

# Дифференциальные операторы в криволинейной системе координат

*Верещагин Антон Сергеевич*  
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

19 апреля 2019 г.

# Аннотация

Криволинейные координаты. Коэффициенты Ляме. Дифференциальные операторы в криволинейных координатах.

# Криволинейные системы координат

## Определение

Три скалярные величины  $(q_1, q_2, q_3)$ , однозначно определяющие точку в пространстве, называются **криволинейными координатами точки**.

# Криволинейные системы координат

## Определение

Три скалярные величины  $(q_1, q_2, q_3)$ , однозначно определяющие точку в пространстве, называются **криволинейными координатами точки**.

Пусть в декартовой системе координат точка имеет координаты  $(x, y, z)$ , тогда существует взаимнооднозначное отображение, связывающее различные системы координат:

# Криволинейные системы координат

## Определение

Три скалярные величины  $(q_1, q_2, q_3)$ , однозначно определяющие точку в пространстве, называются **криволинейными координатами точки**.

Пусть в декартовой системе координат точка имеет координаты  $(x, y, z)$ , тогда существует взаимнооднозначное отображение, связывающее различные системы координат:

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3), \\ y = y(q_1, q_2, q_3), \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases}$$

# Криволинейные системы координат

## Определение

Три скалярные величины  $(q_1, q_2, q_3)$ , однозначно определяющие точку в пространстве, называются **криволинейными координатами точки**.

Пусть в декартовой системе координат точка имеет координаты  $(x, y, z)$ , тогда существует взаимнооднозначное отображение, связывающее различные системы координат:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(q_1, q_2, q_3), \\ y = y(q_1, q_2, q_3), \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{array} \right. \quad \text{и наоборот} \quad \left\{ \begin{array}{l} q_1 = q_1(x, y, z), \\ q_2 = q_2(x, y, z), \\ q_3 = q_3(x, y, z). \end{array} \right.$$

# Линии и поверхности уровня

## Определение

Линии  $q_1 = \text{const}$ ,  $q_2 = \text{const}$ ,  $q_3 = \text{const}$  называются *поверхностями уровня* или *координатными поверхностями*.

# Линии и поверхности уровня

## Определение

Линии  $q_1 = \text{const}$ ,  $q_2 = \text{const}$ ,  $q_3 = \text{const}$  называются *поверхностями уровня* или *координатными поверхностями*. А линии пересечения двух таких поверхностей называются *координатными линиями*.



# Линии и поверхности уровня

## Определение

Линии  $q_1 = \text{const}$ ,  $q_2 = \text{const}$ ,  $q_3 = \text{const}$  называются **поверхностями уровня** или **координатными поверхностями**. А линии пересечения двух таких поверхностей называются **координатными линиями**.

## Цилиндрическая система координат

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

# Линии и поверхности уровня

## Определение

Линии  $q_1 = \text{const}$ ,  $q_2 = \text{const}$ ,  $q_3 = \text{const}$  называются **поверхностями уровня** или **координатными поверхностями**. А линии пересечения двух таких поверхностей называются **координатными линиями**.

## Цилиндрическая система координат

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \arctan y/x, \\ z = z. \end{cases}$$

# Линии и поверхности уровня

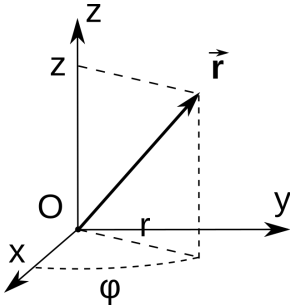
## Определение

Линии  $q_1 = \text{const}$ ,  $q_2 = \text{const}$ ,  $q_3 = \text{const}$  называются **поверхностями уровня** или **координатными поверхностями**. А линии пересечения двух таких поверхностей называются **координатными линиями**.

## Цилиндрическая система координат

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \arctan y/x, \\ z = z. \end{cases}$$

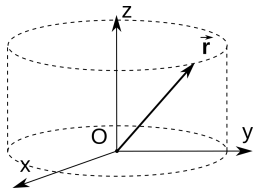


# Координатные линии и координатные поверхности в цилиндрической системе координат

$$r = \text{const}$$

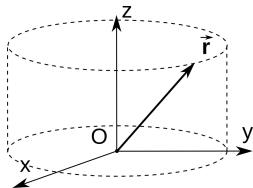
$$\varphi = \text{const}$$

$$z = \text{const}$$

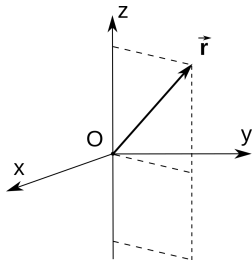


# Координатные линии и координатные поверхности в цилиндрической системе координат

$$r = \text{const}$$



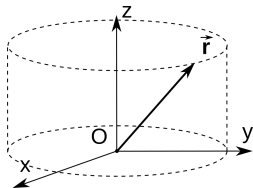
$$\varphi = \text{const}$$



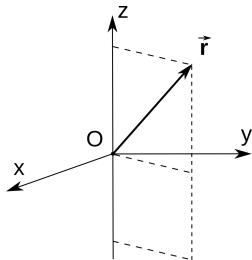
$$z = \text{const}$$

# Координатные линии и координатные поверхности в цилиндрической системе координат

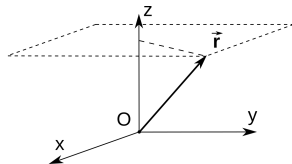
$$r = \text{const}$$



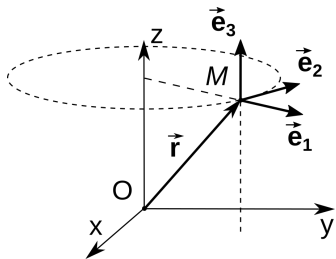
$$\varphi = \text{const}$$



$$z = \text{const}$$



# Коэффициенты Ляме

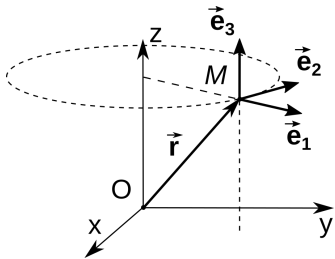


## Коэффициенты Ляме

Рассмотрим фиксированную точку  $M$ ,  
и введем единичные векторы

$$\vec{e}_1, \quad \vec{e}_2, \quad \vec{e}_3 \\ (||\vec{e}_1|| = ||\vec{e}_2|| = ||\vec{e}_3|| = 1),$$

направленные вдоль касательных к координатным линиям в сторону возрастания координат.



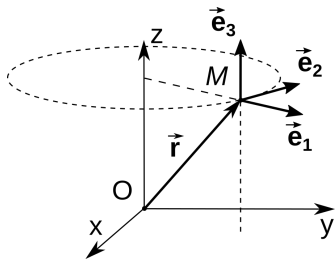


## Коэффициенты Ляме

Рассмотрим фиксированную точку  $M$ ,  
и введем единичные векторы

$$\vec{e}_1, \quad \vec{e}_2, \quad \vec{e}_3 \\ (||\vec{e}_1|| = ||\vec{e}_2|| = ||\vec{e}_3|| = 1),$$

направленные вдоль касательных к координатным линиям в сторону возрастания координат.



Пусть

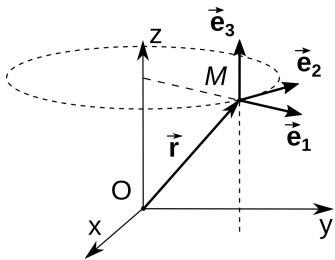
$$\vec{r} = x(q_1, q_2, q_3)\vec{i} + y(q_1, q_2, q_3)\vec{j} + z(q_1, q_2, q_3)\vec{k},$$

## Коэффициенты Ляме

Рассмотрим фиксированную точку  $M$ ,  
и введем единичные векторы

$$\vec{e}_1, \quad \vec{e}_2, \quad \vec{e}_3$$
$$(\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1),$$

направленные вдоль касательных к координатным линиям в сторону возрастания координат.



Пусть

$$\vec{r} = x(q_1, q_2, q_3)\vec{i} + y(q_1, q_2, q_3)\vec{j} + z(q_1, q_2, q_3)\vec{k},$$

тогда рассмотрим

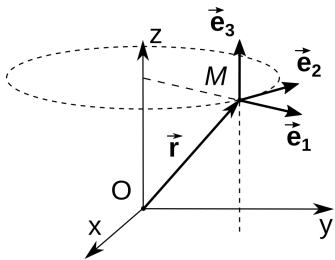
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\vec{k} =$$

## Коэффициенты Ляме

Рассмотрим фиксированную точку  $M$ ,  
и введем единичные векторы

$$\vec{e}_1, \quad \vec{e}_2, \quad \vec{e}_3$$
$$(\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1),$$

направленные вдоль касательных к координатным линиям в сторону возрастания координат.



Пусть

$$\vec{r} = x(q_1, q_2, q_3)\vec{i} + y(q_1, q_2, q_3)\vec{j} + z(q_1, q_2, q_3)\vec{k},$$

тогда рассмотрим

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\vec{k} = H_1\vec{e}_1, \quad H_1 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \right|.$$

# Коэффициенты Ляме

Общие формулы

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = H_i \vec{e}_i, \quad H_i^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2 \quad (i = 1, 2, 3).$$

# Коэффициенты Ляме

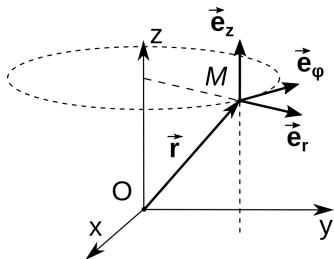
Общие формулы

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = H_i \vec{e}_i, \quad H_i^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2 \quad (i = 1, 2, 3).$$

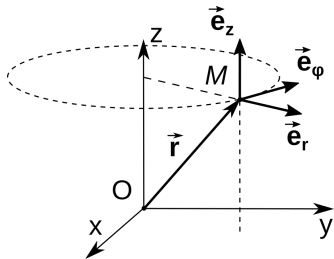
## Определение

Величины  $H_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) называются *коэффициентами Ляме*.

# Коэффициенты Ляме для цилиндрической системы координат

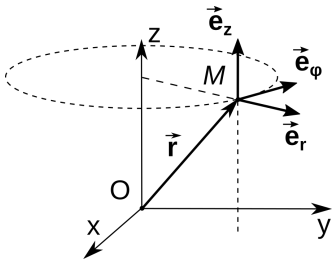


# Коэффициенты Ляме для цилиндрической системы координат



$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

# Коэффициенты Ляме для цилиндрической системы координат

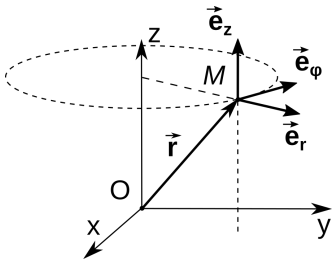


$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1,$$



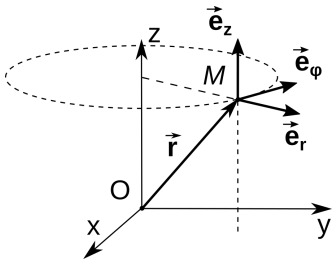
# Коэффициенты Ляме для цилиндрической системы координат



$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1,$$
$$H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r,$$

# Коэффициенты Ляме для цилиндрической системы координат



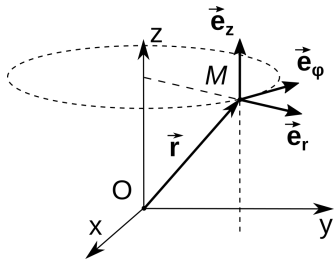
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1,$$

$$H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r,$$

$$H_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1.$$

# Коэффициенты Ляме для цилиндрической системы координат



$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1,$$

$$H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r,$$

$$H_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1.$$

Из построения векторов  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\varphi$  и  $\vec{e}_z$  видно, что они **взаимно ортогональны**.

# Предположение об ортогональности криволинейной системы координат

Далее будем рассматривать только **ортогональные криволинейные системы координат**:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$$(i, j = 1, 2, 3).$$

# Предположение об ортогональности криволинейной системы координат

Далее будем рассматривать только **ортогональные криволинейные системы координат**:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$$(i, j = 1, 2, 3).$$

$\delta_{ij}$  называется **символом Кронекера**.

# Градиент в криволинейной системе координат

Из выражений

$$dq_i = \text{grad } q_i \cdot d\vec{r} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

## Градиент в криволинейной системе координат

Из выражений

$$dq_i = \text{grad } q_i \cdot d\vec{r} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

и

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \quad (2)$$

## Градиент в криволинейной системе координат

Из выражений

$$dq_i = \text{grad } q_i \cdot d\vec{r} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

и

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \quad (2)$$

подстановкой (2) в (1) при  $i = 1$  получим

$$dq_1 = \text{grad } q_1 \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \right)$$



## Градиент в криволинейной системе координат

Из выражений

$$dq_i = \text{grad } q_i \cdot d\vec{r} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

и

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \quad (2)$$

подстановкой (2) в (1) при  $i = 1$  получим

$$dq_1 = \text{grad } q_1 \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \right)$$

$$0 = \left( \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} - 1 \right) dq_1 + \left( \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \right) dq_2 + \left( \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right) dq_3$$

## Градиент в криволинейной системе координат

Из выражений

$$dq_i = \text{grad } q_i \cdot d\vec{r} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

и

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \quad (2)$$

подстановкой (2) в (1) при  $i = 1$  получим

$$dq_1 = \text{grad } q_1 \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \right)$$

$$0 = \left( \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} - 1 \right) dq_1 + \left( \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \right) dq_2 + \left( \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right) dq_3$$

В силу произвольности  $dq_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )

$$\text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = 1, \quad \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = 0, \quad \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = 0.$$

## Градиент в криволинейной системе координат

$$\text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = 1, \quad \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = 0, \quad \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = 0.$$

## Градиент в криволинейной системе координат

$$\text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = 1, \quad \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = 0, \quad \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = 0.$$

Т.к.  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = H_i \vec{e}_i$  и  $\vec{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) взаимноортогональны,

## Градиент в криволинейной системе координат

$$\text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = 1, \quad \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = 0, \quad \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = 0.$$

Т.к.  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = H_i \vec{e}_i$  и  $\vec{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) взаимноортогональны, тогда

$$\text{grad } q_1 = \frac{1}{H_1} \vec{e}_1.$$

## Градиент в криволинейной системе координат

$$\text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = 1, \quad \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = 0, \quad \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = 0.$$

Т.к.  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = H_i \vec{e}_i$  и  $\vec{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) взаимноортогональны, тогда

$$\text{grad } q_1 = \frac{1}{H_1} \vec{e}_1.$$

Повторяя проделанную процедуру для  $i = 2, 3$ , получим что

$$\text{grad } q_i = \frac{1}{H_i} \vec{e}_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

# Градиент в криволинейной системе координат

Вспользуемся для разложения градиента

$$\text{grad } \varphi(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \text{grad } q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \text{grad } q_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \text{grad } q_3.$$

# Градиент в криволинейной системе координат

Воспользуемся для разложения градиента

$$\text{grad } \varphi(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \text{grad } q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \text{grad } q_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \text{grad } q_3.$$

И тогда

$$\text{grad } \varphi = \frac{\vec{e}_1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_2}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_3}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3}.$$



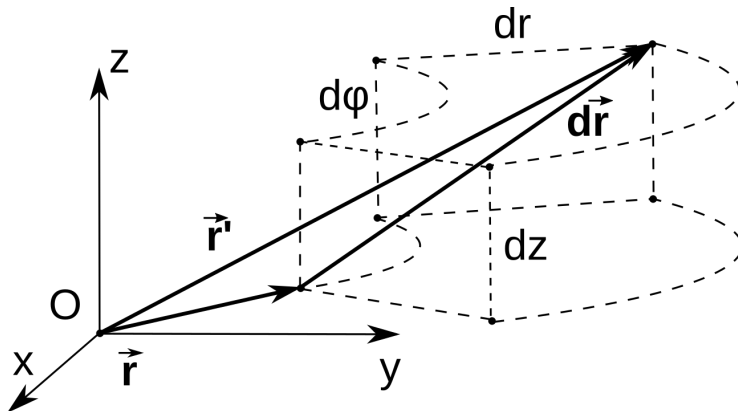
# Криволинейные составляющие вектора

В локальной системе координат произвольный вектор можно разложить по базису

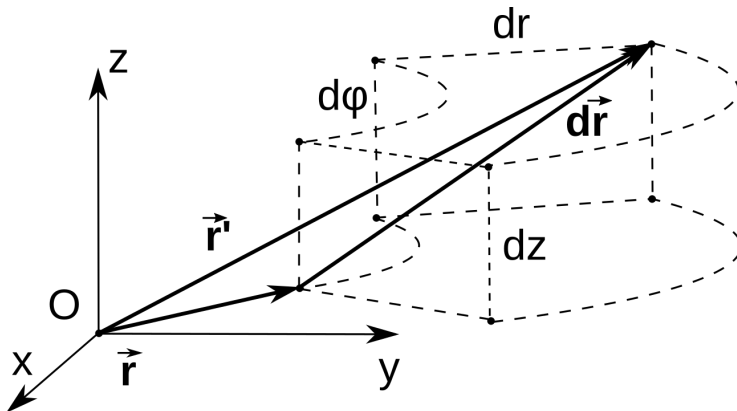
$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3.$$

Скалярные величины  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) называются **криволинейными составляющими вектора  $\vec{a}$** .

# Элементарный параллелепипед

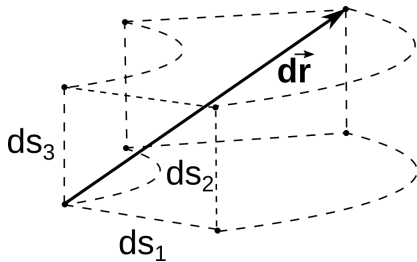


## Элементарный параллелепипед

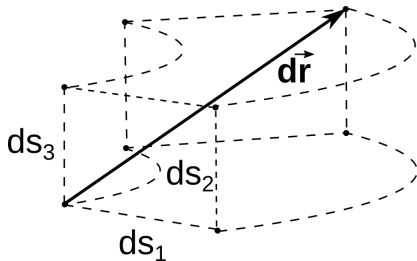


$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 = H_1 dq_1 \vec{e}_1 + H_2 dq_2 \vec{e}_2 + H_3 dq_3 \vec{e}_3.$$

## Длины сторон элементарного параллелепипеда



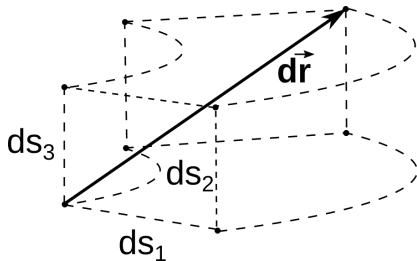
## Длины сторон элементарного параллелепипеда



Отсюда составляющие длины

$$ds_i = H_i dq_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

## Длины сторон элементарного параллелепипеда



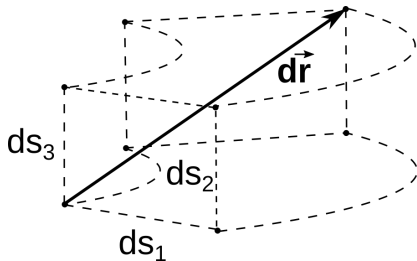
Отсюда составляющие длины

$$ds_i = H_i dq_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

и

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2.$$

## Длины сторон элементарного параллелепипеда



Отсюда составляющие длины

$$ds_i = H_i dq_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

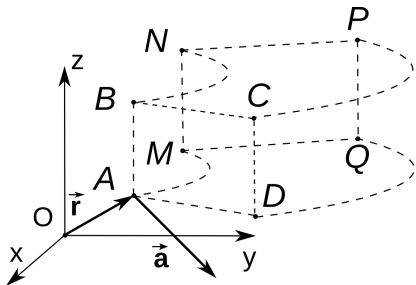
и

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2.$$

Объем элементарного параллелепипеда

$$dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

# Дивергенция в криволинейной системе координат



$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS}{V},$$

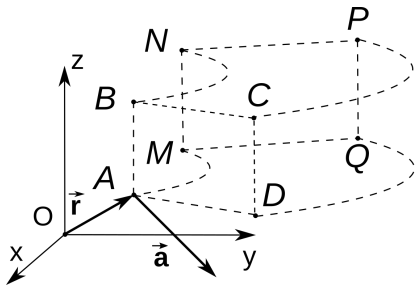
где  $\vec{a}$  – заданное векторное поле;  
 $\vec{n}$  – вектор внешней единичной  
нормали;  $S$  – площадь поверх-  
ности объема  $V$ .

Для элементарного параллелепипеда  $ABCDMPNQ$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}_{ABCD} S_{ABCD} + \dots}{V_{ABCDPQNM}}.$$



# Дивергенция в криволинейной системе координат



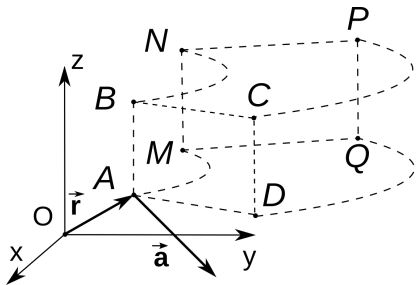
$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS}{V},$$

где  $\vec{a}$  – заданное векторное поле;  
 $\vec{n}$  – вектор внешней единичной нормали;  $S$  – площадь поверхности объема  $V$ .

Потоки векторов через элементарные площадки равны

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{n}_{ABCD} S_{ABCD} &= -a_2 ds_1 ds_3 = -a_2 H_1 H_3 dq_1 dq_3, \\ \vec{a} \cdot \vec{n}_{AMNB} S_{AMNB} &= -a_1 ds_2 ds_3 = -a_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3, \\ \vec{a} \cdot \vec{n}_{AMQD} S_{AMQD} &= -a_3 ds_1 ds_2 = -a_3 H_1 H_2 dq_1 dq_2,\end{aligned}$$

# Дивергенция в криволинейной системе координат



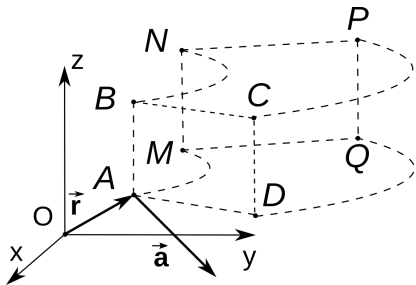
$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS}{V},$$

где  $\vec{a}$  – заданное векторное поле;  
 $\vec{n}$  – вектор внешней единичной  
 нормали;  $S$  – площадь поверх-  
 ности объема  $V$ .

Потоки векторов через элементарные площадки равны

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{n}_{MNPQ} S_{MNPQ} &= (a_2 H_1 H_3 + \frac{\partial a_2 H_1 H_3}{\partial q_2} dq_2) dq_1 dq_3, \\ \vec{a} \cdot \vec{n}_{DCPQ} S_{DCPQ} &= (a_1 H_2 H_3 + \frac{\partial a_1 H_2 H_3}{\partial q_1} dq_1) dq_2 dq_3, \\ \vec{a} \cdot \vec{n}_{BNPC} S_{BNPC} &= (a_3 H_1 H_2 + \frac{\partial a_3 H_1 H_2}{\partial q_3} dq_3) dq_1 dq_2. \end{aligned}$$

# Дивергенция в криволинейной системе координат



$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS}{V},$$

где  $\vec{a}$  – заданное векторное поле;  
 $\vec{n}$  – вектор внешней единичной нормали;  
 $S$  – площадь поверхности объема  $V$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a} &= \frac{(\vec{a} \cdot \vec{n}_{ABCD} S_{ABCD} + \vec{a} \cdot \vec{n}_{MNPQ} S_{MNPQ}) + \dots}{V_{ABCDPQNM}} = \\ &= \frac{\frac{\partial a_2 H_1 H_3}{\partial q_2} dq_2 dq_1 dq_3 + \frac{\partial a_1 H_2 H_3}{\partial q_1} dq_1 dq_2 dq_3 + \frac{\partial a_3 H_1 H_2}{\partial q_3} dq_3 dq_1 dq_2}{H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3} = \\ &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left( \frac{\partial (H_2 H_3 a_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (H_1 H_3 a_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial (H_1 H_2 a_3)}{\partial q_3} \right). \end{aligned}$$