# Введение в механику сплошных сред

*Верещагин Антон Сергеевич*
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрофизики и газовой динамики

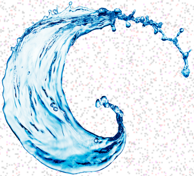
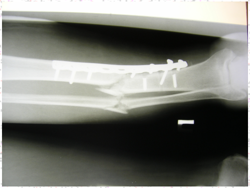
30 декабря 2020 г.

# Аннотация

Предмет механики сплошных сред. Основные гипотезы механики сплошных сред. Понятие материальной точки. Лагранжево и эйлерово описание сплошной среды. Траектория, скорость, ускорение. Стационарное, нестационарное течение. Линии тока поля скорости.

# Предмет механики сплошных сред

Механика сплошных сред изучает движение газообразных, жидких и твердых деформируемых тел.

*Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Том 1. М.:Наука, 1970.

# Разделы механики сплошных сред

1) механика жидкости (гидродинамика, гидростатика);
2) аэрогазодинамика;
3) механика деформируемого твердого тела (теория упругости, пластичности, разрушения);
4) механика плазмы;
5) биомеханика;
6) механика многофазных сред.

# Методы механики сплошных сред

## Дифференциальное исчисление

Уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\vec{v} &= 0, \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\frac{\nabla p}{\rho}. \end{aligned}$$

## Интегральное исчисление

Закон сохранения массы сплошной среды:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\omega_t} \rho d\omega = 0.$$

## Тензорный анализ

Связь между тензором напряжений и тензором скоростей деформации для вязкой несжимаемой жидкости:

$$\sigma = -pI + 2\mu e.$$

# Основные гипотезы: евклидово пространство, время

## Евклидово пространство

1) существует декартова система координат $(Oxyz)$;
2) расстояние между точками $A$ и $B$ задается с мощью евклидовой метрики:

$$r_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

## Абсолютное время

Время течет одинаково во всех системах координат.

*Нигматулин Р.И.* Механика сплошной среды. Кинематика. Динамика. Термодинамика. Статистическая динамика. М.:ГЭОТАР-Медиа, 2014.

# Основные гипотезы: масса

## Абсолютная масса

1) у всех тел существует масса;
2) масса неотрицательна:

$$m \geq 0;$$

3) масса аддитивна:

$$m_{A+B} = m_A + m_B;$$

4) масса инварианта во всех системах координат, т.е. является скаляром.

*Нигматулин Р.И.* Механика сплошной среды. Кинематика. Динамика. Термодинамика. Статистическая динамика. М.:ГЭОТАР-Медиа, 2014.

# Основные гипотезы: принцип равноправия инерциальных систем координат

Постулат Галилея

Формулировки всех физических законов не зависят от выбора инерциальной системы координат.

# Основные гипотезы: принцип сплошности

## Определение

Сплошная среда – модель вещества, в которой распределение массы, сил, импульса, энергии и параметров, характеризующих состояние и движение этого вещества, определяется кусочно-непрерывными и дифференцируемыми функциями, заданными во всех точках рассматриваемого объема и во все моменты исследуемого времени.

## Критерий сплошности

Безразмерное число Кнудсена:

$$\mathrm{Kn} = \frac{\lambda}{d} \ll 1,$$

где $\lambda$ – длина свободного пробега (в случае газа), расстояние между атомами, молекулами (жидкость, твердое вещество);
$d$ – характерный размер исследуемого явления.

# Основные гипотезы: индивидуализация

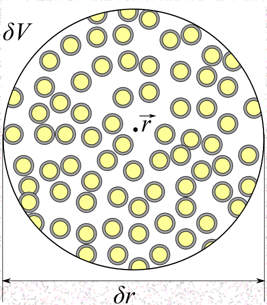
## Приближение, или гипотеза индивидуализации

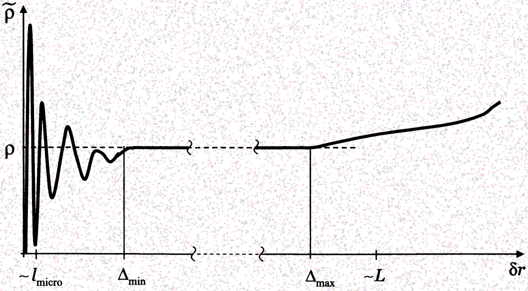
Положение каждой точки, составляющей среду (континуум), можно находить в любой момент времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t),$$

$$\vec{r}_{t=0} = \vec{r}_0.$$

# Основные гипотезы: средние величины




Определение средней (макроскопической) плотности вещества, распределенного дискретно в пространстве

## Определение плотности и условие устойчивости

$$\tilde{\rho} = \frac{\delta m}{\delta V}, \quad l_{micro} \ll \delta r \ll L.$$

# Материальная точка и поля в механике сплошных сред

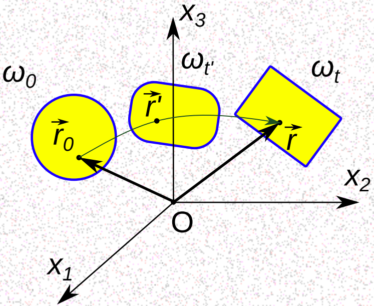
## Определение

Материальной точкой, или жидкой частицей, называется частица среды (вещества) как центра макроскопического объема $\delta V$ с характерным размером порядка $\delta r$, обладающая массой, импульсом, внутренней энергией и др., определяемыми в соответствии с условиями осреднения.

## Условия на поля, определяющие параметры тел

1) *устойчивость* (независимость от $\delta r$);
2) *регулярность* (непрерывность, дифференцируемость за исключением отдельных поверхностей, линий и точек);
3) *представительность* (параметры тела являются интегралом от соответствующих параметров его составляющих жидких частиц).

# Лагранжево описание сплошной среды




Перемещение и деформация сплошной среды при временах $0$, $t'$ и $t$, где $\vec{r}_0 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$

Закон движения, или траектории, материальных точек тела:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3),\\
x_2 &= x_2(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3),\\
x_3 &= x_3(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)
\end{aligned}
$$

или

$$\vec{r} = \vec{r}(t, \vec{r}_0).$$

**Определение**

Координаты материальных точек тела $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ называют лагранжевыми координатами, а такой подход — лагранжевым.

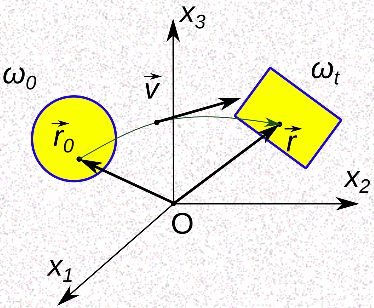
# Принцип сплошности

### Критерий

Принцип сплошности реализуется, если

$$\Delta^{(x,\xi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Принцип сплошности нарушается на ударных волнах, в зонах разрушения, разбрызгивания, при коагуляции капель, столкновении тел, на поверхностных, линейных и точечных источниках и стоках.




Скорость точки вдоль траектории движения

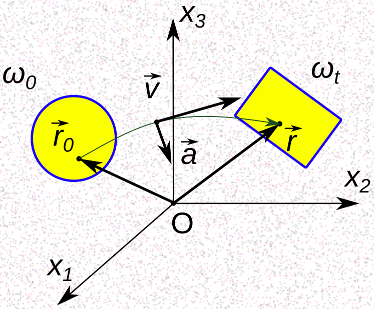
$$\begin{aligned} v_1 &= v_1(t,\xi_1,\xi_2,\xi_3), \\ v_2 &= v_2(t,\xi_1,\xi_2,\xi_3), \\ v_3 &= v_3(t,\xi_1,\xi_2,\xi_3) \end{aligned}$$

или

$$\vec{v} = \vec{v}(t,\vec{r}_0).$$

## Определение

$$\vec{v}(t,\vec{r}_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t,\vec{r}_0) - \vec{r}(t,\vec{r}_0)}{\Delta t} = \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right|_{\vec{r}=\vec{r}_0}$$




Ускорение материальной точки

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1(t,\xi_1,\xi_2,\xi_3), \\ a_2 &= a_2(t,\xi_1,\xi_2,\xi_3), \\ a_3 &= a_3(t,\xi_1,\xi_2,\xi_3) \end{aligned}$$

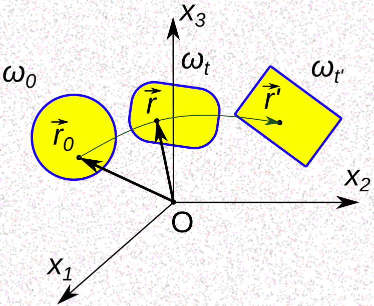
или

$$\vec{a} = \vec{a}(t,\vec{r}_0).$$

## Определение

$$\vec{a}(t,\vec{r}_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t,\vec{r}_0) - \vec{v}(t,\vec{r}_0)}{\Delta t} = \left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right|_{\vec{r}=\vec{r}_0} = \left.\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2}\right|_{\vec{r}=\vec{r}_0}$$

# Эйлерово описание сплошной среды




Перемещение и деформация сплошной среды при временах $0$, $t'$ и $t$, где $\vec{r}_0 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$

Наблюдатель находится в точке $(x_1, x_2, x_3)$ и следит за изменением параметров среды со временем.

## Определение

Координаты материальных точек тела $(x_1, x_2, x_3)$ называют эйлеровыми координатами, а такой подход — эйлеровым.

# Переход от лагранжева представления к эйлерову

Пусть задан параметр среды $f$ в лагранжевых координатах:

$$f = f(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Если задан закон движения среды $\vec{r} = \vec{r}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $\Delta^{(x,\xi)} \neq 0$, тогда существует обратное преобразование:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1(t, x_1, x_2, x_3), \\ \xi_2 &= \xi_2(t, x_1, x_2, x_3), \\ \xi_3 &= \xi_3(t, x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

и

$$f(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = f(t, \xi_1(t, x_1, x_2, x_3), \xi_2(t, x_1, x_2, x_3), \xi_3(t, x_1, x_2, x_3)) =$$

$$= \tilde{f}(t, x_1, x_2, x_3).$$

# Переход от эйлерова представления к лагранжеву

Пусть задан параметр среды $f$ в эйлеровых координатах:

$$f = f(t, x_1, x_2, x_3).$$

Если задан закон движения среды $\vec{r} = \vec{r}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, тогда

$$f(t, x_1, x_2, x_3) = f(t, x_1(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), x_2(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), x_3(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)) =$$

$$= \bar{f}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

# Стационарные движения и линии тока

**Определение**

Если при эйлеровом описании движения сплошной среды и ее параметры не зависят от времени, а зависят только от пространственных координат $(x_1, x_2, x_3)$, то такие движения называются установившимися, или стационарными.

**Определение**

Линиями тока, или векторными линиями, поля скорости $\vec{v}$ называются линии, касательные в каждой точке которых совпадают по направлению со скоростью $\vec{v}$ в этой точке в данный момент времени.

# Математическое описание линий тока

Уравнения линий тока:

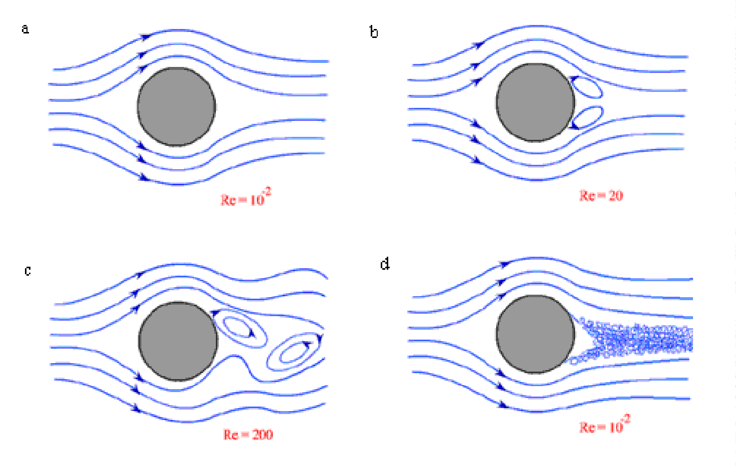
$$d\vec{r} = \vec{v}(x_1, x_2, x_3)\,d\lambda, \quad (t = const),$$

где $\lambda$ – переменная, идентифицирующая точки вдоль линии тока. Это уравнение сводится к

$$d\lambda = \frac{dx_1}{v_1(t, x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_2}{v_2(t, x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_3}{v_3(t, x_1, x_2, x_3)},$$

где $t$ – параметр и каждая линия тока относится к фиксированному моменту времени.

# Пример обтекания цилиндра




Картины обтекания цилиндра набегающим потоком при различных числах Рейнольдса

http://www.heuristic.su/effects/catalog/est/byId/description/1201/index.html

# Частная и субстанциональная (полная) производная

Рассмотрим параметр среды, заданный в эйлеровых координатах

$$\varphi = \varphi(t, x_1, x_2, x_3),$$

и закон движения сплошной среды

$$\vec{r} = \vec{r}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Частная производная
Производная в заданной точке пространства

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x_1, x_2, x_3)$$

определяет изменение параметра $\varphi$ в фиксированной точке пространства.

# Частная и субстанциональная (полная) производная

## Полная производная

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, x_1(t, \xi_1,\xi_2,\xi_3), x_2(t, \xi_1,\xi_2,\xi_3), x_3(t, \xi_1,\xi_2,\xi_3)) =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\right)\varphi$$

определяет изменение параметра $\varphi$ в жидкой частице в фиксированной точке пространства, где $\vec{v}(t, x_1,x_2,x_3)$ – вектор скорости.

## Определение

Оператор $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)$ называется оператором субстанциональной (полной) производной.

# Литература


1. *Нигматулин Р.И.* Механика сплошной среды. Кинематика. Динамика. Термодинамика. Статистическая динамика. М.:ГЭОТАР-Медиа, 2014.
2. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Том 1. М.:Наука, 1970.
3. *Эглит М.Э.* Лекции по основам механики сплошных сред. Изд. 2-е, испр. М.: Книжный дом «Либроком», 2010.