

# Вихревые течения идеальной жидкости

*Верещагин Антон Сергеевич*

канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики ФФ НГУ

16 ноября 2018 г.

# Аннотация

# Потенциальные и вихревые течения идеальной жидкости

## Определение

Течение идеальной жидкости называется **вихревым**, если вектор  $\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v}$  в некоторых точках исследуемой области отличен от нулевого.

# Потенциальные и вихревые течения идеальной жидкости

## Определение

Течение идеальной жидкости называется **вихревым**, если вектор  $\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v}$  в некоторых точках исследуемой области отличен от нулевого.

Выражение для компонент вектора вихря

$$\Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

# Потенциальные и вихревые течения идеальной жидкости

## Определение

Течение идеальной жидкости называется **вихревым**, если вектор  $\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v}$  в некоторых точках исследуемой области отличен от нулевого.

Выражение для компонент вектора вихря

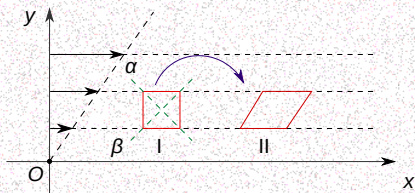
$$\Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Если же в исследуемой области везде  $\vec{\Omega} = 0$ , тогда течение в этой области называется потенциальным, и существует потенциал  $\varphi$  такой, что

$$\vec{v} = \nabla \varphi.$$

Справедливо и обратное утверждение.

# Пример вихревого течения



Движение жидкости слоями

$$v_x = ay, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0.$$

Вихрь скорости

$$\Omega_x = 0, \quad \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = -a.$$

## Описание

По теореме Кельвина-Гельмгольца о скорости деформируемой частицы квадрат *I* переходит в параллелограмм *II* посредством сдвига вдоль оси *x*, поворота как твердого тела по указанной стрелке и чистой деформации в виде сжатия вдоль линии  $\alpha$  и растяжения вдоль линии  $\beta$ .



# Вихревые линии и вихревые трубки

## Определение

**Вихревой линией** называется такая линия, во всякой точке которой вихрь скорости  $\vec{\Omega}$  направлен по касательной к этой линии.

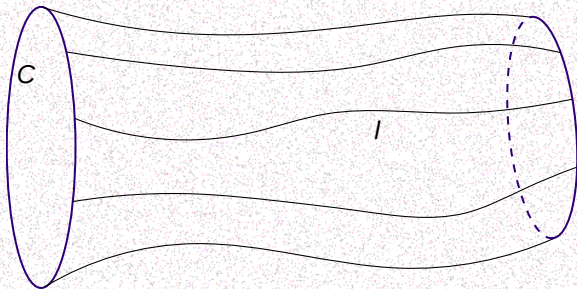
## Уравнения вихревой линии

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z}.$$

# Вихревая трубка

## Определение

**Вихревой трубкой** называется совокупность точек пространства, ограниченных вихревыми линиями, проведёнными через заданный замкнутый контур.





# Циркуляция скорости и теорема Стокса

## Определение

**Циркуляцией скорости**  $\Gamma$  по замкнутому контуру называется линейный интеграл

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_C v_x dx + v_y dy + v_z dz.$$

## Теорема Стокса

Циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через площадку, ограниченную этим контуром:

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{v}) dS,$$

где вектор  $\vec{n}$  – вектор единичной нормали к  $S$ , направленный по правилу буравчика.

# Интенсивность вихревой трубки

## Определение

Интенсивностью вихревой трубки называется поток вектора вихря  $\vec{\Omega}$  через сечение вихревой трубки

$$I = \int_S \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS.$$

# Теорема о постоянстве циркуляции для вихревой трубки

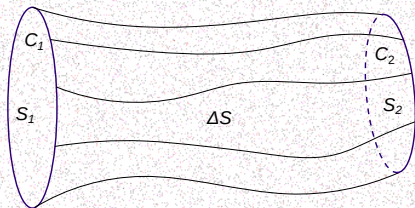
## Теорема

Циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему данную вихревую трубку постоянна.

# Теорема о постоянстве циркуляции для вихревой трубки

## Теорема

Циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему данную вихревую трубку постоянна.

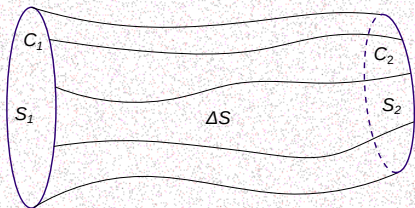


Рассмотрим вихревую трубку  $V$ , ограниченную с торцов сечениями  $S_1$ ,  $S_2$  и боковой поверхностью  $\Delta S$ . Сечения  $S_1$ ,  $S_2$  пересекаются с  $\Delta S$  по контурам  $C_1$  и  $C_2$ .

# Теорема о постоянстве циркуляции для вихревой трубки

## Теорема

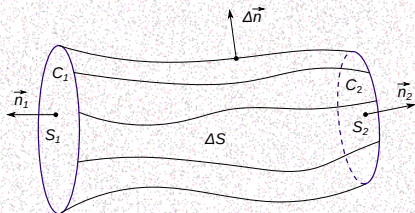
Циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему данную вихревую трубку постоянна.



Рассмотрим вихревую трубку  $V$ , ограниченную с торцов сечениями  $S_1$ ,  $S_2$  и боковой поверхностью  $\Delta S$ . Сечения  $S_1$ ,  $S_2$  пересекаются с  $\Delta S$  по контурам  $C_1$  и  $C_2$ .

$$0 = \int_V \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} dV = \int_V \operatorname{div} \vec{\Omega} dV = \int_S \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS$$

# Теорема о постоянстве циркуляции для вихревой трубки: доказательство

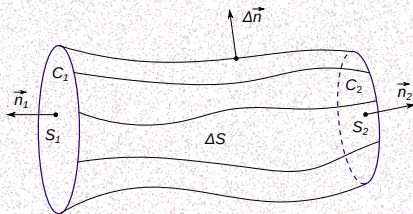


$$\int_S \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_1} \vec{\Omega} \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{S_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{n}_2 dS + \int_{\Delta S} \vec{\Omega} \cdot \Delta \vec{n} dS.$$

Т.к. на боковой поверхности вихревой трубки  $\Delta S$  вектора  $\vec{\Omega}$  и  $\Delta \vec{n}$  ортогональны, то последний интеграл равен 0.



# Теорема о постоянстве циркуляции для вихревой трубки: доказательство

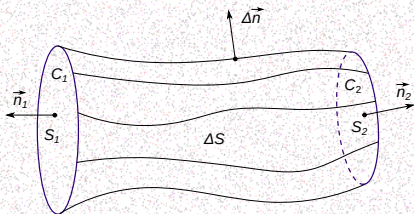


Таким образом, используя теорему Стокса, имеем

$$0 = \int_{S_1} \vec{\Omega} \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{S_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{n}_2 dS = \oint_{C_1} \vec{\Omega} \cdot d\vec{l} - \oint_{C_2} \vec{\Omega} \cdot d\vec{l}.$$

В последнем равенстве появился знак минус, потому что нормали  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  направлены в разные стороны. Так как контуры  $C_1$  и  $C_2$  выбраны произвольно, то справедливо утверждение теоремы.

# Теорема о постоянстве циркуляции для вихревой трубки: доказательство



Таким образом, используя теорему Стокса, имеем

$$0 = \int_{S_1} \vec{\Omega} \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{S_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{n}_2 dS = \oint_{C_1} \vec{\Omega} \cdot d\vec{l} - \oint_{C_2} \vec{\Omega} \cdot d\vec{l}.$$

Дополнительно показано, что интенсивность вихревой трубки одна и та же в любом сечении.

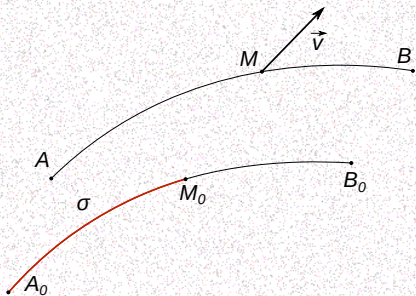
# Теорема о производной циркуляции скорости

## Теорема

Производная по времени от циркуляции скорости  $\vec{v}$  по некоторому замкнутому контуру равна циркуляции от ускорения  $d\vec{v}/dt$  по тому же контуру

$$\frac{d}{dt} \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint_L \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s}.$$

# Теорема о производной циркуляции скорости: доказательство



Рассмотрим в момент времени  $t_0$  какую-нибудь линию  $A_0B_0$ , проведённую в жидкости, состоящую из жидких частиц, которая в момент времени  $t$  перейдёт в другую линию  $AB$ . Рассмотрим линейный интеграл от скорости по этой кривой

$$J = \int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

# Теорема о производной циркуляции скорости: доказательство

В момент времени  $t' = t + \Delta t$  линия  $AB$  перейдёт в  $A'B'$  и можно определить  $J'$

$$J' = \int_{A'B'} \vec{v}' \cdot d\vec{s}$$

# Теорема о производной циркуляции скорости: доказательство

В момент времени  $t' = t + \Delta t$  линия  $AB$  перейдёт в  $A'B'$  и можно определить  $J'$

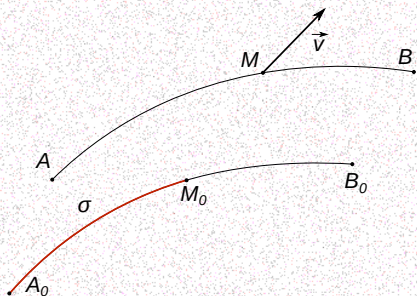
$$J' = \int_{A'B'} \vec{v}' \cdot d\vec{s}$$

Определим производную по времени от линейного интеграла  $\frac{dJ}{dt}$   
как

$$\frac{dJ}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{J' - J}{\Delta t}.$$



# Теорема о производной циркуляции скорости: доказательство



Параметризуем отрезок  $A_0B_0$  параметром  $\sigma$  равным расстоянию от выбранной точки  $M_0$  вдоль дуги  $A_0M_0$ . Тогда точку  $M$  отрезка  $AB$  в момент времени  $t$  можно однозначно определить с помощью следующих соотношений:

$$x = x(\sigma, t), \quad y = y(\sigma, t), \quad z = z(\sigma, t)$$

или

$$\vec{r} = \vec{r}(\sigma, t) \quad (0 \leq \sigma \leq \sigma_0, \quad t \geq t_0),$$

при этом

$$\vec{r}(0, t) = A, \quad \vec{r}(\sigma, t) = M, \quad \vec{r}(\sigma_0, t) = B.$$

# Теорема о производной циркуляции скорости: доказательство

Скорости жидких частиц отрезка  $AB$  также можно параметризовать через  $\sigma$  и  $t$ :

$$\vec{v} = \vec{v}(\sigma, t).$$

# Теорема о производной циркуляции скорости: доказательство

Скорости жидких частиц отрезка  $AB$  также можно параметризовать через  $\sigma$  и  $t$ :

$$\vec{v} = \vec{v}(\sigma, t).$$

Линейный интеграл  $J$ , используя  $\sigma$  и  $t$  можно переписать в форме

$$J = \int_0^{\sigma_0} \left( v_x \frac{\partial x}{\partial \sigma} + v_y \frac{\partial y}{\partial \sigma} + v_z \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right) d\sigma = \int_0^{\sigma_0} \left( \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} \right) d\sigma,$$

где предел интегрирования не зависит от переменной  $t$ .

# Теорема о производной циркуляции скорости: доказательство

Рассмотрим производную от  $J$  по  $t$ :

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{dt} &= \int_0^{\sigma_0} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} \right) d\sigma + \int_0^{\sigma_0} \left( \vec{v} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \sigma \partial t} \right) d\sigma = \\ &= \int_0^{\sigma_0} \left( \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} \right) d\sigma + \int_0^{\sigma_0} \left( \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \sigma} \right) d\sigma.\end{aligned}$$

Здесь

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{r}(\sigma, t) = \vec{v}(\sigma, t), \quad \frac{\partial^2}{\partial \sigma \partial t} \vec{r}(\sigma, t) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \vec{v}(\sigma, t), \quad \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}(\sigma, t) = \vec{a}(\sigma, t),$$

где  $\vec{a}$  – ускорение жидкой частицы.

# Теорема о производной циркуляции скорости: доказательство

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое.

$$\int_0^{\sigma_0} \left( \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} \right) d\sigma = \int_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{s} = \int_{AB} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s},$$

в последнем равенстве  $d/dt$  – полная производная.

# Теорема о производной циркуляции скорости: доказательство

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое.

$$\int_0^{\sigma_0} \left( \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} \right) d\sigma = \int_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{s} = \int_{AB} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s},$$

в последнем равенстве  $d/dt$  – полная производная.

$$\int_0^{\sigma_0} \left( \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \sigma} \right) d\sigma = \frac{1}{2} \int_0^{\sigma_0} \frac{\partial}{\partial \sigma} (\vec{v} \cdot \vec{v}) d\sigma = \frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2},$$

где  $\vec{v}_B = \vec{v}(\sigma_0, t)$ ,  $\vec{v}_A = \vec{v}(0, t)$  – скорости жидких частиц в точках  $B, A$ .



# Теорема о производной циркуляции скорости: итог

Подводя итог вышесказанного

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{AB} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} + \frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2}.$$

# Теорема о производной циркуляции скорости: итог

Подводя итог вышесказанного

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{AB} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} + \frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2}.$$

## Результат

Если в качестве линии  $AB$  рассматривать замкнутый контур  $L$ , тогда точки  $A$  и  $B$  совпадают и

$$\frac{d}{dt} \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint_L \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s}.$$

# Теорема Томсона

## Теорема

Если массовые силы допускают потенциал, а идеальная жидкость баротропна, то циркуляция скорости по любому замкнутому контуру во все время движения жидкости остаётся неизменной.

# Теорема Томсона: доказательство

## Уравнение движения

Для баротропного течения идеальной жидкости с потенциальными массовыми силами уравнение движения допускает следующее упрощение (см. предыдущую лекцию)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{grad}(\mathcal{P}(p) + \Pi).$$

Здесь

$$\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}, \quad \vec{f} = -\nabla \Pi,$$

где  $\mathcal{P}(p)$  – функция давления;  $\vec{f}$ ,  $\Pi$  – вектор и потенциал объёмных сил.

# Теорема Томсона: доказательство

Рассмотрим производную циркуляции вектора скорости по замкнутому контуру  $L$ . По теореме о циркуляции и закона движения имеем

$$\frac{d}{dt} \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint_L \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = - \oint_L \text{grad} (\mathcal{P}(p) + \Pi) ds = 0.$$

# Теорема Томсона: доказательство

Рассмотрим производную циркуляции вектора скорости по замкнутому контуру  $L$ . По теореме о циркуляции и закона движения имеем

$$\frac{d}{dt} \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint_L \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = - \oint_L \text{grad} (\mathcal{P}(p) + \Pi) ds = 0.$$

## Результат

Таким образом,

$$\oint_L \vec{v} \cdot d\vec{s} = \text{const.}$$



# Теорема Лагранжа

## Теорема

Если при баротропном течении идеальной жидкости в потенциальном внешнем поле в начальный момент времени какие-то жидкие частицы не имели завихрённости, то её в них не было раньше и не будет позже.

# Теорема Лагранжа

## Теорема

Если при баротропном течении идеальной жидкости в потенциальном внешнем поле в начальный момент времени какие-то жидкие частицы не имели завихрённости, то её в них не было раньше и не будет позже.

## Теорема (альтернативная формулировка)

Если баротропное течение идеальной жидкости в потенциальном внешнем поле в начальный момент времени было потенциально в какой-то момент времени, то оно останется потенциальным в любой другой и далее.

## Теорема Лагранжа: доказательство

Пусть в некоторый момент времени в каком-то объёме жидкости  $\vec{\Omega} = 0$ , тогда по теореме Стокса циркуляция по любому замкнутому контуру в этой области равна 0. По теореме Томсона циркуляция для такой жидкости не меняется от времени, а значит, для рассматриваемых жидких частиц циркуляция в любой другой момент времени тоже равна 0.

## Теорема Лагранжа: доказательство

Пусть в некоторый момент времени в каком-то объёме жидкости  $\vec{\Omega} = 0$ , тогда по теореме Стокса циркуляция по любому замкнутому контуру в этой области равна 0. По теореме Томсона циркуляция для такой жидкости не меняется от времени, а значит, для рассматриваемых жидких частиц циркуляция в любой другой момент времени тоже равна 0.

В окрестности выбранной жидкой частицы рассмотрим всевозможные маленькие площадки  $S$  с нормалью  $\vec{n}$  и контуром  $L$ , тогда по теореме Стокса

$$\int_S \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0,$$

а следовательно и

$$\vec{\Omega} = 0.$$

# Первая теорема Гельмгольца

## Теорема (о сохранении вихревых линий)

В баротропном течении идеальной жидкости в потенциальном внешнем поле частицы жидкости, образующие в некоторый момент вихревую линию, во всё время движения будут образовывать вихревую линию.



# Первая теорема Гельмгольца: доказательство

Рассмотрим **вихревую поверхность** – поверхность, образованная вихревыми линиями, проведёнными через некоторую линию в пространстве, которая сама не является вихревой линией. В каждой точке поверхности вектор  $\vec{\Omega}$  будет ортогонален вектору нормали  $\vec{n}$  к этой поверхности. Покажем, что частицы, составляющие вихревую поверхность в какой-то момент времени будет ей являться и далее.



# Первая теорема Гельмгольца: доказательство

Рассмотрим **вихревую поверхность** – поверхность, образованная вихревыми линиями, проведёнными через некоторую линию в пространстве, которая сама не является вихревой линией. В каждой точке поверхности вектор  $\vec{\Omega}$  будет ортогонален вектору нормали  $\vec{n}$  к этой поверхности. Покажем, что частицы, составляющие вихревую поверхность в какой-то момент времени будет ей являться и далее.

Рассмотрим на поверхности контур  $L$ , образующий на поверхности площадку  $S$ , и посчитаем циркуляцию вектора скорости по этому контуру

$$\oint_L \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS = 0.$$

Последнее равенство выполнено в силу того, что  $\vec{\Omega} \perp \vec{n}$ .

# Первая теорема Гельмгольца: доказательство

В последующие моменты времени поверхность перейдёт в другую поверхность, а контур  $L$  в контур  $L'$ , ограничивающий площадку  $S'$ . По теореме Томсона циркуляция по контуру  $L'$  равна циркуляции по контуру  $L$  и равна 0, следовательно, используя теорему Стокса

$$0 = \oint_{L'} \vec{v}' \cdot d\vec{s} = \int_{S'} \vec{\Omega}' \cdot \vec{n}' dS,$$

где  $\vec{v}'$ ,  $\vec{\Omega}'$  – вектора скорости и вихря в последующий рассматриваемый момент времени;  $\vec{n}'$  – нормаль к поверхности, образованной теми же самыми жидкими частицами.

# Первая теорема Гельмгольца: доказательство

В последующие моменты времени поверхность перейдет в другую поверхность, а контур  $L$  в контур  $L'$ , ограничивающий площадку  $S'$ . По теореме Томсона циркуляция по контуру  $L'$  равна циркуляции по контуру  $L$  и равна 0, следовательно, используя теорему Стокса

$$0 = \oint_{L'} \vec{v}' \cdot d\vec{s} = \int_{S'} \vec{\Omega}' \cdot \vec{n}' dS,$$

где  $\vec{v}'$ ,  $\vec{\Omega}'$  – вектора скорости и вихря в последующий рассматриваемый момент времени;  $\vec{n}'$  – нормаль к поверхности, образованной теми же самыми жидкими частицами.

Т.к. в последнем равенстве  $S'$  можно взять сколь угодно маленькую, то  $\vec{\Omega}' \perp \vec{n}'$ . Таким образом, поверхность, образованная теми же самыми жидкими частицами, тоже будет вихревой поверхностью.

# Первая теорема Гельмгольца: доказательство

Рассмотрим вихревую линию  $l$ , являющуюся пересечением двух вихревых поверхностей  $S$  и  $\Sigma$  в какой-то момент времени. В следующий рассматриваемый момент времени она перейдёт в линию  $l'$ , являющуюся пересечением вихревых поверхностей  $S'$  и  $\Sigma'$ , в которые перейдут вихревые поверхности  $S$  и  $\Sigma$ .

# Первая теорема Гельмгольца: доказательство

Рассмотрим вихревую линию  $l$ , являющуюся пересечением двух вихревых поверхностей  $S$  и  $\Sigma$  в какой-то момент времени. В следующий рассматриваемый момент времени она перейдёт в линию  $l'$ , являющуюся пересечением вихревых поверхностей  $S'$  и  $\Sigma'$ , в которые перейдут вихревые поверхности  $S$  и  $\Sigma$ .

В каждой точке кривой  $l'$  вихрь  $\vec{\Omega}'$  лежит в касательной плоскости  $S'$  и  $\Sigma'$ , а значит и является касательным вектором для кривой  $l'$ .



# Первая теорема Гельмгольца: доказательство

Рассмотрим вихревую линию  $l$ , являющуюся пересечением двух вихревых поверхностей  $S$  и  $\Sigma$  в какой-то момент времени. В следующий рассматриваемый момент времени она перейдёт в линию  $l'$ , являющуюся пересечением вихревых поверхностей  $S'$  и  $\Sigma'$ , в которые перейдут вихревые поверхности  $S$  и  $\Sigma$ .

В каждой точке кривой  $l'$  вихрь  $\vec{\Omega}'$  лежит в касательной плоскости  $S'$  и  $\Sigma'$ , а значит и является касательным вектором для кривой  $l'$ .

## Результат

В рассматриваемом случае каждая вихревая линия перемещается в пространстве вместе с жидкими частицами, её образующими. Это свойство называется **сохраняемостью вихревых линий**.



# Первая теорема Гельмгольца: следствие

## Теорема

В баротропном течении идеальной жидкости в потенциальном внешнем поле частицы жидкости, образующие в некоторый момент вихревую трубку, во всё время движения будут образовывать вихревую трубку.

# Вторая теорема Гельмгольца

## Теорема

В баротропном течении идеальной жидкости в потенциальном внешнем поле интенсивность выделенной вихревой трубки будет сохраняться во время её движения.

## Вторая теорема Гельмгольца

### Теорема

В баротропном течении идеальной жидкости в потенциальном внешнем поле интенсивность выделенной вихревой трубки будет сохраняться во время её движения.

### Доказательство

Интенсивность вихревой трубки определяется циркуляцией по любому замкнутому контуру этой трубки

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{s},$$

которая по теореме о сохранении циркуляции будет равна циркуляции по контуру трубки тока, образованной из тех же жидких частиц в последующие моменты времени. Т.е. интенсивность её будет такой же.

# Литература

- *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.:Гос. издат. физ.-мат. лит., 1963.