

Оператор Гамильтона

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

19 апреля 2019 г.

Аннотация

Оператор Гамильтона и его свойства. Дифференциальные операторы первого и второго порядка.

Оператор Гамильтона

Определение

Оператором Гамильтона или *наблой* называется оператор

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Представление дифференциальных операторов через оператор Гамильтона

Пусть $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ и заданы

$$\varphi = \varphi(\vec{r}), \quad \psi = \psi(\vec{r}), \quad \vec{a}(\vec{r}) = a_x(\vec{r})\vec{i} + a_y(\vec{r})\vec{j} + a_z(\vec{r})\vec{k}$$

скалярные и векторное поля в \mathbb{R}^3 .

Представление дифференциальных операторов через оператор Гамильтона

Пусть $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ и заданы

$$\varphi = \varphi(\vec{r}), \quad \psi = \psi(\vec{r}), \quad \vec{a}(\vec{r}) = a_x(\vec{r})\vec{i} + a_y(\vec{r})\vec{j} + a_z(\vec{r})\vec{k}$$

скалярные и векторное поля в \mathbb{R}^3 .

Тогда дифференциальные операторы с помощью оператора Гамильтона можно записать в виде:

$$\text{grad } \varphi =$$

Представление дифференциальных операторов через оператор Гамильтона

Пусть $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ и заданы

$$\varphi = \varphi(\vec{r}), \quad \psi = \psi(\vec{r}), \quad \vec{a}(\vec{r}) = a_x(\vec{r})\vec{i} + a_y(\vec{r})\vec{j} + a_z(\vec{r})\vec{k}$$

скалярные и векторное поля в \mathbb{R}^3 .

Тогда дифференциальные операторы с помощью оператора Гамильтона можно записать в виде:

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi =$$

Представление дифференциальных операторов через оператор Гамильтона

Пусть $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ и заданы

$$\varphi = \varphi(\vec{r}), \quad \psi = \psi(\vec{r}), \quad \vec{a}(\vec{r}) = a_x(\vec{r})\vec{i} + a_y(\vec{r})\vec{j} + a_z(\vec{r})\vec{k}$$

скалярные и векторное поля в \mathbb{R}^3 .

Тогда дифференциальные операторы с помощью оператора Гамильтона можно записать в виде:

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k},$$

Представление дифференциальных операторов через оператор Гамильтона

Пусть $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ и заданы

$$\varphi = \varphi(\vec{r}), \quad \psi = \psi(\vec{r}), \quad \vec{a}(\vec{r}) = a_x(\vec{r})\vec{i} + a_y(\vec{r})\vec{j} + a_z(\vec{r})\vec{k}$$

скалярные и векторное поля в \mathbb{R}^3 .

Тогда дифференциальные операторы с помощью оператора Гамильтона можно записать в виде:

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k},$$

$$\text{div } \vec{a} =$$

Представление дифференциальных операторов через оператор Гамильтона

Пусть $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ и заданы

$$\varphi = \varphi(\vec{r}), \quad \psi = \psi(\vec{r}), \quad \vec{a}(\vec{r}) = a_x(\vec{r})\vec{i} + a_y(\vec{r})\vec{j} + a_z(\vec{r})\vec{k}$$

скалярные и векторное поля в \mathbb{R}^3 .

Тогда дифференциальные операторы с помощью оператора Гамильтона можно записать в виде:

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k},$$

$$\text{div } \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} =$$

Представление дифференциальных операторов через оператор Гамильтона

Пусть $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ и заданы

$$\varphi = \varphi(\vec{r}), \quad \psi = \psi(\vec{r}), \quad \vec{a}(\vec{r}) = a_x(\vec{r})\vec{i} + a_y(\vec{r})\vec{j} + a_z(\vec{r})\vec{k}$$

скалярные и векторное поля в \mathbb{R}^3 .

Тогда дифференциальные операторы с помощью оператора Гамильтона можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}, \\ \operatorname{div} \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \end{aligned}$$

Представление ротора через оператор Гамильтона

$$\text{rot } \vec{a} =$$

Представление ротора через оператор Гамильтона

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \times \vec{a} =$$

Представление ротора через оператор Гамильтона

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

Представление ротора через оператор Гамильтона

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Предварительные замечания

Пусть C – константа, тогда

$$\nabla(C\varphi) =$$

Предварительные замечания

Пусть C – константа, тогда

$$\nabla(C\varphi) = \vec{i} \frac{\partial C\varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial C\varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial C\varphi}{\partial z} =$$

Предварительные замечания

Пусть C – константа, тогда

$$\nabla(C\varphi) = \vec{i} \frac{\partial C\varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial C\varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial C\varphi}{\partial z} = C \left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) =$$

Предварительные замечания

Пусть C – константа, тогда

$$\nabla(C\varphi) = \vec{i} \frac{\partial C\varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial C\varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial C\varphi}{\partial z} = C \left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = C \nabla \varphi,$$

Предварительные замечания

Пусть C – константа, тогда

$$\nabla(C\varphi) = \vec{i}\frac{\partial C\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial C\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial C\varphi}{\partial z} = C \left(\vec{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = C\nabla\varphi,$$

$$\nabla \cdot (C\vec{a}) =$$

Предварительные замечания

Пусть C – константа, тогда

$$\nabla(C\varphi) = \vec{i}\frac{\partial C\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial C\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial C\varphi}{\partial z} = C \left(\vec{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = C\nabla\varphi,$$

$$\nabla \cdot (C\vec{a}) = \frac{\partial Ca_x}{\partial x} + \frac{\partial Ca_y}{\partial y} + \frac{\partial Ca_z}{\partial z} =$$

Предварительные замечания

Пусть C – константа, тогда

$$\nabla(C\varphi) = \vec{i}\frac{\partial C\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial C\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial C\varphi}{\partial z} = C \left(\vec{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = C\nabla\varphi,$$

$$\nabla \cdot (C\vec{a}) = \frac{\partial Ca_x}{\partial x} + \frac{\partial Ca_y}{\partial y} + \frac{\partial Ca_z}{\partial z} = C \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) =$$

Предварительные замечания

Пусть C – константа, тогда

$$\nabla(C\varphi) = \vec{i}\frac{\partial C\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial C\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial C\varphi}{\partial z} = C \left(\vec{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = C\nabla\varphi,$$

$$\nabla \cdot (C\vec{a}) = \frac{\partial Ca_x}{\partial x} + \frac{\partial Ca_y}{\partial y} + \frac{\partial Ca_z}{\partial z} = C \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) = C\nabla \cdot \vec{a}.$$

Предварительные замечания

Пусть C – константа, тогда

$$\nabla(C\varphi) = \vec{i}\frac{\partial C\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial C\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial C\varphi}{\partial z} = C \left(\vec{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = C\nabla\varphi,$$

$$\nabla \cdot (C\vec{a}) = \frac{\partial Ca_x}{\partial x} + \frac{\partial Ca_y}{\partial y} + \frac{\partial Ca_z}{\partial z} = C \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) = C\nabla \cdot \vec{a}.$$

Аналогично

$$\nabla \times (C\vec{a}) = C\nabla \times \vec{a}.$$

Предварительные замечания

Пусть $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$ – постоянный вектор,

Предварительные замечания

Пусть $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$ – постоянный вектор, тогда

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{c}) =$$

Предварительные замечания

Пусть $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$ – постоянный вектор, тогда

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{c}) = \frac{\partial \varphi c_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi c_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi c_z}{\partial z} =$$

Предварительные замечания

Пусть $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$ – постоянный вектор, тогда

$$\nabla \cdot (\varphi \vec{c}) = \frac{\partial \varphi c_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi c_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi c_z}{\partial z} = \left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \cdot \vec{c} =$$

Предварительные замечания

Пусть $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$ – постоянный вектор, тогда

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\varphi \vec{c}) &= \frac{\partial \varphi c_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi c_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi c_z}{\partial z} = \left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \cdot \vec{c} = \\ &= \vec{c} \cdot \nabla \varphi,\end{aligned}$$

Предварительные замечания

Пусть $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$ – постоянный вектор, тогда

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\varphi \vec{c}) &= \frac{\partial \varphi c_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi c_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi c_z}{\partial z} = \left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \cdot \vec{c} = \\ &= \vec{c} \cdot \nabla \varphi,\end{aligned}$$

$$\nabla \times (\varphi \vec{c}) =$$

Предварительные замечания

Пусть $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$ – постоянный вектор, тогда

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\varphi \vec{c}) &= \frac{\partial \varphi c_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi c_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi c_z}{\partial z} = \left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \cdot \vec{c} = \\ &= \vec{c} \cdot \nabla \varphi,\end{aligned}$$

$$\nabla \times (\varphi \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi c_x & \varphi c_y & \varphi c_z \end{vmatrix} =$$

Предварительные замечания

Пусть $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$ – постоянный вектор, тогда

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\varphi \vec{c}) &= \frac{\partial \varphi c_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi c_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi c_z}{\partial z} = \left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \cdot \vec{c} = \\ &= \vec{c} \cdot \nabla \varphi,\end{aligned}$$

$$\nabla \times (\varphi \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi c_x & \varphi c_y & \varphi c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} =$$

Предварительные замечания

Пусть $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$ – постоянный вектор, тогда

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\varphi \vec{c}) &= \frac{\partial \varphi c_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi c_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi c_z}{\partial z} = \left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \cdot \vec{c} = \\ &= \vec{c} \cdot \nabla \varphi,\end{aligned}$$

$$\nabla \times (\varphi \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi c_x & \varphi c_y & \varphi c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \nabla \varphi \times \vec{c}.$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\text{grad } \varphi\psi =$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\text{grad } \varphi\psi = \nabla(\varphi\psi) =$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\text{grad } \varphi\psi = \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) =$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\text{grad } \varphi\psi = \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi =$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \varphi\psi &= \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi = \\ &= \psi \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{grad} \psi,\end{aligned}$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \varphi\psi &= \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi = \\ &= \psi \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{grad} \psi,\end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \varphi \vec{a} =$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \varphi\psi &= \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi = \\ &= \psi \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{grad} \psi,\end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \varphi \vec{a} = \nabla \cdot (\varphi \vec{a}) =$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \varphi\psi &= \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi = \\ &= \psi \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{grad} \psi,\end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \varphi\vec{a} = \nabla \cdot (\varphi\vec{a}) = \nabla \cdot (\varphi_c\vec{a}) + \nabla \cdot (\varphi\vec{a}_c) =$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \varphi\psi &= \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi = \\ &= \psi \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{grad} \psi,\end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \varphi\vec{a} = \nabla \cdot (\varphi\vec{a}) = \nabla \cdot (\varphi_c\vec{a}) + \nabla \cdot (\varphi\vec{a}_c) = \varphi(\nabla \cdot \vec{a}) + \nabla\varphi \cdot \vec{a} =$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \varphi\psi &= \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi = \\ &= \psi \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{grad} \psi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \varphi\vec{a} &= \nabla \cdot (\varphi\vec{a}) = \nabla \cdot (\varphi_c\vec{a}) + \nabla \cdot (\varphi\vec{a}_c) = \varphi(\nabla \cdot \vec{a}) + \nabla\varphi \cdot \vec{a} = \\ &= \varphi \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} \varphi,\end{aligned}$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \varphi \psi &= \nabla(\varphi \psi) = \nabla(\varphi \psi_c) + \nabla(\varphi_c \psi) = \psi \nabla \varphi + \varphi \nabla \psi = \\ &= \psi \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{grad} \psi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \varphi \vec{a} &= \nabla \cdot (\varphi \vec{a}) = \nabla \cdot (\varphi_c \vec{a}) + \nabla \cdot (\varphi \vec{a}_c) = \varphi (\nabla \cdot \vec{a}) + \nabla \varphi \cdot \vec{a} = \\ &= \varphi \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} \varphi,\end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} \varphi \vec{a} =$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \varphi\psi &= \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi = \\ &= \psi \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{grad} \psi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \varphi\vec{a} &= \nabla \cdot (\varphi\vec{a}) = \nabla \cdot (\varphi_c\vec{a}) + \nabla \cdot (\varphi\vec{a}_c) = \varphi(\nabla \cdot \vec{a}) + \nabla\varphi \cdot \vec{a} = \\ &= \varphi \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} \varphi,\end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} \varphi\vec{a} = \nabla \times (\varphi\vec{a}) =$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \varphi\psi &= \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi = \\ &= \psi \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{grad} \psi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \varphi\vec{a} &= \nabla \cdot (\varphi\vec{a}) = \nabla \cdot (\varphi_c\vec{a}) + \nabla \cdot (\varphi\vec{a}_c) = \varphi(\nabla \cdot \vec{a}) + \nabla\varphi \cdot \vec{a} = \\ &= \varphi \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} \varphi,\end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} \varphi\vec{a} = \nabla \times (\varphi\vec{a}) = \nabla \times (\varphi_c\vec{a}) + \nabla \times (\varphi\vec{a}_c) =$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \varphi \psi &= \nabla(\varphi \psi) = \nabla(\varphi \psi_c) + \nabla(\varphi_c \psi) = \psi \nabla \varphi + \varphi \nabla \psi = \\ &= \psi \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{grad} \psi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \varphi \vec{a} &= \nabla \cdot (\varphi \vec{a}) = \nabla \cdot (\varphi_c \vec{a}) + \nabla \cdot (\varphi \vec{a}_c) = \varphi (\nabla \cdot \vec{a}) + \nabla \varphi \cdot \vec{a} = \\ &= \varphi \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} \varphi,\end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} \varphi \vec{a} = \nabla \times (\varphi \vec{a}) = \nabla \times (\varphi_c \vec{a}) + \nabla \times (\varphi \vec{a}_c) = \varphi (\nabla \times \vec{a}) + \nabla \varphi \times \vec{a} =$$

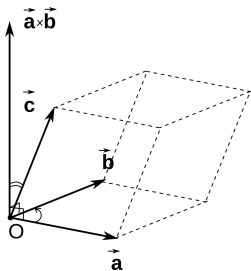
Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \varphi\psi &= \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi = \\ &= \psi \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{grad} \psi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \varphi\vec{a} &= \nabla \cdot (\varphi\vec{a}) = \nabla \cdot (\varphi_c\vec{a}) + \nabla \cdot (\varphi\vec{a}_c) = \varphi(\nabla \cdot \vec{a}) + \nabla\varphi \cdot \vec{a} = \\ &= \varphi \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} \varphi,\end{aligned}$$

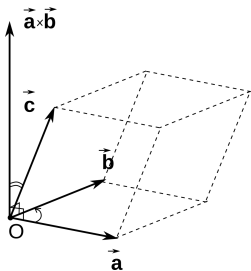
$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \varphi\vec{a} &= \nabla \times (\varphi\vec{a}) = \nabla \times (\varphi_c\vec{a}) + \nabla \times (\varphi\vec{a}_c) = \varphi(\nabla \times \vec{a}) + \nabla\varphi \times \vec{a} = \\ &= \varphi \operatorname{rot} \vec{a} + \operatorname{grad} \varphi \times \vec{a}.\end{aligned}$$

Дивергенция векторного произведения векторов



Объем параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , равен

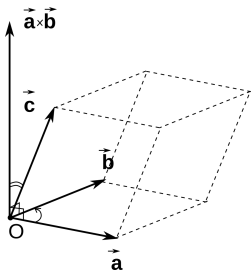
Дивергенция векторного произведения векторов



Объем параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , равен

$$V = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) =$$

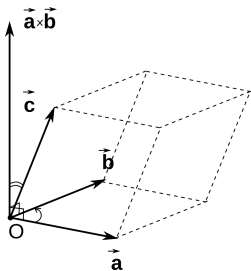
Дивергенция векторного произведения векторов



Объем параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , равен

$$V = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} =$$

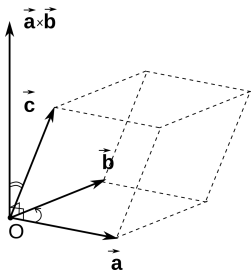
Дивергенция векторного произведения векторов



Объем параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , равен

$$\begin{aligned} V &= \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \\ &= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}. \end{aligned}$$

Дивергенция векторного произведения векторов

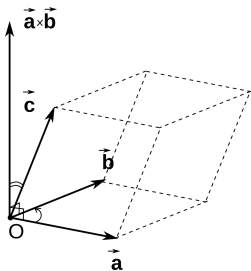


Объем параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , равен

$$\begin{aligned} V &= \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \\ &= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}. \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) =$$

Дивергенция векторного произведения векторов

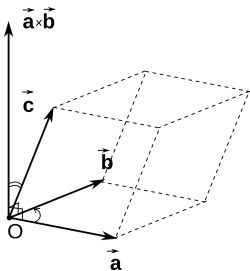


Объем параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , равен

$$\begin{aligned} V &= \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \\ &= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}. \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) =$$

Дивергенция векторного произведения векторов

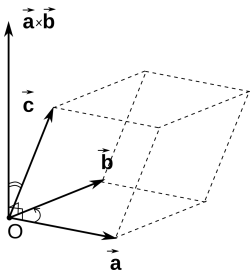


Объем параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , равен

$$\begin{aligned} V &= \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \\ &= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}. \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \nabla \cdot (\vec{a}_c \times \vec{b}) + \nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}_c) =$$

Дивергенция векторного произведения векторов

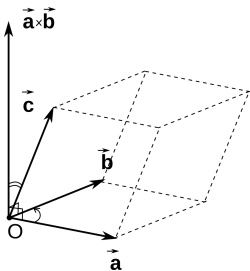


Объем параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , равен

$$\begin{aligned} V &= \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \\ &= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) &= \nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \nabla \cdot (\vec{a}_c \times \vec{b}) + \nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}_c) = \\ &= -(\nabla \times \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\nabla \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \end{aligned}$$

Дивергенция векторного произведения векторов



Объем параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , равен

$$\begin{aligned} V &= \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \\ &= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) &= \nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \nabla \cdot (\vec{a}_c \times \vec{b}) + \nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}_c) = \\ &= -(\nabla \times \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\nabla \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b}. \end{aligned}$$

Оператор Лапласа

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi =$$

Оператор Лапласа

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \cdot (\nabla \varphi) =$$

Оператор Лапласа

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \cdot (\nabla \varphi) = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) =$$

Оператор Лапласа

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi &= \nabla \cdot (\nabla \varphi) = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi\end{aligned}$$

Оператор Лапласа

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi &= \nabla \cdot (\nabla \varphi) = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi\end{aligned}$$

Определение
Оператор

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

называется *оператором Лапласа*.

Соотношения, полученные ранее

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0,$$

Соотношения, полученные ранее

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0,$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \times (\nabla \varphi) = 0,$$

Соотношения, полученные ранее

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0,$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \times (\nabla \varphi) = 0,$$

$$\operatorname{grad} \varphi(r) = \frac{\varphi'(r)}{r} \vec{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$