

Трёхмерные осесимметричные потенциальные течения идеальной жидкости

Верецагин Антон Сергеевич

канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики ФФ НГУ

31 января 2019 г.

Аннотация

Основные определения

Определение

Течение называется **осесимметричным**, если существует такая прямая l , что во всех плоскостях, проходящих через l картина течения одинакова и траектория жидкой частицы лежит в полуплоскостях, проходящих через l .

Определение

Течение называется **потенциальным**, если в некоторой области пространства можно определить потенциал $\varphi(t, x, y, z)$, такой что

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi.$$

Основные уравнения

Для трёхмерных потенциальных течений идеальной жидкости определённых в некоторой области пространства справедливы следующие уравнения.

Уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \vec{v} = \Delta \varphi = 0, \quad \vec{v} = \nabla \varphi$$

Интеграл Коши

$$\frac{\nabla \varphi^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t)^1$$

Интеграл Коши позволяет найти распределение давления по заданному потенциалу, определённому из уравнения неразрывности ($\rho = \text{const}$).

¹Считаем, что поле внешних сил отсутствует

Уравнение неразрывности в различных системах координат

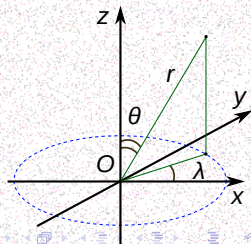
Сферическая система координат r, θ, λ

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) \right\} = 0,$$

где

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad v_\lambda = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}.$$

В случае осесимметричного течения можно пренебречь зависимостью φ от λ .



Уравнение неразрывности в различных системах координат

Цилиндрическая система координат r, θ, z

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} v_\theta + \frac{\partial}{\partial z} (rv_z) \right\} = 0,$$

где

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

В случае осесимметричного течения вдоль оси Oz можно пренебречь зависимостью φ от θ .

Источник в пространстве

Сферически симметричное течение

$$\varphi = \varphi(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0.$$

Источник в пространстве

Сферически симметричное течение

$$\varphi = \varphi(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0.$$

Потенциал источника, расположенного в точке с координатами (a, b, c)

$$\varphi(x, y, z) = - \frac{q}{4\pi \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Источник в пространстве

Сферически симметричное течение

$$\varphi = \varphi(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0.$$

Потенциал источника, расположенного в точке с координатами (a, b, c)

$$\varphi(x, y, z) = - \frac{q}{4\pi \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Расход жидкости через любую поверхность, охватывающую центр источника S

$$q = \int_S v_n dS = \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS.$$

Диполь в пространстве

Потенциал

Рассмотрим источник и сток одной и той же обильности q , находящиеся на оси Oz на расстоянии l друг от друга. Тогда их суммарный потенциал будет иметь вид

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + (z - l/2)^2}} + \frac{q}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + (z + l/2)^2}}.$$

Диполь в пространстве

Потенциал

Рассмотрим источник и сток одной и той же обильности q , находящиеся на оси Oz на расстоянии l друг от друга. Тогда их суммарный потенциал будет иметь вид

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + (z - l/2)^2}} + \frac{q}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + (z + l/2)^2}}.$$

При переходе к пределу при $l \rightarrow 0$, а $q \rightarrow \infty$, причём $ql = M$, получится предельный потенциал

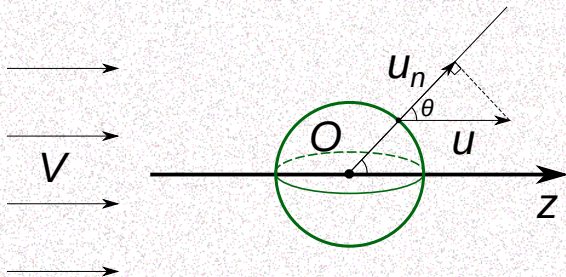
$$\varphi = -\frac{Mz}{4\pi r^3} \quad \text{или} \quad \varphi = -\frac{M}{4\pi} \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{r} \right),$$

где M – момент диполя; l – направление оси диполя.

Обтекание сферы

Постановка

Требуется найти распределение скорости и давления при потенциальном обтекании сферы радиуса R , движущейся поступательно вдоль оси Oz со скоростью u , в потоке идеальной жидкости, имеющей на бесконечности скорость V , направленную вдоль оси Oz , и давление p_∞ .



Математическая постановка

Основные уравнения

В сферической системе координат пренебрегаем зависимостью от λ . Тогда для функции $\varphi = \varphi(r, \theta)$ запишем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Граничные условия на сфере

$$v_n = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{r=R} = u \cos \theta.$$

Граничные условия на бесконечности

$$v_r = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r \rightarrow \infty} = V \cos \theta, \quad v_\theta = \left. \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right|_{r \rightarrow \infty} = -V \sin \theta.$$

Решение задачи об обтекании сферы

Упрощение

Пусть $\varphi(r, \theta) = Q(r) \cos \theta$, тогда уравнение неразрывности будет иметь вид

$$r^2 \frac{d^2 Q}{dr^2} + 2r \frac{dQ}{dr} - 2Q = 0.$$

Аналитическое решение

$$\varphi(r, \theta) = \left(Vr + \frac{V-u}{2} \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta,$$

которое можно переписать в виде

$$\varphi = Vz - \frac{R^3}{2} (V-u) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right).$$

Видно, это сумма потенциала поступательного движения потока со скоростью V и потенциала диполя с моментом $M = 2\pi R^3(u-V)$.

Обтекание покоящейся сферы

Если $u = 0$, тогда

$$\varphi = V \left(r + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta$$

и

$$v_r = V \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta, \quad v_\theta = -V \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \sin \theta.$$

Максимальное значение скорости на поверхности сферы достигается в точках $\theta = \pm\pi/2$ и равно $3/2V$.

Парадокс Даламбера для покоящейся сферы

Интеграл Бернулли

Так как течение потенциально и стационарно, то

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{V^2}{2} + \frac{p_{\infty}}{\rho}$$

Выражение для давления

$$\frac{p - p_{\infty}}{\rho} = \frac{V^2}{2} \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right)$$

Суммарная сила, вызванная давлением потенциального течения жидкости на покоящуюся сферу, равна 0, вследствие симметрии распределения сил давления. Это называется **парадоксом Даламбера**.

Функция тока для осесимметричных течений