Трёхмерные осесимметричные потенциальные течения идеальной жидкости

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики ФФ НГУ

1 февраля 2019 г.

Аннотация

Основные определения

Определение

Течение называется осесимметричным, если существует такая прямая l, что во всех плоскостях, проходящих через l картина течения одинакова и траектория жидкой частицы лежит в полуплоскостях, проходящих через l.

Определение

Течение называется потенциальным, если в некоторой области пространства можно определить потенциал $\varphi(t, x, y, z)$, такой что

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi.$$

Основные уравнения

Для трёхмерных потенциальных течений идеальной жидкости определённых в некоторой области пространства справедливы следующие уравнения.

Уравнение неразрывности

$$\operatorname{div}\vec{v} = \Delta\varphi = 0, \quad \vec{v} = \nabla\varphi$$

Интеграл Коши

$$\frac{\nabla\varphi^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t)^1$$

Интеграл Коши позволяет найти распределение давления по заданному потенциалу, определённому из уравнения неразрывности ($\rho = const$).

[1] Считаем, что поле внешних сил отстутствует

Уравнение неразрывности в различных системах координат

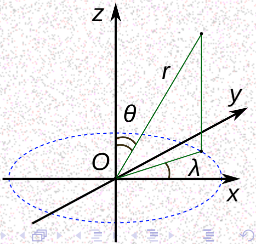
Сферическая система координат r, θ, λ

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)\right\}=0,$$

где

$$v_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r},\quad v_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta},\quad v_\lambda=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}.$$

В случае осесимметричного течения можно пренебречь зависимостью φ от λ.



Уравнение неразрывности в различных системах координат

Цилиндрическая система координат r, θ, z

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(rv_r\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}v_\theta+\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(rv_z\right)\right\}=0,$$

где

$$v_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r},\quad v_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta},\quad v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

В случае осесимметричного течения вдоль оси Oz можно пренебречь зависимостью φ от θ.

Источник в пространстве

Сферически симметричное течение

$$\varphi = \varphi(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{d\varphi}{dr}\right) = 0.$$

Источник в пространстве

Сферически симметричное течение

$$\varphi = \varphi(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{d\varphi}{dr}\right) = 0.$$

Потенциал источника, расположенного в точке с координатами (a, b, c)

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{q}{4\pi\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Источник в пространстве

Сферически симметричное течение

$$\varphi = \varphi(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{d\varphi}{dr}\right) = 0.$$

Потенциал источника, расположенного в точке с координатами (a, b, c)

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{q}{4\pi\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Расход жидкости через любую поверхность, охватывающую центр источника S

$$q = \int\limits_S v_n dS = \int\limits_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS.$$

Диполь в пространстве

Потенциал

Рассмотрим источник и сток одной и той же обильности q, находящиеся на оси Oz на расстоянии l друг от друга. Тогда их суммарный потенциал будет иметь вид

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+(z-l/2)^2}} + \frac{q}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+(z+l/2)^2}}.$$

Диполь в пространстве

Потенциал

Рассмотрим источник и сток одной и той же обильности q, находящиеся на оси Oz на расстоянии l друг от друга. Тогда их суммарный потенциал будет иметь вид

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+(z-l/2)^2}} + \frac{q}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+(z+l/2)^2}}.$$

При переходе к пределу при $l \to 0$, а $q \to \infty$, причём $ql = M$, получится предельный потенциал

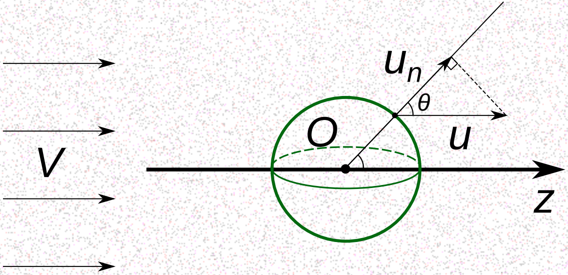
$$\varphi = -\frac{Mz}{4\pi r^3} \quad \text{или} \quad \varphi = -\frac{M}{4\pi}\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r}\right),$$

где M – момент диполя; l – направление оси диполя.

Обтекание сферы

Постановка

Требуется найти распределение скорости и давления при потенциальном обтекании сферы радиуса R, движущейся поступательно вдоль оси Oz со скоростью u, в потоке идеальной жидкости, имеющей на бесконечности скорость V, направленную вдоль оси Oz, и давление p_∞.



Математическая постановка

Основные уравнения

В сферической системе координат пренебрегаем зависимостью от λ. Тогда для функции $\varphi = \varphi(r,\theta)$ запишем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0.$$

Граничные условия на сфере

$$v_n = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{r=R} = u\cos\theta.$$

Граничные условия на бесконечности

$$v_r = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r\to\infty} = V\cos\theta, \quad v_\theta = \frac{1}{r}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right|_{r\to\infty} = -V\sin\theta.$$

Решение задачи об обтекании сферы

Упрощение

Пусть $\varphi(r,\theta) = Q(r)\cos\theta$, тогда уравнение неразрывности будет иметь вид

$$r^2\frac{d^2Q}{dr^2} + 2r\frac{dQ}{dr} - 2Q = 0.$$

Аналитическое решение

$$\varphi(r,\theta) = \left(Vr + \frac{V-u}{2}\frac{R^3}{r^2}\right)\cos\theta,$$

которое можно переписать в виде

$$\varphi = Vz - \frac{R^3}{2}(V-u)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Видно, это сумма потенциала поступательного движения потока со скоростью V и потенциала диполя с моментом $M = 2\pi R^3(u-V)$.

Обтекание покоящейся сферы

Если $u = 0$, тогда

$$\varphi = V\left(r + \frac{1}{2}\frac{R^3}{r^2}\right)\cos\theta$$

и

$$v_r = V\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\cos\theta, \quad v_\theta = -V\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right)\sin\theta.$$

Максимальное значение скорости на поверхности сферы достигается в точках $\theta = \pm\pi/2$ и равно $3/2V$.

Парадокс Даламбера для покоящейся сферы

Интеграл Бернулли

Так как течение потенциально и стационарно, то

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{V^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho}$$

Выражение для давления

$$\frac{p - p_\infty}{\rho} = \frac{V^2}{2}\left(1 - \frac{9}{4}\sin^2\theta\right)$$

Суммарная сила, вызванная давлением потенциального течения жидкости на покоящуюся сферу, равна 0, вследствие симметрии распределения сил давления. Это называется парадоксом Даламбера.

Функция тока для осесимметричных течений

Уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат с осевой симметрией в переменных (r, z)

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial}{\partial z}(rv_z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = -\frac{\partial}{\partial z}(rv_z).$$

Существование полного дифференциала

$$d\psi = rv_r dz - rv_z dr = \frac{\partial\psi}{\partial z}dz + \frac{\partial\psi}{\partial r}dr$$

является полным дифференциалом (см. теорию про интегрирующий множитель).

Определение

Функцию $\psi(r, z)$ такую, что $v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}$, $v_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$ называют функцией тока для осесимметричных течений.

Свойства функции тока

Постоянство на линиях тока

Уравнения линий тока в случае осесимметричного течения

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{dz}{v_z},$$

поэтому на линиях тока

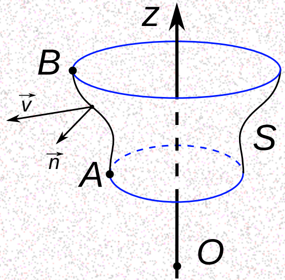
$$v_r dz - v_z dr = 0,$$

следовательно

$$d\psi = r(v_r dz - v_z dr) = 0$$

и $\psi = const$.

Свойства функции тока



Поток жидкости через поверхность S

$$\int\limits_S \vec{v}\cdot\vec{n}ds = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_B^A (v_z n_z + v_r n_r)\, r d\theta dl =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{l_0} \left(\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(-\frac{\partial r}{\partial l}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial l}\right) r dl =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{s_0} \frac{d}{dl}\psi(r(l), z(l))dl = 2\pi(\psi(A) - \psi(B)),$$

$$r = r(l), \quad z = z(l),$$

$$(r, z)|_{l=0} = B, \quad (r, z)|_{l=l_0} = A.$$

Связь функции тока и потенциала для осесимметричных течений

Соотношения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Полученные соотношения отличаются от условий Коши-Римана.

Связь функции тока и потенциала для осесимметричных течений

Соотношения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

Полученные соотношения отличаются от условий Коши-Римана.

Уравнение для функции тока

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0$$

Полученное соотношение не является уравнением Лапласа, записанным в цилиндрической системе координат. В случае осесимметричных течений не работают методы ТФКП. В этом случае может быть применён метод источников и стоков.

Связь между функций тока и потенциалом

Предпосылки

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}dr + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz = -r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}dr - \frac{\partial\varphi}{\partial r}dz\right),$$

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}dr + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}dr - \frac{\partial\psi}{\partial r}dz\right),$$

Искомые соотношения

$$\psi(r,z) = \psi(r_0,z_0) + \int\limits_{r_0,z_0}^{r,z} r\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}dz - \frac{\partial\varphi}{\partial z}dr\right),$$

$$\varphi(r,z) = \varphi(r_0,z_0) + \int\limits_{r_0,z_0}^{r,z} \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}dr - \frac{\partial\psi}{\partial r}dz\right).$$