Оператор Гамильтона

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

QR-код презентации

24 апреля 2020 г.

Аннотация

Оператор Гамильтона и его свойства. Дифференциальные операторы первого и второго порядка.

Определение

Оператором Гамильтона или *наблой* называется оператор

$$\nabla = \vec{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Представление дифференциальных операторов через оператор Гамильтона

Пусть $\vec{r} = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}$ и заданы

$$\varphi = \varphi(\vec{r}), \quad \psi = \psi(\vec{r}), \quad \vec{a}(\vec{r}) = a_x(\vec{r})\vec{\mathbf{i}} + a_y(\vec{r})\vec{\mathbf{j}} + a_z(\vec{r})\vec{\mathbf{k}}$$

скалярные и векторное поля в $\mathbb{R}^3$.

Представление дифференциальных операторов через оператор Гамильтона

Пусть $\vec{r} = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}$ и заданы

$$\varphi = \varphi(\vec{r}), \quad \psi = \psi(\vec{r}), \quad \vec{a}(\vec{r}) = a_x(\vec{r})\vec{\mathbf{i}} + a_y(\vec{r})\vec{\mathbf{j}} + a_z(\vec{r})\vec{\mathbf{k}}$$

скалярные и векторное поля в $\mathbb{R}^3$.

Тогда дифференциальные операторы с помощью оператора Гамильтона можно записать в виде:

$$\operatorname{grad}\varphi =$$

Представление дифференциальных операторов через оператор Гамильтона

Пусть $\vec{r} = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}$ и заданы

$$\varphi = \varphi(\vec{r}), \quad \psi = \psi(\vec{r}), \quad \vec{a}(\vec{r}) = a_x(\vec{r})\vec{\mathbf{i}} + a_y(\vec{r})\vec{\mathbf{j}} + a_z(\vec{r})\vec{\mathbf{k}}$$

скалярные и векторное поля в $\mathbb{R}^3$.

Тогда дифференциальные операторы с помощью оператора Гамильтона можно записать в виде:

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi =$$

Представление дифференциальных операторов через оператор Гамильтона

Пусть $\vec{r} = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}$ и заданы

$$\varphi = \varphi(\vec{r}), \quad \psi = \psi(\vec{r}), \quad \vec{a}(\vec{r}) = a_x(\vec{r})\vec{\mathbf{i}} + a_y(\vec{r})\vec{\mathbf{j}} + a_z(\vec{r})\vec{\mathbf{k}}$$

скалярные и векторное поля в $\mathbb{R}^3$.

Тогда дифференциальные операторы с помощью оператора Гамильтона можно записать в виде:

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{\mathbf{k}},$$

Представление дифференциальных операторов через оператор Гамильтона

Пусть $\vec{r} = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}$ и заданы

$$\varphi = \varphi(\vec{r}), \quad \psi = \psi(\vec{r}), \quad \vec{a}(\vec{r}) = a_x(\vec{r})\vec{\mathbf{i}} + a_y(\vec{r})\vec{\mathbf{j}} + a_z(\vec{r})\vec{\mathbf{k}}$$

скалярные и векторное поля в $\mathbb{R}^3$.

Тогда дифференциальные операторы с помощью оператора Гамильтона можно записать в виде:

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{\mathbf{k}},$$

$$\operatorname{div}\vec{a} =$$

Представление дифференциальных операторов через оператор Гамильтона

Пусть $\vec{r} = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}$ и заданы

$$\varphi = \varphi(\vec{r}), \quad \psi = \psi(\vec{r}), \quad \vec{a}(\vec{r}) = a_x(\vec{r})\vec{\mathbf{i}} + a_y(\vec{r})\vec{\mathbf{j}} + a_z(\vec{r})\vec{\mathbf{k}}$$

скалярные и векторное поля в $\mathbb{R}^3$.

Тогда дифференциальные операторы с помощью оператора Гамильтона можно записать в виде:

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{\mathbf{k}},$$

$$\operatorname{div}\vec{a} = \nabla\cdot\vec{a} =$$

Представление дифференциальных операторов через оператор Гамильтона

Пусть $\vec{r} = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}$ и заданы

$$\varphi = \varphi(\vec{r}), \quad \psi = \psi(\vec{r}), \quad \vec{a}(\vec{r}) = a_x(\vec{r})\vec{\mathbf{i}} + a_y(\vec{r})\vec{\mathbf{j}} + a_z(\vec{r})\vec{\mathbf{k}}$$

скалярные и векторное поля в $\mathbb{R}^3$.

Тогда дифференциальные операторы с помощью оператора Гамильтона можно записать в виде:

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{\mathbf{k}},$$
$$\operatorname{div}\vec{a} = \nabla\cdot\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

Представление ротора через оператор Гамильтона

$$\operatorname{rot}\vec{a} =$$

Представление ротора через оператор Гамильтона

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla \times \vec{a} =$$

Представление ротора через оператор Гамильтона

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

Представление ротора через оператор Гамильтона

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{\mathbf{k}}.$$

Предварительные замечания

Пусть C – константа, тогда

$$\nabla(C\varphi) =$$

Предварительные замечания

Пусть C – константа, тогда

$$\nabla(C\varphi) = \vec{\mathbf{i}}\frac{\partial C\varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial C\varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial C\varphi}{\partial z} =$$

Предварительные замечания

Пусть C – константа, тогда

$$\nabla(C\varphi) = \vec{\mathbf{i}}\frac{\partial C\varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial C\varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial C\varphi}{\partial z} = C\left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) =$$

Предварительные замечания

Пусть C – константа, тогда

$$\nabla(C\varphi) = \vec{\mathbf{i}}\frac{\partial C\varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial C\varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial C\varphi}{\partial z} = C\left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = C\nabla\varphi,$$

Предварительные замечания

Пусть C – константа, тогда

$$\nabla(C\varphi) = \vec{\mathbf{i}}\frac{\partial C\varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial C\varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial C\varphi}{\partial z} = C\left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = C\nabla\varphi,$$

$$\nabla\cdot(C\vec{a}) =$$

Предварительные замечания

Пусть C – константа, тогда

$$\nabla(C\varphi) = \vec{\mathbf{i}}\frac{\partial C\varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial C\varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial C\varphi}{\partial z} = C\left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = C\nabla\varphi,$$

$$\nabla\cdot(C\vec{a}) = \frac{\partial C a_x}{\partial x} + \frac{\partial C a_y}{\partial y} + \frac{\partial C a_z}{\partial z} =$$

Предварительные замечания

Пусть C – константа, тогда

$$\nabla(C\varphi) = \vec{\mathbf{i}}\frac{\partial C\varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial C\varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial C\varphi}{\partial z} = C\left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = C\nabla\varphi,$$

$$\nabla\cdot(C\vec{a}) = \frac{\partial Ca_x}{\partial x} + \frac{\partial Ca_y}{\partial y} + \frac{\partial Ca_z}{\partial z} = C\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) =$$

Предварительные замечания

Пусть C – константа, тогда

$$\nabla(C\varphi) = \vec{\mathbf{i}}\frac{\partial C\varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial C\varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial C\varphi}{\partial z} = C\left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = C\nabla\varphi,$$

$$\nabla\cdot(C\vec{a}) = \frac{\partial C a_x}{\partial x} + \frac{\partial C a_y}{\partial y} + \frac{\partial C a_z}{\partial z} = C\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) = C\nabla\cdot\vec{a}.$$

Пусть C – константа, тогда

$$\nabla(C\varphi) = \vec{\mathbf{i}}\frac{\partial C\varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial C\varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial C\varphi}{\partial z} = C\left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = C\nabla\varphi,$$

$$\nabla\cdot(C\vec{a}) = \frac{\partial Ca_x}{\partial x} + \frac{\partial Ca_y}{\partial y} + \frac{\partial Ca_z}{\partial z} = C\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) = C\nabla\cdot\vec{a}.$$

Аналогично

$$\nabla \times (C\vec{a}) = C\nabla \times \vec{a}.$$

Предварительные замечания

Пусть $\vec{c} = c_x\vec{\mathbf{i}} + c_y\vec{\mathbf{j}} + c_z\vec{\mathbf{k}}$ – постоянный вектор,

Предварительные замечания

Пусть $\vec{c} = c_x\vec{\mathbf{i}} + c_y\vec{\mathbf{j}} + c_z\vec{\mathbf{k}}$ – постоянный вектор, тогда

$$\nabla \cdot (\varphi\vec{c}) =$$

Предварительные замечания

Пусть $\vec{c} = c_x\vec{\mathbf{i}} + c_y\vec{\mathbf{j}} + c_z\vec{\mathbf{k}}$ – постоянный вектор, тогда

$$\nabla \cdot (\varphi\vec{c}) = \frac{\partial \varphi c_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi c_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi c_z}{\partial z} =$$

Предварительные замечания

Пусть $\vec{c} = c_x\vec{\mathbf{i}} + c_y\vec{\mathbf{j}} + c_z\vec{\mathbf{k}}$ – постоянный вектор, тогда

$$\nabla \cdot (\varphi\vec{c}) = \frac{\partial \varphi c_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi c_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi c_z}{\partial z} = \left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \cdot \vec{c} =$$

Предварительные замечания

Пусть $\vec{c} = c_x\vec{\mathbf{i}} + c_y\vec{\mathbf{j}} + c_z\vec{\mathbf{k}}$ – постоянный вектор, тогда

$$\nabla \cdot (\varphi\vec{c}) = \frac{\partial \varphi c_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi c_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi c_z}{\partial z} = \left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \cdot \vec{c} =$$

$$= \vec{c} \cdot \nabla\varphi,$$

Предварительные замечания

Пусть $\vec{c} = c_x\vec{\mathbf{i}} + c_y\vec{\mathbf{j}} + c_z\vec{\mathbf{k}}$ – постоянный вектор, тогда

$$\nabla \cdot (\varphi\vec{c}) = \frac{\partial \varphi c_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi c_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi c_z}{\partial z} = \left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \cdot \vec{c} =$$

$$= \vec{c} \cdot \nabla\varphi,$$

$$\nabla \times (\varphi\vec{c}) =$$

Предварительные замечания

Пусть $\vec{c} = c_x\vec{\mathbf{i}} + c_y\vec{\mathbf{j}} + c_z\vec{\mathbf{k}}$ – постоянный вектор, тогда

$$\nabla \cdot (\varphi\vec{c}) = \frac{\partial\varphi c_x}{\partial x} + \frac{\partial\varphi c_y}{\partial y} + \frac{\partial\varphi c_z}{\partial z} = \left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \cdot \vec{c} =$$

$$= \vec{c} \cdot \nabla\varphi,$$

$$\nabla \times (\varphi\vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \varphi c_x & \varphi c_y & \varphi c_z \end{vmatrix} =$$

Предварительные замечания

Пусть $\vec{c} = c_x\vec{\mathbf{i}} + c_y\vec{\mathbf{j}} + c_z\vec{\mathbf{k}}$ – постоянный вектор, тогда

$$\nabla\cdot(\varphi\vec{c}) = \frac{\partial\varphi c_x}{\partial x} + \frac{\partial\varphi c_y}{\partial y} + \frac{\partial\varphi c_z}{\partial z} = \left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\cdot\vec{c} =$$

$$= \vec{c}\cdot\nabla\varphi,$$

$$\nabla\times(\varphi\vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \varphi c_x & \varphi c_y & \varphi c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} =$$

Предварительные замечания

Пусть $\vec{c} = c_x\vec{\mathbf{i}} + c_y\vec{\mathbf{j}} + c_z\vec{\mathbf{k}}$ – постоянный вектор, тогда

$$\nabla \cdot (\varphi\vec{c}) = \frac{\partial\varphi c_x}{\partial x} + \frac{\partial\varphi c_y}{\partial y} + \frac{\partial\varphi c_z}{\partial z} = \left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \cdot \vec{c} =$$

$$= \vec{c} \cdot \nabla\varphi,$$

$$\nabla \times (\varphi\vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \varphi c_x & \varphi c_y & \varphi c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \nabla\varphi \times \vec{c}.$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\operatorname{grad} \varphi\psi =$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\operatorname{grad} \varphi\psi = \nabla(\varphi\psi) =$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\operatorname{grad} \varphi\psi = \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) =$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\operatorname{grad}\varphi\psi = \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi =$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\operatorname{grad}\varphi\psi = \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi =$$

$$= \psi\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{grad}\psi,$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\operatorname{grad}\varphi\psi = \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi =$$

$$= \psi\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{grad}\psi,$$

$\operatorname{div}\varphi\vec{a} =$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\operatorname{grad}\varphi\psi = \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi =$$

$$= \psi\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{grad}\psi,$$

$$\operatorname{div}\varphi\vec{a} = \nabla\cdot(\varphi\vec{a}) =$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\operatorname{grad}\varphi\psi = \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi =$$

$$= \psi\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{grad}\psi,$$

$$\operatorname{div}\varphi\vec{a} = \nabla\cdot(\varphi\vec{a}) = \nabla\cdot(\varphi_c\vec{a}) + \nabla\cdot(\varphi\vec{a}_c) =$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\operatorname{grad}\varphi\psi = \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi =$$

$$= \psi\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{grad}\psi,$$

$$\operatorname{div}\varphi\vec{a} = \nabla\cdot(\varphi\vec{a}) = \nabla\cdot(\varphi_c\vec{a}) + \nabla\cdot(\varphi\vec{a}_c) = \varphi(\nabla\cdot a) + \nabla\varphi\cdot\vec{a} =$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\operatorname{grad}\varphi\psi = \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi =$$

$$= \psi\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{grad}\psi,$$

$$\operatorname{div}\varphi\vec{a} = \nabla\cdot(\varphi\vec{a}) = \nabla\cdot(\varphi_c\vec{a}) + \nabla\cdot(\varphi\vec{a}_c) = \varphi(\nabla\cdot a) + \nabla\varphi\cdot\vec{a} =$$

$$= \varphi\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\cdot\operatorname{grad}\varphi,$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\operatorname{grad}\varphi\psi = \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi =$$

$$= \psi\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{grad}\psi,$$

$$\operatorname{div}\varphi\vec{a} = \nabla\cdot(\varphi\vec{a}) = \nabla\cdot(\varphi_c\vec{a}) + \nabla\cdot(\varphi\vec{a}_c) = \varphi(\nabla\cdot a) + \nabla\varphi\cdot\vec{a} =$$

$$= \varphi\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\cdot\operatorname{grad}\varphi,$$

$\operatorname{rot}\varphi\vec{a} =$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\operatorname{grad}\varphi\psi = \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi =$$

$$= \psi\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{grad}\psi,$$

$$\operatorname{div}\varphi\vec{a} = \nabla\cdot(\varphi\vec{a}) = \nabla\cdot(\varphi_c\vec{a}) + \nabla\cdot(\varphi\vec{a}_c) = \varphi(\nabla\cdot a) + \nabla\varphi\cdot\vec{a} =$$

$$= \varphi\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\cdot\operatorname{grad}\varphi,$$

$$\operatorname{rot}\varphi\vec{a} = \nabla\times(\varphi\vec{a}) =$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\operatorname{grad}\varphi\psi = \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi =$$

$$= \psi\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{grad}\psi,$$

$$\operatorname{div}\varphi\vec{a} = \nabla\cdot(\varphi\vec{a}) = \nabla\cdot(\varphi_c\vec{a}) + \nabla\cdot(\varphi\vec{a}_c) = \varphi(\nabla\cdot a) + \nabla\varphi\cdot\vec{a} =$$

$$= \varphi\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\cdot\operatorname{grad}\varphi,$$

$$\operatorname{rot}\varphi\vec{a} = \nabla\times(\varphi\vec{a}) = \nabla\times(\varphi_c\vec{a}) + \nabla\times(\varphi\vec{a}_c) =$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\operatorname{grad}\varphi\psi = \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi =$$

$$= \psi\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{grad}\psi,$$

$$\operatorname{div}\varphi\vec{a} = \nabla\cdot(\varphi\vec{a}) = \nabla\cdot(\varphi_c\vec{a}) + \nabla\cdot(\varphi\vec{a}_c) = \varphi(\nabla\cdot a) + \nabla\varphi\cdot\vec{a} =$$

$$= \varphi\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\cdot\operatorname{grad}\varphi,$$

$$\operatorname{rot}\varphi\vec{a} = \nabla\times(\varphi\vec{a}) = \nabla\times(\varphi_c\vec{a}) + \nabla\times(\varphi\vec{a}_c) = \varphi(\nabla\times\vec{a}) + \nabla\varphi\times\vec{a} =$$

Мнемоническое правило для раскрытия производных

$$\operatorname{grad}\varphi\psi = \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi =$$

$$= \psi\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{grad}\psi,$$

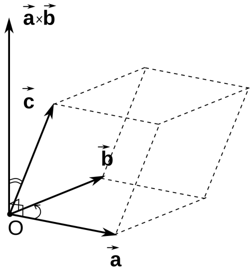
$$\operatorname{div}\varphi\vec{a} = \nabla\cdot(\varphi\vec{a}) = \nabla\cdot(\varphi_c\vec{a}) + \nabla\cdot(\varphi\vec{a}_c) = \varphi(\nabla\cdot a) + \nabla\varphi\cdot\vec{a} =$$

$$= \varphi\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\cdot\operatorname{grad}\varphi,$$

$$\operatorname{rot}\varphi\vec{a} = \nabla\times(\varphi\vec{a}) = \nabla\times(\varphi_c\vec{a}) + \nabla\times(\varphi\vec{a}_c) = \varphi(\nabla\times\vec{a}) + \nabla\varphi\times\vec{a} =$$

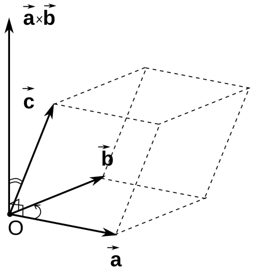
$$= \varphi\operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{grad}\varphi\times\vec{a}.$$

Дивергенция векторного произведения векторов



Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

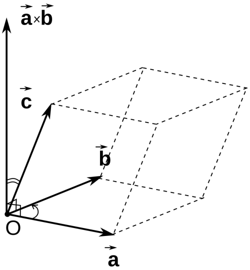
Дивергенция векторного произведения векторов



Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

$$V = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) =$$

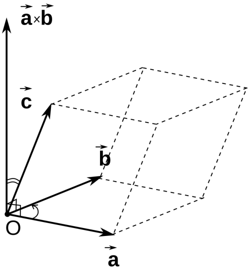
Дивергенция векторного произведения векторов



Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

$$V = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} =$$

Дивергенция векторного произведения векторов

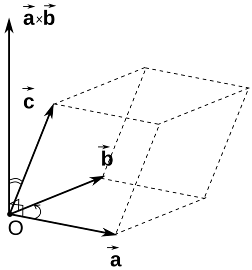


Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

$$V = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} =$$

$$= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}.$$

Дивергенция векторного произведения векторов



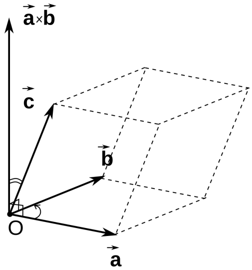
Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

$$V = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b} =$$

$$= (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}.$$

$$\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) =$$

Дивергенция векторного произведения векторов



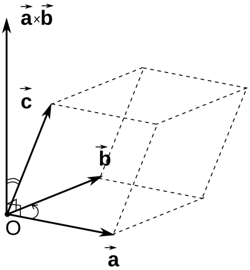
Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

$$V = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b} =$$

$$= (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}.$$

$$\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) =$$

Дивергенция векторного произведения векторов



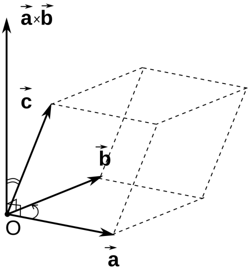
Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

$$V = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} =$$

$$= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}.$$

$$\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \nabla \cdot (\vec{a}_c \times \vec{b}) + \nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}_c) =$$

Дивергенция векторного произведения векторов



Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

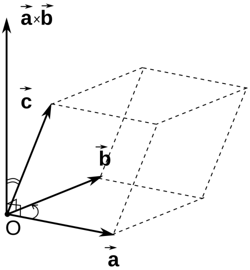
$$V = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b} =$$

$$= (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}.$$

$$\mathrm{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \nabla\cdot(\vec{a}_c\times\vec{b}) + \nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{b}_c) =$$

$$= -(\nabla\times\vec{b})\cdot\vec{a} + (\nabla\times\vec{a})\cdot\vec{b} =$$

Дивергенция векторного произведения векторов



Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

$$V = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b} =$$

$$= (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}.$$

$$\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \nabla\cdot(\vec{a}_c\times\vec{b}) + \nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{b}_c) =$$

$$= -(\nabla\times\vec{b})\cdot\vec{a} + (\nabla\times\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}.$$

Оператор Лапласа

$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi =$

Оператор Лапласа

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla\cdot(\nabla\varphi) =$$

Оператор Лапласа

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla\cdot(\nabla\varphi) = \left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) =$$

Оператор Лапласа

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla\cdot(\nabla\varphi) = \left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi$$

Оператор Лапласа

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla\cdot(\nabla\varphi) = \left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi$$

Определение

Оператор

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

называется оператором Лапласа.

Соотношения, полученные ранее

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0,$$

Соотношения, полученные ранее

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{a}) = 0,$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \nabla\times(\nabla\varphi) = 0,$$

Соотношения, полученные ранее

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{a}) = 0,$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \nabla\times(\nabla\varphi) = 0,$$

$$\operatorname{grad}\varphi(r) = \frac{\varphi'(r)}{r}\vec{r}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$