

Линейные операторы в n -мерном пространстве

Верецагин Антон Сергеевич

д-р. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

QR-код презентации



20 февраля 2024 г.

Линейные операторы в n -мерном пространстве. Подобные матрицы. Определитель оператора. Обратный оператор. Характеристические числа и собственные векторы линейного оператора. Две теоремы о собственных векторах. Линейные операторы простой структуры.

Определение

Линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, отображающий n -мерное векторное пространство \mathbb{R}^n само в себя, называется *линейным оператором в \mathbb{R}^n* .

Определение

Линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, отображающий n -мерное векторное пространство \mathbb{R}^n само в себя, называется *линейным оператором в \mathbb{R}^n* .

Особенности линейных операторов над \mathbb{R}^n

Определение

Линейный оператор $A : R^n \rightarrow R^n$, отображающий n -мерное векторное пространство R^n само в себя, называется *линейным оператором в R^n* .

Особенности линейных операторов над R^n

- 1) Существует оператор \mathcal{E} (называемый единичным) такой, что для любого вектора \vec{x} из R^n

$$\mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}.$$

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, отображающий n -мерное векторное пространство \mathbb{R}^n само в себя, называется *линейным оператором в \mathbb{R}^n* .

Особенности линейных операторов над \mathbb{R}^n

- 1) Существует оператор \mathcal{E} (называемый единичным) такой, что для любого вектора \vec{x} из \mathbb{R}^n

$$\mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}.$$

- 2) Для любого оператора \mathcal{A} из \mathbb{R}^n справедливо соотношение

$$\mathcal{A}\mathcal{E} = \mathcal{E}\mathcal{A} = \mathcal{A}.$$

О матрице соответствующей линейному оператору в \mathbb{R}^n

Выберем базис в \mathbb{R}^n : $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$.

О матрице соответствующей линейному оператору в \mathbb{R}^n

Выберем базис в \mathbb{R}^n : $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$. В этом базисе оператору \mathcal{A} соответствует квадратная $n \times n$ матрица A .

О матрице соответствующей линейному оператору в \mathbb{R}^n

Выберем базис в \mathbb{R}^n : $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$. В этом базисе оператору A соответствует квадратная $n \times n$ матрица A . Столбцы этой матрицы составлены из координат вектора $A\vec{e}_j$ в базисе \vec{e}_i $i, j = \overline{1, n}$.

О матрице соответствующей линейному оператору в \mathbb{R}^n

Выберем базис в \mathbb{R}^n : $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$. В этом базисе оператору \mathcal{A} соответствует квадратная $n \times n$ матрица A . Столбцы этой матрицы составлены из координат вектора $\mathcal{A}\vec{e}_j$ в базисе \vec{e}_i $i, j = \overline{1, n}$.

$$A = (\mathcal{A}\vec{e}_1 \mid \mathcal{A}\vec{e}_2 \mid \dots \mid \mathcal{A}\vec{e}_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Теорема

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ – линейные операторы в \mathbb{R}^n .

О действиях над линейными операторами в \mathbb{R}^n

Теорема

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ – линейные операторы в \mathbb{R}^n . Пусть A, B, C – $n \times n$ матрицы соответствующие линейным операторам $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$,

О действиях над линейными операторами в \mathbb{R}^n

Теорема

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ – линейные операторы в \mathbb{R}^n . Пусть A, B, C – $n \times n$ матрицы соответствующие линейным операторам $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, а x – вектор столбец из координат вектора \vec{x} , в базисе \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$) и $\alpha \in \mathbb{R}$, тогда

О действиях над линейными операторами в \mathbb{R}^n

Теорема

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ – линейные операторы в \mathbb{R}^n . Пусть A, B, C – $n \times n$ матрицы соответствующие линейным операторам $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, а x – вектор столбец из координат вектора \vec{x} , в базисе \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$) и $\alpha \in \mathbb{R}$, тогда

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad C = A + B;$$

О действиях над линейными операторами в \mathbb{R}^n

Теорема

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ – линейные операторы в \mathbb{R}^n . Пусть A, B, C – $n \times n$ матрицы соответствующие линейным операторам $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, а x – вектор столбец из координат вектора \vec{x} , в базисе \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$) и $\alpha \in \mathbb{R}$, тогда

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad C = A + B;$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad C = AB;$$

О действиях над линейными операторами в \mathbb{R}^n

Теорема

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ – линейные операторы в \mathbb{R}^n . Пусть A, B, C – $n \times n$ матрицы соответствующие линейным операторам $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, а x – вектор столбец из координат вектора \vec{x} , в базисе \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$) и $\alpha \in \mathbb{R}$, тогда

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad C = A + B;$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B} \quad \Leftrightarrow \quad C = AB;$$

$$\mathcal{C} = \alpha\mathcal{A} \quad \Leftrightarrow \quad C = \alpha A.$$

(Доказательство вытекает из определения операций).

Следствие

Множество линейных операторов линейно относительно сложения и умножения на число.

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть \mathcal{E} – единичный оператор в \mathbb{R}^n ,

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть \mathcal{E} – единичный оператор в \mathbb{R}^n , т.е. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \ \mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$.

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть \mathcal{E} – единичный оператор в \mathbb{R}^n , т.е. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$.

Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть \mathcal{E} – единичный оператор в \mathbb{R}^n , т.е. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$.

Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$ – разложение вектора \vec{x} по базису пространства \mathbb{R}^n $\vec{e}_i \ i = \overline{1, n}$.

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть \mathcal{E} – единичный оператор в \mathbb{R}^n , т.е. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$.

Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$ – разложение вектора \vec{x} по базису пространства \mathbb{R}^n \vec{e}_i $i = \overline{1, n}$.

Тогда

$$\mathcal{E}\vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{e}_n$$

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть \mathcal{E} – единичный оператор в \mathbb{R}^n , т.е. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$.

Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$ – разложение вектора \vec{x} по базису пространства \mathbb{R}^n \vec{e}_i $i = \overline{1, n}$.

Тогда

$$\mathcal{E}\vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{e}_n$$

$$\mathcal{E}\vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{e}_n$$

$$\vdots$$

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть \mathcal{E} – единичный оператор в \mathbb{R}^n , т.е. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad \mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$.

Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$ – разложение вектора \vec{x} по базису пространства \mathbb{R}^n $\vec{e}_i \ i = \overline{1, n}$.

Тогда

$$\mathcal{E}\vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{e}_n$$

$$\mathcal{E}\vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{e}_n$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{E}\vec{e}_n = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \dots + 1 \cdot \vec{e}_n$$

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть \mathcal{E} – единичный оператор в \mathbb{R}^n , т.е. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$.

Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$ – разложение вектора \vec{x} по базису пространства \mathbb{R}^n \vec{e}_i $i = \overline{1, n}$.

Тогда

$$\mathcal{E}\vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{e}_n$$

$$\mathcal{E}\vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{e}_n$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{E}\vec{e}_n = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \dots + 1 \cdot \vec{e}_n$$

Следовательно оператору \mathcal{E} соответствует единичная матрица:

О представлении единичного оператора в виде матрицы

Пусть \mathcal{E} – единичный оператор в \mathbb{R}^n , т.е. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad \mathcal{E}\vec{x} = \vec{x}$.

Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$ – разложение вектора \vec{x} по базису пространства \mathbb{R}^n $\vec{e}_i \ i = \overline{1, n}$.

Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\vec{e}_1 &= 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{e}_n \\ \mathcal{E}\vec{e}_2 &= 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{e}_n \\ &\vdots \\ \mathcal{E}\vec{e}_n &= 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \dots + 1 \cdot \vec{e}_n\end{aligned}$$

Следовательно оператору \mathcal{E} соответствует единичная матрица:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение

Две матрицы A и B ,

Определение

Две матрицы A и B , связанные соотношением $B = TAT^{-1}$,

Определение

Две матрицы A и B , связанные соотношением $B = TAT^{-1}$, называются *подобными*,

Определение

Две матрицы A и B , связанные соотношением $B = TAT^{-1}$, называются *подобными*, где T – неособенная матрица.

Определение

Две матрицы A и B , связанные соотношением $B = TAT^{-1}$, называются *подобными*, где T – неособенная матрица.

Теорема

Пусть \mathcal{A} – линейный оператор в \mathbb{R}^n ,

Определение

Две матрицы A и B , связанные соотношением $B = TAT^{-1}$, называются *подобными*, где T – неособенная матрица.

Теорема

Пусть \mathcal{A} – линейный оператор в \mathbb{R}^n , A – матрица, соответствующая оператору \mathcal{A}

Определение

Две матрицы A и B , связанные соотношением $B = TAT^{-1}$, называются *подобными*, где T – неособенная матрица.

Теорема

Пусть \mathcal{A} – линейный оператор в \mathbb{R}^n , A – матрица, соответствующая оператору \mathcal{A} в базисе \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$),

Определение

Две матрицы A и B , связанные соотношением $B = TAT^{-1}$, называются *подобными*, где T – неособенная матрица.

Теорема

Пусть \mathcal{A} – линейный оператор в \mathbb{R}^n , A – матрица, соответствующая оператору \mathcal{A} в базисе \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$), а A' – матрица, соответствующая оператору \mathcal{A}

Определение

Две матрицы A и B , связанные соотношением $B = TAT^{-1}$, называются *подобными*, где T – неособенная матрица.

Теорема

Пусть \mathcal{A} – линейный оператор в \mathbb{R}^n , A – матрица, соответствующая оператору \mathcal{A} в базисе \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$), а A' – матрица, соответствующая оператору \mathcal{A} в базисе \vec{g}_i ($i = \overline{1, n}$).

Определение

Две матрицы A и B , связанные соотношением $B = TAT^{-1}$, называются *подобными*, где T – неособенная матрица.

Теорема

Пусть \mathcal{A} – линейный оператор в \mathbb{R}^n , A – матрица, соответствующая оператору \mathcal{A} в базисе \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$), а A' – матрица, соответствующая оператору \mathcal{A} в базисе \vec{g}_i ($i = \overline{1, n}$). Тогда матрицы A и A' подобны.

О подобных матрицах

Доказательство.

Пусть T^t – неособенная матрица перехода

О подобных матрицах

Доказательство.

Пусть T^t – неособенная матрица перехода между базисами \vec{e}_i и \vec{g}_j ($i, j = \overline{1, n}$).

О подобных матрицах

Доказательство.

Пусть T^t – неособенная матрица перехода между базисами \vec{e}_i и \vec{g}_j ($i, j = \overline{1, n}$). Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$ – образ вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

О подобных матрицах

Доказательство.

Пусть T^t – неособенная матрица перехода между базисами \vec{e}_i и \vec{g}_j ($i, j = \overline{1, n}$). Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$ – образ вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Пусть x и x' – координаты вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$,

О подобных матрицах

Доказательство.

Пусть T^t – неособенная матрица перехода между базисами \vec{e}_i и \vec{g}_j ($i, j = \overline{1, n}$). Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$ – образ вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Пусть x и x' – координаты вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, а y и y' – координаты вектора $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ в заданных базисах.

О подобных матрицах

Доказательство.

Пусть T^t – неособенная матрица перехода между базисами \vec{e}_i и \vec{g}_j ($i, j = \overline{1, n}$). Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$ – образ вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Пусть x и x' – координаты вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, а y и y' – координаты вектора $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ в заданных базисах. Тогда

$$y = Ax, \quad y' = A'x'.$$

О подобных матрицах

Доказательство.

Пусть T^t – неособенная матрица перехода между базисами \vec{e}_i и \vec{g}_j ($i, j = \overline{1, n}$). Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$ – образ вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Пусть x и x' – координаты вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, а y и y' – координаты вектора $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ в заданных базисах. Тогда

$$y = Ax, \quad y' = A'x'.$$

По теореме о связи векторов в различных базисах

$$y' = Ty, \quad x' = Tx.$$

О подобных матрицах

Доказательство.

Пусть T^t – неособенная матрица перехода между базисами \vec{e}_i и \vec{g}_j ($i, j = \overline{1, n}$). Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$ – образ вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Пусть x и x' – координаты вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, а y и y' – координаты вектора $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ в заданных базисах. Тогда

$$y = Ax, \quad y' = A'x'.$$

По теореме о связи векторов в различных базисах

$$y' = Ty, \quad x' = Tx.$$

Подставляя выражение для y' и x' в предыдущие соотношения, получаем

$$y = (T^{-1}A'T)x.$$

О подобных матрицах

Доказательство.

Пусть T^t – неособенная матрица перехода между базисами \vec{e}_i и \vec{g}_j ($i, j = \overline{1, n}$). Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$ – образ вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Пусть x и x' – координаты вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, а y и y' – координаты вектора $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ в заданных базисах. Тогда

$$y = Ax, \quad y' = A'x'.$$

По теореме о связи векторов в различных базисах

$$y' = Ty, \quad x' = Tx.$$

Подставляя выражение для y' и x' в предыдущие соотношения, получаем

$$y = (T^{-1}A'T)x.$$

Т.к. $y = Ax$, то в силу произвольности \vec{x} : $A = T^{-1}A'T$.



Пусть A и B – подобные матрицы.

Пусть A и B – подобные матрицы. Тогда $A = TBT^{-1}$ для некоторой неособой T

Пусть A и B – подобные матрицы. Тогда $A = TBT^{-1}$ для некоторой неособой T и

$$|A| = |TBT^{-1}| = |T||B||T^{-1}| = |T||B|/|T| = |B|.$$

Определитель линейного оператора в R^n

Пусть A и B – подобные матрицы. Тогда $A = TBT^{-1}$ для некоторой неособой T и

$$|A| = |TBT^{-1}| = |T||B||T^{-1}| = |T||B|/|T| = |B|.$$

Определение

Определителем оператора $\mathcal{A} : R^n \rightarrow R^n$

Определитель линейного оператора в R^n

Пусть A и B – подобные матрицы. Тогда $A = TBT^{-1}$ для некоторой неособой T и

$$|A| = |TBT^{-1}| = |T||B||T^{-1}| = |T||B|/|T| = |B|.$$

Определение

Определителем оператора $\mathcal{A} : R^n \rightarrow R^n$ называется определитель матрицы преобразования этого оператора в любом базисе.

Определитель линейного оператора в R^n

Пусть A и B – подобные матрицы. Тогда $A = TBT^{-1}$ для некоторой неособой T и

$$|A| = |TBT^{-1}| = |T||B||T^{-1}| = |T||B|/|T| = |B|.$$

Определение

Определителем оператора $\mathcal{A} : R^n \rightarrow R^n$ называется определитель матрицы преобразования этого оператора в любом базисе. Если $|\mathcal{A}| = 0$, то оператор называется *особенным*,

Определитель линейного оператора в R^n

Пусть A и B – подобные матрицы. Тогда $A = TBT^{-1}$ для некоторой неособой T и

$$|A| = |TBT^{-1}| = |T||B||T^{-1}| = |T||B|/|T| = |B|.$$

Определение

Определителем оператора $\mathcal{A} : R^n \rightarrow R^n$ называется определитель матрицы преобразования этого оператора в любом базисе. Если $|\mathcal{A}| = 0$, то оператор называется *особенным*, в противном случае $|\mathcal{A}| \neq 0$, оператор – *неособенный*.

Свойства особенного оператора

Свойство

Для особенного оператора \mathcal{A}

Свойства особенного оператора

Свойство

Для особенного оператора \mathcal{A} существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из \mathbb{R}^n ,

Свойства особенного оператора

Свойство

Для особенного оператора \mathcal{A} существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из \mathbb{R}^n , что $\mathcal{A}\vec{x} = 0$.

Свойства особенного оператора

Свойство

Для особенного оператора \mathcal{A} существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из \mathbb{R}^n , что $\mathcal{A}\vec{x} = 0$.

Доказательство.

Выберем базис пространства \mathbb{R}^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$).

Свойства особенного оператора

Свойство

Для особенного оператора \mathcal{A} существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из \mathbb{R}^n , что $\mathcal{A}\vec{x} = 0$.

Доказательство.

Выберем базис пространства \mathbb{R}^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$). Пусть A – матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе.

Свойства особенного оператора

Свойство

Для особенного оператора \mathcal{A} существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из \mathbb{R}^n , что $\mathcal{A}\vec{x} = 0$.

Доказательство.

Выберем базис пространства \mathbb{R}^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$). Пусть A – матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = 0$

Свойство

Для особенного оператора \mathcal{A} существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из \mathbb{R}^n , что $\mathcal{A}\vec{x} = 0$.

Доказательство.

Выберем базис пространства \mathbb{R}^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$). Пусть A – матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ равнозначно матричному

$$Ax = 0.$$

Свойства особенного оператора

Свойство

Для особенного оператора \mathcal{A} существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из \mathbb{R}^n , что $\mathcal{A}\vec{x} = 0$.

Доказательство.

Выберем базис пространства \mathbb{R}^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$). Пусть A – матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ равнозначно матричному

$$Ax = 0.$$

Оператор \mathcal{A} особенный, значит $|A| = 0$.

Свойства особенного оператора

Свойство

Для особенного оператора \mathcal{A} существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из \mathbb{R}^n , что $\mathcal{A}\vec{x} = 0$.

Доказательство.

Выберем базис пространства \mathbb{R}^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$). Пусть A – матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ равнозначно матричному

$$Ax = 0.$$

Оператор \mathcal{A} особенный, значит $|A| = 0$. Следовательно матричное уравнение имеет нетривиальное решение $x \neq 0$.

Свойства особенного оператора

Свойство

Для особенного оператора \mathcal{A} существует такой вектор $\vec{x} \neq 0$ из \mathbb{R}^n , что $\mathcal{A}\vec{x} = 0$.

Доказательство.

Выберем базис пространства \mathbb{R}^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$). Пусть A – матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ равнозначно матричному

$$Ax = 0.$$

Оператор \mathcal{A} особенный, значит $|A| = 0$. Следовательно матричное уравнение имеет нетривиальное решение $x \neq 0$.

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \neq 0 \text{ — решение операторного уравнения.}$$



Свойства неособенного оператора

Теорема

Неособенный оператор \mathcal{A} в \mathbb{R}^n имеет следующие свойства:

Теорема

Неособенный оператор \mathcal{A} в \mathbb{R}^n имеет следующие свойства:

- 1) Из равенства $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ всегда следует, что $\vec{x} = 0$.

Теорема

Неособенный оператор \mathcal{A} в \mathbb{R}^n имеет следующие свойства:

- 1) Из равенства $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ всегда следует, что $\vec{x} = 0$.
- 2) $\mathcal{A}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ (полнота).

Теорема

Неособенный оператор \mathcal{A} в \mathbb{R}^n имеет следующие свойства:

- 1) Из равенства $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ всегда следует, что $\vec{x} = 0$.
- 2) $\mathcal{A}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ (полнота).
- 3) $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$ (взаимнооднозначность).

$$1. \mathcal{A}\vec{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = 0$$

Доказательство.

Выберем базис пространства \mathbb{R}^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$).

$$1. \mathcal{A}\vec{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = 0$$

Доказательство.

Выберем базис пространства \mathbb{R}^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$). Пусть A – матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе.

$$1. \mathcal{A}\vec{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = 0$$

Доказательство.

Выберем базис пространства \mathbb{R}^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$). Пусть A – матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ равнозначно матричному

$$Ax = 0.$$

$$1. \mathcal{A}\vec{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = 0$$

Доказательство.

Выберем базис пространства \mathbb{R}^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$). Пусть A – матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ равнозначно матричному

$$Ax = 0.$$

Оператор \mathcal{A} неособенный, значит $|A| \neq 0$.

$$1. \mathcal{A}\vec{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = 0$$

Доказательство.

Выберем базис пространства \mathbb{R}^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$). Пусть A – матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе. Тогда операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = 0$ равнозначно матричному

$$Ax = 0.$$

Оператор \mathcal{A} неособенный, значит $|A| \neq 0$. Следовательно матричное уравнение имеет только одно решение $x = 0$ и, следовательно, $\vec{x} = 0$.



2. $\mathcal{A}R^n = R^n$ (полнота)

Доказательство.

Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n .

2. $\mathcal{A}R^n = R^n$ (полнота)

Доказательство.

Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n . Выберем базис пространства R^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$).

2. $\mathcal{A}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ (полнота)

Доказательство.

Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё \mathbb{R}^n . Выберем базис пространства \mathbb{R}^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$). Пусть A – матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе.

2. $\mathcal{A}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ (полнота)

Доказательство.

Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё \mathbb{R}^n . Выберем базис пространства \mathbb{R}^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$). Пусть A – матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе. Нужно показать, что операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет решение для любого вектора $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

2. $\mathcal{A}R^n = R^n$ (полнота)

Доказательство.

Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n . Выберем базис пространства R^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$). Пусть A – матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе. Нужно показать, что операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет решение для любого вектора $\vec{y} \in R^n$. Пусть x, y – вектор-столбцы координат векторов \vec{x}, \vec{y} в выбранном базисе соответственно.

2. $\mathcal{A}R^n = R^n$ (полнота)

Доказательство.

Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n . Выберем базис пространства R^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$). Пусть A – матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе. Нужно показать, что операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет решение для любого вектора $\vec{y} \in R^n$. Пусть x, y – вектор-столбцы координат векторов \vec{x}, \vec{y} в выбранном базисе соответственно. В матричном виде уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет вид

$$Ax = y.$$

2. $\mathcal{A}R^n = R^n$ (полнота)

Доказательство.

Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n . Выберем базис пространства R^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$). Пусть A – матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе. Нужно показать, что операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет решение для любого вектора $\vec{y} \in R^n$. Пусть x, y – вектор-столбцы координат векторов \vec{x}, \vec{y} в выбранном базисе соответственно. В матричном виде уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет вид

$$Ax = y.$$

Оператор \mathcal{A} неособенный, значит $|A| \neq 0$.

2. $\mathcal{A}R^n = R^n$ (полнота)

Доказательство.

Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n . Выберем базис пространства R^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$). Пусть A – матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе. Нужно показать, что операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет решение для любого вектора $\vec{y} \in R^n$. Пусть x, y – вектор-столбцы координат векторов \vec{x}, \vec{y} в выбранном базисе соответственно. В матричном виде уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет вид

$$Ax = y.$$

Оператор \mathcal{A} неособенный, значит $|A| \neq 0$. Следовательно матричное уравнение имеет решение вида $x = A^{-1}y$.

2. $\mathcal{A}R^n = R^n$ (полнота)

Доказательство.

Нужно показать, что областью определения линейного неособенного оператора является всё R^n . Выберем базис пространства R^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$). Пусть A – матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе. Нужно показать, что операторное уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет решение для любого вектора $\vec{y} \in R^n$. Пусть x, y – вектор-столбцы координат векторов \vec{x}, \vec{y} в выбранном базисе соответственно. В матричном виде уравнение $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$ имеет вид

$$Ax = y.$$

Оператор \mathcal{A} неособенный, значит $|A| \neq 0$. Следовательно матричное уравнение имеет решение вида $x = A^{-1}y$.

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \neq 0 \text{ — решение операторного уравнения.}$$



3. $A\vec{x} = A\vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$ (взаимнооднозначность)

Доказательство.

Выберем базис пространства R^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$).

3. $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$ (взаимнооднозначность)

Доказательство.

Выберем базис пространства \mathbb{R}^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$). Пусть A – матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе.

3. $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$ (взаимнооднозначность)

Доказательство.

Выберем базис пространства \mathbb{R}^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$). Пусть A – матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе.

Пусть $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y}$, т.е. $\mathcal{A}(\vec{x} - \vec{y}) = 0$.

3. $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$ (взаимнооднозначность)

Доказательство.

Выберем базис пространства \mathbb{R}^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$). Пусть A – матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе.

Пусть $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y}$, т.е. $\mathcal{A}(\vec{x} - \vec{y}) = 0$. Тогда из пункта 1 для неособенного оператора следует, что $\vec{x} - \vec{y} = 0$ или $\vec{x} = \vec{y}$.

3. $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$ (взаимнооднозначность)

Доказательство.

Выберем базис пространства \mathbb{R}^n \vec{e}_i ($i = \overline{1, n}$). Пусть A – матрица оператора \mathcal{A} в этом базисе.

Пусть $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y}$, т.е. $\mathcal{A}(\vec{x} - \vec{y}) = 0$. Тогда из пункта 1 для неособенного оператора следует, что $\vec{x} - \vec{y} = 0$ или $\vec{x} = \vec{y}$.

Оператор \mathcal{A} является однозначной функцией и не может принимать различные значения.



Из доказанных свойств вытекает следующая теорема

Теорема

Неособенный оператор \mathcal{A} в \mathbb{R}^n имеет обратный оператор такой, что:

$$\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\vec{x}) = \vec{x},$$

Из доказанных свойств вытекает следующая теорема

Теорема

Неособенный оператор \mathcal{A} в \mathbb{R}^n имеет обратный оператор такой, что:

$$\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\vec{x}) = \vec{x},$$

т.е.

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}.$$

Оператор \mathcal{A}^{-1} является линейным оператором.

Из доказанных свойств вытекает следующая теорема

Теорема

Неособенный оператор \mathcal{A} в \mathbb{R}^n имеет обратный оператор такой, что:

$$\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\vec{x}) = \vec{x},$$

т.е.

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}.$$

Оператор \mathcal{A}^{-1} является линейным оператором.

Линейность обратного оператора

Доказательство.

Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$, $\vec{u} = \mathcal{A}\vec{w}$,

Линейность обратного оператора

Доказательство.

Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$, $\vec{u} = \mathcal{A}\vec{w}$, и \mathcal{A} неособенный оператор в \mathbb{R}^n .

Линейность обратного оператора

Доказательство.

Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$, $\vec{u} = \mathcal{A}\vec{w}$, и \mathcal{A} неособенный оператор в \mathbb{R}^n .

$$\alpha\vec{y} + \beta\vec{u} =$$

Линейность обратного оператора

Доказательство.

Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$, $\vec{u} = \mathcal{A}\vec{w}$, и \mathcal{A} неособенный оператор в \mathbb{R}^n .

$$\alpha\vec{y} + \beta\vec{u} = \alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{w} =$$

Линейность обратного оператора

Доказательство.

Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$, $\vec{u} = \mathcal{A}\vec{w}$, и \mathcal{A} неособенный оператор в \mathbb{R}^n .

$$\alpha\vec{y} + \beta\vec{u} = \alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{w} = \mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{w})$$

Линейность обратного оператора

Доказательство.

Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$, $\vec{u} = \mathcal{A}\vec{w}$, и \mathcal{A} неособенный оператор в \mathbb{R}^n .

$$\alpha\vec{y} + \beta\vec{u} = \alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{w} = \mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{w})$$

\Downarrow

$$\mathcal{A}^{-1}(\alpha\vec{y} + \beta\vec{u}) = \alpha\vec{x} + \beta\vec{w} =$$

Линейность обратного оператора

Доказательство.

Пусть $\vec{y} = \mathcal{A}\vec{x}$, $\vec{u} = \mathcal{A}\vec{w}$, и \mathcal{A} неособенный оператор в \mathbb{R}^n .

$$\alpha\vec{y} + \beta\vec{u} = \alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{w} = \mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{w})$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{A}^{-1}(\alpha\vec{y} + \beta\vec{u}) = \alpha\vec{x} + \beta\vec{w} = \alpha\mathcal{A}^{-1}\vec{y} + \beta\mathcal{A}^{-1}\vec{u}.$$



Матрица обратного оператора

Теорема

Если в некотором базисе оператору \mathcal{A} отвечает матрица A ,

Матрица обратного оператора

Теорема

Если в некотором базисе оператору \mathcal{A} отвечает матрица A , тогда в этом же базисе оператору \mathcal{A}^{-1} будет отвечать матрица A^{-1} .

Матрица обратного оператора

Доказательство.

Пусть \mathcal{A} неособенный оператор в \mathbb{R}^n .

Матрица обратного оператора

Доказательство.

Пусть \mathcal{A} неособенный оператор в \mathbb{R}^n . Пусть \mathcal{A}^{-1} – обратный оператор к \mathcal{A} .

Матрица обратного оператора

Доказательство.

Пусть \mathcal{A} неособенный оператор в \mathbb{R}^n . Пусть \mathcal{A}^{-1} – обратный оператор к \mathcal{A} . Пусть A – матрица оператора \mathcal{A} , B – матрица оператора \mathcal{A}^{-1} в некотором базисе,

Матрица обратного оператора

Доказательство.

Пусть \mathcal{A} неособенный оператор в \mathbb{R}^n . Пусть \mathcal{A}^{-1} – обратный оператор к \mathcal{A} . Пусть A – матрица оператора \mathcal{A} , B – матрица оператора \mathcal{A}^{-1} в некотором базисе, тогда

$$\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\vec{x}) = \vec{x} = \mathcal{E}\vec{x}.$$

Матрица обратного оператора

Доказательство.

Пусть \mathcal{A} неособенный оператор в \mathbb{R}^n . Пусть \mathcal{A}^{-1} – обратный оператор к \mathcal{A} . Пусть A – матрица оператора \mathcal{A} , B – матрица оператора \mathcal{A}^{-1} в некотором базисе, тогда

$$\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}\vec{x}) = \vec{x} = \mathcal{E}\vec{x}.$$

Таким образом, $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{E}$, и, в матричном виде

$$BA = E,$$

т.е.

$$B = A^{-1}.$$



Определение

Пусть A – линейный оператор в \mathbb{R}^n ,

Определение

Пусть A – линейный оператор в R^n , тогда числа λ и векторы \vec{x} ,

Определение

Пусть A – линейный оператор в R^n , тогда числа λ и векторы \vec{x} , удовлетворяющие равенству

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (\vec{x} \neq \vec{0}),$$

Определение

Пусть A – линейный оператор в R^n , тогда числа λ и векторы \vec{x} , удовлетворяющие равенству

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (\vec{x} \neq \vec{0}),$$

называются *собственными (характеристическими) числами*

Определение

Пусть A – линейный оператор в R^n , тогда числа λ и векторы \vec{x} , удовлетворяющие равенству

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad (\vec{x} \neq \vec{0}),$$

называются *собственными (характеристическими) числами* и соответствующие им векторы – *собственными векторами* линейного оператора A .

Характеристический многочлен

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

Характеристический многочлен

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow A\vec{x} = (\lambda E)\vec{x}$$

Характеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x} \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\vec{x} = 0.$$

Характеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x} \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\vec{x} = 0.$$

Вектор $\vec{x} \neq 0$ и число λ существует,

Характеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x} \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\vec{x} = 0.$$

Вектор $\vec{x} \neq 0$ и число λ существует, когда $|\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}|=0$,

Характеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x} \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\vec{x} = 0.$$

Вектор $\vec{x} \neq 0$ и число λ существует, когда $|\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}|=0$, или в некотором базисе

$$\chi(\lambda) =$$

Характеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x} \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\vec{x} = 0.$$

Вектор $\vec{x} \neq 0$ и число λ существует, когда $|\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}|=0$, или в некотором базисе

$$\chi(\lambda) = |A - \lambda E| =$$

Характеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x} \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\vec{x} = 0.$$

Вектор $\vec{x} \neq 0$ и число λ существует, когда $|\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}|=0$, или в некотором базисе

$$\chi(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Характеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x} \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\vec{x} = 0.$$

Вектор $\vec{x} \neq 0$ и число λ существует, когда $|\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}|=0$, или в некотором базисе

$$\chi(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Определение

Функция $\chi(\lambda)$, приведенного вида,

Характеристический многочлен

$$\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \mathcal{A}\vec{x} = (\lambda\mathcal{E})\vec{x} \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\vec{x} = 0.$$

Вектор $\vec{x} \neq 0$ и число λ существует, когда $|\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}|=0$, или в некотором базисе

$$\chi(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Определение

Функция $\chi(\lambda)$, приведенного вида, называется *характеристическим многочленом* (характеристической функцией) оператора \mathcal{A} .

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора \mathcal{A} в \mathbb{R}^n не зависит от выбора базиса.

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора \mathcal{A} в \mathbb{R}^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы,

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора \mathcal{A} в \mathbb{R}^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору \mathcal{A} в различных базисах пространства \mathbb{R}^n .

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора \mathcal{A} в \mathbb{R}^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору \mathcal{A} в различных базисах пространства \mathbb{R}^n . По свойству они подобны,

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора \mathcal{A} в \mathbb{R}^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору \mathcal{A} в различных базисах пространства \mathbb{R}^n . По свойству они подобны, значит существует $|T| \neq 0$: $A = TA'T^{-1}$,

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора \mathcal{A} в \mathbb{R}^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору \mathcal{A} в различных базисах пространства \mathbb{R}^n . По свойству они подобны, значит существует $|T| \neq 0$: $A = TA'T^{-1}$, тогда

$$|A - \lambda E| =$$

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора \mathcal{A} в \mathbb{R}^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору \mathcal{A} в различных базисах пространства \mathbb{R}^n . По свойству они подобны, значит существует $|T| \neq 0$: $A = TA'T^{-1}$, тогда

$$|A - \lambda E| = |TA'T^{-1} - T\lambda ET^{-1}| =$$

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора \mathcal{A} в \mathbb{R}^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору \mathcal{A} в различных базисах пространства \mathbb{R}^n . По свойству они подобны, значит существует $|T| \neq 0$: $A = TA'T^{-1}$, тогда

$$|A - \lambda E| = |TA'T^{-1} - T\lambda ET^{-1}| = |T(A' - \lambda E)T^{-1}| =$$

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора \mathcal{A} в \mathbb{R}^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору \mathcal{A} в различных базисах пространства \mathbb{R}^n . По свойству они подобны, значит существует $|T| \neq 0$: $A = TA'T^{-1}$, тогда

$$\begin{aligned}|A - \lambda E| &= |TA'T^{-1} - T\lambda ET^{-1}| = |T(A' - \lambda E)T^{-1}| = \\ &= |T||A' - \lambda E||T^{-1}| =\end{aligned}$$

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора \mathcal{A} в \mathbb{R}^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору \mathcal{A} в различных базисах пространства \mathbb{R}^n . По свойству они подобны, значит существует $|T| \neq 0$: $A = TA'T^{-1}$, тогда

$$\begin{aligned}|A - \lambda E| &= |TA'T^{-1} - T\lambda ET^{-1}| = |T(A' - \lambda E)T^{-1}| = \\&= |T||A' - \lambda E||T^{-1}| = |T||A' - \lambda E|/|T| =\end{aligned}$$

Независимость характеристического многочлена от выбора базиса

Теорема

Вид характеристического многочлена линейного оператора \mathcal{A} в \mathbb{R}^n не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Пусть A и A' – матрицы, соответствующие оператору \mathcal{A} в различных базисах пространства \mathbb{R}^n . По свойству они подобны, значит существует $|T| \neq 0$: $A = TA'T^{-1}$, тогда

$$\begin{aligned}|A - \lambda E| &= |TA'T^{-1} - T\lambda ET^{-1}| = |T(A' - \lambda E)T^{-1}| = \\&= |T||A' - \lambda E||T^{-1}| = |T||A' - \lambda E|/|T| = |A' - \lambda E|.\end{aligned}$$



Алгоритм поиска собственных чисел и собственных векторов линейного оператора A в R^n

Алгоритм поиска собственных чисел и собственных векторов линейного оператора \mathcal{A} в \mathbb{R}^n

- 1) Выбирается базис в \mathbb{R}^n .

Алгоритм поиска собственных чисел и собственных векторов линейного оператора \mathcal{A} в \mathbb{R}^n

- 1) Выбирается базис в \mathbb{R}^n .
- 2) Находим матрицу A , соответствующую \mathcal{A} в выбранном базисе.

Алгоритм поиска собственных чисел и собственных векторов линейного оператора \mathcal{A} в \mathbb{R}^n

- 1) Выбирается базис в \mathbb{R}^n .
- 2) Находим матрицу A , соответствующую \mathcal{A} в выбранном базисе.
- 3) Находим собственные значения из решения уравнения

$$\chi(\lambda) = 0.$$

Алгоритм поиска собственных чисел и собственных векторов линейного оператора \mathcal{A} в \mathbb{R}^n

- 1) Выбирается базис в \mathbb{R}^n .
- 2) Находим матрицу A , соответствующую \mathcal{A} в выбранном базисе.
- 3) Находим собственные значения из решения уравнения

$$\chi(\lambda) = 0.$$

- 4) Для каждого найденного λ находим пространство решений x из соотношения

$$(A - \lambda E)x = 0.$$

Теорема

Если \vec{x}, \vec{y} – собственные векторы оператора \mathcal{A} ,

Теорема

Если \vec{x}, \vec{y} – собственные векторы оператора \mathcal{A} , соответствующие одному и тому же собственному числу λ ,

Теорема

Если \vec{x}, \vec{y} – собственные векторы оператора \mathcal{A} , соответствующие одному и тому же собственному числу λ , то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ .

Теорема

Если \vec{x}, \vec{y} – собственные векторы оператора \mathcal{A} , соответствующие одному и тому же собственному числу λ , то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ .

Доказательство.

Из условия теоремы $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}, \mathcal{A}\vec{y} = \lambda\vec{y}$.

Теорема

Если \vec{x}, \vec{y} – собственные векторы оператора \mathcal{A} , соответствующие одному и тому же собственному числу λ , то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ .

Доказательство.

Из условия теоремы $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\mathcal{A}\vec{y} = \lambda\vec{y}$. Умножим первое соотношение на α , второе на β , сложим,

Теорема

Если \vec{x}, \vec{y} – собственные векторы оператора \mathcal{A} , соответствующие одному и тому же собственному числу λ , то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ .

Доказательство.

Из условия теоремы $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\mathcal{A}\vec{y} = \lambda\vec{y}$. Умножим первое соотношение на α , второе на β , сложим, и, пользуясь линейностью, произведем преобразования

$$\alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{y} =$$

Теорема

Если \vec{x}, \vec{y} – собственные векторы оператора \mathcal{A} , соответствующие одному и тому же собственному числу λ , то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ .

Доказательство.

Из условия теоремы $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\mathcal{A}\vec{y} = \lambda\vec{y}$. Умножим первое соотношение на α , второе на β , сложим, и, пользуясь линейностью, произведем преобразования

$$\alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{y} = \alpha\lambda\vec{x} + \beta\lambda\vec{y}$$

Теорема

Если \vec{x}, \vec{y} – собственные векторы оператора \mathcal{A} , соответствующие одному и тому же собственному числу λ , то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ .

Доказательство.

Из условия теоремы $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\mathcal{A}\vec{y} = \lambda\vec{y}$. Умножим первое соотношение на α , второе на β , сложим, и, пользуясь линейностью, произведем преобразования

$$\begin{aligned}\alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{y} &= \alpha\lambda\vec{x} + \beta\lambda\vec{y} \\ \mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) &= \end{aligned}$$

Теорема

Если \vec{x}, \vec{y} – собственные векторы оператора \mathcal{A} , соответствующие одному и тому же собственному числу λ , то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ .

Доказательство.

Из условия теоремы $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\mathcal{A}\vec{y} = \lambda\vec{y}$. Умножим первое соотношение на α , второе на β , сложим, и, пользуясь линейностью, произведем преобразования

$$\begin{aligned}\alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{y} &= \alpha\lambda\vec{x} + \beta\lambda\vec{y} \\ \mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) &= \lambda(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}).\end{aligned}$$

Теорема

Если \vec{x}, \vec{y} – собственные векторы оператора A , соответствующие одному и тому же собственному числу λ , то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ .

Доказательство.

Из условия теоремы $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $A\vec{y} = \lambda\vec{y}$. Умножим первое соотношение на α , второе на β , сложим, и, пользуясь линейностью, произведем преобразования

$$\begin{aligned}\alpha A\vec{x} + \beta A\vec{y} &= \alpha\lambda\vec{x} + \beta\lambda\vec{y} \\ A(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) &= \lambda(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}).\end{aligned}$$

Следовательно вектор $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Теорема

Если \vec{x}, \vec{y} – собственные векторы оператора \mathcal{A} , соответствующие одному и тому же собственному числу λ , то их линейная комбинация также является собственным вектором для этого же числа λ .

Доказательство.

Из условия теоремы $\mathcal{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, $\mathcal{A}\vec{y} = \lambda\vec{y}$. Умножим первое соотношение на α , второе на β , сложим, и, пользуясь линейностью, произведем преобразования

$$\begin{aligned}\alpha\mathcal{A}\vec{x} + \beta\mathcal{A}\vec{y} &= \alpha\lambda\vec{x} + \beta\lambda\vec{y} \\ \mathcal{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) &= \lambda(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}).\end{aligned}$$

Следовательно вектор $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ также является собственным вектором \mathcal{A} , соответствующим собственному числу λ .



Теорема

Собственные векторы соответствующие различным собственным числам являются линейно независимыми.

Свойства собственных векторов

Теорема

Собственные векторы соответствующие различным собственным числам являются линейно независимыми.

Доказательство.

Пусть $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ – собственные векторы,

Теорема

Собственные векторы соответствующие различным собственным числам являются линейно независимыми.

Доказательство.

Пусть $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ – собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_1, \dots, \lambda_k$,

Теорема

Собственные векторы соответствующие различным собственным числам являются линейно независимыми.

Доказательство.

Пусть $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ – собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ ($i \neq j$).

Теорема

Собственные векторы соответствующие различным собственным числам являются линейно независимыми.

Доказательство.

Пусть $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ – собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ ($i \neq j$).

Предположим, что существует линейная комбинация

$$\vec{l}(\alpha_i, \vec{x}_j) = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k = 0 \quad (\alpha_k \neq 0).$$

Теорема

Собственные векторы соответствующие различным собственным числам являются линейно независимыми.

Доказательство.

Пусть $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ – собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ ($i \neq j$).

Предположим, что существует линейная комбинация

$$\vec{l}(\alpha_i, \vec{x}_j) = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k = 0 \quad (\alpha_k \neq 0).$$

Подеиствуем линейными операторами $\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{E}$ ($j = \overline{1, k-1}$) на $\vec{l}(\alpha_i, \vec{x}_j)$:

Теорема

Собственные векторы соответствующие различным собственным числам являются линейно независимыми.

Доказательство.

Пусть $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ – собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ ($i \neq j$).

Предположим, что существует линейная комбинация

$$\vec{l}(\alpha_i, \vec{x}_j) = \alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k = 0 \quad (\alpha_k \neq 0).$$

Поддействуем линейными операторами $\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{E}$ ($j = \overline{1, k-1}$) на $\vec{l}(\alpha_i, \vec{x}_j)$:

$$(\mathcal{A} - \lambda_{k-1} \mathcal{E}) \dots (\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{E})(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{l}(\alpha_i, \vec{x}_j).$$



Доказательство.

$$(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k) =$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k) = \\ = \alpha_1 (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_1 +\end{aligned}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k) = \\ = \alpha_1 (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_1 + \alpha_2 (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_2 + \dots + \end{aligned}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k) = \\ = \alpha_1 (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_1 + \alpha_2 (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_k =\end{aligned}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k) &= \\= \alpha_1 (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_1 + \alpha_2 (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_k &= \\= \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \vec{x}_2 + &\end{aligned}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k) &= \\= \alpha_1 (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_1 + \alpha_2 (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_k &= \\= \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \vec{x}_2 + \alpha_3 (\lambda_3 - \lambda_1) \vec{x}_3 + \dots &\end{aligned}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k) &= \\= \alpha_1 (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_1 + \alpha_2 (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_k &= \\= \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \vec{x}_2 + \alpha_3 (\lambda_3 - \lambda_1) \vec{x}_3 + \dots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_1) \vec{x}_k = 0\end{aligned}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k) &= \\= \alpha_1 (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_1 + \alpha_2 (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_k &= \\= \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \vec{x}_2 + \alpha_3 (\lambda_3 - \lambda_1) \vec{x}_3 + \dots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_1) \vec{x}_k &= 0\end{aligned}$$

$$(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{E})(\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \vec{x}_2 + \alpha_3 (\lambda_3 - \lambda_1) \vec{x}_3 + \dots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_1) \vec{x}_k) =$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k) &= \\= \alpha_1 (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_1 + \alpha_2 (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_k &= \\= \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \vec{x}_2 + \alpha_3 (\lambda_3 - \lambda_1) \vec{x}_3 + \dots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_1) \vec{x}_k &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{E})(\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \vec{x}_2 + \alpha_3 (\lambda_3 - \lambda_1) \vec{x}_3 + \dots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_1) \vec{x}_k) &= \\= \alpha_3 (\lambda_3 - \lambda_1) (\lambda_3 - \lambda_2) \vec{x}_3 + &\end{aligned}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k) &= \\= \alpha_1(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})\vec{x}_1 + \alpha_2(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})\vec{x}_2 + \dots + \alpha_k(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})\vec{x}_k &= \\= \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{x}_2 + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)\vec{x}_3 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)\vec{x}_k &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{E})(\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{x}_2 + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)\vec{x}_3 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)\vec{x}_k) &= \\= \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)\vec{x}_3 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2)\vec{x}_k &= 0\end{aligned}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k) &= \\= \alpha_1 (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_1 + \alpha_2 (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k (\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E}) \vec{x}_k &= \\= \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \vec{x}_2 + \alpha_3 (\lambda_3 - \lambda_1) \vec{x}_3 + \dots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_1) \vec{x}_k &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{E})(\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \vec{x}_2 + \alpha_3 (\lambda_3 - \lambda_1) \vec{x}_3 + \dots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_1) \vec{x}_k) &= \\= \alpha_3 (\lambda_3 - \lambda_1) (\lambda_3 - \lambda_2) \vec{x}_3 + \dots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_1) (\lambda_k - \lambda_2) \vec{x}_k &= 0\end{aligned}$$

\vdots

$$\alpha_k (\lambda_k - \lambda_1) (\lambda_k - \lambda_2) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \vec{x}_k = 0$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k) &= \\= \alpha_1(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})\vec{x}_1 + \alpha_2(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})\vec{x}_2 + \dots + \alpha_k(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})\vec{x}_k &= \\= \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{x}_2 + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)\vec{x}_3 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)\vec{x}_k &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{E})(\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{x}_2 + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)\vec{x}_3 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)\vec{x}_k) &= \\= \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)\vec{x}_3 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2)\vec{x}_k &= 0\end{aligned}$$

\vdots

$$\alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})\vec{x}_k = 0$$

Последнее равенство невозможно в силу того,

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k) &= \\= \alpha_1(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})\vec{x}_1 + \alpha_2(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})\vec{x}_2 + \dots + \alpha_k(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})\vec{x}_k &= \\= \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{x}_2 + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)\vec{x}_3 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)\vec{x}_k = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{E})(\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{x}_2 + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)\vec{x}_3 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)\vec{x}_k) &= \\= \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)\vec{x}_3 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2)\vec{x}_k = 0\end{aligned}$$

\vdots

$$\alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})\vec{x}_k = 0$$

Последнее равенство невозможно в силу того, что $\alpha_k \neq 0$ (из предположения от противного);

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k) &= \\= \alpha_1(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})\vec{x}_1 + \alpha_2(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})\vec{x}_2 + \dots + \alpha_k(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})\vec{x}_k &= \\= \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{x}_2 + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)\vec{x}_3 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)\vec{x}_k = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{E})(\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{x}_2 + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)\vec{x}_3 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)\vec{x}_k) &= \\= \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)\vec{x}_3 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2)\vec{x}_k = 0\end{aligned}$$

\vdots

$$\alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})\vec{x}_k = 0$$

Последнее равенство невозможно в силу того, что $\alpha_k \neq 0$ (из предположения от противного); $\lambda_k - \lambda_i \neq 0$, т.к. $\lambda_i \neq \lambda_j$ ($i \neq j$);

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k) &= \\= \alpha_1(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})\vec{x}_1 + \alpha_2(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})\vec{x}_2 + \dots + \alpha_k(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})\vec{x}_k &= \\= \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{x}_2 + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)\vec{x}_3 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)\vec{x}_k = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{E})(\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{x}_2 + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)\vec{x}_3 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)\vec{x}_k) &= \\= \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)\vec{x}_3 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2)\vec{x}_k = 0\end{aligned}$$

\vdots

$$\alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})\vec{x}_k = 0$$

Последнее равенство невозможно в силу того, что $\alpha_k \neq 0$ (из предположения от противного); $\lambda_k - \lambda_i \neq 0$, т.к. $\lambda_i \neq \lambda_j$ ($i \neq j$); $\vec{x}_k \neq 0$ по определению собственного вектора.

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})(\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \vec{x}_k) &= \\= \alpha_1(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})\vec{x}_1 + \alpha_2(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})\vec{x}_2 + \dots + \alpha_k(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{E})\vec{x}_k &= \\= \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{x}_2 + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)\vec{x}_3 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)\vec{x}_k = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{E})(\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\vec{x}_2 + \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)\vec{x}_3 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)\vec{x}_k) &= \\= \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)\vec{x}_3 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2)\vec{x}_k = 0\end{aligned}$$

\vdots

$$\alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})\vec{x}_k = 0$$

Последнее равенство невозможно в силу того, что $\alpha_k \neq 0$ (из предположения от противного); $\lambda_k - \lambda_i \neq 0$, т.к. $\lambda_i \neq \lambda_j$ ($i \neq j$); $\vec{x}_k \neq 0$ по определению собственного вектора.

Следовательно векторы $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ линейно независимы.



Определение

Линейный оператор A в пространстве R^n

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор A в пространстве R^n называется *оператором простой структуры*,

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор A в пространстве R^n называется *оператором простой структуры*, если он имеет n различных собственных чисел.

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор A в пространстве R^n называется *оператором простой структуры*, если он имеет n различных собственных чисел.

Вид оператора простой структуры

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор A в пространстве R^n называется *оператором простой структуры*, если он имеет n различных собственных чисел.

Вид оператора простой структуры

Пусть линейный оператор A в пространстве R^n

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор A в пространстве R^n называется *оператором простой структуры*, если он имеет n различных собственных чисел.

Вид оператора простой структуры

Пусть линейный оператор A в пространстве R^n имеет n различных собственных векторов \vec{x}_i ,

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор \mathcal{A} в пространстве \mathbb{R}^n называется *оператором простой структуры*, если он имеет n различных собственных чисел.

Вид оператора простой структуры

Пусть линейный оператор \mathcal{A} в пространстве \mathbb{R}^n имеет n различных собственных векторов \vec{x}_i , соответствующие различным собственным числам λ_i ($i = \overline{1, n}$).

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор A в пространстве R^n называется *оператором простой структуры*, если он имеет n различных собственных чисел.

Вид оператора простой структуры

Пусть линейный оператор A в пространстве R^n имеет n различных собственных векторов \vec{x}_i , соответствующие различным собственным числам λ_i ($i = \overline{1, n}$). По только что доказанной теореме система из n векторов \vec{x}_i ($i = \overline{1, n}$) линейно независима,

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор A в пространстве R^n называется *оператором простой структуры*, если он имеет n различных собственных чисел.

Вид оператора простой структуры

Пусть линейный оператор A в пространстве R^n имеет n различных собственных векторов \vec{x}_i , соответствующие различным собственным числам λ_i ($i = \overline{1, n}$). По только что доказанной теореме система из n векторов \vec{x}_i ($i = \overline{1, n}$) линейно независима, а значит является базисом.

Линейный оператор простой структуры

Определение

Линейный оператор A в пространстве R^n называется *оператором простой структуры*, если он имеет n различных собственных чисел.

Вид оператора простой структуры

Пусть линейный оператор A в пространстве R^n имеет n различных собственных векторов \vec{x}_i , соответствующие различным собственным числам λ_i ($i = \overline{1, n}$). По только что доказанной теореме система из n векторов \vec{x}_i ($i = \overline{1, n}$) линейно независима, а значит является базисом. Получим вид матрицы A в этом базисе.

Вид оператора простой структуры

Разложение образов базисных векторов по базису пространства \mathbb{R}^n

Вид оператора простой структуры

Разложение образов базисных векторов по базису пространства \mathbb{R}^n

$$\mathcal{A}\vec{x}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{x}_n,$$

Вид оператора простой структуры

Разложение образов базисных векторов по базису пространства \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\vec{x}_1 &= \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{x}_n, \\ \mathcal{A}\vec{x}_2 &= 0 \cdot \vec{x}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{x}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{x}_n, \\ &\vdots\end{aligned}$$

Вид оператора простой структуры

Разложение образов базисных векторов по базису пространства \mathbb{R}^n

$$\mathcal{A}\vec{x}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{x}_n,$$

$$\mathcal{A}\vec{x}_2 = 0 \cdot \vec{x}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{x}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{x}_n,$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{A}\vec{x}_n = 0 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{x}_n.$$

Вид оператора простой структуры

Разложение образов базисных векторов по базису пространства \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\vec{x}_1 &= \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{x}_n, \\ \mathcal{A}\vec{x}_2 &= 0 \cdot \vec{x}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{x}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{x}_n, \\ &\vdots \\ \mathcal{A}\vec{x}_n &= 0 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{x}_n.\end{aligned}$$

Матрица оператора \mathcal{A} в базисе \vec{x}_i ($i = \overline{1, n}$)

Вид оператора простой структуры

Разложение образов базисных векторов по базису пространства \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\vec{x}_1 &= \lambda_1 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{x}_n, \\ \mathcal{A}\vec{x}_2 &= 0 \cdot \vec{x}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{x}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{x}_n, \\ &\vdots \\ \mathcal{A}\vec{x}_n &= 0 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + \dots + \lambda_n \cdot \vec{x}_n. \end{aligned}$$

Матрица оператора \mathcal{A} в базисе \vec{x}_i ($i = \overline{1, n}$)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Теорема (без доказательства)

Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны,

Теорема (без доказательства)

Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны, и существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Теорема (без доказательства)

Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны, и существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема (без доказательства)

Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны, и существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} =$$

Теорема (без доказательства)

Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны, и существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 4 = 0$$

Теорема (без доказательства)

Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны, и существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1.$$

Теорема (без доказательства)

Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны, и существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1.$$

$$\vec{g}_1 = (1/\sqrt{2}, \quad 1/\sqrt{2}),$$

Свойства собственных векторов

Теорема (без доказательства)

Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны, и существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1.$$

$$\begin{aligned} \vec{g}_1 &= (1/\sqrt{2}, \quad 1/\sqrt{2}), \\ \vec{g}_2 &= (-1/\sqrt{2}, \quad 1/\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Теорема (без доказательства)

Все характеристические числа вещественной симметричной матрицы вещественны, и существует базис из ортонормированных собственных векторов.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1.$$

$$\begin{aligned} \vec{g}_1 &= (1/\sqrt{2}, \quad 1/\sqrt{2}), \\ \vec{g}_2 &= (-1/\sqrt{2}, \quad 1/\sqrt{2}). \end{aligned}$$

$$\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2 = 0, \quad \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_1 = 1, \quad \vec{g}_2 \cdot \vec{g}_2 = 1.$$