

Течения вязкой жидкости

Верецагин Антон Сергеевич

канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

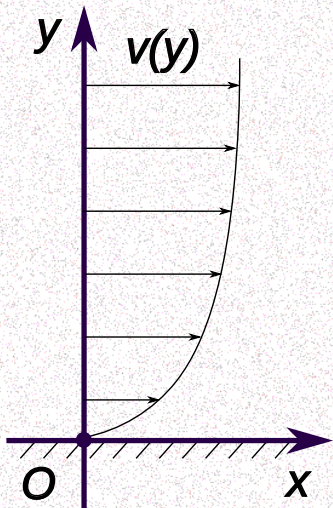
Кафедра аэрофизики и газовой динамики



11 марта 2020 г.

Понятие вязкой жидкости. Тензор напряжения для вязкой несжимаемой жидкости. Система уравнений Навье-Стокса. Постановка граничных условий. Подобие течений вязкой несжимаемой жидкости. П-теорема. Течение Пуазейля.

Понятие вязкой жидкости

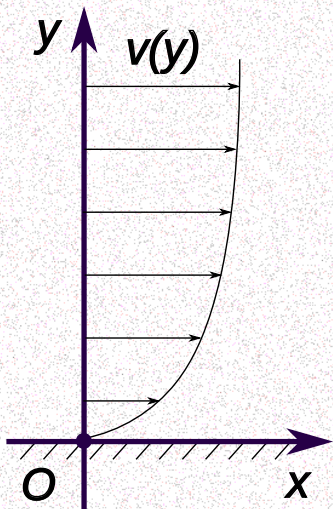


Касательная сила, действующая на стенку

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} = \rho \nu \frac{dv}{dy},$$

здесь $\mu = \rho \nu$ – коэффициент динамической вязкости; ν – коэффициент кинематической вязкости; ρ – плотность.

Понятие вязкой жидкости



Касательная сила, действующая на стенку

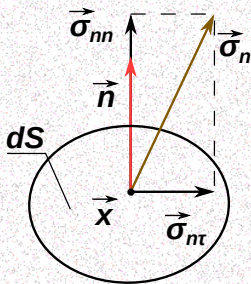
$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} = \rho \nu \frac{dv}{dy},$$

здесь $\mu = \rho \nu$ – коэффициент динамической вязкости; ν – коэффициент кинематической вязкости; ρ – плотность.

Размерность коэффициентов вязкости

$$[\mu] = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}, \quad [\nu] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Тензор напряжений вязкой несжимаемой жидкости



Разложение напряжения, возникающего в сплошной среде, на тангенциальную и нормальную составляющие

Связь тензора напряжения и тензора скоростей деформации

$$\sigma = -pI + 2\mu e,$$

где p – давление; I – единичный тензор; e – тензор скоростей деформаций, задаваемый соотношением

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right);$$

v_i – компоненты вектора скорости ($i = \overline{1, n}$).

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости

Уравнения Навье-Стокса

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{f},$$

$$c_V \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) T \right) = \frac{\kappa}{\rho} \Delta T + \frac{2\mu}{\rho} e_{ij} e_{ij},$$

Неизвестные функции, определённые и дифференцируемые в некоторой области пространства: $\vec{v}(t, \vec{x})$ – вектор скорости; $p(t, \vec{x})$ – давление; $T(t, \vec{x})$ – температура.

Константы: ρ – плотность; ν – коэффициент кинематической вязкости; κ – коэффициент температуропроводности

Обозначения: e_{ij} – компоненты тензора скоростей деформации; \vec{f} – вектор внешних сил.

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости

Система уравнений разбивается на две подсистемы:

Уравнения Навье-Стокса

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{f}.$$

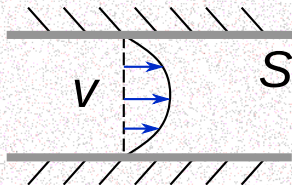
Закон динамики температуры

$$c_V \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) T \right) = \frac{\kappa}{\rho} \Delta T + \frac{2\mu}{\rho} e_{ij} e_{ij}.$$

Решив уравнения Навье-Стокса мы найдём распределение скорости и давления. Зная распределение скорости, из второй части, находится распределение температуры. Дальше будут рассматриваться только **изотермические течения** (первая часть системы).

Граничные условия для уравнения Навье-Стокса

Условия на неподвижной
границе

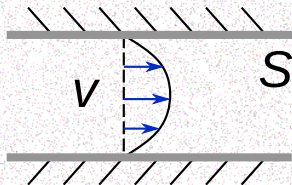


Кинематическое условие:

$$\vec{v}|_S = 0.$$

Граничные условия для уравнения Навье-Стокса

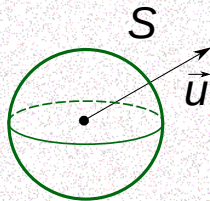
Условия на неподвижной границе



Кинематическое условие:

$$\vec{v}|_S = 0.$$

Условие на подвижной границе

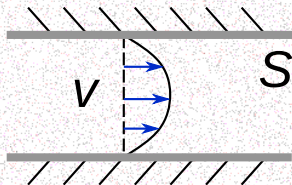


Кинематическое условие:

$$\vec{v}|_S = \vec{u}.$$

Граничные условия для уравнения Навье-Стокса

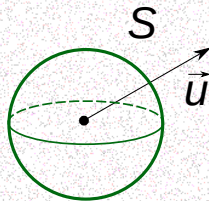
Условия на неподвижной границе



Кинематическое условие:

$$\vec{v}|_S = 0.$$

Условие на подвижной границе



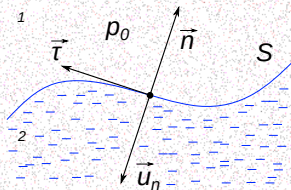
Кинематическое условие:

$$\vec{v}|_S = \vec{u}.$$

Такого вида граничные условия называются условиями
«прилипания».

Граничные условия для уравнения Навье-Стокса

Условия на свободной границе



1 – газ; 2 – вязкая жидкость.

Кинематическое условие:

$$v_n|_S = u_n.$$

Динамические условия:

$$(\vec{n} \cdot \sigma) \cdot \vec{n}|_S = p|_S = p_0,$$

$$(\vec{n} \cdot \sigma) \cdot \vec{\tau}|_S = 0.$$

Подобие при течениях вязкой несжимаемой жидкости

Определение

Два физических явления называются **подобными**, если величины, характеризующие одно явление, могут быть получены из соответствующих величин другого, взятых в сходственных пространственно-временных точках, простым умножением на *одинаковые во всех точках множители*, называемые *коэффициентами подобия*.

Подобие при течениях вязкой несжимаемой жидкости

Уравнения Навье-Стокса в декартовой системе координат

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right).$$

Подобие при течениях вязкой несжимаемой жидкости

Замена переменных

$$\begin{aligned}t &= Tt', & x &= Lx', & y &= Ly', & z &= Lz', \\v_x &= Vv'_x, & v_y &= Vv'_y, & v_z &= Vv'_z, & p &= Pp', \\X &= FX', & Y &= FY', & Z &= FZ',\end{aligned}$$

где T, L, V, P, F – характерные значения времени, размера течения, скорости, давления, силы сплошной среды. Штрихами обозначены новые безразмерные переменные.

Подобие при течениях вязкой несжимаемой жидкости

Уравнения Навье-Стокса, записанные с использованием безразмерных комплексов

$$Sh \frac{\partial v'_x}{\partial t'} + v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial v'_x}{\partial z'} = \frac{1}{Fr} X' - Eu \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial z'^2} \right),$$

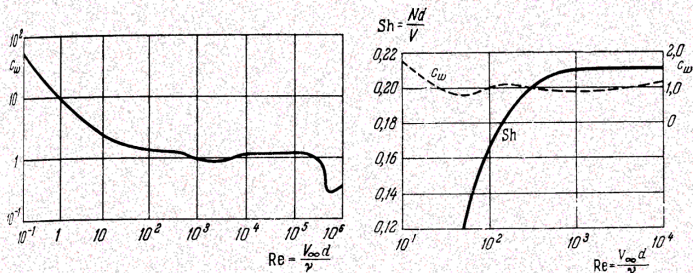
$$Sh \frac{\partial v'_y}{\partial t'} + v'_x \frac{\partial v'_y}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_y}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial v'_y}{\partial z'} = \frac{1}{Fr} Y' - Eu \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v'_y}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_y}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_y}{\partial z'^2} \right),$$

$$Sh \frac{\partial v'_z}{\partial t'} + v'_x \frac{\partial v'_z}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_z}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial v'_z}{\partial z'} = \frac{1}{Fr} Z' - Eu \frac{\partial p'}{\partial z'} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v'_z}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_z}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_z}{\partial z'^2} \right).$$

Безразмерные комплексы - критерии подобия

$$\begin{aligned} \frac{L}{VT} &= Sh - \text{число Струхала}, & \frac{P}{\rho V^2} &= Eu - \text{число Эйлера}, \\ \frac{VL}{\nu} &= Re - \text{число Рейнольдса}, & \frac{V^2}{FL} &= Fr - \text{число Фруда}. \end{aligned}$$

Колебание струн в однородном потоке воздуха



Rochko A. On the development of turbulent wakes from vortex streets. - NACA Rep., 1954, v. 1191.

Критерии подобия

$$Sh = Sh(Re) = \frac{Nd}{V_\infty}, \quad c_w = Eu(Re) = \frac{P}{\rho V_\infty^2}, \quad Re = \frac{V_\infty d}{\nu}.$$

Заданные величины: d – диаметр струны, V_∞ – скорость набегающего потока, ν – вязкость, ρ – плотность.

Неизвестные: N – частота колебаний, P – давление.

Основы теории размерности

Определение

Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **размернооднородной**, если существует такая совокупность чисел b_k ($k = \overline{1, m}$), что имеет место равенство

$$f(\alpha_1^{a_{11}} \dots \alpha_m^{a_{1m}} x_1, \dots, \alpha_1^{a_{n1}} \dots \alpha_m^{a_{nm}} x_n) = \alpha_1^{b_1} \alpha_2^{b_2} \dots \alpha_m^{b_m} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

для всех α_k ($k = \overline{1, m}$) и x_i ($i = \overline{1, n}$) в области определения.

Основы теории размерности

П-теорема (Бекингем, Федерман)

Если x_1, x_2, \dots, x_n – численные значения n физических величин, $A = (a_{ij})$ ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$) – матрица их размерностей по отношению к единицам измерения M_1, M_2, \dots, M_m , f – произвольная размернооднородная функция переменных x_1, x_2, \dots, x_n , а $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_p$ ($p = n - r$, r – ранг матрицы A) – фундаментальная система степенных одночленов переменных x_1, x_2, \dots, x_n , то при произвольных действительных числах k_1, k_2, \dots, k_n имеет место равенство

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} G(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_p).$$

Основы теории размерности

Размерности параметров в уравнениях Навье-Стокса

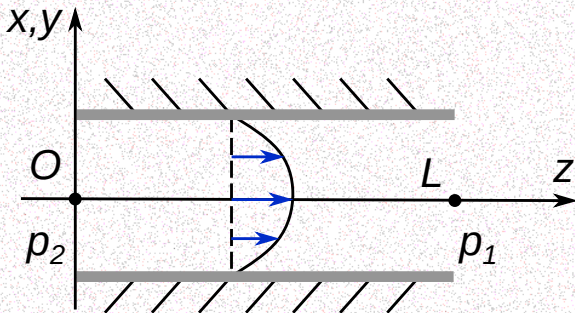
	кг	м	с
x, y, z	0	1	0
t	0	0	1
u, v, w	0	1	-1
p	1	-1	-2
g	0	1	-2
ρ	1	-3	0
μ	1	-1	-1

Ранг матрицы $r = 3$. Число размерных величин, определяющих движение равно 7. Фундаментальная система параметров Π содержит $p = n - r = 4$ параметра. Это, например, ранее введённые числа подобия Re, Sh, Eu, Fr .

Общее решение уравнений Навье-Стокса без учёта краевых и начальных условий

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} G(Re, Fr, Sh, Eu).$$

Течение Пуазейля



Постановка задачи

В трубе постоянного сечения под действием перепада давления $\Delta p = p_2 - p_1$ течёт жидкость плотности ρ и вязкостью ν . Требуется найти кинематические и динамические характеристики потока.

Постановка математической задачи

Ищем решение стационарных уравнений Навье-Стокса в виде

$$p = p(x, y, z), \quad \vec{v} = v(x, y, z)\vec{e}_z.$$

Система уравнений спроектированная на оси:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right).$$

Условия на границах:

$$p|_{z=0} = p_2, \quad p|_{z=L} = p_1,$$

$$v|_S = 0,$$

где S – поверхность трубы.

Течение Пуазейля

Решение

Так как $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ и $p = p(z)$, то из

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{p_2 - p_1}{L}.$$

Из граничных условий следует решение для давления

$$p(z) = p_2 + \frac{p_1 - p_2}{L}z$$

и задача Дирихле для определения профиля скорости

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\Delta p}{\mu L}, \quad v|_{\gamma} = 0.$$

где γ – кривая на пересечении поверхности S и плоскости Oxy .

Течение Пуазейля: плоский канал

Скорость течения

$$v(y) = \frac{\Delta p \cdot h^2}{2\mu L} \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right],$$

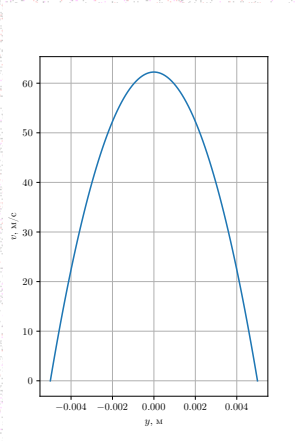
$$v_{max} = \frac{1}{2} \frac{\Delta p \cdot h^2}{\mu L}.$$

Расход по сечению

$$Q = \int_{-h}^h v(y) dy = \frac{2}{3} \frac{\Delta p \cdot h^3}{\mu L}.$$

Средняя скорость по течению

$$v_{avg} = \frac{Q}{2h} = \frac{1}{3} \frac{\Delta p \cdot h^2}{\mu L} = \frac{2}{3} v_{max}.$$



Профиль скорости при
 $\Delta p = 5 \cdot 10^4$ Па, $h = 5$ мм,
 $L = 10$ м, $\mu = 1004 \cdot 10^{-6}$ Па·с.

Течение Пуазейля: плоский канал

Закон сопротивления плоского канала

Вводя коэффициент сопротивления λ для плоского канала

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{2h} \frac{\rho v_{avg}^2}{2},$$

получим выражение для коэффициента сопротивления через число Рейнольдса

$$\lambda = \frac{24}{\text{Re}}, \text{ где } \text{Re} = \frac{v_{avg} 2h}{\nu}.$$

Течение Пуазейля: эллиптический канал

Скорость течения

$$v(x, y) = \frac{\Delta p}{2\mu L} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right),$$
$$v_{max} = \frac{\Delta p}{2\mu L} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Расход по сечению

$$Q = \int_S v(x, y) dx dy = \frac{1}{2} \pi ab v_{max}.$$

Средняя скорость по течению

$$v_{avg} = \frac{Q}{\pi ab} = \frac{1}{2} v_{max}.$$

Течение Пуазейля: круглый канал

Скорость течения

$$v(x, y) = \frac{\Delta p}{2\mu L} \frac{r^2}{2} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{r^2} \right),$$

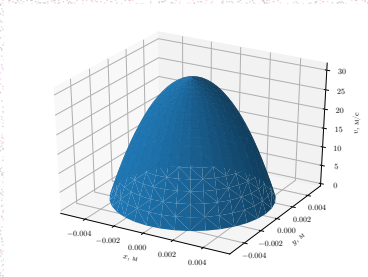
$$v_{max} = \frac{\Delta p}{2\mu L} \frac{r^2}{2}.$$

Расход по сечению

$$Q = \int_S v(x, y) dx dy = \frac{1}{2} \pi r^2 v_{max}.$$

Средняя скорость по течению

$$v_{avg} = \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{1}{2} v_{max}.$$



Профиль скорости при
 $\Delta p = 5 \cdot 10^4$ Па, $r = 5$ мм, $L = 10$ м,
 $\mu = 1004 \cdot 10^{-6}$ Па·с.

Течение Пуазейля: круглый канал

Закон сопротивления эллиптического канала

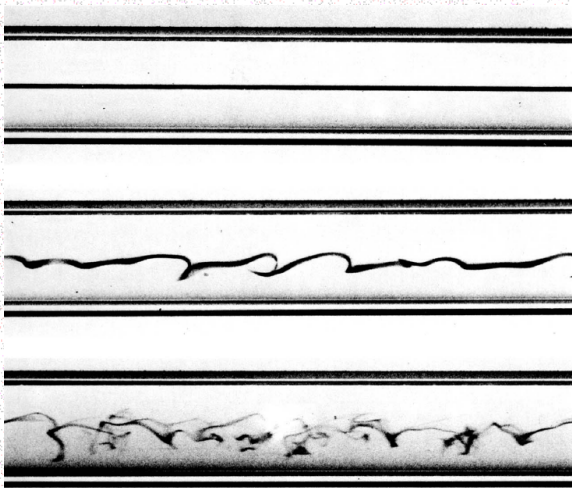
Вводя коэффициент сопротивления λ для круглого канала диаметра d

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{d} \frac{\rho v_{avg}^2}{2},$$

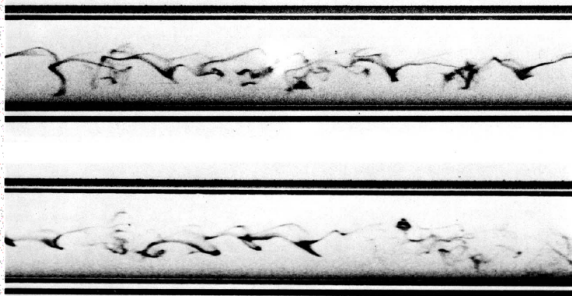
получим выражение для коэффициента сопротивления через число Рейнольдса

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}, \text{ где } \text{Re} = \frac{v_{avg} d}{\nu}.$$

Реальное течение в канале



Реальное течение в канале



Повторение эксперимента Рейнольдса с краской. Критическое число Рейнольдса Re в приведённом эксперименте оказалось ниже 13000 в отличие от оригинального эксперимента Рейнольдса в следствие уличного движения в современном Манчестере.

М. Ван-Дайк. Альбом течений жидкости и газа. М.:Мир, 1986

Литература

- *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости газа и плазмы: Учеб. для вузов. — 7-е изд., испр. — М.:Дрофа, 2003