

# Общая теория движения жидких и газообразных сред

*Верещагин Антон Сергеевич*

канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики

4 декабря 2019 г.

Баротропные течения. Функция давления. Форма Громеки-Ламба для уравнения движения. Уравнения динамической возможности движения. Интегралы Бернулли и Коши и условия их существования. Кинетическая энергия безвихревого течения. Теорема Томсона.

# Модель баротропного течения идеального газа

## Основные уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f},$$

где  $\rho$ ,  $p$ ,  $\vec{v}$  – плотность, давление и скорость среды, заданные в Эйлеровой системе координат  $(x, y, z)$ ;  $\vec{f}$  – вектор объёмных сил.

## Определение

Течение называется **баротропным**, если между плотностью и давлением имеет место соотношение

$$p = p(\rho).$$

# Примеры баротропных течений

- Изотермические течения

$$p = \rho RT,$$

где  $R$  – газовая постоянная;  $T$  – заданная температура.

- Изоэнтропические течения политропного газа

$$p = A(S)\rho^\gamma,$$

где  $S$  – энтропия;  $\gamma = C_p/C_V$  – показатель политропы.

- Идеальная жидкость

$$\rho = \text{const.}$$

# Преобразование конвективной части закона движения

## Предпосылки

Из формулы

$$\text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} + (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + \vec{b} \times \text{rot} \vec{a} + \vec{a} \times \text{rot} \vec{b}$$

следует, что

$$\text{grad} \left( \frac{\vec{v}^2}{2} \right) = (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \vec{v} \times \text{rot} \vec{v}.$$

## Модификация уравнений

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{\vec{v}^2}{2} \right) + \text{rot} \vec{v} \times \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p.$$

# Функция давления $\mathcal{P}(p)$

## Определение

Для баротропного течения, если существует  $\rho = \rho(p)$ , то определим

$$\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}.$$

## Свойство

Используя соотношения аналогичные

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{P}(p) = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

получим

$$\text{grad } \mathcal{P}(p) = \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$



# Форма Громеки-Ламба уравнения движения

## Основные уравнения

Используя преобразование конвективной составляющей уравнения движения и введённую функцию давления получим уравнения движения в форме Громеки-Ламба

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } E + \vec{\Omega} \times \vec{v} = 0,$$

где

$$E = \frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P} + \Pi, \quad \vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v}.$$

Здесь  $\Pi$  – потенциал массовых сил  $\vec{f} = -\text{grad } \Pi$ .

## Определение

$E$  – представляет собой полную приведённую механическую энергию системы,  $\vec{\Omega}$  – вектор вихря.

# Уравнение динамической возможности движения

Из уравнения в форме Громеки-Ламба следует, что

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} = -\text{grad } E,$$

поэтому

$$\text{rot} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} \right) = 0.$$

Зная разложение для ротора векторного произведения, равного

$$\text{rot}(\vec{\Omega} \times \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\Omega} - (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{v} + \vec{\Omega} \text{div } \vec{v} - \vec{v} \text{div } \vec{\Omega},$$

получим, используя полную производную, **уравнение динамической возможности движения**

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{v} - \vec{\Omega} \text{div } \vec{v}.$$



## Постоянство $E$ вдоль линий тока и вихревых линий

Пусть  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ , тогда, умножив уравнение движения в форме Громеки-Ламба скалярно на вектор скорости  $\vec{v}$ , получим

$$\vec{v} \cdot \text{grad } E + \vec{v} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = 0.$$

Второе слагаемое равно нулю, в силу определения векторного произведения, а первое является производной от  $E$  вдоль линии тока  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ , таких что  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = \vec{v}$ :

$$\text{grad } E \cdot \vec{v} = \text{grad } E \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = \frac{\partial E}{\partial s} = 0.$$

Аналогично, умножая уравнение движения скалярно на вектор  $\vec{\Omega}$ , можно показать, что функция  $E$  постоянна вдоль вихревых линий.

# Интеграл Бернулли для баротропного стационарного течения идеального газа

## Условия существования

$$p = p(\rho), \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0.$$

## Интеграл Бернулли

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P}(p) + \Pi = C(L),$$

где  $C(L)$  – константа вдоль линии тока или вихревой линии;  $\mathcal{P}(p)$  – функция давления;  $\Pi$  – потенциал объёмных сил

$$\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}, \quad \vec{f} = -\nabla \Pi.$$

# Существование интеграла Бернулли во всей исследуемой области

Пусть в исследуемой области  $\vec{\Omega} \times \vec{v} = \vec{0}$  и движение стационарно, тогда автоматически выполняется условие

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P}(p) + \Pi = const$$

во всей области.

$$\vec{\Omega} \times \vec{v} = \vec{0}$$

- $\vec{v} = 0$  – покоящееся течение (гидростатика).
- $\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v} = \vec{0}$  – безвихревое или потенциальное течение.
- $\vec{\Omega} \parallel \vec{v}$  – вихревые линии совпадают с линиями тока (винтовое течение).

# Баротропное безвихревое течение

## Определение

Течение называется **безвихревым** или **потенциальным**, если

$$\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v} = \vec{0}$$

или

$$\vec{v} = \nabla \varphi,$$

где  $\varphi(\vec{x})$  – потенциал скорости.

Уравнение движения в форме Громеки-Ламба для потенциального течения

$$\text{grad} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} + \mathcal{P} + \Pi \right) = 0,$$

Слагаемое  $\vec{\Omega} \times \vec{v} = 0$  в силу того, что  $\vec{\Omega} = \vec{0}$ .

# Интеграл Коши для баротропного потенциального течения идеального газа

## Условия существования

$$p = p(\rho), \quad \vec{v} = \nabla \varphi.$$

## Интеграл Коши

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} + \mathcal{P} + \Pi = F(t),$$

где  $F(t)$  – постоянная функция во всей области, различающаяся в различные моменты времени;  $\mathcal{P}(p)$  – функция давления;  $\Pi$  – потенциал объёмных сил

$$\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}, \quad \vec{f} = -\nabla \Pi.$$

# Кинетическая энергия безвихревого стационарного течения идеальной жидкости

## Определение

Рассмотрим ограниченный односвязный объем  $\omega$ , в котором реализуется потенциальное течение с потенциалом  $\varphi$  идеальной жидкости ( $\rho = \text{const}$ ). Тогда кинетическая энергия этого объема будет задаваться формулой

$$T = \frac{1}{2} \int_{\omega} \rho \vec{v}^2 d\omega = \frac{1}{2} \rho \int_{\omega} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\omega.$$



# Кинетическая энергия безвихревого стационарного течения идеальной жидкости

## Формула Грина

$$\int_{\omega} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right) d\omega = - \int_S \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} dS - \\ - \int_{\omega} \varphi \left( \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} \right) d\omega,$$

где  $S$  – поверхность  $\omega$ ;  $\vec{n}$  – вектор внешней единичной нормали.

## Уравнение неразрывности

Подставляя в уравнение неразрывности  $\vec{v} = \nabla \varphi$  и  $\rho = const$ , получим

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

# Кинетическая энергия безвихревого стационарного течения идеальной жидкости

## Кинетическая энергия

Используя формулу Грина и уравнение неразрывности получим

$$T = -\frac{1}{2}\rho \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS.$$

Таким образом, кинетическая энергия объёма зависит только от значений потенциала и его производной на границе. Если на границе реализуется условие непротекания  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$  или потенциал постоянен (а он определяется с точностью до константы), то жидкость внутри односвязного объёма покоится.

# Теорема В. Томсона

## Теорема

Кинетическая энергия несжимаемой жидкости, движущейся в односвязном объёме с потенциалом скоростей, меньше кинетической энергии во всяком другом движении, при котором на границах объёма жидкость обладает движением, одинаковым с безвихревым, внутри же обладает вихрями.

# Теорема В. Томсона

## Математическая формулировка

Рассмотрим два стационарных течения идеальной жидкости с плотностью  $\rho$ , одно – безвихревое с потенциалом  $\varphi$ , другое – не потенциальное со скоростью  $\vec{v}$ . Рассмотрим односвязный объём  $\omega$  с границей  $S$ , такой что на нем выполняется условие равенства нормальных скоростей

$$\vec{v} \cdot \vec{n}|_S = \nabla \varphi \cdot \vec{n}|_S,$$

где  $\vec{n}$  – вектор внешней единичной нормали к  $S$ . Тогда

$$T' > T,$$

где  $T, T'$  - кинетическая энергия объёма  $\omega$  для потенциального и вихревого течений соответственно.

## Теорема В. Томсона: доказательство

Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} T' - T &= \frac{1}{2}\rho \int_{\omega} \vec{v}^2 d\omega - \frac{1}{2}\rho \int_{\omega} (\nabla\varphi)^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{2}\rho \int_{\omega} 2 \left[ \frac{\partial\varphi}{\partial x} \left( v_x - \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \left( v_y - \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \left( v_z - \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \right] d\omega + \\ &\quad + \frac{1}{2}\rho \int_{\omega} \left[ \left( v_x - \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( v_y - \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( v_z - \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\omega. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно первое слагаемое.

## Теорема В. Томсона: доказательство

В силу того, что жидкость несжимаемая и справедливы уравнения неразрывности

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \Delta \varphi = 0,$$

то

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left( v_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left( v_y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left( v_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] d\omega = \\ = \int_{\omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \varphi \left( v_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \varphi \left( v_y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \varphi \left( v_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] \right\} d\omega. \end{aligned}$$



## Теорема В. Томсона: доказательство

В силу теоремы Гаусса-Остроградского

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \varphi \left( v_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \varphi \left( v_y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \varphi \left( v_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] \right\} d\omega = \\ & = \int_S \varphi \left[ \left( v_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) n_1 + \left( v_y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) n_2 + \left( v_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) n_3 \right] dS, \end{aligned}$$

где  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$  – вектор внешней единичной нормали к  $S$ . И это выражение **равно 0** из-за равенства нормальных составляющих скоростей на  $S$  (по условию теоремы).

## Теорема В. Томсона: доказательство

Таким образом,

$$T' - T = \frac{1}{2}\rho \int_{\omega} \left[ \left( v_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( v_y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left( v_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\omega$$

и

$$T' - T > 0,$$

если скорость  $\vec{v}$  хоть в одной точке не совпадает с потенциалом  $\nabla \varphi$ . Что и требовалось доказать.

# Литература

- *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.:Гос. издат. физ.-мат. лит., 1963.
- *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газ: Учеб. для вузов. – 7-е изд., испр. М.:Дрофа, 2003.