

# Элементы тензорного исчисления

*Верецагин Антон Сергеевич*

канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики



2 сентября 2020 г.

Криволинейные системы координат. Скаляр. Вектор. Ковариантность и контравариантность. Тензор. Тензорная алгебра. Произведение тензоров. Сокращение индексов. Теоремы о тензорах. Фундаментальная квадратичная форма и тензор. Метрика. Скалярное произведение векторов.

## Определение

Пусть задана связь между криволинейными системами координат:

$$x^\alpha = x^\alpha(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

и

$$\frac{D(x^1, x^2, \dots, x^n)}{D(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^n} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \dots & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^2} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

тогда существует обратное преобразование координат

$$\bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n).$$

## Определение

Если для каждой системы координат  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  определена функция  $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ , такая что при преобразования системы координат (1) выполняется условие

$$f(x^1, x^2, \dots, x^n) = f(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n),$$

то говорят, что функция точек  $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$  есть **инвариант** или **скаляр**.

# Контравариантный вектор

## Определение

Если для каждой системы координат  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  определена совокупность  $n$  функций  $A^1, A^2, \dots, A^n$ , такая что для системы координат  $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$  мы имеем свою совокупность функций  $\bar{A}^1, \bar{A}^2, \dots, \bar{A}^n$ , и если при преобразовании координат (1) эти функции преобразуются по следующим формулам

$$\bar{A}^i = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} A^\alpha \quad (i = 1, \dots, n),$$

то говорят, что совокупность величин  $A^1, A^2, \dots, A^n$  определяет **контравариантный вектор**, а величины  $A^i$  называются **компонентами контравариантного вектора**  $A^i$ .



# Пример контравариантного вектора

## Соглашение

Условимся проводить суммирование по повторяющимся индексам в одночлене от 1 до  $n$ , если не сделано отдельных оговорок заранее.

# Пример контравариантного вектора

## Соглашение

Условимся проводить суммирование по повторяющимся индексам в одночлене от 1 до  $n$ , если не сделано отдельных оговорок заранее.

## Вектор $d\bar{x}^i$

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^n} dx^n = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha.$$

# Пример ковариантного вектора

## Градиент функции

Рассмотрим градиент функции  $\nabla\varphi(x^1, x^2, \dots, x^n)$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^1}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^n}.$$



# Пример ковариантного вектора

## Градиент функции

Рассмотрим градиент функции  $\nabla\varphi(x^1, x^2, \dots, x^n)$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^1}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^n}.$$

По правилам дифференцирования

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial\bar{x}^i} + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial\bar{x}^i} + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial\bar{x}^i}.$$

# Пример ковариантного вектора

## Градиент функции

Рассмотрим градиент функции  $\nabla\varphi(x^1, x^2, \dots, x^n)$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^1}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^n}.$$

По правилам дифференцирования

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial\bar{x}^i} + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial\bar{x}^i} + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial\bar{x}^i}.$$

Положим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} = A_\alpha, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^\alpha} = \bar{A}_\alpha,$$

то получим

$$\bar{A}_i = A_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial\bar{x}^i}.$$

# Ковариантный вектор

## Определение

Если для каждой системы координат  $x^\alpha$  определена совокупность  $n$  функций  $A_\alpha$  и если при преобразовании координат (1) эти функции преобразуются по формулам

$$\bar{A}_i = A_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i},$$

то величины  $A_\alpha$  определяют **ковариантный вектор**, составляющими или компонентами которого они являются.

## Соглашение

Будем различать ковариантные векторы от контравариантных, тем, что у контравариантных векторов индексы будем ставить сверху (например,  $dx^i$ ), а у ковариантных – снизу (например,  $A_j$ ).

# Тензор второго ранга (контравариантный)

## Определение

Если для каждой системы координат  $x^\alpha$  определена совокупность  $n^2$  функций  $A^{\alpha\beta}$ , которые при преобразовании координат (1) испытывают преобразование

$$\bar{A}^{ik} = A^{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\beta},$$

то эти функции определяют **контравариантный тензор второго ранга**, составляющим которого они являются.

# Тензор второго ранга (ковариантный)

## Определение

Если же определена совокупность  $n^2$  функций  $A_{\alpha\beta}$ , которые при преобразовании координат (1) испытывают преобразование

$$\bar{A}_{ik} = A_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k},$$

то эти функции определяют **ковариантный тензор второго ранга**, составляющим которого они являются.



# Тензор второго ранга (смешанный)

## Определение

Если же определена совокупность  $n^2$  функций  $A_{\alpha}^{\cdot\beta}$ , которые при преобразовании координат (1) испытывают преобразование

$$\bar{A}_{i\cdot}^{\cdot k} = A_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^{\beta}},$$

то эти функции определяют **смешанный тензор второго ранга**, составляющим которого они являются.

# Пример смешанного тензора

## Символ Кронекера

$$\delta_{\alpha}^{\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

является смешанным тензором 2-ого ранга.

## Доказательство

$$\bar{\delta}_i^k = \delta_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^{\alpha}} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

## Пример

По аналогии можно ввести тензоры более высоких рангов, это такой набор величин, для которых при переходе из одной системы координат в другую (1) выполняются аналогичные соотношения, например,

$$\bar{A}^l_{ik} = A^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^{\gamma}}.$$

В данном случае тензор  $A^{\gamma}_{\alpha\beta}$  является **смешанным тензором 3-го ранга** дважды ковариантным и один раз контравариантным.

# Тензорная алгебра: умножение на число и сумма

## Умножение тензора на число

При **умножении** всех компонент тензора  $A_{\alpha\beta}^{\gamma}$  **на число**  $\lambda$  получается новый тензор с компонентами  $\lambda A_{\alpha\beta}^{\gamma}$  (док-во очевидно).

# Тензорная алгебра: умножение на число и сумма

## Умножение тензора на число

При **умножении** всех компонент тензора  $A_{\alpha\beta}^{\gamma}$  **на число**  $\lambda$  получается новый тензор с компонентами  $\lambda A_{\alpha\beta}^{\gamma}$  (док-во очевидно).

## Сложение

**Суммой** двух тензоров  $A_{\alpha\beta}^{\gamma}$  и  $B_{\alpha\beta}^{\gamma}$  одинаковой размерности будет тензор  $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$  такого же вида с компонентами

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma} = A_{\alpha\beta}^{\gamma} + B_{\alpha\beta}^{\gamma}.$$

Видно, что сложение тензоров обладает свойствами **коммутативности**, **ассоциативности**, а вместе с операцией умножение на число образует **векторное пространство**.



# Тензорная алгебра: симметричность, антисимметричность

## Симметричность

Тензор  $A^{\alpha\beta}$  называется **симметричным**, если для всех  $\alpha$  и  $\beta$

$$A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}.$$

# Тензорная алгебра: симметричность, антисимметричность

## Симметричность

Тензор  $A^{\alpha\beta}$  называется **симметричным**, если для всех  $\alpha$  и  $\beta$

$$A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}.$$

## Антисимметричность

Тензор  $A^{\alpha\beta}$  называется **антисимметричным**, если для всех  $\alpha$  и  $\beta$

$$A^{\alpha\beta} = -A^{\beta\alpha}.$$

# Тензорная алгебра: симметричность, антисимметричность

## Симметричность

Тензор  $A^{\alpha\beta}$  называется **симметричным**, если для всех  $\alpha$  и  $\beta$

$$A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}.$$

## Антисимметричность

Тензор  $A^{\alpha\beta}$  называется **антисимметричным**, если для всех  $\alpha$  и  $\beta$

$$A^{\alpha\beta} = -A^{\beta\alpha}.$$

По аналогии с ортогональными тензорами второго ранга можно показать, что любой тензор можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного по двум выбранным (одновременно ковариантным или контравариантным) индексам, причём единственным образом.

# Тензорная алгебра: произведение тензоров

## Определение

Назовём произведением тензора  $A_{\alpha}^{\beta}$  и тензора  $B_{\gamma\delta}^{\varepsilon}$  тензор  $C_{\alpha\gamma\delta}^{\beta\varepsilon}$ , образуемый по формулам  $C_{\alpha\gamma\delta}^{\beta\varepsilon} = A_{\alpha}^{\beta} B_{\gamma\delta}^{\varepsilon}$ .

# Тензорная алгебра: произведение тензоров

## Определение

Назовём произведением тензора  $A_{\alpha}^{\beta}$  и тензора  $B_{\gamma\delta}^{\varepsilon}$  тензор  $C_{\alpha\gamma\delta}^{\beta\varepsilon}$ , образуемый по формулам  $C_{\alpha\gamma\delta}^{\beta\varepsilon} = A_{\alpha}^{\beta} B_{\gamma\delta}^{\varepsilon}$ .

## Корректность определения

Для тензоров  $A_{\alpha}^{\beta}$  и  $B_{\gamma\delta}^{\varepsilon}$  справедливы соотношения

$$\bar{A}_i^k = A_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^{\beta}}, \quad \bar{B}_{lm}^n = B_{\gamma\delta}^{\varepsilon} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^{\varepsilon}},$$

тогда компоненты  $C_{\alpha\gamma\delta}^{\beta\varepsilon}$  в новой системе координат

$$\bar{C}_{ilm}^{kn} = \bar{A}_i^k \bar{B}_{lm}^n = C_{\alpha\gamma\delta}^{\beta\varepsilon} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^{\varepsilon}}.$$



# Тензорная алгебра: сокращение индексов

Докажем, что тензор  $B_\alpha = A_{\alpha\beta}^\beta$ , полученный из смешанного тензора  $A_{\alpha\beta}^\gamma$  путём суммирования по повторяющемуся индексу  $\beta$  от 1 до  $n$ , является тензором первого ранга.

Имеем

$$\bar{A}_{ik}^l = A_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^\gamma},$$

тогда

$$\bar{B}_i = \bar{A}_{ik}^k = A_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\gamma} = A_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \delta_\gamma^\beta = A_{\alpha\beta}^\beta \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} = B_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i},$$

что доказывает, что  $B_\alpha$  – ковариантный вектор.

## Вывод

Для каждого смешанного тензора можно получить новый тензор путём **сокращения** одного ковариантного и контравариантного **индекса**.

Скалярное произведение векторов:  $a = A^\alpha B_\alpha$ .

# Примеры

Скалярное произведение векторов:  $a = A^\alpha B_\alpha$ .

Скалярное произведение тензора и вектора:  $C_\beta = A_{\alpha\beta} B^\alpha$ .

# Примеры

Скалярное произведение векторов:  $a = A^\alpha B_\alpha$ .

Скалярное произведение тензора и вектора:  $C_\beta = A_{\alpha\beta} B^\alpha$ .

Бискалярное произведение тензоров:  $b = A_{\alpha\beta} B^{\beta\alpha}$ .

# Теорема о тензорной природе объекта

## Теорема

Если для каждой системы координат  $(x^1, x^2, \dots, x^n)$  имеем совокупность  $n^3$  величин  $A_{\alpha\beta}^{\gamma}$  и если при любом выборе трёх векторов  $u^{\alpha}$ ,  $v^{\beta}$  и  $w_{\gamma}$  выражение

$$f = A_{\alpha\beta}^{\gamma} u^{\alpha} v^{\beta} w_{\gamma}$$

является инвариантом, то величины  $A_{\alpha\beta}^{\gamma}$  являются составляющими тензора два раза ковариантного, раз ковариантного.



# Теорема о тензорной природе объекта

## Доказательство

В силу произвольности  $u^\alpha$ ,  $v^\beta$  и  $w_\gamma$  возьмём их так, что для наперёд заданных  $i, j, k$  в новой системе координат

$$\bar{u}^\alpha = \delta_i^\alpha, \quad \bar{v}^\beta = \delta_k^\beta, \quad \bar{w}_\gamma = \delta_\gamma^j.$$

# Теорема о тензорной природе объекта

## Доказательство

В силу произвольности  $u^\alpha$ ,  $v^\beta$  и  $w_\gamma$  возьмём их так, что для наперёд заданных  $i, j, k$  в новой системе координат

$$\bar{u}^\alpha = \delta_i^\alpha, \quad \bar{v}^\beta = \delta_k^\beta, \quad \bar{w}_\gamma = \delta_\gamma^j.$$

$$\text{Тогда } u^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r} \bar{u}^r = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r} \delta_i^r = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}, \quad v^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}, \quad w_\gamma = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\gamma}.$$

# Теорема о тензорной природе объекта

## Доказательство

В силу произвольности  $u^\alpha$ ,  $v^\beta$  и  $w_\gamma$  возьмём их так, что для наперёд заданных  $i, j, k$  в новой системе координат

$$\bar{u}^\alpha = \delta_i^\alpha, \quad \bar{v}^\beta = \delta_k^\beta, \quad \bar{w}_\gamma = \delta_\gamma^j.$$

$$\text{Тогда } u^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r} \bar{u}^r = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r} \delta_i^r = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}, \quad v^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}, \quad w_\gamma = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\gamma}.$$

$$\bar{f} = \bar{A}_{\alpha\beta}^\gamma \bar{u}^\alpha \bar{v}^\beta \bar{w}_\gamma = \bar{A}_{ik}^j,$$

# Теорема о тензорной природе объекта

## Доказательство

В силу произвольности  $u^\alpha$ ,  $v^\beta$  и  $w_\gamma$  возьмём их так, что для наперёд заданных  $i, j, k$  в новой системе координат

$$\bar{u}^\alpha = \delta_i^\alpha, \quad \bar{v}^\beta = \delta_k^\beta, \quad \bar{w}_\gamma = \delta_\gamma^j.$$

$$\text{Тогда } u^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r} \bar{u}^r = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r} \delta_i^r = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}, \quad v^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}, \quad w_\gamma = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\gamma}.$$

$$\bar{f} = \bar{A}_{\alpha\beta}^\gamma \bar{u}^\alpha \bar{v}^\beta \bar{w}_\gamma = \bar{A}_{ik}^j, \quad f = A_{\alpha\beta}^\gamma u^\alpha v^\beta w_\gamma = A_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\gamma}.$$

# Теорема о тензорной природе объекта

## Доказательство

В силу произвольности  $u^\alpha$ ,  $v^\beta$  и  $w_\gamma$  возьмём их так, что для наперёд заданных  $i, j, k$  в новой системе координат

$$\bar{u}^\alpha = \delta_i^\alpha, \quad \bar{v}^\beta = \delta_k^\beta, \quad \bar{w}_\gamma = \delta_\gamma^j.$$

$$\text{Тогда } u^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r} \bar{u}^r = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r} \delta_i^r = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}, \quad v^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}, \quad w_\gamma = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\gamma}.$$

$$\bar{f} = \bar{A}_{\alpha\beta}^\gamma \bar{u}^\alpha \bar{v}^\beta \bar{w}_\gamma = \bar{A}_{ik}^j, \quad f = A_{\alpha\beta}^\gamma u^\alpha v^\beta w_\gamma = A_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\gamma}.$$

$$\text{По условию теоремы } f \text{ — скаляр, значит } \bar{A}_{\alpha\beta}^\gamma = A_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\gamma}.$$



# Теорема о тензорной природе объекта 2

## Теорема

Если для каждой системы координат  $x^\alpha$  имеется совокупность  $n^2$  величин  $A_{\alpha\beta}$  и если при любом выборе вектора  $u^\alpha$  выражение

$$f = A_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta$$

является инвариантом, то величина

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha})$$

является составляющей ковариантного тензора.

## Теорема о тензорной природе объекта 2

### Доказательство

Положим  $u^\alpha = v^\alpha + w^\alpha$  произвольное разложение вектора  $u^\alpha$  в сумму двух векторов, тогда

$$\begin{aligned} f &= A_{\alpha\beta}(v^\alpha + w^\alpha)(v^\beta + w^\beta) = A_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta + A_{\alpha\beta}w^\alpha w^\beta + \\ &\quad + A_{\alpha\beta}v^\alpha w^\beta + A_{\alpha\beta}v^\beta w^\alpha. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$A_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta, \quad A_{\alpha\beta}w^\alpha w^\beta$$

инварианты по условию теоремы, а

$$A_{\alpha\beta}v^\alpha w^\beta = A_{\beta\alpha}v^\alpha w^\beta.$$

Поэтому выражение  $g = (A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha})v^\alpha w^\beta$  является инвариантом, а  $A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}$  – ковариантным тензором по теореме 1.

# Признак тензорной природы для симметричного объекта

## Следствие

Если величины  $A_{\alpha\beta}$  обладают свойством симметричности, т.е.  $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$ , то из инвариантности

$$f = A_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta}$$

для любого вектора  $u^{\alpha}$  следует, что  $A_{\alpha\beta}$  являются компонентами ковариантного тензора.

## Определение Выражение

$$ds^2 = g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n) dx^i dx^k, \quad (2)$$

определяющее расстояние между двумя бесконечно близкими точками многообразия, называется **фундаментальной квадратичной формой**.

# Постулаты для фундаментального тензора

## Инвариантность

$ds^2$  – инвариант по определению



# Постулаты для фундаментального тензора

## Инвариантность

$ds^2$  – инвариант по определению

## Симметричность

$$g_{ij} = g_{ji}$$

# Постулаты для фундаментального тензора

## Инвариантность

$ds^2$  – инвариант по определению

## Симметричность

$$g_{ij} = g_{ji}$$

## Определитель

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

# Постулаты для фундаментального тензора

## Инвариантность

$ds^2$  – инвариант по определению

## Симметричность

$$g_{ij} = g_{ji}$$

## Определитель

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

## Тензорная природа (следствие)

$g_{ij}$  – ковариантный тензор по тензорному признаку для симметричного объекта

## Определение

Пусть  $A^k$  – произвольный вектор, тогда рассмотрим вектор

$$A_i = g_{ik}A^k.$$

## Определение

Пусть  $A^k$  – произвольный вектор, тогда рассмотрим вектор

$$A_i = g_{ik} A^k.$$

Эти равенства можно рассматривать как систему из  $n$  линейных уравнений относительно  $A^k$ , и так как  $g \neq 0$ , то существуют такие числа  $g^{ik}$ , что

$$A^i = g^{ik} A_k.$$



# Контравариантный фундаментальный тензор

## Определение

Пусть  $A^k$  – произвольный вектор, тогда рассмотрим вектор

$$A_i = g_{ik} A^k.$$

Эти равенства можно рассматривать как систему из  $n$  линейных уравнений относительно  $A^k$ , и так как  $g \neq 0$ , то существуют такие числа  $g^{ik}$ , что

$$A^i = g^{ik} A_k.$$

Т.к.  $A^i, A_k$  произвольные векторы, то по признаку тензорного объекта  $g^{ik}$  является контравариантным тензором и называется **контравариантным фундаментальным тензором**.

# Смешанный фундаментальный тензор

## Определение

Смешанный тензор

$$g_i^k = g_{i\alpha} g^{\alpha k}$$

называется **смешанным фундаментальным тензором**.

# Смешанный фундаментальный тензор

## Определение

Смешанный тензор

$$g_i^k = g_{i\alpha} g^{\alpha k}$$

называется **смешанным фундаментальным тензором**.

## Свойства

Равенство  $A_i = g_{i\alpha} A^\alpha = g_{i\alpha} g^{\alpha k} A_k = g_i^k A_k$  имеет место для всех  $A_k$ , поэтому

$$g_i^k = \delta_i^k = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Сокращение смешанного фундаментального тензора по его индексам даёт размерность рассматриваемого многообразия, т.к.

$$g_i^i = \delta_i^i = n.$$

# Переход между контравариантами и ковариантным величинами

Для векторов

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad A^i = g^{ik} A_k,$$

где  $A_i, A^k$  – ковариантные и контравариантные компоненты одного и того же вектора.

# Переход между контравариантами и ковариантным величинами

## Для векторов

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad A^i = g^{ik} A_k,$$

где  $A_i, A^k$  – ковариантные и контравариантные компоненты одного и того же вектора.

## Для тензоров

$$A_{i\cdot}^{\cdot\beta} = A^{\alpha\beta} g_{i\alpha}, \quad A_{\cdot k}^{\alpha\cdot} = A^{\alpha\beta} g_{\beta k},$$



# Переход между контравариантами и ковариантным величинами

## Для векторов

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad A^i = g^{ik} A_k,$$

где  $A_i, A^k$  – ковариантные и контравариантные компоненты одного и того же вектора.

## Для тензоров

$$A_{i\cdot}^{\cdot\beta} = A^{\alpha\beta} g_{i\alpha}, \quad A_{\cdot k}^{\alpha\cdot} = A^{\alpha\beta} g_{\beta k},$$

$$A_{ik} = A_{i\cdot}^{\cdot\beta} g_{\beta k} = A^{\alpha\beta} g_{i\alpha} g_{\beta k},$$

# Переход между контравариантами и ковариантным величинами

## Для векторов

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad A^i = g^{ik} A_k,$$

где  $A_i, A^k$  – ковариантные и контравариантные компоненты одного и того же вектора.

## Для тензоров

$$A_{i\cdot}^{\cdot\beta} = A^{\alpha\beta} g_{i\alpha}, \quad A_{\cdot k}^{\alpha\cdot} = A^{\alpha\beta} g_{\beta k},$$

$$A_{ik} = A_{i\cdot}^{\cdot\beta} g_{\beta k} = A^{\alpha\beta} g_{i\alpha} g_{\beta k},$$

$$A^{\alpha\beta} = A_{i\cdot}^{\cdot\beta} g^{i\alpha} = A_{ik} g^{k\beta} g^{i\alpha},$$

где  $A_{ik}, A^{\alpha\beta}, A_{i\cdot}^{\cdot\beta}, A_{\cdot k}^{\alpha\cdot}$  – компоненты одного и того же тензора.

# Связь фундаментальной формы и преобразования координат

Пусть подпространство  $E_n$  вложено в евклидово пространство  $E_m$  ( $m \geq n$ ) и преобразование координат задаётся

$$\begin{cases} y_1 &= y_1(x^1, x^2, \dots, x^n), \\ \vdots & \vdots \\ y_m &= y_m(x^1, x^2, \dots, x^n), \end{cases}$$

где  $y_\alpha$  – координаты точек в прямолинейной ортогональной системе координат.

# Связь фундаментальной формы и преобразования координат

Пусть подпространство  $E_n$  вложено в евклидово пространство  $E_m$  ( $m \geq n$ ) и преобразование координат задаётся

$$\begin{cases} y_1 &= y_1(x^1, x^2, \dots, x^n), \\ \vdots & \vdots \\ y_m &= y_m(x^1, x^2, \dots, x^n), \end{cases}$$

где  $y_\alpha$  – координаты точек в прямолинейной ортогональной системе координат.

Тогда фундаментальная квадратичная форма будет иметь вид

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^m dy_\alpha^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \text{ где } g_{ik} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^k}.$$

# Длина вектора

Рассмотрим котравариантный вектор  $A^i$ . Подберём бесконечно малый вектор  $dx^i$ , такой, что

$$dx^i = \lambda A^i, \quad A^i = \frac{1}{\lambda} dx^i.$$

Так как при преобразовании системы координат компоненты векторов  $dx^i$  и  $A^k$  преобразуются по одним и тем же формулам, то величина  $\lambda$  является инвариантом.



# Длина вектора

Рассмотрим котравариантный вектор  $A^i$ . Подберём бесконечно малый вектор  $dx^i$ , такой, что

$$dx^i = \lambda A^i, \quad A^i = \frac{1}{\lambda} dx^i.$$

Так как при преобразовании системы координат компоненты векторов  $dx^i$  и  $A^k$  преобразуются по одним и тем же формулам, то величина  $\lambda$  является инвариантом.

Вектору в подпространстве  $R^n$  с координатами  $dx^i$  отвечает вектор в пространстве  $R^m$  с координатами  $y_\alpha$ , длина которого равна  $ds$ . Таким образом,

$$ds^2 = \lambda^2 g_{ik} A^i A^k.$$

# Длина вектора

## Определение

Длиной вектора будем называть величину

$$l(A^i) = \sqrt{g_{ik}A^iA^k}.$$

## Свойства

$$l(A^i) = \sqrt{g_{ik}A^iA^k} = \sqrt{A_iA^i} = \sqrt{g^{ij}A_iA_j}.$$

# Скалярное произведение векторов

Так как скалярному вектору  $dx^i$  отвечает в пространстве вектор с составляющими

$$dy_\alpha = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} dx^i \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

тогда вектор  $A^i = dx^i / \lambda$  в пространстве  $R^m$  будет иметь компоненты

$$a_\alpha = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} A^i \quad (\alpha = 1, \dots, m).$$

Рассмотрим ещё один вектор с компонентами  $B^i$ , имеющий в  $R^m$  компоненты

$$b_\alpha = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^k} B^k \quad (\alpha = 1, \dots, m).$$

## Определение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{\alpha=1}^m a_{\alpha} b_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^i} A^i \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^k} B^k = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^k} A^i B^k = g_{ik} A^i B^k.$$

# Скалярное произведение векторов

## Определение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{\alpha=1}^m a_{\alpha} b_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^i} A^i \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^k} B^k = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^k} A^i B^k = g_{ik} A^i B^k.$$

## Свойства

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = g_{ik} A^i B^k = A_k B^k = A^i B_i = g^{ij} A_i B_j$$



# Скалярное произведение векторов

## Определение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{\alpha=1}^m a_{\alpha} b_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^i} A^i \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^k} B^k = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^k} A^i B^k = g_{ik} A^i B^k.$$

## Свойства

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = g_{ik} A^i B^k = A_k B^k = A^i B_i = g^{ij} A_i B_j$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{g_{ik} A^i B^k}{\sqrt{g_{ik} A^i A^k} \sqrt{g_{ik} B^i B^k}}$$

# Скалярное произведение векторов

## Определение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{\alpha=1}^m a_{\alpha} b_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^i} A^i \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^k} B^k = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^k} A^i B^k = g_{ik} A^i B^k.$$

## Свойства

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = g_{ik} A^i B^k = A_k B^k = A^i B_i = g^{ij} A_i B_j$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{g_{ik} A^i B^k}{\sqrt{g_{ik} A^i A^k} \sqrt{g_{ik} B^i B^k}}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow g_{ik} A^i B^k = 0$$

# Векторное произведение

## Определение

Пусть  $\mathbf{u} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ , тогда

$$\begin{aligned} u_i &= e^{\alpha\beta}{}_i A_\alpha B_\beta = g_{i\gamma} e^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha B_\beta = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \{g_{i1}(A_2 B_3 - A_3 B_2) + g_{i2}(A_3 B_1 - A_1 B_3) + g_{i3}(A_1 B_2 - A_2 B_1)\}, \end{aligned}$$

## Обозначения

$$e_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{g} \delta_{\alpha\beta\gamma}, \quad e^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{g}} \delta^{\alpha\beta\gamma}, \quad g = |g_{ik}|.$$

$$\begin{aligned} \delta_{123} &= \delta_{231} = \delta_{312} = 1, \\ \delta_{132} &= \delta_{213} = \delta_{321} = -1, \end{aligned}$$

$\delta_{ijk} = 0$  во всех остальных случаях.

- Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд. 9-е. М.: Наука, 1965.