Тензоры деформаций

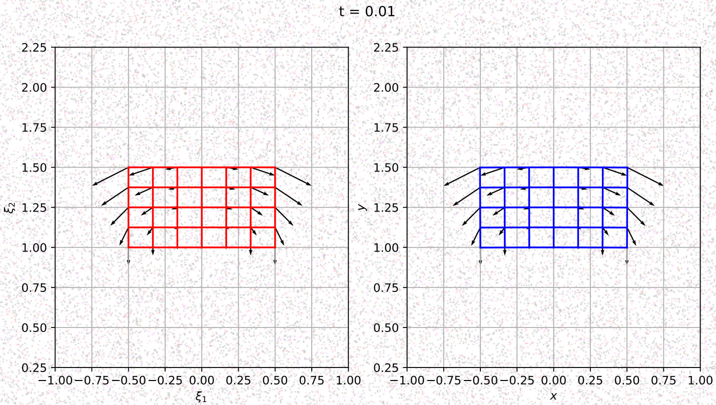
к.ф.-м.н. *Верещагин Антон Сергеевич*

26 сентября 2018 г.

Аннотация

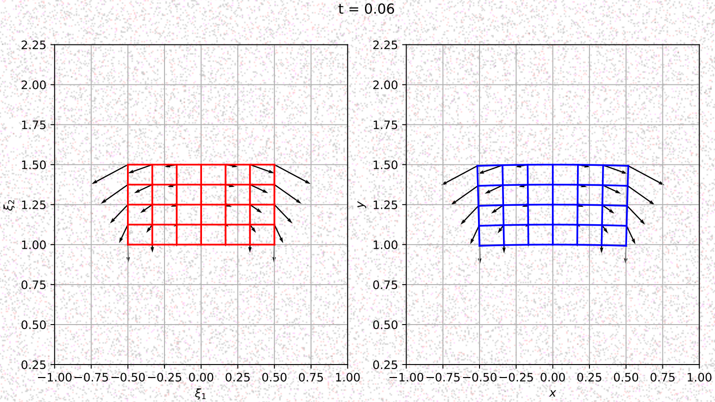
Движение сплошной среды. Сопутствующий базис. Метрический тензор. Нелинейный тензор деформации. Геометрическая интерпретация компонент тензора деформаций. Главные деформации и инварианты. Связь между относительным изменением объёма и инвариантами тензора деформаций.

Пример деформации сплошной среды



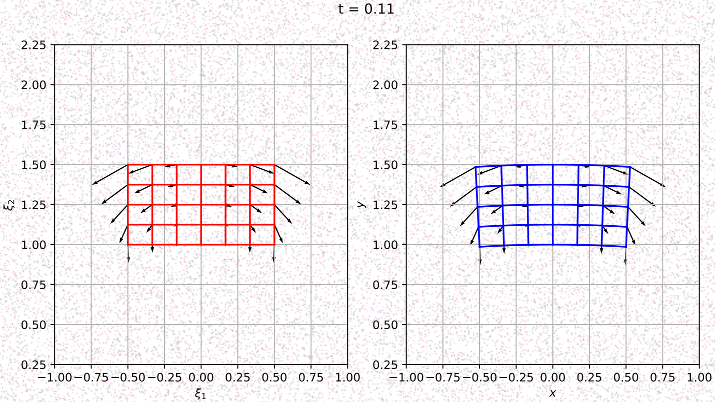
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



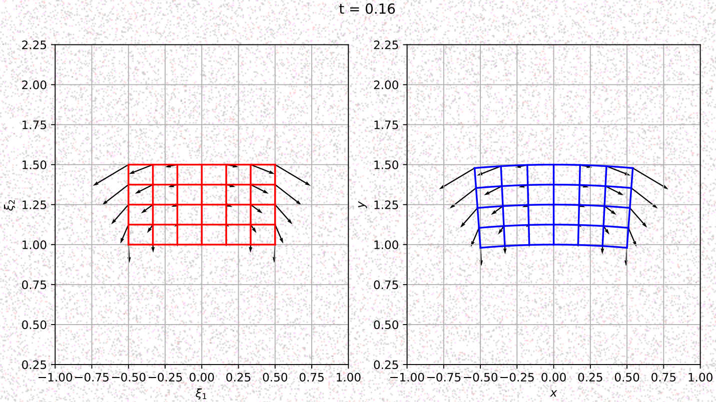
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



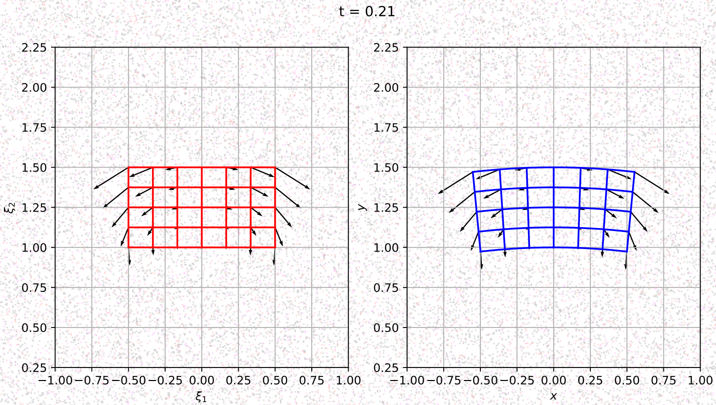
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



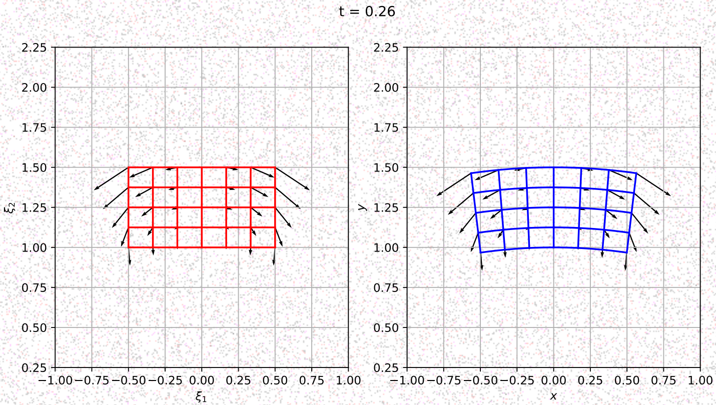
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



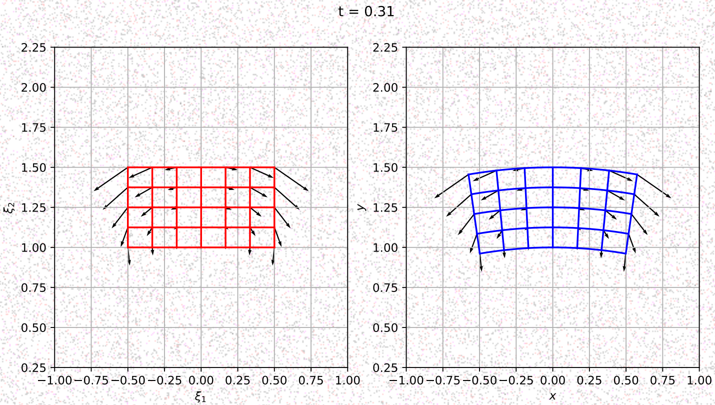
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



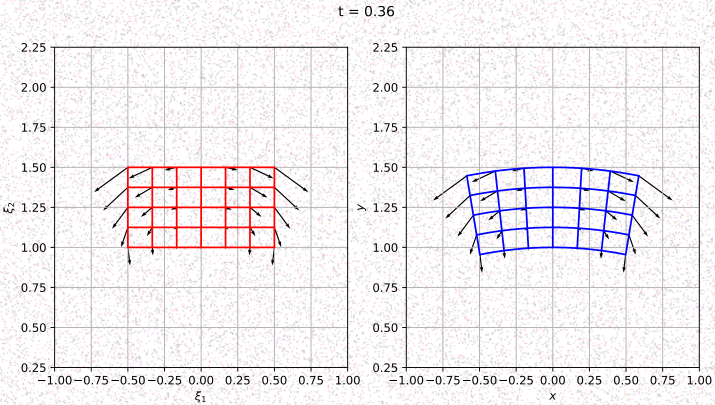
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



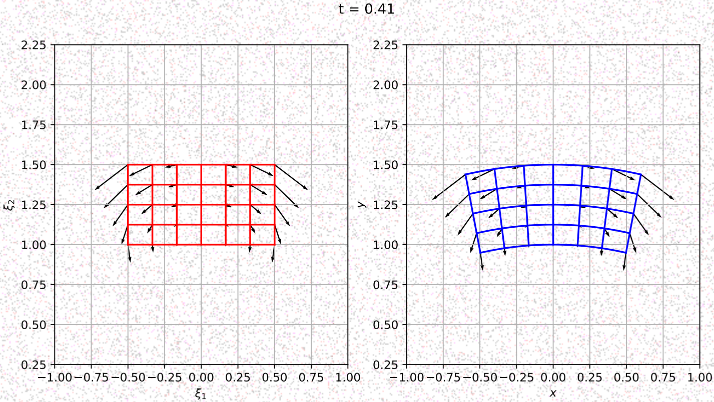
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



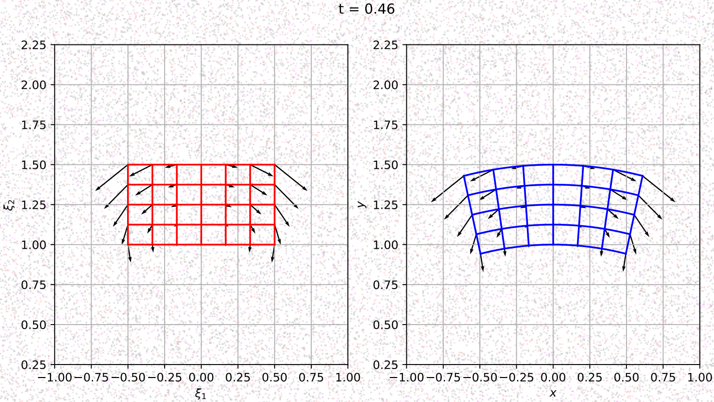
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



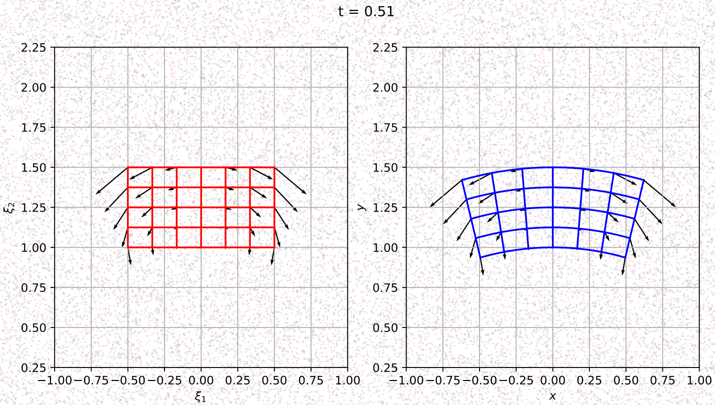
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



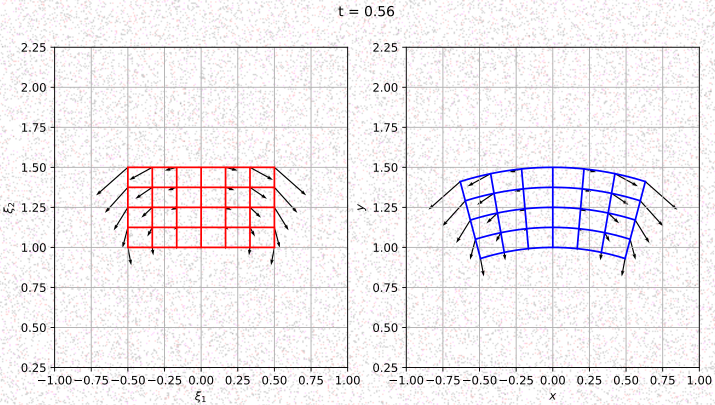
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



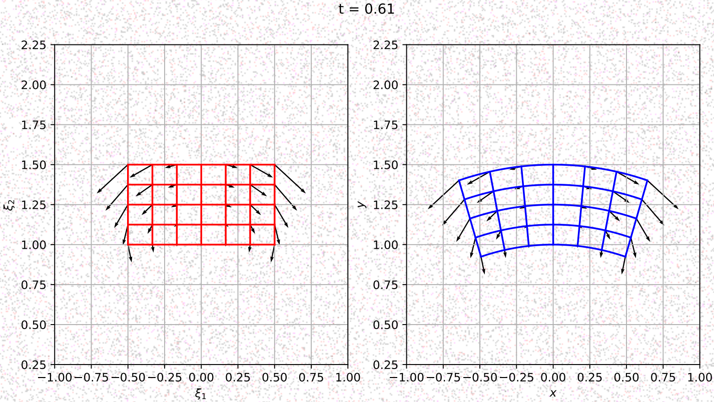
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



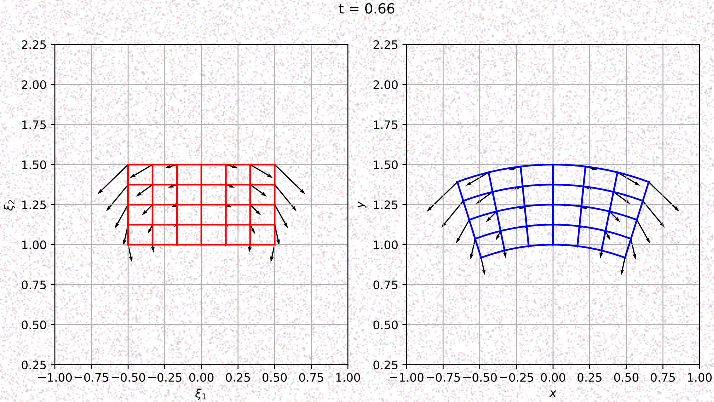
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



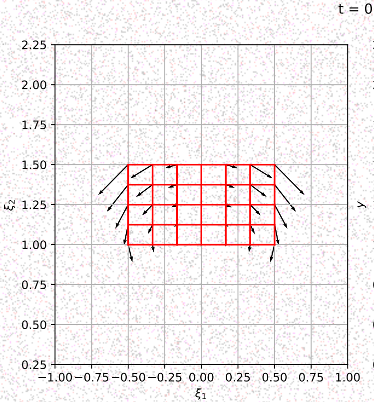
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



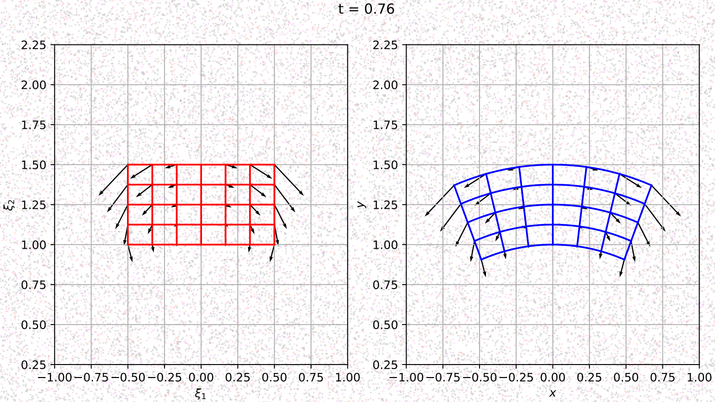
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



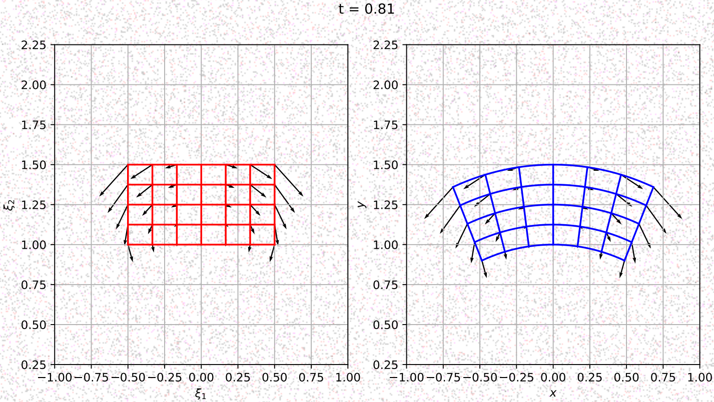
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



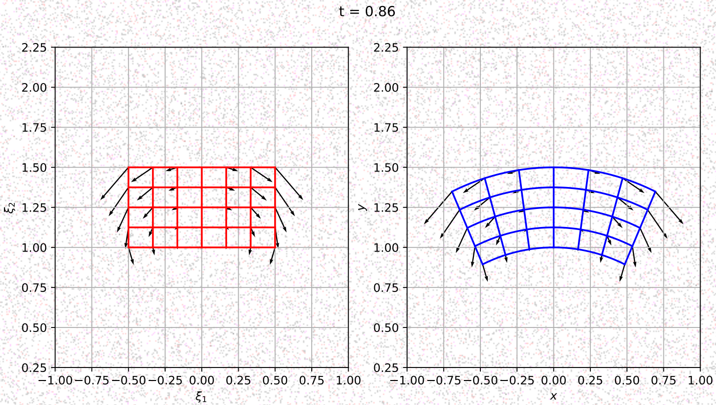
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



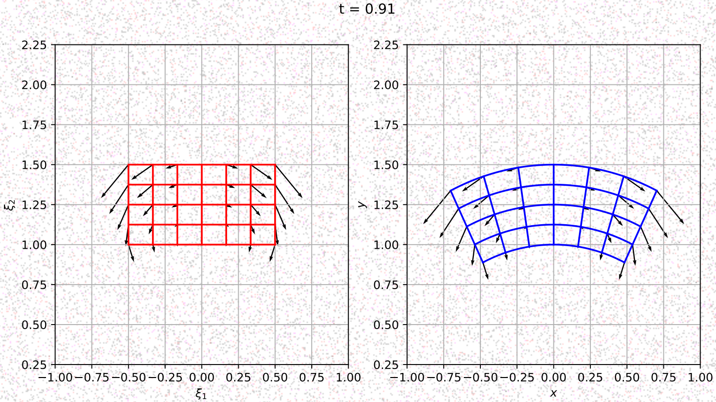
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



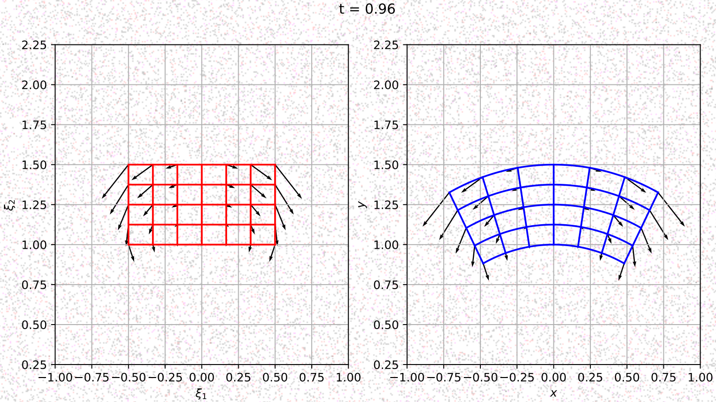
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



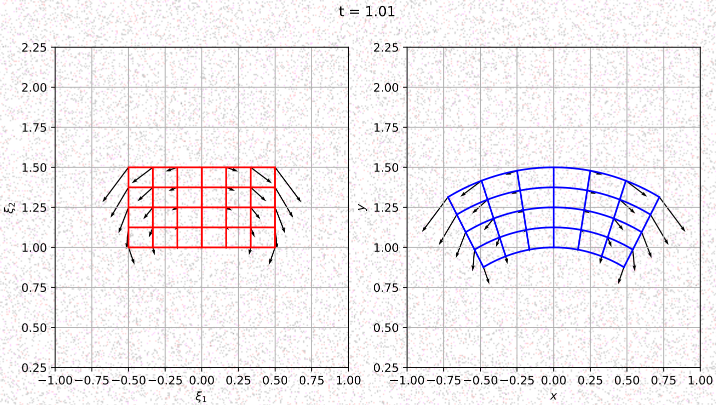
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



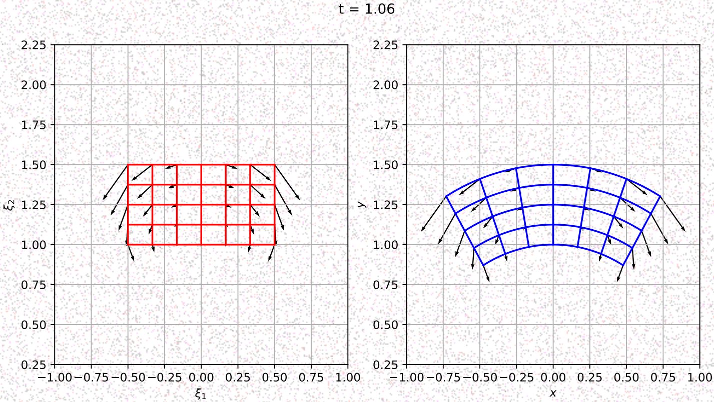
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



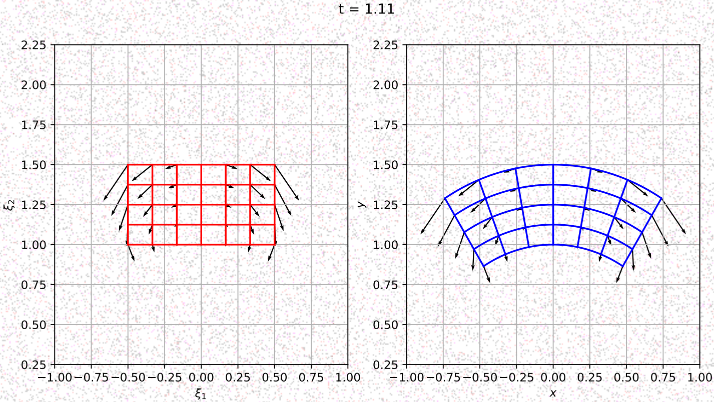
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



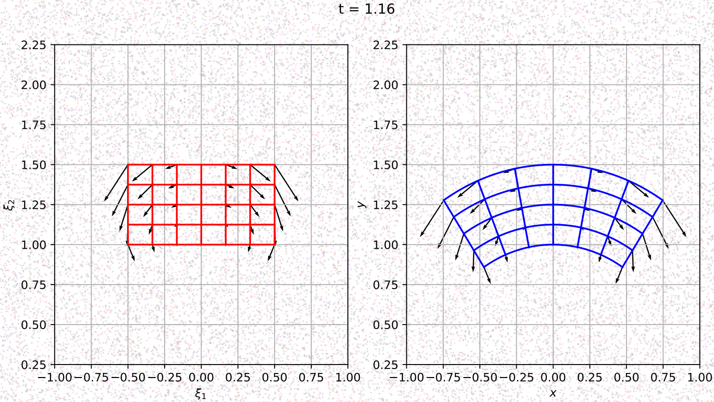
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



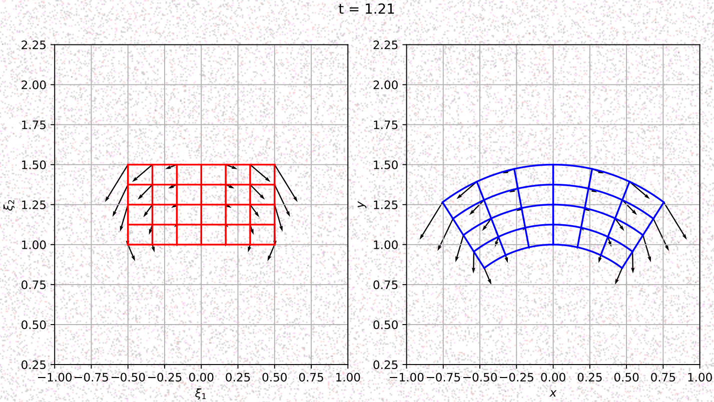
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



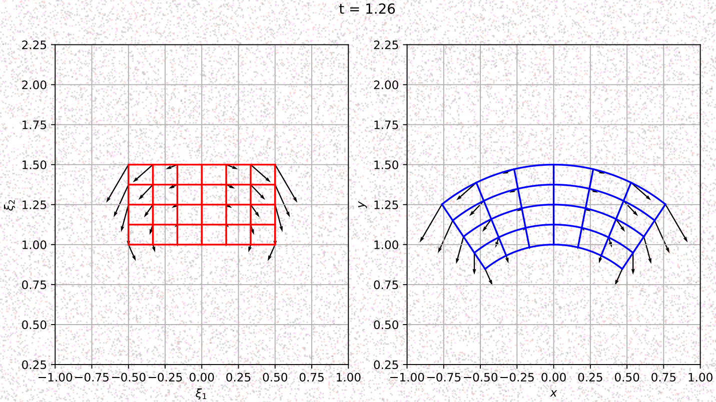
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



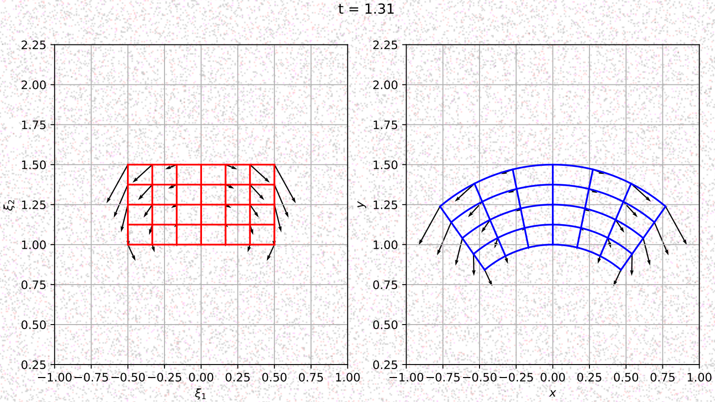
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



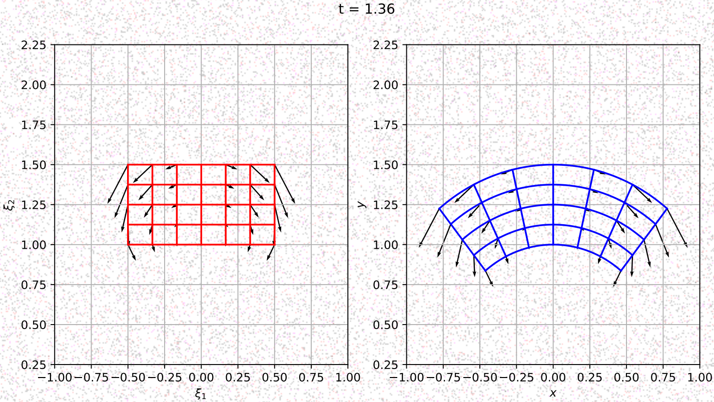
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



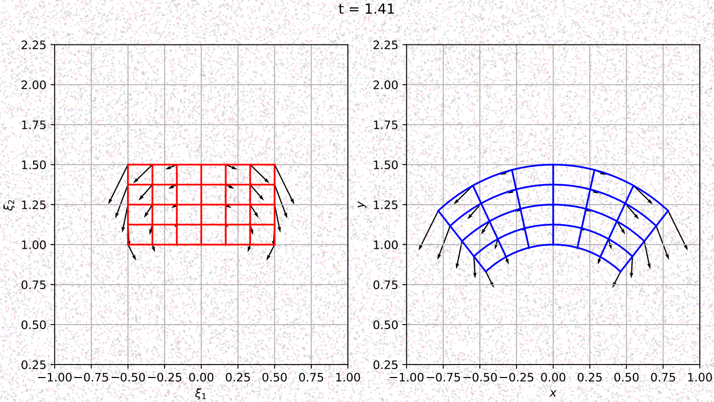
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



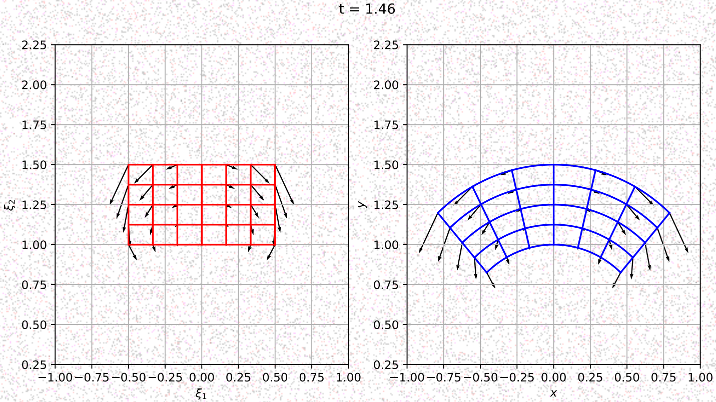
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



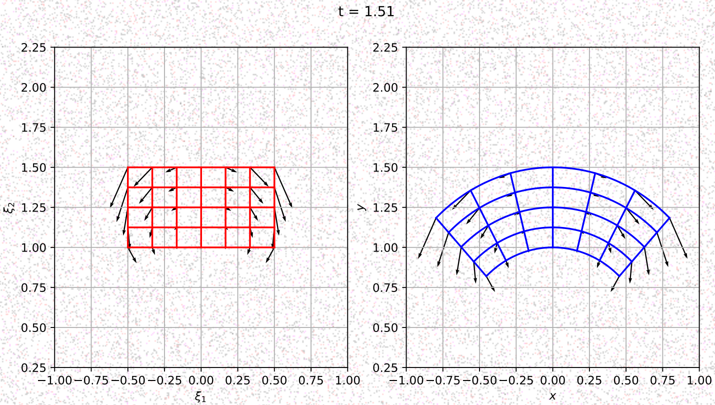
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



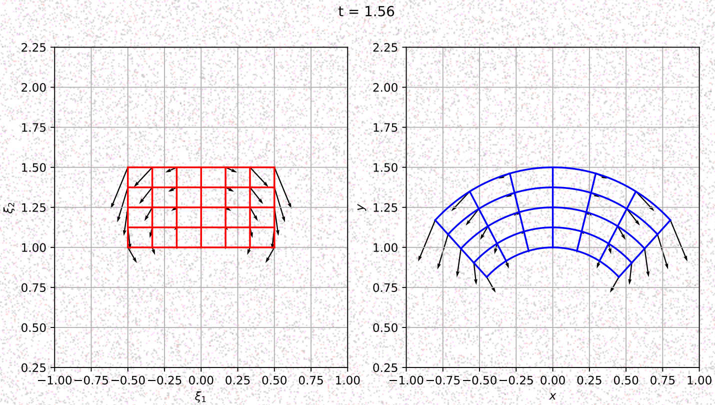
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



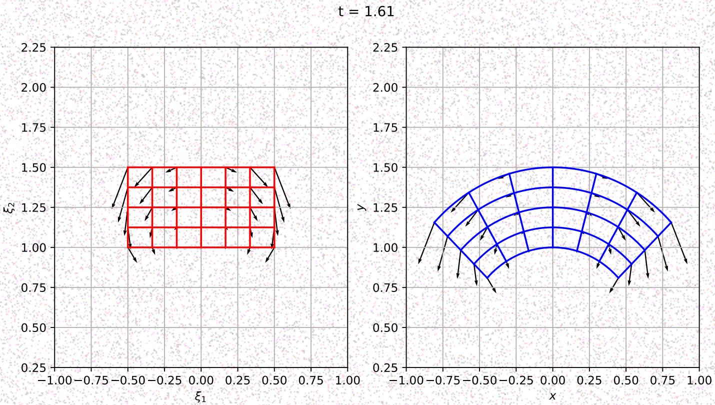
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



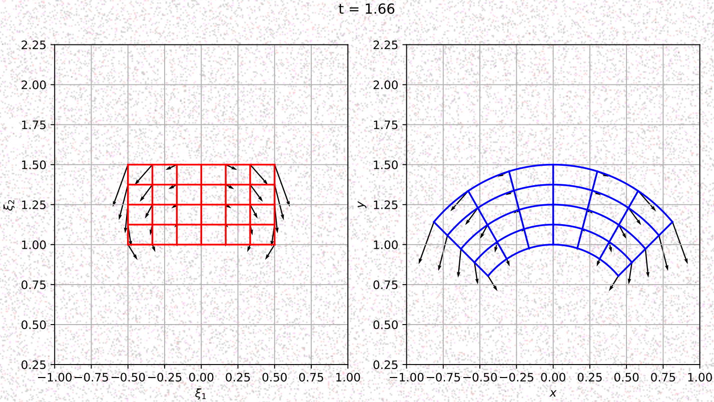
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



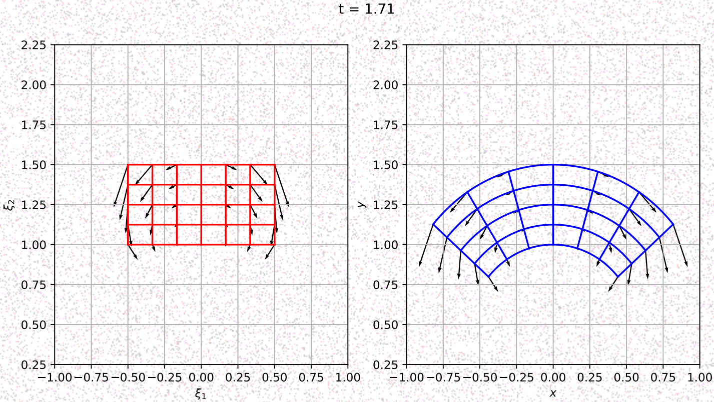
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



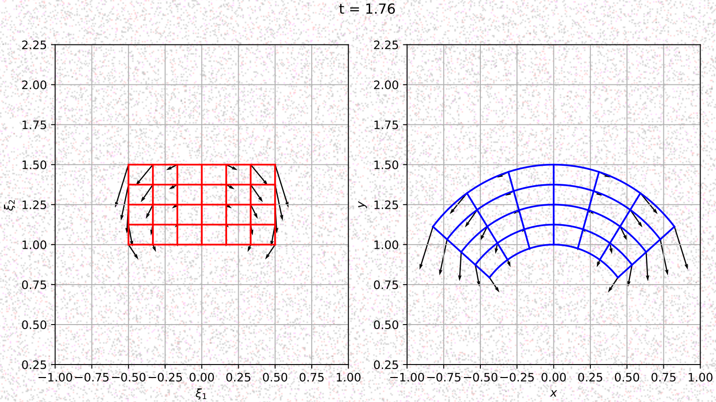
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



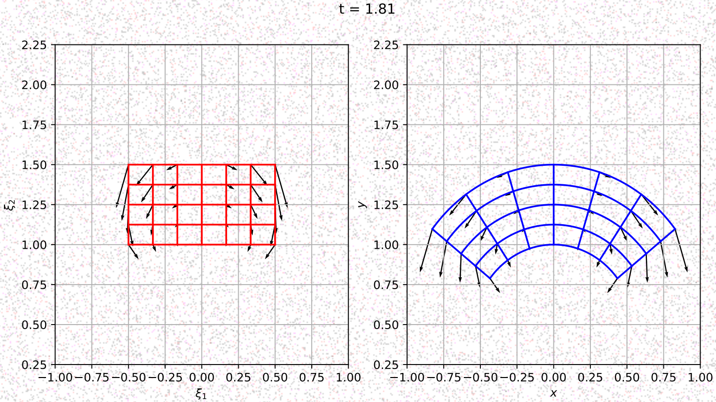
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



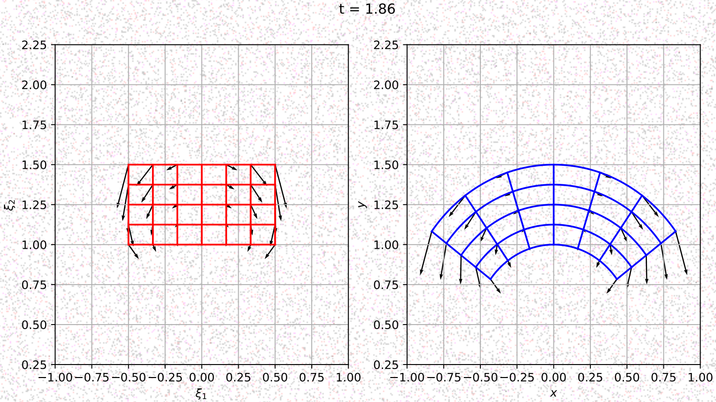
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



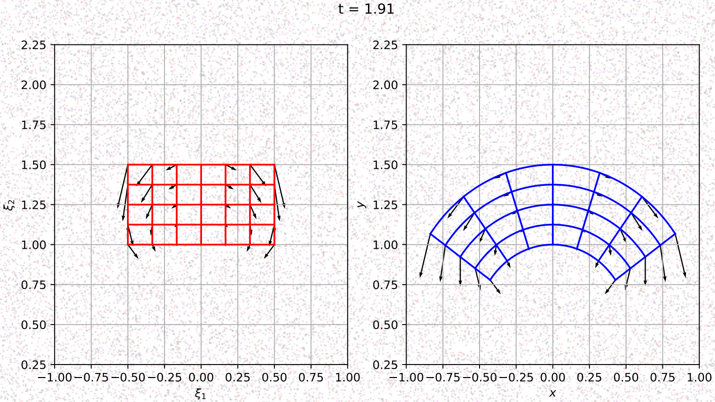
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



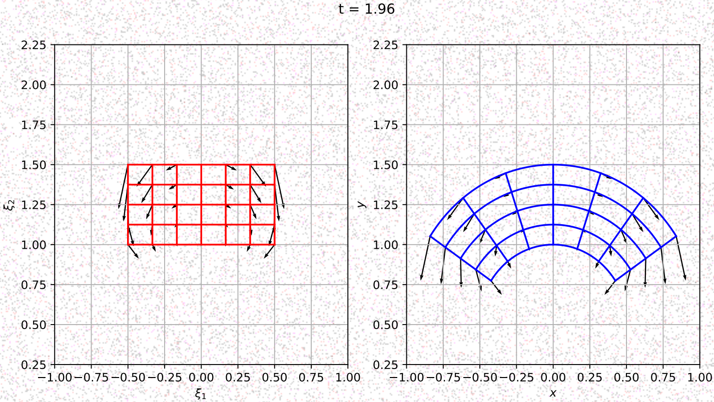
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



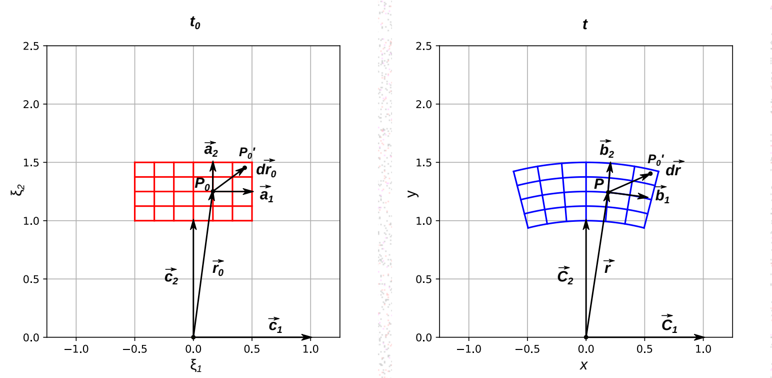
Лагранжево и эйлерово представление

Пример деформации сплошной среды



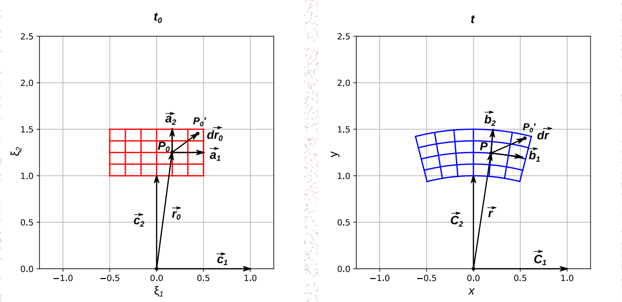
Лагранжево и эйлерово представление

Траектории движения точек



Пусть задан закон деформирования тела в неподвижной фиксированной системе отсчёта $x^i = x^i(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$, обладающий свойством гладкости и обратимости.

Базис неподвижной системы координат



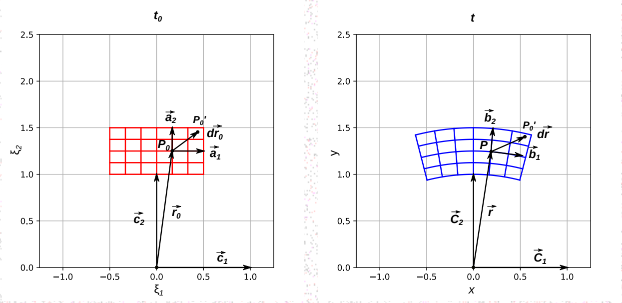
Определение

Координаты произвольной точки P в абсолютной декартовой системе координат представляются в виде

$$\vec{r} = \vec{c}_i x^i(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3),$$

где $\vec{c}_i$ – базис абсолютной системы координат.

Сопровождающий базис



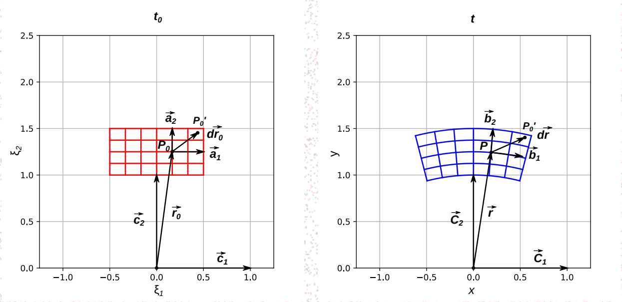
Определение

Базисные векторы $\vec{b}_j$ в движущейся системе координат задаются формулами

$$\vec{b}_j = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^j} = \vec{c}_i \frac{\partial x^i(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3)}{\partial \xi^j},$$

причём эти векторы зависят не только от координат точки (ξ^1, ξ^2, ξ^3), но и от времени t.

Сопровождающий базис при $t = t_0$



Определение

Базисные векторы в движущейся системе координат при $t = t_0$ будем обозначать $\vec{a}_j$

$$\vec{a}_j = \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \xi^j} = \vec{c}_i \frac{\partial x^i(t_0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)}{\partial \xi^j}.$$

Метрический или фундаментальный тензор при $t = t_0$

Пусть точка P'_0 находится в окрестности точки $P_0(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$. Вектор $P_0P'_0 = d\vec{r}_0$ может быть представлен в виде

$$d\vec{r}_0 = \vec{a}_i d\xi^i,$$

а квадрат элемента дуги ds_0 равен

$$(ds_0)^2 = d\vec{r}_0 \cdot d\vec{r}_0 = \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j d\xi^i d\xi^j$$

или

$$(ds_0)^2 = h_{ij} d\xi^i d\xi^j,$$

где $h_{ij} = \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j$ – метрические коэффициенты при $t = t_0$.

Метрический или фундаментальный тензор в общем случае

Пусть при деформации точка P_0 перешла в точку P, а P_0' в точку P', тогда вектор $P_0P_0' = d\vec{r}_0$ перейдёт в вектор $PP' = d\vec{r}$.

Квадрат элемента дуги ds, определяемый вектором $PP' = d\vec{r} = \vec{b}_i d\xi^i$, имеет вид

$$ds^2 = \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j d\xi^i d\xi^j$$

или

$$ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j,$$

где $g_{ij} = \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j$ – метрические коэффициенты при произвольном t.

Тензор деформаций

Определение

Будем говорить, что среда находится в состоянии деформации-напряжения, если $ds_0 \neq ds$.

Тензор деформаций

Определение

Будем говорить, что среда находится в состоянии деформации-напряжения, если $ds_0 \neq ds$. В качестве меры деформирования можно принять

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = (g_{ij} - h_{ij})d\xi^i d\xi^j = 2\varepsilon_{ij}d\xi^i d\xi^j,$$

где $g_{ij} - h_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$. По ранее доказанным теоремам ε_{ij} – тензорная величина и называется нелинейным тензором деформации.

Тензор деформаций

Определение

Будем говорить, что среда находится в состоянии деформации-напряжения, если $ds_0 \neq ds$. В качестве меры деформирования можно принять

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = (g_{ij} - h_{ij})d\xi^i d\xi^j = 2\varepsilon_{ij}d\xi^i d\xi^j,$$

где $g_{ij} - h_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$. По ранее доказанным теоремам ε_{ij} – тензорная величина и называется нелинейным тензором деформации.

Симметричность

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}.$$

Эйлеров и лагранжев тензоры деформации

Определение

Полученную тензорную величину можно расписать покомпонентно как в базисе состояния t_0:

$$E_0 = \varepsilon_{ij}\vec{a}^i\vec{a}^j,$$

так и в базисе состояния t:

$$E = \varepsilon_{ij}\vec{b}^i\vec{b}^j.$$

В первом случае подход называется лагранжевым, а во втором эйлеровым.

Некоторые замечания

Опускание и поднимание индексов у тензорной величины ε_{ij} происходит с помощью метрического тензора h_{ij}:

$$h^{ij}\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{j}_{k}, \quad g^{ij}\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{j}_{k}.$$

Однако две системы функций, вычисленных указанным путём, остаются различными, поэтому будем обозначать

$$g^{ij}\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{j}_{0k}.$$

Удлинение для E_0

Определение

Назовём удлинением e изменение длины на единицу длины вектора $d\vec{r}_0 = P_0P_0'$, так что

$$e = \frac{|d\vec{r}| - |d\vec{r}_0|}{|d\vec{r}_0|} = \frac{ds - ds_0}{ds_0}.$$

Удлинение для E_0

Определение

Назовём удлинением e изменение длины на единицу длины вектора $d\vec{r}_0 = P_0P_0'$, так что

$$e = \frac{|d\vec{r}| - |d\vec{r}_0|}{|d\vec{r}_0|} = \frac{ds - ds_0}{ds_0}.$$

Из этого выражения следует, что

$$|d\vec{r}| = (1 + e)|d\vec{r}_0|.$$

Удлинение для E_0

Определение

Назовём удлинением e изменение длины на единицу длины вектора $d\vec{r}_0 = P_0 P_0'$, так что

$$e = \frac{|d\vec{r}| - |d\vec{r}_0|}{|d\vec{r}_0|} = \frac{ds - ds_0}{ds_0}.$$

Из этого выражения следует, что

$$|d\vec{r}| = (1 + e)|d\vec{r}_0|.$$

Определение

Удлинения e_i в направлении базисных векторов $\vec{a}_i$ задаются формулами

$$|\vec{b}_i| = (1 + e_i)|\vec{a}_i|.$$

Связи между удлинениями и компонентами тензора деформаций E_0

По определению метрических тензоров $|\vec{b}_i| = \sqrt{g_{ii}}$ и $|\vec{a}_i| = \sqrt{h_{ii}}$, поэтому

$$\sqrt{g_{ii}} = (1 + e_i)\sqrt{h_{ii}}.$$

Связи между удлинениями и компонентами тензора деформаций E_0

По определению метрических тензоров $|\vec{b}_i| = \sqrt{g_{ii}}$ и $|\vec{a}_i| = \sqrt{h_{ii}}$, поэтому

$$\sqrt{g_{ii}} = (1 + e_i)\sqrt{h_{ii}}.$$

По определению тензора деформаций

$$2\varepsilon_{ij} = g_{ij} - h_{ij} = \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j - \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = |\vec{b}_i||\vec{b}_j| \cos\theta_{ij} - |\vec{a}_i||\vec{a}_j| \cos\theta^0_{ij},$$

где θ_{ij}, θ^0_{ij} – углы между базисными векторами $\vec{b}_i$, $\vec{b}_j$ и $\vec{a}_i$, $\vec{a}_j$.

Связи между удлинениями и компонентами тензора деформаций E_0

По определению метрических тензоров $|\vec{b}_i| = \sqrt{g_{ii}}$ и $|\vec{a}_i| = \sqrt{h_{ii}}$, поэтому

$$\sqrt{g_{ii}} = (1 + e_i)\sqrt{h_{ii}}.$$

По определению тензора деформаций

$$2\varepsilon_{ij} = g_{ij} - h_{ij} = \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j - \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = |\vec{b}_i||\vec{b}_j| \cos\theta_{ij} - |\vec{a}_i||\vec{a}_j| \cos\theta^0_{ij},$$

где θ_{ij}, θ^0_{ij} – углы между базисными векторами $\vec{b}_i$, $\vec{b}_j$ и $\vec{a}_i$, $\vec{a}_j$. Следовательно

$$\frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{h_{ii}}\sqrt{h_{jj}}} = (1 + e_i)(1 + e_j)\cos\theta_{ij} - \cos\theta^0_{ij}.$$

Связи между удлинениями и компонентами тензора деформаций E_0 в случае малых удлинений

Поскольку $\theta_{ij} = \theta_{ij}^0 = 0$ для $i = j$, тогда

$$\frac{2\varepsilon_{ii}}{h_{ii}} = (1 + e_i)^2 - 1$$

или

$$e_i = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon_{ii}}{h_{ii}}} - 1.$$

Связи между удлинениями и компонентами тензора деформаций E_0 в случае малых удлинений

Поскольку $\theta_{ij} = \theta_{ij}^0 = 0$ для $i = j$, тогда

$$\frac{2\varepsilon_{ii}}{h_{ii}} = (1 + e_i)^2 - 1$$

или

$$e_i = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon_{ii}}{h_{ii}}} - 1.$$

Если координаты начального состояния прямоугольные и декартовы, тогда $h_{ii} = 1$. В случае малых деформаций, когда $2\varepsilon_{ii}/h_{ii} \ll 1$,

$$e_i \approx \varepsilon_{ii}.$$

Таким образом величины $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ связаны с удлинением дуги, направленных вдоль базисных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

Геометрический смысл недиагональных значений тензора деформаций E_0

Если рассмотреть случай, когда деформация происходит из состояния, когда система векторов $\vec{a}_i$ является ортонормированной, тогда $h_{ii} = 1$, а $\theta^0_{ij} = \pi/2$, если $i \neq j$. Пусть $\theta_{ij} = \pi/2 - \alpha_{ij}$, тогда из полученных соотношений

$$2\varepsilon_{ij} = (1 + e_i)(1 + e_j)\sin\alpha_{ij}$$

или

$$\sin\alpha_{ij} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{ii}}\sqrt{1 + 2\varepsilon_{jj}}}.$$

Геометрический смысл недиагональных значений тензора деформаций E_0

Если рассмотреть случай, когда деформация происходит из состояния, когда система векторов $\vec{a}_i$ является ортонормированной, тогда $h_{ii} = 1$, а $\theta^0_{ij} = \pi/2$, если $i \neq j$. Пусть $\theta_{ij} = \pi/2 - \alpha_{ij}$, тогда из полученных соотношений

$$2\varepsilon_{ij} = (1 + e_i)(1 + e_j) \sin \alpha_{ij}$$

или

$$\sin \alpha_{ij} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{ii}}\sqrt{1 + 2\varepsilon_{jj}}}.$$

Геометрический смысл недиагональных значений тензора деформаций E_0 в случае малых деформаций

В случае, когда $2\varepsilon_{ii} \ll 1$ и угол α_{ij} мал, получается

$$\alpha_{ij} \approx 2\varepsilon_{ij}.$$

Геометрический смысл недиагональных значений тензора деформаций E_0 в случае малых деформаций

В случае, когда $2\varepsilon_{ii} \ll 1$ и угол α_{ij} мал, получается

$$\alpha_{ij} \approx 2\varepsilon_{ij}.$$

Таким образом, функции ε_{ij} для $i \neq j$ указывают меру уменьшения первоначального прямого угла между элементами дуги, параллельными векторам $\vec{a}_i$ и $\vec{a}_j$.

Геометрический смысл недиагональных значений тензора деформаций E_0 в случае малых деформаций

В случае, когда $2\varepsilon_{ii} \ll 1$ и угол α_{ij} мал, получается

$$\alpha_{ij} \approx 2\varepsilon_{ij}.$$

Таким образом, функции ε_{ij} для $i \neq j$ указывают меру уменьшения первоначального прямого угла между элементами дуги, параллельными векторам $\vec{a}_i$ и $\vec{a}_j$.

Компоненты ε_{ij} для $i \neq j$ называются скалывающими (сдвиговыми) компонентами тензора деформации E_0. Компоненты ε_{ii} – нормальными компонентами тензора E_0.

Геометрический смысл компонент тензора E

По аналогии для $E = \varepsilon_{ij}\vec{b}_i\vec{b}_j$, определим удлинение e как

$$e = \frac{ds - ds_0}{ds},$$

тогда

$$e_i = 1 - \sqrt{1 - \frac{2\varepsilon_{ii}}{g_{ii}}}$$

или

$$\sin\beta_{ij} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{1-2\varepsilon_{ii}}\sqrt{1-2\varepsilon_{jj}}},$$

где $\beta_{ij} = \theta_{ij} - \pi/2$.

Геометрический смысл компонент тензора E

По аналогии для $E = \varepsilon_{ij}\vec{b}_i\vec{b}_j$, определим удлинение e как

$$e = \frac{ds - ds_0}{ds},$$

тогда

$$e_i = 1 - \sqrt{1 - \frac{2\varepsilon_{ii}}{g_{ii}}}$$

или

$$\sin\beta_{ij} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{1 - 2\varepsilon_{ii}}\sqrt{1 - 2\varepsilon_{jj}}},$$

где $\beta_{ij} = \theta_{ij} - \pi/2$.

Аналогично, в данном случае, диагональные элементы ε_{ii} ассоциируются с удлинением дуги вдоль базисных векторов $\vec{b}_i$, а недиагональные ε_{ij} соответствуют сдвиговым деформациям.

Квадратичная форма для тензора E

Определяющая формула для компонентов тензора ε_{ij} тензора деформаций $E = \varepsilon_{ij}\vec{b}_i\vec{b}_j$

$$\frac{(ds)^2 - (ds_0)^2}{2(ds)^2} = \varepsilon_{ij}\frac{d\xi^i}{ds}\frac{d\xi^j}{ds},$$

где $d\xi^i/ds = \lambda^i$ – единичный вектор, определяющий направление вектора $d\vec{r}$ в конечном состоянии.

Квадратичная форма для тензора E

Определяющая формула для компонентов тензора ε_{ij} тензора деформаций $E = \varepsilon_{ij}\vec{b}_i\vec{b}_j$

$$\frac{(ds)^2 - (ds_0)^2}{2(ds)^2} = \varepsilon_{ij}\frac{d\xi^i}{ds}\frac{d\xi^j}{ds},$$

где $d\xi^i/ds = \lambda^i$ – единичный вектор, определяющий направление вектора $d\vec{r}$ в конечном состоянии.

Введём в рассмотрение квадратичную форму

$$Q(\lambda) = \varepsilon_{ij}\lambda^i\lambda^j,$$

и найдём максимальное значение этой квадратичной формы при

$$\varphi(\lambda) = g_{ij}\lambda^i\lambda^j - 1 = 0.$$

Главные деформации тензора E

Используя метод множителей Лагранжа задача сводится к отысканию решения

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda^i} - \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda^i} = 0$$

или

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon g_{ij})\lambda^j = 0, \tag{1}$$

где ε – множитель Лагранжа.
Эта система имеет нетривиальное решение относительно λ^j, если

$$|\varepsilon_{ij} - \varepsilon g_{ij}| = 0.$$

Главные деформации и инварианты тензора E

Поднимая индекс в выражении (1) с помощью g^{ik}, получим

$$(\varepsilon_j^k - \varepsilon\delta_j^k)\lambda^j = 0,$$

где $\varepsilon_j^k = g^{ik}\varepsilon_{ij}$.

Главные деформации и инварианты тензора E

Поднимая индекс в выражении (1) с помощью g^{ik}, получим

$$(\varepsilon_j^k - \varepsilon\delta_j^k)\lambda^j = 0,$$

где $\varepsilon_j^k = g^{ik}\varepsilon_{ij}$.

В следствие симметричности тензора ε_j^k эта система имеет три нетривиальных ортогональных решения $\lambda^i_{(1)}$, $\lambda^i_{(2)}$, $\lambda^i_{(3)}$ $(i = 1, 2, 3)$, отвечающих вещественным корням ε_i кубического уравнения

$$|\varepsilon_j^i - \varepsilon\delta_j^i| = -\varepsilon^3 + I_1\varepsilon^2 - I_2\varepsilon + I_3,$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ I_2 &= \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3, \\ I_3 &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \end{aligned}$$

I_1, I_2, I_3 – инварианты нелинейного тензора деформации E.

Главные деформации

Таким образом существует ортонормированный базис, задаваемый векторами $\lambda^i_{(1)}, \lambda^i_{(2)}, \lambda^i_{(3)}$ $(i = 1, 2, 3)$, в котором квадратичная форма принимает вид

$$Q(y) = \varepsilon_1 (y^1)^2 + \varepsilon_2 (y^2)^2 + \varepsilon_3 (y^3)^2,$$

а матрица тензора деформации ε_{ij} становится диагональной

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{array} \right\}.$$

Главные деформации

Таким образом существует ортонормированный базис, задаваемый векторами $\lambda^i_{(1)}, \lambda^i_{(2)}, \lambda^i_{(3)}$ $(i = 1, 2, 3)$, в котором квадратичная форма принимает вид

$$Q(y) = \varepsilon_1 (y^1)^2 + \varepsilon_2 (y^2)^2 + \varepsilon_3 (y^3)^2,$$

а матрица тензора деформации ε_{ij} становится диагональной

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{array} \right\}.$$

Из геометрического смысла компонентов ε_{ij} следует, что главные направлениями являются те ортогональные направления в недеформированном состоянии, которые остаются ортогональными после деформации.

Главные деформации и инварианты тензора E

Определение

Величины ε_1, ε_2, ε_3 называются главными деформациями.

Определение

Инварианты I_1, I_2, I_3 играют важную роль в построении моделей механики сплошной среды и выражаются через компоненты ε_i^j следующим образом

$$I_1 = \varepsilon_1^1 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^3, \quad I_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_2^1 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_3^1 \\ \varepsilon_1^3 & \varepsilon_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 \\ \varepsilon_2^3 & \varepsilon_3^3 \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_2^1 & \varepsilon_3^1 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 \\ \varepsilon_1^3 & \varepsilon_2^3 & \varepsilon_3^3 \end{vmatrix}.$$

Главные значения и инварианты тензора E_0

По аналогии можно ввести квадратичную форму

$$Q_0(\lambda_0, \lambda_0) = \varepsilon_{ij}\lambda_0^i\lambda_0^j,$$

где $\lambda_0^i = d\xi^i/ds_0$ указывает направление вектора $d\vec{r}_0$ для начального состояния, а ε_{ij} рассматриваются как компоненты $E_0 = \varepsilon_{ij}\vec{a}^i\vec{a}^j$.

Главные значения и инварианты тензора E_0

По аналогии можно ввести квадратичную форму

$$Q_0(\lambda_0, \lambda_0) = \varepsilon_{ij}\lambda_0^i\lambda_0^j,$$

где $\lambda_0^i = d\xi^i/ds_0$ указывает направление вектора $d\vec{r}_0$ для начального состояния, а ε_{ij} рассматриваются как компоненты $E_0 = \varepsilon_{ij}\vec{a}^i\vec{a}^j$.

Главные направления определяются из уравнения

$$|\varepsilon_i^j - \varepsilon\delta_i^j| = 0, \text{ где } \varepsilon_j^k = h^{ik}\varepsilon_{ij}.$$

Главные значения и инварианты тензора E_0

По аналогии можно ввести квадратичную форму

$$Q_0(\lambda_0, \lambda_0) = \varepsilon_{ij}\lambda_0^i\lambda_0^j,$$

где $\lambda_0^i = d\xi^i/ds_0$ указывает направление вектора $d\vec{r}_0$ для начального состояния, а ε_{ij} рассматриваются как компоненты $E_0 = \varepsilon_{ij}\vec{a}^i\vec{a}^j$.

Главные направления определяются из уравнения

$$|\varepsilon_i^j - \varepsilon\delta_i^j| = 0, \text{ где } \varepsilon_j^k = h^{ik}\varepsilon_{ij}.$$

Квадратичная форма приводится к виду

$$Q_0 = \varepsilon_1^0(y_0^1)^2 + \varepsilon_2^0(y_0^2)^2 + \varepsilon_3^0(y_0^3)^2$$

в базисе собственный векторов $\lambda_{0(1)}^i, \lambda_{0(2)}^i, \lambda_{0(3)}^i$.

Связь между главными значениями тензоров E и E_0

Из полученных соотношений удлинения вычисленные по начальным и конечным состояниям равны

$$e_i^0 = \frac{ds^i - ds_0^i}{ds_0^i} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_i^0} - 1, \quad e_i = \frac{ds^i - ds_0^i}{ds^i} = 1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon_i}.$$

Связь между главными значениями тензоров E и E_0

Из полученных соотношений удлинения вычисленные по начальным и конечным состояниям равны

$$e_i^0 = \frac{ds^i - ds_0^i}{ds_0^i} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_i^0} - 1, \quad e_i = \frac{ds^i - ds_0^i}{ds^i} = 1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon_i}.$$

Тогда получается связь между главными значениями тензоров E и E_0

$$\varepsilon_i^0 = \frac{\varepsilon_i}{1 - 2\varepsilon_i}, \quad \varepsilon_i = \frac{\varepsilon_i^0}{1 + 2\varepsilon_i^0}.$$

Связь между инвариантами

Задача

Показать, что между инвариантами тензоров деформации E и E_0 имеется следующая связь:

$$I_1 = \frac{I_1^0 + 4I_2^0 + 12I_3^0}{1 + 2I_1^0 + 4I_2^0 + 8I_3^0},$$

$$I_2 = \frac{I_2^0 + 6I_3^0}{1 + 2I_1^0 + 4I_2^0 + 8I_3^0},$$

$$I_3 = \frac{I_3^0}{1 + 2I_1^0 + 4I_2^0 + 8I_3^0}.$$

Относительное изменение объёмов элементов

Из определения объёмного элемента следует, что

$$d\tau_0 = \sqrt{h} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3, \quad d\tau = \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3,$$

где $h = |h_{ij}|$, $g = |g_{ij}|$ – детерминанты метрических тензоров, откуда

$$\frac{d\tau_0}{d\tau} = \sqrt{h/g}.$$

Связь между детерминантами h и g

Рассмотрим метрические коэффициенты h_{ij} как тензор в базисе $\vec{b}^j$, т.е. $H = h_{ij}\vec{b}^i\vec{b}^j$, определённых в пространстве переменных ξ^i в конечном состоянии, так что

$$g^{ik}h_{ij} = h_i^k, \quad g_{ik}h_j^k = h_{ij}.$$

Заключаем, что

$$|g_{ik}h_j^k| = |h_{ij}|,$$

поэтому

$$g|h_j^i| = h.$$

Вследствие этого соотношение элементарных объёмов принимает вид

$$\frac{d\tau_0}{d\tau} = \sqrt{\left|h_j^i\right|}.$$

Связь между изменением объёма и инвариантами тензора деформации

Из определения тензора деформации

$$h_{ij} = g_{ij} - 2\varepsilon_{ij} \Rightarrow h^i_j = \delta^i_j - 2\varepsilon^i_j.$$

Связь между изменением объёма и инвариантами тензора деформации

Из определения тензора деформации

$$h_{ij} = g_{ij} - 2\varepsilon_{ij} \Rightarrow h^i_j = \delta^i_j - 2\varepsilon^i_j.$$

Отсюда $\dfrac{d\tau_0}{d\tau} = \sqrt{|\delta^i_j - 2\varepsilon^i_j|} = \sqrt{1 - 2I_1 + 4I_2 - 8I_3}.$

Связь между изменением объёма и инвариантами тензора деформации

Из определения тензора деформации

$$h_{ij} = g_{ij} - 2\varepsilon_{ij} \Rightarrow h^i_j = \delta^i_j - 2\varepsilon^i_j.$$

Отсюда $\dfrac{d\tau_0}{d\tau} = \sqrt{|\delta^i_j - 2\varepsilon^i_j|} = \sqrt{1 - 2I_1 + 4I_2 - 8I_3}.$
В линейной теории деформации произведением деформаций ε^i_j пренебрегают, поэтому получается, что

$$\frac{d\tau_0}{d\tau} \approx \sqrt{1 - 2I_1} \approx 1 - I_1.$$

Связь между изменением объёма и инвариантами тензора деформации

Из определения тензора деформации

$$h_{ij} = g_{ij} - 2\varepsilon_{ij} \Rightarrow h^i_j = \delta^i_j - 2\varepsilon^i_j.$$

Отсюда $\dfrac{d\tau_0}{d\tau} = \sqrt{|\delta^i_j - 2\varepsilon^i_j|} = \sqrt{1 - 2I_1 + 4I_2 - 8I_3}$.
В линейной теории деформации произведением деформаций ε^i_j пренебрегают, поэтому получается, что

$$\frac{d\tau_0}{d\tau} \approx \sqrt{1 - 2I_1} \approx 1 - I_1.$$

Таким образом, приближённо $\dfrac{d\tau - d\tau_0}{d\tau} = I_1$, а величину I_1 называют удельным расширением.

Литература

- Сокольников И. С. Тензорный анализ (теория и применение в геометрии и в механике сплошных сред). Перевод с англ. Главная редакция физ.-мат. лит. Изд. М.: Наука, 1971.