

# Классические модели механики жидкости и газа в рамках континуального подхода

*Верещагин Антон Сергеевич*  
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрофизики и газовой динамики



16 декабря 2020 г.

Жидкость, газ, твердое тело и их основные отличия. Идеальные и неидеальные, линейные и нелинейные среды. Модели идеальной несжимаемой жидкости, идеального политропного нетеплопроводного газа, вязкой несжимаемой жидкости, вязкого сжимаемого теплопроводного газа.

В чем отличие?

# Жидкость, газ, твердое тело

Свойство	Газ	Жидкость	Твердое тело
<i>Сжимаемость</i>	сильная	очень слабая	практически отсутствует
<i>Анизотропия</i>	нет	нет	бывает
<i>Внутренние напряжения</i>	функции градиента скорости (при наличии вязкости)	функции градиента скорости (при наличии вязкости)	функции градиента перемещений

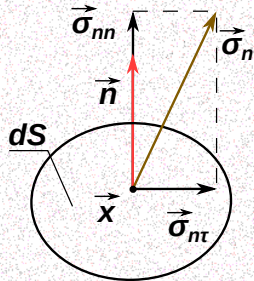
# Идеальные и неидеальные среды

## Идеальная среда

Идеальная среда – это такая среда, в которой отсутствует тангенциальная составляющая вектора напряжения  $\vec{\sigma}_{n\tau}$  на любой площадке с нормалью  $\vec{n}$ , отвечающая за трение между слоями сплошной среды. При этом:

$$\vec{\sigma}_n(\vec{x}) = -p(\vec{x})\vec{n}.$$

Функция  $p(\vec{x})$  определяет давление в точке  $\vec{x}$ .



$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_{nn} + \vec{\sigma}_{n\tau}$$



## Линейность среды

Сплошная среда называется **линейной**, если имеет место линейная зависимость между напряжениями, возникающими в ней, и изменениями деформаций или изменениями скоростей деформаций.

Для *твердых тел* имеет место обобщенный закон Гука:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right).$$

Для *жидкостей или газов*:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + D_{ijkl} e_{kl}, \quad e_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right).$$

Такие жидкости и газы называются **НЬЮТОНОВСКИМИ**.

# Тензор напряжений в вязкой ньютоновской жидкости

## Связь тензора напряжений и тензора скоростей деформаций

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad \tau_{ij} = D_{ijkm}e_{km}, \quad e_{km} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \right).$$

В матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \\ \tau_{32} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1123} & D_{1113} & D_{1112} & D_{1132} & D_{1131} & D_{1121} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & D_{2223} & D_{2213} & D_{2212} & D_{2232} & D_{2231} & D_{2221} \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & D_{3323} & D_{3313} & D_{3312} & D_{3332} & D_{3331} & D_{3321} \\ D_{2311} & D_{2322} & D_{2333} & D_{2323} & D_{2313} & D_{2312} & D_{2332} & D_{2331} & D_{2321} \\ D_{1311} & D_{1322} & D_{1333} & D_{1323} & D_{1313} & D_{1312} & D_{1332} & D_{1331} & D_{1321} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1233} & D_{1223} & D_{1213} & D_{1212} & D_{1232} & D_{1231} & D_{1221} \\ D_{3211} & D_{3222} & D_{3233} & D_{3223} & D_{3213} & D_{3212} & D_{3232} & D_{3231} & D_{3221} \\ D_{3111} & D_{3122} & D_{3133} & D_{3123} & D_{3113} & D_{3112} & D_{3132} & D_{3131} & D_{3121} \\ D_{2111} & D_{2122} & D_{2133} & D_{2123} & D_{2113} & D_{2112} & D_{2132} & D_{2131} & D_{2121} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{23} \\ e_{13} \\ e_{12} \\ e_{32} \\ e_{31} \\ e_{21} \end{pmatrix}$$

# Тензор напряжений в вязкой ньютоновской жидкости

## Изотропность свойств жидкости

Пусть  $Q = (q_{pr})_{1 \leq p, r \leq 3}$  – произвольное ортогональное преобразование координат ( $Q^{-1} = Q^T$ ), тогда коэффициенты тензора  $D$  в новой системе координат не меняют вид:

$$\bar{D}_{ijkl} = q_{\alpha i} q_{\beta j} q_{\gamma k} q_{\delta l} D_{\alpha\beta\gamma\delta} = D_{ijkl}.$$

## Симметричность тензоров $\tau_{ij}$ и $e_{ij}$

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad e_{ij} = e_{ji}$$

$$\Downarrow$$

$$D_{ijkl} = D_{jikl} = D_{jilk} = D_{ijlk}$$



# Тензор напряжений в вязкой ньютоновской жидкости

## Изотропность свойств жидкости

Пусть  $Q = (q_{pr})_{1 \leq p, r \leq 3}$  – произвольное ортогональное преобразование координат ( $Q^{-1} = Q^T$ ), тогда коэффициенты тензора  $D$  в новой системе координат не меняют вид:

$$\bar{D}_{ijkl} = q_{\alpha i} q_{\beta j} q_{\gamma k} q_{\delta l} D_{\alpha \beta \gamma \delta} = D_{ijkl}.$$

## Симметричность тензоров $\tau_{ij}$ и $e_{ij}$

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad e_{ij} = e_{ji}$$

$$\Downarrow$$

$$D_{ijkl} = D_{jikl} = D_{jilk} = D_{ijlk}$$

# Тензор напряжений в вязкой ньютоновской жидкости

## Инвариантность относительно отражений

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

## Ограничение на коэффициенты

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \\ \tau_{32} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{2323} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1313} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1212} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{3232} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{2121} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{23} \\ e_{13} \\ e_{12} \\ e_{32} \\ e_{31} \\ e_{21} \end{pmatrix}$$

# Тензор напряжений в вязкой ньютоновской жидкости

## Инвариантность относительно изменения порядка базиса

$$Q_1^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_3^c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Ограничение на коэффициенты

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \\ \tau_{32} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1122} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{1122} & D_{1111} & D_{1122} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{1122} & D_{1122} & D_{1111} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{1212} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1212} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1212} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1212} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{23} \\ e_{13} \\ e_{12} \\ e_{32} \\ e_{31} \\ e_{21} \end{pmatrix}$$

# Тензор напряжений в вязкой ньютоновской жидкости

## Инвариантность относительно поворота на угол $2\pi/3$

$$Q_{120} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D_{1212} = \frac{1}{2} (D_{1111} - D_{1122})$$

## Ограничение на коэффициенты

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \\ \tau_{32} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{23} \\ e_{13} \\ e_{12} \\ e_{32} \\ e_{31} \\ e_{21} \end{pmatrix}$$

$\lambda, \mu$  – коэффициенты Ламе или коэффициенты объемной и динамической вязкости.

# Тензор напряжений в вязкой ньютоновской жидкости

## Тензорная запись

$$D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$



# Тензор напряжений в вязкой ньютоновской жидкости

## Тензорная запись

$$D_{ijkm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{km} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jk}),$$

$$\tau_{ij} = (\lambda \delta_{ij} \delta_{km} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jk})) e_{km} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu e_{ij},$$

# Тензор напряжений в вязкой ньютоновской жидкости

## Тензорная запись

$$D_{ijkm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{km} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jk}),$$

$$\tau_{ij} = (\lambda \delta_{ij} \delta_{km} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jk})) e_{km} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij} = \lambda \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu e_{ij},$$

$$\sigma = -(p + \lambda \operatorname{div} \vec{v}) I + 2\mu e,$$

где  $I$  – единичный тензор,  $e$  – тензор скоростей деформаций.

# Идеальная несжимаемая жидкость

## Основные допущения

- 1) постоянная плотность среды:

$$\rho = \text{const};$$

- 2) напряжение на площадке с произвольной нормалью одинаково и направлено вдоль нее:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}.$$

В этом случае для любого вектора  $\vec{n}$  единичной длины:

$$\vec{\sigma}_n = \vec{n} \cdot \sigma = -p\vec{n}.$$

# Идеальная несжимаемая жидкость

## Уравнения Эйлера

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f}.$$

## Неизвестные функции

Четыре искомые дифференцируемые функции, определенные в области  $\Omega \subset R \times R^3$  :

$$\vec{v}(t, \vec{x}) = v_1(t, \vec{x})\vec{e}_1 + v_2(t, \vec{x})\vec{e}_2 + v_3(t, \vec{x})\vec{e}_3,$$

$$p = p(t, \vec{x}).$$

## Заданные параметры

$\rho$  – плотность жидкости;  $\vec{f} = \vec{f}(t, \vec{x})$  – вектор массовых сил.

# Идеальный политропный нетеплопроводный газ

## Основные допущения

- 1) уравнение состояния идеального газа:

$$p = \rho R_1 T,$$

где  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  – давление, плотность и температура газа;  $R_1$  – газовая постоянная для выбранного газа;

- 2) линейная связь между удельной внутренней энергией и температурой:

$$\varepsilon = C_V T,$$

где  $C_V$  – коэффициент теплоемкости при постоянном объеме;

- 3) напряжение на площадке с произвольной нормалью одинаково и направлено вдоль нее:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}.$$



# Идеальный политропный нетеплопроводный газ

## Основные уравнения

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p,$$

$$C_V \frac{dT}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

## Неизвестные функции

Пять искомых дифференцируемых функции, определенных в области  $\Omega \subset R \times R^3$  :  $\vec{v}(t, \vec{x}) = v_1(t, \vec{x})\vec{e}_1 + v_2(t, \vec{x})\vec{e}_2 + v_3(t, \vec{x})\vec{e}_3$ ,  $\rho = \rho(t, \vec{x})$ ,  $T = T(t, \vec{x})$ .

## Дополнительные соотношения

$$p = \rho R_1 T, \quad \varepsilon = C_V T,$$

где  $R_1$ ,  $C_V$  – заданные параметры газа.

## Основные допущения

- 1) плотность жидкости постоянна:

$$\rho = \text{const};$$

- 2) тензор напряжений имеет вид:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

где  $p$  – давление жидкости;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости;  $e_{ij}$  – тензор скоростей деформаций.

## Уравнения Навье-Стокса

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{f}.$$

## Неизвестные функции

Четыре искомые дифференцируемые функции, определенные в области  $\Omega \subset R \times R^3$  :  $\vec{v}(t, \vec{x}) = v_1(t, \vec{x})\vec{e}_1 + v_2(t, \vec{x})\vec{e}_2 + v_3(t, \vec{x})\vec{e}_3$ ,  $p = p(t, \vec{x})$ .

## Параметры среды

$\rho$  – плотность;  $\mu$  – динамическая вязкость;  $\nu = \mu/\rho$  – кинематическая вязкость жидкости;  $\vec{f}(t, \vec{x})$  – заданный вектор массовых сил.

## Основные допущения

- 1) уравнение состояния газа:  $p = p(\rho, T)$ ;
- 2) калорическое уравнение состояния:  $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$ ;
- 3) тензор напряжений имеет вид:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda\delta_{ij} \operatorname{div} \vec{v}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

где  $\lambda, \mu$  – коэффициенты объемной и динамической вязкостей;  
 $e_{ij}$  – тензор скоростей деформаций;

- 4) закон Фурье теплопроводности газа:

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T,$$

где  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности.

## Уравнения Навье-Стокса-Дюгема

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + (\lambda + \mu) \nabla (\operatorname{div} \vec{v}) + \rho \vec{f},$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -p \operatorname{div} \vec{v} + \lambda (\operatorname{div} \vec{v})^2 + 2\mu e_{ij} e_{ij} + \kappa \Delta T.$$

## Замыкающие соотношения

$$p = p(\rho, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T).$$

## Параметры среды

$\lambda, \mu$  – объемная и динамическая вязкость;  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности;  $\vec{f}$  – вектор массовых сил.



1. *Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Розенберг Г. Д.* Нефтегазовая гидромеханика: Учебное пособие для вузов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 544 с.
2. *Дж. Мейз.* Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Изд-во «Мир», 1974.