

Линейные преобразования векторных пространств и их свойства.

Верецагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

QR-код презентации



21 февраля 2020 г.

Векторное пространство. Отображение n -мерного вектора в m -мерный. Линейные операторы. Матрица, соответствующая линейному оператору. Сложение и умножение линейных операторов. Преобразования координат. Эквивалентные матрицы.

Определение группы

Определение

Группой называется упорядоченная двойка $\{X, \cdot\}$, где X – множество элементов, а $\cdot : X^2 \rightarrow X$ – операция между элементами множества X , обладающая следующими свойствами:

1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \ (\forall a, b, c \in X)$
2. $\exists 0 \in X: 0 + x = x + 0 = x \ (\forall x \in X)$
3. $\forall x \in X \exists (-x) \in X: x \cdot (-x) = (-x) \cdot x = 0$

Если выполнено дополнительно следующее свойство, то группа называется **абелевой**:

4. $x \cdot y = y \cdot x \ (\forall x, y \in X)$

Векторное пространство

Определение

Векторным пространством называется упорядоченная тройка $\{V, R, \cdot\}$, где V – абелева группа по сложению с элементами, которые будем обозначать \vec{x} и называть векторами. R – поле скаляров. $\cdot : R \times V \rightarrow V$ – однозначно определенная операция умножения скаляра на вектор. При этом должны выполняться следующие условия:

Векторное пространство

Определение

Векторным пространством называется упорядоченная тройка $\{V, R, \cdot\}$, где V – абелева группа по сложению с элементами, которые будем обозначать \vec{x} и называть векторами. R – поле скаляров. $\cdot : R \times V \rightarrow V$ – однозначно определенная операция умножения скаляра на вектор. При этом должны выполняться следующие условия:

1. $1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad \forall x \in V$

Векторное пространство

Определение

Векторным пространством называется упорядоченная тройка $\{V, R, \cdot\}$, где V – абелева группа по сложению с элементами, которые будем обозначать \vec{x} и называть векторами. R – поле скаляров. $\cdot : R \times V \rightarrow V$ – однозначно определенная операция умножения скаляра на вектор. При этом должны выполняться следующие условия:

1. $1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad \forall x \in V$
2. $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{x}$

Векторное пространство

Определение

Векторным пространством называется упорядоченная тройка $\{V, R, \cdot\}$, где V – абелева группа по сложению с элементами, которые будем обозначать \vec{x} и называть векторами. R – поле скаляров. $\cdot : R \times V \rightarrow V$ – однозначно определенная операция умножения скаляра на вектор. При этом должны выполняться следующие условия:

1. $1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad \forall x \in V$
2. $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{x}$
3. $(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$

Векторное пространство

Определение

Векторным пространством называется упорядоченная тройка $\{V, R, \cdot\}$, где V – абелева группа по сложению с элементами, которые будем обозначать \vec{x} и называть векторами. R – поле скаляров. $\cdot : R \times V \rightarrow V$ – однозначно определенная операция умножения скаляра на вектор. При этом должны выполняться следующие условия:

1. $1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \quad \forall x \in V$
2. $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{x}$
3. $(\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$
4. $\alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$

Линейная зависимость и линейная независимость векторов

Определение

Линейной комбинацией векторов $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ с коэффициентами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ называется следующая сумма

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n$$

Линейная зависимость и линейная независимость векторов

Определение

Векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$ называются **линейно зависимыми**, если существуют такие скаляры $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, причем один из них отличен от 0, такие что

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} + \dots = \vec{0}.$$

Линейная зависимость и линейная независимость векторов

Определение

Векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$ называются **линейно зависимыми**, если существуют такие скаляры $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, причем один из них отличен от 0, такие что

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} + \dots = \vec{0}.$$

Определение

Векторы $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$ называются **линейно независимыми**, если из равенства

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} + \dots = \vec{0}$$

следует, что все $\alpha = \beta = \gamma = \dots = 0$.

Размерность и базис векторного пространства

Определение

Векторное пространство V называется **n -мерным**, если в нем существуют n линейно независимых векторов, а любые $n + 1$ будут линейно зависимы. n -мерное векторное пространство обозначается V^n .

Размерность и базис векторного пространства

Определение

Векторное пространство V называется **n -мерным**, если в нем существуют n линейно независимых векторов, а любые $n + 1$ будут линейно зависимы. n -мерное векторное пространство обозначается V^n .

Определение

Базисом n -мерного пространства V^n называется система любых n линейно независимых векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.

Пример конечномерного пространства

Пространство \mathbb{R}^3

Рассмотрим четыре вектора в пространстве \mathbb{R}^3

$$\vec{x}_i = \{x_i^1, x_i^2, x_i^3\} \quad (i = 1, \dots, 4)$$

Ранг матрицы, составленный из координат этих векторов не может превышать 3, значит любые 4 вектора в \mathbb{R}^3 будут всегда линейно зависимы.

Базис в \mathbb{R}^3

Базисом в \mathbb{R}^3 будут три любые линейно независимых вектора, например,

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \{1, 0, 0\}, \\ \vec{e}_2 &= \{0, 1, 0\}, \\ \vec{e}_3 &= \{0, 0, 1\}.\end{aligned}$$

Разложение вектора по базису пространства

Теорема

В векторном n -мерном пространстве V^n каждый вектор может быть единственным способом представлен в виде линейной комбинации векторов базиса.

Разложение вектора по базису пространства

Доказательство.

- Рассмотрим базис векторного пространства V^n $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ и произвольный вектор $\vec{x} \in V^n$.



Разложение вектора по базису пространства

Доказательство.

- Рассмотрим базис векторного пространства V^n $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ и произвольный вектор $\vec{x} \in V^n$.
- Система векторов $\vec{x}, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ состоит из $n + 1$ вектора, поэтому является линейно зависимой.



Разложение вектора по базису пространства

Доказательство.

- Рассмотрим базис векторного пространства V^n $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ и произвольный вектор $\vec{x} \in V^n$.
- Система векторов $\vec{x}, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ состоит из $n + 1$ вектора, поэтому является линейно зависимой.
- Следовательно существуют коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta$, причем один из $\alpha_i \neq 0$ (пусть $i = 1$) и $\beta \neq 0$, такие что

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n + \beta \vec{x} = 0.$$



Разложение вектора по базису пространства

Доказательство.

- Рассмотрим базис векторного пространства V^n $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ и произвольный вектор $\vec{x} \in V^n$.
- Система векторов $\vec{x}, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ состоит из $n + 1$ вектора, поэтому является линейно зависимой.
- Следовательно существуют коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta$, причем один из $\alpha_i \neq 0$ (пусть $i = 1$) и $\beta \neq 0$, такие что

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n + \beta \vec{x} = 0.$$

- Следовательно

$$\vec{x} = -\frac{\alpha_1}{\beta} \vec{e}_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} \vec{e}_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\beta} \vec{e}_n.$$



Единственность разложения по базису

Доказательство.

- Пусть вектор

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \dots + \beta_n \vec{e}_n,$$

где $\alpha_i \neq \beta_i$ для некоторого i .



Единственность разложения по базису

Доказательство.

- Пусть вектор

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \dots + \beta_n \vec{e}_n,$$

где $\alpha_i \neq \beta_i$ для некоторого i .

- $(\alpha_1 - \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{e}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\vec{e}_n = 0$, где $\alpha_i - \beta_i \neq 0$.



Единственность разложения по базису

Доказательство.

- Пусть вектор

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \dots + \beta_n \vec{e}_n,$$

где $\alpha_i \neq \beta_i$ для некоторого i .

- $(\alpha_1 - \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{e}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\vec{e}_n = 0$, где $\alpha_i - \beta_i \neq 0$.
- Это невозможно в силу линейной независимости базиса \vec{e}_i ($i = 1, \dots, n$).



Единственность разложения по базису

Доказательство.

- Пусть вектор

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \dots + \beta_n \vec{e}_n,$$

где $\alpha_i \neq \beta_i$ для некоторого i .

- $(\alpha_1 - \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{e}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\vec{e}_n = 0$, где $\alpha_i - \beta_i \neq 0$.
- Это невозможно в силу линейной независимости базиса \vec{e}_i ($i = 1, \dots, n$).



Определение

Коэффициенты в разложении вектора \vec{x} по базису \vec{e}_i называются координатами вектора \vec{x} в базисе \vec{e}_i ($i = 1, \dots, n$).

Теорема о линейной независимости векторов

Теорема (о линейной независимости векторов)

Для того, чтобы векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m$ в пространстве R^n были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы, составленной из координат этих векторов в произвольном базисе, был равен числу этих векторов. В противном случае они линейно зависимы.

Линейный оператор

Определение

Отображение одного конечномерного пространства в другое $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется линейным, если

$$\mathcal{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathcal{A}\vec{x} + \mathcal{A}\vec{y}, \quad \mathcal{A}(\alpha\vec{x}) = \alpha\mathcal{A}\vec{x}.$$

Матрица линейного оператора

Теорема

Пусть \mathcal{A} – линейное преобразование n -мерного векторного пространства R^n в m -мерное векторное пространство S^m

$$\mathcal{A} : R^n \rightarrow S^m.$$

Матрица линейного оператора

Теорема

Пусть \mathcal{A} – линейное преобразование n -мерного векторного пространства R^n в m -мерное векторное пространство S^m

$$\mathcal{A} : R^n \rightarrow S^m.$$

Пусть \vec{e}_i ($i = 1, \dots, n$) – базис R^n , а \vec{g}_k ($k = 1, \dots, m$) – базис S^m .

Матрица линейного оператора

Теорема

Пусть \mathcal{A} – линейное преобразование n -мерного векторного пространства R^n в m -мерное векторное пространство S^m

$$\mathcal{A} : R^n \rightarrow S^m.$$

Пусть \vec{e}_i ($i = 1, \dots, n$) – базис R^n , а \vec{g}_k ($k = 1, \dots, m$) – базис S^m .

Пусть для произвольного вектора $\vec{x} \in R^n$ $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} \in S^m$.

Матрица линейного оператора

Теорема

Пусть \mathcal{A} – линейное преобразование n -мерного векторного пространства R^n в m -мерное векторное пространство S^m

$$\mathcal{A} : R^n \rightarrow S^m.$$

Пусть \vec{e}_i ($i = 1, \dots, n$) – базис R^n , а \vec{g}_k ($k = 1, \dots, m$) – базис S^m .

Пусть для произвольного вектора $\vec{x} \in R^n$ $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} \in S^m$.

Тогда существует матрица A размера $m \times n$ такая, что

$$y = Ax,$$

где y – вектор столбец, составленный из координат вектора \vec{y} в базисе \vec{g}_k , x – вектор столбец, составленный из координат вектора \vec{x} в базисе \vec{e}_i .

Доказательство теоремы представления линейного оператора

Доказательство.

Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} \in S^m$ для некоторого $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство теоремы представления линейного оператора

Доказательство.

Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} \in S^m$ для некоторого $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Тогда $\vec{y} = \sum_{k=1}^m y_k \vec{g}_k$, $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$.

Доказательство теоремы представления линейного оператора

Доказательство.

Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} \in S^m$ для некоторого $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Тогда $\vec{y} = \sum_{k=1}^m y_k \vec{g}_k$, $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$.

В силу линейности оператора \mathcal{A} :

$$\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A} \left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i (\mathcal{A}\vec{e}_i).$$

Доказательство теоремы представления линейного оператора

Доказательство.

Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} \in S^m$ для некоторого $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Тогда $\vec{y} = \sum_{k=1}^m y_k \vec{g}_k$, $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$.

В силу линейности оператора \mathcal{A} :

$$\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A} \left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i (\mathcal{A}\vec{e}_i).$$

Т.к. $\mathcal{A}\vec{e}_i \in S^m$, тогда существуют такие числа α_{ij} , что

$$\mathcal{A}\vec{e}_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \vec{g}_j \quad (i = 1, \dots, n).$$

Доказательство теоремы представления линейного оператора

Доказательство.

Тогда

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i (\mathcal{A} \vec{e}_i) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \vec{g}_j \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n x_i \alpha_{ij} \right) \vec{g}_j.$$

Доказательство теоремы представления линейного оператора

Доказательство.

Тогда

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i (\mathcal{A} \vec{e}_i) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \vec{g}_j \right) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n x_i \alpha_{ij} \right) \vec{g}_j.$$

Из единственности представления вектора \vec{y} по базису \vec{g}_k ($k = 1, \dots, m$) следует, что

$$y_j = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_{ij}.$$



Иллюстрация теоремы о представлении линейного оператора

Пусть x – вектор столбец, составленный из координат, вектора \vec{x} в базисе \vec{e}_i x_i .

Иллюстрация теоремы о представлении линейного оператора

Пусть x – вектор столбец, составленный из координат, вектора \vec{x} в базисе $\vec{e}_i x_i$.

Пусть y – вектор столбец, составленный из координат, вектора \vec{y} в базисе $\vec{g}_k y_k$.

Иллюстрация теоремы о представлении линейного оператора

Пусть x – вектор столбец, составленный из координат, вектора \vec{x} в базисе \vec{e}_i x_i .

Пусть y – вектор столбец, составленный из координат, вектора \vec{y} в базисе \vec{e}_k y_k .

Пусть $A = (a_{ij})$ – $m \times n$ матрица, составленная из координат образов векторов $A\vec{e}_i$ по столбцам ($a_{ij} = \alpha_{ji}$)

$$A = (A\vec{e}_1 \mid A\vec{e}_2 \mid \dots \mid A\vec{e}_n) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

Иллюстрация теоремы о представлении линейного оператора

Тогда

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Сложение операторов

Определение

Пусть \mathcal{A}, \mathcal{B} – линейные операторы, действующие из пространства R^n в S^m .

Сложение операторов

Определение

Пусть \mathcal{A}, \mathcal{B} – линейные операторы, действующие из пространства R^n в S^m .

Оператор $\mathcal{C} : R^n \rightarrow S^m$ называется суммой \mathcal{A} и \mathcal{B} и обозначается

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B},$$

Сложение операторов

Определение

Пусть \mathcal{A}, \mathcal{B} – линейные операторы, действующие из пространства R^n в S^m .

Оператор $\mathcal{C} : R^n \rightarrow S^m$ называется суммой \mathcal{A} и \mathcal{B} и обозначается

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B},$$

тогда и только тогда, когда

$$\forall \vec{x} \in R^n \quad \mathcal{C}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{x} + \mathcal{B}\vec{x}.$$

Произведение операторов

Определение

Пусть $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^m$, $\mathcal{B} : \mathbb{Q}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ – линейные операторы.

Произведение операторов

Определение

Пусть $\mathcal{A} : R^n \rightarrow S^m$, $\mathcal{B} : Q^l \rightarrow R^n$ – линейные операторы.

Оператор $\mathcal{C} : Q^l \rightarrow S^m$ называется произведением \mathcal{A} и \mathcal{B} и обозначается

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B},$$

Произведение операторов

Определение

Пусть $\mathcal{A} : R^n \rightarrow S^m$, $\mathcal{B} : Q^l \rightarrow R^n$ – линейные операторы. Оператор $\mathcal{C} : Q^l \rightarrow S^m$ называется произведением \mathcal{A} и \mathcal{B} и обозначается

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B},$$

тогда и только тогда, когда

$$\forall \vec{x} \in Q^l \quad \mathcal{C}\vec{x} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\vec{x}).$$

Связь между координатами векторов в различных базисах

Пусть \vec{e}_i, \vec{g}_j ($i, j = 1, \dots, n$) два различных базиса векторного пространства \mathbb{R}^n .

Связь между координатами векторов в различных базисах

Пусть \vec{e}_i, \vec{g}_j ($i, j = 1, \dots, n$) два различных базиса векторного пространства \mathbb{R}^n .

Существуют числа t_{ij} и матрица $T = (t_{ij})$ ($i, j = 1, \dots, n$) ($|T| \neq 0$), такая что

Связь между координатами векторов в различных базисах

Пусть \vec{e}_i, \vec{g}_j ($i, j = 1, \dots, n$) два различных базиса векторного пространства R^n .

Существуют числа t_{ij} и матрица $T = (t_{ij})$ ($i, j = 1, \dots, n$) ($|T| \neq 0$), такая что

$$\vec{e}_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} \vec{g}_j \quad (i = 1, \dots, n).$$

Связь между координатами векторов в различных базисах

Пусть \vec{e}_i, \vec{g}_j ($i, j = 1, \dots, n$) два различных базиса векторного пространства \mathbb{R}^n .

Существуют числа t_{ij} и матрица $T = (t_{ij})$ ($i, j = 1, \dots, n$) ($|T| \neq 0$), такая что

$$\vec{e}_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} \vec{g}_j \quad (i = 1, \dots, n).$$

Пусть $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n x'_i \vec{g}_i$ – два различных представления одного вектора в различных базисах.

Связь между координатами векторов в различных базисах

Рассмотрим

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n t_{ij} \vec{g}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n x_i t_{ij} \right) \vec{g}_j.$$

Связь между координатами векторов в различных базисах

Рассмотрим

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n t_{ij} \vec{g}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n x_i t_{ij} \right) \vec{g}_j.$$

Из единственности разложения \vec{x} по базису \vec{g}_j следует, что

$$x'_j = \sum_{i=1}^n x_i t_{ij},$$

Связь между координатами векторов в различных базисах

Рассмотрим

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n t_{ij} \vec{g}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n x_i t_{ij} \right) \vec{g}_j.$$

Из единственности разложения \vec{x} по базису \vec{g}_j следует, что

$$x'_j = \sum_{i=1}^n x_i t_{ij},$$

что в матричном виде запишется

$$x' = T^t x,$$

где x' , x – вектор столбцы координат вектора \vec{x} в соответствующих базисах.

Эквивалентные матрицы

Определение

Матрицы A , B размера $m \times n$ называются **эквивалентными**, если существуют матрица P размера $m \times m$ ($|P| \neq 0$) и матрица Q ($|Q| \neq 0$) размера $n \times n$ такие, что

$$A = PBQ.$$

Связь между матричным представлением линейного оператора в различных базисах

Теорема

Матрицы, соответствующие линейному оператору $\mathcal{A} : R^n \rightarrow S^m$, в различных базисах пространств R^n и S^m эквивалентны.

Доказательство.

Пусть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$ базис пространства R^n , а векторы $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_m$ и $\vec{g}'_1, \dots, \vec{g}'_m$ базисы пространства S^m .

Доказательство.

Пусть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$ базис пространства R^n , а векторы $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_m$ и $\vec{g}'_1, \dots, \vec{g}'_m$ базисы пространства S^m .

Пусть \mathcal{A} – линейной преобразование R^n в S^m .

Доказательство.

Пусть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$ базис пространства R^n , а векторы $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_m$ и $\vec{g}'_1, \dots, \vec{g}'_m$ базисы пространства S^m .

Пусть \mathcal{A} – линейное преобразование R^n в S^m .

Пусть A – матрица преобразования, соответствующая оператору \mathcal{A} в базисах e и g , а A' – в базисах e' и g' .

Доказательство.

Пусть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$ базис пространства R^n , а векторы $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_m$ и $\vec{g}'_1, \dots, \vec{g}'_m$ базисы пространства S^m .

Пусть \mathcal{A} – линейное преобразование R^n в S^m .

Пусть A – матрица преобразования, соответствующая оператору \mathcal{A} в базисах e и g , а A' – в базисах e' и g' .

Пусть для некоторых \vec{x} из R^n и \vec{y} из S^m

$$\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}.$$

Доказательство.

Пусть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$ базис пространства R^n , а векторы $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_m$ и $\vec{g}'_1, \dots, \vec{g}'_m$ базисы пространства S^m .

Пусть \mathcal{A} – линейное преобразование R^n в S^m .

Пусть A – матрица преобразования, соответствующая оператору \mathcal{A} в базисах e и g , а A' – в базисах e' и g' .

Пусть для некоторых \vec{x} из R^n и \vec{y} из S^m

$$\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}.$$

Тогда в матричной записи в соответствующих базисах $y = Ax$ и $y' = A'x'$

Доказательство.

Пусть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$ базис пространства R^n , а векторы $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_m$ и $\vec{g}'_1, \dots, \vec{g}'_m$ базисы пространства S^m .

Пусть A – линейное преобразование R^n в S^m .

Пусть A – матрица преобразования, соответствующая оператору A в базисах e и g , а A' – в базисах e' и g' .

Пусть для некоторых \vec{x} из R^n и \vec{y} из S^m

$$\vec{y} = A\vec{x}.$$

Тогда в матричной записи в соответствующих базисах $y = Ax$ и $y' = A'x'$

Пусть Q – $n \times n$ -матрица перехода между координатами векторов в установленных базисах $x = Qx'$ в R^n ,

Доказательство.

Пусть $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n$ базис пространства R^n , а векторы $\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_m$ и $\vec{g}'_1, \dots, \vec{g}'_m$ базисы пространства S^m .

Пусть A – линейное преобразование R^n в S^m .

Пусть A – матрица преобразования, соответствующая оператору A в базисах e и g , а A' – в базисах e' и g' .

Пусть для некоторых \vec{x} из R^n и \vec{y} из S^m

$$\vec{y} = A\vec{x}.$$

Тогда в матричной записи в соответствующих базисах $y = Ax$ и $y' = A'x'$

Пусть Q – $n \times n$ -матрица перехода между координатами векторов в установленных базисах $x = Qx'$ в R^n ,

а N – $m \times m$ -матрица перехода между координатами вектора в S^m $y = Ny'$.



Доказательство.

С одной стороны

$$y = Ax = AQx'$$

Доказательство.

С одной стороны

$$y = Ax = AQx'$$

С другой стороны

$$y = Ny' = NA'x'.$$

Доказательство.

С одной стороны

$$y = Ax = AQx'$$

С другой стороны

$$y = Ny' = NA'x'.$$

Таким образом,

$$\forall x' \quad NA'x' = AQx'.$$

Доказательство.

С одной стороны

$$y = Ax = AQx'$$

С другой стороны

$$y = Ny' = NA'x'.$$

Таким образом,

$$\forall x' \quad NA'x' = AQx'.$$

Следовательно

$$A' = N^{-1}AQ.$$



Теорема об эквивалентности матриц

Теорема (об эквивалентности матриц)

Для того чтобы две прямоугольные матрицы A и B одинаковых размеров $m \times n$ были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их ранги совпадали $r_A = r_B$.