B},$$

тогда и только тогда, когда

$$\forall \vec{x} \in R^n \quad \mathcal{C}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{x} + \mathcal{B}\vec{x}.$$

Произведение операторов

Определение

Пусть $\mathcal{A} : \mathrm{R}^n \to \mathrm{S}^m$, $\mathcal{B} : \mathrm{Q}^l \to \mathrm{R}^n$ – линейные операторы.

Произведение операторов

Определение

Пусть $\mathcal{A} : \mathrm{R}^n \to \mathrm{S}^m$, $\mathcal{B} : \mathrm{Q}^l \to \mathrm{R}^n$ – линейные операторы.

Оператор $\mathcal{C} \ : \ \mathrm{Q}^l \ \to \ \mathrm{S}^m$ называется произведением $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ и обозначается

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B},$$

Произведение операторов

Определение

Пусть $\mathcal{A} : \mathrm{R}^n \to \mathrm{S}^m$, $\mathcal{B} : \mathrm{Q}^l \to \mathrm{R}^n$ – линейные операторы.

Оператор $\mathcal{C} : \mathrm{Q}^l \to \mathrm{S}^m$ называется произведением $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ и обозначается

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B},$$

тогда и только тогда, когда

$$\forall \vec{x} \in \mathrm{Q}^l \quad \mathcal{C}\vec{x} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\vec{x}).$$

Связь между координатами векторов в различных базисах

Пусть $\vec{e}_i, \vec{g}_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ два различных базиса векторного пространства R^n.

Связь между координатами векторов в различных базисах

Пусть $\vec{e}_i$, $\vec{g}_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ два различных базиса векторного пространства R^n.

Существуют числа t_{ij} и матрица $T = \left(t_{ij}\right)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ $(|T| \neq 0)$, такая что

Связь между координатами векторов в различных базисах

Пусть $\vec{e}_i$, $\vec{g}_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ два различных базиса векторного пространства R^n.

Существуют числа t_{ij} и матрица $T = (t_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ $(|T| \neq 0)$, такая что

$$\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}\vec{g}_j \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Связь между координатами векторов в различных базисах

Пусть $\vec{e}_i$, $\vec{g}_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ два различных базиса векторного пространства R^n.

Существуют числа t_{ij} и матрица $T = (t_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ $(|T| \neq 0)$, такая что

$$\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}\vec{g}_j \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Пусть $\vec{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i'\vec{g}_i$ – два различных представления одного вектора в различных базисах.

Связь между координатами векторов в различных базисах

Рассмотрим

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij} \vec{g}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i t_{ij} \right) \vec{g}_j.$$

Связь между координатами векторов в различных базисах

Рассмотрим

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij} \vec{g}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i t_{ij} \right) \vec{g}_j .$$

Из единственности разложения $\vec{x}$ по базису $\vec{g}_j$ следует, что

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} x_i t_{ij},$$

Связь между координатами векторов в различных базисах

Рассмотрим

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij} \vec{g}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i t_{ij} \right) \vec{g}_j.$$

Из единственности разложения $\vec{x}$ по базису $\vec{g}_j$ следует, что

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} x_i t_{ij},$$

что в матричном виде запишется

$$x' = T^{\mathrm{t}} x,$$

где x', x – вектор столбцы координат вектора $\vec{x}$ в соответствующих базисах.

Эквивалентные матрицы

Определение

Матрицы A, B размера $m \times n$ называются **эквивалентными**, если существуют матрица P размера $m \times m$ ($|P| \neq 0$) и матрица Q ($|Q| \neq 0$) размера $n \times n$ такие, что

$$A = PBQ.$$

Связь между матричным представлением линейного оператора в различных базисах

Теорема

Матрицы, соответвующие линейному оператору $\mathcal{A} : \mathrm{R}^n \to \mathrm{S}^m$, в различных базисах пространств R^n и S^m эквивалентны.

Доказательство.

Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_n$ базис пространства R^n, а векторы $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_m$ и $\vec{g}'_1, \ldots, \vec{g}'_m$ базисы пространства S^m.

Доказательство.

Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_n$ базис пространства R^n, а векторы $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_m$ и $\vec{g}'_1, \ldots, \vec{g}'_m$ базисы пространства S^m.

Пусть $\mathcal{A}$ – линейной преобразование R^n в S^m.

Доказательство.

Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_n$ базис пространства R^n, а векторы $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_m$ и $\vec{g}'_1, \ldots, \vec{g}'_m$ базисы пространства S^m.

Пусть $\mathcal{A}$ – линейной преобразование R^n в S^m.

Пусть A – матрица преобразования, соответствующая оператору $\mathcal{A}$ в базисах e и g, а A' – в базисах e' и g'.

Доказательство.

Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_n$ базис пространства R^n, а векторы $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_m$ и $\vec{g}'_1, \ldots, \vec{g}'_m$ базисы пространства S^m.

Пусть $\mathcal{A}$ – линейной преобразование R^n в S^m.

Пусть A – матрица преобразования, соответствующая оператору $\mathcal{A}$ в базисах e и g, а A' – в базисах e' и g'.

Пусть для некоторых $\vec{x}$ из R^n и $\vec{y}$ из S^m

$$\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}.$$

Доказательство.

Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_n$ базис пространства R^n, а векторы $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_m$ и $\vec{g}'_1, \ldots, \vec{g}'_m$ базисы пространства S^m.

Пусть $\mathcal{A}$ – линейной преобразование R^n в S^m.

Пусть A – матрица преобразования, соответствующая оператору $\mathcal{A}$ в базисах e и g, а A' – в базисах e' и g'.

Пусть для некоторых $\vec{x}$ из R^n и $\vec{y}$ из S^m

$$\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}.$$

Тогда в матричной записи в соответствующих базисах $y = Ax$ и $y' = A'x'$

Доказательство.

Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_n$ базис пространства R^n, а векторы $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_m$ и $\vec{g}'_1, \ldots, \vec{g}'_m$ базисы пространства S^m.

Пусть $\mathcal{A}$ – линейной преобразование R^n в S^m.

Пусть A – матрица преобразования, соответствующая оператору $\mathcal{A}$ в базисах e и g, а A' – в базисах e' и g'.

Пусть для некоторых $\vec{x}$ из R^n и $\vec{y}$ из S^m

$$\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}.$$

Тогда в матричной записи в соответствующих базисах $y = Ax$ и $y' = A'x'$

Пусть Q – $n \times n$-матрица перехода между координатами векторов в установленных базисах $x = Qx'$ в R^n,

Доказательство.

Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_n$ базис пространства R^n, а векторы $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_m$ и $\vec{g}'_1, \ldots, \vec{g}'_m$ базисы пространства S^m.

Пусть $\mathcal{A}$ – линейной преобразование R^n в S^m.

Пусть A – матрица преобразования, соответствующая оператору $\mathcal{A}$ в базисах e и g, а A' – в базисах e' и g'.

Пусть для некоторых $\vec{x}$ из R^n и $\vec{y}$ из S^m

$$\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}.$$

Тогда в матричной записи в соответствующих базисах $y = Ax$ и $y' = A'x'$

Пусть Q – $n \times n$-матрица перехода между координатами векторов в установленных базисах $x = Qx'$ в R^n,

а N – $m \times m$-матрица перехода между координатами вектора в S^m $y = Ny'$.

$\square$

Доказательство.

С одной стороны

$$y = Ax = AQx'$$

Доказательство.

С одной стороны
$$y = Ax = AQx'$$
С другой стороны
$$y = Ny' = NA'x'.$$

Доказательство.

С одной стороны
$$y = Ax = AQx'$$

С другой стороны
$$y = Ny' = NA'x'.$$

Таким образом,
$$\forall x' \quad NA'x' = AQx'.$$

Доказательство.

С одной стороны

$$y = Ax = AQx'$$

С другой стороны

$$y = Ny' = NA'x'.$$

Таким образом,

$$\forall x' \quad NA'x' = AQx'.$$

Следовательно

$$A' = N^{-1}AQ.$$

□

Теорема об эквивалентности матриц

Теорема (об эквивалентности матриц)
Для того чтобы две прямоугольные матрицы A и B одинаковых размеров $m \times n$ были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их ранги совпадали $r_A = r_B$.