

Элементы дифференциальной геометрии. Скалярные и векторные поля.

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

4 апреля 2019 г.

Аннотация

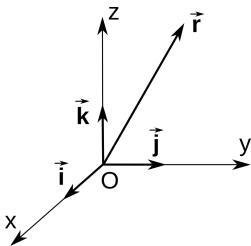
Кривая в пространстве. Ортогональная система координат, связанная с кривой. Формулы Френе. Скалярные и векторные поля. Поверхности уровня. Векторные линии.

Система координат в \mathbb{R}^3

Введем в векторном пространстве \mathbb{R}^3 систему координат

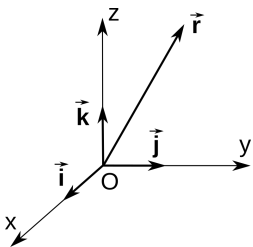
Система координат в \mathbb{R}^3

Введем в векторном пространстве \mathbb{R}^3 систему координат и три базисных ортонормированных вектора \vec{i} , \vec{j} и \vec{k} .



Система координат в \mathbb{R}^3

Введем в векторном пространстве \mathbb{R}^3 систему координат и три базисных ортонормированных вектора \vec{i} , \vec{j} и \vec{k} .

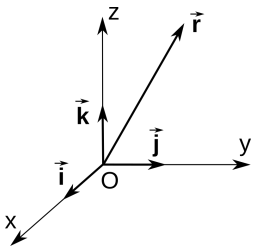


Тогда произвольный вектор \vec{r} можно представить в виде:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

Система координат в \mathbb{R}^3

Введем в векторном пространстве \mathbb{R}^3 систему координат и три базисных ортонормированных вектора \vec{i} , \vec{j} и \vec{k} .



Тогда произвольный вектор \vec{r} можно представить в виде:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где x , y , z – координаты вектора \vec{r} в указанном базисе.

Вектор, зависящий от параметра

В \mathbb{R}^3 рассмотрим переменный вектор

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k},$$

Вектор, зависящий от параметра

В \mathbb{R}^3 рассмотрим переменный вектор

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k},$$

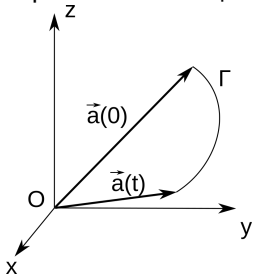
где $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ – декартовы координаты вектора, непрерывно зависящие от t .

Вектор, зависящий от параметра

В \mathbb{R}^3 рассмотрим переменный вектор

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k},$$

где $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ – декартовы координаты вектора, непрерывно зависящие от t .

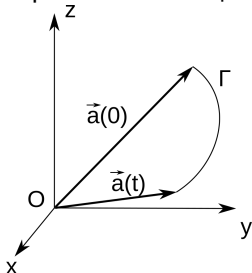


Вектор, зависящий от параметра

В \mathbb{R}^3 рассмотрим переменный вектор

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k},$$

где $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ – декартовы координаты вектора, непрерывно зависящие от t .



Определение

Геометрическое место точек Γ концов вектора $\vec{a}(t)$, отложенных из общего начала O , называется **годографом** вектора.

Производная вектора

Определение

Производной векторной функции называется

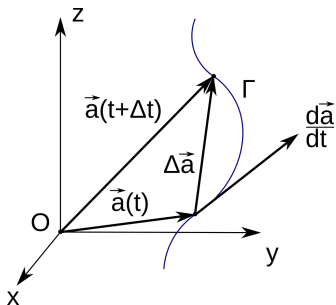
$$\vec{a}'(t) = \frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}.$$

Производная вектора

Определение

Производной векторной функции называется

$$\vec{a}'(t) = \frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}.$$

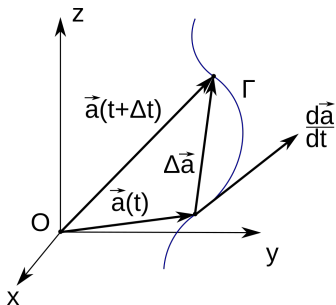


Производная вектора

Определение

Производной векторной функции называется

$$\vec{a}'(t) = \frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}.$$



$\frac{d\vec{a}}{dt}$ по направлению совпадает с касательной к годографу Γ вектора $\vec{a}(t)$.

На рисунке $\Delta \vec{a} = \vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)$.

Свойства производной вектора

Пусть $\vec{a}(t)$, $\vec{b}(t)$ – векторные функции; $c(t)$ – скалярная функция; \cdot , \times – операции скалярного и векторного произведения, тогда

Свойства производной вектора

Пусть $\vec{a}(t)$, $\vec{b}(t)$ – векторные функции; $c(t)$ – скалярная функция; \cdot , \times – операции скалярного и векторного произведения, тогда

1. $\vec{a}'(t) =$

Свойства производной вектора

Пусть $\vec{a}(t)$, $\vec{b}(t)$ – векторные функции; $c(t)$ – скалярная функция; \cdot , \times – операции скалярного и векторного произведения, тогда

1. $\vec{a}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} =$

Свойства производной вектора

Пусть $\vec{a}(t)$, $\vec{b}(t)$ – векторные функции; $c(t)$ – скалярная функция; \cdot , \times – операции скалярного и векторного произведения, тогда

$$\begin{aligned} 1. \quad \vec{a}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{a_x(t + \Delta t) - a_x(t)}{\Delta t} \vec{i} + \frac{a_y(t + \Delta t) - a_y(t)}{\Delta t} \vec{j} + \frac{a_z(t + \Delta t) - a_z(t)}{\Delta t} \vec{k} \right) = \end{aligned}$$

Свойства производной вектора

Пусть $\vec{a}(t)$, $\vec{b}(t)$ – векторные функции; $c(t)$ – скалярная функция; \cdot , \times – операции скалярного и векторного произведения, тогда

$$\begin{aligned} 1. \quad \vec{a}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{a_x(t + \Delta t) - a_x(t)}{\Delta t} \vec{i} + \frac{a_y(t + \Delta t) - a_y(t)}{\Delta t} \vec{j} + \frac{a_z(t + \Delta t) - a_z(t)}{\Delta t} \vec{k} \right) = \\ &= \frac{da_x}{dt} \vec{i} + \frac{da_y}{dt} \vec{j} + \frac{da_z}{dt} \vec{k}; \end{aligned}$$

Свойства производной вектора

Пусть $\vec{a}(t)$, $\vec{b}(t)$ – векторные функции; $c(t)$ – скалярная функция; \cdot , \times – операции скалярного и векторного произведения, тогда

$$\begin{aligned} 1. \quad \vec{a}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{a_x(t + \Delta t) - a_x(t)}{\Delta t} \vec{i} + \frac{a_y(t + \Delta t) - a_y(t)}{\Delta t} \vec{j} + \frac{a_z(t + \Delta t) - a_z(t)}{\Delta t} \vec{k} \right) = \\ &= \frac{da_x}{dt} \vec{i} + \frac{da_y}{dt} \vec{j} + \frac{da_z}{dt} \vec{k}; \end{aligned}$$

$$2. \quad \frac{d(c\vec{a})}{dt} = \frac{dc}{dt} \vec{a} + c \frac{d\vec{a}}{dt};$$

Свойства производной вектора

Пусть $\vec{a}(t)$, $\vec{b}(t)$ – векторные функции; $c(t)$ – скалярная функция; \cdot , \times – операции скалярного и векторного произведения, тогда

$$\begin{aligned} 1. \quad \vec{a}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{a_x(t + \Delta t) - a_x(t)}{\Delta t} \vec{i} + \frac{a_y(t + \Delta t) - a_y(t)}{\Delta t} \vec{j} + \frac{a_z(t + \Delta t) - a_z(t)}{\Delta t} \vec{k} \right) = \\ &= \frac{da_x}{dt} \vec{i} + \frac{da_y}{dt} \vec{j} + \frac{da_z}{dt} \vec{k}; \end{aligned}$$

$$2. \quad \frac{d(c\vec{a})}{dt} = \frac{dc}{dt} \vec{a} + c \frac{d\vec{a}}{dt};$$

$$3. \quad \frac{d(\vec{a} \cdot \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt};$$

Свойства производной вектора

Пусть $\vec{a}(t)$, $\vec{b}(t)$ – векторные функции; $c(t)$ – скалярная функция; \cdot , \times – операции скалярного и векторного произведения, тогда

$$\begin{aligned} 1. \quad \vec{a}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{a_x(t + \Delta t) - a_x(t)}{\Delta t} \vec{i} + \frac{a_y(t + \Delta t) - a_y(t)}{\Delta t} \vec{j} + \frac{a_z(t + \Delta t) - a_z(t)}{\Delta t} \vec{k} \right) = \\ &= \frac{da_x}{dt} \vec{i} + \frac{da_y}{dt} \vec{j} + \frac{da_z}{dt} \vec{k}; \end{aligned}$$

$$2. \quad \frac{d(c\vec{a})}{dt} = \frac{dc}{dt} \vec{a} + c \frac{d\vec{a}}{dt};$$

$$3. \quad \frac{d(\vec{a} \cdot \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt};$$

$$4. \quad \frac{d(\vec{a} \times \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Свойства производной вектора

Пусть $\vec{a}(t)$, $\vec{b}(t)$ – векторные функции; $c(t)$ – скалярная функция; \cdot , \times – операции скалярного и векторного произведения, тогда

$$\begin{aligned} 1. \quad \vec{a}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{a_x(t + \Delta t) - a_x(t)}{\Delta t} \vec{i} + \frac{a_y(t + \Delta t) - a_y(t)}{\Delta t} \vec{j} + \frac{a_z(t + \Delta t) - a_z(t)}{\Delta t} \vec{k} \right) = \\ &= \frac{da_x}{dt} \vec{i} + \frac{da_y}{dt} \vec{j} + \frac{da_z}{dt} \vec{k}; \end{aligned}$$

$$2. \quad \frac{d(c\vec{a})}{dt} = \frac{dc}{dt} \vec{a} + c \frac{d\vec{a}}{dt};$$

$$3. \quad \frac{d(\vec{a} \cdot \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt};$$

$$4. \quad \frac{d(\vec{a} \times \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Справедливость выражений пунктов 2-4 следует из пункта 1.

Производная вектора постоянного направления

Пусть $\vec{a}(t) = a(t)\vec{a}_0$, где $\|\vec{a}_0\| = 1$ – постоянный вектор, $a(t)$ – длина вектора $\vec{a}(t)$,

Производная вектора постоянного направления

Пусть $\vec{a}(t) = a(t)\vec{a}_0$, где $\|\vec{a}_0\| = 1$ – постоянный вектор, $a(t)$ – длина вектора $\vec{a}(t)$, тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\vec{a}_0.$$

Производная вектора постоянного направления

Пусть $\vec{a}(t) = a(t)\vec{a}_0$, где $\|\vec{a}_0\| = 1$ – постоянный вектор, $a(t)$ – длина вектора $\vec{a}(t)$, тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\vec{a}_0.$$

Отсюда следует, что $\frac{d\vec{a}}{dt} \parallel \vec{a}$.

Производная вектора постоянной длины

Пусть $\vec{a}(t) = a_0 \vec{b}(t)$, где a_0 – заданная длина, $\|\vec{b}(t)\| = 1$ – направление вектора $\vec{a}(t)$,

Производная вектора постоянной длины

Пусть $\vec{a}(t) = a_0 \vec{b}(t)$, где a_0 – заданная длина, $\|\vec{b}(t)\| = 1$ – направление вектора $\vec{a}(t)$, тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = a_0 \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Производная вектора постоянной длины

Пусть $\vec{a}(t) = a_0 \vec{b}(t)$, где a_0 – заданная длина, $\|\vec{b}(t)\| = 1$ – направление вектора $\vec{a}(t)$, тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = a_0 \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{a})}{dt} =$$

Производная вектора постоянной длины

Пусть $\vec{a}(t) = a_0 \vec{b}(t)$, где a_0 – заданная длина, $\|\vec{b}(t)\| = 1$ – направление вектора $\vec{a}(t)$, тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = a_0 \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{a})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} =$$

Производная вектора постоянной длины

Пусть $\vec{a}(t) = a_0 \vec{b}(t)$, где a_0 – заданная длина, $\|\vec{b}(t)\| = 1$ – направление вектора $\vec{a}(t)$, тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = a_0 \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{a})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 2\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt}.$$

Производная вектора постоянной длины

Пусть $\vec{a}(t) = a_0 \vec{b}(t)$, где a_0 – заданная длина, $\|\vec{b}(t)\| = 1$ – направление вектора $\vec{a}(t)$, тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = a_0 \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{a})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 2\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt}.$$

С другой стороны,

$$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{a})}{dt} = \frac{da_0^2}{dt} = 0.$$

Производная вектора постоянной длины

Пусть $\vec{a}(t) = a_0 \vec{b}(t)$, где a_0 – заданная длина, $\|\vec{b}(t)\| = 1$ – направление вектора $\vec{a}(t)$, тогда

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = a_0 \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

Рассмотрим

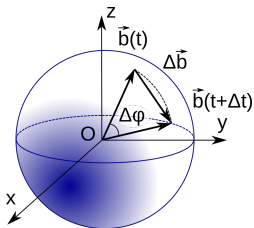
$$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{a})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 2\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt}.$$

С другой стороны,

$$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{a})}{dt} = \frac{da_0^2}{dt} = 0.$$

Отсюда следует, что $\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 0$ или $\vec{a} \perp \frac{d\vec{a}}{dt}$.

Длина производной вектора единичной длины

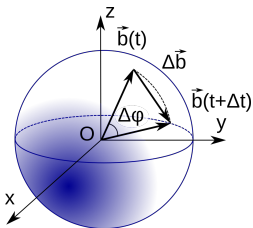


Длина производной вектора единичной длины

На рисунке: $\Delta\varphi$ – угол между двумя положениями \vec{b} ,

$$\Delta\vec{b} = \vec{b}(t + \Delta t) - \vec{b}(t),$$

$$||\Delta\vec{b}|| = 2 \sin(\Delta\varphi/2).$$

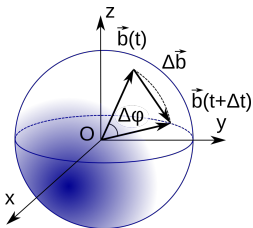


Длина производной вектора единичной длины

На рисунке: $\Delta\varphi$ – угол между двумя положениями \vec{b} ,

$$\Delta\vec{b} = \vec{b}(t + \Delta t) - \vec{b}(t),$$

$$||\Delta\vec{b}|| = 2 \sin(\Delta\varphi/2).$$



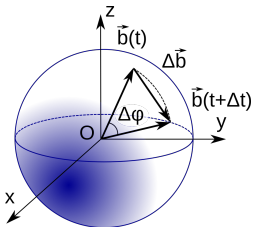
$$\left\| \frac{d\vec{b}}{dt} \right\| =$$

Длина производной вектора единичной длины

На рисунке: $\Delta\varphi$ – угол между двумя положениями \vec{b} ,

$$\Delta\vec{b} = \vec{b}(t + \Delta t) - \vec{b}(t),$$

$$||\Delta\vec{b}|| = 2 \sin(\Delta\varphi/2).$$



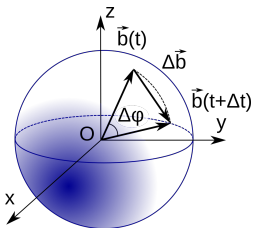
$$\left\| \frac{d\vec{b}}{dt} \right\| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{||\Delta\vec{b}||}{\Delta t} =$$

Длина производной вектора единичной длины

На рисунке: $\Delta\varphi$ – угол между двумя положениями \vec{b} ,

$$\Delta\vec{b} = \vec{b}(t + \Delta t) - \vec{b}(t),$$

$$\|\Delta\vec{b}\| = 2 \sin(\Delta\varphi/2).$$



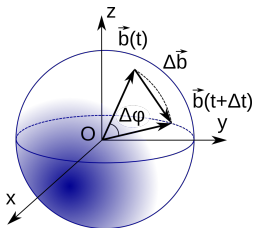
$$\left\| \frac{d\vec{b}}{dt} \right\| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta t} =$$

Длина производной вектора единичной длины

На рисунке: $\Delta\varphi$ – угол между двумя положениями \vec{b} ,

$$\Delta\vec{b} = \vec{b}(t + \Delta t) - \vec{b}(t),$$

$$\|\Delta\vec{b}\| = 2 \sin(\Delta\varphi/2).$$



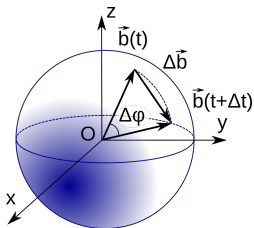
$$\begin{aligned} \left\| \frac{d\vec{b}}{dt} \right\| &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Длина производной вектора единичной длины

На рисунке: $\Delta\varphi$ – угол между двумя положениями \vec{b} ,

$$\Delta\vec{b} = \vec{b}(t + \Delta t) - \vec{b}(t),$$

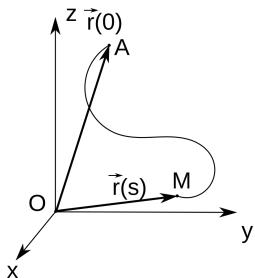
$$||\Delta\vec{b}|| = 2 \sin(\Delta\varphi/2).$$



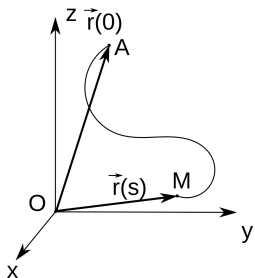
$$\begin{aligned} \left\| \frac{d\vec{b}}{dt} \right\| &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{||\Delta\vec{b}||}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\Delta\varphi/2)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \end{aligned}$$

$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ – называется **угловой скоростью**.

Параметризация кривой с помощью длины s

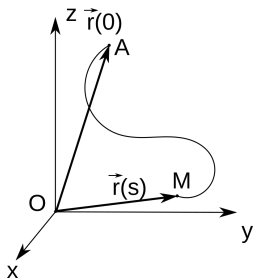


Параметризация кривой с помощью длины s



Пусть кривая параметризована с помощью расстояния s от точки A

Параметризация кривой с помощью длины s

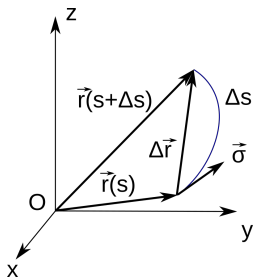


Пусть кривая параметризована с помощью расстояния s от точки A и её уравнение задано некоторым радиус вектором

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$$

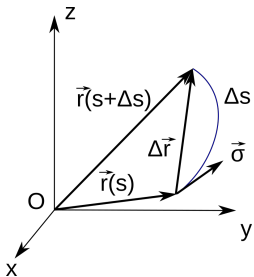
в некоторой декартовой системе координат, где s – длина дуги AM .

Вектор касательной к кривой



Вектор касательной к кривой

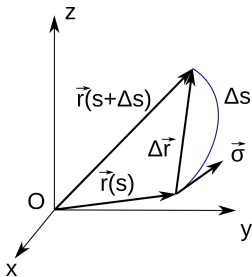
Вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$ направлен по касательной к рассматриваемой кривой,



Вектор касательной к кривой

Вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$ направлен по касательной к рассматриваемой кривой, кроме того

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \right\| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\|\Delta\vec{r}\|}{\Delta s} = 1.$$



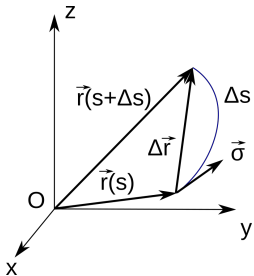
Вектор касательной к кривой

Вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$ направлен по касательной к рассматриваемой кривой, кроме того

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \right\| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\|\Delta\vec{r}\|}{\Delta s} = 1.$$

Таким образом единичный вектор касательной к кривой

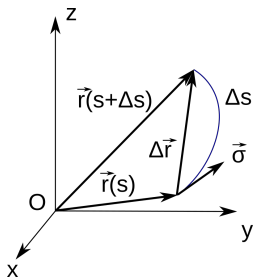
$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \sigma_x \vec{i} + \sigma_y \vec{j} + \sigma_z \vec{k}, \quad \|\vec{\sigma}\| = 1.$$



Вектор касательной к кривой

Вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$ направлен по касательной к рассматриваемой кривой, кроме того

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \right\| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\|\Delta\vec{r}\|}{\Delta s} = 1.$$



Таким образом единичный вектор касательной к кривой

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \sigma_x \vec{i} + \sigma_y \vec{j} + \sigma_z \vec{k}, \quad \|\vec{\sigma}\| = 1.$$

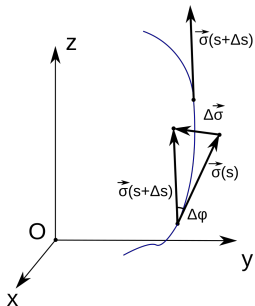
Компоненты вектора $\vec{\sigma}$ по осям

$$\sigma_x = \frac{dx}{ds} = \cos(\vec{\sigma}, x),$$

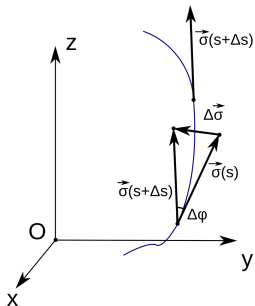
$$\sigma_y = \frac{dy}{ds} = \cos(\vec{\sigma}, y),$$

$$\sigma_z = \frac{dz}{ds} = \cos(\vec{\sigma}, z).$$

Радиус кривизны

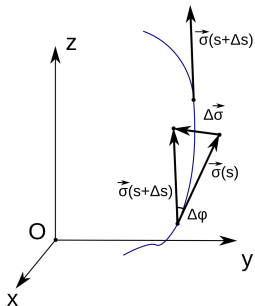


Радиус кривизны



Рассмотрим длину производной касательно-го вектора.

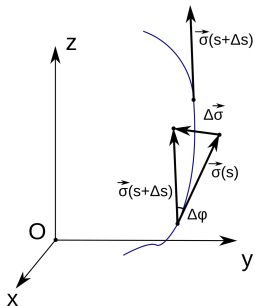
Радиус кривизны



Рассмотрим длину производной касательно-го вектора. Так как $\|\vec{\sigma}(s)\| = 1$, тогда справедливо

$$\left\| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right\| =$$

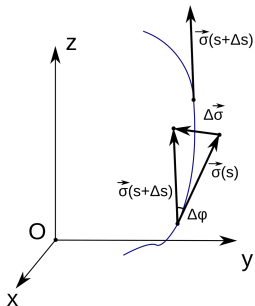
Радиус кривизны



Рассмотрим длину производной касательно-го вектора. Так как $\|\vec{\sigma}(s)\| = 1$, тогда справедливо

$$\left\| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right\| = \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \right\| =$$

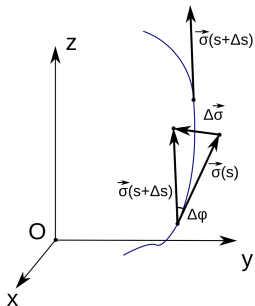
Радиус кривизны



Рассмотрим длину производной касательного вектора. Так как $\|\vec{\sigma}(s)\| = 1$, тогда справедливо

$$\left\| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right\| = \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \right\| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} =$$

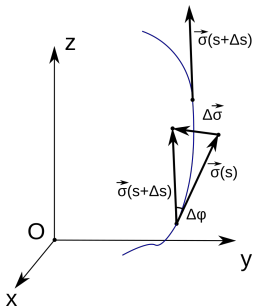
Радиус кривизны



Рассмотрим длину производной касательного вектора. Так как $\|\vec{\sigma}(s)\| = 1$, тогда справедливо

$$\left\| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right\| = \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \right\| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{R(s)}.$$

Радиус кривизны



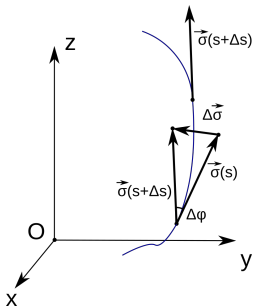
Рассмотрим длину производной касательного вектора. Так как $\|\vec{\sigma}(s)\| = 1$, тогда справедливо

$$\left\| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right\| = \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \right\| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{R(s)}.$$

Определение

Величина $R(s)$, определяемая формулой, называется **радиусом кривизны** кривой.

Радиус кривизны



Рассмотрим длину производной касательного вектора. Так как $\|\vec{\sigma}(s)\| = 1$, тогда справедливо

$$\left\| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right\| = \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \right\| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{R(s)}.$$

Определение

Величина $R(s)$, определяемая формулой, называется **радиусом кривизны** кривой.

Радиус кривизны кривой определяется соотношением

$$R(s) = 1 / \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{ds^2} \right)^2}.$$

Соприкасающаяся плоскость

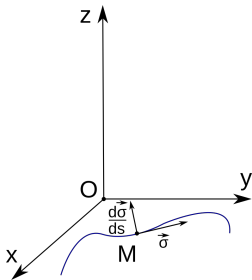
Определение

Соприкасающаяся плоскость – плоскость, в которой лежит данная точка и вектора $\frac{d\vec{\sigma}}{ds}$ и $\vec{\sigma}$.

Соприкасающаяся плоскость

Определение

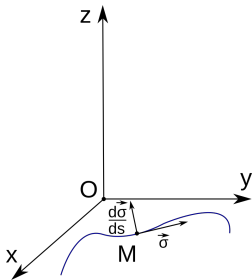
Соприкасающаяся плоскость – плоскость, в которой лежит данная точка и вектора $\frac{d\vec{\sigma}}{ds}$ и $\vec{\sigma}$.



Соприкасающаяся плоскость

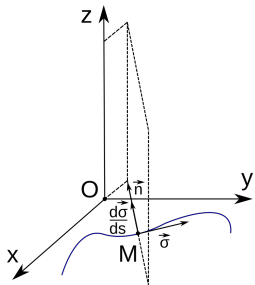
Определение

Соприкасающаяся плоскость – плоскость, в которой лежит данная точка и вектора $\frac{d\vec{\sigma}}{ds}$ и $\vec{\sigma}$.



На рисунке кривая лежит в плоскости Oxy , следовательно касательная и её производная тоже лежат в этой плоскости. Поэтому Oxy является **соприкасающейся плоскостью**.

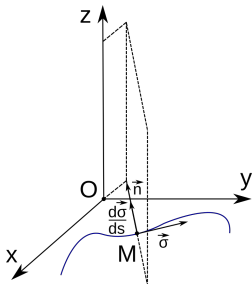
Вектор нормали к кривой



Вектор нормали к кривой

Определение

Прямые, перпендикулярные касательной, называются **нормальями** к кривой, а плоскость, их содержащая – **нормальной плоскостью** к кривой в данной точке.



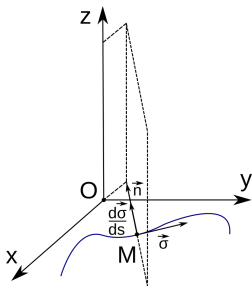
Вектор нормали к кривой

Определение

Прямые, перпендикулярные касательной, называются **нормальями** к кривой, а плоскость, их содержащая – **нормальной плоскостью** к кривой в данной точке.

Определение

Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, называется **главной нормалью**.



Вектор нормали к кривой

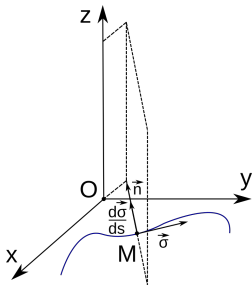
Определение

Прямые, перпендикулярные касательной, называются **нормальями** к кривой, а плоскость, их содержащая – **нормальной плоскостью** к кривой в данной точке.

Определение

Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, называется **главной нормалью**.

Т.к вектор $\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \perp \vec{\sigma}$ и лежит в соприкасающейся плоскости,



Вектор нормали к кривой

Определение

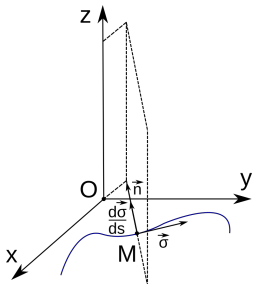
Прямые, перпендикулярные касательной, называются **нормальями** к кривой, а плоскость, их содержащая – **нормальной плоскостью** к кривой в данной точке.

Определение

Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, называется **главной нормалью**.

Т.к вектор $\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \perp \vec{\sigma}$ и лежит в соприкасающейся плоскости, то

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R},$$



Вектор нормали к кривой

Определение

Прямые, перпендикулярные касательной, называются **нормальями** к кривой, а плоскость, их содержащая – **нормальной плоскостью** к кривой в данной точке.

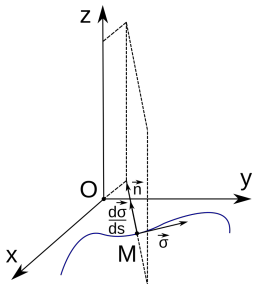
Определение

Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, называется **главной нормалью**.

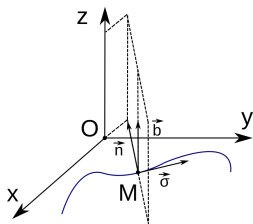
Т.к вектор $\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \perp \vec{\sigma}$ и лежит в соприкасающейся плоскости, то

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R},$$

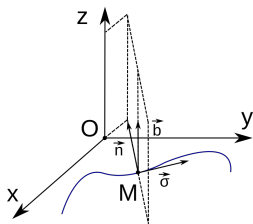
\vec{n} – единичный вектор, направленный в сторону главной нормали.



Вектор бинормали



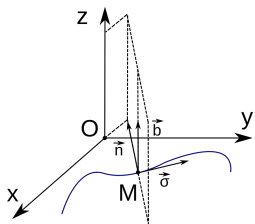
Вектор бинормали



Определение

Нормаль к кривой, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, называется **бинормалью**.

Вектор бинормали



Определение

Нормаль к кривой, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, называется **бинормалью**. В качестве бинормали будем подразумевать вектор

$$\vec{b} = \vec{\sigma} \times \vec{n}.$$

Производная от бинормали

Рассмотрим $\frac{d\vec{b}}{ds} =$

Производная от бинормали

Рассмотрим $\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} =$

Производная от бинормали

Рассмотрим $\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds}.$

Производная от бинормали

Рассмотрим $\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds}$.

- $\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} =$

Производная от бинормали

Рассмотрим $\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds}$.

- $\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} = \frac{\vec{n}}{R} \times \vec{n} =$

Производная от бинормали

Рассмотрим $\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds}$.

- $\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} = \frac{\vec{n}}{R} \times \vec{n} = 0$ в силу коллинеарности $\vec{n}' \parallel \vec{n}$;

Производная от бинормали

Рассмотрим $\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds}$.

- $\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} = \frac{\vec{n}}{R} \times \vec{n} = 0$ в силу коллинеарности $\vec{n} \parallel \vec{n}$;
- $\frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds} \perp \vec{\sigma}$

Производная от бинормали

Рассмотрим $\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds}$.

- $\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} = \frac{\vec{n}}{R} \times \vec{n} = 0$ в силу коллинеарности $\vec{n} \parallel \vec{n}$;
- $\frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds} \perp \vec{\sigma}$ и, так как $||\vec{b}|| = 1$, то $\frac{d\vec{b}}{ds} \perp \vec{b}$,

Производная от бинормали

Рассмотрим $\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds}$.

- $\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} = \frac{\vec{n}}{R} \times \vec{n} = 0$ в силу коллинеарности $\vec{n} \parallel \vec{n}$;
- $\frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds} \perp \vec{\sigma}$ и, так как $\|\vec{b}\| = 1$, то $\frac{d\vec{b}}{ds} \perp \vec{b}$, поэтому

$$\vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds} \parallel \vec{n}.$$

Производная от бинормали

Рассмотрим $\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d(\vec{\sigma} \times \vec{n})}{ds} = \frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} + \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds}$.

- $\frac{d\vec{\sigma}}{ds} \times \vec{n} = \frac{\vec{n}}{R} \times \vec{n} = 0$ в силу коллинеарности $\vec{n} \parallel \vec{n}$;
- $\frac{d\vec{b}}{ds} = \vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds} \perp \vec{\sigma}$ и, так как $\|\vec{b}\| = 1$, то $\frac{d\vec{b}}{ds} \perp \vec{b}$, поэтому

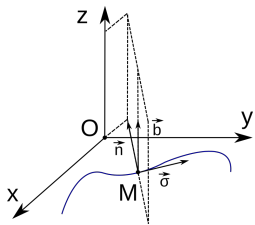
$$\vec{\sigma} \times \frac{d\vec{n}}{ds} \parallel \vec{n}.$$

Связь бинормали и нормали

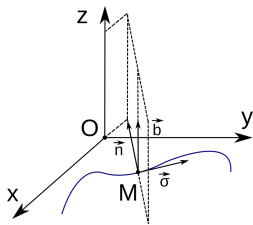
$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{T(s)},$$

где $1/T$ называется кручением, T – радиус кручения. Кручение – мера отклонения от плоской кривой.

Производная от нормали

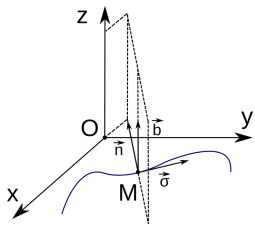


Производная от нормали



Т.к. вектора $\vec{\sigma}$, \vec{n} и \vec{b} составляют правую тройку ортонормированных векторов,

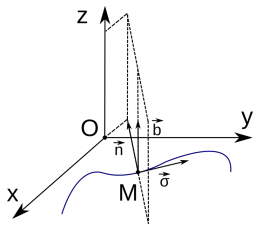
Производная от нормали



Т.к. вектора $\vec{\sigma}$, \vec{n} и \vec{b} составляют правую тройку ортонормированных векторов, то

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\sigma}.$$

Производная от нормали



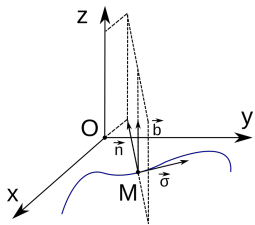
Т.к. вектора $\vec{\sigma}$, \vec{n} и \vec{b} составляют правую тройку ортонормированных векторов, то

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\sigma}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d\vec{n}}{ds} =$$

Производная от нормали



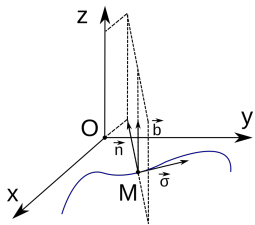
Т.к. вектора $\vec{\sigma}$, \vec{n} и \vec{b} составляют правую тройку ортонормированных векторов, то

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\sigma}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d\vec{b}}{ds} \times \vec{\sigma} + \vec{b} \times \frac{d\vec{\sigma}}{ds} =$$

Производная от нормали



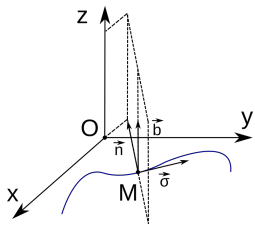
Т.к. вектора $\vec{\sigma}$, \vec{n} и \vec{b} составляют правую тройку ортонормированных векторов, то

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\sigma}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d\vec{b}}{ds} \times \vec{\sigma} + \vec{b} \times \frac{d\vec{\sigma}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{T(s)} \times \vec{\sigma} + \vec{b} \times \frac{\vec{n}}{R(s)} =$$

Производная от нормали



Т.к. вектора $\vec{\sigma}$, \vec{n} и \vec{b} составляют правую тройку ортонормированных векторов, то

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\sigma}.$$

Рассмотрим

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d\vec{b}}{ds} \times \vec{\sigma} + \vec{b} \times \frac{d\vec{\sigma}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{T(s)} \times \vec{\sigma} + \vec{b} \times \frac{\vec{n}}{R(s)} = \frac{\vec{b}}{T(s)} - \frac{\vec{\sigma}}{R(s)}.$$

Формулы Френе

Определение

Соотношения

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{\vec{b}}{T(s)} - \frac{\vec{\sigma}}{R(s)}, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{T(s)}, \quad \frac{d\vec{\sigma}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R(s)},$$

где $R(s)$, $T(s)$ – радиусы кривизны и кручения кривой; $\vec{\sigma}$, \vec{n} и \vec{b} – единичные касательный вектор, вектор главной нормали и бинормали, называются **формулами Френе**.

Скалярное и векторное поле

Определение

*Если в каждой точке пространства задана скалярная или векторная величина, то это означает, что задано **скалярное** или **векторное поле**.*

Скалярное и векторное поле

Определение

*Если в каждой точке пространства задана скалярная или векторная величина, то это означает, что задано **скалярное** или **векторное поле**. Если поле зависит от времени, то говорят о **нестационарном поле**.*

Скалярное и векторное поле

Определение

Если в каждой точке пространства задана скалярная или векторная величина, то это означает, что задано **скалярное** или **векторное поле**. Если поле зависит от времени, то говорят о **нестационарном поле**.

Определение

Поверхностью уровня или **изоповерхностью** называется поверхность, на которой скалярная величина остаётся постоянной.

Определение

Линия в векторном поле $\vec{a}(\vec{r})$, для которой в каждой точке вектор \vec{a} её касается, называется **векторной линией**.

Определение

Линия в векторном поле $\vec{a}(\vec{r})$, для которой в каждой точке вектор \vec{a} её касается, называется **векторной линией**.

Пусть $\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$ – векторная линия.

Определение

Линия в векторном поле $\vec{a}(\vec{r})$, для которой в каждой точке вектор \vec{a} её касается, называется **векторной линией**.

Пусть $\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$ – векторная линия. По определению вектор касательной $\vec{\sigma} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ параллелен вектору $\vec{a}(\vec{r})$ во всех точках области определения s ,

Определение

Линия в векторном поле $\vec{a}(\vec{r})$, для которой в каждой точке вектор \vec{a} её касается, называется **векторной линией**.

Пусть $\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$ – векторная линия. По определению вектор касательной $\vec{\sigma} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ параллелен вектору $\vec{a}(\vec{r})$ во всех точках области определения s , следовательно

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= ka_x(x, y, z), \\ \frac{dy}{ds} &= ka_y(x, y, z), \\ \frac{dz}{ds} &= ka_z(x, y, z).\end{aligned}$$

Определение

Линия в векторном поле $\vec{a}(\vec{r})$, для которой в каждой точке вектор \vec{a} её касается, называется **векторной линией**.

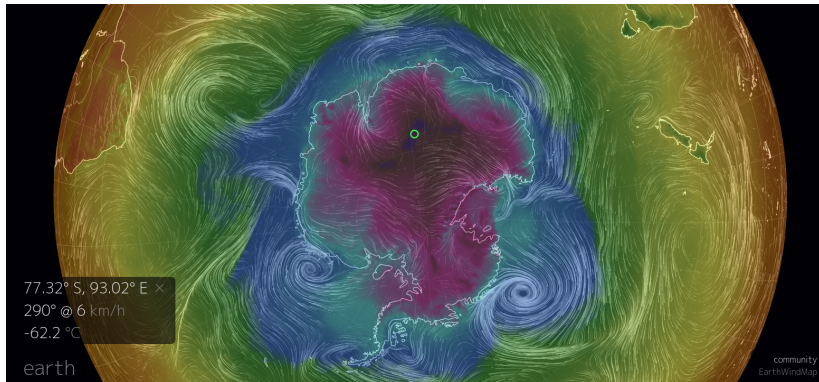
Пусть $\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$ – векторная линия. По определению вектор касательной $\vec{\sigma} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ параллелен вектору $\vec{a}(\vec{r})$ во всех точках области определения s , следовательно

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= k a_x(x, y, z), \\ \frac{dy}{ds} &= k a_y(x, y, z), \\ \frac{dz}{ds} &= k a_z(x, y, z).\end{aligned}$$

Или, по-другому,

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)}.$$

Поле температуры и ветра в Антарктиде 20.03.2016



<http://earth.nullschool.net/>