Операции с тензорами

к.ф.-м.н. *Верещагин Антон Сергеевич*

Лекция 10

30 мая 2016 г.

Аннотация

Скалярное и векторное умножение тензора на вектор. Скалярное произведение тензоров.

Скалярное и векторное умножение тензора на вектор

Определение

Под *скалярным произведением тензора* $\mathbf{\Pi} = \vec{i}_1\vec{p}_1 + \vec{i}_2\vec{p}_2 + \vec{i}_3\vec{p}_3$ *на вектор* $\vec{a} = \vec{i}_1 a_1 + \vec{i}_2 a_2 + \vec{i}_3 a_3$ *справа* *будем понимать вектор* $\vec{a}'$:

$$\vec{a}' = \mathbf{\Pi} \cdot \vec{a} = \vec{i}_1(\vec{p}_1 \cdot \vec{a}) + \vec{i}_2(\vec{p}_2 \cdot \vec{a}) + \vec{i}_3(\vec{p}_3 \cdot \vec{a}).$$

Скалярное и векторное умножение тензора на вектор

Определение

Под скалярным произведением тензора $\mathbf{\Pi} = \vec{i}_1\vec{p}_1 + \vec{i}_2\vec{p}_2 + \vec{i}_3\vec{p}_3$ *на вектор* $\vec{a} = \vec{i}_1 a_1 + \vec{i}_2 a_2 + \vec{i}_3 a_3$ *справа будем понимать вектор* $\vec{a}'$*:*

$$\vec{a'} = \mathbf{\Pi} \cdot \vec{a} = \vec{i}_1(\vec{p}_1 \cdot \vec{a}) + \vec{i}_2(\vec{p}_2 \cdot \vec{a}) + \vec{i}_3(\vec{p}_3 \cdot \vec{a}).$$

Определение

Под скалярным произведением вектора $\vec{a}$ *на тензор* $\mathbf{\Pi}$ *слева понимается вектор* $\vec{a''}$*:*

$$\vec{a''} = \vec{a} \cdot \mathbf{\Pi} = (\vec{a} \cdot \vec{i}_1)\vec{p}_1 + (\vec{a} \cdot \vec{i}_2)\vec{p}_2 + (\vec{a} \cdot \vec{i}_3)\vec{p}_3 =$$

$$= a_1\vec{p}_1 + a_2\vec{p}_2 + a_3\vec{p}_3.$$

Диада (повтор)

Определение

Пусть $\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 a_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 a_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 a_3$ *и* $\vec{b} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3$, *тогда* *диадным* *или* *тензорными произведением* *векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется тензор, определяемый следующим соотношением:*

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a}\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{i}}_1 (a_1 \vec{b}) + \vec{\mathbf{i}}_2 (a_2 \vec{b}) + \vec{\mathbf{i}}_3 (a_3 \vec{b}).$$

Диада (повтор)

Определение

Пусть $\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 a_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 a_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 a_3$ *и* $\vec{b} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3$, *тогда* *диадным* *или* *тензорными произведением* *векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется тензор, определяемый следующим соотношением:*

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a}\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{i}}_1(a_1 \vec{b}) + \vec{\mathbf{i}}_2(a_2 \vec{b}) + \vec{\mathbf{i}}_3(a_3 \vec{b}).$$

Линейность диады по каждому аргументу

$$(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}.$$

$$\vec{c}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c}\vec{a} + \vec{c}\vec{b}.$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c})\cdot\vec{a} =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1\vec{c}+\vec{\mathbf{i}}_2 b_2\vec{c}+\vec{\mathbf{i}}_3 b_3\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1(\vec{c}\cdot\vec{a})+\vec{\mathbf{i}}_2 b_2(\vec{c}\cdot\vec{a})+\vec{\mathbf{i}}_3 b_3(\vec{c}\cdot\vec{a}) =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1\vec{c}+\vec{\mathbf{i}}_2 b_2\vec{c}+\vec{\mathbf{i}}_3 b_3\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1(\vec{c}\cdot\vec{a})+\vec{\mathbf{i}}_2 b_2(\vec{c}\cdot\vec{a})+\vec{\mathbf{i}}_3 b_3(\vec{c}\cdot\vec{a}) =$$

$$= (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)(\vec{c}\cdot\vec{a}) =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1\vec{c}+\vec{\mathbf{i}}_2 b_2\vec{c}+\vec{\mathbf{i}}_3 b_3\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1(\vec{c}\cdot\vec{a})+\vec{\mathbf{i}}_2 b_2(\vec{c}\cdot\vec{a})+\vec{\mathbf{i}}_3 b_3(\vec{c}\cdot\vec{a}) =$$

$$= (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)(\vec{c}\cdot\vec{a}) = \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}).$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\vec{c}) =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1\vec{c}+\vec{\mathbf{i}}_2 b_2\vec{c}+\vec{\mathbf{i}}_3 b_3\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1(\vec{c}\cdot\vec{a})+\vec{\mathbf{i}}_2 b_2(\vec{c}\cdot\vec{a})+\vec{\mathbf{i}}_3 b_3(\vec{c}\cdot\vec{a}) =$$

$$= (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)(\vec{c}\cdot\vec{a}) = \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}).$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{\mathbf{i}}_1 b_1\vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2\vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3\vec{c}) =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1\vec{c}+\vec{\mathbf{i}}_2 b_2\vec{c}+\vec{\mathbf{i}}_3 b_3\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1(\vec{c}\cdot\vec{a})+\vec{\mathbf{i}}_2 b_2(\vec{c}\cdot\vec{a})+\vec{\mathbf{i}}_3 b_3(\vec{c}\cdot\vec{a}) =$$

$$= (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)(\vec{c}\cdot\vec{a}) = \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}).$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{\mathbf{i}}_1 b_1\vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2\vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3\vec{c}) = a_1 b_1\vec{c} + a_2 b_2\vec{c} + a_3 b_3\vec{c} =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1\vec{c}+\vec{\mathbf{i}}_2 b_2\vec{c}+\vec{\mathbf{i}}_3 b_3\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1(\vec{c}\cdot\vec{a})+\vec{\mathbf{i}}_2 b_2(\vec{c}\cdot\vec{a})+\vec{\mathbf{i}}_3 b_3(\vec{c}\cdot\vec{a}) =$$

$$= (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)(\vec{c}\cdot\vec{a}) = \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}).$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{\mathbf{i}}_1 b_1\vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2\vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3\vec{c}) = a_1 b_1\vec{c} + a_2 b_2\vec{c} + a_3 b_3\vec{c} =$$

$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)\vec{c} =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1\vec{c}+\vec{\mathbf{i}}_2 b_2\vec{c}+\vec{\mathbf{i}}_3 b_3\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1(\vec{c}\cdot\vec{a})+\vec{\mathbf{i}}_2 b_2(\vec{c}\cdot\vec{a})+\vec{\mathbf{i}}_3 b_3(\vec{c}\cdot\vec{a}) =$$

$$= (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)(\vec{c}\cdot\vec{a}) = \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}).$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{\mathbf{i}}_1 b_1\vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2\vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3\vec{c}) = a_1 b_1\vec{c} + a_2 b_2\vec{c} + a_3 b_3\vec{c} =$$

$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}.$$

Векторное произведение тензора на вектор

Определение

Под *векторным произведением тензора* $\mathbf{\Pi}$ *на вектор* $\vec{a}$ *справа понимается новый тензор* $\mathbf{\Pi}'$*, вычисленный по формуле:*

$$\mathbf{\Pi}' = \mathbf{\Pi} \times \vec{a} = \vec{i}_1(\vec{p}_1 \times \vec{a}) + \vec{i}_2(\vec{p}_2 \times \vec{a}) + \vec{i}_3(\vec{p}_3 \times \vec{a}).$$

Векторное произведение тензора на вектор

Определение

Под векторным произведением тензора $\mathbf{\Pi}$ *на вектор* $\vec{a}$ *справа понимается новый тензор* $\mathbf{\Pi}'$*, вычисленный по формуле:*

$$\mathbf{\Pi}' = \mathbf{\Pi} \times \vec{a} = \vec{i}_1(\vec{p}_1 \times \vec{a}) + \vec{i}_2(\vec{p}_2 \times \vec{a}) + \vec{i}_3(\vec{p}_3 \times \vec{a}).$$

Определение

Под векторным произведением вектора $\vec{a}$ *на тензор* $\mathbf{\Pi}$ *слева понимается новый тензор* $\mathbf{\Pi}''$*, вычисленный по формуле:*

$$\mathbf{\Pi}'' = \vec{a} \times \Pi = (\vec{a} \times \vec{i}_1)\vec{p}_1 + (\vec{a} \times \vec{i}_2)\vec{p}_2 + (\vec{a} \times \vec{i}_3)\vec{p}_3.$$

Векторное произведение тензора на вектор

Определение

*Под **векторным произведением тензора** $\mathbf{\Pi}$ **на вектор** $\vec{a}$ **справа** понимается новый тензор $\mathbf{\Pi}'$, вычисленный по формуле:*

$$\mathbf{\Pi}' = \mathbf{\Pi} \times \vec{a} = \vec{i}_1(\vec{p}_1 \times \vec{a}) + \vec{i}_2(\vec{p}_2 \times \vec{a}) + \vec{i}_3(\vec{p}_3 \times \vec{a}).$$

Определение

*Под **векторным произведением вектора** $\vec{a}$ **на тензор** $\mathbf{\Pi}$ **слева** понимается новый тензор $\mathbf{\Pi}''$, вычисленный по формуле:*

$$\mathbf{\Pi}'' = \vec{a} \times \Pi = (\vec{a} \times \vec{i}_1)\vec{p}_1 + (\vec{a} \times \vec{i}_2)\vec{p}_2 + (\vec{a} \times \vec{i}_3)\vec{p}_3.$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

$$\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

$$\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \times (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

$$\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \times (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times \vec{\mathbf{i}}_1)(b_1 \vec{c}) + (a \times \vec{\mathbf{i}}_2)(b_2 \vec{c}) + (a \times \vec{\mathbf{i}}_3)(b_3 \vec{c}) =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= \vec{\mathbf{i}}_1 b_1(\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2(\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

$$\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \times (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times \vec{\mathbf{i}}_1)(b_1 \vec{c}) + (a \times \vec{\mathbf{i}}_2)(b_2 \vec{c}) + (a \times \vec{\mathbf{i}}_3)(b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times \vec{\mathbf{i}}_1 b_1)\vec{c} + (a \times \vec{\mathbf{i}}_2 b_2)\vec{c} + (a \times \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)\vec{c} =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

$$\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \times (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times \vec{\mathbf{i}}_1)(b_1 \vec{c}) + (a \times \vec{\mathbf{i}}_2)(b_2 \vec{c}) + (a \times \vec{\mathbf{i}}_3)(b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times \vec{\mathbf{i}}_1 b_1)\vec{c} + (a \times \vec{\mathbf{i}}_2 b_2)\vec{c} + (a \times \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)\vec{c} =$$

$$= (a \times \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + a \times \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + a \times \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)\vec{c} =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

$$\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \times (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times \vec{\mathbf{i}}_1)(b_1 \vec{c}) + (a \times \vec{\mathbf{i}}_2)(b_2 \vec{c}) + (a \times \vec{\mathbf{i}}_3)(b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times \vec{\mathbf{i}}_1 b_1)\vec{c} + (a \times \vec{\mathbf{i}}_2 b_2)\vec{c} + (a \times \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)\vec{c} =$$

$$= (a \times \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + a \times \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + a \times \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)\vec{c} = (a \times (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3))\vec{c} =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

$$\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \times (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times \vec{\mathbf{i}}_1)(b_1 \vec{c}) + (a \times \vec{\mathbf{i}}_2)(b_2 \vec{c}) + (a \times \vec{\mathbf{i}}_3)(b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times \vec{\mathbf{i}}_1 b_1)\vec{c} + (a \times \vec{\mathbf{i}}_2 b_2)\vec{c} + (a \times \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)\vec{c} =$$

$$= (a \times \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + a \times \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + a \times \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)\vec{c} = (a \times (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3))\vec{c} =$$

$$\times \vec{b})\vec{c}.$$

Пример

Рассмотрим единичный тензор $\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3$.

Пример

Рассмотрим единичный тензор $\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3$. Построим тензор $\boldsymbol{\Psi}$

$$\boldsymbol{\Psi} = \vec{\omega} \times \boldsymbol{I} = (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)\vec{\mathbf{i}}_1 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)\vec{\mathbf{i}}_2 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Пример

Рассмотрим единичный тензор $\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3$. Построим тензор $\boldsymbol{\Psi}$

$$\boldsymbol{\Psi} = \vec{\omega} \times \boldsymbol{I} = (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)\vec{\mathbf{i}}_1 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)\vec{\mathbf{i}}_2 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Умножим тензор $\boldsymbol{\Psi}$ на произвольный вектор $\vec{a}$ справа

$$\boldsymbol{\Psi} \cdot \vec{a} =$$

Пример

Рассмотрим единичный тензор $\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3$. Построим тензор $\boldsymbol{\Psi}$

$$\boldsymbol{\Psi} = \vec{\omega} \times \boldsymbol{I} = (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)\vec{\mathbf{i}}_1 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)\vec{\mathbf{i}}_2 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Умножим тензор $\boldsymbol{\Psi}$ на произвольный вектор $\vec{a}$ справа

$$\boldsymbol{\Psi} \cdot \vec{a} = (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)(\vec{\mathbf{i}}_1 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)(\vec{\mathbf{i}}_2 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)(\vec{\mathbf{i}}_3 \cdot \vec{a}) =$$

Пример

Рассмотрим единичный тензор $\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3$. Построим тензор $\boldsymbol{\Psi}$

$$\boldsymbol{\Psi} = \vec{\omega} \times \boldsymbol{I} = (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)\vec{\mathbf{i}}_1 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)\vec{\mathbf{i}}_2 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Умножим тензор $\boldsymbol{\Psi}$ на произвольный вектор $\vec{a}$ справа

$$\boldsymbol{\Psi} \cdot \vec{a} = (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)(\vec{\mathbf{i}}_1 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)(\vec{\mathbf{i}}_2 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)(\vec{\mathbf{i}}_3 \cdot \vec{a}) =$$

$$= (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)a_1 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)a_2 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)a_3 =$$

Пример

Рассмотрим единичный тензор $\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3$. Построим тензор $\boldsymbol{\Psi}$

$$\boldsymbol{\Psi} = \vec{\omega} \times \boldsymbol{I} = (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)\vec{\mathbf{i}}_1 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)\vec{\mathbf{i}}_2 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Умножим тензор $\boldsymbol{\Psi}$ на произвольный вектор $\vec{a}$ справа

$$\boldsymbol{\Psi} \cdot \vec{a} = (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)(\vec{\mathbf{i}}_1 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)(\vec{\mathbf{i}}_2 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)(\vec{\mathbf{i}}_3 \cdot \vec{a}) =$$

$$= (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)a_1 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)a_2 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)a_3 =$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{a}.$$

Пример

Рассмотрим единичный тензор $\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3$. Построим тензор $\boldsymbol{\Psi}$

$$\boldsymbol{\Psi} = \vec{\omega} \times \boldsymbol{I} = (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)\vec{\mathbf{i}}_1 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)\vec{\mathbf{i}}_2 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Умножим тензор $\boldsymbol{\Psi}$ на произвольный вектор $\vec{a}$ справа

$$\boldsymbol{\Psi} \cdot \vec{a} = (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)(\vec{\mathbf{i}}_1 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)(\vec{\mathbf{i}}_2 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)(\vec{\mathbf{i}}_3 \cdot \vec{a}) =$$

$$= (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)a_1 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)a_2 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)a_3 =$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{a}.$$

Таким образом, любой антисимметричный тензор может быть представлен в виде

$$\vec{\omega} \times \boldsymbol{I}.$$

Произведение тензоров

Рассмотрим два тензора $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ и вектор $\vec{c}$. Тогда пусть

$$\vec{c'} = \boldsymbol{B} \cdot \vec{c}.$$

и

$$\vec{c''} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{c'} = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \vec{c}).$$

Произведение тензоров

Рассмотрим два тензора $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ и вектор $\vec{c}$. Тогда пусть

$$\vec{c'} = \boldsymbol{B} \cdot \vec{c}.$$

и

$$\vec{c''} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{c'} = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \vec{c}).$$

Определение

Если переход от вектора $\vec{c}$ к вектору $\vec{c''}$ осуществляется с помощью одного тензора $\mathbf{\Pi}$ со скалярными элементами p_{kl}:

$$\vec{c''} = \mathbf{\Pi} \cdot \vec{c},$$

то тензор $\mathbf{\Pi}$ называется скалярным произведением тензоров $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$:

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}.$$

Покомпонентные формулы для скалярного произведения тензоров

Определитель тензора

Определение

Определителем тензора **П** *называется определитель матрицы его компонент:*

$$D(\Pi) = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}.$$

Определитель тензора

Определение

Определителем тензора **П** *называется определитель матрицы его компонент:*

$$D(\Pi) = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}.$$

Определитель произведения тензоров

Т.к. тензоры перемножаются как матрицы, то

$$D(\Pi) = D(A)D(B).$$

Скалярное произведение диад

Теорема

Пусть $\boldsymbol{A} = \vec{p}\vec{q}$ и $\boldsymbol{B} = \vec{r}\vec{s}$, тогда

$$\boldsymbol{\Pi} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}\vec{s}) = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

Скалярное произведение диад

Теорема

Пусть $\boldsymbol{A} = \vec{p}\vec{q}$ и $\boldsymbol{B} = \vec{r}\vec{s}$, тогда

$$\mathbf{\Pi} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}\vec{s}) = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

Доказательство.

Для произвольного вектора $\vec{x}$ рассмотрим

$$\mathbf{\Pi} \cdot \vec{x} =$$

Скалярное произведение диад

Теорема

Пусть $\boldsymbol{A} = \vec{p}\vec{q}$ и $\boldsymbol{B} = \vec{r}\vec{s}$, тогда

$$\boldsymbol{\Pi} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}\vec{s}) = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

Доказательство.

Для произвольного вектора $\vec{x}$ рассмотрим

$$\boldsymbol{\Pi} \cdot \vec{x} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot ((\vec{r}\vec{s}) \cdot \vec{x}) = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}(\vec{s} \cdot \vec{x})) =$$

Скалярное произведение диад

Теорема

Пусть $\boldsymbol{A} = \vec{p}\vec{q}$ и $\boldsymbol{B} = \vec{r}\vec{s}$, тогда

$$\mathbf{\Pi} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}\vec{s}) = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

Доказательство.

Для произвольного вектора $\vec{x}$ рассмотрим

$$\mathbf{\Pi} \cdot \vec{x} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot ((\vec{r}\vec{s}) \cdot \vec{x}) = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}(\vec{s} \cdot \vec{x})) = \vec{p}(\vec{q} \cdot \vec{r})(\vec{s} \cdot \vec{x}) =$$

Скалярное произведение диад

Теорема

Пусть $\boldsymbol{A} = \vec{p}\vec{q}$ и $\boldsymbol{B} = \vec{r}\vec{s}$, тогда

$$\mathbf{\Pi} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}\vec{s}) = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

Доказательство.

Для произвольного вектора $\vec{x}$ рассмотрим

$$\mathbf{\Pi} \cdot \vec{x} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot ((\vec{r}\vec{s}) \cdot \vec{x}) = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}(\vec{s} \cdot \vec{x})) = \vec{p}(\vec{q} \cdot \vec{r})(\vec{s} \cdot \vec{x}) =$$

$$= ((\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}) \cdot \vec{x}.$$

Скалярное произведение диад

Теорема

Пусть $\boldsymbol{A} = \vec{p}\vec{q}$ и $\boldsymbol{B} = \vec{r}\vec{s}$, тогда

$$\mathbf{\Pi} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}\vec{s}) = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

Доказательство.

Для произвольного вектора $\vec{x}$ рассмотрим

$$\mathbf{\Pi} \cdot \vec{x} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot ((\vec{r}\vec{s}) \cdot \vec{x}) = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}(\vec{s} \cdot \vec{x})) = \vec{p}(\vec{q} \cdot \vec{r})(\vec{s} \cdot \vec{x}) =$$

$$= ((\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}) \cdot \vec{x}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{\Pi} = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

$\square$