Основные свойства аффинных ортогональных тензоров

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

23 мая 2019 г.

Аннотация

Классификация тензоров. Теорема о полном тензоре. Теорема о существовании обратного тензора. Главные значения тензора. Инварианты тензора. Бискалярное произведение. Тензорное поле. Дивергенция тензора.

Классификация тензоров

Пусть для выбранного тензора $\boldsymbol{A}$ и произвольного вектора $\vec{r}$

$$\vec{r'} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{r},$$

тогда возможны следующие варианты:

- все $\vec{r'}$ равны 0, тогда $\boldsymbol{A}$ – нулевой;

Классификация тензоров

Пусть для выбранного тензора $\boldsymbol{A}$ и произвольного вектора $\vec{r}$

$$\vec{r'} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{r},$$

тогда возможны следующие варианты:

- все $\vec{r'}$ равны 0, тогда $\boldsymbol{A}$ – нулевой;
- все $\vec{r'}$ лежат на одной прямой, тогда $\boldsymbol{A}$ – линейный;

Классификация тензоров

Пусть для выбранного тензора $\boldsymbol{A}$ и произвольного вектора $\vec{r}$

$$\vec{r'} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{r},$$

тогда возможны следующие варианты:

- все $\vec{r'}$ равны 0, тогда $\boldsymbol{A}$ – нулевой;
- все $\vec{r'}$ лежат на одной прямой, тогда $\boldsymbol{A}$ – линейный;
- все $\vec{r'}$ лежат в одной плоскости, тогда $\boldsymbol{A}$ – планарный;

Классификация тензоров

Пусть для выбранного тензора $\boldsymbol{A}$ и произвольного вектора $\vec{r}$

$$\vec{r'} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{r},$$

тогда возможны следующие варианты:

- все $\vec{r'}$ равны 0, тогда $\boldsymbol{A}$ – нулевой;
- все $\vec{r'}$ лежат на одной прямой, тогда $\boldsymbol{A}$ – линейный;
- все $\vec{r'}$ лежат в одной плоскости, тогда $\boldsymbol{A}$ – планарный;
- $\vec{r'}$ описывают все векторы, тогда $\boldsymbol{A}$ – полный;

Классификация тензоров

Пусть для выбранного тензора $\boldsymbol{A}$ и произвольного вектора $\vec{r}$

$$\vec{r'} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{r},$$

тогда возможны следующие варианты:

- все $\vec{r'}$ равны 0, тогда $\boldsymbol{A}$ – нулевой;
- все $\vec{r'}$ лежат на одной прямой, тогда $\boldsymbol{A}$ – линейный;
- все $\vec{r'}$ лежат в одной плоскости, тогда $\boldsymbol{A}$ – планарный;
- $\vec{r'}$ описывают все векторы, тогда $\boldsymbol{A}$ – полный;

Задача

Привести пример тензора каждого типа и обосновать.

Теорема о полном тензоре

Теорема (о полноте тензора)

Для того, чтобы тензор $\mathbf{\Pi}$ *был полным необходимо и достаточно, чтобы его определитель был отличен от* 0.

Теорема о полном тензоре

Теорема (о полноте тензора)

Для того, чтобы тензор $\mathbf{\Pi}$ *был полным необходимо и достаточно, чтобы его определитель был отличен от* 0.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть тензор $\mathbf{\Pi}$ полный, тогда для любого вектора $\vec{r'} \in \mathrm{R}^3$ существует вектор $\vec{r} \in \mathrm{R}^3$, такой что $\vec{r'} = \mathbf{\Pi} \cdot \vec{r}$. Для фиксированной системы координат это эквивалентно матричному равенству

$$\left\{ \begin{matrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{pmatrix},$$

где r'_i, r_j и p_{ks} – координаты соответствующих векторов и компоненты тензора в выбранной системе координат. Полученная система линейных уравнений имеет решение при любой правой части, следовательно $D(\mathbf{\Pi}) \neq 0$.

Теорема (о полноте тензора)

Для того, чтобы тензор $\mathbf{\Pi}$ *был полным необходимо и достаточно, чтобы его определитель был отличен от* 0.

Доказательство.

($\Leftarrow$) Пусть $D(\mathbf{\Pi}) \neq 0$, тогда система линейных уравнений

$$\begin{Bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{pmatrix},$$

имеет решение r_j $(j = \overline{1,3})$ при любых значениях правой части r'_i $(i = \overline{1,3})$ где r'_i, r_j и p_{ks} – координаты векторов и компоненты тензора в фиксированной системе координат. Таким образом, у каждого вектора $\vec{r'}$ есть прообраз $\vec{r}$ такой, что $\vec{r'} = \mathbf{\Pi} \cdot \vec{r}$. Следовательно тензор $\mathbf{\Pi}$ – полный.

$\square$

Обратный тензор

Определение

Если для тензора $\mathbf{\Pi}$ *существует тензор* $\boldsymbol{B}$ *такой, что*

$$\boldsymbol{B} \cdot \mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I},$$

тогда тензор $\boldsymbol{B}$ *называется обратным тензором и обозначается* $\mathbf{\Pi}^{-1}$.

Теорема о существовании обратного тензора

Теорема

Полнота тензора есть необходимое и достаточное условие существования обратного тензора.

Доказательство.

Доказательство очевидно и вытекает из правила произведения тензоров как матриц и предыдущей теореме о полном тензоре. □

Главные значения тензора

Определение

Если для заданного тензора $\mathbf{\Pi}$, *вектора* $\vec{r}$ *и числа* λ *справедливо равенство*

$$\mathbf{\Pi} \cdot \vec{r} = \lambda \vec{r} \quad (\vec{r} \neq 0),$$

то говорят, что λ *– главное значение тензора* $\mathbf{\Pi}$, *а* $\vec{r}$ *– собственный вектор.*

Пояснения

Так как тензоры и векторы перемножаются по таким же законам как и матрицы, то главные значения тензора и его собственные векторы аналогичны собственным значениям и векторам соответствующим матрице тензора $\mathbf{\Pi}$ в выбранной системе координат и не зависят от неё.

Инварианты тензора

Определение

Характеристическим многочленом тензора $\mathbf{\Pi}$ *называется функция*

$$\chi(\lambda) = D(\mathbf{\Pi} - \lambda I) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3.$$

Величины I_1, I_2, I_3 *– называются* ***инвариантами*** *тензора* $\mathbf{\Pi}$.

Инварианты тензора

Определение

Характеристическим многочленом тензора **П** *называется функция*

$$\chi(\lambda) = D(\mathbf{\Pi} - \lambda I) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3.$$

Величины I_1, I_2, I_3 – называются *инвариантами* *тензора* **П***.*

Свойство

Если $\Pi = (p_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ матрица компонент тензора **П** в некотором базисе, тогда

$$I_1 = p_{11} + p_{22} + p_{33},$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{31} & p_{33} \end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}.$$

Постоянство ин