

# Течения газа в сужающейся трубке тока. Элементарная теория сопла Лавала.

*Верещагин Антон Сергеевич*

канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики



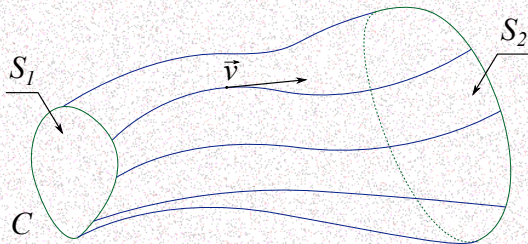
14 апреля 2020 г.

Трубка тока. Постоянство расхода газа в трубке тока для стационарных течений. Сжимаемость трубок тока. Простое сопло, сопло Лаваля. Истечение газа из простого сопла. Элементарная теория сопла Лаваля.

# Трубка тока

## Определение

**Трубкой тока** называется поверхность, образованная линиями тока, построенными из некоторой замкнутой кривой.



# Постоянство расхода для трубки тока

## Закон сохранения массы в трубке тока

Закон сохранения массы имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

Для стационарного течения:  $\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$ .

## Теорема

Для стационарного течения расход газа через любое поперечное сечение трубки тока имеет одну и ту же величину

$$\int_{S_1} \rho v_n dS = \int_{S_2} \rho v_n dS,$$

где  $S_1, S_2$  – различные сечения трубки тока.

# Постоянство расхода для трубки тока

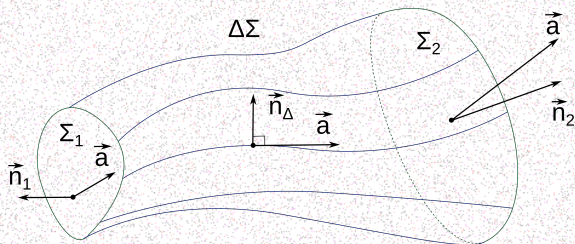
## Доказательство.

Пусть далее

$$\vec{a} = \rho \vec{v},$$

тогда

$$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV =$$





# Постоянство расхода для трубки тока

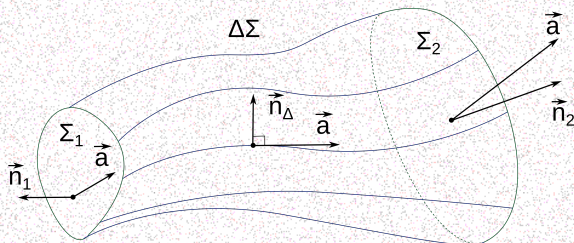
## Доказательство.

Пусть далее

$$\vec{a} = \rho \vec{v},$$

тогда

$$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int_{\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} dS =$$



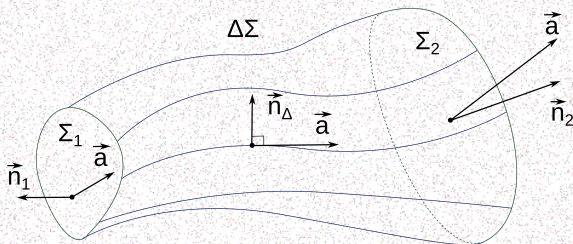
# Постоянство расхода для трубки тока

## Доказательство.

Пусть далее

$$\vec{a} = \rho \vec{v},$$

тогда



$$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int_\Sigma \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_\Delta dS + \int_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS.$$

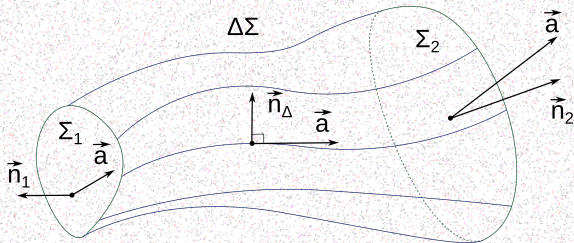
# Постоянство расхода для трубки тока

## Доказательство.

Пусть далее

$$\vec{a} = \rho \vec{v},$$

тогда



$$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int_\Sigma \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_\Delta dS + \int_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS.$$

$$\text{Отсюда } \int_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS = - \int_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS,$$



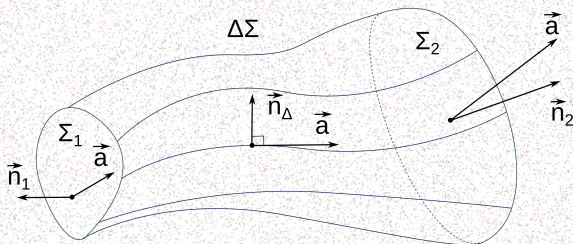
# Постоянство расхода для трубки тока

## Доказательство.

Пусть далее

$$\vec{a} = \rho \vec{v},$$

тогда



$$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int_{\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_\Delta dS + \int_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS.$$

Отсюда  $\int_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS = - \int_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS$ , т.к.  $\int_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_\Delta dS = 0$  в силу ортогональности векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{n}_\Delta$ ,

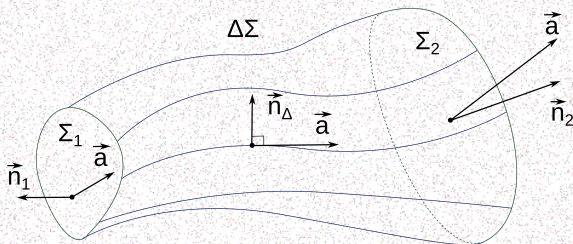
# Постоянство расхода для трубки тока

## Доказательство.

Пусть далее

$$\vec{a} = \rho \vec{v},$$

тогда

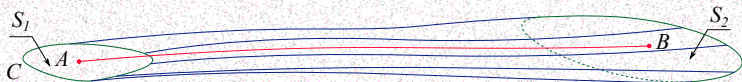


$$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int_{\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_\Delta dS + \int_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS.$$

Отсюда  $\int_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS = - \int_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS$ , т.к.  $\int_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_\Delta dS = 0$  в силу ортогональности векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{n}_\Delta$ , т.е. потоки вектора  $\vec{a}$  через  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  совпадают.



# Сжимаемость трубок тока



## Основные предположения

Далее будем рассматривать очень узкие трубки тока, для которых можно считать, что параметры  $\rho$ ,  $p$ ,  $c$  и  $\vec{v}$  мало меняются по её сечению, построенному перпендикулярно выделенной линии тока (на рисунке  $AB$ ), а рассматриваемое течение изоэнтропическое.

# Сжимаемость трубок тока



## Основные предположения

Далее будем рассматривать очень узкие трубки тока, для которых можно считать, что параметры  $\rho$ ,  $p$ ,  $c$  и  $\vec{v}$  мало меняются по её сечению, построенному перпендикулярно выделенной линии тока (на рисунке  $AB$ ), а рассматриваемое течение изэнтропическое.

## Соотношения на выделенной линии тока

Параметризовав линию тока  $AB$ , можно записать закон сохранения массы и интеграл Бернулли для параметров течения

$$\rho v S = C_1, \quad \frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} = C_2.$$

Соотношение для параметров течения в дифференциалах

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dS}{S} = 0, \quad v dv + \frac{2c}{\gamma - 1} dc = 0.$$



# Сжимаемость трубок тока

## Соотношение для параметров течения в дифференциалах

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dS}{S} = 0, \quad v dv + \frac{2c}{\gamma - 1} dc = 0.$$

## Дополнительные соотношения

Так как для изэнтропических течений  $dp = c^2 d\rho$  и  $c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$ , тогда рассмотрим дифференциал от последнего

$$2c dc = \frac{\gamma}{\rho} dp - \frac{\gamma p}{\rho^2} d\rho = (\gamma - 1)c^2 \frac{d\rho}{\rho}.$$

Подставляя дополнительные соотношения в интеграл Бернулли в дифференциалах, получим

$$v dv + c^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0.$$

# Сжимаемость трубок тока

## Связь между скоростью, сечением и числом Маха

Исключая из последнего выражения  $d\rho/\rho$  с помощью закона сохранения массы в дифференциалах, получим **уравнение Гюгонио**

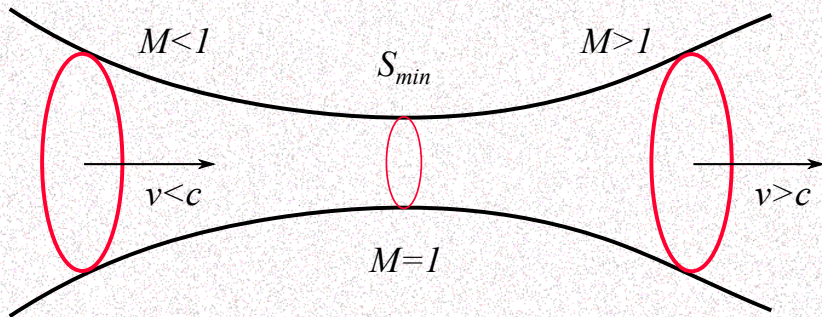
$$(M^2 - 1) \frac{dv}{v} = \frac{dS}{S} \quad (v > 0),$$

где  $M = v/c$  – число Маха.

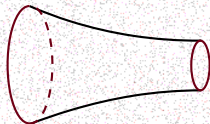
$M < 1$	$M = 1$	$M > 1$
$dv < 0 \iff dS > 0$		$dv < 0 \iff dS < 0$
$dv = 0 \iff dS = 0$	$dS = 0$	$dv = 0 \iff dS = 0$
$dv > 0 \iff dS < 0$		$dv > 0 \iff dS > 0$

Таким образом, 
$$S(v) = \frac{C_1}{\rho^* v \left( 1 - \frac{v^2}{v_{max}^2} \right)^{1/(\gamma-1)}}.$$

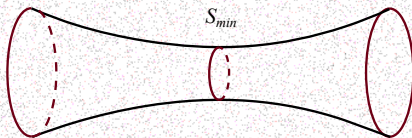
# Сужающаяся и расширяющаяся трубка тока



# Простое сопло и сопло Лавалья



Простое сопло



Сопло Лавалья

Насадок, предназначенный для адиабатического разгона потока от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым, обладающий зоной сужения и расширения называется **соплом Лавалья**. Насадок имеющий только зону сжатия называется **простым соплом**.

# Связь между параметрами газа в различных сечениях

$$\frac{S}{S_1} = \frac{\rho_1 v_1}{\rho v} = \frac{M_1}{M} \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}},$$

$$\frac{p}{p_1} = \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \frac{\rho}{\rho_1} = \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

$$\frac{T}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}, \quad \frac{v}{v_1} = \frac{M}{M_1} \left( \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Эти формулы дают **параметрическое решение** задачи об квази-одномерном изэнтропическом стационарном газовом потоке в трубке тока (сопле) переменного сечения.



# Связь между параметрами газа, в котором есть критическое сечение

Положим, что в сечении  $S_1 = S_{min}$  реализуется  $M_1 = 1$ , тогда

$$\frac{S}{S_{min}} = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{1}{M} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \Theta^{-1}(M),$$

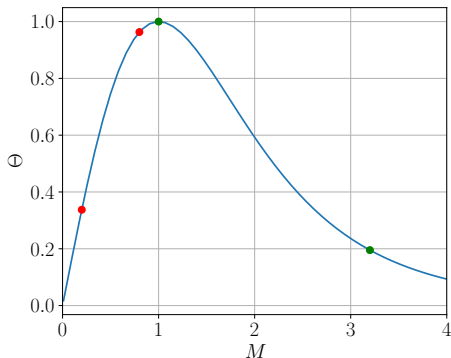
$$\frac{p}{p_{кр}} = \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

$$\frac{\rho}{\rho_{кр}} = \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{-\frac{1}{\gamma-1}},$$

$$\frac{T}{T_{кр}} = \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{-1},$$

$$\frac{v}{v_{кр}} = M \left[ \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

# Зависимость числа Маха от площади сечения для воздуха

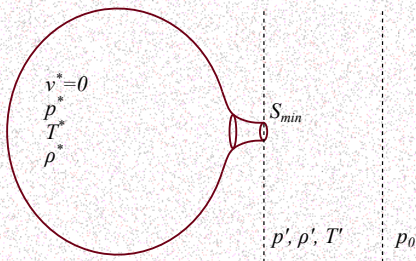


$$\frac{S_{min}}{S} = \Theta = \Theta(M)$$

Из рисунка следует, что для повышения числа  $M$  от 0,2 до 0,8 газ должен пройти через конфузор с сечением, уменьшающимся в три раза.

А чтобы увеличить  $M$  от значения 1 в критическом сечении до 3,2, необходимо построить сверхзвуковой диффузор с площадью в пять раз превышающую  $S_{min}$ .

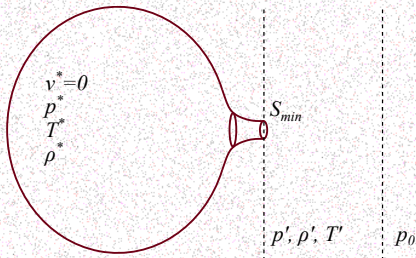
# Истечение газа через простое сопло



## Постановка и решение задачи

Рассмотрим истечение газа из ёмкости большого объёма через конфузор с критическим сечением  $S_{min}$  и параметрами торможения газа вдали от сопла в ёмкости  $p^*$ ,  $\rho^*$ ,  $T^*$ . Противодавление снаружи равно  $p_0$ . Штрихами будем обозначать параметры на срезе сопла.

# Истечение газа через простое сопло



## Постановка и решение задачи

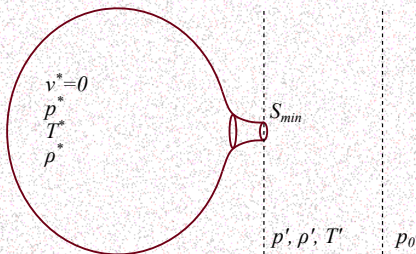
Пусть  $m$  – массовый расход газа через любое сечение сопла, тогда

$$m = \rho v S = \rho' v' S_{min}.$$

Пусть  $m_{кр} = \rho_{кр} v_{кр} S_{min}$  – критическое значение массы, соответствующее числу Маха, равному 1, тогда

$$\frac{m}{m_{кр}} = \frac{\rho' v'}{\rho_{кр} v_{кр}} = \theta(M').$$

# Истечение газа через простое сопло



## Постановка и решение задачи

Используя формулу

$$p' = p^* \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M'^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}},$$

исключаем  $M'$  из выражения для  $m/m_{кр}$  и получаем

$$\frac{m}{m_{кр}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \left( \frac{p'}{p^*} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[ 1 - \left( \frac{p'}{p^*} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right]}.$$

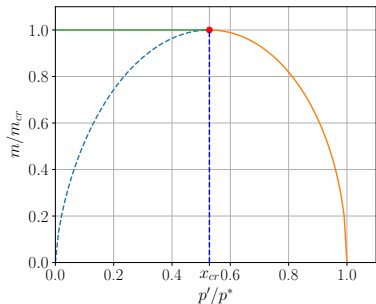


# Истечение газа через простое сопло

## Описание

При уменьшении  $p_0$  до тех пор, пока течение на срезе сопла не станет звуковым, будет реализовываться режим, описываемый на графике оранжевой ветвью, и давление на выходе из сопла можно принимать равным противодавлению

$$p' = p_0.$$



$$\frac{m}{m_{\text{кр}}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \left( \frac{p'}{p^*} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[ 1 - \left( \frac{p'}{p^*} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right]}.$$

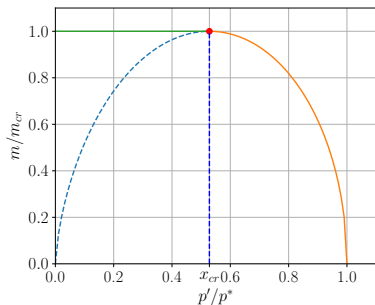
# Истечение газа через простое сопло

## Описание

Как только на срезе сопла установится звуковое течение

$$M' = 1,$$

то произойдёт его заклинивание. В критическом сечении установятся критические параметры, которым соответствует максимальный возможный расход газа  $m_{кр}$  (зелёная ветвь графика).



$$x_{кр} = \frac{p_{кр}}{p^*} = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \quad m_{кр} = \left( \frac{2}{\gamma - 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \sqrt{\gamma p^* \rho^*} S_{min}.$$

- **Л.И. Седов.** *Механика сплошной среды*. Том 2. М.:Наука, 1970.
- **Лойцянский Л. Г.** *Механика жидкости газа и плазмы*. Учеб. для вузов. — 7-е изд., испр. — М.:Дрофа, 2003