

# Стационарные изоэнтропические течения идеального газа

*Верещагин Антон Сергеевич*  
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрофизики и газовой динамики



18 декабря 2020 г.

Уравнение состояния идеального политропного газа. Интеграл Бернулли изоэнтропического течения политропного газа. Параметры торможения потока, максимальная скорость, критическая скорость звука, критическая скорость. Формула Сен-Венана–Ванцеля для истечения газа из большого сосуда. Число Маха и коэффициент скорости. Связь параметров торможения и числа Маха и коэффициента скорости. Нагревание тел в потоке газа, влияние сжимаемости на течение.

# Уравнения состояния идеального политропного газа

## Термическое уравнение состояния

$$p = p_0 e^{(S-S_0)/c_v} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma = A(S) \rho^\gamma$$

## Внутренняя энергия и энтальпия в адиабатном процессе ( $S = \text{const}$ )

$$d\varepsilon = TdS - pd \left( \frac{1}{\rho} \right) = A(S) \rho^{\gamma-2} d\rho$$

$\Downarrow$

$$\varepsilon = \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \varepsilon_0, \quad i = \varepsilon + \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + i_0,$$

где  $\varepsilon_0$ ,  $i_0$  – константы интегрирования, которые можно будет опустить.

# Интеграл Бернулли для изоэнтропического течения политропного газа

## Интеграл Бернулли

$$i^* = \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{v^2}{2} + i = \frac{v^2}{2} + c_p T = C(l),$$

где  $C(l)$  – константа, характерная для выбранной линии тока;  $c_p$  – коэффициент теплоемкости при постоянном давлении. Массовые силы отсутствуют<sup>1</sup>.

## Основные следствия

Давление, плотность и температура с ростом скорости вдоль линии тока падают.

---

<sup>1</sup>Массовыми силами не всегда можно пренебречь, например, в метеорологии.

# Параметры торможения потока

## Температура торможения

Самая высокая температура на линии тока будет там, где  $v = 0$ , тогда

$$i^* = c_p T^*,$$

где  $T^*$  – температура торможения, а  $i^*$  – полное теплосодержание.

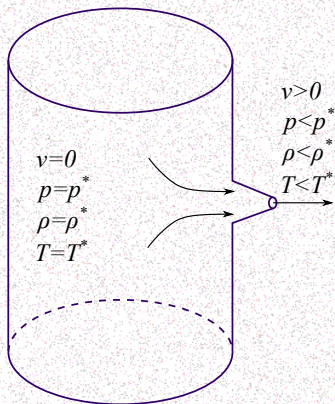
## Давление и плотность торможения

$$\begin{aligned} i^* = c_p T^* &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} e^{(S-S_0)/c_p} p^{*(\gamma-1)/\gamma} = \\ &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} e^{(S-S_0)/c_p} \rho^{*(\gamma-1)} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p^*}{\rho^*}, \end{aligned}$$

где  $p^*$ ,  $\rho^*$  – давление и плотность торможения.

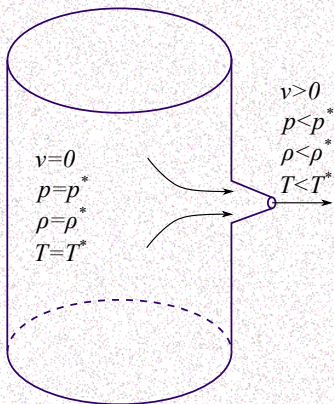


# Задача об истечении газа из большого сосуда



При **установившемся адиабатическом истечении газа** из большого сосуда скорость  $v$  в далеких от отверстия точках равна нулю, а давление, плотность и температура соответственно равны давлению торможения, плотности торможения и температуре торможения.

# Задача об истечении газа из большого сосуда



## Максимальная скорость истечения газа

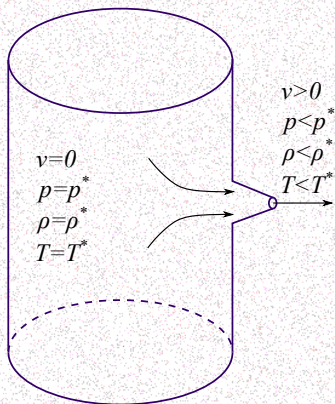
Максимальная скорость  $v_{max}$  достигается, при адиабатическом истечении газа в пустоту  $p = 0$ ,  $\rho = 0$ ,  $T = 0$ :

$$i^* = \frac{v_{max}^2}{2},$$

или

$$v_{max} = \sqrt{2c_p T^*}.$$

# Задача об истечении газа из большого сосуда



## Скорость звука

Для совершенного газа скорость звука имеет вид:

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma R T}.$$

## Интеграл Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} = \frac{v_{max}^2}{2}$$

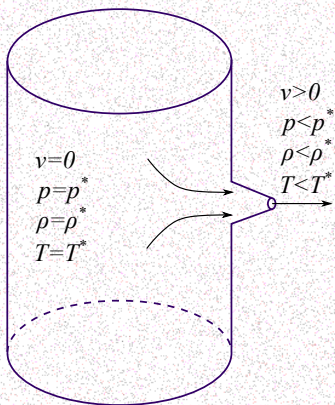
При изменении скорости потока, скорость звука вдоль линии тока меняется.



# Задача об истечении газа из большого сосуда

Критическая скорость звука

Критическая скорость звука  $c^*$  достигается при  $v = 0$ :



$$i^* = c_p T^* = \frac{c^{*2}}{\gamma - 1} = \frac{v_{max}^2}{2}.$$

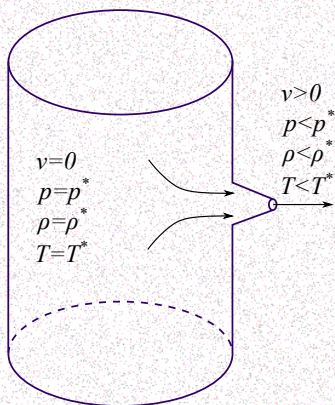
Поэтому

$$c^* = \sqrt{\gamma R T^*},$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} c^*.$$

Величина  $c^*$  зависит только от температуры торможения  $T^*$ .

# Задача об истечении газа из большого сосуда



## Критическая скорость

Значение скорости частицы газа, равное местной скорости звука, называется **критической скоростью  $v_{кр}$** :

$$\frac{v_{кр}^2}{2} + \frac{v_{кр}^2}{\gamma - 1} = \frac{c^{*2}}{\gamma - 1} = \frac{v_{max}^2}{2},$$

откуда

$$v_{кр} = \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}} c^* = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} v_{max}.$$

Значение  $v_{кр}$  зависит только от температуры торможения  $T^*$ .

# Задача об истечении газа из большого сосуда

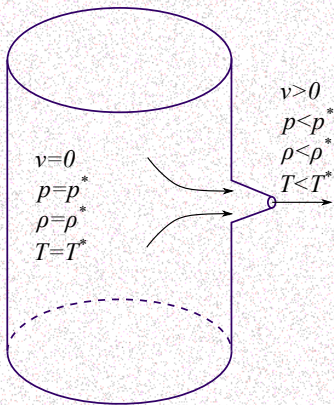
## Формула для скорости истечения газа

Так как

$$\begin{aligned} i^* &= \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} e^{(S-S_0)/c_p} p^{(\gamma-1)/\gamma} = \\ &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} e^{(S-S_0)/c_p} p^{*(\gamma-1)/\gamma} = \frac{v_{max}^2}{2}, \end{aligned}$$

то

$$\frac{v^2}{v_{max}^2} + \left( \frac{p}{p^*} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = 1.$$



# Задача об истечении газа из большого сосуда

## Формула для скорости истечения газа

Таким образом,

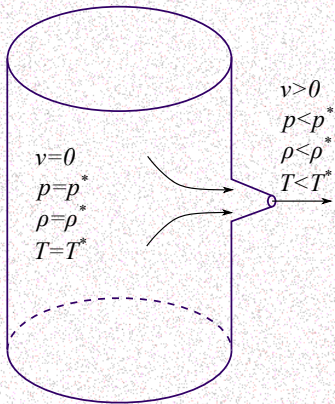
$$v^2 = v_{max}^2 \left[ 1 - \left( \frac{p}{p^*} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right],$$

и так как

$$v_{max} = \sqrt{2c_p T^*},$$

то получается формула Сен-Венана–Ванцеля:

$$v = \sqrt{2c_p T^*} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p^*} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right]^{1/2}.$$



# Пример критических значений и параметров торможения

Пусть  $T^* = 288 \text{ К}$  и  $\gamma = 1,4$ , тогда

$$c^* \approx 340 \text{ м/с}, \quad v_{max} \approx 756 \text{ м/с}, \quad v_{кр} \approx 310 \text{ м/с}.$$



# Число Маха и коэффициент скорости

## Определение

Отношение скорости движения частиц к местной скорости звука называется числом Маха:

$$M = \frac{v}{c}.$$

Для дозвуковых течений  $M < 1$ , для сверхзвуковых –  $M > 1$ , для трансзвуковых –  $M \sim 1$ .

## Определение

Отношение скорости движения частиц к критической скорости называется коэффициентом скорости:

$$\lambda = \frac{v}{v_{кр}} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \frac{v}{v_{max}}.$$

# Связь параметров потока с параметрами торможения и коэффициентом скорости

Разрешая интеграл Бернулли относительно давления, плотности, температуры и скорости звука, имеем:

$$\begin{aligned} p &= p^* \left( 1 - \frac{v^2}{v_{max}^2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} = p^* \left( 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \\ \rho &= \rho^* \left( 1 - \frac{v^2}{v_{max}^2} \right)^{1/(\gamma-1)} = \rho^* \left( 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2 \right)^{1/(\gamma-1)}, \\ T &= T^* \left( 1 - \frac{v^2}{v_{max}^2} \right) = T^* \left( 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2 \right), \\ c &= c^* \left( 1 - \frac{v^2}{v_{max}^2} \right)^{1/2} = c^* \left( 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

# Связь коэффициента скорости и числа Маха

Разделим обе части интеграла Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} = \frac{v_{max}^2}{2}$$

на  $v^2/2$ , тогда получим:

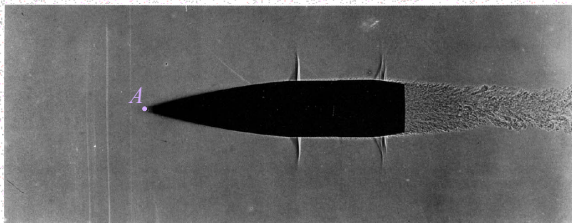
$$\frac{v^2}{v_{max}^2} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{1}{M^2}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \lambda^2.$$

# Связь параметров потока и с параметрами торможения и числа Маха

Разрешая интеграл Бернулли относительно давления, плотности, температуры и скорости звука, имеем:

$$\begin{aligned} p &= p^* \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-\gamma/(\gamma-1)}, \\ \rho &= \rho^* \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1/(\gamma-1)}, \\ T &= T^* \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1}, \\ c &= c^* \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

# Нагревание тела в потоке газа



$M = 0.900$

Температура потока в точке торможения  $A$  на рисунке вычисляется по формуле:

$$T^* = T \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right).$$

Для воздуха ( $\gamma \approx 1,4$ ) при температуре вдали от тела  $T = 250$  К:

- 1) при  $M = 1$   $T^* \approx 290$  К;
- 2) при  $M = 3$   $T^* \approx 700$  К;
- 3) при  $M = 5$   $T^* \approx 1500$  К.



# Влияние сжимаемости

Интегралы Бернулли для давления для несжимаемой жидкости и адиабатического движения газа:

$$p = p^* - \rho_0 \frac{v^2}{2} \quad \text{и} \quad p = p^* \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Разложим интеграл для газа в ряд Тейлора по параметру  $\frac{v^2}{v_{max}^2} \ll 1$ :

$$\begin{aligned} p &= p^* \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} = \\ &= p^* \left[ 1 - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{v^2}{v_{max}^2} + \frac{\frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} - 1\right)}{2!} \frac{v^4}{v_{max}^4} + \dots \right] = \end{aligned}$$

$$\text{ВСПОМНИМ, ЧТО } v_{max}^2 = \frac{2c^{*2}}{\gamma-1} \text{ и } \frac{\gamma p^*}{\rho^*} = c^{*2}, \text{ ТОГДА}$$

# Влияние сжимаемости

Интегралы Бернулли для давления для несжимаемой жидкости и адиабатического движения газа:

$$p = p^* - \rho_0 \frac{v^2}{2} \quad \text{и} \quad p = p^* \left( 1 - \frac{v^2}{v_{max}^2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Разложим интеграл для газа в ряд Тейлора по параметру  $\frac{v^2}{v_{max}^2} \ll 1$ :

$$= p^* - \frac{\rho^* v^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{2(\gamma-1)} \frac{v^2}{v_{max}^2} + \dots \right) = p^* - \frac{\rho^* v^2}{2} \left( 1 - \boxed{\frac{v^2}{4c^{*2}}} + \dots \right).$$

Разница не будет превышать 1 %, когда

$$\boxed{v^2/(4c^{*2})} \leq 0,01 \quad \text{или} \quad v \leq c^*/5.$$

При  $c^* = 340$  м/с получается условие для скорости  $v \leq 68$  м/с.

Разложение интеграла Бернулли для плотности по формуле Тейлора имеет вид:

$$\frac{\rho}{\rho^*} = 1 - \frac{1}{\gamma - 1} \frac{v^2}{v_{max}^2} + \dots$$

Легко проверить, что при  $v < \frac{c^*}{5} = 68 \frac{\text{м}}{\text{с}}$  будет справедливо

$$\frac{|\rho - \rho^*|}{\rho^*} \leq 0,02.$$

1. *Ван-Дайк М.* Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986.
2. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Том 2. М.: Наука, 1970.