Аффинный ортогональный тензор

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

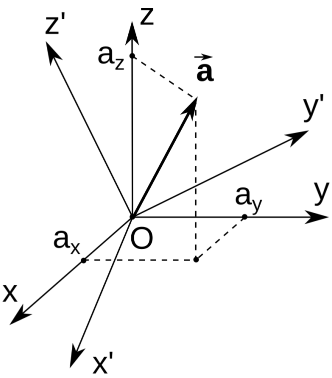
QR-код презентации

14 мая 2021 г.

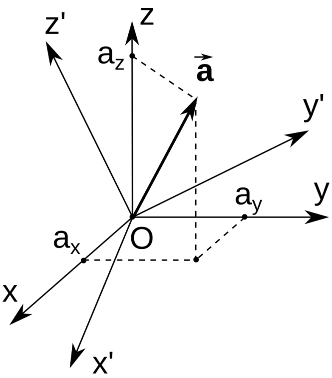
Аннотация

Аффинный ортогональный тензор второго ранга. Диада. Сопряженный тензор. Симметричные и антисимметричные тензоры. Разложение тензора.

Аффинный ортогональный вектор



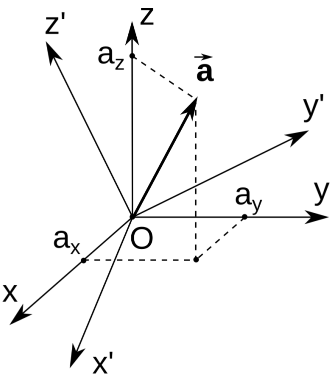
Аффинный ортогональный вектор



Пусть в некоторой ортогональной прямолинейной системе координат $Oxyz$

$$\vec{a} = \vec{\mathbf{i}} a_x + \vec{\mathbf{j}} a_y + \vec{\mathbf{k}} a_z.$$

Аффинный ортогональный вектор



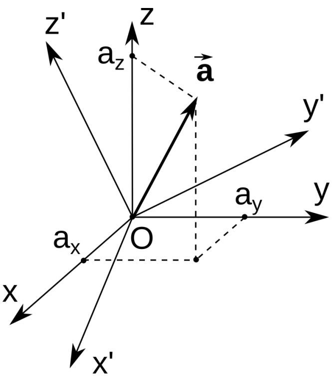
Пусть в некоторой ортогональной прямолинейной системе координат $Oxyz$

$$\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}a_x + \vec{\mathbf{j}}a_y + \vec{\mathbf{k}}a_z.$$

Тогда в другой ортогональной прямолинейной системе координат $Ox'y'z'$ вектор будет иметь координаты:

$$a_{x'} \quad = \quad a_x \cos(x, x') + a_y \cos(y, x') + a_z \cos(z, x'),$$

Аффинный ортогональный вектор



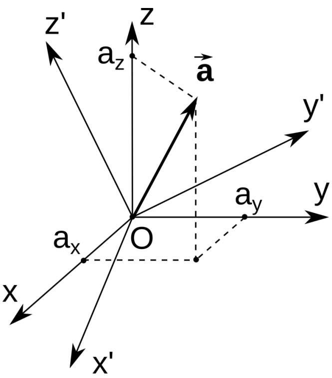
Пусть в некоторой ортогональной прямолинейной системе координат $Oxyz$

$$\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}a_x + \vec{\mathbf{j}}a_y + \vec{\mathbf{k}}a_z.$$

Тогда в другой ортогональной прямолинейной системе координат $Ox'y'z'$ вектор будет иметь координаты:

$$\begin{aligned} a_{x'} &= a_x \cos(x, x') + a_y \cos(y, x') + a_z \cos(z, x'), \\ a_{y'} &= a_x \cos(x, y') + a_y \cos(y, y') + a_z \cos(z, y'), \end{aligned}$$

Аффинный ортогональный вектор



Пусть в некоторой ортогональной прямолинейной системе координат $Oxyz$

$$\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}a_x + \vec{\mathbf{j}}a_y + \vec{\mathbf{k}}a_z.$$

Тогда в другой ортогональной прямолинейной системе координат $Ox'y'z'$ вектор будет иметь координаты:

$$\begin{aligned}
a_{x'} &= a_x \cos(x, x') + a_y \cos(y, x') + a_z \cos(z, x'), \\
a_{y'} &= a_x \cos(x, y') + a_y \cos(y, y') + a_z \cos(z, y'), \\
a_{z'} &= a_x \cos(x, z') + a_y \cos(y, z') + a_z \cos(z, z').
\end{aligned}$$

Определение

Если для прямолинейной ортогональной системы координат $Oxyz$ *имеется совокупность трех величин* a_x, a_y, a_z, *преобразующихся по вышеуказанным формулам в величины* $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$, *в другой ортогональной прямолинейной системе координат* $Ox'y'z'$,

Аффинный ортогональный вектор

Определение

Если для прямолинейной ортогональной системы координат $Oxyz$ имеется совокупность трех величин a_x, a_y, a_z, преобразующих-ся по вышеуказанным формулам в величины $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$, в другой ортогональной прямолинейной системе координат $Ox'y'z'$, то совокупность этих величин определяет аффинный ортогональный вектор $\vec{a}$. Скалярные величины a_x, a_y, a_z называются составляющими (компонентами) вектора $\vec{a}$ по осям Ox, Oy, Oz.

Аффинный ортогональный тензор второго ранга

Определение

Если для прямолинейной ортогональной системы координат $Oxyz$ имеется совокупность трех векторов $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$, $\vec{p}_z$, преобразующихся по формулам в величины $\vec{p}_{x'}$, $\vec{p}_{y'}$, $\vec{p}_{z'}$, в другой системе координат $Ox'y'z'$:

$$
\begin{aligned}
\vec{p}_{x'} &= \vec{p}_x \cos(x,x') + \vec{p}_y \cos(y,x') + \vec{p}_z \cos(z,x'), \\
\vec{p}_{y'} &= \vec{p}_x \cos(x,y') + \vec{p}_y \cos(y,y') + \vec{p}_z \cos(z,y'), \\
\vec{p}_{z'} &= \vec{p}_x \cos(x,z') + \vec{p}_y \cos(y,z') + \vec{p}_z \cos(z,z'),
\end{aligned}
$$

Аффинный ортогональный тензор второго ранга

Определение

Если для прямолинейной ортогональной системы координат Oxyz имеется совокупность трех векторов $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$, $\vec{p}_z$, преобразующихся по формулам в величины $\vec{p}_{x'}$, $\vec{p}_{y'}$, $\vec{p}_{z'}$, в другой системе координат $Ox'y'z'$:

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{x'} &= \vec{p}_x \cos(x, x') + \vec{p}_y \cos(y, x') + \vec{p}_z \cos(z, x'),\\
\vec{p}_{y'} &= \vec{p}_x \cos(x, y') + \vec{p}_y \cos(y, y') + \vec{p}_z \cos(z, y'),\\
\vec{p}_{z'} &= \vec{p}_x \cos(x, z') + \vec{p}_y \cos(y, z') + \vec{p}_z \cos(z, z'),
\end{aligned}$$

то совокупность этих величин определяет аффинный ортогональный тензор второго ранга. Векторы $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$, $\vec{p}_z$ называются составляющими (компонентами) тензора Π по осям Ox, Oy, Oz.

Матричное представление тензора

Будем обозначать

$$\mathbf{\Pi} = \vec{\mathbf{i}}\vec{p}_x + \vec{\mathbf{j}}\vec{p}_y + \vec{\mathbf{k}}\vec{p}_z.$$

Матричное представление тензора

Будем обозначать

$$\mathbf{\Pi} = \vec{\mathbf{i}}\vec{p}_x + \vec{\mathbf{j}}\vec{p}_y + \vec{\mathbf{k}}\vec{p}_z.$$

Таким образом, тензор представляет собой набор из 9 компонент:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}$$

Матричное представление тензора

Будем обозначать

$$\mathbf{\Pi} = \vec{\mathbf{i}}\vec{p}_x + \vec{\mathbf{j}}\vec{p}_y + \vec{\mathbf{k}}\vec{p}_z.$$

Таким образом, тензор представляет собой набор из 9 компонент:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \quad \vec{p}_x = p_{xx}\vec{\mathbf{i}} + p_{xy}\vec{\mathbf{j}} + p_{xz}\vec{\mathbf{k}} \\ \leftarrow \quad \vec{p}_y = p_{yx}\vec{\mathbf{i}} + p_{yy}\vec{\mathbf{j}} + p_{yz}\vec{\mathbf{k}} \\ \leftarrow \quad \vec{p}_z = p_{zx}\vec{\mathbf{i}} + p_{zy}\vec{\mathbf{j}} + p_{zz}\vec{\mathbf{k}} \end{array}$$

Матричное представление тензора

Будем обозначать
$$\mathbf{\Pi} = \vec{\mathbf{i}}\vec{p}_x + \vec{\mathbf{j}}\vec{p}_y + \vec{\mathbf{k}}\vec{p}_z.$$

Таким образом, тензор представляет собой набор из 9 компонент:
$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \quad \vec{p}_x = p_{xx}\vec{\mathbf{i}} + p_{xy}\vec{\mathbf{j}} + p_{xz}\vec{\mathbf{k}} \\ \leftarrow \quad \vec{p}_y = p_{yx}\vec{\mathbf{i}} + p_{yy}\vec{\mathbf{j}} + p_{yz}\vec{\mathbf{k}} \\ \leftarrow \quad \vec{p}_z = p_{zx}\vec{\mathbf{i}} + p_{zy}\vec{\mathbf{j}} + p_{zz}\vec{\mathbf{k}} \end{array}$$

В дальнейшем:

вместо координат x, y,z будем писать x_1, x_2, x_3;

базисные векторы будем обозначать $\vec{\mathbf{i}}_1$, $\vec{\mathbf{i}}_2$, $\vec{\mathbf{i}}_3$;

компоненты тензора будем нумеровать, т.е. p_{ij} $(i,j = \overline{1,3})$.

Преобразование ортогональных систем координат

Пусть задано некоторое преобразование одной ортогональной прямолинейной системы координат в другую с помощью матрицы преобразования, т.е. заданы направляющие косинусы единичных векторов новых базисных векторов $\alpha_{ik} = \cos(x_i, x'_k)$:

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

Преобразование ортогональных систем координат

Пусть задано некоторое преобразование одной ортогональной прямолинейной системы координат в другую с помощью матрицы преобразования, т.е. заданы направляющие косинусы единичных векторов новых базисных векторов $\alpha_{ik} = \cos(x_i, x'_k)$:

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_{is}^2 = 1 & (s = \overline{1,3}), \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_{is}\alpha_{ik} = 0 & (s, k = \overline{1,3}; s \neq k). \end{cases}$$

Преобразование ортогональных систем координат

Пусть задано некоторое преобразование одной ортогональной прямолинейной системы координат в другую с помощью матрицы преобразования, т.е. заданы направляющие косинусы единичных векторов новых базисных векторов $\alpha_{ik} = \cos(x_i, x'_k)$:

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_{is}^2 = 1 & (s = \overline{1,3}), \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_{is}\alpha_{ik} = 0 & (s,k = \overline{1,3}; s \neq k). \end{cases}$$

Таким образом, Q – ортогональная матрица, т.к.

$$Q^{-1} = Q^{\mathrm{t}}.$$

Компоненты тензора в штрихованной системе координат

Компоненты вектора $\vec{a}$ и тензора $\mathbf{\Pi}$ в новой штрихованной системе координат a'_1, a'_2, a'_3 и $\vec{p'}_1, \vec{p'}_2, \vec{p'}_3$ имеют вид:

$$a'_k = a_{x'_k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} a_{x_i}, \quad \vec{p'}_k = \vec{p}_{x'_k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} \vec{p}_{x_i} \quad (k = \overline{1,3}).$$

Компоненты тензора в штрихованной системе координат

Компоненты вектора $\vec{a}$ и тензора $\mathbf{\Pi}$ в новой штрихованной системе координат a'_1, a'_2, a'_3 и $\vec{p'}_1, \vec{p'}_2, \vec{p'}_3$ имеют вид:

$$a'_k = a_{x'_k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} a_{x_i}, \quad \vec{p'}_k = \vec{p}_{x'_k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} \vec{p}_{x_i} \quad (k = \overline{1,3}).$$

Проекция вектора $\vec{p}_{x'_k}$ на ось x'_l: $(\vec{p}_{x'_k})_{x'_l} = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr} (\vec{p}_{x_r})_{x'_l}$.

Компоненты тензора в штрихованной системе координат

Компоненты вектора $\vec{a}$ и тензора $\mathbf{\Pi}$ в новой штрихованной системе координат a'_1, a'_2, a'_3 и $\vec{p'}_1, \vec{p'}_2, \vec{p'}_3$ имеют вид:

$$a'_k = a_{x'_k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} a_{x_i}, \quad \vec{p'}_k = \vec{p}_{x'_k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} \vec{p}_{x_i} \quad (k = \overline{1,3}).$$

Проекция вектора $\vec{p}_{x'_k}$ на ось x'_l: $(\vec{p}_{x'_k})_{x'_l} = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr} (\vec{p}_{x_r})_{x'_l}$.

Из определения аффинного вектора: $(\vec{p}_{x_r})_{x'_l} = \sum_{s=1}^{3} \alpha_{ls} \vec{p}_{x_r x_s}$.

Компоненты тензора в штрихованной системе координат

Компоненты вектора $\vec{a}$ и тензора $\mathbf{\Pi}$ в новой штрихованной системе координат a'_1, a'_2, a'_3 и $\vec{p'}_1, \vec{p'}_2, \vec{p'}_3$ имеют вид:

$$a'_k = a_{x'_k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} a_{x_i}, \quad \vec{p'}_k = \vec{p}_{x'_k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} \vec{p}_{x_i} \quad (k = \overline{1,3}).$$

Проекция вектора $\vec{p}_{x'_k}$ на ось x'_l: $(\vec{p}_{x'_k})_{x'_l} = \sum\limits_{r=1}^{3} \alpha_{kr} (\vec{p}_{x_r})_{x'_l}$.

Из определения аффинного вектора: $(\vec{p}_{x_r})_{x'_l} = \sum\limits_{s=1}^{3} \alpha_{ls} \vec{p}_{x_r x_s}$.

Подставим последнее равенство в предпоследнее:

$$p_{x'_k x'_l} = \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} \alpha_{kr} \alpha_{ls} p_{x_r x_s} \text{ или } p'_{kl} = \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} \alpha_{kr} \alpha_{ls} p_{rs}.$$

Определение (альтернативное)

Если для каждой прямолинейной прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$ имеется совокупность девяти величин p_{kl}, преобразующихся в величины p'_{kl} в новой системе координат $Ox'_1x'_2x'_3$ по формуле:

$$p'_{kl} = \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \alpha_{kr}\alpha_{ls}p_{rs},$$

то совокупность этих величин определяет аффинный ортогональный тензор второго ранга $\mathbf{\Pi}$ *в пространстве трех измерений.*

Альтернативная запись тензора

Записанную в новых обозначения формулу для разложения векторов

$$\vec{p}_k = \sum_{l=1}^{3} \vec{i}_l p_{kl}, \quad (k = 1, 2, 3)$$

Альтернативная запись тензора

Записанную в новых обозначения формулу для разложения векторов

$$\vec{p}_k = \sum_{l=1}^{3} \vec{i}_l p_{kl}, \quad (k = 1, 2, 3)$$

подставим в равенство, определяющее тензор, и получим условную запись

$$\mathbf{\Pi} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \vec{i}_k \vec{i}_l p_{kl}.$$

Единичный тензор

Пусть

$$\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Тензор $\boldsymbol{I}$ называется единичным тензором.

Единичный тензор

Пусть

$$\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Тензор $\boldsymbol{I}$ называется единичным тензором.

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Единичный тензор

Пусть

$$\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Тензор $\boldsymbol{I}$ называется единичным тензором.

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \quad \vec{p}_1 = \vec{\mathbf{i}}_1 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_2 = \vec{\mathbf{i}}_2 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_3 = \vec{\mathbf{i}}_3 \end{array}$$

Единичный тензор

Пусть

$$\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Тензор $\boldsymbol{I}$ называется единичным тензором.

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} \leftarrow & \vec{p}_1 = \vec{\mathbf{i}}_1 \\ \leftarrow & \vec{p}_2 = \vec{\mathbf{i}}_2 \\ \leftarrow & \vec{p}_3 = \vec{\mathbf{i}}_3 \end{array} \qquad p_{rs} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s, \\ 0, r \neq s. \end{cases}$$

Единичный тензор

Пусть

$$\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Тензор $\boldsymbol{I}$ называется единичным тензором.

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \quad \vec{p}_1 = \vec{\mathbf{i}}_1 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_2 = \vec{\mathbf{i}}_2 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_3 = \vec{\mathbf{i}}_3 \end{array} \qquad p_{rs} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s, \\ 0, r \neq s. \end{cases}$$

В альтернативной системе координат

$$p'_{kl} =$$

Единичный тензор

Пусть

$$\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Тензор $\boldsymbol{I}$ называется единичным тензором.

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \quad \vec{p}_1 = \vec{\mathbf{i}}_1 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_2 = \vec{\mathbf{i}}_2 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_3 = \vec{\mathbf{i}}_3 \end{array} \qquad p_{rs} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s, \\ 0, r \neq s. \end{cases}$$

В альтернативной системе координат

$$p'_{kl} = \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \alpha_{kr}\alpha_{ls}p_{rs} =$$

Единичный тензор

Пусть

$$\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Тензор $\boldsymbol{I}$ называется единичным тензором.

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \quad \vec{p}_1 = \vec{\mathbf{i}}_1 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_2 = \vec{\mathbf{i}}_2 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_3 = \vec{\mathbf{i}}_3 \end{array} \qquad p_{rs} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s, \\ 0, r \neq s. \end{cases}$$

В альтернативной системе координат

$$p'_{kl} = \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \alpha_{kr}\alpha_{ls}p_{rs} = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr}\alpha_{lr} =$$

Единичный тензор

Пусть

$$\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Тензор $\boldsymbol{I}$ называется единичным тензором.

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \quad \vec{p}_1 = \vec{\mathbf{i}}_1 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_2 = \vec{\mathbf{i}}_2 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_3 = \vec{\mathbf{i}}_3 \end{array} \qquad p_{rs} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s, \\ 0, r \neq s. \end{cases}$$

В альтернативной системе координат

$$p'_{kl} = \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \alpha_{kr}\alpha_{ls}p_{rs} = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr}\alpha_{lr} = \delta_{kl}.$$

Единичный тензор

Пусть

$$\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Тензор $\boldsymbol{I}$ называется единичным тензором.

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \quad \vec{p}_1 = \vec{\mathbf{i}}_1 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_2 = \vec{\mathbf{i}}_2 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_3 = \vec{\mathbf{i}}_3 \end{array} \qquad p_{rs} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s, \\ 0, r \neq s. \end{cases}$$

В альтернативной системе координат

$$p'_{kl} = \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \alpha_{kr}\alpha_{ls}p_{rs} = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr}\alpha_{lr} = \delta_{kl}.$$

Тензор $\boldsymbol{I}$ имеет одни и те же компоненты в любой ортогональной системе координат.

Диада

Определение

Пусть $\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 a_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 a_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 a_3$ *и* $\vec{b} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3$*,*

Диада

Определение

Пусть $\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 a_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 a_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 a_3$ *и* $\vec{b} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3$*, тогда диадным или тензорными произведением векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется тензор, определяемый следующим соотношением:*

Диада

Определение

Пусть $\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 a_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 a_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 a_3$ *и* $\vec{b} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3$*, тогда диадным или тензорными произведением векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется тензор, определяемый следующим соотношением:*

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a}\vec{b} =$$

Диада

Определение

Пусть $\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 a_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 a_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 a_3$ *и* $\vec{b} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3$, *тогда диадным или тензорными произведением векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется тензор, определяемый следующим соотношением:*

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a}\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

Корректность определения диады

При переходе к новой системе координат $Ox'_1x'_2x'_3$ компоненты этих векторов преобразуются по формулам:

$$a'_k = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr} a_r, \quad b'_l = \sum_{s=1}^{3} \alpha_{ls} b_s \quad (k, l = 1, 2, 3).$$

Корректность определения диады

При переходе к новой системе координат $Ox_1'x_2'x_3'$ компоненты этих векторов преобразуются по формулам:

$$a_k' = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr} a_r, \quad b_l' = \sum_{s=1}^{3} \alpha_{ls} b_s \quad (k, l = 1, 2, 3).$$

Перемножив оба эти равенства, получим

$$a_k' b_l' = \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} \alpha_{ks} \alpha_{ls} a_r b_s.$$

следовательно приведенное выражение является тензором по определению (альтернативному).

Сопряженный тензор

Определение

Тензор $\mathbf{\Pi}_c$ *называется* *сопряженным* *к тензору* $\mathbf{\Pi}$*, если компоненты его получены транспонированием компонент тензора* $\mathbf{\Pi}$.

Определение

Тензор $\mathbf{\Pi}_c$ *называется сопряженным к тензору* $\mathbf{\Pi}$*, если компоненты его получены транспонированием компонент тензора* $\mathbf{\Pi}$.

Сопряжение диады

$$(\vec{a}\vec{b})_c =$$

Сопряженный тензор

Определение

Тензор $\mathbf{\Pi}_c$ называется сопряженным к тензору $\mathbf{\Pi}$, если компоненты его получены транспонированием компонент тензора $\mathbf{\Pi}$.

Сопряжение диады

$$(\vec{a}\vec{b})_c = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}_c =$$

Сопряженный тензор

Определение

Тензор $\mathbf{\Pi}_c$ *называется* *сопряженным* *к тензору* $\mathbf{\Pi}$*, если компоненты его получены транспонированием компонент тензора* $\mathbf{\Pi}$.

Сопряжение диады

$$(\vec{a}\vec{b})_c = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}_c = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 \end{pmatrix} =$$

Определение

Тензор $\mathbf{\Pi}_c$ *называется сопряженным к тензору* $\mathbf{\Pi}$, *если компоненты его получены транспонированием компонент тензора* $\mathbf{\Pi}$.

Сопряжение диады

$$(\vec{a}\vec{b})_c = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}_c = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 \end{pmatrix} = \vec{b}\vec{a}.$$

Сопряженный тензор

Определение

Тензор $\mathbf{\Pi}_c$ *называется* *сопряженным* *к тензору* $\mathbf{\Pi}$, *если компоненты его получены транспонированием компонент тензора* $\mathbf{\Pi}$.

Сопряжение диады

$$(\vec{a}\vec{b})_c = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}_c = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 \end{pmatrix} = \vec{b}\vec{a}.$$

Таким образом, $(\vec{a}\vec{b})_c = \vec{b}\vec{a}$.

Сумма тензоров

Определение

Суммой тензоров $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ *называется тензор* $\boldsymbol{C}$*, компоненты которого равны сумме компонент тензоров* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$*. Пишут* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$.

Сумма тензоров

Определение

Суммой тензоров $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется тензор $\boldsymbol{C}$, компоненты которого равны сумме компонент тензоров $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Пишут $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$.

Используя альтернативное определение легко показать, что определение суммы корректно, т.е. $\boldsymbol{C}$ является тензором.

Симметричный тензор

Определение

Тензор $\boldsymbol{S}$ *называется* *симметричным*, *если* $\boldsymbol{S}_c = \boldsymbol{S}$.

Симметричный тензор

Определение

Тензор $\boldsymbol{S}$ называется симметричным, если $\boldsymbol{S}_c = \boldsymbol{S}$.

Покомпонентная запись симметричного тензора

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix}$$

Симметричный тензор

Определение

Тензор $\boldsymbol{S}$ *называется симметричным, если* $\boldsymbol{S}_c = \boldsymbol{S}$.

Покомпонентная запись симметричного тензора

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix}$$

Симметричный тензор определяется 6 компонентами.

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор $\boldsymbol{A}$ называется антисимметричным, если $\boldsymbol{A}_c = -\boldsymbol{A}$.

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор $\boldsymbol{A}$ *называется антисимметричным, если* $\boldsymbol{A}_c = -\boldsymbol{A}$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$.

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор $\boldsymbol{A}$ называется антисимметричным, если $\boldsymbol{A}_c = -\boldsymbol{A}$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$A = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{p}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{p}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{p}_3 =$$

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор $\boldsymbol{A}$ называется антисимметричным, если $\boldsymbol{A}_c = -\boldsymbol{A}$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$A = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{p}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{p}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор $\boldsymbol{A}$ *называется* *антисимметричным*, *если* $\boldsymbol{A}_c = -\boldsymbol{A}$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$A = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{p}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{p}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\vec{p}_1 \;=\; -\omega_3\vec{\mathbf{i}}_2 + \omega_2\vec{\mathbf{i}}_3 \;=\; \vec{\mathbf{i}}_1 \times \vec{\omega}$,

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор $\boldsymbol{A}$ называется антисимметричным, если $\boldsymbol{A}_c = -\boldsymbol{A}$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$A = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{p}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{p}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\vec{p}_1 = -\omega_3\vec{\mathbf{i}}_2 + \omega_2\vec{\mathbf{i}}_3 = \vec{\mathbf{i}}_1 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_2 = \omega_3\vec{\mathbf{i}}_1 - \omega_1\vec{\mathbf{i}}_3 = \vec{\mathbf{i}}_2 \times \vec{\omega}$,

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор $\boldsymbol{A}$ *называется антисимметричным, если* $\boldsymbol{A}_c = -\boldsymbol{A}$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$A = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{p}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{p}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\vec{p}_1 = -\omega_3\vec{\mathbf{i}}_2 + \omega_2\vec{\mathbf{i}}_3 = \vec{\mathbf{i}}_1 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_2 = \omega_3\vec{\mathbf{i}}_1 - \omega_1\vec{\mathbf{i}}_3 = \vec{\mathbf{i}}_2 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_3 = -\omega_2\vec{\mathbf{i}}_1 + \omega_1\vec{\mathbf{i}}_2 = \vec{\mathbf{i}}_3 \times \vec{\omega}$.

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор $\boldsymbol{A}$ *называется антисимметричным, если* $\boldsymbol{A}_c = -\boldsymbol{A}$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$A = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{p}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{p}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\vec{p}_1 = -\omega_3\vec{\mathbf{i}}_2 + \omega_2\vec{\mathbf{i}}_3 = \vec{\mathbf{i}}_1 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_2 = \omega_3\vec{\mathbf{i}}_1 - \omega_1\vec{\mathbf{i}}_3 = \vec{\mathbf{i}}_2 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_3 = -\omega_2\vec{\mathbf{i}}_1 + \omega_1\vec{\mathbf{i}}_2 = \vec{\mathbf{i}}_3 \times \vec{\omega}$.

Таким образом, $A = \vec{\mathbf{i}}_1(\vec{\mathbf{i}}_1 \times \vec{\omega}) + \vec{\mathbf{i}}_2(\vec{\mathbf{i}}_2 \times \vec{\omega}) + \vec{\mathbf{i}}_3(\vec{\mathbf{i}}_3 \times \vec{\omega})$.

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор $\boldsymbol{A}$ называется антисимметричным, если $\boldsymbol{A}_c = -\boldsymbol{A}$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$A = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{p}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{p}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\vec{p}_1 = -\omega_3\vec{\mathbf{i}}_2 + \omega_2\vec{\mathbf{i}}_3 = \vec{\mathbf{i}}_1 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_2 = \omega_3\vec{\mathbf{i}}_1 - \omega_1\vec{\mathbf{i}}_3 = \vec{\mathbf{i}}_2 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_3 = -\omega_2\vec{\mathbf{i}}_1 + \omega_1\vec{\mathbf{i}}_2 = \vec{\mathbf{i}}_3 \times \vec{\omega}$.

Таким образом, $A = \vec{\mathbf{i}}_1(\vec{\mathbf{i}}_1 \times \vec{\omega}) + \vec{\mathbf{i}}_2(\vec{\mathbf{i}}_2 \times \vec{\omega}) + \vec{\mathbf{i}}_3(\vec{\mathbf{i}}_3 \times \vec{\omega})$.

Антисимметричный тензор задается 3 компонентами.

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор $\mathbf{\Pi}$.

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор $\mathbf{\Pi}$. Легко убедиться, что

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A},$$

где $\boldsymbol{S} = \dfrac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – симметричный, а $\boldsymbol{A} = \dfrac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\boldsymbol{S}_c =$$

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор $\mathbf{\Pi}$. Легко убедиться, что

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A},$$

где $\boldsymbol{S} = \dfrac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – симметричный, а $\boldsymbol{A} = \dfrac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\boldsymbol{S}_c = \left(\frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}\right)_c =$$

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор $\mathbf{\Pi}$. Легко убедиться, что

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A},$$

где $\boldsymbol{S} = \dfrac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – симметричный, а $\boldsymbol{A} = \dfrac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\boldsymbol{S}_c = \left(\frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}\right)_c = \frac{\mathbf{\Pi}_c + (\mathbf{\Pi}_c)_c}{2} =$$

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор $\mathbf{\Pi}$. Легко убедиться, что

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A},$$

где $\boldsymbol{S} = \dfrac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – симметричный, а $\boldsymbol{A} = \dfrac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\boldsymbol{S}_c = \left(\frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}\right)_c = \frac{\mathbf{\Pi}_c + (\mathbf{\Pi}_c)_c}{2} = \frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2} =$$

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор $\mathbf{\Pi}$. Легко убедиться, что

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A},$$

где $\boldsymbol{S} = \dfrac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – симметричный, а $\boldsymbol{A} = \dfrac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\boldsymbol{S}_c = \left(\frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}\right)_c = \frac{\mathbf{\Pi}_c + (\mathbf{\Pi}_c)_c}{2} = \frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2} = \boldsymbol{S},$$

$$\boldsymbol{A}_c =$$

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор $\mathbf{\Pi}$. Легко убедиться, что

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A},$$

где $\boldsymbol{S} = \dfrac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – симметричный, а $\boldsymbol{A} = \dfrac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\boldsymbol{S}_c = \left(\frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}\right)_c = \frac{\mathbf{\Pi}_c + (\mathbf{\Pi}_c)_c}{2} = \frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2} = \boldsymbol{S},$$

$$\boldsymbol{A}_c = \left(\frac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2}\right)_c =$$

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор $\mathbf{\Pi}$. Легко убедиться, что

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A},$$

где $\boldsymbol{S} = \dfrac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – симметричный, а $\boldsymbol{A} = \dfrac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\boldsymbol{S}_c = \left(\frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}\right)_c = \frac{\mathbf{\Pi}_c + (\mathbf{\Pi}_c)_c}{2} = \frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2} = \boldsymbol{S},$$

$$\boldsymbol{A}_c = \left(\frac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2}\right)_c = \frac{\mathbf{\Pi}_c - (\mathbf{\Pi}_c)_c}{2} =$$

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор $\mathbf{\Pi}$. Легко убедиться, что

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A},$$

где $\boldsymbol{S} = \dfrac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – симметричный, а $\boldsymbol{A} = \dfrac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\boldsymbol{S}_c = \left(\frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}\right)_c = \frac{\mathbf{\Pi}_c + (\mathbf{\Pi}_c)_c}{2} = \frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2} = \boldsymbol{S},$$

$$\boldsymbol{A}_c = \left(\frac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2}\right)_c = \frac{\mathbf{\Pi}_c - (\mathbf{\Pi}_c)_c}{2} = -\frac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2} =$$

Теорема
Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.
Пусть задан тензор $\mathbf{\Pi}$. Легко убедиться, что

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A},$$

где $\boldsymbol{S} = \dfrac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – симметричный, а $\boldsymbol{A} = \dfrac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\boldsymbol{S}_c = \left(\frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}\right)_c = \frac{\mathbf{\Pi}_c + (\mathbf{\Pi}_c)_c}{2} = \frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2} = \boldsymbol{S},$$

$$\boldsymbol{A}_c = \left(\frac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2}\right)_c = \frac{\mathbf{\Pi}_c - (\mathbf{\Pi}_c)_c}{2} = -\frac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2} = -\boldsymbol{A}.$$

□

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить в сумму трёх диад.

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить в сумму трёх диад.

Доказательство.

Пусть задан тензор $\mathbf{\Pi}$.

Разложение

$$\Pi = \vec{\mathbf{i}}_1 \vec{a}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 \vec{a}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 \vec{a}_3$$

и является суммой трёх диад. Такое разложение не является единственным.

□