Сведения из теории матриц

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

1 марта 2019 г.

Аннотация

Сведения из теории матриц. Теоремы о разрешимости систем линейных уравнений.

Прямоугольные матрицы

Определение

Прямоугольную таблицу размера $m \times n$ *(*m *строк,* n *столбцов) из действительных чисел будем называть прямоугольной матрицей и обозначать:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ik})_{1 \le i \le m, 1 \le k \le n}.$$

Определитель матрицы

Определение

Если $m = n$, тогда матрица A называется квадратной.

Определение

Определителем квадратной матрицы $A = (a_{ik})_{1 \le i,k \le n}$ называется следующая функция от элементов матрицы:

$$|A| = \det A = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} (-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1,\alpha_1} a_{2,\alpha_2} \ldots a_{n,\alpha_n},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – перестановка чисел от 1 до n, $N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ – число инверсий в перестановке, суммирование проводится по всем перестановкам порядка n.

Разложение по строке или столбцу

В общем случае, определитель можно вычислить, применив следующую рекурсивную формулу:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \bar{M}_j^1,$$

где $\bar{M}_j^1$ – дополнительный минор к элементу a_{1j}. Эта формула называется разложением по 1-ой строке.

Определение
Если $|A| = 0$, *то матрица называется* особенной, *иначе* – неособенной.

Свойства определителя

Свойство

- *Определитель матрицы не меняется при транспонировании матрицы.*
- *Если две строки (столбца) матрицы совпадают, то её определитель равен нулю.*
- *При добавлении к любой строке (столбцу) линейной комбинации других строк (столбцов) определитель не изменится.*
- *Если хотя бы одна строка (столбец) матрицы нулевая, то определитель равен нулю.*
- *Если переставить две строки (столбца) матрицы, то её определитель умножается на (-1).*

Минор матрицы

Определение

Из элементов прямоугольной матрицы A *размера* $m \times n$ *можно составить квадратную матрицу размера* $p \times p$*, выбрав из неё строки с номерами* $i_1, i_2, \ldots, i_p$ *и столбцы с номерами* $k_1, k_2, \ldots, k_p$*. Определитель полученной матрицы называется* минором p-ого порядка*:*

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_p \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \ldots & a_{i_1 k_p} \\ a_{i_2 k_1} & a_{i_2 k_2} & \ldots & a_{i_2 k_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_p k_1} & a_{i_p k_2} & \ldots & a_{i_p k_p} \end{vmatrix}.$$

Определение

Если $i_1 = k_1,\ i_2 = k_2,\ \ldots,\ i_p = k_p$*, то минор называется главным.*

Ранг матрицы

Определение

Наибольший из порядков отличных от нуля миноров называется рангом матрицы A и обозначается r_A.

Свойство

- *Ранг прямоугольной $m \times n$ матрицы A меньше либо равен* $\min(m, n)$*:* $r_A \leq \min(m, n)$.
- *Если у квадратной $n \times n$ матрицы A определитель равен* 0, *тогда $r_A < n$, в противном случае $r_A = n$.*

Произведение матриц

Определение

Произведением $m \times s$ *матрицы* A *на* $s \times n$ *матрицу* B *называется* $m \times n$ *матрица* C*, элементы которой определяются по формулам:*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}, \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n).$$

Теоремы о ранге

Теорема

Ранг произведения двух матриц не превосходит ранги сомножителей, т.е. если $C = AB$, то $r_C \leq \min(r_A, r_B)$.

Теорема

При умножении прямоугольной матрицы слева или справа на неособенную матрицу ранг исходной матрицы не изменяется.

Обратная матрица

Определение

Единичной матрицей E *называют диагональную* $n \times n$ *матрицу с единицами на главной диагонали:*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Определение

Если для квадратной $n \times n$ *матрицы* A *существует матрица* B *такая, что*

$$AB = BA = E,$$

тогда B *называют матрицей обратной к* A *и обозначают* A^{-1}.

Некоторые свойства операций над матрицами

Свойство

- *В общем случае, вообще говоря,* $AB \neq BA$.
- *Для любой квадратной матрицы* A *и соответствующего размера единичной* E: $AE = EA = A$.
- $|AB| = |A||B|$.
- $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.
- *Для квадратной матрицы* A *существует обратная матрица* A^{-1} *тогда и только тогда, когда* $|A| \neq 0$.

Системы линейных уравнений

Систему из m линейных уравнений с n переменными

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_1, \\
\ldots\ldots\ldots &\ldots \ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

можно переписать используя $m \times n$ матрицу $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$, n вектор столбец $x = (x_j)_{1 \le j \le n}$, m вектор столбец $b = (b_i)_{1 \le i \le m}$ в кратком матричном виде

$$Ax = b.$$

Теоремы о единственности решения однородной системы линейных уравнений

Теорема

Пусть A квадратная $n \times n$ матрица, x столбец размера n. Уравнение $Ax = 0$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда матрица A особенная ($|A| = 0$), иначе говоря, когда ранг матрицы A меньше числа неизвестных ($r_A < n$). В противном случае неособенной матрицы ($|A| \neq 0$), иначе говоря, $r_A = n$) оно имеет только нулевое решение.

Теорема

Пусть A прямоугольная $m \times n$ матрица, x столбец размера n. Система линейных уравнений $Ax = 0$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы A меньше числа неизвестных ($r_A < n$). В противном случае ($r_A = n$) она имеет только нулевое решение.

Теорема о разрешимости системы линейных уравнений

Теорема Кронекера-Капелли

Система линейных уравнений $Ax = b$ разрешима тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен рангу матрицы $A|b$, где $A|b$ – расширенная матрица, полученная из матрицы A приписыванием столбца b.

Литература

- *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. Учебник. 17-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2008.
- *Ветлуцкий В. Н.* Специальные разделы высшей математики: учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005.