

# Общая теория движения жидких и газообразных сред

*Верецагин Антон Сергеевич*

канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики ФФ НГУ

13 ноября 2018 г.

# Аннотация

# Модель баротропного течения идеального газа

## Основные уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f},$$

где  $\rho, p, \vec{v}$  – плотность, давление и скорость среды, заданные в Эйлеровой системе координат  $(x, y, z)$ ;  $\vec{f}$  – вектор объёмных сил.

## Определение

Течение называется **баротропным**, если между плотностью и давлением имеет место соотношение

$$p = p(\rho).$$

# Примеры баротропных течений

- Изотермические течения

$$p = \rho RT,$$

где  $R$  – газовая постоянная;  $T$  – заданная температура.

- Изозэнтропические течения политропного газа

$$p = A(S)\rho^\gamma,$$

где  $S$  – энтропия;  $\gamma = C_p/C_V$  – показатель политропы.

- Идеальная жидкость

$$\rho = \text{const.}$$

# Преобразование конвективной части закона движения

## Предпосылки

Из формулы

$$\text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} + (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + \vec{b} \times \text{rot } \vec{a} + \vec{a} \times \text{rot } \vec{b}$$

следует, что

$$\text{grad} \left( \frac{\vec{v}^2}{2} \right) = (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \vec{v} \times \text{rot } \vec{v}.$$

## Модификация уравнений

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{\vec{v}^2}{2} \right) + \text{rot } \vec{v} \times \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

# Функция давления $\mathcal{P}(p)$

## Определение

Для баротропного течения, если существует  $\rho = \rho(p)$ , то определим

$$\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}.$$

## Свойство

Используя соотношения аналогичные

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{P}(p) = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

получим

$$\text{grad } \mathcal{P}(p) = \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$



# Форма Громеки-Ламба уравнения движения

## Основные уравнения

Используя преобразование конвективной составляющей уравнения движения и введённую функцию давления получим уравнения движения в форме Громеки-Ламба

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } E + \vec{\Omega} \times \vec{v} = 0,$$

где

$$E = \frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P} + \Pi, \quad \vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v}.$$

Здесь  $\Pi$  – потенциал массовых сил  $\vec{f} = -\text{grad } \Pi$ .

## Определение

$E$  – представляет собой полную приведённую механическую энергию системы,  $\vec{\Omega}$  – вектор вихря.

# Уравнение динамической возможности движения

Из уравнения в форме Громеки-Ламба следует, что

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} = -\text{grad } E,$$

поэтому

$$\text{rot} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} \right) = 0.$$

Зная разложение для ротора векторного произведения, равного

$$\text{rot}(\vec{\Omega} \times \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\Omega} - (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{v} + \vec{\Omega} \text{div } \vec{v} - \vec{v} \text{div } \vec{\Omega},$$

получим, используя полную производную, **уравнение динамической возможности движения**

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{v} - \vec{\Omega} \text{div } \vec{v}.$$



# Постоянство $E$ вдоль линий тока и вихревых линий

Пусть  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ , тогда, умножив уравнение движения в форме Громеки-Ламба скалярно на вектор скорости  $\vec{v}$ , получим

$$\vec{v} \cdot \text{grad } E + \vec{v} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = 0.$$

Второе слагаемое равно нулю, в силу определения векторного произведения, а первое является производной от  $E$  вдоль линии тока  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ , таких что  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = \vec{v}$ :

$$\text{grad } E \cdot \vec{v} = \text{grad } E \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = \frac{\partial E}{\partial s} = 0.$$

Аналогично, умножая уравнение движения скалярно на вектор  $\vec{\Omega}$ , можно показать, что функция  $E$  постоянна вдоль вихревых линий.

# Интеграл Бернулли для баротропного стационарного течения идеального газа

## Условия существования

$$p = p(\rho), \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0.$$

## Интеграл Бернулли

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P}(p) + \Pi = C(L),$$

где  $C(L)$  – константа вдоль линии тока или вихревой линии;  $\mathcal{P}(p)$  – функция давления;  $\Pi$  – потенциал объёмных сил

$$\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}, \quad \vec{f} = -\nabla \Pi.$$

# Существование интеграла Бернулли во всей исследуемой области

Пусть в исследуемой области  $\vec{\Omega} \times \vec{v} = \vec{0}$  и движение стационарно, тогда автоматически выполняется условие

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P}(p) + \Pi = const$$

во всей области.

$$\vec{\Omega} \times \vec{v} = \vec{0}$$

- $\vec{v} = 0$  – покоящееся течение (гидростатика).
- $\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v} = \vec{0}$  – безвихревое или потенциальное течение.
- $\vec{\Omega} \parallel \vec{v}$  – вихревые линии совпадают с линиями тока (винтовое течение).

# Баротропное безвихревое течение

## Определение

Течение называется **безвихревым** или **потенциальным**, если

$$\vec{\Omega} = \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$$

или

$$\vec{v} = \nabla \varphi,$$

где  $\varphi(\vec{x})$  – потенциал скорости.

Уравнение движения в форме Громеки-Ламба для потенциального течения

$$\operatorname{grad} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} + \mathcal{P} + \Pi \right) = 0,$$

Слагаемое  $\vec{\Omega} \times \vec{v} = 0$  в силу того, что  $\vec{\Omega} = \vec{0}$ .

# Интеграл Коши для баротропного потенциального течения идеального газа

## Условия существования

$$p = p(\rho), \quad \vec{v} = \nabla \varphi.$$

## Интеграл Коши

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} + \mathcal{P} + \Pi = F(t),$$

где  $F(t)$  – постоянная функция во всей области, различающаяся в различные моменты времени;  $\mathcal{P}(p)$  – функция давления;  $\Pi$  – потенциал объёмных сил

$$\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}, \quad \vec{f} = -\nabla \Pi.$$

# Кинетическая энергия безвихревого стационарного течения идеальной жидкости

## Определение

Рассмотрим ограниченный односвязный объем  $\omega$ , в котором реализуется потенциальное течение с потенциалом  $\varphi$  идеальной жидкости ( $\rho = \text{const}$ ). Тогда кинетическая энергия этого объема будет задаваться формулой

$$T = \frac{1}{2} \int_{\omega} \rho \vec{v}^2 d\omega = \frac{1}{2} \rho \int_{\omega} \left( \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right) d\omega.$$



# Кинетическая энергия безвихревого стационарного течения идеальной жидкости

## Формула Грина

$$\int_{\omega} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right) d\omega = - \int_S \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} dS - \\ - \int_{\omega} \varphi \left( \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} \right) d\omega,$$

где  $S$  – поверхность  $\omega$ ;  $\vec{n}$  – вектор внешней единичной нормали.

## Уравнение неразрывности

Подставляя в уравнение неразрывности  $\vec{v} = \nabla \varphi$  и  $\rho = \text{const}$ , получим

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

# Кинетическая энергия безвихревого стационарного течения идеальной жидкости

## Кинетическая энергия

Используя формулу Грина и уравнение неразрывности получим

$$T = -\frac{1}{2}\rho \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS.$$

Таким образом, кинетическая энергия объёма зависит только от значений потенциала и его производной на границе. Если на границе реализуется условие непротекания  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$  или потенциал постоянен (а он определяется с точностью до константы), то жидкость внутри односвязного объёма покоится.

# Теорема В. Томсона

## Теорема

Кинетическая энергия несжимаемой жидкости, движущейся в односвязном объёме с потенциалом скоростей, меньше кинетической энергии во всяком другом движении, при котором на границах объёма жидкость обладает движением, одинаковым с безвихревым, внутри же обладает вихрями.

## Математическая формулировка

Рассмотрим два стационарных течения идеальной жидкости с плотностью  $\rho$ , одно безвихревое с потенциалом  $\varphi$ , другое – не потенциальное со скоростью  $\vec{v}$ . Рассмотрим односвязный объём  $\omega$  с границей  $S$ , такой что на нем выполняется условие

$$\vec{v} \cdot \vec{n}|_S = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S.$$

Тогда  $T' > T$ , где  $T, T'$  - кинетическая энергия объема  $\omega$  для потенциального и вихревого течений соответственно.

# Теорема В. Томсона: доказательство

# Литература

•