Дивергенция и ротор векторного поля

Верещагин Антон Сергеевич
д-р. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

QR-код презентации

26 марта 2024 г.

Аннотация

Дивергенция вектора. Теорема Гаусса-Остроградского. Ротор вектора. Теорема Стокса и ее следствия.

Поток вектора через поверхность

Определение

Интеграл, определенный для площадки
S,

Поток вектора через поверхность

Определение

Интеграл, определенный для площадки S, над векторным полем $\vec{a}$ как предел

Поток вектора через поверхность

Определение

Интеграл, определенный для площадки S, над векторным полем $\vec{a}$ как предел

$$\int\limits_S \vec{a} \cdot d\vec{S} =$$

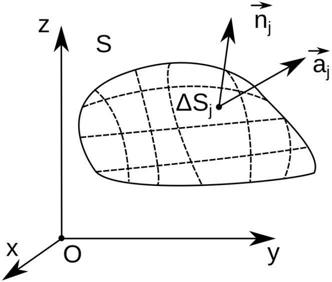
Поток вектора через поверхность

Определение

Интеграл, определенный для площадки S, над векторным полем $\vec{a}$ как предел

$$\int\limits_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta S_j \to 0} \sum_j \vec{a}_j \cdot \Delta\vec{S}_j,$$

Поток вектора через поверхность



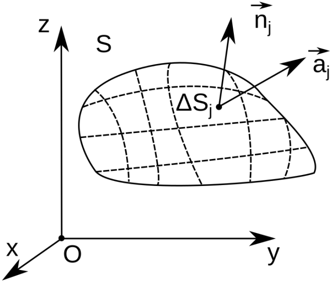
Определение

Интеграл, определенный для площадки S, над векторным полем $\vec{a}$ как предел

$$\int\limits_S \vec{a}\cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta S_j\to 0}\sum_j \vec{a}_j\cdot\Delta\vec{S}_j,$$

называется потоком вектора $\vec{a}$ через поверхность S.

Поток вектора через поверхность



Определение

Интеграл, определенный для площадки S, над векторным полем $\vec{a}$ как предел

$$\int\limits_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta S_j \to 0} \sum_j \vec{a}_j \cdot \Delta \vec{S}_j,$$

называется потоком вектора $\vec{a}$ через поверхность S.

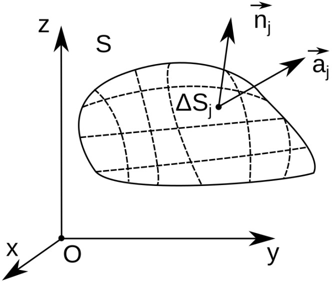
Здесь ΔS_j – элементарные площадки разбивающие поверхность S;

Поток вектора через поверхность

Определение

Интеграл, определенный для площадки S, над векторным полем $\vec{a}$ как предел

$$\int\limits_S \vec{a}\cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta S_j\to 0}\sum_j \vec{a}_j\cdot\Delta\vec{S}_j,$$



называется **потоком вектора** *$\vec{a}$ через поверхность S.*

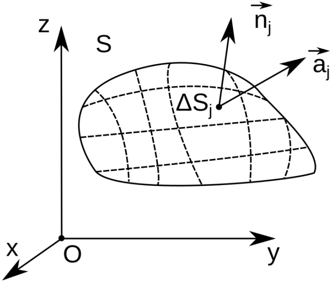
Здесь ΔS_j – элементарные площадки разбивающие поверхность S;
$\vec{n}_j$ – внешняя единичная нормаль в любой точке ΔS_j;

Поток вектора через поверхность

Определение

Интеграл, определенный для площадки S, над векторным полем $\vec{a}$ как предел

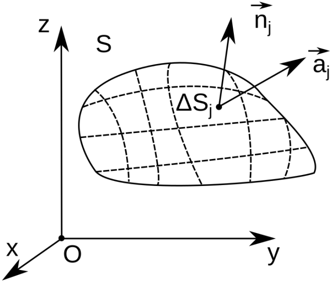
$$\int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta S_j \to 0} \sum_j \vec{a}_j \cdot \Delta\vec{S}_j,$$



называется **потоком вектора** *$\vec{a}$ через поверхность S.*

Здесь ΔS_j – элементарные площадки разбивающие поверхность S; $\vec{n}_j$ – внешняя единичная нормаль в любой точке ΔS_j; $\vec{a}_j$ – значение векторного поля $\vec{a}$ в любой точке площадки ΔS_j;

Поток вектора через поверхность



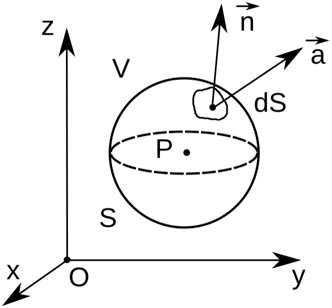
Определение

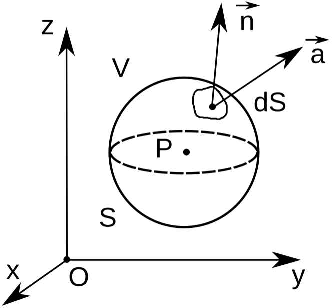
Интеграл, определенный для площадки S, над векторным полем $\vec{a}$ как предел

$$\int\limits_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta S_j \to 0} \sum_j \vec{a}_j \cdot \Delta \vec{S}_j,$$

называется потоком вектора $\vec{a}$ через поверхность S.

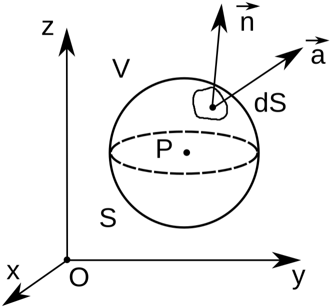
Здесь ΔS_j – элементарные площадки разбивающие поверхность S; $\vec{n}_j$ – внешняя единичная нормаль в любой точке ΔS_j; $\vec{a}_j$ – значение векторного поля $\vec{a}$ в любой точке площадки ΔS_j; $\Delta \vec{S}_j = \vec{n}_j \Delta S_j$.


z
$\vec{n}$
$\vec{a}$
V
dS
P
S
x
O
y



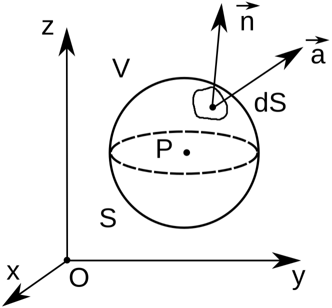
Определение

Дивергенция вектора $\vec{a}$ *в точке* P



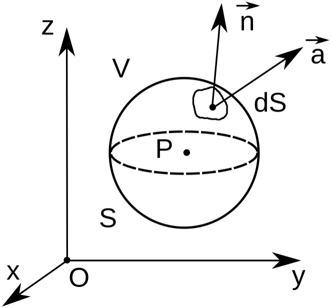
Определение

Дивергенция вектора $\vec{a}$ *в точке* P *есть отнесенный к единице объема* V *поток вектора* $\vec{a}$ *через поверхность* S,



Определение

Дивергенция вектора $\vec{a}$ *в точке* P *есть отнесенный к единице объема* V *поток вектора* $\vec{a}$ *через поверхность* S*, окружающую точку* P*, при стягивании последнего в точку* P*:*



Определение

Дивергенция вектора $\vec{a}$ в точке P есть отнесенный к единице объема V поток вектора $\vec{a}$ через поверхность S, окружающую точку P, при стягивании последнего в точку P:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int\limits_S \vec{a}\cdot\vec{n}dS = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int\limits_S a_n dS.$$

Представление дивергенции в дифференциальной форме

Если разложить функцию $\vec{a} = a_x\vec{\mathbf{i}} + a_y\vec{\mathbf{j}} + a_z\vec{\mathbf{k}}$ в окрестности точки P, тогда

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Представление дивергенции в дифференциальной форме

Если разложить функцию $\vec{a} = a_x\vec{\mathbf{i}} + a_y\vec{\mathbf{j}} + a_z\vec{\mathbf{k}}$ в окрестности точки P, тогда

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

С использованием оператора Гамильтона (наблы):

$$\operatorname{div}\vec{a} = \nabla \cdot \vec{a},$$

$$\nabla = \vec{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Теорема (Гаусса-Остроградского)

Поток вектора через замкнутую поверхность равен объемному интегралу от дивергенции вектора:

Теорема (Гаусса-Остроградского)

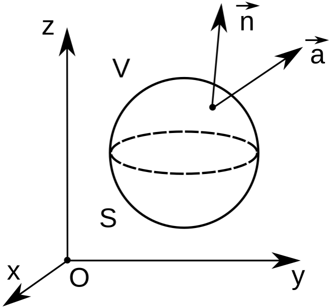
Поток вектора через замкнутую поверхность равен объемному интегралу от дивергенции вектора:

$$\int\limits_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int\limits_V \operatorname{div} \vec{a} dV.$$

Теорема (Гаусса-Остроградского)

Поток вектора через замкнутую поверхность равен объемному интегралу от дивергенции вектора:

$$\int\limits_S \vec{a}\cdot\vec{n}dS = \int\limits_V \operatorname{div}\vec{a}dV.$$



Доказательство.

$\square$

Соленоидальное векторное поле и его свойство

Определение

Векторное поле $\vec{a}$*, для которого во всех точках справедливо равенство* $\operatorname{div} \vec{a} = 0$*, называется* ***соленоидальным***.

Соленоидальное векторное поле и его свойство

Определение

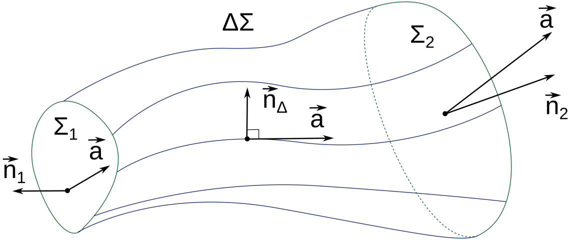
Векторное поле $\vec{a}$*, для которого во всех точках справедливо равенство* $\operatorname{div}\vec{a} = 0$*, называется соленоидальным.*

Теорема

Для соленоидального вектора его поток через любое поперечное сечение векторной трубки тока имеет одну и ту же величину.

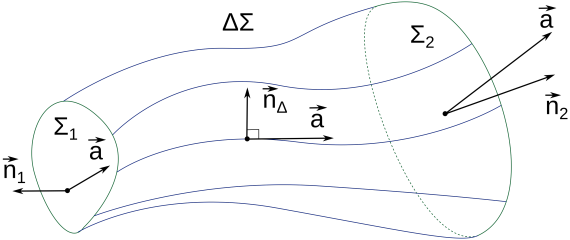
Соленоидальное векторное поле и его свойство

Доказательство.



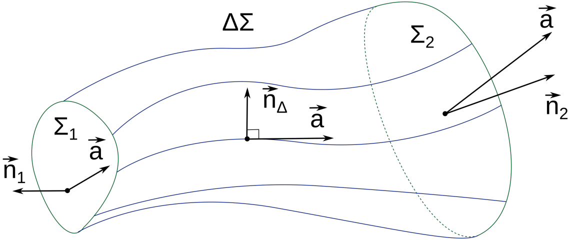
Соленоидальное векторное поле и его свойство

Доказательство.



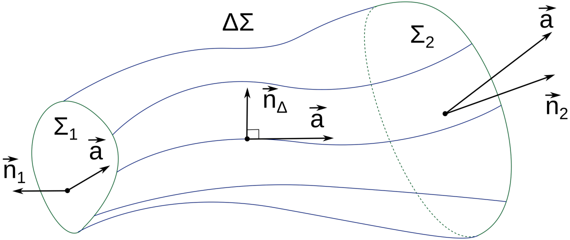
$$0 = \int\limits_V \operatorname{div} \vec{a} dV =$$

Доказательство.



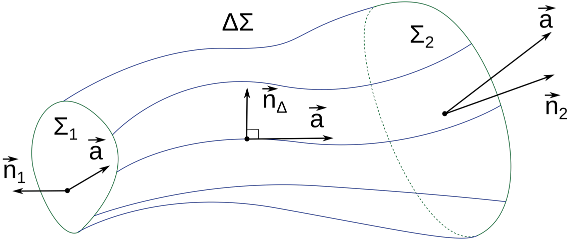
$$0 = \int\limits_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int\limits_\Sigma \vec{a} \cdot \vec{n} dS =$$

Доказательство.



$$0 = \int\limits_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int\limits_\Sigma \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int\limits_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS + \int\limits_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_\Delta dS + \int\limits_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS.$$

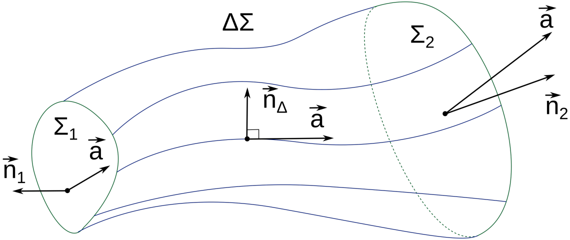
Доказательство.



$$0 = \int\limits_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int\limits_\Sigma \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int\limits_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS + \int\limits_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_\Delta dS + \int\limits_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS.$$

Отсюда $\int\limits_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS = -\int\limits_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS$,

Доказательство.

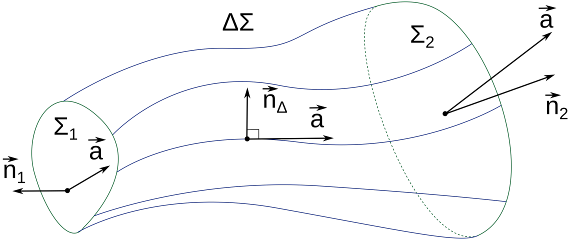


$$0 = \int\limits_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int\limits_\Sigma \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int\limits_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS + \int\limits_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_\Delta dS + \int\limits_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS.$$

Отсюда $\int\limits_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS = -\int\limits_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS$, т.к. $\int\limits_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_\Delta dS = 0$ в силу ортогональности векторов $\vec{a}$ и $\vec{n}_\Delta$,

Соленоидальное векторное поле и его свойство

Доказательство.



$$0 = \int\limits_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int\limits_\Sigma \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int\limits_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS + \int\limits_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_\Delta dS + \int\limits_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS.$$

Отсюда $\int\limits_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS = -\int\limits_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS$, т.к. $\int\limits_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_\Delta dS = 0$ в силу ортогональности векторов $\vec{a}$ и $\vec{n}_\Delta$, т.е. потоки вектора $\vec{a}$ через Σ_1 и Σ_2 совпадают.

□

Циркуляция вектора по замкнутому контуру

Определение

Циркуляцией вектора $\vec{a}$ *по замкнутому контуру называется следующий интеграл (с выбранным направлением интегрирования):*

Циркуляция вектора по замкнутому контуру

Определение

Циркуляцией вектора $\vec{a}$ *по замкнутому контуру называется следующий интеграл (с выбранным направлением интегрирования):*

$$\Gamma_C(\vec{a}) = \int\limits_C \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

Ротор вектора

Определение

Выберем плоскую площадку S, содержащую точку P, с нормалью $\vec{n}$ и контуром C,

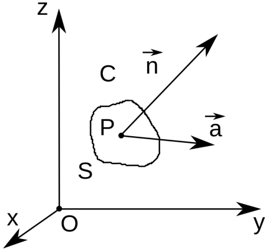
Ротор вектора

Определение

Выберем плоскую площадку S, содержащую точку P, с нормалью $\vec{n}$ и контуром C, тогда ротором в направлении $\vec{n}$ в точке P называется отношение циркуляции вектора по контуру C к площади S, когда последняя стягивается в точку P:

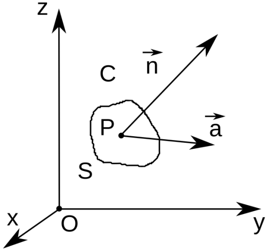
Определение

Выберем плоскую площадку S, содержащую точку P, с нормалью $\vec{n}$ и контуром C, тогда **ротором в направлении $\vec{n}$** *в точке P называется отношение циркуляции вектора по контуру C к площади S, когда последняя стягивается в точку P:*



Определение

Выберем плоскую площадку S, содержащую точку P, с нормалью $\vec{n}$ и контуром C, тогда ротором в направлении $\vec{n}$ в точке P называется отношение циркуляции вектора по контуру C к площади S, когда последняя стягивается в точку P:



$$\mathrm{rot}_{\vec{n}}\,\vec{a} = \lim_{S\to 0} \frac{\int_C \vec{a}\cdot d\vec{r}}{S}$$

Дифференциальное представление ротора

Если представить $\operatorname{rot}_{\vec{n}} \vec{a}$ в дифференциальной форме по трем основным направления,

Дифференциальное представление ротора

Если представить $\operatorname{rot}_{\vec{n}} \vec{a}$ в дифференциальной форме по трем основным направления, тогда

$$\operatorname{rot}_x \vec{a} = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \operatorname{rot}_y \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \operatorname{rot}_z \vec{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

Дифференциальное представление ротора

Если представить $\operatorname{rot}_{\vec{n}} \vec{a}$ в дифференциальной форме по трем основным направления, тогда

$$\operatorname{rot}_x \vec{a} = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \operatorname{rot}_y \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \operatorname{rot}_z \vec{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

В терминах оператора Гамильтона (наблы)

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{a}$$

Дифференциальное представление ротора

Если представить $\mathrm{rot}_{\vec{n}}\,\vec{a}$ в дифференциальной форме по трем основным направления, тогда

$$\mathrm{rot}_x\,\vec{a} = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \mathrm{rot}_y\,\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \mathrm{rot}_z\,\vec{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

В терминах оператора Гамильтона (наблы)

$$\mathrm{rot}\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{a}$$

и

$$\mathrm{rot}_{\vec{n}}\,\vec{a} = \mathrm{rot}\,\vec{a} \cdot \vec{n},$$

$$\nabla = \vec{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Теорема Стокса

Теорема (Стокса)

Циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку ротора вектора через поверхность, ограниченную этим контуром:

Теорема Стокса

Теорема (Стокса)
Циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку ротора вектора через поверхность, ограниченную этим контуром:

$$\int\limits_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int\limits_S \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int\limits_S \operatorname{rot}_{\vec{n}} \vec{a}\, dS.$$

Доказательство.

$\square$

Следствие теоремы Стокса

Теорема

Для того чтобы вектор $\vec{a}$ был потенциальным необходимо и достаточно, чтобы ротор вектора $\vec{a}$ был равен 0.

Следствие теоремы Стокса

Теорема

Для того чтобы вектор $\vec{a}$ был потенциальным необходимо и достаточно, чтобы ротор вектора $\vec{a}$ был равен 0.

Доказательство.

($\Rightarrow$) Пусть вектор $\vec{a} = \nabla\varphi$, т.е. $\vec{a}$ – потенциальный. По теореме Стокса для любой площадки S

$$\int\limits_S \operatorname{rot}\vec{a}\cdot d\vec{S} = \int\limits_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int\limits_C \nabla\varphi\cdot d\vec{r} = 0$$

по свойству циркуляции потенциального вектора. В силу произвольности S $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$ или $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$ для любой φ.

$\square$

Следствие теоремы Стокса

Теорема

Для того чтобы вектор $\vec{a}$ был потенциальным необходимо и достаточно, чтобы ротор вектора $\vec{a}$ был равен 0.

Доказательство.

($\Leftarrow$) Пусть $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$, тогда для произвольной площадки S с произвольным контуром C по теореме Стокса

$$0 = \int\limits_S \operatorname{rot}\vec{a} \cdot d\vec{S} = \int\limits_C \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

Таким образом, циркуляция вектора $\vec{a}$ по любому контуру C в выбранной области равна 0, следовательно вектор $\vec{a}$ потенциален. $\square$

Свойства ротора и дивергенции

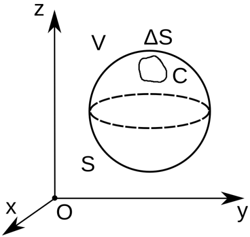
Теорема

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0 \text{ или } \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0.$$

Теорема

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0 \text{ или } \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0.$$

Доказательство.

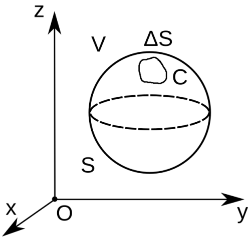


Теорема

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0 \text{ или } \nabla\cdot(\nabla\times\vec{a}) = 0.$$

Доказательство.

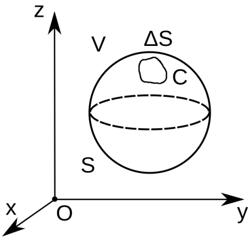
Рассмотрим сферу с площадью S, из которой вырезали кусочек площади ΔS с контуром C.



Теорема

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0 \text{ или } \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0.$$

Доказательство.



Рассмотрим сферу с площадью S, из которой вырезали кусочек площади ΔS с контуром C. Тогда с использованием теоремы Стокса

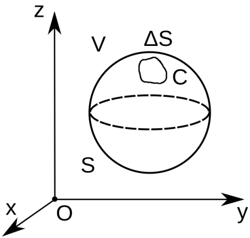
$$\int_S \operatorname{rot}\vec{a} \cdot d\vec{S} =$$

Свойства ротора и дивергенции

Теорема

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0 \text{ или } \nabla\cdot(\nabla\times\vec{a}) = 0.$$

Доказательство.



Рассмотрим сферу с площадью S, из которой вырезали кусочек площади ΔS с контуром C. Тогда с использованием теоремы Стокса

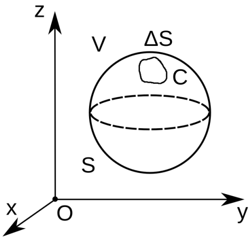
$$\int\limits_S \operatorname{rot}\vec{a}\cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta S\to 0}\int\limits_{S\setminus\Delta S}\operatorname{rot}\vec{a}\cdot d\vec{S} =$$

Свойства ротора и дивергенции

Теорема

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0 \text{ или } \nabla\cdot(\nabla\times\vec{a}) = 0.$$

Доказательство.



Рассмотрим сферу с площадью S, из которой вырезали кусочек площади ΔS с контуром C. Тогда с использованием теоремы Стокса

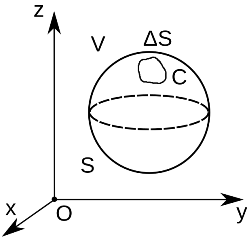
$$\int\limits_S \operatorname{rot}\vec{a}\cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta S\to 0}\int\limits_{S\setminus\Delta S}\operatorname{rot}\vec{a}\cdot d\vec{S} =$$

$$= \lim_{\Delta S\to 0}\int\limits_C \vec{a}\cdot d\vec{r} =$$

Теорема

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0 \text{ или } \nabla\cdot(\nabla\times\vec{a}) = 0.$$

Доказательство.



Рассмотрим сферу с площадью S, из которой вырезали кусочек площади ΔS с контуром C. Тогда с использованием теоремы Стокса

$$\int\limits_S \operatorname{rot}\vec{a}\cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta S\to 0}\int\limits_{S\setminus\Delta S}\operatorname{rot}\vec{a}\cdot d\vec{S} =$$

$$= \lim_{\Delta S\to 0}\int\limits_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = 0.$$

Поделив полученное выражение на V и перейдя к пределу при $V\to 0$, получим утверждение теоремы. □

Свойства ротора и дивергенции

Теорема (без доказательства)

Если $\operatorname{div}\vec{a} = 0$, то существует такое векторное поле $\vec{b}$, что $\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{b}$.