Течения вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент

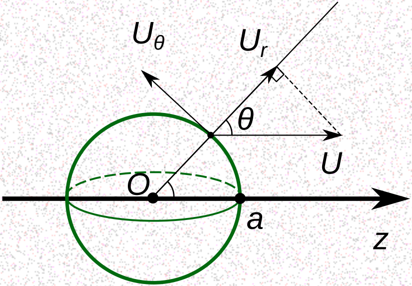
Кафедра аэрофизики и газовой динамики

5 октября 2022 г.

Аннотация

Задача обтекания сферы вязкой жидкостью. Модель Стокса. Решение задачи обтекания сферы в рамках модели Стокса. Сравнение со случаем обтекания идеальной жидкости. Сила Стокса. Применимость теории Стокса. Формулы Озеена, Озеена – Гольдштейна, Буссинеска.

Обтекание сферы вязкой жидкостью



Постановка задачи (*G.G Stokes*, 1851)

Определить силу, действующую на сферу радиуса a, движущуюся со скоростью U в потоке вязкой жидкости, плотности ρ и динамической вязкости μ, при малых числах Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{2aU\rho}{\mu} \ll 1.$$

Математическая постановка задачи

Задача обтекания движущейся сферы со скоростью U эквивалентна задаче обтекания покоящейся сферы в начале координат с заданным значением скорости потока на бесконечности. Стационарное течение жидкости около сферы описывается уравнениями Навье – Стокса:

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0,$$

$$(\nabla \cdot \vec{v})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta \vec{v}$$

с граничным условием на сфере ($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$),

$$\vec{v}|_{r=a} = 0$$

и на бесконечности при $r \to \infty$

$$v_x \to 0, \quad v_y \to 0, \quad v_z \to U.$$

Оценка слагаемых в уравнениях Навье – Стокса

$$\frac{\rho|(\nabla\cdot\vec{v})\vec{v}|}{\mu|\Delta\vec{v}|}\sim\frac{\rho U^2}{2a}:\frac{\mu U}{(2a)^2}=\mathrm{Re}\ll 1$$

Уравнения Стокса

Оценка слагаемых в уравнениях Навье – Стокса

$$\frac{\rho|(\nabla\cdot\vec{v})\vec{v}|}{\mu|\Delta\vec{v}|}\sim\frac{\rho U^2}{2a}:\frac{\mu U}{(2a)^2}=\mathrm{Re}\ll 1$$

Модель Стокса для описания ползущих течений

Отбрасывая нелинейные инерционные члены в уравнении импульса из модели Навье – Стокса, получим уравнения:

$$\operatorname{div}\vec{v}=0,\quad \nabla p=\mu\Delta\vec{v},$$

которые будем решать в сферической системе координат.

Данная модель является линейной относительно функций p и $\vec{v}$ вида:

$$v_r=v_r(r,\theta),\quad v_\theta=v_\theta(r,\theta),\quad v_\lambda=0,\quad p=p(r,\theta).$$

Задача обтекания сферы в постановке Стокса

Основные уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \right.$$

$$\left. - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2\operatorname{ctg}\theta}{r^2}v_\theta\right),$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right),$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta\operatorname{ctg}\theta}{r} = 0.$$

Граничные условия

$$v_r(a,\theta) = 0, \quad v_\theta(a,\theta) = 0.$$

$$v_r \stackrel{r\to\infty}{\to} U\cos\theta, \quad v_\theta \stackrel{r\to\infty}{\to} -U\sin\theta.$$

Решение

Вид искомых функций

$$v_r(r,\theta) = f(r)\cos\theta, \quad v_\theta(r,\theta) = -g(r)\sin\theta, \quad p(r,\theta) = \mu h(r)\cos\theta.$$

Упрощение исходной системы

$$h' = f'' + \frac{2}{r}f' - \frac{4(f-g)}{r^2},$$

$$\frac{h}{r} = g'' + \frac{2}{r}g' + \frac{2(f-g)}{r^2},$$

$$f' + \frac{2(f-g)}{r} = 0.$$

Начальные условия

$$f(a) = 0, \quad g(a) = 0, \quad f(\infty) = U, \quad g(\infty) = U.$$

Решение

Метод исключения переменных

$$\begin{cases} g = f'r/2 + f, \\ h = f'''r^2/2 + 3rf'' + 2f', \\ r^3 f^{(4)} + 8r^2 f^{(3)} + 8rf'' - 8f' = 0. \end{cases}$$

Решение

Метод исключения переменных

$$\begin{cases} g = f'r/2 + f, \\ h = f'''r^2/2 + 3rf'' + 2f', \\ r^3 f^{(4)} + 8r^2 f^{(3)} + 8rf'' - 8f' = 0. \end{cases}$$

Решение для уравнения типа Эйлера

Пусть $f = r^k$, тогда

$$k(k-1)(k-2)(k-3) + 8k(k-1)(k-2) + 8k(k-1) - 8k = 0.$$

Решение:

$$k = 0, \quad k = 2, \quad k = -1, \quad k = -3.$$

Решение

Общий вид f, g, h

$$f = \frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + C + Dr^2,$$

$$g = -\frac{A}{2r^3} + \frac{B}{2r} + C + 2Dr^2, \quad h = \frac{B}{r^2} + 10Dr.$$

Уточнение констант из граничных условий

$$D = 0, \quad C = U, \quad B = -\frac{3}{2}Ua, \quad A = \frac{1}{2}Ua^3.$$

Скорость и давление

$$
\begin{aligned}
v_r(r,\theta) &= U\cos\theta\left[1-\frac{3}{2}\frac{a}{r}+\frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\right],\\
v_\theta(r,\theta) &= -U\sin\theta\left[1-\frac{3}{4}\frac{a}{r}-\frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right],\\
p(r,\theta) &= -\frac{3}{2}\mu\frac{Ua}{r^2}\cos\theta.
\end{aligned}
$$

Сравнение с обтеканием сферы идеальной жидкостью

Коэффициент давления

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = -\frac{3\mu}{\rho U a}\frac{\cos\theta}{(r/a)^2} = -\frac{6}{\mathrm{Re}}\frac{\cos\theta}{(r/a)^2}$$

Сравнение с обтеканием сферы идеальной жидкостью

Коэффициент давления

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = -\frac{3\mu}{\rho U a}\frac{\cos\theta}{(r/a)^2} = -\frac{6}{\mathrm{Re}}\frac{\cos\theta}{(r/a)^2}$$

(1) Коэффициент давления является функцией числа Рейнольдса Re и угла θ.

Сравнение с обтеканием сферы идеальной жидкостью

Коэффициент давления

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = -\frac{3\mu}{\rho U a}\frac{\cos\theta}{(r/a)^2} = -\frac{6}{\mathrm{Re}}\frac{\cos\theta}{(r/a)^2}$$

(1) Коэффициент давления является функцией числа Рейнольдса Re и угла θ.

(2) Распределение давления не симметрично относительно миделевой плоскости так, что главный вектор сил давления отличен от 0 (парадокс Даламбера не имеет место).

Сравнение с обтеканием сферы идеальной жидкостью

Коэффициент давления

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = -\frac{3\mu}{\rho U a}\frac{\cos\theta}{(r/a)^2} = -\frac{6}{\mathrm{Re}}\frac{\cos\theta}{(r/a)^2}$$

(1) Коэффициент давления является функцией числа Рейнольдса Re и угла θ.

(2) Распределение давления не симметрично относительно миделевой плоскости так, что главный вектор сил давления отличен от 0 (парадокс Даламбера не имеет место).

(3) Коэффициент давления в критических точках не равен единице; при $\theta = \pi/2$ давление равно давлению в невозмущенном потоке; максимальное разряжение достигается в задней критической точке.

Сила, действующая на тело со стороны жидкости

Компоненты тензора напряжений в сферической системе координат

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \sigma_{r\theta} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v\theta}{r}\right),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p+2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right), \quad \sigma_{\theta\lambda} = \mu\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} - \frac{v_\lambda \operatorname{ctg}\theta}{r}\right),$$

$$\sigma_{\lambda\lambda} = -p + 2\mu\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg}\theta}{r}\right),$$

$$\sigma_{\lambda r} = \mu\left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \lambda} - \frac{v_\lambda}{r}\right).$$

Сила

$$\vec{F} = \int_S \vec{n}\cdot\sigma dS,$$

где S – поверхность тела; $\vec{n}$ – вектор внешней единичной нормали, направленный в жидкость.

Сила Стокса

Компоненты тензора напряжений на поверхности сферы

$$\sigma_{rr}|_{r=a} = \left(-p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}\right)_{r=a} = \frac{3}{2}\mu\frac{U}{a}\cos\theta,$$

$$\sigma_{\theta r}|_{r=a} = \sigma_{r\theta}|_{r=a} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)_{r=a} = -\frac{3\mu U}{2a}\sin\theta.$$

Сила Стокса

Компоненты тензора напряжений на поверхности сферы

$$\sigma_{rr}|_{r=a} = \left(-p + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)_{r=a} = \frac{3}{2}\mu\frac{U}{a}\cos\theta,$$

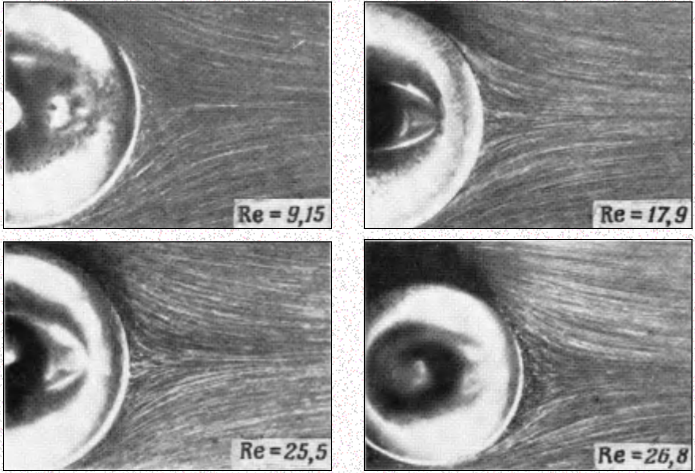
$$\sigma_{\theta r}|_{r=a} = \sigma_{r\theta}|_{r=a} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)_{r=a} = -\frac{3\mu U}{2a}\sin\theta.$$

Сила, действующая на сферу

$$W = \int\limits_S (\sigma_{rr}\cos\theta - \sigma_{r\theta}\sin\theta)dS = \int\limits_0^\pi (\sigma_{rr}\cos\theta - \sigma_{r\theta}\sin\theta)2\pi a^2\sin\theta d\theta =$$

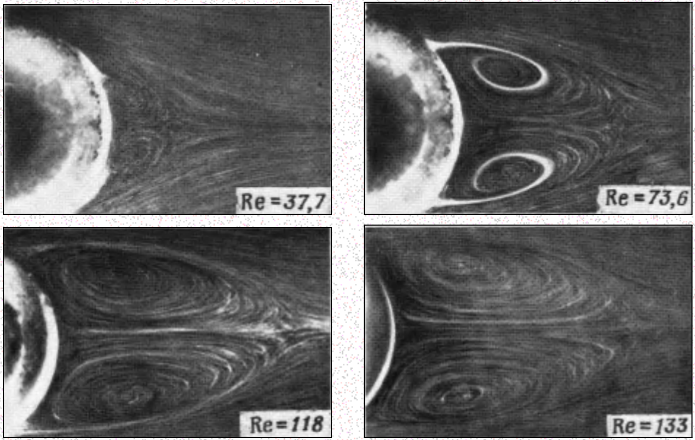
$$= 3\pi\mu Ua\int\limits_0^\pi \sin\theta d\theta = 6\pi\mu Ua.$$

Границы применимости формулы Стокса



Линии тока в осевой плоскости установившегося течения около сферы радиуса *a* (Танеда, 1956б)

Границы применимости формулы Стокса



Линии тока в осевой плоскости установившегося течения около сферы радиуса *a* (Танеда, 1956б)

Коэффициент сопротивления

Коэффициент сопротивления для решения Стокса

$$c_z = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho U^2 \pi a^2} = \frac{6\pi\mu a U}{\frac{1}{2}\rho U^2 \pi a^2} = \frac{24}{\mathrm{Re}}$$

Коэффициент сопротивления

Коэффициент сопротивления для решения Стокса

$$c_z = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho U^2 \pi a^2} = \frac{6\pi\mu a U}{\frac{1}{2}\rho U^2 \pi a^2} = \frac{24}{\mathrm{Re}}$$

Теория Озеена и Озеена – Гольдштейна

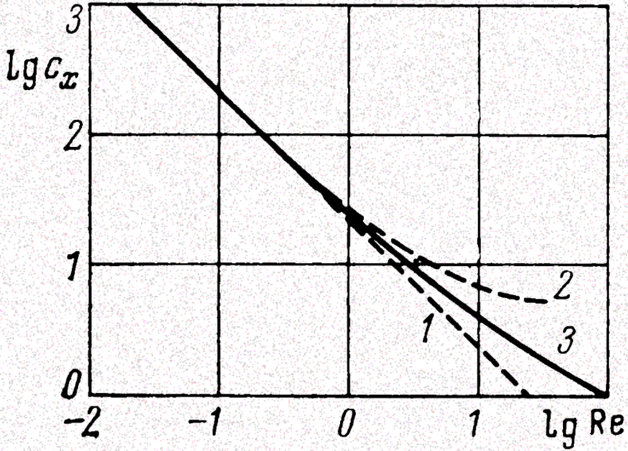
$$c_z = \frac{24}{\mathrm{Re}}\left(1 + \frac{3}{16}\,\mathrm{Re} - \frac{19}{1280}\,\mathrm{Re}^2 + \ldots\right)$$

Если сохранить только первый член, то будет формула Стокса, если первые два – формула Озеена и т.д.

Формула Озеена получается при линеаризации конвективного слагаемого в уравнениях Навье – Стокса по формуле

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} \approx (\vec{U}\cdot\nabla)\vec{v}.$$

Сравнение теорий



Зависимость коэффициента сопротивления сферы от числа Рейнольдса (1 – Стокс, 2 – Озеен, 3 – эксперимент)

Другие решения уравнений Стокса

Постановка задачи

Определить силу сопротивления сферы радиуса a потоку вязкой несжимаемой жидкости плотности ρ и вязкости μ, движущемуся поступательно, с заданной переменной скоростью $\vec{U}(t)$ ($\vec{U}(0) = 0$).

Другие решения уравнений Стокса

Постановка задачи

Определить силу сопротивления сферы радиуса a потоку вязкой несжимаемой жидкости плотности ρ и вязкости μ, движущемуся поступательно, с заданной переменной скоростью $\vec{U}(t)$ ($\vec{U}(0) = 0$).

Формула Буссинеска

$$\vec{W} = -\underbrace{6\pi\mu a\vec{U}(t)}_{\text{Стокс}} \underbrace{-\frac{2}{3}\pi\rho a^3\vec{U}'(t)}_{\text{присоединенная масса}} \underbrace{-6\pi\mu a^2\frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}\int\limits_0^t \frac{\vec{U}'(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}}_{\text{Бассе}}$$

Другие решения уравнений Стокса

Постановка задачи

Определить силу сопротивления сферы радиуса a потоку вязкой несжимаемой жидкости плотности ρ и вязкости μ, движущемуся поступательно, с заданной переменной скоростью $\vec{U}(t)$ ($\vec{U}(0) = 0$).

Формула Буссинеска

$$\vec{W} = -\underbrace{6\pi\mu a\vec{U}(t)}_{\text{Стокс}} \underbrace{-\frac{2}{3}\pi\rho a^3\vec{U}'(t)}_{\text{присоединенная масса}} \underbrace{-6\pi\mu a^2\frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}\int_0^t \frac{\vec{U}'(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}}_{\text{Бассе}}$$

Сила для импульсно приведенного из состояния покоя в движение шара до скорости U_0:

$$W = 6\pi\mu a U_0\left(1 + \sqrt{\frac{a^2}{\pi\nu t}}\right).$$

Литература

1. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. — М.: Мир, 1973.
2. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.:Гос. издат. физ.-мат. лит., 1963.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. – 3-е изд., перераб. — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986.
4. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости газа и плазмы: Учеб. для вузов. — 7-е изд., испр. – М.:Дрофа, 2003.