

Законы сохранения в механике сплошных сред

Верецагин Антон Сергеевич

канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрофизики и газовой динамики



27 октября 2021 г.

Траектория движения сплошной среды. Формула Эйлера. Законы сохранения параметров сплошной среды в интегральной и дифференциальной форме.

Траектории движения точек и теорема об определителе

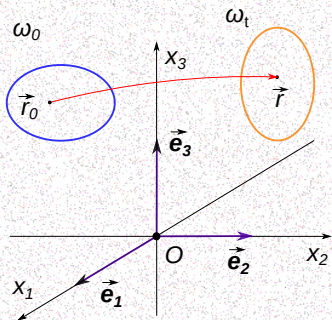


Иллюстрация перемещения сплошной среды

ω_0, ω_t – положение части сплошной среды в начальный момент времени и момент t .

$$\vec{r}_0 = \xi^1 \vec{e}_1 + \xi^2 \vec{e}_2 + \xi^3 \vec{e}_3,$$

$$\vec{r} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 + x^3 \vec{e}_3.$$

Траектории движения

Траектории движения жидких частиц задаются функцией

$$\vec{x} = \vec{x}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

где $\vec{\xi}, \vec{x}$ – лагранжевы и эйлеровы координаты частицы.

Определение траекторий по заданному полю движения

Поле скоростей

Поле скоростей частиц сплошной среды в эйлеровой системе координат задается функцией $\vec{v}(t, x_1, x_2, x_3)$. В лагранжевой системе координат скорость определяется соотношением

$$\vec{v}(t, \vec{\xi}) = \frac{\partial \vec{x}(t, \vec{\xi})}{\partial t}.$$

Задача определения траекторий движения по заданному полю скоростей

По заданному полю скоростей $\vec{v}(t, \vec{x})$ требуется найти траектории движения частиц $x^i = x^i(t, \vec{\xi})$ с лагранжевыми координатами $(\vec{\xi})$:

$$\frac{\partial x^i}{\partial t} = v^i(t, \vec{x}), \quad x^i|_{t=0} = \xi^i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Уравнения для нахождения матрицы Якоби

Матричное уравнение для нахождения матрицы Якоби

Дифференцируя уравнения для нахождения траекторий по ξ^j , получим:

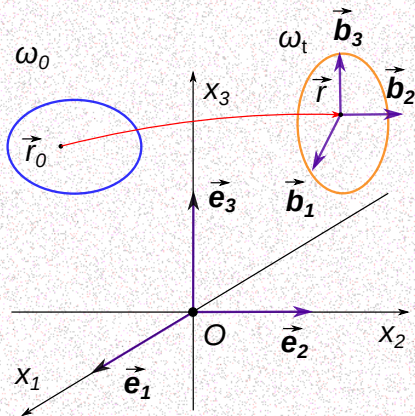
$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^j}, \quad \left. \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \right|_{t=0} = \delta_j^i.$$

Тогда матрица Якоби $y_{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = AY, \quad Y|_{t=0} = E,$$

где A – матрица, составленная из производных $\frac{\partial v^i}{\partial x^j}$; E – единичная матрица.

Геометрический смысл определителя



Сопутствующий базис

$$\vec{b}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \xi^i} \vec{e}_j$$

Элементарный объем

$$\Delta(t, \vec{\xi}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \xi^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \xi^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix} =$$
$$= \vec{b}_1 \cdot (\vec{b}_2 \times \vec{b}_3)$$

Дифференцирование определителя матрицы Якоби

Обозначим $\Delta(t, \vec{\xi}) = \det Y(t, \vec{\xi})$, тогда из формулы определителя как суммы произведений его элементов и правила дифференцирования произведения имеем:

$$\begin{aligned}\Delta'(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} y'_{11} & y'_{12} & y'_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y'_{21} & y'_{22} & y'_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y'_{31} & y'_{32} & y'_{33} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Дифференцирование определителя матрицы Якоби

Из матричного уравнения $\frac{dY}{dt} = AY$ следует, что

$$y'_{1j} = a_{11}y_{1j} + a_{12}y_{2j} + a_{13}y_{3j},$$

поэтому

$$(y'_{11}, y'_{12}, y'_{13}) = a_{11}(y_{11}, y_{12}, y_{13}) + a_{12}(y_{21}, y_{22}, y_{23}) + a_{13}(y_{31}, y_{32}, y_{33}).$$

Отсюда, вычитая из первой строки с производными линейную комбинацию остальных строк, получаем:

$$\begin{vmatrix} y'_{11} & y'_{12} & y'_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}y_{11} & a_{11}y_{12} & a_{11}y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\Delta(t).$$

Дифференцирование определителя матрицы Якоби

По аналогии можно получить, что

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y'_{21} & y'_{22} & y'_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} = a_{22} \Delta(t), \quad \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y'_{31} & y'_{32} & y'_{33} \end{vmatrix} = a_{33} \Delta(t).$$

Таким образом,

$$\Delta'(t) = (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \Delta(t) = \operatorname{tr} A \Delta(t).$$

Правило дифференцирования определителя матрицы Якоби, или формула Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \right| = \left| \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \right| \left(\frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^3}{\partial x^3} \right) = \left| \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \right| \operatorname{div}_x \vec{v}$$

Определение

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla).$$

Свойства

Пусть $f = f(t, \vec{x})$, $g = g(t, \vec{x})$, $\vec{x} = \vec{x}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ тогда

$$\frac{d}{dt}(f + g) = \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(f \cdot g) = \frac{df}{dt} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dt},$$

$$\frac{\partial f(t, \vec{\xi})}{\partial t} = \frac{df(t, \vec{x})}{dt}.$$

Закон дифференцирования интеграла, зависящего от времени

Упрощения

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} F(t, \vec{x}) d\vec{x} &= \frac{d}{dt} \int_{\omega_0} F(t, \vec{\xi}) \Delta(t, \vec{\xi}) d\vec{\xi} = \int_{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} (F(t, \vec{\xi}) \Delta(t, \vec{\xi})) d\vec{\xi} = \\&= \int_{\omega_0} \left(\frac{\partial F(t, \vec{\xi})}{\partial t} \Delta(t, \vec{\xi}) + F(t, \vec{\xi}) \frac{\partial \Delta(t, \vec{\xi})}{\partial t} \right) d\vec{\xi} = \\&= \int_{\omega_0} \left(\frac{\partial F(t, \vec{\xi})}{\partial t} + F(t, \vec{\xi}) \operatorname{div}_x \vec{v}(t, \vec{\xi}) \right) \Delta(t, \vec{\xi}) d\vec{\xi} = \\&= \int_{\omega_t} \left(\frac{\partial F(t, \vec{x})}{\partial t} + \frac{\partial F(t, \vec{x})}{\partial x^i} v^i(t, \vec{x}) + F(t, \vec{x}) \operatorname{div}_x \vec{v}(t, \vec{x}) \right) d\vec{x}\end{aligned}$$

Закон дифференцирования интеграла, зависящего от времени

Окончательный вид

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} F(t, \vec{x}) d\vec{x} = \int_{\omega_t} \left(\frac{dF(t, \vec{x})}{dt} + F(t, \vec{x}) \operatorname{div}_x \vec{v}(t, \vec{x}) \right) d\vec{x},$$

где d/dt – оператор полного дифференцирования в правой части равенства, который задается формулой:

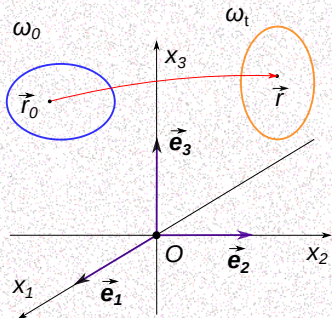
$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla).$$

Упрощения

Легко показать, что для $F = F(t, \vec{x})$, $\vec{v} = \vec{v}(t, \vec{x})$:

$$\frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div}(F\vec{v}).$$

Закон сохранения массы сплошной среды



Интегральный вид ЗСМ

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho(t, \vec{x}) d\vec{x} = 0,$$

где $\rho(t, \vec{x})$ – плотность жидкой частицы в точке \vec{r} в момент времени t .

Дифференциальная форма

Консервативная

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Неконсервативная

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Закон сохранения импульса сплошной среды

Интегральная форма

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho \vec{v} d\vec{x} = \int_{s_t} \vec{\sigma}_n dS + \int_{\omega_t} \rho \vec{f} d\vec{x},$$

где $\rho(t, \vec{x})$, $\vec{v}(t, \vec{x})$ – плотность и скорость материальной точки сплошной среды; $\vec{\sigma}_n(t, \vec{x})$ – напряжение, возникающее на обозначенной s_t поверхности объема ω_t , на площадке с внешней единичной нормалью \vec{n} ; $\vec{f}(t, \vec{x})$ – массовая сила, действующая на сплошную среду.

Дифференциальная форма

Консервативная

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v} - \sigma) = \rho \vec{f}$$

Неконсервативная

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \operatorname{div} \sigma = \rho \vec{f}$$

Закон сохранения момента импульса сплошной среды

Интегральная форма

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \left(\rho \vec{v} \times \vec{x} + \rho \vec{k} \right) d\vec{x} = \int_{s_t} \vec{\sigma}_n \times \vec{x} dS + \int_{\omega_t} \rho \vec{f} \times \vec{x} d\vec{x} + \\ + \int_{\omega_t} \rho \vec{h} d\vec{x} + \int_{\omega_t} \vec{M}_n dS, \end{aligned}$$

где $\rho(t, \vec{x})$, $\vec{v}(t, \vec{x})$ – плотность и скорость материальной точки сплошной среды; $\vec{\sigma}_n(t, \vec{x})$ – напряжение, возникающее на обозначенной s_t поверхности объема ω_t , на площадке с внешней единичной нормалью \vec{n} ; $\vec{f}(t, \vec{x})$ – массовая сила, действующая на сплошную среду; \vec{k} – плотность собственного момента количества движения; \vec{h} , \vec{M}_n – плотность массовых и поверхностных пар.

Предположения

$$\vec{k} = \vec{h} = \vec{0}, \quad \vec{M}_n = \vec{0}.$$

Следствия закона сохранения момента импульса

Дифференциальная форма

$$\frac{d}{dt}(\rho \vec{v} \times \vec{x}) + (\rho \vec{v} \operatorname{div} \vec{v}) \times \vec{x} - \operatorname{div}(\sigma \times \vec{x}) = \rho \vec{f} \times \vec{x}$$

Упрощения

$$\frac{d}{dt}(\rho \vec{v} \times \vec{x}) = \frac{d}{dt}(\rho \vec{v}) \times \vec{x} + \rho \vec{v} \times \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d(\rho \vec{v})}{dt} \times \vec{x}$$

$$\operatorname{div}(\sigma \times \vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{\sigma}_i \times \vec{x}) = \frac{\partial \vec{\sigma}_i}{\partial x_i} \times \vec{x} + \vec{\sigma}_i \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial x_i} = \operatorname{div} \sigma \times \vec{x} + \vec{\sigma}_i \times \vec{e}_i$$

Упрощение закона сохранения момента импульса

Умножая векторно закон сохранения импульса на \vec{x} и вычитая из дифференциальной формы с учетом сделанных операций, имеем:

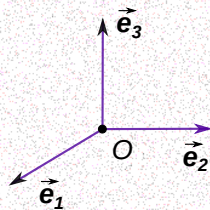
$$\vec{\sigma}_1 \times \vec{e}_1 + \vec{\sigma}_2 \times \vec{e}_2 + \vec{\sigma}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}.$$

Следствия закона сохранения момента импульса

Упростим равенство:

$$\vec{\sigma}_1 \times \vec{e}_1 + \vec{\sigma}_2 \times \vec{e}_2 + \vec{\sigma}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}.$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1j} \vec{e}_j \times \vec{e}_1 &= -\sigma_{12} \vec{e}_3 + \sigma_{13} \vec{e}_2 \\ \sigma_{2j} \vec{e}_j \times \vec{e}_2 &= \sigma_{21} \vec{e}_3 - \sigma_{23} \vec{e}_1 \\ \sigma_{3j} \vec{e}_j \times \vec{e}_3 &= -\sigma_{31} \vec{e}_2 + \sigma_{32} \vec{e}_1 \\ + \frac{\vec{\sigma}_i \times \vec{e}_i}{} &= (\sigma_{32} - \sigma_{23}) \vec{e}_1 + \\ &+ (\sigma_{13} - \sigma_{31}) \vec{e}_2 + \\ &+ (\sigma_{21} - \sigma_{12}) \vec{e}_3. \end{aligned}$$



$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3,$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1,$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2.$$

Симметричность тензора напряжений

При отсутствии собственного момента количества движения среды и массовых и поверхностных пар имеет место симметричность тензора напряжений:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

Закон сохранения энергии сплошной среды

Интегральная форма

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho \left(\varepsilon + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) d\vec{x} = \int_{S_t} (\vec{\sigma}_n \cdot \vec{v}) dS - \int_{S_t} (\vec{q} \cdot \vec{n}) dS + \int_{\omega_t} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} d\vec{x},$$

где $\varepsilon(t, \vec{x})$ – внутренняя энергия единицы массы частицы сплошной среды; $\vec{q}(t, \vec{x})$ – закон перетока тепла в сплошной среде. **Пренебрегаем работой массовых и поверхностных пар сил и массовым притоком тепла.**

Дифференциальная форма

Консервативная

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) \right] + \operatorname{div} \left[\rho \left(\varepsilon + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) \vec{v} - \sigma \cdot \vec{v} + \vec{q} \right] = \rho \vec{f} \cdot \vec{v}$$

Закон динамики кинетической энергии

Умножив закон сохранения массы в недивергентной форме на $\frac{\vec{v}^2}{2}$, а уравнение закона сохранения импульса – скалярно на вектор \vec{v} , получим:

$$\frac{\vec{v}^2}{2} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho \vec{v}^2}{2} \operatorname{div} \vec{v} \quad \text{и} \quad \rho \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \operatorname{div} \sigma \cdot \vec{v} + \rho \vec{f} \cdot \vec{v}.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho \vec{v}^2}{2} = \frac{d}{dt} \frac{\rho \vec{v} \cdot \vec{v}}{2} = \rho \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}^2}{2} \frac{d\rho}{dt} = \operatorname{div} \sigma \cdot \vec{v} + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} - \frac{\rho \vec{v}^2}{2} \operatorname{div} \vec{v},$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho \vec{v}^2}{2} \right) + \frac{\rho \vec{v}^2}{2} \operatorname{div} \vec{v} - \operatorname{div} \sigma \cdot \vec{v} = \rho \vec{f} \cdot \vec{v}.$$

Работа поверхностных сил

Рассмотрим слагаемое, связанное с работой поверхностных сил:

$$\operatorname{div}(\sigma \cdot \vec{v}) = \operatorname{div} \sigma \cdot \vec{v} + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Используя разложение тензора на симметричную и несимметричную составляющие

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) = e_{jk} + \omega_{jk},$$

получим:

$$\operatorname{div}(\sigma \cdot \vec{v}) = \operatorname{div} \sigma \cdot \vec{v} + \sigma_{ij} e_{ij},$$

где e_{ij} , ω_{ij} – компоненты тензоров скоростей деформаций и вихря. Слагаемое $\sigma_{ij} \omega_{ij}$ равно 0, т.к. это свертка симметричного и антисимметричного тензоров.

Неконсервативная форма закона сохранения энергии

Вычитая из уравнения закона сохранения уравнение соотношения динамики кинетической энергии, полученное соотношение из предыдущего слайда и закон сохранения массы, умноженный на ϵ , получим:

$$\rho \frac{d\epsilon}{dt} = \sigma_{ij} e_{ij} - \operatorname{div} \vec{q}.$$

1. *Годунов С. К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами: Учебное пособие. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1994. – Т.1.: Краевые задачи.
2. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
3. *Эглит М. Э.* Лекции по основам механики сплошных сред. Изд. 2-е, испр. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010.