Классические модели механики жидкости и газа в рамках континуального подхода

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики ФФ НГУ

18 ноября 2019 г.

Аннотация

Жидкость, газ, твёрдое тело основные отличия. Идеальные, не идеальные и линейные и нелинейные среды. Модели идеальной несжимаемой жидкости, идеального политропного нетеплопроводного газа, вязкой несжимаемой жидкости, вязкого сжимаемого теплопроводного газа.

В чём отличие?

Жидкость, газ, твёрдое тело

Свойство	**Газ**	**Жидкость**	**Твёрдое тело**
Сжимаемость	сильная	очень слабая	практически отсутствует
Анизотропия	нет	нет	бывает
Внутренние напряжения	функции градиента скорости (при наличие вязкости)	функции градиента скорости (при наличии вязкости)	функции градиента перемещений

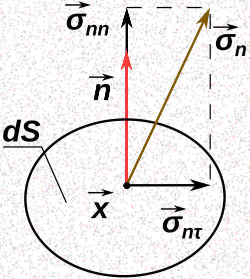
Идеальные и не идеальные среды

Идеальная среда

Идеальная среда – это такая среда, в которой отсутствует тангенциальная составляющая вектора напряжения $\vec{\sigma}_{n\tau}$ на любой площадке с нормалью $\vec{n}$, отвечающая за трение между слоями сплошной среды. При этом

$$\vec{\sigma}_n(\vec{x}) = -p(\vec{x})\vec{n}.$$

Функция $p(\vec{x})$ определяет давление в точке $\vec{x}$.



$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_{nn} + \vec{\sigma}_{n\tau}$$

Линейные и нелинейные среды

Линейность среды

Сплошная среды называется линейной, если имеет место линейная зависимость между напряжениями возникающими в ней и изменениями деформаций или изменениями скоростей деформаций.

Для *твёрдых тел* имеет место обобщённый закон Гука:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkm}\varepsilon_{km}, \quad \varepsilon_{km} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k}\right).$$

Для *жидкостей или газов*:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + D_{ijkm}e_{km}, \quad e_{km} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k}\right).$$

Такие жидкости и газы называются ньютоновскими.

Идеальная несжимаемая жидкость

Основные допущения

- Постоянная плотность среды

$$\rho = const$$

- Напряжение на площадке с произвольной нормалью одинаково и направлено вдоль неё

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}.$$

В этом случае для любого вектора $\vec{n}$ единичной длины

$$\vec{\sigma}_n = \vec{n} \cdot \sigma = -p\vec{n}.$$

Идеальная несжимаемая жидкость

Уравнения Эйлера

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0,$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{f},$$

Неизвестные функции

Четыре искомых дифференцируемых функции, определённые в области $\Omega \subset R \times R^3$:

$$\vec{v}(t,\vec{x}) = v_1(t,\vec{x})\vec{e}_1 + v_2(t,\vec{x})\vec{e}_2 + v_3(t,\vec{x})\vec{e}_3,$$

$$p = p(t,\vec{x}).$$

Заданные параметры

ρ – плотность жидкости; $\vec{f} = \vec{f}(t,\vec{x})$ – вектор массовых сил.

Идеальный политропный нетеплопроводный газ

Основные допущения

- Уравнение состояния идеального газа:

$$p = \rho R_1 T,$$

  где p, ρ, T – давление, плотность и температура газа; R_1 – газовая постоянная для выбранного газа.

- Линейная связь между удельной внутренней энергией и температурой:

$$\varepsilon = C_V T,$$

  где C_V – коэффициент теплоёмкости при постоянном объёме.

- Напряжение на площадке с произвольной нормалью одинаково и направлено вдоль неё

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}.$$

Идеальный политропный нетеплопроводный газ

Основные уравнения

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p,$$

$$C_V \frac{dT}{dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Неизвестные функции

Пять искомых дифференцируемых функции, определённых в области $\Omega \subset R \times R^3$: $\vec{v}(t,\vec{x}) = v_1(t,\vec{x})\vec{e}_1 + v_2(t,\vec{x})\vec{e}_2 + v_3(t,\vec{x})\vec{e}_3$, $\rho = \rho(t,\vec{x})$, $T = T(t,\vec{x})$.

Дополнительные соотношения

$$p = \rho R_1 T, \quad \varepsilon = C_V T,$$

где R_1, C_V – заданные параметры газа.

Тензор напряжений в вязкой ньютоновской жидкости

Связь тензора напряжений и тензора скоростей деформаций

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad \tau_{ij} = D_{ijkm} e_{km}, \quad e_{km} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k}\right).$$

В матричной форме

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \\ \tau_{32} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1123} & D_{1113} & D_{1112} & D_{1132} & D_{1131} & D_{1121} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & D_{2223} & D_{2213} & D_{2212} & D_{2232} & D_{2231} & D_{2221} \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & D_{3323} & D_{3313} & D_{3312} & D_{3332} & D_{3331} & D_{3321} \\ D_{2311} & D_{2322} & D_{2333} & D_{2323} & D_{2313} & D_{2312} & D_{2332} & D_{2331} & D_{2321} \\ D_{1311} & D_{1322} & D_{1333} & D_{1323} & D_{1313} & D_{1313} & D_{1332} & D_{1331} & D_{1321} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1233} & D_{1223} & D_{1213} & D_{1212} & D_{1232} & D_{1231} & D_{1221} \\ D_{3211} & D_{3222} & D_{3233} & D_{3223} & D_{3213} & D_{3212} & D_{3232} & D_{3231} & D_{3221} \\ D_{3111} & D_{3122} & D_{3133} & D_{3123} & D_{3113} & D_{3112} & D_{3132} & D_{3131} & D_{3121} \\ D_{2111} & D_{2122} & D_{2133} & D_{2123} & D_{2113} & D_{2112} & D_{2132} & D_{2131} & D_{2121} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{23} \\ e_{13} \\ e_{12} \\ e_{32} \\ e_{31} \\ e_{21} \end{pmatrix}$$

Тензор напряжений в вязкой ньютоновской жидкости

Изотропность свойств жидкости

Пусть $Q = (q_{pr})_{1\leq p,r\leq 3}$ произвольное ортогональное преобразование координат ($Q^{-1} = Q^T$), тогда коэффициенты тензора D в новой системе координат не меняют вид, т.е.

$$\bar{D}_{ijkm} = q_{\alpha i} q_{\beta j} q_{\gamma k} q_{\delta m} D_{\alpha\beta\gamma\delta} = D_{ijkm}.$$

Симметричность тензоров τ_{ij} и e_{ij}

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad e_{ij} = e_{ji}$$

$$\Downarrow$$

$$D_{ijkl} = D_{jikl} = D_{jilk} = D_{ijlk}$$

Тензор напряжений в вязкой ньютоновской жидкости

Изотропность свойств жидкости

Пусть $Q = (q_{pr})_{1\leq p,r\leq 3}$ произвольное ортогональное преобразование координат ($Q^{-1} = Q^T$), тогда коэффициенты тензора D в новой системе координат не меняют вид, т.е.

$$\bar{D}_{ijkm} = q_{\alpha i} q_{\beta j} q_{\gamma k} q_{\delta m} D_{\alpha\beta\gamma\delta} = D_{ijkm}.$$

Симметричность тензоров τ_{ij} и e_{ij}

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad e_{ij} = e_{ji}$$

$$\Downarrow$$

$$D_{ijkl} = D_{jikl} = D_{jilk} = D_{ijlk}$$

Тензор напряжений в вязкой ньютоновской жидкости

Инвариантность относительно отражений

$$Q_1^r = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_3^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ограничение на коэффициенты

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \\ \tau_{32} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{2323} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1313} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1212} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{3232} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{2121} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{23} \\ e_{13} \\ e_{12} \\ e_{32} \\ e_{31} \\ e_{21} \end{pmatrix}$$

Тензор напряжений в вязкой ньютоновской жидкости

Инвариантность относительно изменения порядка базиса

$$Q_1^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q_3^c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор напряжений в вязкой ньютоновской жидкости

Инвариантность относительно поворота на угол $2\pi/3$

$$Q_{120} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вязкая несжимаемая жидкость

Основные допущения

- Плотность жидкости постоянна

$$\rho = const.$$

- Тензор напряжения имеет вид

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right),$$

где p – давление жидкости; μ – коэффициент динамической вязкости; e_{ij} – тензор скоростей деформаций.

Вязкая несжимаемая жидкость

Уравнения Навье-Стокса

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0,$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{v} + \vec{f}.$$

Неизвестные функции

Четыре искомых дифференцируемых функции, определённых в области $\Omega \subset R \times R^3$: $\vec{v}(t,\vec{x}) = v_1(t,\vec{x})\vec{e}_1 + v_2(t,\vec{x})\vec{e}_2 + v_3(t,\vec{x})\vec{e}_3$, $p = p(t,\vec{x})$.

Параметры среды

ρ – плотность; μ – динамическая вязкость; $\nu = \mu/\rho$ – кинематическая вязкость жидкости; $f(t,\vec{x})$ – заданный вектор массовых сил.

Вязкий сжимаемый теплопроводный газ

Основные допущения

- Уравнение состояния газа: $p = p(\rho, T)$.
- Калорическое уравнение состояния: $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$.
- Тензор напряжения имеет вид

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda\delta_{ij} \operatorname{div} \vec{v}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right),$$

  где λ, μ – коэффициенты объёмной и динамической вязкостей; e_{ij} – тензор скоростей деформаций.
- Закон Фурье теплопроводности газа

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T,$$

  где κ – коэффициент теплопроводности.

Вязкий сжимаемый теплопроводный газ

Уравнения Навье-Стокса-Дюгема

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + (\lambda + \mu) \nabla (\operatorname{div} \vec{v}) + \rho \vec{f},$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -p \operatorname{div} \vec{v} + \lambda (\operatorname{div} \vec{v})^2 + 2\mu e_{ij} e_{ij} + \kappa \Delta T.$$

Замыкающие соотношения

$$p = p(\rho, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T).$$

Параметры среды

λ, μ – объемная и динамическая вязкости; κ – коэффициент теплопроводности; $\vec{f}$ – вектор массовых сил.

Литература

- *Дж. Мейз*. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Изд-во «Мир», 1974.