Тензор скоростей деформаций

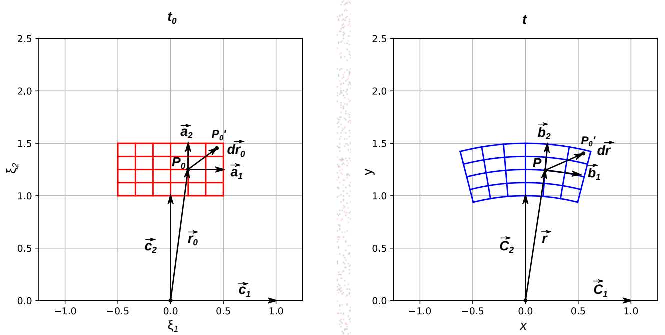
Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрофизики и газовой динамики

10 января 2021 г.

Аннотация

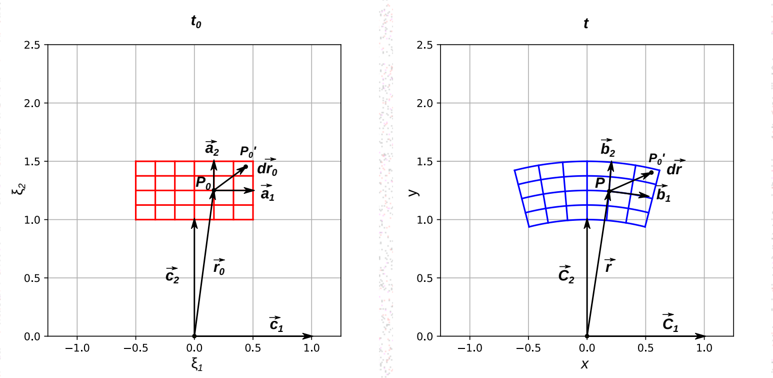
Вектор перемещений. Связь вектора перемещений, метрического тензора и тензора деформаций. Тензор скоростей деформаций. Распределение скоростей в бесконечно малой частице. Теорема Коши – Гельмгольца. Свойства компонентов, главные значения и собственные векторы тензора скоростей деформаций.



Определение

Тензор деформаций в представлении Грина	Тензор деформаций в представлении Альманси
$E_0 = \varepsilon_{ij}\vec{a}^i\vec{a}^j$	$E = \varepsilon_{ij}\vec{b}^i\vec{b}^j$

$$\text{Здесь } 2\varepsilon_{ij} = g_{ij} - h_{ij} = \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j - \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j.$$



Определение

Введем вектор перемещения жидкой частицы $\vec{w}$ по следующей формуле:

$$\vec{w} = \vec{r} - \vec{r}_0.$$

Связь метрического тензора и вектора перемещения

Соглашение

Пусть в базисе $\vec{a}_j$ разложение $\vec{w}$ будет обозначаться через u^j, а в базисе $\vec{b}_i$ – через w^i:

$$\vec{w} = u^j \vec{a}_j = w^i \vec{b}_i.$$

Связь метрического тензора и вектора перемещения

Соглашение

Пусть в базисе $\vec{a}_j$ разложение $\vec{w}$ будет обозначаться через u^j, а в базисе $\vec{b}_i$ – через w^i:

$$\vec{w} = u^j \vec{a}_j = w^i \vec{b}_i.$$

Используя определение вектора перемещения, получаем:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \xi^i} = \vec{b}_i - \vec{a}_i \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \vec{a}_i = \vec{b}_i - \dfrac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i}, \\ \vec{b}_i = \vec{a}_i + \dfrac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i}. \end{array} \right.$$

Связь метрического тензора и вектора перемещения

Соглашение

Пусть в базисе $\vec{a}_j$ разложение $\vec{w}$ будет обозначаться через u^j, а в базисе $\vec{b}_i$ – через w^i:

$$\vec{w} = u^j \vec{a}_j = w^i \vec{b}_i.$$

Используя определение вектора перемещения, получаем:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \xi^i} = \vec{b}_i - \vec{a}_i \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \vec{a}_i = \vec{b}_i - \dfrac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i}, \\ \vec{b}_i = \vec{a}_i + \dfrac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i}. \end{array} \right.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j + \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j}, \\ h_{ij} &= \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j - \vec{b}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} - \vec{b}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j}. \end{aligned}$$

Производная от координатных линий

Рассмотрим выражения:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(u^j \vec{a}_j\right) = \frac{\partial u^j}{\partial \xi^i}\vec{a}_j + u^j \frac{\partial \vec{a}_j}{\partial \xi^i} = \left(\frac{\partial u^k}{\partial \xi^i} + u^j \Gamma^{0k}_{ji}\right)\vec{a}_k,$$

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial}{\partial \xi^i}\left(w^j \vec{b}_j\right) = \frac{\partial w^j}{\partial \xi^i}\vec{b}_j + w^j \frac{\partial \vec{b}_j}{\partial \xi^i} = \left(\frac{\partial w^k}{\partial \xi^i} + w^j \Gamma^{k}_{ji}\right)\vec{b}_k.$$

Определение

Символы Γ^k_{ji} и Γ^{0k}_{ji}, имеющие следующие определения:

$$\frac{\partial \vec{a}_k}{\partial \xi^i} = \Gamma^{0j}_{ki}\vec{a}_j, \quad \frac{\partial \vec{b}_k}{\partial \xi^i} = \Gamma^{j}_{ki}\vec{b}_j$$

– называются символами Кристофеля и характеризуют искривление пространства. Они не являются тензорами и тождественно равны 0 для абсолютной декартовой системы координат $\vec{c}_l$.

Выражение тензора деформаций через вектор перемещения

Таким образом, имеем:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{b}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \vec{b}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j}\right).$$

Выражение тензора деформаций через вектор перемещения

Таким образом, имеем:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{b}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \vec{b}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j}\right).$$

Для бесконечно малых деформаций пренебрегают членами второго порядка, и тогда

$$\varepsilon_{ij} \approx \frac{1}{2}\left(\vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i}\right) \text{ или } \varepsilon_{ij} \approx \frac{1}{2}\left(\vec{b}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \vec{b}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i}\right).$$

В этом случае ε_{ij} называют тензором малых деформаций.

Тензор скоростей деформаций

Определение

Рассмотрим тензоры деформаций ε_{ij} и ε'_{ij} в два близких момента времени $t \geq t_0$ и $t' = t + \Delta t$:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - h_{ij}), \quad \varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2}(g'_{ij} - h_{ij}),$$

где g_{ij}, g'_{ij}, h_{ij} – метрические тензоры в моменты времени t, t' и t_0. Назовем тензором скоростей деформации величины:

$$e_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varepsilon'_{ij} - \varepsilon_{ij}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g'_{ij} - g_{ij}}{\Delta t}.$$

Свойство

Величины e_{ij} образуют симметричный ковариантный тензор 2-го ранга.

Связь между вектором скорости и тензором скоростей деформаций

Введем вектор $\Delta\vec{w}$ как перемещение жидкой частицы между временем t и $t' = t + \Delta t$:

$$\Delta\vec{w} = \vec{r} - \vec{r}'.$$

Используя преобразования, полученные ранее, для вектора перемещений имеем:

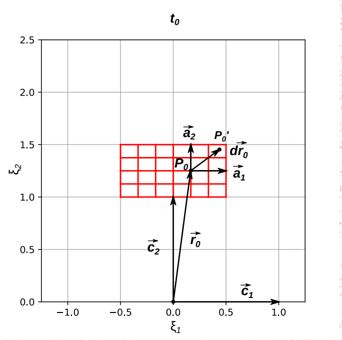
$$\Delta\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} - \varepsilon_{ij} = \frac{g'_{ij} - g_{ij}}{2} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}_i \cdot \frac{\partial\Delta\vec{w}}{\partial\xi^j} + \vec{a}_j \cdot \frac{\partial\Delta\vec{w}}{\partial\xi^i} + \frac{\partial\Delta\vec{w}}{\partial\xi^i} \cdot \frac{\partial\Delta\vec{w}}{\partial\xi^j}\right),$$

где $\vec{a}_i$ – сопутствующий базис в момент времени t. Тогда

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\varepsilon_{ij}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}_i \cdot \frac{\partial\vec{v}}{\partial\xi^j} + \vec{a}_j \cdot \frac{\partial\vec{v}}{\partial\xi^i}\right),$$

где $\vec{v} = v^k\vec{a}_k = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \Delta\vec{w}/\Delta t$ – вектор скорости жидкой частицы.

Компоненты тензора скоростей деформаций в абсолютной системе координат



$$\bar{e}_{ij} = e_{kl}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}\frac{\partial \xi^l}{\partial x^j},$$

где $\bar{e}_{kl}$, e_{kl} – компоненты в абсолютной декартовой $\vec{c}_i$ и сопутствующей криволинейной системах координат тензора скоростей деформаций; $\xi_i = \xi_i(t, x_1, x_2, x_3)$ – обратное преобразование.

Компоненты тензора скоростей деформаций в абсолютной системе координат

Пусть разложение сопутствующего базиса и вектора скорости в абсолютной системе координат имеют вид

$$\vec{a}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_i} = \frac{\partial x^k}{\partial \xi_i} \vec{c}_k, \quad \vec{v} = v^r \vec{c}_r.$$

Компоненты тензора скоростей деформаций в абсолютной системе координат

Пусть разложение сопутствующего базиса и вектора скорости в абсолютной системе координат имеют вид

$$\vec{a}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_i} = \frac{\partial x^k}{\partial \xi_i}\vec{c}_k, \quad \vec{v} = v^r \vec{c}_r.$$

Рассмотрим, как преобразуется при переходе к абсолютной декартовой системе координат слагаемое вида $\vec{a}_i \cdot \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial \xi_j}$:

$$\left(\vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi_j}\right)\frac{\partial \xi^i}{\partial x^p}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^q} = \left(\frac{\partial x^k}{\partial \xi_i}\vec{c}_k\right)\cdot\left(\frac{\partial v^r}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial \xi^j}\vec{c}_r\right)\frac{\partial \xi^i}{\partial x^p}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^q} =$$

$$= \left(\frac{\partial x^k}{\partial \xi_i}\frac{\partial v^r}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial \xi^j}\delta^k_r\right)\frac{\partial \xi^i}{\partial x^p}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^q} = \frac{\partial x^k}{\partial \xi_i}\frac{\partial x^l}{\partial \xi^j}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^p}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^q}\frac{\partial v^k}{\partial x^l} = \delta^p_k\delta^l_q\frac{\partial v^k}{\partial x^l} = \frac{\partial v^p}{\partial x^q}.$$

Компоненты тензора скоростей деформаций в абсолютной системе координат

Результат

Получаем, что компоненты тензора скоростей деформаций в абсолютной декартовой системе координат имеют вид

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i}\right).$$

Компоненты тензора скоростей деформаций в абсолютной системе координат

Результат

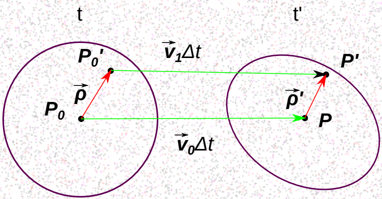
Получаем, что компоненты тензора скоростей деформаций в абсолютной декартовой системе координат имеют вид

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i}\right).$$

Свойства:

1) симметричность $e_{ij} = e_{ji}$;
2) характеризует состояние среды в данный момент времени в отличие от тензора деформаций;
3) $e_{ij}\Delta t = \varepsilon_{ij}$ – компоненты тензора малых деформаций.

Распределение скоростей в бесконечно малой частице

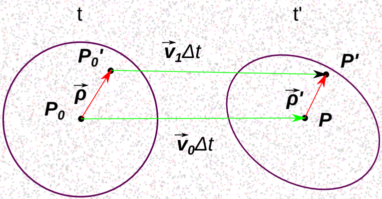


Постановка задачи

Рассмотрим окрестность точки P_0 с лагранжевыми координатами ξ_i и точку из окрестности P_0' с лагранжевыми координатами $\xi_i + d\xi_i$. За время Δt точки P_0 и P_0', образующие вектор $\vec{\rho}$, перейдут в точки P и P', образующие вектор $\vec{\rho}'$.

Требуется связать изменения вектора $\vec{\rho}$ с компонентами тензора скоростей деформаций. Рассмотрение ведется в абсолютной декартовой системе координат.

Соотношения для изменения вектора направления в окрестности выбранной точки

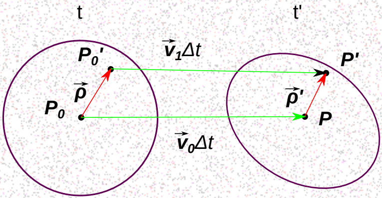


Из рисунка видно, что с точностью до первого порядка по Δt

$$\vec{\rho}' = \vec{\rho} + (\vec{v}_1 - \vec{v}_0)\Delta t,$$

где $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ – скорости движения точки P_0 в P и P_0' в P' за малое время Δt.

Соотношения для изменения вектора направления в окрестности выбранной точки



При разложении Тейлора для вектора скорости в окрестности точки P_0 имеем:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi^i}\right)\Bigg|_{P_0} \rho^i + \vec{\rho}O(\rho). \qquad (1)$$

Соотношения для изменения вектора направления в окрестности выбранной точки

Подставляя соотношение для скорости в соотношение для изменения длины, получим:

$$\vec{\rho}' = \vec{\rho} + \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi^i}\right)\bigg|_{P_0} \rho^i \Delta t + \vec{\rho} O(\rho \Delta t).$$

Из этого соотношения видно, что бесконечно малая жидкая частица за время Δt претерпевает бесконечно малое аффинное преобразование с точностью до $\vec{\rho} O(\rho \Delta t)$.

Разложение скорости в окрестности выбранной точки

Разложение

Используя теорему о разложении тензора на симметричный и антисимметричный тензор, представим $\vec{v}_1$ в виде:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi^i}\right)\Bigg|_{P_0} \rho^i + \vec{\rho} O(\rho) =$$

$$= \vec{v}_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^i}{\partial \xi^k} + \frac{\partial v^k}{\partial \xi^i}\right)\rho^i \vec{c}_k + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^k}{\partial \xi^i} - \frac{\partial v^i}{\partial \xi^k}\right)\rho^i \vec{c}_k + \vec{\rho} O(\rho) =$$

$$= \vec{v}_0 + e_{ik}\rho^i \vec{c}_k + \omega_{ki}\rho^i \vec{c}_k + \vec{\rho} O(\rho),$$

где e_{ik} – компоненты симметричного тензора скоростей деформаций, а

$$\omega_{ki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^k}{\partial \xi^i} - \frac{\partial v^i}{\partial \xi^k}\right)$$

являются компонентами антисимметричного тензора.

Разложение скорости на составляющие

Теорема Коши – Гельмгольца

Рассмотрим декартову систему координат так, что

$$\vec{\rho} = x^1\vec{c}_1 + x^2\vec{c}_2 + x^3\vec{c}_3,$$

тогда

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \operatorname{grad}\Phi + \vec{\rho}O(\rho),$$

$$\Phi = \frac{1}{2}e_{pq}x^p x^q, \quad \vec{\omega} = \omega^i\vec{c}_i = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \vec{c}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & \dfrac{\partial}{\partial x^3} \\ v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{v}.$$

Сравнивая это выражение с формулой для скорости движения абсолютно твердого тела, получаем, что скорость жидкой частицы складывается из скорости поступательного и вращательного движения и скорости чистой деформации.

Скорость относительного удлинения

Рассмотрим относительное удлинение e_ρ вектора $\vec{\rho}$:

$$e_\rho = \frac{1}{|\vec{\rho}|}\frac{d|\vec{\rho}|}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho^2}{dt} = \frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}\frac{d(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho})}{dt} = \frac{1}{\rho^2}\left(\vec{\rho}\cdot\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right).$$

Скорость относительного удлинения

Рассмотрим относительное удлинение e_ρ вектора $\vec{\rho}$:

$$e_\rho = \frac{1}{|\vec{\rho}|}\frac{d|\vec{\rho}|}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho^2}{dt} = \frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}\frac{d(\vec{\rho}\cdot\vec{\rho})}{dt} = \frac{1}{\rho^2}\left(\vec{\rho}\cdot\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right).$$

Используя разложение из теоремы Коши – Гельмгольца, соотношение (1) при $\Delta t \to 0$ и $\vec{\rho}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{\rho}) = 0$, получим:

$$e_\rho = \frac{1}{\rho^2}\left(\vec{\rho}\cdot\frac{d\vec{\rho}}{dt}\right) = \frac{1}{\rho^2}\left(\vec{\rho}\cdot \operatorname{grad}\Phi\right) = \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}x^1 + \frac{\partial\Phi}{\partial x^2}x^2 + \frac{\partial\Phi}{\partial x^3}x^3\right) =$$

$$= \frac{2\Phi}{\rho^2} = e_{ij}\frac{x^i}{\rho}\frac{x^j}{\rho} = e_{ij}\alpha^i\alpha^j,$$

где $\alpha^i = \dfrac{x^i}{\rho} = \cos(\rho, x^i)$.

Скорость относительного удлинения

Вывод

Скорость относительного удлинения задается квадратичной формой

$$e_\rho = e_{ij}\alpha^i\alpha^j,$$

где $\alpha^i = \dfrac{x^i}{\rho} = \cos(\rho, x^i)$, e_{ij} – компоненты тензора скоростей деформаций.

Компоненты тензора скоростей деформаций с одноименными индексами являются скоростями относительных удлинений отрезков среды, первоначально направленных параллельно соответствующим координатным осям.

Скорость относительного удлинения

Вывод

Вспомнив, что

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij}\Delta t,$$

где ε_{ij} – тензор малых деформаций, получим свойство недиагональных элементов тензора скоростей деформаций. Так как

$$\sin\alpha_{ij} = 2\varepsilon_{ij},$$

где α_{ij} – угол скашивания изначально прямого угла, то недиагональные компоненты тензора e_{ij} $i \neq j$ равны половине скорости скашивания первоначально прямых углов, образованных отрезками среды, в данный момент времени параллельными соответствующим координатным осям.

Главные оси и главные значения тензора скоростей деформаций

Квадратичная форма

$$e_\rho = e_{ij}\alpha^i\alpha^j,$$

где $\alpha^i = \cos(\rho, x^i)$, аналогично, как в случае с тензором деформаций, анализируется на экстремальные значения на единичной сфере.

Главные оси и главные значения тензора скоростей деформаций

Квадратичная форма

$$e_\rho = e_{ij}\alpha^i\alpha^j,$$

где $\alpha^i = \cos(\rho, x^i)$, аналогично, как в случае с тензором деформаций, анализируется на экстремальные значения на единичной сфере.

Вывод

Максимальные скорости относительного удлинения совпадают с главными значениями тензора скоростей деформаций e_1, e_2, e_3, а направления, в которых они реализуются, совпадают с собственными векторами тензора скоростей деформаций. Очевидно, что если $e_i > 0$, то имеет место растяжение, а если $e_i < 0$, то – сжатие.

Литература

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Том 1. М.:Наука, 1970.
2. *Сокольников И. С.* Тензорный анализ (теория и применение в геометрии и в механике сплошных сред). Перевод с англ. Главная редакция физ.-мат. лит. Изд. М.: Наука, 1971.