

Дифференциальные операторы в криволинейной системе координат

Верещагин Антон Сергеевич
д-р. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

QR-код презентации



2 апреля 2024 г.

Криволинейные координаты. Коэффициенты Ляме. Дифференциальные операторы в криволинейных координатах.

Определение

Три скалярные величины (q_1, q_2, q_3) , однозначно определяющие точку в пространстве, называются *криволинейными координатами точки*.

Определение

Три скалярные величины (q_1, q_2, q_3) , однозначно определяющие точку в пространстве, называются *криволинейными координатами точки*.

Пусть в декартовой системе координат точка имеет координаты (x, y, z) , тогда существует взаимнооднозначное отображение, связывающее различные системы координат:

Определение

Три скалярные величины (q_1, q_2, q_3) , однозначно определяющие точку в пространстве, называются *криволинейными координатами точки*.

Пусть в декартовой системе координат точка имеет координаты (x, y, z) , тогда существует взаимнооднозначное отображение, связывающее различные системы координат:

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3), \\ y = y(q_1, q_2, q_3), \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases}$$

Определение

Три скалярные величины (q_1, q_2, q_3) , однозначно определяющие точку в пространстве, называются *криволинейными координатами точки*.

Пусть в декартовой системе координат точка имеет координаты (x, y, z) , тогда существует взаимнооднозначное отображение, связывающее различные системы координат:

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3), \\ y = y(q_1, q_2, q_3), \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \quad \text{и наоборот} \quad \begin{cases} q_1 = q_1(x, y, z), \\ q_2 = q_2(x, y, z), \\ q_3 = q_3(x, y, z). \end{cases}$$

Определение

Линии $q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$ называются *поверхностями уровня* или *координатными поверхностями*.

Определение

Линии $q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$ называются *поверхностями уровня* или *координатными поверхностями*. А линии пересечения двух таких поверхностей называются *координатными линиями*.

Определение

Линии $q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$ называются *поверхностями уровня* или *координатными поверхностями*. А линии пересечения двух таких поверхностей называются *координатными линиями*.

Цилиндрическая система координат

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Линии и поверхности уровня

Определение

Линии $q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$ называются *поверхностями уровня* или *координатными поверхностями*. А линии пересечения двух таких поверхностей называются *координатными линиями*.

Цилиндрическая система координат

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \arctan y/x, \\ z = z. \end{cases}$$

Линии и поверхности уровня

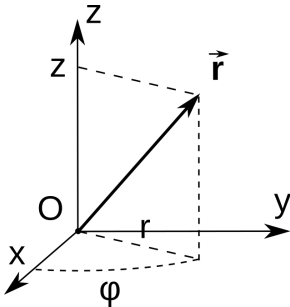
Определение

Линии $q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$ называются *поверхностями уровня* или *координатными поверхностями*. А линии пересечения двух таких поверхностей называются *координатными линиями*.

Цилиндрическая система координат

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \arctan y/x, \\ z = z. \end{cases}$$

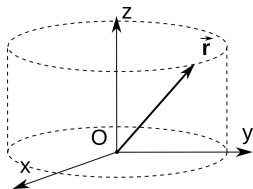


Координатные линии и координатные поверхности в цилиндрической системе координат

$$r = \text{const}$$

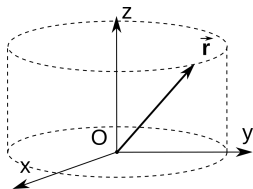
$$\varphi = \text{const}$$

$$z = \text{const}$$

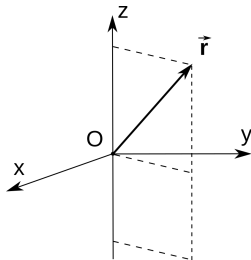


Координатные линии и координатные поверхности в цилиндрической системе координат

$$r = \text{const}$$



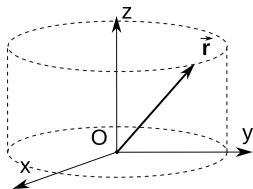
$$\varphi = \text{const}$$



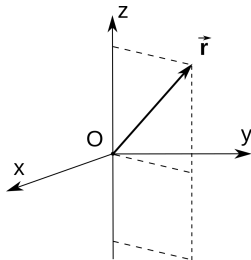
$$z = \text{const}$$

Координатные линии и координатные поверхности в цилиндрической системе координат

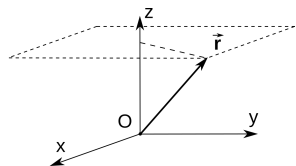
$$r = \text{const}$$



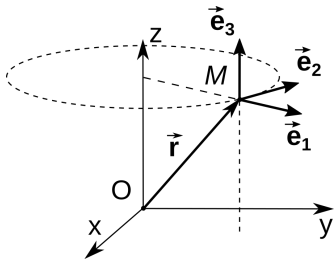
$$\varphi = \text{const}$$



$$z = \text{const}$$



Коэффициенты Ляме

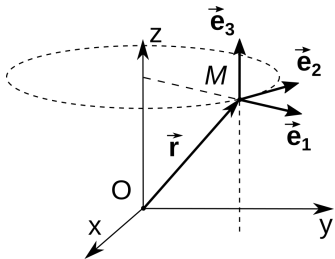


Коэффициенты Ляме

Рассмотрим фиксированную точку M , и введем единичные векторы

$$\vec{e}_1, \quad \vec{e}_2, \quad \vec{e}_3 \\ (||\vec{e}_1|| = ||\vec{e}_2|| = ||\vec{e}_3|| = 1),$$

направленные вдоль касательных к координатным линиям в сторону возрастания координат.

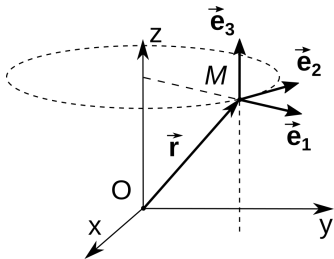


Коэффициенты Ляме

Рассмотрим фиксированную точку M , и введем единичные векторы

$$\vec{e}_1, \quad \vec{e}_2, \quad \vec{e}_3 \\ (||\vec{e}_1|| = ||\vec{e}_2|| = ||\vec{e}_3|| = 1),$$

направленные вдоль касательных к координатным линиям в сторону возрастания координат.



Пусть

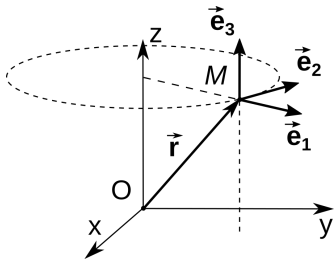
$$\vec{r} = x(q_1, q_2, q_3)\vec{i} + y(q_1, q_2, q_3)\vec{j} + z(q_1, q_2, q_3)\vec{k},$$

Коэффициенты Ляме

Рассмотрим фиксированную точку M , и введем единичные векторы

$$\vec{e}_1, \quad \vec{e}_2, \quad \vec{e}_3$$
$$(\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1),$$

направленные вдоль касательных к координатным линиям в сторону возрастания координат.



Пусть

$$\vec{r} = x(q_1, q_2, q_3)\vec{i} + y(q_1, q_2, q_3)\vec{j} + z(q_1, q_2, q_3)\vec{k},$$

тогда рассмотрим

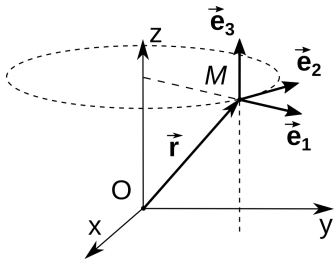
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\vec{k} =$$

Коэффициенты Ляме

Рассмотрим фиксированную точку M , и введем единичные векторы

$$\vec{e}_1, \quad \vec{e}_2, \quad \vec{e}_3$$
$$(\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1),$$

направленные вдоль касательных к координатным линиям в сторону возрастания координат.



Пусть

$$\vec{r} = x(q_1, q_2, q_3)\vec{i} + y(q_1, q_2, q_3)\vec{j} + z(q_1, q_2, q_3)\vec{k},$$

тогда рассмотрим

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\vec{k} = H_1\vec{e}_1, \quad H_1 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \right|.$$

Общие формулы

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = H_i \vec{e}_i, \quad H_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2 \quad (i = 1, 2, 3).$$

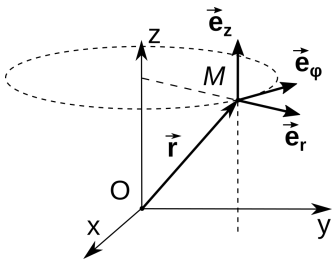
Общие формулы

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = H_i \vec{e}_i, \quad H_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2 \quad (i = 1, 2, 3).$$

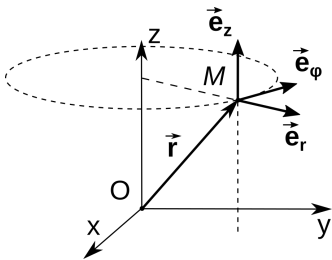
Определение

Величины H_i ($i = 1, 2, 3$) называются *коэффициентами Ляме*.

Коэффициенты Ляме для цилиндрической системы координат

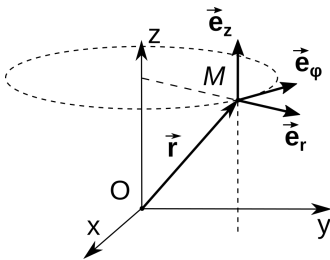


Коэффициенты Ляме для цилиндрической системы координат



$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

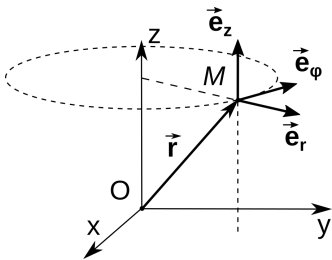
Коэффициенты Ляме для цилиндрической системы координат



$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1,$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Коэффициенты Ляме для цилиндрической системы координат

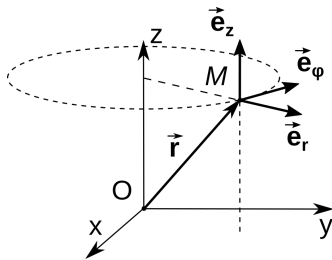


$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1,$$

$$H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r,$$

Коэффициенты Ляме для цилиндрической системы координат



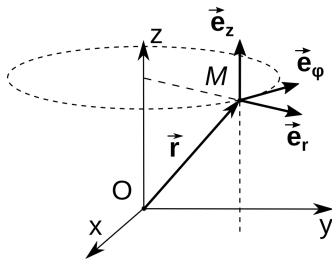
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1,$$

$$H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r,$$

$$H_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1.$$

Коэффициенты Ляме для цилиндрической системы координат



$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

$$H_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1,$$

$$H_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r,$$

$$H_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1.$$

Из построения векторов \vec{e}_r , \vec{e}_φ и \vec{e}_z видно, что они **взаимно ортогональны**.

Предположение об ортогональности криволинейной системы координат

Далее будем рассматривать только **ортогональные криволинейные системы координат**:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$
$$(i, j = 1, 2, 3).$$

Предположение об ортогональности криволинейной системы координат

Далее будем рассматривать только **ортогональные криволинейные системы координат**:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$
$$(i, j = 1, 2, 3).$$

δ_{ij} называется **символом Кронекера**.

Градиент в криволинейной системе координат

Из выражений

$$dq_i = \text{grad } q_i \cdot d\vec{r} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

Градиент в криволинейной системе координат

Из выражений

$$dq_i = \text{grad } q_i \cdot d\vec{r} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

и

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \quad (2)$$

Градиент в криволинейной системе координат

Из выражений

$$dq_i = \text{grad } q_i \cdot d\vec{r} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

и

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \quad (2)$$

подстановкой (2) в (1) при $i = 1$ получим

$$dq_1 = \text{grad } q_1 \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \right)$$

Градиент в криволинейной системе координат

Из выражений

$$dq_i = \text{grad } q_i \cdot d\vec{r} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

и

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \quad (2)$$

подстановкой (2) в (1) при $i = 1$ получим

$$dq_1 = \text{grad } q_1 \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \right)$$

$$0 = \left(\text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} - 1 \right) dq_1 + \left(\text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \right) dq_2 + \left(\text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right) dq_3$$

Градиент в криволинейной системе координат

Из выражений

$$dq_i = \text{grad } q_i \cdot d\vec{r} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

и

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \quad (2)$$

подстановкой (2) в (1) при $i = 1$ получим

$$dq_1 = \text{grad } q_1 \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \right)$$

$$0 = \left(\text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} - 1 \right) dq_1 + \left(\text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \right) dq_2 + \left(\text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \right) dq_3$$

В силу произвольности dq_i ($i = 1, 2, 3$)

$$\text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = 1, \quad \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = 0, \quad \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = 0.$$

Градиент в криволинейной системе координат

$$\text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = 1, \quad \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = 0, \quad \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = 0.$$

Градиент в криволинейной системе координат

$$\text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = 1, \quad \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = 0, \quad \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = 0.$$

Т.к. $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = H_i \vec{e}_i$ и \vec{e}_i ($i = 1, 2, 3$) взаимноортогональны,

Градиент в криволинейной системе координат

$$\text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = 1, \quad \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = 0, \quad \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = 0.$$

Т.к. $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = H_i \vec{e}_i$ и \vec{e}_i ($i = 1, 2, 3$) взаимноортогональны, тогда

$$\text{grad } q_1 = \frac{1}{H_1} \vec{e}_1.$$

Градиент в криволинейной системе координат

$$\text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = 1, \quad \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = 0, \quad \text{grad } q_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = 0.$$

Т.к. $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = H_i \vec{e}_i$ и \vec{e}_i ($i = 1, 2, 3$) взаимноортогональны, тогда

$$\text{grad } q_1 = \frac{1}{H_1} \vec{e}_1.$$

Повторяя проделанную процедуру для $i = 2, 3$, получим что

$$\text{grad } q_i = \frac{1}{H_i} \vec{e}_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Воспользуемся для разложения градиента

$$\text{grad } \varphi(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \text{grad } q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \text{grad } q_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \text{grad } q_3.$$

Воспользуемся для разложения градиента

$$\text{grad } \varphi(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \text{grad } q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \text{grad } q_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \text{grad } q_3.$$

И тогда

$$\text{grad } \varphi = \frac{\vec{e}_1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_2}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_3}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3}.$$

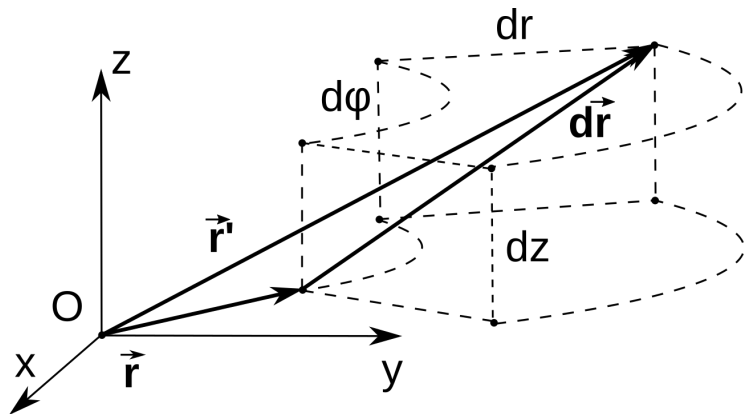
Криволинейные составляющие вектора

В локальной системе координат произвольный вектор можно разложить по базису

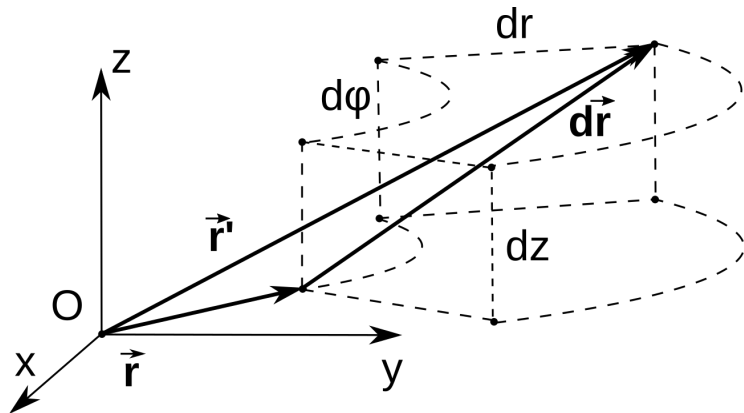
$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3.$$

Скалярные величины a_i ($i = 1, 2, 3$) называются **криволинейными составляющими вектора \vec{a}** .

Элементарный параллелепипед

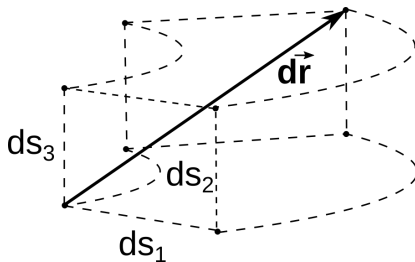


Элементарный параллелепипед

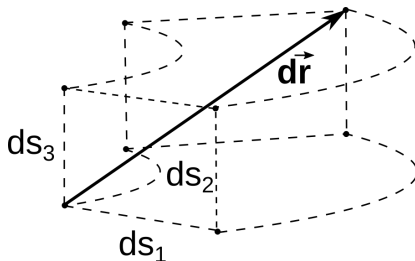


$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 = H_1 dq_1 \vec{e}_1 + H_2 dq_2 \vec{e}_2 + H_3 dq_3 \vec{e}_3.$$

Длины сторон элементарного параллелепипеда



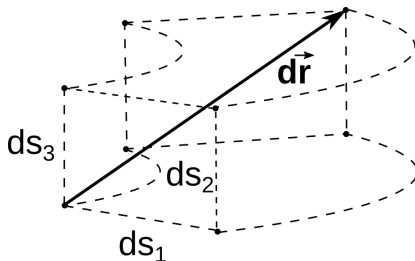
Длины сторон элементарного параллелепипеда



Отсюда составляющие длины

$$ds_i = H_i dq_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Длины сторон элементарного параллелепипеда



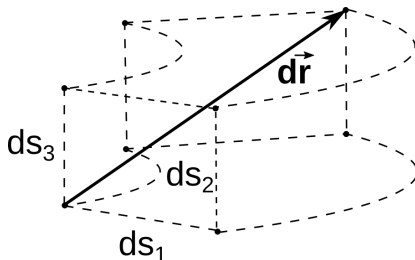
Отсюда составляющие длины

$$ds_i = H_i dq_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

и

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2.$$

Длины сторон элементарного параллелепипеда



Отсюда составляющие длины

$$ds_i = H_i dq_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

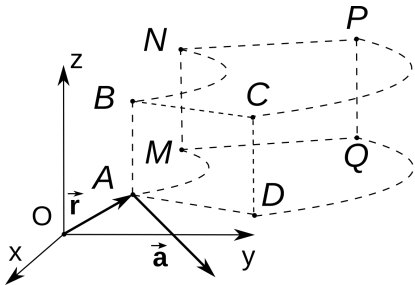
и

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2.$$

Объем элементарного параллелепипеда

$$dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

Дивергенция в криволинейной системе координат



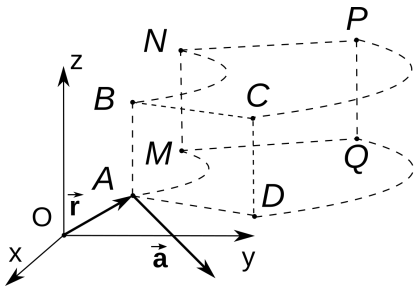
$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS}{V},$$

где \vec{a} – заданное векторное поле;
 \vec{n} – вектор внешней единичной
нормали; S – площадь поверхно-
сти объема V .

Для элементарного параллелепипеда $ABCDMNPQ$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}_{ABCD} S_{ABCD} + \dots}{V_{ABCDPQNM}}.$$

Дивергенция в криволинейной системе координат



$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS}{V},$$

где \vec{a} – заданное векторное поле;
 \vec{n} – вектор внешней единичной
нормали; S – площадь поверхно-
сти объема V .

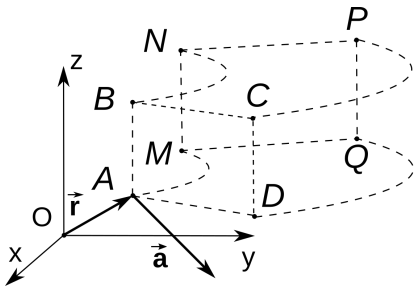
Потоки векторов через элементарные площадки равны

$$\vec{a} \cdot \vec{n}_{ABCD} S_{ABCD} = -a_2 ds_1 ds_3 = -a_2 H_1 H_3 dq_1 dq_3,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{n}_{AMNB} S_{AMNB} = -a_1 ds_2 ds_3 = -a_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{n}_{AMQD} S_{AMQD} = -a_3 ds_1 ds_2 = -a_3 H_1 H_2 dq_1 dq_2,$$

Дивергенция в криволинейной системе координат



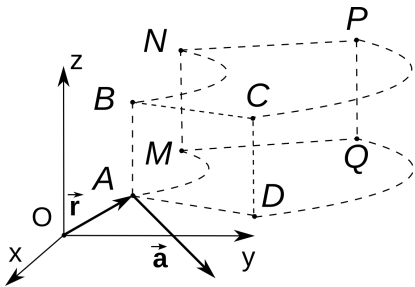
$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int \vec{a} \cdot \vec{n} dS}{V},$$

где \vec{a} – заданное векторное поле;
 \vec{n} – вектор внешней единичной нормали; S – площадь поверхности объема V .

Потоки векторов через элементарные площадки равны

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{n}_{MNPQ} S_{MNPQ} &= (a_2 H_1 H_3 + \frac{\partial a_2 H_1 H_3}{\partial q_2} dq_2) dq_1 dq_3, \\ \vec{a} \cdot \vec{n}_{DCPQ} S_{DCPQ} &= (a_1 H_2 H_3 + \frac{\partial a_1 H_2 H_3}{\partial q_1} dq_1) dq_2 dq_3, \\ \vec{a} \cdot \vec{n}_{BNPC} S_{BNPC} &= (a_3 H_1 H_2 + \frac{\partial a_3 H_1 H_2}{\partial q_3} dq_3) dq_1 dq_2. \end{aligned}$$

Дивергенция в криволинейной системе координат



$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS}{V},$$

где \vec{a} – заданное векторное поле;
 \vec{n} – вектор внешней единичной нормали; S – площадь поверхности объема V .

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a} &= \frac{(\vec{a} \cdot \vec{n}_{ABCD} S_{ABCD} + \vec{a} \cdot \vec{n}_{MNPQ} S_{MNPQ}) + \dots}{V_{ABCDPQNM}} = \\ &= \frac{\frac{\partial a_2 H_1 H_3}{\partial q_2} dq_2 dq_1 dq_3 + \frac{\partial a_1 H_2 H_3}{\partial q_1} dq_1 dq_2 dq_3 + \frac{\partial a_3 H_1 H_2}{\partial q_3} dq_3 dq_1 dq_2}{H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3} = \\ &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial (H_2 H_3 a_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (H_1 H_3 a_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial (H_1 H_2 a_3)}{\partial q_3} \right). \end{aligned}$$