Законы сохранения в механике сплошной среды

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики ФФ НГУ

17 октября 2018 г.

Аннотация

Траектрория движения сплошной среды. Формула Эйлера. Законы сохранения параметров сплошной среды в интегральной и дифференциальной форме.

Траектории движения точек и теорема об определителе

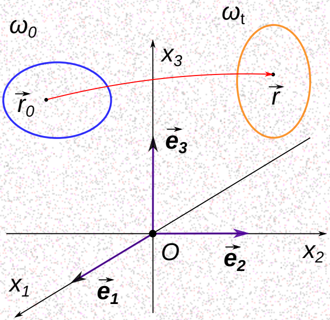


Иллюстрация перемещения сплошной среды

ω_0, ω_t – положение части сплошной среды в начальный момент времени и момент t.

$$\vec{r}_0 = \xi^1\vec{e}_1 + \xi^2\vec{e}_2 + \xi^3\vec{e}_3,$$

$$\vec{r} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3.$$

Траектории движения

Траектории движения жидких частиц задаются функцией

$$\vec{x} = \vec{x}(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3),$$

где $\vec{\xi}, \vec{x}$ – лагранжевы и эйлеровы координаты частицы.

Определение траекторий по заданному полю движения

Поле скоростей

Поле скоростей частиц сплошной среды в эйлеровой систем координат задаётся функцией $\vec{v}(t,x^1,x^2,x^3)$. В лагранжевой системе координат скорость определяется соотношением

$$\vec{v}(t,\vec{\xi}) = \frac{\partial \vec{x}(t,\vec{\xi})}{\partial t}.$$

Задача определения траекторий движения по заданному полю скоростей

По заданному полю скоростей $\vec{v}(t,\vec{x})$ требуется найти траектории движения частиц $x^i = x^i(t,\vec{\xi})$ с лагранжевыми координатами $(\vec{\xi})$:

$$\frac{\partial x^i}{\partial t} = v^i(t,\vec{x}), \quad x^i|_{t=0} = \xi^i \quad (i = 1,2,3).$$

Уравнения для нахождения матрицы Якоби

Матричное уравнение на матрицу Якоби

Дифференцируя уравнения для нахождения траекторий по ξ^j получим

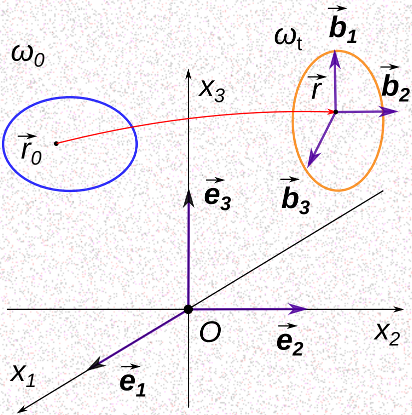
$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^j}, \qquad \left.\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right|_{t=0} = \delta^i_j.$$

Тогда матрица Якоби $y_{ij} = \dfrac{\partial x^i}{\partial \xi^j}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = AY, \qquad Y|_{t=0} = E,$$

где A – матрица, составленная из производных $\dfrac{\partial v^i}{\partial x^j}$, E – единичная матрица.

Геометрический смысл определителя



Сопутствующий базис

$$\vec{b}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \xi^i}\vec{e}_j.$$

Элементарный объем

$$\Delta(t,\vec{\xi}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \xi^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{b}_1 \cdot (\vec{b}_2 \times \vec{b}_3).$$

Дифференцирование определителя матрицы Якоби

Обозначим $\Delta(t,\vec{\xi}) = \det Y(t,\vec{\xi})$, тогда из определения определителя, как суммы произведений его элементов и правила дифференцирования произведения, имеем

$$\Delta'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y'_{11} & y'_{12} & y'_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y'_{21} & y'_{22} & y'_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y'_{31} & y'_{32} & y'_{33} \end{vmatrix}.$$

Дифференцирование определителя матрицы Якоби

Из матричного уравнения $\dfrac{dY}{dt} = AY$ следует, что

$$y'_{1j} = a_{11}y_{1j} + a_{12}y_{2j} + a_{13}y_{3j},$$

поэтому

$$(y'_{11}, y'_{12}, y'_{13}) = a_{11}(y_{11}, y_{12}, y_{13}) + a_{12}(y_{21}, y_{22}, y_{23}) + a_{13}(y_{31}, y_{32}, y_{33}).$$

Отсюда, вычитая из первой строки с производными линейную комбинацию остальных строк, получаем

$$\begin{vmatrix} y'_{11} & y'_{12} & y'_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}y_{11} & a_{11}y_{12} & a_{11}y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\Delta(t).$$

Дифференцирование определителя матрицы Якоби

По аналогии можно получить, что

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y'_{21} & y'_{22} & y'_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} = a_{22}\Delta(t), \qquad \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y'_{31} & y'_{32} & y'_{33} \end{vmatrix} = a_{33}\Delta(t).$$

Таким образом,

$$\Delta'(t) = (a_{11} + a_{22} + a_{33})\Delta(t) = \operatorname{tr} A\, \Delta(t).$$

Правило дифференцирования определителя матрицы Якоби или формула Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right| = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right|\left(\frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^3}{\partial x^3}\right) = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right| \operatorname{div} \vec{v}.$$

Закон дифференцирования интеграла, зависящего от времени

Упрощения

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_t} F(t,\vec{x})d\vec{x} = \frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_0} F(t,\vec{\xi})\Delta(t,\vec{\xi})d\vec{\xi} = \int\limits_{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t}(F(t,\vec{\xi})\Delta(t,\vec{\xi}))d\vec{\xi} =$$

$$= \int\limits_{\omega_0} \left(\frac{\partial F(t,\vec{\xi})}{\partial t}\Delta(t,\vec{\xi}) + F(t,\vec{\xi})\frac{\partial \Delta(t,\vec{\xi})}{\partial t} \right) d\vec{\xi} =$$

$$= \int\limits_{\omega_0} \left(\frac{\partial F(t,\vec{\xi})}{\partial t} + F(t,\vec{\xi})\,\mathrm{div}_{\xi}\,\vec{v}(t,\vec{\xi}) \right) \Delta(t,\vec{\xi})d\vec{\xi} =$$

$$= \int\limits_{\omega_t} \left(\frac{\partial F(t,\vec{x})}{\partial t} + \frac{\partial F(t,\vec{x})}{\partial x^i}v^i(t,\vec{x}) + F(t,\vec{x})\,\mathrm{div}_x\,\vec{v}(t,\vec{x}) \right) d\vec{x}.$$

Закон дифференцирования интеграла, зависящего от времени

Окончательный вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_t} F(t,\vec{x})d\vec{x} = \int\limits_{\omega_t}\left(\frac{dF(t,\vec{x})}{dt} + F(t,\vec{x})\operatorname{div}_x \vec{v}(t,\vec{x})\right)d\vec{x},$$

где d/dt – оператор полного дифференцирования в правой части равенства задаётся формулой

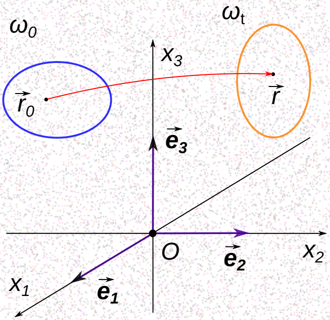
$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla).$$

Упрощения

Легко показать, что для $F = F(t,\vec{x})$, $\vec{v} = \vec{v}(t,\vec{x})$

$$\frac{dF}{dt} + F\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div}(F\vec{v}).$$

Закон сохранения массы сплошной среды



Интегральный вид ЗСМ

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_t} \rho(t,\vec{x})d\vec{x} = 0,$$

где $\rho(t,\vec{x})$ – плотность жидкой частицы в точке $\vec{r}$ в момент времени t.

Дифференциальная форма

В силу произвольности ω_t и формулы дифференцирования

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0.$$

Закон сохранения импульса сплошной среды

Интегральная форма

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_t} \rho\vec{v}\,d\vec{x} = -\int\limits_{s_t} \vec{\sigma}_n dS + \int\limits_{\omega_t} \rho\vec{f}\,d\vec{x},$$

где $\rho(t,\vec{x})$, $\vec{v}(t,\vec{x})$ – плотность и скорость материальной точки сплошной среды; $\vec{\sigma}_n(t,\vec{x})$ – напряжение, возникающее на поверхности объема ω_t, обозначенной s_t, на площадке с внешней единичной нормалью $\vec{n}$; $\vec{f}(t,\vec{x})$ – массовая сила, действующая на сплошную среду.

Дифференциальная форма

$$\frac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}\otimes\vec{v} + \sigma) = \rho\vec{f}.$$

Закон сохранения момента импульса сплошной среды

Интегральная форма

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_t} \rho\vec{v}\times\vec{x}\,d\vec{x} = -\int\limits_{s_t} \vec{\sigma}_n\times\vec{x}\,dS + \int\limits_{\omega_t} \rho\vec{f}\times\vec{x}\,d\vec{x},$$

где $\rho(t,\vec{x})$, $\vec{v}(t,\vec{x})$ – плотность и скорость материальной точки сплошной среды; $\vec{\sigma}_n(t,\vec{x})$ – напряжение, возникающее на поверхности объема ω_t, обозначенной s_t, на площадке с внешней единичной нормалью $\vec{n}$; $\vec{f}(t,\vec{x})$ – массовая сила, действующая на сплошную среду.

Следствие

Симметричность тензора напряжений

$$\sigma^* = \sigma.$$

Закон сохранения энергии сплошной среды

Интегральная форма

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_t}\rho\left(\varepsilon+\frac{\vec{v}^2}{2}\right)\,d\vec{x}=-\int\limits_{s_t}(\vec{\sigma}_n\cdot\vec{v})\,dS-\int\limits_{s_t}(\vec{q}\cdot\vec{n})\,dS+\int\limits_{\omega_t}\rho\vec{f}\cdot\vec{v}\,d\vec{x},$$

где $\varepsilon(t,\vec{x})$ – внутренняя энергия единицы массы частицы сплошной среды; $\vec{q}(t,\vec{x})$ – закон перетока тепла в сплошной среде.

Дифференциальная форма

Добавить диф. форму.

Литература

- *Годунов С. К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами: Учебное пособие. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1994. – Т.1.: Краевые задачи.
- *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. Москва-Ижевск:Институт компьютерных исследований, 2003.