Общая теория движения жидких и газообразных сред

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрофизики и газовой динамики

30 декабря 2020 г.

Аннотация

Баротропные течения. Функция давления. Форма Громеки – Лэмба для уравнения движения. Уравнения динамической возможности движения. Интегралы Бернулли и Коши и условия их существования. Кинетическая энергия безвихревого течения. Теорема Томсона.

Модель баротропного течения идеального газа

Основные уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{f},$$

где ρ, p, $\vec{v}$ – плотность, давление и скорость среды, заданные в эйлеровой системе координат (x, y, z); $\vec{f}$ – вектор объемных сил.

Определение

Течение называется баротропным, если между плотностью и давлением имеет место соотношение

$$p = p(\rho).$$

Примеры баротропных течений

1) изотермические течения:

$$p = \rho R T, \quad T = const,$$

где R – газовая постоянная; T – заданная температура;

2) изоэнтропические течения политропного газа:

$$p = A(S)\rho^{\gamma}, \quad S = const,$$

где S – энтропия; $\gamma = C_p/C_V$ – показатель политропы;

3) идеальная жидкость:

$$\rho = const.$$

Преобразование конвективной части закона движения

Предпосылки

Из формулы

$$\operatorname{grad}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a} + (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} + \vec{b}\times\operatorname{rot}\vec{a} + \vec{a}\times\operatorname{rot}\vec{b}$$

следует, что

$$\operatorname{grad}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) = (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} + \vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{v}.$$

Модификация уравнений

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) + \operatorname{rot}\vec{v}\times\vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p$$

Функция давления $\mathscr{P}(p)$

Определение

Для баротропного течения, если существует $\rho = \rho(p)$, то определим:

$$\mathscr{P}(p) = \int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}.$$

Свойство

Используя соотношения, аналогичные

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathscr{P}(p) = \frac{\partial \mathscr{P}}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

получим:

$$\operatorname{grad}\mathscr{P}(p) = \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p.$$

Форма Громеки – Лэмба уравнения движения

Основные уравнения

Используя преобразование конвективной составляющей уравнения движения и введенную функцию давления, получим уравнения движения в форме Громеки – Лэмба

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} E + \vec{\Omega} \times \vec{v} = 0,$$

где

$$E = \frac{\vec{v}^2}{2} + \mathscr{P} + \Pi, \quad \vec{\Omega} = \operatorname{rot} \vec{v}.$$

Здесь Π – потенциал массовых сил $\vec{f} = -\operatorname{grad} \Pi$.

Определение

E – полная приведенная механическая энергия системы, $\vec{\Omega}$ – вектор вихря.

Уравнение динамической возможности движения

Из уравнения в форме Громеки – Лэмба следует, что

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} = -\operatorname{grad} E,$$

поэтому

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v}\right) = 0.$$

Зная разложение для ротора векторного произведения

$$\operatorname{rot}(\vec{\Omega} \times \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{\Omega} - (\vec{\Omega} \cdot \nabla)\vec{v} + \vec{\Omega} \operatorname{div} \vec{v} - \vec{v} \operatorname{div} \vec{\Omega},$$

получим, используя полную производную, уравнение динамической возможности движения:

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = (\vec{\Omega} \cdot \nabla)\vec{v} - \vec{\Omega} \operatorname{div} \vec{v}.$$

Постоянство E вдоль линий тока и вихревых линий

Пусть $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$, тогда, умножив уравнение движения в форме Громеки – Лэмба скалярно на вектор скорости $\vec{v}$, получим:

$$\vec{v} \cdot \operatorname{grad} E + \vec{v} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = 0.$$

Второе слагаемое равно нулю в силу определения векторного произведения, а первое является производной от E вдоль линии тока $\vec{r} = \vec{r}(s)$ таких, что $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial s} = \vec{v}$:

$$\operatorname{grad} E \cdot \vec{v} = \operatorname{grad} E \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = \frac{\partial E}{\partial s} = 0.$$

Аналогично умножая уравнение движения скалярно на вектор $\vec{\Omega}$, можно показать, что функция E постоянна вдоль вихревых линий.

Интеграл Бернулли для баротропного стационарного течения идеального газа

Условия существования

$$p = p(\rho), \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0.$$

Интеграл Бернулли

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + \mathscr{P}(p) + \Pi = C(L),$$

где $C(L)$ – константа вдоль линии тока или вихревой линии; $\mathscr{P}(p)$ – функция давления; Π – потенциал объемных сил.

$$\mathscr{P}(p) = \int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}, \quad \vec{f} = -\nabla\Pi.$$

Существование интеграла Бернулли во всей исследуемой области

Пусть в исследуемой области $\vec{\Omega} \times \vec{v} = \vec{0}$ и движение стационарно, тогда автоматически выполняется условие

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + \mathscr{P}(p) + \Pi = const$$

во всей области.

$\vec{\Omega} \times \vec{v} = \vec{0}$

→ $\vec{v} = 0$ – покоящееся течение (гидростатика);

→ $\vec{\Omega} = \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ – безвихревое, или потенциальное, течение;

→ $\vec{\Omega} \parallel \vec{v}$ – вихревые линии совпадают с линиями тока (винтовое течение).

Баротропное безвихревое течение

Определение

Течение называется безвихревым, или потенциальным, если

$$\vec{\Omega} = \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$$

или

$$\vec{v} = \nabla \varphi,$$

где $\varphi(\vec{x})$ – потенциал скорости.

Уравнение движения в форме Громеки – Лэмба для потенциального течения

$$\operatorname{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} + \mathscr{P} + \Pi \right) = 0$$

Слагаемое $\vec{\Omega} \times \vec{v} = 0$ в силу того, что $\vec{\Omega} = \vec{0}$.

Интеграл Коши для баротропного потенциального течения идеального газа

Условия существования

$$p = p(\rho), \quad \vec{v} = \nabla\varphi.$$

Интеграл Коши

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla\varphi)^2}{2} + \mathscr{P} + \Pi = F(t),$$

где $F(t)$ – постоянная функция во всей области, различающаяся в разные моменты времени; $\mathscr{P}(p)$ – функция давления; Π – потенциал объемных сил;

$$\mathscr{P}(p) = \int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}, \quad \vec{f} = -\nabla\Pi.$$

Кинетическая энергия безвихревого стационарного течения идеальной жидкости

Определение

Рассмотрим ограниченный односвязный объем ω, в котором реализуется потенциальное течение с потенциалом φ идеального жидкости ($\rho = const$). Тогда кинетическая энергия этого объема будет задаваться формулой

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_{\omega} \rho\vec{v}^2 d\omega = \frac{1}{2}\rho\int\limits_{\omega} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] d\omega.$$

Кинетическая энергия безвихревого стационарного течения идеальной жидкости

Формула Грина

$$\int\limits_{\omega}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi'}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\varphi'}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right)d\omega=-\int\limits_{S}\varphi\frac{\partial\varphi'}{\partial n}dS-$$

$$-\int\limits_{\omega}\varphi\left(\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi'}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi'}{\partial z^2}\right)d\omega,$$

где S – поверхность ω; $\vec{n}$ – вектор внешней единичной нормали.

Уравнение неразрывности

Подставляя в уравнение неразрывности $\vec{v}=\nabla\varphi$ и $\rho=const$, получим:

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0.$$

Кинетическая энергия безвихревого стационарного течения идеальной жидкости

Кинетическая энергия

Используя формулу Грина и уравнение неразрывности, получим:

$$T = -\frac{1}{2}\rho \int\limits_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS.$$

Таким образом, кинетическая энергия объема зависит только от значений потенциала и его производной на границе. Если на границе реализуется условие непротекания $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ или потенциал постоянен (а он определяется с точностью до константы), то жидкость внутри односвязного объема покоится.

Теорема Томсона

Теорема

Кинетическая энергия несжимаемой жидкости, движущейся в односвязном объеме с потенциалом скоростей, меньше кинетической энергиии во всяком другом движении, при котором на границах объема жидкость обладает движением, одинаковым с безвихревым, внутри же обладает вихрями.

Теорема Томсона

Математическая формулировка

Рассмотрим два стационарных течения идеальной жидкости с плотностью ρ, одно – безвихревое с потенциалом φ, другое – непотенциальное со скоростью $\vec{v}$. Рассмотрим односвязный объем ω с границей S такой, что на нем выполняется условие равенства нормальных скоростей:

$$\vec{v} \cdot \vec{n}|_S = \nabla\varphi \cdot \vec{n}|_S\,,$$

где $\vec{n}$ – вектор внешней единичной нормали к S. Тогда

$$T' > T,$$

где T, T' – кинетическая энергия объема ω для потенциального и вихревого течений соответственно.

Теорема Томсона: доказательство

Рассмотрим разность:

$$T' - T = \frac{1}{2}\rho\int\limits_{\omega}\vec{v}^2 d\omega - \frac{1}{2}\rho\int\limits_{\omega}(\nabla\varphi)^2 d\omega =$$

$$= \frac{1}{2}\rho\int\limits_{\omega} 2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(v_x - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(v_y - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(v_z - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right] d\omega +$$

$$+\frac{1}{2}\rho\int\limits_{\omega}\left[\left(v_x - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(v_y - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(v_z - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] d\omega.$$

Рассмотрим отдельно первое слагаемое.

Теорема Томсона: доказательство

В силу того, что жидкость несжимаемая и справедливы уравнения неразрывности

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0, \quad \Delta\varphi = 0,$$

то

$$\int\limits_{\omega} \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(v_x - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(v_y - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(v_z - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right] d\omega =$$

$$= \int\limits_{\omega} \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi\left(v_x - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi\left(v_y - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left[\varphi\left(v_z - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right]\right\} d\omega.$$

Теорема Томсона: доказательство

В силу теоремы Гаусса – Остроградского:

$$\int\limits_{\omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi\left(v_x - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi\left(v_y - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left[\varphi\left(v_z - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right]\right\} d\omega =$$

$$= \int\limits_{S} \varphi\left[\left(v_x - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) n_1 + \left(v_y - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) n_2 + \left(v_z - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) n_3\right] dS,$$

где $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – вектор внешней единичной нормали к S. И это выражение равно 0 из-за равенства нормальных составляющих скоростей на S (по условию теоремы).

Теорема Томсона: доказательство

Таким образом,

$$T' - T = \frac{1}{2}\rho \int\limits_{\omega} \left[\left(v_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(v_y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(v_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\omega$$

и

$$T' - T > 0,$$

если скорость $\vec{v}$ хоть в одной точке не совпадает с потенциалом $\nabla\varphi$. Что и требовалось доказать.

Литература

1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.:Гос. издат. физ.-мат. лит., 1963.
2. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газ: Учеб. для вузов. – 7-е изд., испр. М.:Дрофа, 2003.