

Дивергенция и ротор векторного поля

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

19 апреля 2019 г.

Аннотация

Дивергенция вектора. Теорема Гаусса-Остроградского. Ротор вектора. Теорема Стокса и ее следствия.

Поток вектора через поверхность

Определение

Интеграл, определенный для площадки S ,

Поток вектора через поверхность

Определение

Интеграл, определенный для площадки S , над векторным полем \vec{a} как предел

Поток вектора через поверхность

Определение

Интеграл, определенный для площади S , над векторным полем \vec{a} как предел

$$\int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} =$$

Поток вектора через поверхность

Определение

Интеграл, определенный для площади S , над векторным полем \vec{a} как предел

$$\int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta S_j \rightarrow 0} \sum_j \vec{a}_j \cdot \Delta \vec{S}_j,$$

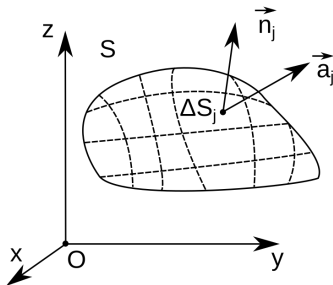
Поток вектора через поверхность

Определение

Интеграл, определенный для площадки S , над векторным полем \vec{a} как предел

$$\int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta S_j \rightarrow 0} \sum_j \vec{a}_j \cdot \Delta \vec{S}_j,$$

называется **поток вектора** \vec{a} через поверхность S .

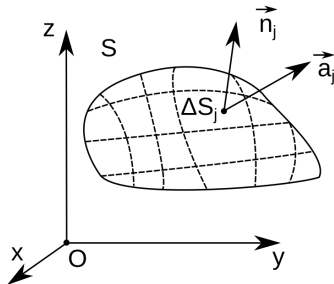


Поток вектора через поверхность

Определение

Интеграл, определенный для площадки S , над векторным полем \vec{a} как предел

$$\int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta S_j \rightarrow 0} \sum_j \vec{a}_j \cdot \Delta \vec{S}_j,$$



называется **поток вектора** \vec{a} через поверхность S .

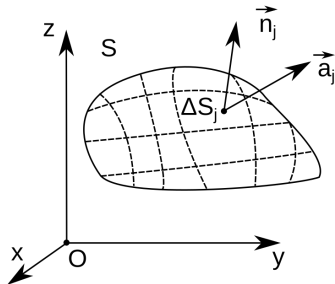
Здесь ΔS_j – элементарные площадки разбивающие поверхность S ;

Поток вектора через поверхность

Определение

Интеграл, определенный для площадки S , над векторным полем \vec{a} как предел

$$\int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta S_j \rightarrow 0} \sum_j \vec{a}_j \cdot \Delta \vec{S}_j,$$



называется **поток вектора** \vec{a} через поверхность S .

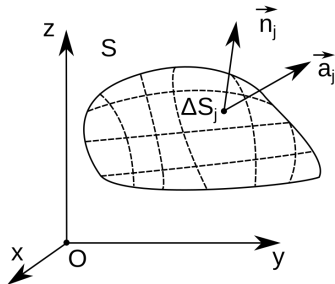
Здесь ΔS_j – элементарные площадки разбивающие поверхность S ; \vec{n}_j – внешняя единичная нормаль в любой точке ΔS_j ;

Поток вектора через поверхность

Определение

Интеграл, определенный для площадки S , над векторным полем \vec{a} как предел

$$\int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta S_j \rightarrow 0} \sum_j \vec{a}_j \cdot \Delta \vec{S}_j,$$



называется **поток вектора** \vec{a} через поверхность S .

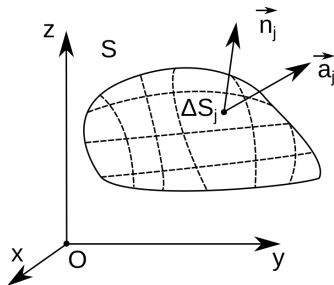
Здесь ΔS_j – элементарные площадки разбивающие поверхность S ; \vec{n}_j – внешняя единичная нормаль в любой точке ΔS_j ; \vec{a}_j – значение векторного поля \vec{a} в любой точке площадки ΔS_j ;

Поток вектора через поверхность

Определение

Интеграл, определенный для площадки S , над векторным полем \vec{a} как предел

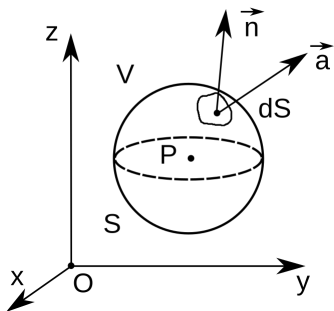
$$\int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta S_j \rightarrow 0} \sum_j \vec{a}_j \cdot \Delta \vec{S}_j,$$



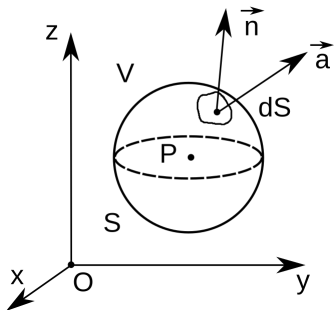
называется **поток вектора** \vec{a} через поверхность S .

Здесь ΔS_j – элементарные площадки разбивающие поверхность S ; \vec{n}_j – внешняя единичная нормаль в любой точке ΔS_j ; \vec{a}_j – значение векторного поля \vec{a} в любой точке площадки ΔS_j ; $\Delta \vec{S}_j = \vec{n}_j \Delta S_j$.

Дивергенция вектора



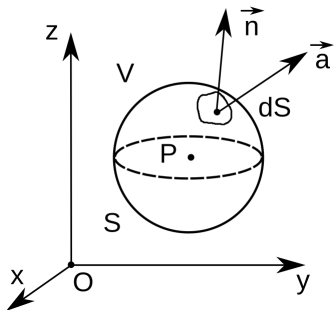
Дивергенция вектора



Определение

Дивергенция вектора \vec{a} в точке P

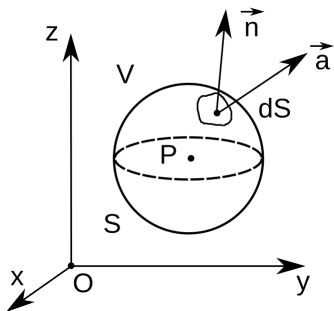
Дивергенция вектора



Определение

Дивергенция вектора \vec{a} в точке P есть отнесенный к единице объема V поток вектора \vec{a} через поверхность S ,

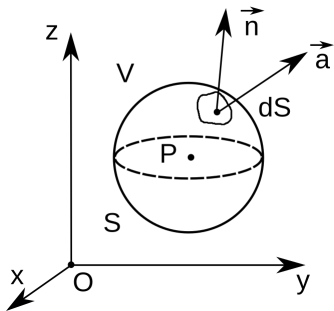
Дивергенция вектора



Определение

Дивергенция вектора \vec{a} в точке P есть отнесенный к единице объема V поток вектора \vec{a} через поверхность S , окружающую точку P , при стягивании последнего в точку P :

Дивергенция вектора



Определение

Дивергенция вектора \vec{a} в точке P есть отнесенный к единице объема V поток вектора \vec{a} через поверхность S, окружающую точку P, при стягивании последнего в точку P:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_S a_n dS.$$

Представление дивергенции в дифференциальной форме

Если разложить функцию $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ в окрестности точки P , тогда

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Представление дивергенции в дифференциальной форме

Если разложить функцию $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ в окрестности точки P , тогда

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

С использованием оператора Гамильтона (наблы):

$$\operatorname{div} \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a},$$

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Теорема Гаусса-Остроградского

Теорема (Гаусса-Остроградского)

Поток вектора через замкнутую поверхность равен объемному интегралу от дивергенции вектора:

Теорема Гаусса-Остроградского

Теорема (Гаусса-Остроградского)

Поток вектора через замкнутую поверхность равен объемному интегралу от дивергенции вектора:

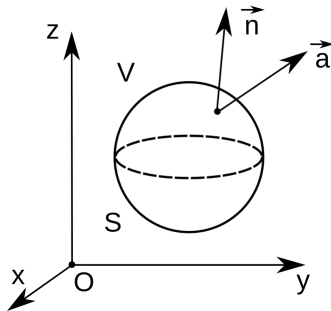
$$\int_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV.$$

Теорема Гаусса-Остроградского

Теорема (Гаусса-Остроградского)

Поток вектора через замкнутую поверхность равен объемному интегралу от дивергенции вектора:

$$\int_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV.$$



Теорема Гаусса-Остроградского

Доказательство.



Соленоидальное векторное поле и его свойство

Определение

Векторное поле \vec{a} , для которого во всех точках справедливо равенство $\operatorname{div} \vec{a} = 0$, называется **соленоидальным**.

Соленоидальное векторное поле и его свойство

Определение

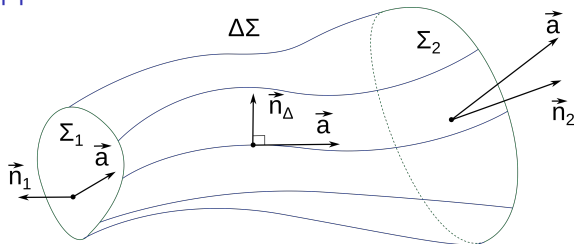
Векторное поле \vec{a} , для которого во всех точках справедливо равенство $\operatorname{div} \vec{a} = 0$, называется **соленоидальным**.

Теорема

Для соленоидального вектора его поток через любое поперечное сечение векторной трубки тока имеет одну и ту же величину.

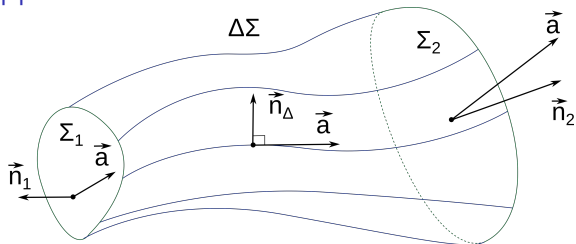
Соленоидальное векторное поле и его свойство

Доказательство.



Соленоидальное векторное поле и его свойство

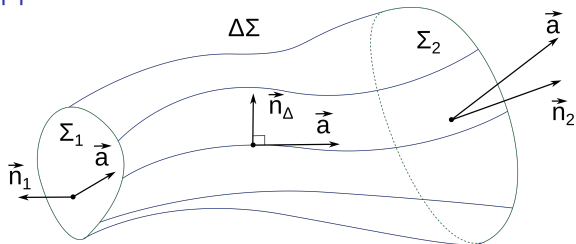
Доказательство.



$$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV =$$

Соленоидальное векторное поле и его свойство

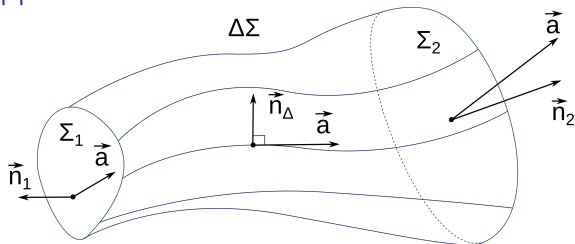
Доказательство.



$$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int_{\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} dS =$$

Соленоидальное векторное поле и его свойство

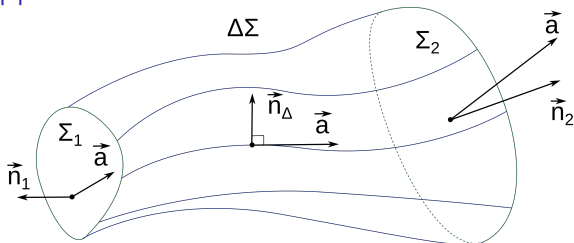
Доказательство.



$$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int_{\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_{\Delta} dS + \int_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS.$$

Соленоидальное векторное поле и его свойство

Доказательство.

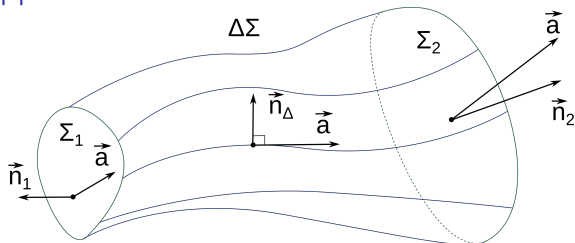


$$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int_{\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_{\Delta} dS + \int_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS.$$

$$\text{Отсюда } \int_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS = - \int_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS,$$

Соленоидальное векторное поле и его свойство

Доказательство.

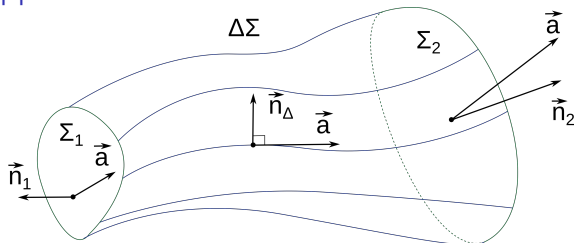


$$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int_{\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_{\Delta} dS + \int_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS.$$

Отсюда $\int_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS = - \int_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS$, т.к. $\int_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_{\Delta} dS = 0$ в силу ортогональности векторов \vec{a} и \vec{n}_{Δ} ,

Соленоидальное векторное поле и его свойство

Доказательство.



$$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int_{\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_{\Delta} dS + \int_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS.$$

Отсюда $\int_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS = - \int_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS$, т.к. $\int_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_{\Delta} dS = 0$ в силу ортогональности векторов \vec{a} и \vec{n}_{Δ} , т.е. потоки вектора \vec{a} через Σ_1 и Σ_2 совпадают.



Циркуляция вектора по замкнутому контуру

Определение

Циркуляцией вектора \vec{a} по замкнутому контуру называется следующий интеграл (с выбранным направлением интегрирования):

Циркуляция вектора по замкнутому контуру

Определение

Циркуляцией вектора \vec{a} по замкнутому контуру называется следующий интеграл (с выбранным направлением интегрирования):

$$\Gamma_C(\vec{a}) = \int_C \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

Ротор вектора

Определение

Выберем плоскую площадку S , содержащую точку P , с нормалью \vec{n} и контуром C ,

Ротор вектора

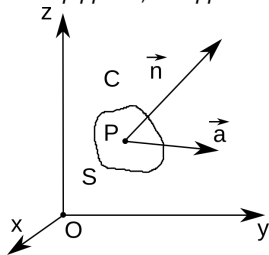
Определение

Выберем плоскую площадку S , содержащую точку P , с нормалью \vec{n} и контуром C , тогда **ротором в направлении \vec{n}** в точке P называется отношение циркуляции вектора по контуру C к площади S , когда последняя стягивается в точку P :

Ротор вектора

Определение

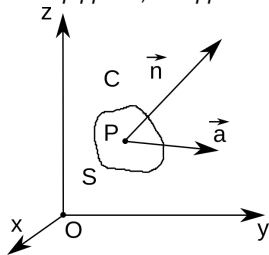
Выберем плоскую площадку S , содержащую точку P , с нормалью \vec{n} и контуром C , тогда **ротором в направлении \vec{n}** в точке P называется отношение циркуляции вектора по контуру C к площади S , когда последняя стягивается в точку P :



Ротор вектора

Определение

Выберем плоскую площадку S , содержащую точку P , с нормалью \vec{n} и контуром C , тогда **ротором в направлении \vec{n}** в точке P называется отношение циркуляции вектора по контуру C к площади S , когда последняя стягивается в точку P :



$$\operatorname{rot}_{\vec{n}} \vec{a} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\int_C \vec{a} \cdot d\vec{r}}{S}$$

Дифференциальное представление ротора

Если представить $\operatorname{rot}_{\vec{n}} \vec{a}$ в дифференциальной форме по трем основным направлениям,

Дифференциальное представление ротора

Если представить $\text{rot}_{\vec{n}} \vec{a}$ в дифференциальной форме по трем основным направлениям, тогда

$$\text{rot}_x \vec{a} = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \text{rot}_y \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \text{rot}_z \vec{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

Дифференциальное представление ротора

Если представить $\text{rot}_{\vec{n}} \vec{a}$ в дифференциальной форме по трем основным направлениям, тогда

$$\text{rot}_x \vec{a} = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \text{rot}_y \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \text{rot}_z \vec{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

В терминах оператора Гамильтона (наблы)

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{a}$$

Дифференциальное представление ротора

Если представить $\text{rot}_{\vec{n}} \vec{a}$ в дифференциальной форме по трем основным направлениям, тогда

$$\text{rot}_x \vec{a} = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \text{rot}_y \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \text{rot}_z \vec{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}.$$

В терминах оператора Гамильтона (наблы)

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{a}$$

и

$$\text{rot}_{\vec{n}} \vec{a} = \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n},$$

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Теорема Стокса

Теорема (Стокса)

Циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку ротора вектора через поверхность, ограниченную этим контуром:

Теорема Стокса

Теорема (Стокса)

Циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку ротора вектора через поверхность, ограниченную этим контуром:

$$\int_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_S \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_S \operatorname{rot}_{\vec{n}} \vec{a} dS.$$

Теорема Стокса

Доказательство.



Следствие теоремы Стокса

Теорема

Для того чтобы вектор \vec{a} был потенциальным необходимо и достаточно, чтобы ротор вектора \vec{a} был равен 0.

Следствие теоремы Стокса

Теорема

Для того чтобы вектор \vec{a} был потенциальным необходимо и достаточно, чтобы ротор вектора \vec{a} был равен 0.

Доказательство.

(\Rightarrow) Пусть вектор $\vec{a} = \nabla\varphi$, т.е. \vec{a} – потенциальный. По теореме Стокса для любой площадки S

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla\varphi \cdot d\vec{r} = 0$$

по свойству циркуляции потенциального вектора. В силу произвольности S $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$ или $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$ для любой φ .



Следствие теоремы Стокса

Теорема

Для того чтобы вектор \vec{a} был потенциальным необходимо и достаточно, чтобы ротор вектора \vec{a} был равен 0.

Доказательство.

(\Leftarrow) Пусть $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$, тогда для произвольной площадки S с произвольным контуром C по теореме Стокса

$$0 = \int_S \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

Таким образом, циркуляция вектора \vec{a} по любому контуру C в выбранной области равна 0, следовательно вектор \vec{a} потенциален.



Свойства ротора и дивергенции

Теорема

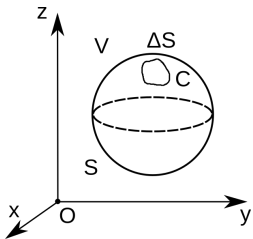
$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0 \text{ или } \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0.$$

Свойства ротора и дивергенции

Теорема

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0 \text{ или } \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0.$$

Доказательство.



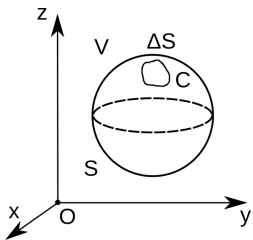
Свойства ротора и дивергенции

Теорема

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0 \text{ или } \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0.$$

Доказательство.

Рассмотрим сферу с площадью S , из которой вырезали кусочек площади ΔS с контуром C .



Свойства ротора и дивергенции

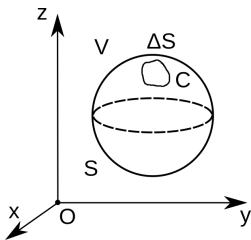
Теорема

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0 \text{ или } \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0.$$

Доказательство.

Рассмотрим сферу с площадью S , из которой вырезали кусочек площади ΔS с контуром C . Тогда с использованием теоремы Стокса

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S} =$$



Свойства ротора и дивергенции

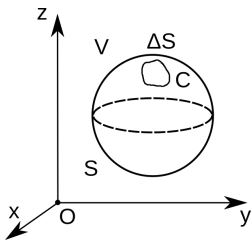
Теорема

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0 \text{ или } \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0.$$

Доказательство.

Рассмотрим сферу с площадью S , из которой вырезали кусочек площади ΔS с контуром C . Тогда с использованием теоремы Стокса

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \int_{S \setminus \Delta S} \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S} =$$

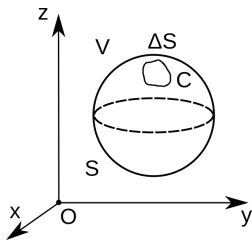


Свойства ротора и дивергенции

Теорема

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0 \text{ или } \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0.$$

Доказательство.



Рассмотрим сферу с площадью S , из которой вырезали кусочек площади ΔS с контуром C . Тогда с использованием теоремы Стокса

$$\begin{aligned} \int_S \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S} &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \int_{S \setminus \Delta S} \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \\ &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \int_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \end{aligned}$$

Свойства ротора и дивергенции

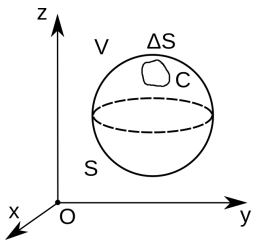
Теорема

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0 \text{ или } \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0.$$

Доказательство.

Рассмотрим сферу с площадью S , из которой вырезали кусочек площади ΔS с контуром C . Тогда с использованием теоремы Стокса

$$\begin{aligned} \int_S \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S} &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \int_{S \setminus \Delta S} \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \\ &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \int_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = 0. \end{aligned}$$



Поделив полученное выражение на V и перейдя к пределу при $V \rightarrow 0$, получим утверждение теоремы.



Свойства ротора и дивергенции

Теорема (без доказательства)

Если $\operatorname{div} \vec{a} = 0$, то существует такое векторное поле \vec{b} , что $\vec{a} = \operatorname{rot} \vec{b}$.