

# Сведения из теории матриц

*Верецагин Антон Сергеевич*

канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

QR-код презентации



6 февраля 2023 г.

# Аннотация

Сведения из теории матриц. Теоремы о разрешимости систем линейных уравнений.

# Прямоугольные матрицы

## Определение

Прямоугольную таблицу размера  $m \times n$  ( $m$  строк,  $n$  столбцов) из действительных чисел будем называть прямоугольной матрицей и обозначать:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ik})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n}.$$

# Определитель матрицы

## Определение

*Если  $m = n$ , тогда матрица  $A$  называется квадратной.*

## Определение

*Определителем квадратной матрицы  $A = (a_{ik})_{1 \leq i, k \leq n}$  называется следующая функция от элементов матрицы:*

$$|A| = \det A = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} (-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{1, \alpha_1} a_{2, \alpha_2} \dots a_{n, \alpha_n},$$

*где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  – перестановка чисел от 1 до  $n$ ,  $N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  – число инверсий в перестановке, суммирование проводится по всем перестановкам порядка  $n$ .*

В общем случае, определитель можно вычислить, применив следующую рекурсивную формулу:

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \bar{M}_j^1,$$

где  $\bar{M}_j^1$  – дополнительный минор к элементу  $a_{j1}$ . Эта формула называется разложением по 1-ой строке.

## Определение

*Если  $|A| = 0$ , то матрица называется особенной, иначе – неособенной.*

## Свойство

- 1) *Определитель матрицы не меняется при транспонировании матрицы.*
- 2) *Если две строки (столбца) матрицы совпадают, то её определитель равен нулю.*
- 3) *При добавлении к любой строке (столбцу) линейной комбинации других строк (столбцов) определитель не изменится.*
- 4) *Если хотя бы одна строка (столбец) матрицы нулевая, то определитель равен нулю.*
- 5) *Если переставить две строки (столбца) матрицы, то её определитель умножается на  $(-1)$ .*

# Минор матрицы

## Определение

Из элементов прямоугольной матрицы  $A$  размера  $m \times n$  можно составить квадратную матрицу размера  $p \times p$ , выбрав из неё строки с номерами  $i_1, i_2, \dots, i_p$  и столбцы с номерами  $k_1, k_2, \dots, k_p$ . Определитель полученной матрицы называется минором  $p$ -ого порядка:

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \dots & a_{i_1 k_p} \\ a_{i_2 k_1} & a_{i_2 k_2} & \dots & a_{i_2 k_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_p k_1} & a_{i_p k_2} & \dots & a_{i_p k_p} \end{vmatrix}.$$

## Определение

Если  $i_1 = k_1, i_2 = k_2, \dots, i_p = k_p$ , то минор называется главным.

## Определение

*Наибольший из порядков отличных от нуля миноров называется рангом матрицы  $A$  и обозначается  $r_A$ .*

## Свойство

- 1) Ранг прямоугольной  $m \times n$  матрицы  $A$  меньше либо равен  $\min(m, n)$ :  $r_A \leq \min(m, n)$ .*
- 2) Если у квадратной  $n \times n$  матрицы  $A$  определитель равен 0, тогда  $r_A < n$ , в противном случае  $r_A = n$ .*



## Определение

*Произведением  $m \times s$  матрицы  $A$  на  $s \times n$  матрицу  $B$  называется  $m \times n$  матрица  $C$ , элементы которой определяются по формулам:*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj}, \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n).$$

## Теорема

*Ранг произведения двух матриц не превосходит ранги сомножителей, т.е. если  $C = AB$ , то  $r_C \leq \min(r_A, r_B)$ .*

## Теорема

*При умножении прямоугольной матрицы слева или справа на неособенную матрицу ранг исходной матрицы не изменяется.*

## Определение

*Единичной матрицей  $E$  называют диагональную  $n \times n$  матрицу с единицами на главной диагонали:*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

## Определение

*Если для квадратной  $n \times n$  матрицы  $A$  существует матрица  $B$  такая, что*

$$AB = BA = E,$$

*тогда  $B$  называют матрицей обратной к  $A$  и обозначают  $A^{-1}$ .*

## Свойство

- 1) В общем случае, вообще говоря,  $AB \neq BA$ .
- 2) Для любой квадратной матрицы  $A$  и соответствующего размера единичной  $E$ :  $AE=EA=A$ .
- 3)  $|AB| = |A||B|$ .
- 4)  $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ .
- 5) Для квадратной матрицы  $A$  существует обратная матрица  $A^{-1}$  тогда и только тогда, когда  $|A| \neq 0$ .

# Системы линейных уравнений

Систему из  $m$  линейных уравнений с  $n$  переменными

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_1, \\ & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

можно переписать используя  $m \times n$  матрицу  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ ,  $n$  вектор столбец  $x = (x_j)_{1 \leq j \leq n}$ ,  $m$  вектор столбец  $b = (b_i)_{1 \leq i \leq m}$  в кратком матричном виде

$$Ax = b.$$

# Теоремы о единственности решения однородной системы линейных уравнений

## Теорема

*Пусть  $A$  квадратная  $n \times n$  матрица,  $x$  столбец размера  $n$ . Уравнение  $Ax = 0$  имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда матрица  $A$  особенная ( $|A| = 0$ ), иначе говоря, когда ранг матрицы  $A$  меньше числа неизвестных ( $r_A < n$ ). В противном случае неособенной матрицы ( $|A| \neq 0$ ), иначе говоря,  $r_A = n$ ) оно имеет только нулевое решение.*

## Теорема

*Пусть  $A$  прямоугольная  $m \times n$  матрица,  $x$  столбец размера  $n$ . Система линейных уравнений  $Ax = 0$  имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы  $A$  меньше числа неизвестных ( $r_A < n$ ). В противном случае ( $r_A = n$ ) она имеет только нулевое решение.*

# Теорема о разрешимости системы линейных уравнений

## Теорема Кронекера-Капелли

Система линейных уравнений  $Ax = b$  разрешима тогда и только тогда, когда ранг матрицы  $A$  равен рангу матрицы  $A|b$ , где  $A|b$  – расширенная матрица, полученная из матрицы  $A$  приписыванием столбца  $b$ .

1. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. Учебник. 17-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2008.
2. *Ветлуцкий В. Н.* Специальные разделы высшей математики: учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005.