

Аффинный ортогональный тензор

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент

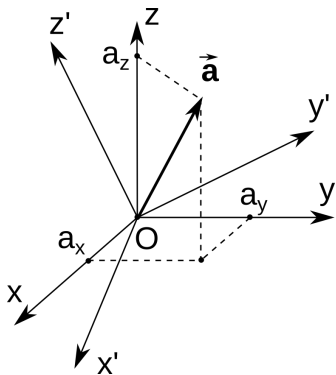
Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

25 апреля 2019 г.

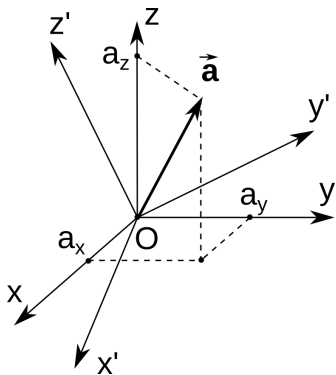
Аннотация

Аффинный ортогональный тензор второго ранга. Диада. Сопряженный тензор. Симметричные и антисимметричные тензоры. Разложение тензора.

Аффинный ортогональный вектор



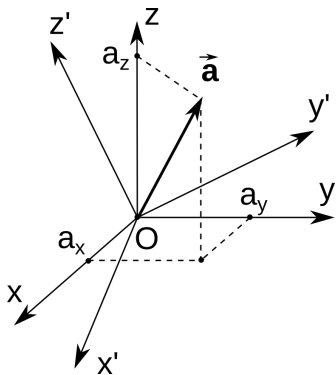
Аффинный ортогональный вектор



Пусть в некоторой ортогональной прямоугольной системе координат $Oxyz$

$$\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z.$$

Аффинный ортогональный вектор



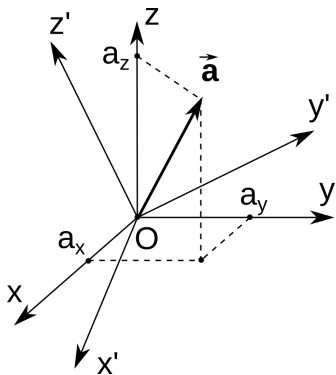
Пусть в некоторой ортогональной прямоугольной системе координат $Oxyz$

$$\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z.$$

Тогда в другой ортогональной прямоугольной системе координат $Ox'y'z'$ вектор будет иметь координаты:

$$a_{x'} = a_x \cos(x, x') + a_y \cos(y, x') + a_z \cos(z, x'),$$

Аффинный ортогональный вектор



Пусть в некоторой ортогональной прямой системе координат $Oxyz$

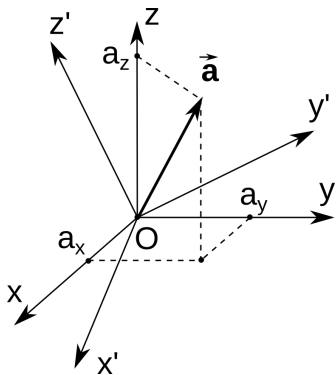
$$\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z.$$

Тогда в другой ортогональной прямой системе координат $Ox'y'z'$ вектор будет иметь координаты:

$$a_{x'} = a_x \cos(x, x') + a_y \cos(y, x') + a_z \cos(z, x'),$$

$$a_{y'} = a_x \cos(x, y') + a_y \cos(y, y') + a_z \cos(z, y'),$$

Аффинный ортогональный вектор



Пусть в некоторой ортогональной прямой системе координат $Oxyz$

$$\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z.$$

Тогда в другой ортогональной прямой системе координат $Ox'y'z'$ вектор будет иметь координаты:

$$a_{x'} = a_x \cos(x, x') + a_y \cos(y, x') + a_z \cos(z, x'),$$

$$a_{y'} = a_x \cos(x, y') + a_y \cos(y, y') + a_z \cos(z, y'),$$

$$a_{z'} = a_x \cos(x, z') + a_y \cos(y, z') + a_z \cos(z, z').$$

Аффинный ортогональный вектор

Определение

Если для прямолинейной ортогональной системы координат $Oxyz$ имеется совокупность трех величин a_x, a_y, a_z , преобразующихся по вышеуказанным формулам в величины $a_{x'}, a_{y'}, a_{z'}$, в другой ортогональной прямолинейной системе координат $Ox'y'z'$,

Аффинный ортогональный вектор

Определение

Если для прямолинейной ортогональной системы координат $Oxyz$ имеется совокупность трех величин a_x, a_y, a_z , преобразующихся по вышеуказанным формулам в величины $a_{x'}, a_{y'}, a_{z'}$, в другой ортогональной прямолинейной системе координат $Ox'y'z'$, то совокупность этих величин определяет **аффинный ортогональный вектор** \vec{a} . Скалярные величины a_x, a_y, a_z называются составляющими (компонентами) вектора \vec{a} по осям Ox, Oy, Oz .

Аффинный ортогональный тензор второго ранга

Определение

Если для прямолинейной ортогональной системы координат $Oxyz$ имеется совокупность трех векторов $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$, преобразующихся по формулам в величины $\vec{p}_{x'}, \vec{p}_{y'}, \vec{p}_{z'}$, в другой системе координат $Ox'y'z'$:

$$\vec{p}_{x'} = \vec{p}_x \cos(x, x') + \vec{p}_y \cos(y, x') + \vec{p}_z \cos(z, x'),$$

$$\vec{p}_{y'} = \vec{p}_x \cos(x, y') + \vec{p}_y \cos(y, y') + \vec{p}_z \cos(z, y'),$$

$$\vec{p}_{z'} = \vec{p}_x \cos(x, z') + \vec{p}_y \cos(y, z') + \vec{p}_z \cos(z, z'),$$

Аффинный ортогональный тензор второго ранга

Определение

Если для прямолинейной ортогональной системы координат $Oxyz$ имеется совокупность трех векторов $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$, преобразующихся по формулам в величины $\vec{p}_{x'}, \vec{p}_{y'}, \vec{p}_{z'}$, в другой системе координат $Ox'y'z'$:

$$\vec{p}_{x'} = \vec{p}_x \cos(x, x') + \vec{p}_y \cos(y, x') + \vec{p}_z \cos(z, x'),$$

$$\vec{p}_{y'} = \vec{p}_x \cos(x, y') + \vec{p}_y \cos(y, y') + \vec{p}_z \cos(z, y'),$$

$$\vec{p}_{z'} = \vec{p}_x \cos(x, z') + \vec{p}_y \cos(y, z') + \vec{p}_z \cos(z, z'),$$

то совокупность этих величин определяет **аффинный ортогональный тензор второго ранга**. Векторы $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$ называются составляющими (компонентами) тензора Π по осям Ox, Oy, Oz .

Матричное представление тензора

Будем обозначать

$$\mathbf{P} = \vec{i}\vec{p}_x + \vec{j}\vec{p}_y + \vec{k}\vec{p}_z.$$

Матричное представление тензора

Будем обозначать

$$\mathbf{\Pi} = \vec{i}\vec{p}_x + \vec{j}\vec{p}_y + \vec{k}\vec{p}_z.$$

Таким образом, тензор представляет собой набор из 9 компонент:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}$$

Матричное представление тензора

Будем обозначать

$$\mathbf{P} = \vec{i}\vec{p}_x + \vec{j}\vec{p}_y + \vec{k}\vec{p}_z.$$

Таким образом, тензор представляет собой набор из 9 компонент:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \vec{p}_x = p_{xx}\vec{i} + p_{xy}\vec{j} + p_{xz}\vec{k} \\ \leftarrow \vec{p}_y = p_{yx}\vec{i} + p_{yy}\vec{j} + p_{yz}\vec{k} \\ \leftarrow \vec{p}_z = p_{zx}\vec{i} + p_{zy}\vec{j} + p_{zz}\vec{k} \end{array}$$

Матричное представление тензора

Будем обозначать

$$\mathbf{P} = \vec{i}\vec{p}_x + \vec{j}\vec{p}_y + \vec{k}\vec{p}_z.$$

Таким образом, тензор представляет собой набор из 9 компонент:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{aligned} \vec{p}_x &= p_{xx}\vec{i} + p_{xy}\vec{j} + p_{xz}\vec{k} \\ \vec{p}_y &= p_{yx}\vec{i} + p_{yy}\vec{j} + p_{yz}\vec{k} \\ \vec{p}_z &= p_{zx}\vec{i} + p_{zy}\vec{j} + p_{zz}\vec{k} \end{aligned}$$

В дальнейшем:

- вместо координат x, y, z будем писать x_1, x_2, x_3 ;
- базисные векторы будем обозначать $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$;
- компоненты тензора будем нумеровать, т.е. p_{ij} ($i, j = \overline{1, 3}$).

Преобразование ортогональных систем координат

Пусть задано некоторое преобразование одной ортогональной прямолинейной системы координат в другую с помощью матрицы преобразования, т.е. заданы направляющие косинусы единичных векторов новых базисных векторов $\alpha_{ik} = \cos(x_i, x'_k)$:

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

Преобразование ортогональных систем координат

Пусть задано некоторое преобразование одной ортогональной прямолинейной системы координат в другую с помощью матрицы преобразования, т.е. заданы направляющие косинусы единичных векторов новых базисных векторов $\alpha_{ik} = \cos(x_i, x'_k)$:

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^3 \alpha_{is}^2 = 1 & (s = \overline{1, 3}), \\ \sum_{i=1}^3 \alpha_{is} \alpha_{ik} = 0 & (s, k = \overline{1, 3}; s \neq k). \end{cases}$$

Преобразование ортогональных систем координат

Пусть задано некоторое преобразование одной ортогональной прямолинейной системы координат в другую с помощью матрицы преобразования, т.е. заданы направляющие косинусы единичных векторов новых базисных векторов $\alpha_{ik} = \cos(x_i, x'_k)$:

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^3 \alpha_{is}^2 = 1 & (s = \overline{1, 3}), \\ \sum_{i=1}^3 \alpha_{is} \alpha_{ik} = 0 & (s, k = \overline{1, 3}; s \neq k). \end{cases}$$

Таким образом, Q – ортогональная матрица, т.к.

$$Q^{-1} = Q^t.$$

Компоненты тензора в штрихованной системе координат

Компоненты вектора \vec{a} и тензора Π в новой штрихованной системе координат a'_1, a'_2, a'_3 и $\vec{p}'_1, \vec{p}'_2, \vec{p}'_3$ имеют вид:

$$a'_k = a_{x'_k} = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ki} a_{x_i}, \quad \vec{p}'_k = \vec{p}_{x'_k} = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ki} \vec{p}_{x_i} \quad (k = \overline{1,3}).$$

Компоненты тензора в штрихованной системе координат

Компоненты вектора \vec{a} и тензора Π в новой штрихованной системе координат a'_1, a'_2, a'_3 и $\vec{p}'_1, \vec{p}'_2, \vec{p}'_3$ имеют вид:

$$a'_k = a_{x'_k} = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ki} a_{x_i}, \quad \vec{p}'_k = \vec{p}_{x'_k} = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ki} \vec{p}_{x_i} \quad (k = \overline{1,3}).$$

Проекция вектора $\vec{p}_{x'_k}$ на ось x'_l : $(\vec{p}_{x'_k})_{x'_l} = \sum_{r=1}^3 \alpha_{kr} (\vec{p}_{x_r})_{x'_l}$.

Компоненты тензора в штрихованной системе координат

Компоненты вектора \vec{a} и тензора Π в новой штрихованной системе координат a'_1, a'_2, a'_3 и $\vec{p}'_1, \vec{p}'_2, \vec{p}'_3$ имеют вид:

$$a'_k = a_{x'_k} = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ki} a_{x_i}, \quad \vec{p}'_k = \vec{p}_{x'_k} = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ki} \vec{p}_{x_i} \quad (k = \overline{1,3}).$$

Проекция вектора $\vec{p}_{x'_k}$ на ось x'_l : $(\vec{p}_{x'_k})_{x'_l} = \sum_{r=1}^3 \alpha_{kr} (\vec{p}_{x_r})_{x'_l}$.

Из определения аффинного вектора: $(\vec{p}_{x_r})_{x'_l} = \sum_{s=1}^3 \alpha_{ls} \vec{p}_{x_r x_s}$.

Компоненты тензора в штрихованной системе координат

Компоненты вектора \vec{a} и тензора Π в новой штрихованной системе координат a'_1, a'_2, a'_3 и $\vec{p}'_1, \vec{p}'_2, \vec{p}'_3$ имеют вид:

$$a'_k = a_{x'_k} = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ki} a_{x_i}, \quad \vec{p}'_k = \vec{p}_{x'_k} = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ki} \vec{p}_{x_i} \quad (k = \overline{1,3}).$$

Проекция вектора $\vec{p}_{x'_k}$ на ось x'_l : $(\vec{p}_{x'_k})_{x'_l} = \sum_{r=1}^3 \alpha_{kr} (\vec{p}_{x_r})_{x'_l}$.

Из определения аффинного вектора: $(\vec{p}_{x_r})_{x'_l} = \sum_{s=1}^3 \alpha_{ls} p_{x_r x_s}$.

Подставим последнее равенство в предпоследнее:

$$p_{x'_k x'_l} = \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 \alpha_{kr} \alpha_{ls} p_{x_r x_s} \quad \text{или} \quad p'_{kl} = \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 \alpha_{kr} \alpha_{ls} p_{rs}.$$

Определение тензора (альтернативное)

Определение (альтернативное)

Если для каждой прямолинейной прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$ имеется совокупность девяти величин p_{kl} , преобразующихся в величины p'_{kl} в новой системе координат $Ox'_1x'_2x'_3$ по формуле:

$$p'_{kl} = \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 \alpha_{kr} \alpha_{ls} p_{rs},$$

то совокупность этих величин определяет **аффинный ортогональный тензор второго ранга** Π в пространстве трех измерений.

Альтернативная запись тензора

Записанную в новых обозначения формулу для разложения векторов

$$\vec{p}_k = \sum_{l=1}^3 \vec{i}_l p_{kl}, \quad (k = 1, 2, 3)$$

Альтернативная запись тензора

Записанную в новых обозначения формулу для разложения векторов

$$\vec{p}_k = \sum_{l=1}^3 \vec{i}_l p_{kl}, \quad (k = 1, 2, 3)$$

подставим в равенство, определяющее тензор, и получим условную запись

$$\mathbf{p} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \vec{i}_k \vec{i}_l p_{kl}.$$

Единичный тензор

Пусть

$$I = \vec{i}_1 \vec{i}_1 + \vec{i}_2 \vec{i}_2 + \vec{i}_3 \vec{i}_3.$$

Тензор I называется **единичным** тензором.

Единичный тензор

Пусть

$$\mathbf{I} = \vec{\mathbf{i}}_1 \vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 \vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 \vec{\mathbf{i}}_3.$$

Тензор \mathbf{I} называется **единичным** тензором.

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Единичный тензор

Пусть

$$I = \vec{i}_1 \vec{i}_1 + \vec{i}_2 \vec{i}_2 + \vec{i}_3 \vec{i}_3.$$

Тензор I называется **единичным** тензором.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \vec{p}_1 = \vec{i}_1 \\ \leftarrow \vec{p}_2 = \vec{i}_2 \\ \leftarrow \vec{p}_3 = \vec{i}_3 \end{array}$$

Единичный тензор

Пусть

$$I = \vec{i}_1 \vec{i}_1 + \vec{i}_2 \vec{i}_2 + \vec{i}_3 \vec{i}_3.$$

Тензор I называется **единичным** тензором.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \vec{p}_1 = \vec{i}_1 \\ \leftarrow \vec{p}_2 = \vec{i}_2 \\ \leftarrow \vec{p}_3 = \vec{i}_3 \end{array} \quad p_{rs} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s, \\ 0, r \neq s. \end{cases}$$

Единичный тензор

Пусть

$$I = \vec{i}_1 \vec{i}_1 + \vec{i}_2 \vec{i}_2 + \vec{i}_3 \vec{i}_3.$$

Тензор I называется **единичным** тензором.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \vec{p}_1 = \vec{i}_1 \\ \leftarrow \vec{p}_2 = \vec{i}_2 \\ \leftarrow \vec{p}_3 = \vec{i}_3 \end{array} \quad p_{rs} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s, \\ 0, r \neq s. \end{cases}$$

В альтернативной системе координат

$$p'_{kl} =$$

Единичный тензор

Пусть

$$I = \vec{i}_1 \vec{i}_1 + \vec{i}_2 \vec{i}_2 + \vec{i}_3 \vec{i}_3.$$

Тензор I называется **единичным** тензором.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow \vec{p}_1 = \vec{i}_1 \\ \leftarrow \vec{p}_2 = \vec{i}_2 \\ \leftarrow \vec{p}_3 = \vec{i}_3 \end{matrix} \quad p_{rs} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s, \\ 0, r \neq s. \end{cases}$$

В альтернативной системе координат

$$p'_{kl} = \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 \alpha_{kr} \alpha_{ls} p_{rs} =$$

Единичный тензор

Пусть

$$I = \vec{i}_1 \vec{i}_1 + \vec{i}_2 \vec{i}_2 + \vec{i}_3 \vec{i}_3.$$

Тензор I называется **единичным** тензором.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow \vec{p}_1 = \vec{i}_1 \\ \leftarrow \vec{p}_2 = \vec{i}_2 \\ \leftarrow \vec{p}_3 = \vec{i}_3 \end{matrix} \quad p_{rs} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s, \\ 0, r \neq s. \end{cases}$$

В альтернативной системе координат

$$p'_{kl} = \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 \alpha_{kr} \alpha_{ls} p_{rs} = \sum_{r=1}^3 \alpha_{kr} \alpha_{lr} =$$

Единичный тензор

Пусть

$$I = \vec{i}_1\vec{i}_1 + \vec{i}_2\vec{i}_2 + \vec{i}_3\vec{i}_3.$$

Тензор I называется **единичным** тензором.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \vec{p}_1 = \vec{i}_1 \\ \leftarrow \vec{p}_2 = \vec{i}_2 \\ \leftarrow \vec{p}_3 = \vec{i}_3 \end{array} \quad p_{rs} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s, \\ 0, r \neq s. \end{cases}$$

В альтернативной системе координат

$$p'_{kl} = \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 \alpha_{kr} \alpha_{ls} p_{rs} = \sum_{r=1}^3 \alpha_{kr} \alpha_{lr} = \delta_{kl}.$$

Единичный тензор

Пусть

$$I = \vec{i}_1 \vec{i}_1 + \vec{i}_2 \vec{i}_2 + \vec{i}_3 \vec{i}_3.$$

Тензор I называется **единичным** тензором.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow \vec{p}_1 = \vec{i}_1 \\ \leftarrow \vec{p}_2 = \vec{i}_2 \\ \leftarrow \vec{p}_3 = \vec{i}_3 \end{matrix} \quad p_{rs} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s, \\ 0, r \neq s. \end{cases}$$

В альтернативной системе координат

$$p'_{kl} = \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 \alpha_{kr} \alpha_{ls} p_{rs} = \sum_{r=1}^3 \alpha_{kr} \alpha_{lr} = \delta_{kl}.$$

Тензор I имеет одни и те же компоненты в любой ортогональной системе координат.

Диада

Определение

Пусть $\vec{a} = \vec{i}_1 a_1 + \vec{i}_2 a_2 + \vec{i}_3 a_3$ и $\vec{b} = \vec{i}_1 b_1 + \vec{i}_2 b_2 + \vec{i}_3 b_3$,

Диада

Определение

Пусть $\vec{a} = \vec{i}_1 a_1 + \vec{i}_2 a_2 + \vec{i}_3 a_3$ и $\vec{b} = \vec{i}_1 b_1 + \vec{i}_2 b_2 + \vec{i}_3 b_3$, тогда **диадным** или **тензорными произведением** векторов \vec{a} и \vec{b} называется тензор, определяемый следующим соотношением:

Диада

Определение

Пусть $\vec{a} = \vec{i}_1 a_1 + \vec{i}_2 a_2 + \vec{i}_3 a_3$ и $\vec{b} = \vec{i}_1 b_1 + \vec{i}_2 b_2 + \vec{i}_3 b_3$, тогда **диадным** или **тензорными произведением** векторов \vec{a} и \vec{b} называется тензор, определяемый следующим соотношением:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a} \vec{b} =$$

Диада

Определение

Пусть $\vec{a} = \vec{i}_1 a_1 + \vec{i}_2 a_2 + \vec{i}_3 a_3$ и $\vec{b} = \vec{i}_1 b_1 + \vec{i}_2 b_2 + \vec{i}_3 b_3$, тогда **диадным** или **тензорными произведением** векторов \vec{a} и \vec{b} называется тензор, определяемый следующим соотношением:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a} \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

Корректность определения диады

При переходе к новой системе координат $Ox'_1x'_2x'_3$ компоненты этих векторов преобразуются по формулам:

$$a'_k = \sum_{r=1}^3 \alpha_{kr} a_r, \quad b'_l = \sum_{s=1}^3 \alpha_{ls} b_s \quad (k, l = 1, 2, 3).$$

Корректность определения диады

При переходе к новой системе координат $Ox'_1x'_2x'_3$ компоненты этих векторов преобразуются по формулам:

$$a'_k = \sum_{r=1}^3 \alpha_{kr} a_r, \quad b'_l = \sum_{s=1}^3 \alpha_{ls} b_s \quad (k, l = 1, 2, 3).$$

Перемножив оба эти равенства, получим

$$a'_k b'_l = \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 \alpha_{ks} \alpha_{ls} a_r b_s.$$

следовательно приведенное выражение является тензором по определению (альтернативному).

Сопряженный тензор

Определение

Тензор \mathbf{P}_c называется *сопряженным* к тензору \mathbf{P} , если компоненты его получены транспонированием компонент тензора \mathbf{P} .

Сопряженный тензор

Определение

Тензор \mathbf{P}_c называется *сопряженным* к тензору \mathbf{P} , если компоненты его получены транспонированием компонент тензора \mathbf{P} .

Сопряжение диады

$$(\vec{a}\vec{b})_c =$$

Сопряженный тензор

Определение

Тензор \mathbf{P}_c называется *сопряженным* к тензору \mathbf{P} , если компоненты его получены транспонированием компонент тензора \mathbf{P} .

Сопряжение диады

$$(\vec{a}\vec{b})_c = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}_c =$$

Сопряженный тензор

Определение

Тензор Π_c называется *сопряженным* к тензору Π , если компоненты его получены транспонированием компонент тензора Π .

Сопряжение диады

$$(\vec{a}\vec{b})_c = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}_c = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 \end{pmatrix} =$$

Сопряженный тензор

Определение

Тензор Π_c называется *сопряженным* к тензору Π , если компоненты его получены транспонированием компонент тензора Π .

Сопряжение диады

$$(\vec{a}\vec{b})_c = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}_c = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 \end{pmatrix} = \vec{b}\vec{a}.$$

Сопряженный тензор

Определение

Тензор Π_c называется *сопряженным* к тензору Π , если компоненты его получены транспонированием компонент тензора Π .

Сопряжение диады

$$(\vec{a}\vec{b})_c = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}_c = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 \end{pmatrix} = \vec{b}\vec{a}.$$

Таким образом, $(\vec{a}\vec{b})_c = \vec{b}\vec{a}$.

Сумма тензоров

Определение

Суммой тензоров **A** и **B** называется тензор **C**, компоненты которого равны сумме компонент тензоров **A** и **B**. Пишут $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Сумма тензоров

Определение

Суммой тензоров **A** и **B** называется тензор **C**, компоненты которого равны сумме компонент тензоров **A** и **B**. Пишут $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Используя альтернативное определение легко показать, что определение суммы корректно, т.е. **C** является тензором.

Симметричный тензор

Определение

Тензор \mathbf{S} называется *симметричным*, если $\mathbf{S}_c = \mathbf{S}$.

Симметричный тензор

Определение

Тензор \mathbf{S} называется *симметричным*, если $\mathbf{S}_c = \mathbf{S}$.

Покомпонентная запись симметричного тензора

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix}$$

Симметричный тензор

Определение

Тензор \mathbf{S} называется *симметричным*, если $\mathbf{S}_c = \mathbf{S}$.

Покомпонентная запись симметричного тензора

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix}$$

Симметричный тензор определяется 6 компонентами.

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор \mathbf{A} называется *антисимметричным*, если $\mathbf{A}_c = -\mathbf{A}$.

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор \mathbf{A} называется *антисимметричным*, если $\mathbf{A}_c = -\mathbf{A}$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$.

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор \mathbf{A} называется *антисимметричным*, если $\mathbf{A}_c = -\mathbf{A}$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$\mathbf{A} = \vec{i}_1\vec{p}_1 + \vec{i}_2\vec{p}_2 + \vec{i}_3\vec{p}_3 =$$

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор \mathbf{A} называется *антисимметричным*, если $\mathbf{A}_c = -\mathbf{A}$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$\mathbf{A} = \vec{i}_1\vec{p}_1 + \vec{i}_2\vec{p}_2 + \vec{i}_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор \mathbf{A} называется *антисимметричным*, если $\mathbf{A}_c = -\mathbf{A}$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$\mathbf{A} = \vec{i}_1\vec{p}_1 + \vec{i}_2\vec{p}_2 + \vec{i}_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\vec{p}_1 = -\omega_3\vec{i}_2 + \omega_2\vec{i}_3 = \vec{i}_1 \times \vec{\omega}$,

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор \mathbf{A} называется *антисимметричным*, если $\mathbf{A}_c = -\mathbf{A}$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$\mathbf{A} = \vec{i}_1\vec{p}_1 + \vec{i}_2\vec{p}_2 + \vec{i}_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\vec{p}_1 = -\omega_3\vec{i}_2 + \omega_2\vec{i}_3 = \vec{i}_1 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_2 = \omega_3\vec{i}_1 - \omega_1\vec{i}_3 = \vec{i}_2 \times \vec{\omega}$,

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор \mathbf{A} называется *антисимметричным*, если $\mathbf{A}_c = -\mathbf{A}$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$\mathbf{A} = \vec{i}_1\vec{p}_1 + \vec{i}_2\vec{p}_2 + \vec{i}_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\vec{p}_1 = -\omega_3\vec{i}_2 + \omega_2\vec{i}_3 = \vec{i}_1 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_2 = \omega_3\vec{i}_1 - \omega_1\vec{i}_3 = \vec{i}_2 \times \vec{\omega}$,
 $\vec{p}_3 = -\omega_2\vec{i}_1 + \omega_1\vec{i}_2 = \vec{i}_3 \times \vec{\omega}$.

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор \mathbf{A} называется *антисимметричным*, если $\mathbf{A}_c = -\mathbf{A}$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$\mathbf{A} = \vec{i}_1\vec{p}_1 + \vec{i}_2\vec{p}_2 + \vec{i}_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\vec{p}_1 = -\omega_3\vec{i}_2 + \omega_2\vec{i}_3 = \vec{i}_1 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_2 = \omega_3\vec{i}_1 - \omega_1\vec{i}_3 = \vec{i}_2 \times \vec{\omega}$,
 $\vec{p}_3 = -\omega_2\vec{i}_1 + \omega_1\vec{i}_2 = \vec{i}_3 \times \vec{\omega}$.

Таким образом, $\mathbf{A} = \vec{i}_1(\vec{i}_1 \times \vec{\omega}) + \vec{i}_2(\vec{i}_2 \times \vec{\omega}) + \vec{i}_3(\vec{i}_3 \times \vec{\omega})$.

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор \mathbf{A} называется *антисимметричным*, если $\mathbf{A}_c = -\mathbf{A}$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$\mathbf{A} = \vec{i}_1\vec{p}_1 + \vec{i}_2\vec{p}_2 + \vec{i}_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\vec{p}_1 = -\omega_3\vec{i}_2 + \omega_2\vec{i}_3 = \vec{i}_1 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_2 = \omega_3\vec{i}_1 - \omega_1\vec{i}_3 = \vec{i}_2 \times \vec{\omega}$,
 $\vec{p}_3 = -\omega_2\vec{i}_1 + \omega_1\vec{i}_2 = \vec{i}_3 \times \vec{\omega}$.

Таким образом, $\mathbf{A} = \vec{i}_1(\vec{i}_1 \times \vec{\omega}) + \vec{i}_2(\vec{i}_2 \times \vec{\omega}) + \vec{i}_3(\vec{i}_3 \times \vec{\omega})$.

Антисимметричный тензор задается 3 компонентами.

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор \mathbf{P} .

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор \mathbf{P} . Легко убедиться, что

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} + \mathbf{A},$$

где $\mathbf{S} = \frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}_c}{2}$ – симметричный, а $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\mathbf{S}_c =$$

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор \mathbf{P} . Легко убедиться, что

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} + \mathbf{A},$$

где $\mathbf{S} = \frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}_c}{2}$ – симметричный, а $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\mathbf{S}_c = \left(\frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}_c}{2} \right)_c =$$

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор \mathbf{P} . Легко убедиться, что

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} + \mathbf{A},$$

где $\mathbf{S} = \frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}_c}{2}$ – симметричный, а $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\mathbf{S}_c = \left(\frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}_c}{2} \right)_c = \frac{\mathbf{P}_c + (\mathbf{P}_c)_c}{2} =$$

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор \mathbf{P} . Легко убедиться, что

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} + \mathbf{A},$$

где $\mathbf{S} = \frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}_c}{2}$ – симметричный, а $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\mathbf{S}_c = \left(\frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}_c}{2} \right)_c = \frac{\mathbf{P}_c + (\mathbf{P}_c)_c}{2} = \frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}_c}{2} =$$

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор \mathbf{P} . Легко убедиться, что

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} + \mathbf{A},$$

где $\mathbf{S} = \frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}_c}{2}$ – симметричный, а $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\mathbf{S}_c = \left(\frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}_c}{2} \right)_c = \frac{\mathbf{P}_c + (\mathbf{P}_c)_c}{2} = \frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}_c}{2} = \mathbf{S},$$

$$\mathbf{A}_c =$$

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор \mathbf{P} . Легко убедиться, что

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} + \mathbf{A},$$

где $\mathbf{S} = \frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}_c}{2}$ – симметричный, а $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_c &= \left(\frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}_c}{2} \right)_c = \frac{\mathbf{P}_c + (\mathbf{P}_c)_c}{2} = \frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}_c}{2} = \mathbf{S}, \\ \mathbf{A}_c &= \left(\frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}_c}{2} \right)_c =\end{aligned}$$

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор \mathbf{P} . Легко убедиться, что

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} + \mathbf{A},$$

где $\mathbf{S} = \frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}_c}{2}$ – симметричный, а $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_c &= \left(\frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}_c}{2} \right)_c = \frac{\mathbf{P}_c + (\mathbf{P}_c)_c}{2} = \frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}_c}{2} = \mathbf{S}, \\ \mathbf{A}_c &= \left(\frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}_c}{2} \right)_c = \frac{\mathbf{P}_c - (\mathbf{P}_c)_c}{2} = \end{aligned}$$

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор \mathbf{P} . Легко убедиться, что

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} + \mathbf{A},$$

где $\mathbf{S} = \frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}_c}{2}$ – симметричный, а $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_c &= \left(\frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}_c}{2} \right)_c = \frac{\mathbf{P}_c + (\mathbf{P}_c)_c}{2} = \frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}_c}{2} = \mathbf{S}, \\ \mathbf{A}_c &= \left(\frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}_c}{2} \right)_c = \frac{\mathbf{P}_c - (\mathbf{P}_c)_c}{2} = -\frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}_c}{2} =\end{aligned}$$

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор \mathbf{P} . Легко убедиться, что

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} + \mathbf{A},$$

где $\mathbf{S} = \frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}_c}{2}$ – симметричный, а $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_c &= \left(\frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}_c}{2} \right)_c = \frac{\mathbf{P}_c + (\mathbf{P}_c)_c}{2} = \frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}_c}{2} = \mathbf{S}, \\ \mathbf{A}_c &= \left(\frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}_c}{2} \right)_c = \frac{\mathbf{P}_c - (\mathbf{P}_c)_c}{2} = -\frac{\mathbf{P} - \mathbf{P}_c}{2} = -\mathbf{A}.\end{aligned}$$

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить в сумму трёх диад.

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить в сумму трёх диад.

Доказательство.

Пусть задан тензор Π .

Разложение

$$\Pi = \vec{i}_1 \vec{a}_1 + \vec{i}_2 \vec{a}_2 + \vec{i}_3 \vec{a}_3$$

и является суммой трёх диад. Такое разложение не является единственным.

