Метрика и норма в векторном пространстве. Квадратичные формы.

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

QR-код презентации

9 апреля 2020 г.

Аннотация

Метрические пространства. Нормы вектора и оператора. Квадратичные формы. Приведение формы к сумме квадратов. Условие положительной определенности квадратичной формы.

Расстояние между векторами

Определение

Пусть R^n – *n-мерное векторное пространство.*

Расстояние между векторами

Определение

Пусть R^n *– n-мерное векторное пространство.* ***Расстоянием*** *между векторами* $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ *называется неотрицательная скалярная функция* $\rho(\vec{x},\vec{y}) \geq 0$*,*

Расстояние между векторами

Определение

Пусть R^n *–* n*-мерное векторное пространство.* *Расстоянием между векторами* $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ *называется неотрицательная скалярная функция* $\rho(\vec{x},\vec{y}) \geq 0$*, удовлетворяющая аксиомам:*

- $\rho(\vec{x},\vec{y}) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vec{x} = \vec{y}$*;*

Расстояние между векторами

Определение

Пусть R^n *– n-мерное векторное пространство.* *Расстоянием* *между векторами* $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ *называется неотрицательная скалярная функция* $\rho(\vec{x},\vec{y}) \geq 0$*, удовлетворяющая аксиомам:*

- $\rho(\vec{x},\vec{y}) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vec{x} = \vec{y}$*;*
- $\rho(\vec{x},\vec{y}) = \rho(\vec{y},\vec{x})$ *(аксиома симметрии);*

Расстояние между векторами

Определение

Пусть R^n – *n-мерное векторное пространство.* *Расстоянием между векторами* $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ *называется неотрицательная скалярная функция* $\rho(\vec{x},\vec{y}) \geq 0$*, удовлетворяющая аксиомам:*

- $\rho(\vec{x},\vec{y}) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vec{x} = \vec{y}$*;*
- $\rho(\vec{x},\vec{y}) = \rho(\vec{y},\vec{x})$ *(аксиома симметрии);*
- $\rho(\vec{x},\vec{z}) \leq \rho(\vec{x},\vec{y}) + \rho(\vec{y},\vec{z})$ *(аксиома треугольника).*

Расстояние между векторами

Определение

Пусть R^n *– n-мерное векторное пространство.* *Расстоянием* *между векторами* $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ *называется неотрицательная скалярная функция* $\rho(\vec{x},\vec{y}) \geq 0$*, удовлетворяющая аксиомам:*

- $\rho(\vec{x},\vec{y}) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vec{x} = \vec{y}$*;*
- $\rho(\vec{x},\vec{y}) = \rho(\vec{y},\vec{x})$ *(аксиома симметрии);*
- $\rho(\vec{x},\vec{z}) \leq \rho(\vec{x},\vec{y}) + \rho(\vec{y},\vec{z})$ *(аксиома треугольника).*

Если в пространстве определено расстояние между векторами, то говорят, что определена *метрика*.

Определение

Векторное пространство R^n *с введенной метрикой называется* *метрическим пространством.*

Метрические пространства

Определение

Векторное пространство R^n *с введенной метрикой называется* *метрическим пространством*.

Примеры метрик в R^n:

- $\rho(\vec{x},\vec{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$

Метрические пространства

Определение

Векторное пространство R^n *с введенной метрикой называется* *метрическим пространством*.

Примеры метрик в R^n:

- $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$,
- $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.

Норма вектора

Определение

Нормой вектора $||\vec{x}||$ *в n-мерном векторном пространстве*

Норма вектора

Определение

Нормой вектора $||\vec{x}||$ *в n-мерном векторном пространстве называется неотрицательная скалярная функция от вектора* $\vec{x}$,

Норма вектора

Определение

Нормой вектора $||\vec{x}||$ *в n-мерном векторном пространстве называется неотрицательная скалярная функция от вектора* $\vec{x}$*, удовлетворяющая следующим аксиомам:*

Норма вектора

Определение

Нормой вектора $||\vec{x}||$ *в n-мерном векторном пространстве называется неотрицательная скалярная функция от вектора* $\vec{x}$*, удовлетворяющая следующим аксиомам:*

- $||\vec{x}|| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vec{x} = 0$*;*

Норма вектора

Определение

Нормой вектора $||\vec{x}||$ *в n-мерном векторном пространстве называется неотрицательная скалярная функция от вектора* $\vec{x}$*, удовлетворяющая следующим аксиомам:*

- $||\vec{x}|| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vec{x} = 0$*;*
- $||\alpha\vec{x}|| = |\alpha|||\vec{x}||$*, где* α *– произвольное число;*

Норма вектора

Определение

Нормой вектора $||\vec{x}||$ *в n-мерном векторном пространстве называется неотрицательная скалярная функция от вектора* $\vec{x}$*, удовлетворяющая следующим аксиомам:*

- $||\vec{x}|| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\vec{x} = 0$*;*
- $||\alpha\vec{x}|| = |\alpha|||\vec{x}||$*, где* α *– произвольное число;*
- $||\vec{x} + \vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$ *(неравенство треугольника).*

Определение

Векторное пространство R^n *с введенной на нем нормой называется* ***нормированным векторным пространством***.

Нормированные пространства

Определение

Векторное пространство R^n *с введенной на нем нормой называется* *нормированным векторным пространством*.

Примеры норм в R^n:

- $||\vec{x}|| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|,$

Нормированные пространства

Определение

Векторное пространство R^n *с введенной на нем нормой называется* *нормированным векторным пространством*.

Примеры норм в R^n:

- $||\vec{x}|| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|,$
- $||\vec{x}|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}.$

Нормированные пространства

Определение

Векторное пространство R^n *с введенной на нем нормой называется* *нормированным векторным пространством*.

Примеры норм в R^n:

- $||\vec{x}|| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|,$
- $||\vec{x}|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}.$

Норма линейного оператора

Определение

Нормой линейного оператора $\mathcal{A}$ *в нормированном пространстве* R^n

Норма линейного оператора

Определение

Нормой линейного оператора $\mathcal{A}$ *в нормированном пространстве* R^n *называется наименьшее из чисел* C *таких,*

Норма линейного оператора

Определение

Нормой линейного оператора $\mathcal{A}$ в нормированном пространстве R^n *называется наименьшее из чисел C таких, что* $\forall\vec{x}\in\mathrm{R}^n$

$$||\mathcal{A}\vec{x}|| \leq C||\vec{x}||$$

Норма линейного оператора

Определение

Нормой линейного оператора $\mathcal{A}$ *в нормированном пространстве* R^n *называется наименьшее из чисел* C *таких, что* $\forall \vec{x} \in \mathrm{R}^n$

$$||\mathcal{A}\vec{x}|| \leq C||\vec{x}||$$

и обозначается $||\mathcal{A}||$,

Норма линейного оператора

Определение

Нормой линейного оператора $\mathcal{A}$ *в нормированном пространстве* R^n *называется наименьшее из чисел* C *таких, что* $\forall \vec{x} \in \mathrm{R}^n$

$$||\mathcal{A}\vec{x}|| \leq C||\vec{x}||$$

и обозначается $||\mathcal{A}||$, *или, по-другому,*

$$||\mathcal{A}|| = \inf\{C : \forall \vec{x} \in \mathrm{R}^n \quad ||\mathcal{A}\vec{x}|| \leq C||\vec{x}||\}.$$

Связь между различными определениями нормы линейного оператора

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n,

Связь между различными определениями нормы линейного оператора

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, $\vec{x}$ – произвольный вектор из R^n.

Связь между различными определениями нормы линейного оператора

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, $\vec{x}$ – произвольный вектор из R^n. Рассмотрим

$$\frac{||\mathcal{A}\vec{x}||}{||\vec{x}||} =$$

Связь между различными определениями нормы линейного оператора

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, $\vec{x}$ – произвольный вектор из R^n. Рассмотрим

$$\frac{||\mathcal{A}\vec{x}||}{||\vec{x}||} = ||\frac{1}{||\vec{x}||}\mathcal{A}\vec{x}|| =$$

Связь между различными определениями нормы линейного оператора

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, $\vec{x}$ – произвольный вектор из R^n. Рассмотрим

$$\frac{||\mathcal{A}\vec{x}||}{||\vec{x}||} = ||\frac{1}{||\vec{x}||}\mathcal{A}\vec{x}|| = \left|\left|\mathcal{A}\left(\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}\right)\right|\right| =$$

Связь между различными определениями нормы линейного оператора

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, $\vec{x}$ – произвольный вектор из R^n. Рассмотрим

$$\frac{||\mathcal{A}\vec{x}||}{||\vec{x}||} = ||\frac{1}{||\vec{x}||}\mathcal{A}\vec{x}|| = \left|\left|\mathcal{A}\left(\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}\right)\right|\right| = ||\mathcal{A}\vec{y}|| \leq C,$$

где $\vec{y} = \vec{x}/||\vec{x}||$,

Связь между различными определениями нормы линейного оператора

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, $\vec{x}$ – произвольный вектор из R^n. Рассмотрим

$$\frac{||\mathcal{A}\vec{x}||}{||\vec{x}||} = ||\frac{1}{||\vec{x}||}\mathcal{A}\vec{x}|| = \left|\left|\mathcal{A}\left(\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}\right)\right|\right| = ||\mathcal{A}\vec{y}|| \leq C,$$

где $\vec{y} = \vec{x}/||\vec{x}||$, причем

$$||\vec{y}|| =$$

Связь между различными определениями нормы линейного оператора

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, $\vec{x}$ – произвольный вектор из R^n. Рассмотрим

$$\frac{||\mathcal{A}\vec{x}||}{||\vec{x}||} = ||\frac{1}{||\vec{x}||}\mathcal{A}\vec{x}|| = \left|\left|\mathcal{A}\left(\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}\right)\right|\right| = ||\mathcal{A}\vec{y}|| \leq C,$$

где $\vec{y} = \vec{x}/||\vec{x}||$, причем

$$||\vec{y}|| = \left|\left|\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}\right|\right| =$$

Связь между различными определениями нормы линейного оператора

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, $\vec{x}$ – произвольный вектор из R^n. Рассмотрим

$$\frac{||\mathcal{A}\vec{x}||}{||\vec{x}||} = ||\frac{1}{||\vec{x}||}\mathcal{A}\vec{x}|| = \left|\left|\mathcal{A}\left(\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}\right)\right|\right| = ||\mathcal{A}\vec{y}|| \leq C,$$

где $\vec{y} = \vec{x}/||\vec{x}||$, причем

$$||\vec{y}|| = \left|\left|\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}\right|\right| = \frac{||\vec{x}||}{||\vec{x}||} =$$

Связь между различными определениями нормы линейного оператора

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, $\vec{x}$ – произвольный вектор из R^n. Рассмотрим

$$\frac{||\mathcal{A}\vec{x}||}{||\vec{x}||} = ||\frac{1}{||\vec{x}||}\mathcal{A}\vec{x}|| = \left|\left|\mathcal{A}\left(\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}\right)\right|\right| = ||\mathcal{A}\vec{y}|| \leq C,$$

где $\vec{y} = \vec{x}/||\vec{x}||$, причем

$$||\vec{y}|| = \left|\left|\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}\right|\right| = \frac{||\vec{x}||}{||\vec{x}||} = 1.$$

Связь между различными определениями нормы линейного оператора

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, $\vec{x}$ – произвольный вектор из R^n. Рассмотрим

$$\frac{||\mathcal{A}\vec{x}||}{||\vec{x}||} = ||\frac{1}{||\vec{x}||}\mathcal{A}\vec{x}|| = \left|\left|\mathcal{A}\left(\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}\right)\right|\right| = ||\mathcal{A}\vec{y}|| \leq C,$$

где $\vec{y} = \vec{x}/||\vec{x}||$, причем

$$||\vec{y}|| = \left|\left|\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}\right|\right| = \frac{||\vec{x}||}{||\vec{x}||} = 1.$$

Таким образом,

Связь между различными определениями нормы линейного оператора

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, $\vec{x}$ – произвольный вектор из R^n. Рассмотрим

$$\frac{||\mathcal{A}\vec{x}||}{||\vec{x}||} = ||\frac{1}{||\vec{x}||}\mathcal{A}\vec{x}|| = \left|\left|\mathcal{A}\left(\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}\right)\right|\right| = ||\mathcal{A}\vec{y}|| \leq C,$$

где $\vec{y} = \vec{x}/||\vec{x}||$, причем

$$||\vec{y}|| = \left|\left|\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}\right|\right| = \frac{||\vec{x}||}{||\vec{x}||} = 1.$$

Таким образом, $\vec{y} \in \mathrm{R}^n$ – произвольный вектор,

Связь между различными определениями нормы линейного оператора

Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор в R^n, $\vec{x}$ – произвольный вектор из R^n. Рассмотрим

$$\frac{||\mathcal{A}\vec{x}||}{||\vec{x}||} = ||\frac{1}{||\vec{x}||}\mathcal{A}\vec{x}|| = \left|\left|\mathcal{A}\left(\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}\right)\right|\right| = ||\mathcal{A}\vec{y}|| \leq C,$$

где $\vec{y} = \vec{x}/||\vec{x}||$, причем

$$||\vec{y}|| = \left|\left|\frac{\vec{x}}{||\vec{x}||}\right|\right| = \frac{||\vec{x}||}{||\vec{x}||} = 1.$$

Таким образом, $\vec{y} \in \mathrm{R}^n$ – произвольный вектор, такой что $||\vec{y}|| = 1$.

Норма линейного оператора

Определение (альтернативное определение)

Нормой линейного оператора $\mathcal{A}$

Норма линейного оператора

Определение (альтернативное определение)

Нормой линейного оператора $\mathcal{A}$ *в нормированном пространстве* R^n

Норма линейного оператора

Определение (альтернативное определение)

Нормой линейного оператора $\mathcal{A}$ *в нормированном пространстве* R^n *называется наибольшее значение,*

Норма линейного оператора

Определение (альтернативное определение)

Нормой линейного оператора $\mathcal{A}$ *в нормированном пространстве* R^n *называется наибольшее значение, принимаемое функцией* $||\mathcal{A}\vec{x}||$ $\forall\vec{x} \in R^n$,

Норма линейного оператора

Определение (альтернативное определение)

Нормой линейного оператора $\mathcal{A}$ *в нормированном пространстве* R^n *называется наибольшее значение, принимаемое функцией* $||\mathcal{A}\vec{x}||$ $\forall\vec{x} \in R^n$, *таких, что* $||\vec{x}|| = 1$,

Норма линейного оператора

Определение (альтернативное определение)

Нормой линейного оператора $\mathcal{A}$ *в нормированном пространстве* R^n *называется наибольшее значение, принимаемое функцией* $||\mathcal{A}\vec{x}||$ $\forall\vec{x} \in R^n$, *таких, что* $||\vec{x}|| = 1$, *или, по-другому,* Определение (альтернативное определение)

Нормой линейного оператора $\mathcal{A}$ *в нормированном пространстве* R^n *называется наибольшее значение, принимаемое функцией* $||\mathcal{A}\vec{x}||$ $\forall \vec{x} \in R^n$, *таких, что* $||\vec{x}|| = 1$, *или, по-другому,*

$$||\mathcal{A}|| =$$

Норма линейного оператора

Определение (альтернативное определение)

Нормой линейного оператора $\mathcal{A}$ *в нормированном пространстве* R^n *называется наибольшее значение, принимаемое функцией* $||\mathcal{A}\vec{x}||$ $\forall\vec{x} \in R^n$, *таких, что* $||\vec{x}|| = 1$, *или, по-другому,*

$$||\mathcal{A}|| = \sup\{||\mathcal{A}\vec{x}|| : \forall\vec{x} \in \mathrm{R}^n \quad ||\vec{x}|| = 1\}.$$

Пример: проекция вектора на плоскость

Рассмотрите оператор проектирования вектора на плоскость и посчитайте норму такого линейного оператора.

Определение квадратичной формы

Определение

Квадратичной формой называется однородный многочлен второй степени

Определение квадратичной формы

Определение

Квадратичной формой называется однородный многочлен второй степени относительно n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$*:*

Определение квадратичной формы

Определение

Квадратичной формой называется однородный многочлен второй степени относительно n переменных x_1, x_2, ... , x_n:

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki}).$$

Определение квадратичной формы

Определение

Квадратичной формой называется однородный многочлен второй степени относительно n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$*:*

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki}).$$

Примеры:

- $n = 1$: $A_1(x,x) = a_{11} x_1^2$,

Определение квадратичной формы

Определение

Квадратичной формой называется однородный многочлен второй степени относительно n переменных x_1, x_2, ... , x_n:

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki}).$$

Примеры:

- $n = 1$: $A_1(x,x) = a_{11}x_1^2$,
- $n = 2$: $A_2(x,x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$,

Определение

Квадратичной формой называется однородный многочлен второй степени относительно n переменных x_1, x_2, ... , x_n:

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki}).$$

Примеры:

- $n = 1$: $A_1(x,x) = a_{11}x_1^2$,
- $n = 2$: $A_2(x,x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$,
- $n = 3$: $A_3(x,x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3$.

Определение квадратичной формы

Определение

Квадратичной формой называется однородный многочлен второй степени относительно n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki}).$$

Примеры:

- $n = 1$: $A_1(x,x) = a_{11}x_1^2$,
- $n = 2$: $A_2(x,x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$,
- $n = 3$: $A_3(x,x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3$.
- $n = 3$: $A_4(x,x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$.

Матрица, соответствующая квадратичной форме

Из коэффициентов квадратичной формы

Матрица, соответствующая квадратичной форме

Из коэффициентов квадратичной формы можно составить квадратную симметричную матрицу A:

Матрица, соответствующая квадратичной форме

Из коэффициентов квадратичной формы можно составить квадратную симметричную матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A = A^{\mathrm{t}}.$$

Матрица, соответствующая квадратичной форме

Из коэффициентов квадратичной формы можно составить квадратную симметричную матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A = A^{\mathrm{t}}.$$

С помощью матрицы A квадратичную форму $A(x, x)$

Матрица, соответствующая квадратичной форме

Из коэффициентов квадратичной формы можно составить квадратную симметричную матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A = A^{\mathrm{t}}.$$

С помощью матрицы A квадратичную форму $A(x,x)$ можно переписать в виде:

$$A(x,x) = x^{\mathrm{t}} A x,$$

Матрица, соответствующая квадратичной форме

Из коэффициентов квадратичной формы можно составить квадратную симметричную матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A = A^{\mathrm{t}}.$$

С помощью матрицы A квадратичную форму $A(x,x)$ можно переписать в виде:

$$A(x,x) = x^{\mathrm{t}} A x,$$

где $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^{\mathrm{t}}$ – вектор столбец из переменных x_i ($i = \overline{1,n}$).

Вещественная квадратичная форма

Определение

Если матрица A есть вещественная симметричная матрица,

Вещественная квадратичная форма

Определение

Если матрица A есть вещественная симметричная матрица, то соответствующая ей квадратичная форма называется вещественной формой.

Вещественная квадратичная форма

Определение

Если матрица A есть вещественная симметричная матрица, то соответствующая ей квадратичная форма называется вещественной формой.

Определение

Определитель матрицы $|A|$

Вещественная квадратичная форма

Определение

Если матрица A есть вещественная симметричная матрица, то соответствующая ей квадратичная форма называется вещественной формой.

Определение

Определитель матрицы $|A|$ называется дискриминантом квадратичной формы.

Вещественная квадратичная форма

Определение

Если матрица A есть вещественная симметричная матрица, то соответствующая ей квадратичная форма называется вещественной формой.

Определение

Определитель матрицы $|A|$ называется дискриминантом квадратичной формы. Если $|A| = 0$, то квадратичная форма сингулярна,

Вещественная квадратичная форма

Определение

Если матрица A есть вещественная симметричная матрица, то соответствующая ей квадратичная форма называется вещественной формой.

Определение

Определитель матрицы $|A|$ называется дискриминантом квадратичной формы. Если $|A| = 0$, то квадратичная форма сингулярна, иначе регулярна.

Вещественная квадратичная форма

Определение

Если матрица A есть вещественная симметричная матрица, то соответствующая ей квадратичная форма называется вещественной формой.

Определение

Определитель матрицы $|A|$ называется дискриминантом квадратичной формы. Если $|A| = 0$, то квадратичная форма сингулярна, иначе регулярна.

Определение

Ранг матрицы A, отвечающей квадратичной форме,

Вещественная квадратичная форма

Определение

Если матрица A есть вещественная симметричная матрица, то соответствующая ей квадратичная форма называется вещественной формой.

Определение

Определитель матрицы $|A|$ называется дискриминантом квадратичной формы. Если $|A| = 0$, то квадратичная форма сингулярна, иначе регулярна.

Определение

Ранг матрицы A, отвечающей квадратичной форме, есть ранг квадратичной формы.

Замена переменных

Рассмотрим линейную замену переменных

Замена переменных

Рассмотрим линейную замену переменных

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}\xi_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

Замена переменных

Рассмотрим линейную замену переменных

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}\xi_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

что в матричном форме можно записать как

Замена переменных

Рассмотрим линейную замену переменных

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}\xi_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

что в матричном форме можно записать как

$$x = T\xi,$$

Замена переменных

Рассмотрим линейную замену переменных

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}\xi_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

что в матричном форме можно записать как

$$x = T\xi,$$

$$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}^{\mathrm{t}}, \quad \xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}^{\mathrm{t}},$$

Замена переменных

Рассмотрим линейную замену переменных

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}\xi_k \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

что в матричном форме можно записать как

$$x = T\xi,$$

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^{\mathrm{t}}, \quad \xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}^{\mathrm{t}},$$
$$T = (t_{ij})_{1 \le i,j \le n}, \quad |T| \ne 0.$$

Замена переменных

Рассмотрим линейную замену переменных

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}\xi_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

что в матричном форме можно записать как

$$x = T\xi,$$

$$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}^{\mathrm{t}}, \quad \xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}^{\mathrm{t}},$$
$$T = (t_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}, \quad |T| \neq 0.$$

Тогда квадратичная форма будет иметь вид:

Замена переменных

Рассмотрим линейную замену переменных

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}\xi_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

что в матричном форме можно записать как

$$x = T\xi,$$

$$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}^{\mathrm{t}}, \quad \xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}^{\mathrm{t}},$$
$$T = (t_{ij})_{1 \le i,j \le n}, \quad |T| \neq 0.$$

Тогда квадратичная форма будет иметь вид:

$$A(x, x) =$$

Замена переменных

Рассмотрим линейную замену переменных

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}\xi_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

что в матричном форме можно записать как

$$x = T\xi,$$

$$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}^{\mathrm{t}}, \quad \xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}^{\mathrm{t}},$$
$$T = (t_{ij})_{1\le i,j\le n}, \quad |T| \ne 0.$$

Тогда квадратичная форма будет иметь вид:

$$A(x, x) = x^{\mathrm{t}}Ax =$$

Замена переменных

Рассмотрим линейную замену переменных

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}\xi_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

что в матричном форме можно записать как

$$x = T\xi,$$

$$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}^{\mathrm{t}}, \quad \xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}^{\mathrm{t}},$$
$$T = (t_{ij})_{1 \le i,j \le n}, \quad |T| \ne 0.$$

Тогда квадратичная форма будет иметь вид:

$$A(x, x) = x^{\mathrm{t}} A x = (T\xi)^{\mathrm{t}} A T\xi =$$

Замена переменных

Рассмотрим линейную замену переменных

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}\xi_k \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

что в матричном форме можно записать как

$$x = T\xi,$$

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^{\mathrm{t}}, \quad \xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}^{\mathrm{t}},$$
$$T = (t_{ij})_{1\le i,j\le n}, \quad |T| \neq 0.$$

Тогда квадратичная форма будет иметь вид:

$$A(x,x) = x^{\mathrm{t}}Ax = (T\xi)^{\mathrm{t}}AT\xi = \xi^{\mathrm{t}}\left(T^{\mathrm{t}}AT\right)\xi =$$

Замена переменных

Рассмотрим линейную замену переменных

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}\xi_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

что в матричном форме можно записать как

$$x = T\xi,$$

$$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}^{\mathrm{t}}, \quad \xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}^{\mathrm{t}},$$
$$T = (t_{ij})_{1\le i,j\le n}, \quad |T| \ne 0.$$

Тогда квадратичная форма будет иметь вид:

$$A(x,x) = x^{\mathrm{t}}Ax = (T\xi)^{\mathrm{t}}AT\xi = \xi^{\mathrm{t}}\left(T^{\mathrm{t}}AT\right)\xi = \xi^{\mathrm{t}}\hat{A}\xi = \hat{A}(\xi,\xi),$$

Замена переменных

Рассмотрим линейную замену переменных

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}\xi_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

что в матричном форме можно записать как

$$x = T\xi,$$

$$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}^{\mathrm{t}}, \quad \xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}^{\mathrm{t}},$$
$$T = (t_{ij})_{1\le i,j\le n}, \quad |T| \ne 0.$$

Тогда квадратичная форма будет иметь вид:

$$A(x,x) = x^{\mathrm{t}}Ax = (T\xi)^{\mathrm{t}}AT\xi = \xi^{\mathrm{t}}\left(T^{\mathrm{t}}AT\right)\xi = \xi^{\mathrm{t}}\hat{A}\xi = \hat{A}(\xi,\xi),$$

где $\hat{A} = T^{\mathrm{t}}AT$.

Свойства $\hat{A}$

Симметричность $\hat{A}$:

Свойства $\hat{A}$

Симметричность $\hat{A}$:

$$\hat{A}^{\mathrm{t}} =$$

Симметричность $\hat{A}$:

$$\hat{A}^{\mathrm{t}} = (T^{\mathrm{t}} A T)^{\mathrm{t}} =$$

Свойства $\hat{A}$

Симметричность $\hat{A}$:

$$\hat{A}^{\mathrm{t}} = (T^{\mathrm{t}} A T)^{\mathrm{t}} = T^{\mathrm{t}} A T = \hat{A}.$$

Свойства $\hat{A}$

Симметричность $\hat{A}$:

$$\hat{A}^{\mathrm{t}} = (T^{\mathrm{t}} A T)^{\mathrm{t}} = T^{\mathrm{t}} A T = \hat{A}.$$

Определение

Две симметрические матрицы A и $\hat{A}$,

Симметричность $\hat{A}$:

$$\hat{A}^{\mathrm{t}} = (T^{\mathrm{t}} A T)^{\mathrm{t}} = T^{\mathrm{t}} A T = \hat{A}.$$

Определение

Две симметрические матрицы A и $\hat{A}$, связанные равенством

$$\hat{A} = T^{\mathrm{t}} A T,$$

Свойства $\hat{A}$

Симметричность $\hat{A}$:

$$\hat{A}^{\mathrm{t}} = (T^{\mathrm{t}}AT)^{\mathrm{t}} = T^{\mathrm{t}}AT = \hat{A}.$$

Определение

Две симметрические матрицы A и $\hat{A}$, связанные равенством

$$\hat{A} = T^{\mathrm{t}}AT,$$

называются конгруэнтными,

Симметричность $\hat{A}$:

$$\hat{A}^{\mathrm{t}} = (T^{\mathrm{t}} A T)^{\mathrm{t}} = T^{\mathrm{t}} A T = \hat{A}.$$

Определение

Две симметрические матрицы A и $\hat{A}$, связанные равенством

$$\hat{A} = T^{\mathrm{t}} A T,$$

называются конгруэнтными, где T – неособенная матрица.

Свойства $\hat{A}$

Симметричность $\hat{A}$:

$$\hat{A}^{\mathrm{t}} = (T^{\mathrm{t}}AT)^{\mathrm{t}} = T^{\mathrm{t}}AT = \hat{A}.$$

Определение

Две симметрические матрицы A и $\hat{A}$, связанные равенством

$$\hat{A} = T^{\mathrm{t}}AT,$$

называются конгруэнтными, где T – неособенная матрица.

Ранг $\hat{A}$:

Так как $|T| \neq 0$,

Симметричность $\hat{A}$:

$$\hat{A}^{\mathrm{t}} = (T^{\mathrm{t}}AT)^{\mathrm{t}} = T^{\mathrm{t}}AT = \hat{A}.$$

Определение

Две симметрические матрицы A и $\hat{A}$, связанные равенством

$$\hat{A} = T^{\mathrm{t}}AT,$$

называются конгруэнтными, где T – неособенная матрица.

Ранг $\hat{A}$:

Так как $|T| \neq 0$, то по теореме о ранге

Свойства $\hat{A}$

Симметричность $\hat{A}$:

$$\hat{A}^{\mathrm{t}} = (T^{\mathrm{t}}AT)^{\mathrm{t}} = T^{\mathrm{t}}AT = \hat{A}.$$

Определение

Две симметрические матрицы A и $\hat{A}$, связанные равенством

$$\hat{A} = T^{\mathrm{t}}AT,$$

*называются **конгруэнтными**, где T – неособенная матрица.*

Ранг $\hat{A}$:

Так как $|T| \neq 0$, то по теореме о ранге ранг A равен рангу матрицы $\hat{A}$.

Ранг диагональной матрицы

Теорема

Ранг диагональной матрицы

Ранг диагональной матрицы

Теорема

Ранг диагональной матрицы равен количеству ненулевых элементов на диагонали.

Ранг диагональной матрицы

Теорема

Ранг диагональной матрицы равен количеству ненулевых элементов на диагонали.

Доказательство.

Рассмотрим диагональную матрицу D.

Ранг диагональной матрицы

Теорема

Ранг диагональной матрицы равен количеству ненулевых элементов на диагонали.

Доказательство.

Рассмотрим диагональную матрицу D. Пусть в матрице r ненулевых диагональных элементов $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$.

Ранг диагональной матрицы

Теорема

Ранг диагональной матрицы равен количеству ненулевых элементов на диагонали.

Доказательство.

Рассмотрим диагональную матрицу D. Пусть в матрице r ненулевых диагональных элементов $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$. Очевидно, что главный минор $M \neq 0$, где

Ранг диагональной матрицы

Теорема
Ранг диагональной матрицы равен количеству ненулевых элементов на диагонали.

Доказательство.
Рассмотрим диагональную матрицу D. Пусть в матрице r ненулевых диагональных элементов $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$. Очевидно, что главный минор $M \neq 0$, где

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

Ранг диагональной матрицы

Теорема
Ранг диагональной матрицы равен количеству ненулевых элементов на диагонали.

Доказательство.
Рассмотрим диагональную матрицу D. Пусть в матрице r ненулевых диагональных элементов $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$. Очевидно, что главный минор $M \neq 0$, где

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \quad M = D\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} \neq 0.$$

Теорема

Ранг диагональной матрицы равен количеству ненулевых элементов на диагонали.

Доказательство.

Рассмотрим диагональную матрицу D. Пусть в матрице r ненулевых диагональных элементов $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$. Очевидно, что главный минор $M \neq 0$, где

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \quad M = D\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} \neq 0.$$

Все остальные миноры большего размера будут равны 0,

Ранг диагональной матрицы

Теорема
Ранг диагональной матрицы равен количеству ненулевых элементов на диагонали.

Доказательство.
Рассмотрим диагональную матрицу D. Пусть в матрице r ненулевых диагональных элементов $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$. Очевидно, что главный минор $M \neq 0$, где

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \quad M = D\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} \neq 0.$$

Все остальные миноры большего размера будут равны 0, т.к. определитель будет считаться от треугольной матрицы с нулями на диагонали.

Ранг диагональной матрицы

Теорема

Ранг диагональной матрицы равен количеству ненулевых элементов на диагонали.

Доказательство.

Рассмотрим диагональную матрицу D. Пусть в матрице r ненулевых диагональных элементов $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$. Очевидно, что главный минор $M \neq 0$, где

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}, \quad M = D\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} \neq 0.$$

Все остальные миноры большего размера будут равны 0, т.к. определитель будет считаться от треугольной матрицы с нулями на диагонали. Следовательно, ранг матрицы D равен r.

□

О представлении квадратичной формы в виде суммы квадратов

Теорема

Любую квадратичную форму

О представлении квадратичной формы в виде суммы квадратов

Теорема

Любую квадратичную форму с помощью линейной замены переменных

О представлении квадратичной формы в виде суммы квадратов

Теорема

Любую квадратичную форму с помощью линейной замены переменных можно привести к виду

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^{r} a_i X_i^2,$$

О представлении квадратичной формы в виде суммы квадратов

Теорема

Любую квадратичную форму с помощью линейной замены переменных можно привести к виду

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^{r} a_i X_i^2,$$

где $X_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k$ и $r \leq n$.

О представлении квадратичной формы в виде суммы квадратов

Доказательство.
По теореме о собственных значениях симметричной матрицы

$$A = QDQ^{-1},$$

О представлении квадратичной формы в виде суммы квадратов

Доказательство.
По теореме о собственных значениях симметричной матрицы

$$A = QDQ^{-1},$$

где D – диагональная матрица, составленная из собственных значений A;

О представлении квадратичной формы в виде суммы квадратов

Доказательство.
По теореме о собственных значениях симметричной матрицы

$$A = QDQ^{-1},$$

где D – диагональная матрица, составленная из собственных значений A; Q – ортогональная матрица

О представлении квадратичной формы в виде суммы квадратов

Доказательство.
По теореме о собственных значениях симметричной матрицы

$$A = QDQ^{-1},$$

где D – диагональная матрица, составленная из собственных значений A; Q – ортогональная матрица ($Q^{\mathrm{t}} = Q^{-1}$) из собственных векторов,

О представлении квадратичной формы в виде суммы квадратов

Доказательство.
По теореме о собственных значениях симметричной матрицы

$$A = QDQ^{-1},$$

где D – диагональная матрица, составленная из собственных значений A; Q – ортогональная матрица ($Q^{\mathrm{t}} = Q^{-1}$) из собственных векторов, образующих ортонормированный базис.

Это означает, что если в качестве матрицы для замены переменных положить $T = Q$,

О представлении квадратичной формы в виде суммы квадратов

Доказательство.
По теореме о собственных значениях симметричной матрицы

$$A = QDQ^{-1},$$

где D – диагональная матрица, составленная из собственных значений A; Q – ортогональная матрица ($Q^{\mathrm{t}} = Q^{-1}$) из собственных векторов, образующих ортонормированный базис.

Это означает, что если в качестве матрицы для замены переменных положить $T = Q$, тогда

$$\hat{A} =$$

О представлении квадратичной формы в виде суммы квадратов

Доказательство.
По теореме о собственных значениях симметричной матрицы

$$A = QDQ^{-1},$$

где D – диагональная матрица, составленная из собственных значений A; Q – ортогональная матрица ($Q^{\mathrm{t}} = Q^{-1}$) из собственных векторов, образующих ортонормированный базис.

Это означает, что если в качестве матрицы для замены переменных положить $T = Q$, тогда

$$\hat{A} = T^{\mathrm{t}}AT =$$

О представлении квадратичной формы в виде суммы квадратов

Доказательство.
По теореме о собственных значениях симметричной матрицы

$$A = QDQ^{-1},$$

где D – диагональная матрица, составленная из собственных значений A; Q – ортогональная матрица ($Q^{\mathrm{t}} = Q^{-1}$) из собственных векторов, образующих ортонормированный базис.

Это означает, что если в качестве матрицы для замены переменных положить $T = Q$, тогда

$$\hat{A} = T^{\mathrm{t}}AT = Q^{\mathrm{t}}AQ =$$

О представлении квадратичной формы в виде суммы квадратов

Доказательство.
По теореме о собственных значениях симметричной матрицы

$$A = QDQ^{-1},$$

где D – диагональная матрица, составленная из собственных значений A; Q – ортогональная матрица ($Q^{\mathrm{t}} = Q^{-1}$) из собственных векторов, образующих ортонормированный базис.

Это означает, что если в качестве матрицы для замены переменных положить $T = Q$, тогда

$$\hat{A} = T^{\mathrm{t}}AT = Q^{\mathrm{t}}AQ = Q^{-1}QDQ^{-1}Q =$$

О представлении квадратичной формы в виде суммы квадратов

Доказательство.
По теореме о собственных значениях симметричной матрицы

$$A = QDQ^{-1},$$

где D – диагональная матрица, составленная из собственных значений A; Q – ортогональная матрица ($Q^{\mathrm{t}} = Q^{-1}$) из собственных векторов, образующих ортонормированный базис.

Это означает, что если в качестве матрицы для замены переменных положить $T = Q$, тогда

$$\hat{A} = T^{\mathrm{t}}AT = Q^{\mathrm{t}}AQ = Q^{-1}QDQ^{-1}Q = D.$$

О представлении квадратичной формы в виде суммы квадратов

Доказательство.
По теореме о собственных значениях симметричной матрицы

$$A = QDQ^{-1},$$

где D – диагональная матрица, составленная из собственных значений A; Q – ортогональная матрица ($Q^{\mathrm{t}} = Q^{-1}$) из собственных векторов, образующих ортонормированный базис.

Это означает, что если в качестве матрицы для замены переменных положить $T = Q$, тогда

$$\hat{A} = T^{\mathrm{t}}AT = Q^{\mathrm{t}}AQ = Q^{-1}QDQ^{-1}Q = D.$$

Пусть $r = r(D) = r(A)$

О представлении квадратичной формы в виде суммы квадратов

Доказательство.
По теореме о собственных значениях симметричной матрицы

$$A = QDQ^{-1},$$

где D – диагональная матрица, составленная из собственных значений A; Q – ортогональная матрица ($Q^{\mathrm{t}} = Q^{-1}$) из собственных векторов, образующих ортонормированный базис.

Это означает, что если в качестве матрицы для замены переменных положить $T = Q$, тогда

$$\hat{A} = T^{\mathrm{t}}AT = Q^{\mathrm{t}}AQ = Q^{-1}QDQ^{-1}Q = D.$$

Пусть $r = r(D) = r(A)$ и равно количеству ненулевых элементов на диагонали матрицы D.

О представлении квадратичной формы в виде суммы квадратов

Доказательство.
Рассмотрим

$$\hat{A}(\xi,\xi) = \xi^{\mathrm{t}} D \xi =$$

$$= (\xi_1, \ldots, \xi_r, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_r & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_r \\ \xi_{r+1} \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \ldots + \lambda_r \xi_r^2 .$$

$\square$

Закон инерции квадратичных форм

Теорема (закон инерции квадратичных форм)

При представлении квадратичной формы в виде суммы независимых квадратов,

Закон инерции квадратичных форм

Теорема (закон инерции квадратичных форм)

При представлении квадратичной формы в виде суммы независимых квадратов, указанном выше, число положительных и отрицательных коэффициентов перед квадратами

Закон инерции квадратичных форм

Теорема (закон инерции квадратичных форм)

При представлении квадратичной формы в виде суммы независимых квадратов, указанном выше, число положительных и отрицательных коэффициентов перед квадратами переменных не зависит от представления.

Закон инерции квадратичных форм

Доказательство.
Пусть $A(x,x)$ – квадратичная форма,

Доказательство.
Пусть $A(x, x)$ – квадратичная форма, приведена к сумме квадратов с помощью двух преобразований $x = T\xi$, $x = Q\eta$:

Доказательство.

Пусть $A(x,x)$ – квадратичная форма, приведена к сумме квадратов с помощью двух преобразований $x = T\xi$, $x = Q\eta$:

$$A(\xi,\xi) = \sum_{i=1}^{r} a_i \xi_i^2, \quad A(\eta,\eta) = \sum_{i=1}^{r} b_i \eta_i^2,$$

Закон инерции квадратичных форм

Доказательство.

Пусть $A(x, x)$ – квадратичная форма, приведена к сумме квадратов с помощью двух преобразований $x = T\xi$, $x = Q\eta$:

$$A(\xi, \xi) = \sum_{i=1}^{r} a_i \xi_i^2, \quad A(\eta, \eta) = \sum_{i=1}^{r} b_i \eta_i^2,$$

где Q, T – квадратные неособенные матрицы.

Закон инерции квадратичных форм

Доказательство.
Пусть $A(x,x)$ – квадратичная форма, приведена к сумме квадратов с помощью двух преобразований $x = T\xi$, $x = Q\eta$:

$$A(\xi,\xi) = \sum_{i=1}^{r} a_i \xi_i^2, \quad A(\eta,\eta) = \sum_{i=1}^{r} b_i \eta_i^2,$$

где Q, T – квадратные неособенные матрицы. Пусть среди коэффициентов a_i и b_j

Доказательство.
Пусть $A(x,x)$ – квадратичная форма, приведена к сумме квадратов с помощью двух преобразований $x = T\xi, x = Q\eta$:

$$A(\xi,\xi) = \sum_{i=1}^{r} a_i\xi_i^2, \quad A(\eta,\eta) = \sum_{i=1}^{r} b_i\eta_i^2,$$

где Q, T – квадратные неособенные матрицы. Пусть среди коэффициентов a_i и b_j различное число положительных и отрицательных слагаемых:

Доказательство.

Пусть $A(x,x)$ – квадратичная форма, приведена к сумме квадратов с помощью двух преобразований $x = T\xi$, $x = Q\eta$:

$$A(\xi,\xi) = \sum_{i=1}^{r} a_i \xi_i^2, \quad A(\eta,\eta) = \sum_{i=1}^{r} b_i \eta_i^2,$$

где Q, T – квадратные неособенные матрицы. Пусть среди коэффициентов a_i и b_j различное число положительных и отрицательных слагаемых:

$$\begin{array}{l} \overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_h}^{>0}, \overbrace{a_{h+1}, \ldots, a_g, a_{g+1}, \ldots, a_r}^{<0} \\ \underbrace{b_1, b_2, \ldots, b_h, b_{h+1}, \ldots, b_g}_{>0}, \underbrace{b_{g+1}, \ldots, b_r}_{<0} \end{array} \qquad (h < g \le r).$$

Закон инерции квадратичных форм

Доказательство.
Рассмотрим равенство

$$A(x,x) = \overbrace{\sum_{i=1}^{h} a_i \xi_i^2}^{\geq 0} + \overbrace{\sum_{i=h+1}^{r} a_i \xi_i^2}^{\leq 0} = \overbrace{\sum_{i=1}^{g} b_i \eta_i^2}^{\geq 0} + \overbrace{\sum_{i=g+1}^{r} b_i \eta_i^2}^{\leq 0},$$

Доказательство.
Рассмотрим равенство

$$A(x,x) = \overbrace{\sum_{i=1}^{h} a_i \xi_i^2}^{\geq 0} + \overbrace{\sum_{i=h+1}^{r} a_i \xi_i^2}^{\leq 0} = \overbrace{\sum_{i=1}^{g} b_i \eta_i^2}^{\geq 0} + \overbrace{\sum_{i=g+1}^{r} b_i \eta_i^2}^{\leq 0},$$

где $x = T\xi = Q\eta$.

Закон инерции квадратичных форм

Доказательство.
Рассмотрим равенство

$$A(x,x) = \overbrace{\sum_{i=1}^{h} a_i\xi_i^2}^{\geq 0} + \overbrace{\sum_{i=h+1}^{r} a_i\xi_i^2}^{\leq 0} = \overbrace{\sum_{i=1}^{g} b_i\eta_i^2}^{\geq 0} + \overbrace{\sum_{i=g+1}^{r} b_i\eta_i^2}^{\leq 0},$$

где $x = T\xi = Q\eta$. Выберем такой набор x_j, чтобы

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_h = 0, \quad \eta_{g+1} = \eta_{g+2} = \ldots = \eta_r = 0,$$
$$\xi_j \neq 0 \text{ для некоторого } j\ (h < j \leq r).$$

Закон инерции квадратичных форм

Доказательство.
Рассмотрим равенство

$$A(x,x) = \overbrace{\sum_{i=1}^{h} a_i\xi_i^2}^{\geq 0} + \overbrace{\sum_{i=h+1}^{r} a_i\xi_i^2}^{\leq 0} = \overbrace{\sum_{i=1}^{g} b_i\eta_i^2}^{\geq 0} + \overbrace{\sum_{i=g+1}^{r} b_i\eta_i^2}^{\leq 0},$$

где $x = T\xi = Q\eta$. Выберем такой набор x_j, чтобы

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_h = 0, \quad \eta_{g+1} = \eta_{g+2} = \ldots = \eta_r = 0,$$
$$\xi_j \neq 0 \text{ для некоторого } j \ (h < j \leq r).$$

Тогда в верхнем равенстве с одной стороны получится, что $A(x,x) < 0$, а с другой $A(x,x) \geq 0$, чего не может быть, значит $h = g$.

Доказательство.
Рассмотрим систему из n линейных уравнений от $2n$ неизвестных ξ_i и η_i $(i = \overline{1, n})$

Закон инерции квадратичных форм

Доказательство.
Рассмотрим систему из n линейных уравнений от $2n$ неизвестных ξ_i и η_i $(i = \overline{1, n})$

$$T\xi - Q\eta = 0$$

и $h + r - g$ дополнительных линейных соотношений

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_h = 0, \quad \eta_{g+1} = \eta_{g+2} = \ldots = \eta_r = 0.$$

Доказательство.
Рассмотрим систему из n линейных уравнений от $2n$ неизвестных ξ_i и η_i $(i = \overline{1,n})$

$$T\xi - Q\eta = 0$$

и $h + r - g$ дополнительных линейных соотношений

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_h = 0, \quad \eta_{g+1} = \eta_{g+2} = \ldots = \eta_r = 0.$$

Так как $r - (g - h) < n$, то ранг матрицы суммарной системы с дополнительными соотношениями меньше числа неизвестных, поэтому существует нетривиальное решение, позволяющее считать $\xi_j \neq 0$ для некоторого j $(h < j \leq r)$.

Метод выделения квадратов Лагранжа

При выделении квадратов в квадратичной форм возможны два случая:

Метод выделения квадратов Лагранжа

При выделении квадратов в квадратичной форм возможны два случая:

1. Для некоторого $g \leq n$ $a_{gg} \neq 0$, тогда исключаем x_g по формуле

Метод выделения квадратов Лагранжа

При выделении квадратов в квадратичной форм возможны два случая:

1. Для некоторого $g \leq n$ $a_{gg} \neq 0$, тогда исключаем x_g по формуле

$$A(x,x) = \frac{1}{a_{gg}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{gk} x_k \right)^2 + A_1(x,x).$$

Метод выделения квадратов Лагранжа

При выделении квадратов в квадратичной форм возможны два случая:

1. Для некоторого $g \le n$ $a_{gg} \neq 0$, тогда исключаем x_g по формуле
$$A(x,x) = \frac{1}{a_{gg}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{gk} x_k \right)^2 + A_1(x,x).$$
2. Пусть $a_{gg} =$ и $a_{hh} = 0$, но $a_{gh} = a_{hg} \neq 0$,

Метод выделения квадратов Лагранжа

При выделении квадратов в квадратичной форм возможны два случая:

1. Для некоторого $g \leq n$ $a_{gg} \neq 0$, тогда исключаем x_g по формуле

$$A(x,x) = \frac{1}{a_{gg}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{gk} x_k \right)^2 + A_1(x,x).$$

2. Пусть $a_{gg} =$ и $a_{hh} = 0$, но $a_{gh} = a_{hg} \neq 0$, тогда

$$A(x,x) = \frac{1}{2a_{hg}} \left[\sum_{k=1}^{n} (a_{gk} + a_{hk}) x_k \right]^2 - \frac{1}{2a_{hg}} \left[\sum_{k=1}^{n} (a_{gk} - a_{hk}) x_k \right]^2 +$$

$$+A_2(x,x).$$

Теорема (Теорема Якоби)

Пусть квадратичная форма имеет вид

Теорема (Теорема Якоби)

Пусть квадратичная форма имеет вид

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki}),$$

Теорема (Теорема Якоби)

Пусть квадратичная форма имеет вид

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki}),$$

и пусть главные миноры соответствующей ей матрицы A

Теорема (Теорема Якоби)

Пусть квадратичная форма имеет вид

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki}),$$

и пусть главные миноры соответствующей ей матрицы A

$$D_1 = a_{11},$$

Теорема (Теорема Якоби)

Пусть квадратичная форма имеет вид

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki}),$$

и пусть главные миноры соответствующей ей матрицы A

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

Теорема Якоби

Теорема (Теорема Якоби)

Пусть квадратичная форма имеет вид

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki}),$$

и пусть главные миноры соответствующей ей матрицы A

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ldots, D_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix},$$

Теорема (Теорема Якоби)

Пусть квадратичная форма имеет вид

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki}),$$

и пусть главные миноры соответствующей ей матрицы A

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ldots, D_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix},$$

все отличны от нуля.

Теорема (Теорема Якоби)

Пусть квадратичная форма имеет вид

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki}),$$

и пусть главные миноры соответствующей ей матрицы A

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ldots, D_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix},$$

все отличны от нуля. Тогда существуют линейные формы $\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k$,

Теорема (Теорема Якоби)

Пусть квадратичная форма имеет вид

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki}),$$

и пусть главные миноры соответствующей ей матрицы A

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ldots, D_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix},$$

все отличны от нуля. Тогда существуют линейные формы $\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k$, для которых квадратичная форма запишется в виде

Теорема (Теорема Якоби)

Пусть квадратичная форма имеет вид

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki}),$$

и пусть главные миноры соответствующей ей матрицы A

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \ldots, D_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix},$$

все отличны от нуля. Тогда существуют линейные формы $\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}x_k$, для которых квадратичная форма запишется в виде

$$A(\xi,\xi) = \frac{D_0}{D_1}\xi_1^2 + \frac{D_1}{D_2}\xi_2^2 + \ldots + \frac{D_{n-1}}{D_n}\xi_n^2, \quad D_0 = 1.$$

(без доказательства)

Положительно определенные квадратичные формы

Определение

Вещественная квадратичная форма $A(x, x)$ называется положительно определенной,

Положительно определенные квадратичные формы

Определение

Вещественная квадратичная форма $A(x,x)$ называется положительно определенной, если для любых значений переменных $x_1,\dots,x_n$,

Положительно определенные квадратичные формы

Определение

Вещественная квадратичная форма $A(x, x)$ *называется* *положительно определенной*, *если для любых значений переменных* $x_1, \ldots, x_n$, *не равных одновременно* 0,

Положительно определенные квадратичные формы

Определение

Вещественная квадратичная форма $A(x, x)$ *называется* ***положительно определенной****, если для любых значений переменных* $x_1, \ldots, x_n$*, не равных одновременно* 0*, она принимает только положительные значения.*

Положительно определенные квадратичные формы

Определение

Вещественная квадратичная форма $A(x, x)$ называется положительно определенной, если для любых значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, не равных одновременно 0, она принимает только положительные значения.

Теорема

Если положительно определенная квадратичная форма приведена к сумме квадратов,

Положительно определенные квадратичные формы

Определение

Вещественная квадратичная форма $A(x,x)$ называется положительно определенной, если для любых значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, не равных одновременно 0, она принимает только положительные значения.

Теорема

Если положительно определенная квадратичная форма приведена к сумме квадратов, то все коэффициенты перед квадратами всегда больше 0

Положительно определенные квадратичные формы

Определение

Вещественная квадратичная форма $A(x, x)$ называется положительно определенной, если для любых значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, не равных одновременно 0, она принимает только положительные значения.

Теорема

Если положительно определенная квадратичная форма приведена к сумме квадратов, то все коэффициенты перед квадратами всегда больше 0 и количество квадратов равно количеству переменных.

Представление квадратичной формы в виде суммы квадратов

Доказательство.

Предположим, положительно определенная квадратичная форма $A(x,x)$ приведена к сумме квадратов

Представление квадратичной формы в виде суммы квадратов

Доказательство.

Предположим, положительно определенная квадратичная форма $A(x, x)$ приведена к сумме квадратов с помощью линейного преобразования $x = T\xi$,

Представление квадратичной формы в виде суммы квадратов

Доказательство.

Предположим, положительно определенная квадратичная форма $A(x,x)$ приведена к сумме квадратов с помощью линейного преобразования $x = T\xi$, тогда

$$A(x,x) = A(\xi,\xi) = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i^2 .$$

Представление квадратичной формы в виде суммы квадратов

Доказательство.
Предположим, положительно определенная квадратичная форма $A(x,x)$ приведена к сумме квадратов с помощью линейного преобразования $x = T\xi$, тогда

$$A(x,x) = A(\xi,\xi) = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i^2 .$$

Предположим, что $a_j \leq 0$ при некотором j.

Представление квадратичной формы в виде суммы квадратов

Доказательство.
Предположим, положительно определенная квадратичная форма $A(x,x)$ приведена к сумме квадратов с помощью линейного преобразования $x = T\xi$, тогда

$$A(x,x) = A(\xi,\xi) = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i^2.$$

Предположим, что $a_j \leq 0$ при некотором j. Тогда рассмотрим вектор $\xi^0 = \{0,\ldots,0,\underbrace{1}_{\text{j-е место}},0,\ldots,0\}$

Представление квадратичной формы в виде суммы квадратов

Доказательство.

Предположим, положительно определенная квадратичная форма $A(x,x)$ приведена к сумме квадратов с помощью линейного преобразования $x = T\xi$, тогда

$$A(x,x) = A(\xi,\xi) = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i^2 .$$

Предположим, что $a_j \leq 0$ при некотором j. Тогда рассмотрим вектор $\xi^0 = \{0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{j-е место}}, 0, \ldots, 0\}$ и $x^0 = T\xi^0 \neq 0$.

Представление квадратичной формы в виде суммы квадратов

Доказательство.
Предположим, положительно определенная квадратичная форма $A(x,x)$ приведена к сумме квадратов с помощью линейного преобразования $x = T\xi$, тогда

$$A(x,x) = A(\xi,\xi) = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i^2 .$$

Предположим, что $a_j \leq 0$ при некотором j. Тогда рассмотрим вектор $\xi^0 = \{0,\ldots,0,\underbrace{1}_{\text{j-е место}},0,\ldots,0\}$ и $x^0 = T\xi^0 \neq 0$. С одной стороны $A(x^0,x^0) > 0$, т.к. форма положительно определена,

Представление квадратичной формы в виде суммы квадратов

Доказательство.
Предположим, положительно определенная квадратичная форма $A(x,x)$ приведена к сумме квадратов с помощью линейного преобразования $x = T\xi$, тогда

$$A(x,x) = A(\xi,\xi) = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i^2.$$

Предположим, что $a_j \leq 0$ при некотором j. Тогда рассмотрим вектор $\xi^0 = \{0,\dots,0,\underbrace{1}_{\text{j-е место}},0,\dots,0\}$ и $x^0 = T\xi^0 \neq 0$. С одной стороны $A(x^0,x^0) > 0$, т.к. форма положительно определена, с другой $A(\xi^0,\xi^0) \leq 0$ из за выбора ξ_0.

$\square$

Критерий Сильвестера

Теорема (критерий Сильвестера)

Для того чтобы квадратичная форма

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$$

Критерий Сильвестера

Теорема (критерий Сильвестера)

Для того чтобы квадратичная форма

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$$

была положительно определенной,

Теорема (критерий Сильвестера)
Для того чтобы квадратичная форма

$$A(x,x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$$

была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры формы были положительные.
(Доказательство вытекает из теоремы Якоби.)