

Трёхмерные осесимметричные потенциальные течения идеальной жидкости

Верецагин Антон Сергеевич

канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики ФФ НГУ

30 января 2019 г.

Аннотация

Основные определения

Определение

Течение называется **осесимметричным**, если существует такая прямая l , что во всех плоскостях, проходящих через l картина течения одинакова и траектория жидкой частицы лежит в полуплоскостях, проходящих через l .

Определение

Течение называется **потенциальным**, если в некоторой области пространства можно определить потенциал $\varphi(t, x, y, z)$, такой что

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi.$$

Основные уравнения

Для трёхмерных потенциальных течений идеальной жидкости определённых в некоторой области пространства справедливы следующие уравнения.

Уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \vec{v} = \Delta \varphi = 0, \quad \vec{v} = \nabla \varphi$$

Интеграл Коши

$$\frac{\nabla \varphi^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t)^1$$

Интеграл Коши позволяет найти распределение давления по заданному потенциалу, определённому из уравнения неразрывности ($\rho = \text{const}$).

¹Считаем, что поле внешних сил отсутствует

Уравнение неразрывности в различных системах координат

Сферическая система координат r, θ, λ

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) \right\} = 0,$$

где

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad v_\lambda = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}.$$

В случае осесимметричного течения можно пренебречь зависимостью φ от λ .

Уравнение неразрывности в различных системах координат

Цилиндрическая система координат r, θ, z

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} v_\theta + \frac{\partial}{\partial z} (rv_z) \right\} = 0,$$

где

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

В случае осесимметричного течения можно пренебречь зависимостью φ от θ .