

# Основные свойства аффинных ортогональных тензоров

*Верещагин Антон Сергеевич*  
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

23 мая 2019 г.

# Аннотация

Классификация тензоров. Теорема о полном тензоре. Теорема о существовании обратного тензора. Главные значения тензора. Инварианты тензора. Бискалярное произведение. Тензорное поле. Дивергенция тензора.

# Классификация тензоров

Пусть для выбранного тензора  $\mathbf{A}$  и произвольного вектора  $\vec{r}$

$$\vec{r'} = \mathbf{A} \cdot \vec{r},$$

тогда возможны следующие варианты:

- все  $\vec{r'}$  равны 0, тогда  $\mathbf{A}$  – нулевой;

# Классификация тензоров

Пусть для выбранного тензора  $\mathbf{A}$  и произвольного вектора  $\vec{r}$

$$\vec{r'} = \mathbf{A} \cdot \vec{r},$$

тогда возможны следующие варианты:

- все  $\vec{r'}$  равны 0, тогда  $\mathbf{A}$  – нулевой;
- все  $\vec{r'}$  лежат на одной прямой, тогда  $\mathbf{A}$  – линейный;

# Классификация тензоров

Пусть для выбранного тензора  $\mathbf{A}$  и произвольного вектора  $\vec{r}$

$$\vec{r'} = \mathbf{A} \cdot \vec{r},$$

тогда возможны следующие варианты:

- все  $\vec{r'}$  равны 0, тогда  $\mathbf{A}$  – нулевой;
- все  $\vec{r'}$  лежат на одной прямой, тогда  $\mathbf{A}$  – линейный;
- все  $\vec{r'}$  лежат в одной плоскости, тогда  $\mathbf{A}$  – планарный;

# Классификация тензоров

Пусть для выбранного тензора  $\mathbf{A}$  и произвольного вектора  $\vec{r}$

$$\vec{r'} = \mathbf{A} \cdot \vec{r},$$

тогда возможны следующие варианты:

- все  $\vec{r'}$  равны 0, тогда  $\mathbf{A}$  – нулевой;
- все  $\vec{r'}$  лежат на одной прямой, тогда  $\mathbf{A}$  – линейный;
- все  $\vec{r'}$  лежат в одной плоскости, тогда  $\mathbf{A}$  – планарный;
- $\vec{r'}$  описывают все векторы, тогда  $\mathbf{A}$  – полный;

# Классификация тензоров

Пусть для выбранного тензора  $\mathbf{A}$  и произвольного вектора  $\vec{r}$

$$\vec{r'} = \mathbf{A} \cdot \vec{r},$$

тогда возможны следующие варианты:

- все  $\vec{r'}$  равны 0, тогда  $\mathbf{A}$  – нулевой;
- все  $\vec{r'}$  лежат на одной прямой, тогда  $\mathbf{A}$  – линейный;
- все  $\vec{r'}$  лежат в одной плоскости, тогда  $\mathbf{A}$  – планарный;
- $\vec{r'}$  описывают все векторы, тогда  $\mathbf{A}$  – полный;

## Задача

Привести пример тензора каждого типа и обосновать.

# Теорема о полном тензоре

## Теорема (о полноте тензора)

*Для того, чтобы тензор  $\mathbf{P}$  был полным необходимо и достаточно, чтобы его определитель был отличен от 0.*



# Теорема о полном тензоре

## Теорема (о полноте тензора)

*Для того, чтобы тензор  $\mathbf{\Pi}$  был полным необходимо и достаточно, чтобы его определитель был отличен от 0.*

## Доказательство.

( $\Rightarrow$ ) Пусть тензор  $\mathbf{\Pi}$  полный, тогда для любого вектора  $\vec{r}' \in \mathbb{R}^3$  существует вектор  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ , такой что  $\vec{r}' = \mathbf{\Pi} \cdot \vec{r}$ . Для фиксированной системы координат это эквивалентно матричному равенству

$$\begin{Bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{pmatrix},$$

где  $r'_i$ ,  $r_j$  и  $p_{ks}$  – координаты соответствующих векторов и компоненты тензора в выбранной системе координат. Полученная система линейных уравнений имеет решение при любой правой части, следовательно  $D(\mathbf{\Pi}) \neq 0$ .

# Теорема о полном тензоре

## Теорема (о полноте тензора)

Для того, чтобы тензор  $\mathbf{\Pi}$  был полным необходимо и достаточно, чтобы его определитель был отличен от 0.

## Доказательство.

( $\Leftarrow$ ) Пусть  $D(\mathbf{\Pi}) \neq 0$ , тогда система линейных уравнений

$$\begin{Bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{pmatrix},$$

имеет решение  $r_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ) при любых значениях правой части  $r'_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) где  $r'_i$ ,  $r_j$  и  $p_{ks}$  – координаты векторов и компоненты тензора в фиксированной системе координат. Таким образом, у каждого вектора  $\vec{r}'$  есть прообраз  $\vec{r}$  такой, что  $\vec{r}' = \mathbf{\Pi} \cdot \vec{r}$ . Следовательно тензор  $\mathbf{\Pi}$  – полный.



# Обратный тензор

## Определение

Если для тензора  $\mathbf{П}$  существует тензор  $\mathbf{В}$  такой, что

$$\mathbf{В} \cdot \mathbf{П} = \mathbf{П} \cdot \mathbf{В} = \mathbf{I},$$

тогда тензор  $\mathbf{В}$  называется обратным тензором и обозначается  $\mathbf{П}^{-1}$ .

# Теорема о существовании обратного тензора

## Теорема

*Полнота тензора есть необходимое и достаточное условие существования обратного тензора.*

## Доказательство.

Доказательство очевидно и вытекает из правила произведения тензоров как матриц и теоремы о полноте тензора.



# Главные значения тензора

## Определение

Если для заданного тензора  $\mathbf{П}$ , вектора  $\vec{r}$  и числа  $\lambda$  справедливо равенство

$$\mathbf{П} \cdot \vec{r} = \lambda \vec{r} \quad (\vec{r} \neq 0),$$

то говорят, что  $\lambda$  – главное значение тензора  $\mathbf{П}$ , а  $\vec{r}$  – собственный вектор.

## Пояснения

Так как тензоры и векторы перемножаются по таким же законам как и матрицы, то главные значения тензора и его собственные векторы аналогичны собственным значениям и векторам соответствующим матрице тензора  $\mathbf{П}$  в выбранной системе координат и не зависят от неё.

# Инварианты тензора

## Определение

Характеристическим многочленом тензора  $\mathbf{P}$  называется функция

$$\chi(\lambda) = D(\mathbf{P} - \lambda I) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3.$$

Величины  $I_1, I_2, I_3$  – называются *инвариантами* тензора  $\mathbf{P}$ .

# Инварианты тензора

## Определение

Характеристическим многочленом тензора  $\mathbf{P}$  называется функция

$$\chi(\lambda) = D(\mathbf{P} - \lambda I) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3.$$

Величины  $I_1, I_2, I_3$  – называются **инвариантами** тензора  $\mathbf{P}$ .

## Независимость от системы координат

Величины  $I_1, I_2, I_3$  не зависят от выбора системы координат, т.к.

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) &= D(\mathbf{P} - \lambda I) = \det(\mathbf{P}' - \lambda I) = \det(Q^T \mathbf{P} Q - \lambda E) = \\ &= \det(Q^T (\mathbf{P} - \lambda E) Q) = \det Q^T \det(\mathbf{P} - \lambda E) \det Q = \det(\mathbf{P} - \lambda E),\end{aligned}$$

где  $\mathbf{P}'$  и  $\mathbf{P}$  компоненты тензора  $\mathbf{P}$  в различных ортогональных системах координат,  $Q$  – матрица перехода ( $Q^T = Q^{-1}$ ).

# Формулы для вычисления инвариантов

## СВОЙСТВО

Если  $\Pi = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$  матрица компонент тензора  $\Pi$  в некотором базисе, тогда

$$I_1 = p_{11} + p_{22} + p_{33} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{31} & p_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3,$$

где  $\lambda_i$  – собственные числа тензора  $\Pi$ .