

Характеристический вид и инварианты Римана одномерных уравнений газовой динамики

Верещагин Антон Сергеевич

канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрофизики и газовой динамики



4 мая 2022 г.

Характеристики систем квазилинейных уравнений. Инварианты Римана систем квазилинейных уравнений. Характеристический вид уравнений газовой динамики. Инварианты Римана для изоэнтропических течений. Бегущие волны (волны Римана). Волны сжатия и разрежения. Центрированные волны. Автомодельные решения. Признак волны Римана. Задача о выдвигающемся поршне.

Характеристики системы квазилинейных уравнений

Основная система уравнений

Будем исследовать систему квазилинейных дифференциальных уравнений от n функций вида

$$\vec{u}_t + A(\vec{u})\vec{u}_x = \vec{f}(\vec{u}), \quad (1)$$

где $\vec{u}(t, x) = \{u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_n(t, x)\}^T$,

$$A(\vec{u}) = \begin{pmatrix} a_{11}(\vec{u}) & a_{12}(\vec{u}) & \dots & a_{1n}(\vec{u}) \\ a_{21}(\vec{u}) & a_{22}(\vec{u}) & \dots & a_{2n}(\vec{u}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(\vec{u}) & a_{n2}(\vec{u}) & \dots & a_{nn}(\vec{u}) \end{pmatrix},$$

$$\vec{f}(\vec{u}) = \{f_1(\vec{u}), f_2(\vec{u}), \dots, f_n(\vec{u})\}^T.$$

Характеристики системы квазилинейных уравнений

Собственные числа и собственные векторы матрицы A^T

Пусть матрица $A^T(\vec{u})$ имеет собственное число $\lambda(\vec{u})$, которому соответствует собственный вектор $\vec{\alpha}(\vec{u})$:

$$A^T \vec{\alpha} = \lambda \vec{\alpha} \quad (\vec{\alpha} \neq 0). \quad (2)$$

Преобразования исходной системы

Умножим систему (1) скалярно на вектор $\vec{\alpha}(\vec{u})$ и преобразуем в соответствии с (2), тогда

$$\vec{u}_t \cdot \vec{\alpha} + (A\vec{u}_x) \cdot \vec{\alpha} = \vec{f} \cdot \vec{\alpha}.$$

Выражение преобразуется:

$$(A\vec{u}_x) \cdot \vec{\alpha} = \vec{u}_x \cdot (A^T \vec{\alpha}) = \vec{u}_x \cdot \lambda \vec{\alpha} = (\lambda \vec{u}_x) \cdot \vec{\alpha}.$$

Характеристическая форма записи

Основная система, записанная в форме

$$(\vec{u}_t + \lambda \vec{u}_x) \cdot \vec{\alpha} = \vec{f} \cdot \vec{\alpha}, \quad (3)$$

называется **характеристической формой**.

Если у матрицы A^T имеется n вещественных собственных чисел и полная система из n линейно независимых собственных векторов, тогда всю систему (1) можно переписать в виде (3) и она будет называться **гиперболической**.

Инварианты Римана

Пусть $F(\vec{u})$ является потенциалом для собственного вектора $\vec{\alpha}(\vec{u})$:

$$\nabla_u F = \vec{\alpha},$$

тогда $F(\vec{u})$ называют **инвариантом Римана**.

Инварианты Римана системы квазилинейных уравнений

Рассмотрим кривую в плоскости (t, x) , называемую **характеристической** и удовлетворяющую уравнению:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(\vec{u}(t, x)), \quad (4)$$

где $\vec{u} = \vec{u}(t, x)$ – решение исходной системы уравнений (1).

Тогда полная производная от инварианта Римана $F(t, x(t))$ вдоль характеристической кривой (4) имеет вид:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = \nabla_u F \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = \alpha \cdot (\vec{u}_t + \lambda \vec{u}_x) = \vec{\alpha} \cdot \vec{f}.$$

Если у системы (1) имеется n существенно различных инвариантов Римана, то она может быть проинтегрирована вдоль характеристик.

Характеристический вид уравнений газовой динамики

Одномерная система уравнений газовой динамики

$$\rho_t + v\rho_x + \rho v_x = 0,$$

$$v_t + vv_x + \frac{p_x}{\rho} = 0,$$

$$S_t + vS_x = 0.$$

Калорическое уравнение
состояния:

$$p = p(\rho, S).$$

Характеристический вид уравнений газовой динамики

Одномерная система уравнений газовой динамики

$$\rho_t + v\rho_x + \rho v_x = 0,$$

$$v_t + vv_x + \frac{p_x}{\rho} = 0,$$

$$S_t + vS_x = 0.$$

Калорическое уравнение
состояния:

$$p = p(\rho, S).$$

Матричная форма записи

$$u_t + Au_x = 0,$$

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ S \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ c^2/\rho & v & p_S/\rho \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix}, \quad c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, S).$$

Характеристический вид уравнений газовой динамики

Характеристическое уравнение

$$\chi(\lambda) = (v - \lambda)((v - \lambda)^2 - c^2) = 0 \iff \lambda_{1,2} = v \pm c, \quad \lambda_3 = v.$$

Собственные векторы

$$\lambda_1 = v - c \Rightarrow \alpha_3 = \left(-\frac{c}{\rho}, 1, -\frac{1}{\rho c} p_S \right).$$

$$\lambda_2 = v + c \Rightarrow \alpha_2 = \left(\frac{c}{\rho}, 1, \frac{1}{\rho c} p_S \right),$$

$$\lambda_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = (0, 0, 1),$$

Характеристический вид уравнений газовой динамики

Запись через частные производные

$$S_t + vS_x = 0,$$

$$v_t + (v - c)v_x - \frac{c}{\rho} [\rho_t + (v - c)\rho_x] - \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial S} [S_t + (v - c)S_x] = 0,$$

$$v_t + (v + c)v_x + \frac{c}{\rho} [\rho_t + (v + c)\rho_x] + \frac{1}{\rho c} \frac{\partial p}{\partial S} [S_t + (v + c)S_x] = 0,$$

Запись в дифференциалах

$$dx = (v - c)dt, \quad dv - \frac{c}{\rho} d\rho - \frac{\partial p}{\partial S} \frac{1}{\rho c} dS = 0,$$

$$dx = vdt, \quad dS = 0,$$

$$dx = (v + c)dt, \quad dv + \frac{c}{\rho} d\rho + \frac{\partial p}{\partial S} \frac{1}{\rho c} dS = 0.$$

Инварианты Римана для изоэнтропических течений

Условия

Пусть $S(t, x) = S_0$ в всей области течения, тогда

$$p = p(\rho, S_0) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial S} = 0, \quad c(\rho) = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}.$$

Инварианты Римана

Найдем $s(\rho, v)$ и $r(\rho, v)$ такие, что $\nabla_{(\rho, v)} s = \alpha_1$, $\nabla_{(\rho, v)} r = \alpha_2$:

$$\frac{\partial s}{\partial \rho} = -\frac{c(\rho)}{\rho}, \quad \frac{\partial s}{\partial v} = 1 \Rightarrow s = v - \int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho.$$

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = \frac{c(\rho)}{\rho}, \quad \frac{\partial r}{\partial v} = 1 \Rightarrow r = v + \int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho.$$

Инварианты Римана для изоэнтропических течений

Условия

Пусть $S(t, x) = S_0$ в всей области течения, тогда

$$p = p(\rho, S_0) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial S} = 0, \quad c(\rho) = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}.$$

Инварианты Римана

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (v - c) \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + (v + c) \frac{\partial r}{\partial x} = 0.$$

Полученные $s(\rho, v)$ и $r(\rho, v)$ называются левым и правым инвариантом Римана соответственно.

Инварианты Римана для политропного газа

Уравнение состояния

$$p = a(S)\rho^\gamma, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1,$$

$$c^2 = a(S)\gamma\rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma p}{\rho}.$$

Инварианты Римана

$$s = v - \int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho = v - \frac{2}{\gamma-1}c, \quad r = v + \int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho = v + \frac{2}{\gamma-1}c.$$

\Downarrow

$$v = \frac{r+s}{2}, \quad c = \frac{\gamma-1}{4}(r-s).$$

Система дифференциальных уравнений изоэнтропического течения политропного газа

Общий случай

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\alpha s + \beta r) \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + (\alpha r + \beta s) \frac{\partial r}{\partial x} = 0,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4} > \frac{1}{2} > 0, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{\gamma - 1}{4}.$$

Система дифференциальных уравнений изоэнтропического течения политропного газа

Общий случай

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\alpha s + \beta r) \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + (\alpha r + \beta s) \frac{\partial r}{\partial x} = 0,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4} > \frac{1}{2} > 0, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{\gamma - 1}{4}.$$

Газ Чаплыгина $\gamma = -1$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + r \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + s \frac{\partial r}{\partial x} = 0.$$

Система дифференциальных уравнений изоэнтропического течения политропного газа

Общий случай

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\alpha s + \beta r) \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + (\alpha r + \beta s) \frac{\partial r}{\partial x} = 0,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4} > \frac{1}{2} > 0, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{\gamma - 1}{4}.$$

Газ Чаплыгина $\gamma = -1$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + r \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + s \frac{\partial r}{\partial x} = 0.$$

Случай $\gamma = 3$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + s \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + r \frac{\partial r}{\partial x} = 0.$$

Задача Коши для изоэнтропического течения политропного газа

Общий случай

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\alpha s + \beta r) \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + (\alpha r + \beta s) \frac{\partial r}{\partial x} = 0,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4}, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{\gamma - 1}{4}, \quad \gamma \neq 1.$$

Начальные условия при $t = 0$:

$$s(x, 0) = s_0(x), \quad r(x, 0) = r_0(x).$$

В этом случае из общей теории следует существование решения в некоторой полосе $0 \leq t < t_0$; величина t_0 есть момент времени, в который производные решения становятся неограниченными.

Определение

Если в какой-то области изоэнтропического течения один из инвариантов Римана остается постоянным, то такое течение называют **волной Римана**, или **бегущей волной**.

Характеристики в области бегущей волны

Уравнения бегущей волны

Пусть в некоторой области $r = r_0 = \text{const}$, тогда течение будет описываться уравнением:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\alpha s + \beta r_0) \frac{\partial s}{\partial x} = 0,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4}, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{\gamma - 1}{4}, \quad \gamma \neq 1.$$

Характеристики в области бегущей волны

Уравнения бегущей волны

Пусть в некоторой области $r = r_0 = \text{const}$, тогда течение будет описываться уравнением:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\alpha s + \beta r_0) \frac{\partial s}{\partial x} = 0,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4}, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{\gamma - 1}{4}, \quad \gamma \neq 1.$$

Уравнения характеристик

Вдоль линии

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \alpha s(x, t) + \beta r_0$$

сохраняется инвариант $s(x, t)$, это означает, что характеристики будут **прямыми линиями**.

Цепочка алгебраических следствий

$$\frac{\partial s}{\partial x} > 0 \quad \text{и} \quad \begin{aligned} v &= \frac{1}{2}(r_0 + s) &\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} > 0, \\ c &= \frac{\gamma - 1}{4}(r_0 - s) &\Rightarrow \frac{\partial c}{\partial x} < 0 &\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial x} < 0. \end{aligned}$$

Волны сжатия и разрежения в случае бегущей s -волны

Цепочка алгебраических следствий

$$\frac{\partial s}{\partial x} > 0 \quad \text{и} \quad \begin{aligned} v &= \frac{1}{2}(r_0 + s) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} > 0, \\ c &= \frac{\gamma - 1}{4}(r_0 - s) \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial x} < 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial x} < 0. \end{aligned}$$

Условия существования волн сжатия и разрежения

Таким образом, в области, где инвариант Римана $s(t, x)$ увеличивается, там происходит разгон течения с одновременным его *расширением*. Такое течение будет называться **волной разрежения**.

Волны сжатия и разрежения в случае бегущей s -волны

Цепочка алгебраических следствий

$$\frac{\partial s}{\partial x} > 0 \quad \text{и} \quad \begin{aligned} v &= \frac{1}{2}(r_0 + s) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} > 0, \\ c &= \frac{\gamma - 1}{4}(r_0 - s) \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial x} < 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial x} < 0. \end{aligned}$$

Условия существования волн сжатия и разрежения

Таким образом, в области, где инвариант Римана $s(t, x)$ увеличивается, там происходит разгон течения с одновременным его *расширением*. Такое течение будет называться **волной разрежения**.

В случае *уменьшения* инварианта $s(t, x)$, наоборот, скорость $v(t, x)$ будет *уменьшаться*, а плотность $\rho(t, x)$ — *увеличиваться*. Такая бегущая волна будет называться **волной сжатия**.

Цепочка алгебраических следствий

$$\frac{\partial r}{\partial x} > 0 \quad \text{и} \quad \begin{aligned} v &= \frac{1}{2}(r + s_0) &\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} > 0, \\ c &= \frac{\gamma - 1}{4}(r - s_0) &\Rightarrow \frac{\partial c}{\partial x} > 0 &\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial x} > 0. \end{aligned}$$

Волны сжатия и разрежения в случае бегущей r -волны

Цепочка алгебраических следствий

$$\frac{\partial r}{\partial x} > 0 \quad \text{и} \quad \begin{aligned} v &= \frac{1}{2}(r + s_0) &\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} > 0, \\ c &= \frac{\gamma - 1}{4}(r - s_0) &\Rightarrow \frac{\partial c}{\partial x} > 0 &\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial x} > 0. \end{aligned}$$

Условия существования волн сжатия и разрежения

Таким образом, в области, где инвариант Римана $r(t, x)$ увеличивается, будет реализовываться **волна сжатия**.

Волны сжатия и разрежения в случае бегущей r -волны

Цепочка алгебраических следствий

$$\frac{\partial r}{\partial x} > 0 \quad \text{и} \quad \begin{aligned} v &= \frac{1}{2}(r + s_0) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} > 0, \\ c &= \frac{\gamma - 1}{4}(r - s_0) \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial x} > 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial x} > 0. \end{aligned}$$

Условия существования волн сжатия и разрежения

Таким образом, в области, где инвариант Римана $r(t, x)$ увеличивается, будет реализовываться **волна сжатия**.

И, наоборот, в случае уменьшения инварианта $s(t, x)$ будет реализовываться **волна разрежения**.

Центрированные волны

Определение

Волна Римана ($r = r_0$) называется **центрированной**, если s -характеристики образуют пучок прямых, выходящих из одной точки (t_0, x_0) . Так как s постоянен вдоль любой характеристики, то

$$s = s \left(\frac{x - x_0}{t - t_0} \right), \quad r = r_0.$$

Определение

Волна Римана ($s = s_0$) называется **центрированной**, если r -характеристики образуют пучок прямых, выходящих из одной точки (t_0, x_0) . Так как r постоянен вдоль любой характеристики, то

$$r = r \left(\frac{x - x_0}{t - t_0} \right), \quad s = s_0.$$

Определение

Автомодельными называются решения, зависящие от переменной

$$y = \frac{x - x_0}{t - t_0}.$$

Определение

Автомодельными называются решения, зависящие от переменной

$$y = \frac{x - x_0}{t - t_0}.$$

Утверждение

Центрированные волны Римана дают все автомодельные решения уравнений газовой динамики.

Предположение

Пусть все параметры газа: плотность ρ , скорость v , энтропия S – зависят от $y = \frac{x - x_0}{t - t_0}$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{y}{t - t_0} \frac{d}{dy}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{t - t_0} \frac{d}{dy}.$$

Одномерная система уравнений газовой динамики

$$-y \frac{d\rho}{dy} + v \frac{d\rho_x}{dy} + \rho \frac{dv}{dy} = 0,$$

$$-y \frac{dv}{dy} + v \frac{dv}{dy} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = 0,$$

$$-y \frac{dS}{dy} + v \frac{dS}{dy} = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что

$$S = S_0, \quad p = p(\rho, S_0)$$

и можно далее использовать инварианты Римана.

Система уравнений газовой динамики в терминах инвариантов Римана в автомодельных переменных для политропного газа

$$\left\{ \begin{array}{l} -y \frac{ds}{dy} + (\alpha s + \beta r) \frac{ds}{dy} = 0, \\ -y \frac{dr}{dy} + (\alpha r + \beta s) \frac{dr}{dy} = 0. \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} (\alpha s + \beta r - y) \frac{ds}{dy} = 0, \\ (\alpha r + \beta s - y) \frac{dr}{dy} = 0. \end{array} \right.$$

Система уравнений газовой динамики в терминах инвариантов Римана в автомодельных переменных для политропного газа

$$\begin{cases} -y \frac{ds}{dy} + (\alpha s + \beta r) \frac{ds}{dy} = 0, \\ -y \frac{dr}{dy} + (\alpha r + \beta s) \frac{dr}{dy} = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} (\alpha s + \beta r - y) \frac{ds}{dy} = 0, \\ (\alpha r + \beta s - y) \frac{dr}{dy} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = s_0, \\ r = r_0. \end{cases} \quad \begin{cases} s = s_0, \\ r = \frac{y - \beta s_0}{\alpha}. \end{cases} \quad \begin{cases} r = r_0, \\ s = \frac{y - \beta r_0}{\alpha}. \end{cases} \quad \begin{cases} r = \frac{y}{\alpha + \beta}, \\ s = \frac{y}{\alpha + \beta}. \end{cases}$$

Последний вариант невозможен в силу того, что дает нулевую скорость звука во всей области течения, поэтому любое автомодельное решение является волной Римана.

Решение для политропного газа для волн Римана

Предположение

Пусть v_0 , p_0 , c_0 значение скорости, давления и скорости звука для некоторой точки волны Римана.

$$r = r_0$$

$$c = c_0 \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v - v_0}{c_0} \right), \quad p = p_0 \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v - v_0}{c_0} \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}.$$

$$s = s_0$$

$$c = c_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v - v_0}{c_0} \right), \quad p = p_0 \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v - v_0}{c_0} \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}.$$

Признак волны Римана

Утверждение

Всякое непрерывное течение, примыкающее к зоне постоянного течения, есть волна Римана.

Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. Изд. 2-е, Главная редакция физ.-мат. лит. Изд. «Наука», М., 1978.