Течения вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса

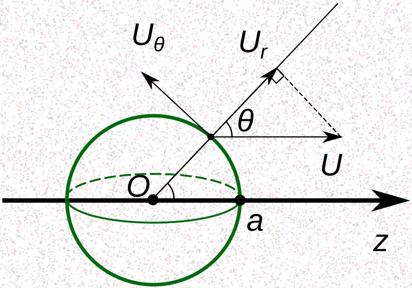
Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики ФФ НГУ

25 февраля 2019 г.

Аннотация

Обтекание сферы вязкой жидкостью



Постановка задачи (*G.G Stokes*, 1851)

Определить силу , действующую на сферу радиуса a, движущуюся со скоростью U в потоке вязкой жидкости плотности ρ и динамической вязкостью μ, при малых числах Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{2aU\rho}{\mu} \ll 1.$$

Математическая постановка задачи

Задача обтекания движущейся сферы со скоростью U эквивалентна задаче обтекания покоящейся сферы в начале координат с заданным значением скорости потока на бесконечности. Стационарное течение жидкости около сферы описывается уравнениями Навье-Стокса:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$(\nabla \cdot \vec{v})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta \vec{v}$$

с граничным условием на сфере ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$)

$$\vec{v}|_{r=a} = 0$$

и на бесконечности при $r \to \infty$

$$v_x \to 0, \quad v_y \to 0, \quad v_z \to U.$$

Уравнения Стокса

Оценка слагаемых в уравнениях Навье-Стокса

$$\frac{\rho|(\nabla\cdot\vec{v})\vec{v}|}{\mu|\Delta\vec{v}|}\sim\frac{\rho U^2}{2a}:\frac{\mu U}{(2a)^2}=\mathrm{Re}\ll 1.$$

Уравнения Стокса

Оценка слагаемых в уравнениях Навье-Стокса

$$\frac{\rho|(\nabla\cdot\vec{v})\vec{v}|}{\mu|\Delta\vec{v}|}\sim\frac{\rho U^2}{2a}:\frac{\mu U}{(2a)^2}=\mathrm{Re}\ll 1.$$

Модель Стокса для описания ползущих течений

Отбрасывая нелинейные инерционные члены в уравнении импульса из модели Навье-Стокса, получим уравнения

$$\operatorname{div}\vec{v}=0,\qquad \nabla p=\mu\Delta\vec{v},$$

которые будем решать в сферической системе координат.

Данная модель является линейной относительно функций p и $\vec{v}$ вида

$$v_r=v_r(r,\theta),\qquad v_\theta=v_\theta(r,\theta),\qquad v_\lambda=0,\qquad p=p(r,\theta).$$

Задача обтекания сферы в постановке Стокса

Основные уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \right.$$

$$\left. - \frac{2 v_r}{r^2} - \frac{2\operatorname{ctg}\theta}{r^2} v_\theta\right),$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right),$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2 v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg}\theta}{r} = 0.$$

Граничные условия

$$v_r(a,\theta) = 0, \quad v_\theta(a,\theta) = 0.$$

$$v_r \overset{r\to\infty}{\to} U\cos\theta, \quad v_\theta \overset{r\to\infty}{\to} -U\sin\theta.$$

Решение

Вид искомых функций

$$v_r(r,\theta) = f(r)\cos\theta, \quad v_\theta(r,\theta) = -g(r)\sin\theta, \quad p(r,\theta) = \mu h(r)\cos\theta.$$

Упрощение исходной системы

$$h' = f'' + \frac{2}{r}f' - \frac{4(f-g)}{r^2},$$

$$\frac{h}{r} = g'' + \frac{2}{r}g' + \frac{2(f-g)}{r^2},$$

$$f' + \frac{2(f-g)}{r} = 0.$$

Начальные условия

$$f(a) = 0, \quad g(a) = 0, \quad f(\infty) = U, \quad g(\infty) = U.$$

Решение

Метод исключения переменных

$$\begin{cases} g = f'r/2 + f, \\ h = f'''r^2/2 + 3rf'' + 2f', \\ r^3 f^{(4)} + 8r^2 f^{(3)} + 8rf'' - 8f' = 0. \end{cases}$$

Решение

Метод исключения переменных

$$\begin{cases} g = f' r/2 + f, \\ h = f''' r^2/2 + 3rf'' + 2f', \\ r^3 f^{(4)} + 8r^2 f^{(3)} + 8rf'' - 8f' = 0. \end{cases}$$

Решение для уравнения типа Эйлера

Пусть $f = r^k$, тогда

$$k(k-1)(k-2)(k-3) + 8k(k-1)(k-2) + 8k(k-1) - 8k = 0.$$

Решение

$$k = 0, \quad k = 2, \quad k = -1, \quad k = -3.$$

Решение

Общий вид f, g, h

$$f = \frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + C + Dr^2,$$

$$g = -\frac{A}{2r^3} + \frac{B}{2r} + C + 2Dr^2, \quad h = \frac{B}{r^2} + 10Dr.$$

Уточнение констант из граничных условий

$$D = 0, \quad C = U, \quad B = -\frac{3}{2}Ua, \quad A = \frac{1}{2}Ua^3.$$

Решение

Скорость и давление

$$
\begin{aligned}
v_r(r,\theta) &= U\cos\theta\left[1-\frac{3}{2}\frac{a}{r}+\frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\right],\\
v_\theta(r,\theta) &= -U\sin\theta\left[1-\frac{3}{4}\frac{a}{r}-\frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right],\\
p(r,\theta) &= -\frac{3}{2}\mu\frac{Ua}{r^2}\cos\theta.
\end{aligned}
$$

Решение

Скорость и давление

$$v_r(r,\theta) = U\cos\theta\left[1-\frac{3}{2}\frac{a}{r}+\frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\right],$$

$$v_\theta(r,\theta) = -U\sin\theta\left[1-\frac{3}{4}\frac{a}{r}-\frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right],$$

$$p(r,\theta) = -\frac{3}{2}\mu\frac{Ua}{r^2}\cos\theta.$$

Компоненты тензора напряжений на поверхности сферы

$$\sigma_{rr}|_{r=a} = \left(-p+2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)_{r=a} = \frac{3}{2}\mu\frac{Ua}{r^2}\cos\theta,$$

$$\sigma_{r\theta}|_{r=a} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right)_{r=a} = -\frac{3\mu U}{2a}\sin\theta.$$

Литература

- *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости газа и плазмы: Учеб. для вузов. — 7-е изд., испр. – М.:Дрофа, 2003