

Операции с тензорами

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрогидродинамики ФЛА НГТУ

28 мая 2019 г.

Аннотация

Скалярное и векторное умножение тензора на вектор. Скалярное произведение тензоров.

Скалярное и векторное умножение тензора на вектор

Определение

Под *скалярным произведением тензора* $\mathbf{\Pi} = \vec{i}_1\vec{p}_1 + \vec{i}_2\vec{p}_2 + \vec{i}_3\vec{p}_3$ *на вектор* $\vec{a} = \vec{i}_1a_1 + \vec{i}_2a_2 + \vec{i}_3a_3$ *справа* будем понимать вектор \vec{a}' :

$$\vec{a}' = \mathbf{\Pi} \cdot \vec{a} = \vec{i}_1(\vec{p}_1 \cdot \vec{a}) + \vec{i}_2(\vec{p}_2 \cdot \vec{a}) + \vec{i}_3(\vec{p}_3 \cdot \vec{a}).$$

Скалярное и векторное умножение тензора на вектор

Определение

Под **скалярным произведением тензора** $\mathbf{\Pi} = \vec{i}_1\vec{p}_1 + \vec{i}_2\vec{p}_2 + \vec{i}_3\vec{p}_3$ **на вектор** $\vec{a} = \vec{i}_1a_1 + \vec{i}_2a_2 + \vec{i}_3a_3$ **справа** будем понимать вектор \vec{a}' :

$$\vec{a}' = \mathbf{\Pi} \cdot \vec{a} = \vec{i}_1(\vec{p}_1 \cdot \vec{a}) + \vec{i}_2(\vec{p}_2 \cdot \vec{a}) + \vec{i}_3(\vec{p}_3 \cdot \vec{a}).$$

Определение

Под **скалярным произведением вектора** \vec{a} **на тензор** $\mathbf{\Pi}$ **слева** понимается вектор \vec{a}'' :

$$\begin{aligned}\vec{a}'' = \vec{a} \cdot \mathbf{\Pi} &= (\vec{a} \cdot \vec{i}_1)\vec{p}_1 + (\vec{a} \cdot \vec{i}_2)\vec{p}_2 + (\vec{a} \cdot \vec{i}_3)\vec{p}_3 = \\ &= a_1\vec{p}_1 + a_2\vec{p}_2 + a_3\vec{p}_3.\end{aligned}$$

Диада (повтор)

Определение

Пусть $\vec{a} = \vec{i}_1 a_1 + \vec{i}_2 a_2 + \vec{i}_3 a_3$ и $\vec{b} = \vec{i}_1 b_1 + \vec{i}_2 b_2 + \vec{i}_3 b_3$, тогда **диадным** или **тензорными произведением** векторов \vec{a} и \vec{b} называется тензор, определяемый следующим соотношением:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a} \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} = \vec{i}_1(a_1 \vec{b}) + \vec{i}_2(a_2 \vec{b}) + \vec{i}_3(a_3 \vec{b}).$$

Диада (повтор)

Определение

Пусть $\vec{a} = \vec{i}_1 a_1 + \vec{i}_2 a_2 + \vec{i}_3 a_3$ и $\vec{b} = \vec{i}_1 b_1 + \vec{i}_2 b_2 + \vec{i}_3 b_3$, тогда **диадным** или **тензорным произведением** векторов \vec{a} и \vec{b} называется тензор, определяемый следующим соотношением:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a} \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} = \vec{i}_1(a_1 \vec{b}) + \vec{i}_2(a_2 \vec{b}) + \vec{i}_3(a_3 \vec{b}).$$

Линейность диады по каждому аргументу

$$(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}.$$

$$\vec{c}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c}\vec{a} + \vec{c}\vec{b}.$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c}) \cdot \vec{a} =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) \cdot \vec{a} =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{i}_1 b_1 (\vec{c} \cdot \vec{a}) + \vec{i}_2 b_2 (\vec{c} \cdot \vec{a}) + \vec{i}_3 b_3 (\vec{c} \cdot \vec{a}) =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} – вектора.

$$\begin{aligned}(\vec{b}\vec{c}) \cdot \vec{a} &= (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{i}_1 b_1 (\vec{c} \cdot \vec{a}) + \vec{i}_2 b_2 (\vec{c} \cdot \vec{a}) + \vec{i}_3 b_3 (\vec{c} \cdot \vec{a}) = \\ &= (\vec{i}_1 b_1 + \vec{i}_2 b_2 + \vec{i}_3 b_3) (\vec{c} \cdot \vec{a}) =\end{aligned}$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} – вектора.

$$\begin{aligned}(\vec{b}\vec{c}) \cdot \vec{a} &= (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{i}_1 b_1 (\vec{c} \cdot \vec{a}) + \vec{i}_2 b_2 (\vec{c} \cdot \vec{a}) + \vec{i}_3 b_3 (\vec{c} \cdot \vec{a}) = \\ &= (\vec{i}_1 b_1 + \vec{i}_2 b_2 + \vec{i}_3 b_3) (\vec{c} \cdot \vec{a}) = \vec{b} (\vec{c} \cdot \vec{a}).\end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b}\vec{c}) =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} – вектора.

$$\begin{aligned}(\vec{b}\vec{c}) \cdot \vec{a} &= (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{i}_1 b_1 (\vec{c} \cdot \vec{a}) + \vec{i}_2 b_2 (\vec{c} \cdot \vec{a}) + \vec{i}_3 b_3 (\vec{c} \cdot \vec{a}) = \\ &= (\vec{i}_1 b_1 + \vec{i}_2 b_2 + \vec{i}_3 b_3) (\vec{c} \cdot \vec{a}) = \vec{b} (\vec{c} \cdot \vec{a}).\end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} – вектора.

$$\begin{aligned}(\vec{b}\vec{c}) \cdot \vec{a} &= (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{i}_1 b_1 (\vec{c} \cdot \vec{a}) + \vec{i}_2 b_2 (\vec{c} \cdot \vec{a}) + \vec{i}_3 b_3 (\vec{c} \cdot \vec{a}) = \\ &= (\vec{i}_1 b_1 + \vec{i}_2 b_2 + \vec{i}_3 b_3) (\vec{c} \cdot \vec{a}) = \vec{b} (\vec{c} \cdot \vec{a}).\end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) = a_1 b_1 \vec{c} + a_2 b_2 \vec{c} + a_3 b_3 \vec{c} =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} – вектора.

$$\begin{aligned}(\vec{b}\vec{c}) \cdot \vec{a} &= (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{i}_1 b_1 (\vec{c} \cdot \vec{a}) + \vec{i}_2 b_2 (\vec{c} \cdot \vec{a}) + \vec{i}_3 b_3 (\vec{c} \cdot \vec{a}) = \\ &= (\vec{i}_1 b_1 + \vec{i}_2 b_2 + \vec{i}_3 b_3) (\vec{c} \cdot \vec{a}) = \vec{b} (\vec{c} \cdot \vec{a}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (\vec{b}\vec{c}) &= \vec{a} \cdot (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) = a_1 b_1 \vec{c} + a_2 b_2 \vec{c} + a_3 b_3 \vec{c} = \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \vec{c} =\end{aligned}$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} – вектора.

$$\begin{aligned}(\vec{b}\vec{c}) \cdot \vec{a} &= (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{i}_1 b_1 (\vec{c} \cdot \vec{a}) + \vec{i}_2 b_2 (\vec{c} \cdot \vec{a}) + \vec{i}_3 b_3 (\vec{c} \cdot \vec{a}) = \\ &= (\vec{i}_1 b_1 + \vec{i}_2 b_2 + \vec{i}_3 b_3) (\vec{c} \cdot \vec{a}) = \vec{b} (\vec{c} \cdot \vec{a}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (\vec{b}\vec{c}) &= \vec{a} \cdot (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) = a_1 b_1 \vec{c} + a_2 b_2 \vec{c} + a_3 b_3 \vec{c} = \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}.\end{aligned}$$

Векторное произведение тензора на вектор

Определение

Под **векторным произведением тензора \mathbf{P} на вектор \vec{a} справа** понимается новый тензор \mathbf{P}' , вычисленный по формуле:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} \times \vec{a} = \vec{i}_1(\vec{p}_1 \times \vec{a}) + \vec{i}_2(\vec{p}_2 \times \vec{a}) + \vec{i}_3(\vec{p}_3 \times \vec{a}).$$

Векторное произведение тензора на вектор

Определение

Под **векторным произведением тензора Π на вектор \vec{a} справа** понимается новый тензор Π' , вычисленный по формуле:

$$\Pi' = \Pi \times \vec{a} = \vec{i}_1(\vec{p}_1 \times \vec{a}) + \vec{i}_2(\vec{p}_2 \times \vec{a}) + \vec{i}_3(\vec{p}_3 \times \vec{a}).$$

Определение

Под **векторным произведением вектора \vec{a} на тензор Π слева** понимается новый тензор Π'' , вычисленный по формуле:

$$\Pi'' = \vec{a} \times \Pi = (\vec{a} \times \vec{i}_1)\vec{p}_1 + (\vec{a} \times \vec{i}_2)\vec{p}_2 + (\vec{a} \times \vec{i}_3)\vec{p}_3.$$

Векторное произведение тензора на вектор

Определение

Под **векторным произведением тензора Π на вектор \vec{a} справа** понимается новый тензор Π' , вычисленный по формуле:

$$\Pi' = \Pi \times \vec{a} = \vec{i}_1(\vec{p}_1 \times \vec{a}) + \vec{i}_2(\vec{p}_2 \times \vec{a}) + \vec{i}_3(\vec{p}_3 \times \vec{a}).$$

Определение

Под **векторным произведением вектора \vec{a} на тензор Π слева** понимается новый тензор Π'' , вычисленный по формуле:

$$\Pi'' = \vec{a} \times \Pi = (\vec{a} \times \vec{i}_1)\vec{p}_1 + (\vec{a} \times \vec{i}_2)\vec{p}_2 + (\vec{a} \times \vec{i}_3)\vec{p}_3.$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$\begin{aligned}(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} &= (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} = \\&= \vec{i}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{i}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{i}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) =\end{aligned}$$

Векторное произведение диады на вектор

$$\begin{aligned}(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} &= (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} = \\&= \vec{i}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{i}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{i}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).\end{aligned}$$

Векторное произведение диады на вектор

$$\begin{aligned}(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} &= (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} = \\&= \vec{i}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{i}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{i}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).\end{aligned}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$\begin{aligned}(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} &= (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} = \\&= \vec{i}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{i}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{i}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).\end{aligned}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \times (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$\begin{aligned}(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} &= (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} = \\&= \vec{i}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{i}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{i}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) &= \vec{a} \times (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) = \\&= (a \times \vec{i}_1)(b_1 \vec{c}) + (a \times \vec{i}_2)(b_2 \vec{c}) + (a \times \vec{i}_3)(b_3 \vec{c}) =\end{aligned}$$

Векторное произведение диады на вектор

$$\begin{aligned}(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} &= (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} = \\&= \vec{i}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{i}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{i}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) &= \vec{a} \times (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) = \\&= (a \times \vec{i}_1)(b_1 \vec{c}) + (a \times \vec{i}_2)(b_2 \vec{c}) + (a \times \vec{i}_3)(b_3 \vec{c}) = \\&= (a \times \vec{i}_1 b_1) \vec{c} + (a \times \vec{i}_2 b_2) \vec{c} + (a \times \vec{i}_3 b_3) \vec{c} =\end{aligned}$$

Векторное произведение диады на вектор

$$\begin{aligned}(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} &= (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} = \\&= \vec{i}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{i}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{i}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) &= \vec{a} \times (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) = \\&= (a \times \vec{i}_1)(b_1 \vec{c}) + (a \times \vec{i}_2)(b_2 \vec{c}) + (a \times \vec{i}_3)(b_3 \vec{c}) = \\&= (a \times \vec{i}_1 b_1) \vec{c} + (a \times \vec{i}_2 b_2) \vec{c} + (a \times \vec{i}_3 b_3) \vec{c} = \\&= (a \times \vec{i}_1 b_1 + a \times \vec{i}_2 b_2 + a \times \vec{i}_3 b_3) \vec{c} =\end{aligned}$$

Векторное произведение диады на вектор

$$\begin{aligned}(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} &= (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} = \\&= \vec{i}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{i}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{i}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) &= \vec{a} \times (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) = \\&= (a \times \vec{i}_1)(b_1 \vec{c}) + (a \times \vec{i}_2)(b_2 \vec{c}) + (a \times \vec{i}_3)(b_3 \vec{c}) = \\&= (a \times \vec{i}_1 b_1) \vec{c} + (a \times \vec{i}_2 b_2) \vec{c} + (a \times \vec{i}_3 b_3) \vec{c} = \\&= (a \times \vec{i}_1 b_1 + a \times \vec{i}_2 b_2 + a \times \vec{i}_3 b_3) \vec{c} = (a \times (\vec{i}_1 b_1 + \vec{i}_2 b_2 + \vec{i}_3 b_3)) \vec{c} =\end{aligned}$$

Векторное произведение диады на вектор

$$\begin{aligned}(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} &= (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} = \\&= \vec{i}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{i}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{i}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) &= \vec{a} \times (\vec{i}_1 b_1 \vec{c} + \vec{i}_2 b_2 \vec{c} + \vec{i}_3 b_3 \vec{c}) = \\&= (a \times \vec{i}_1)(b_1 \vec{c}) + (a \times \vec{i}_2)(b_2 \vec{c}) + (a \times \vec{i}_3)(b_3 \vec{c}) = \\&= (a \times \vec{i}_1 b_1) \vec{c} + (a \times \vec{i}_2 b_2) \vec{c} + (a \times \vec{i}_3 b_3) \vec{c} = \\&= (a \times \vec{i}_1 b_1 + a \times \vec{i}_2 b_2 + a \times \vec{i}_3 b_3) \vec{c} = (a \times (\vec{i}_1 b_1 + \vec{i}_2 b_2 + \vec{i}_3 b_3)) \vec{c} =\end{aligned}$$

Пример

Рассмотрим единичный тензор $I = \vec{i}_1\vec{i}_1 + \vec{i}_2\vec{i}_2 + \vec{i}_3\vec{i}_3$.

Пример

Рассмотрим единичный тензор $I = \vec{i}_1\vec{i}_1 + \vec{i}_2\vec{i}_2 + \vec{i}_3\vec{i}_3$. Построим тензор Ψ

$$\Psi = \vec{\omega} \times I = (\vec{\omega} \times \vec{i}_1)\vec{i}_1 + (\vec{\omega} \times \vec{i}_2)\vec{i}_2 + (\vec{\omega} \times \vec{i}_3)\vec{i}_3.$$

Пример

Рассмотрим единичный тензор $I = \vec{i}_1\vec{i}_1 + \vec{i}_2\vec{i}_2 + \vec{i}_3\vec{i}_3$. Построим тензор Ψ

$$\Psi = \vec{\omega} \times I = (\vec{\omega} \times \vec{i}_1)\vec{i}_1 + (\vec{\omega} \times \vec{i}_2)\vec{i}_2 + (\vec{\omega} \times \vec{i}_3)\vec{i}_3.$$

Умножим тензор Ψ на произвольный вектор \vec{a} справа

$$\Psi \cdot \vec{a} =$$

Пример

Рассмотрим единичный тензор $I = \vec{i}_1\vec{i}_1 + \vec{i}_2\vec{i}_2 + \vec{i}_3\vec{i}_3$. Построим тензор Ψ

$$\Psi = \vec{\omega} \times I = (\vec{\omega} \times \vec{i}_1)\vec{i}_1 + (\vec{\omega} \times \vec{i}_2)\vec{i}_2 + (\vec{\omega} \times \vec{i}_3)\vec{i}_3.$$

Умножим тензор Ψ на произвольный вектор \vec{a} справа

$$\Psi \cdot \vec{a} = (\vec{\omega} \times \vec{i}_1)(\vec{i}_1 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{i}_2)(\vec{i}_2 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{i}_3)(\vec{i}_3 \cdot \vec{a}) =$$

Пример

Рассмотрим единичный тензор $I = \vec{i}_1\vec{i}_1 + \vec{i}_2\vec{i}_2 + \vec{i}_3\vec{i}_3$. Построим тензор Ψ

$$\Psi = \vec{\omega} \times I = (\vec{\omega} \times \vec{i}_1)\vec{i}_1 + (\vec{\omega} \times \vec{i}_2)\vec{i}_2 + (\vec{\omega} \times \vec{i}_3)\vec{i}_3.$$

Умножим тензор Ψ на произвольный вектор \vec{a} справа

$$\begin{aligned}\Psi \cdot \vec{a} &= (\vec{\omega} \times \vec{i}_1)(\vec{i}_1 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{i}_2)(\vec{i}_2 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{i}_3)(\vec{i}_3 \cdot \vec{a}) = \\ &= (\vec{\omega} \times \vec{i}_1)a_1 + (\vec{\omega} \times \vec{i}_2)a_2 + (\vec{\omega} \times \vec{i}_3)a_3 =\end{aligned}$$

Пример

Рассмотрим единичный тензор $I = \vec{i}_1\vec{i}_1 + \vec{i}_2\vec{i}_2 + \vec{i}_3\vec{i}_3$. Построим тензор Ψ

$$\Psi = \vec{\omega} \times I = (\vec{\omega} \times \vec{i}_1)\vec{i}_1 + (\vec{\omega} \times \vec{i}_2)\vec{i}_2 + (\vec{\omega} \times \vec{i}_3)\vec{i}_3.$$

Умножим тензор Ψ на произвольный вектор \vec{a} справа

$$\begin{aligned}\Psi \cdot \vec{a} &= (\vec{\omega} \times \vec{i}_1)(\vec{i}_1 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{i}_2)(\vec{i}_2 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{i}_3)(\vec{i}_3 \cdot \vec{a}) = \\ &= (\vec{\omega} \times \vec{i}_1)a_1 + (\vec{\omega} \times \vec{i}_2)a_2 + (\vec{\omega} \times \vec{i}_3)a_3 = \\ &= \vec{\omega} \times \vec{a}.\end{aligned}$$

Пример

Рассмотрим единичный тензор $I = \vec{i}_1\vec{i}_1 + \vec{i}_2\vec{i}_2 + \vec{i}_3\vec{i}_3$. Построим тензор Ψ

$$\Psi = \vec{\omega} \times I = (\vec{\omega} \times \vec{i}_1)\vec{i}_1 + (\vec{\omega} \times \vec{i}_2)\vec{i}_2 + (\vec{\omega} \times \vec{i}_3)\vec{i}_3.$$

Умножим тензор Ψ на произвольный вектор \vec{a} справа

$$\begin{aligned}\Psi \cdot \vec{a} &= (\vec{\omega} \times \vec{i}_1)(\vec{i}_1 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{i}_2)(\vec{i}_2 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{i}_3)(\vec{i}_3 \cdot \vec{a}) = \\ &= (\vec{\omega} \times \vec{i}_1)a_1 + (\vec{\omega} \times \vec{i}_2)a_2 + (\vec{\omega} \times \vec{i}_3)a_3 = \\ &= \vec{\omega} \times \vec{a}.\end{aligned}$$

Таким образом, любой антисимметричный тензор может быть представлен в виде

Произведение тензоров

Рассмотрим два тензора **A** и **B** и вектор \vec{c} . Тогда пусть

$$\vec{c}' = \mathbf{B} \cdot \vec{c}.$$

и

$$\vec{c}'' = \mathbf{A} \cdot \vec{c}' = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \vec{c}).$$

Произведение тензоров

Рассмотрим два тензора \mathbf{A} и \mathbf{B} и вектор \vec{c} . Тогда пусть

$$\vec{c}' = \mathbf{B} \cdot \vec{c}.$$

и

$$\vec{c}'' = \mathbf{A} \cdot \vec{c}' = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \vec{c}).$$

Определение

Если переход от вектора \vec{c} к вектору \vec{c}'' осуществляется с помощью одного тензора \mathbf{P} со скалярными элементами p_{kl} :

$$\vec{c}'' = \mathbf{P} \cdot \vec{c},$$

то тензор \mathbf{P} называется **скалярным произведением тензоров \mathbf{A} и \mathbf{B}** :

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Покомпонентные формулы для скалярного произведения тензоров

Определитель тензора

Определение

Определителем тензора Π называется определитель матрицы его компонент:

$$D(\Pi) = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}.$$

Определитель тензора

Определение

Определителем тензора Π называется определитель матрицы его компонент:

$$D(\Pi) = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}.$$

Определитель произведения тензоров

Т.к. тензоры перемножаются как матрицы, то

$$D(\Pi) = D(A)D(B).$$

Скалярное произведение диад

Теорема

Пусть $\mathbf{A} = \vec{p}\vec{q}$ и $\mathbf{B} = \vec{r}\vec{s}$, тогда

$$\Pi = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}\vec{s}) = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

Скалярное произведение диад

Теорема

Пусть $\mathbf{A} = \vec{p}\vec{q}$ и $\mathbf{B} = \vec{r}\vec{s}$, тогда

$$\mathbf{P} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}\vec{s}) = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

Доказательство.

Для произвольного вектора \vec{x} рассмотрим

$$\mathbf{P} \cdot \vec{x} =$$

Скалярное произведение диад

Теорема

Пусть $\mathbf{A} = \vec{p}\vec{q}$ и $\mathbf{B} = \vec{r}\vec{s}$, тогда

$$\mathbf{P} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}\vec{s}) = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

Доказательство.

Для произвольного вектора \vec{x} рассмотрим

$$\mathbf{P} \cdot \vec{x} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot ((\vec{r}\vec{s}) \cdot \vec{x}) = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}(\vec{s} \cdot \vec{x})) =$$

Скалярное произведение диад

Теорема

Пусть $\mathbf{A} = \vec{p}\vec{q}$ и $\mathbf{B} = \vec{r}\vec{s}$, тогда

$$\mathbf{P} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}\vec{s}) = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

Доказательство.

Для произвольного вектора \vec{x} рассмотрим

$$\mathbf{P} \cdot \vec{x} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot ((\vec{r}\vec{s}) \cdot \vec{x}) = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}(\vec{s} \cdot \vec{x})) = \vec{p}(\vec{q} \cdot \vec{r})(\vec{s} \cdot \vec{x}) =$$

Скалярное произведение диад

Теорема

Пусть $\mathbf{A} = \vec{p}\vec{q}$ и $\mathbf{B} = \vec{r}\vec{s}$, тогда

$$\mathbf{P} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}\vec{s}) = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

Доказательство.

Для произвольного вектора \vec{x} рассмотрим

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \cdot \vec{x} &= (\vec{p}\vec{q}) \cdot ((\vec{r}\vec{s}) \cdot \vec{x}) = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}(\vec{s} \cdot \vec{x})) = \vec{p}(\vec{q} \cdot \vec{r})(\vec{s} \cdot \vec{x}) = \\ &= ((\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}) \cdot \vec{x}.\end{aligned}$$

Скалярное произведение диад

Теорема

Пусть $\mathbf{A} = \vec{p}\vec{q}$ и $\mathbf{B} = \vec{r}\vec{s}$, тогда

$$\mathbf{P} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}\vec{s}) = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

Доказательство.

Для произвольного вектора \vec{x} рассмотрим

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \cdot \vec{x} &= (\vec{p}\vec{q}) \cdot ((\vec{r}\vec{s}) \cdot \vec{x}) = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}(\vec{s} \cdot \vec{x})) = \vec{p}(\vec{q} \cdot \vec{r})(\vec{s} \cdot \vec{x}) = \\ &= ((\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}) \cdot \vec{x}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{P} = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

