

Звуковые колебания

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики



1 апреля 2020 г.

Аннотация

Звуковые волны. Скорость звука (определение). Скорость звука в идеальном политропном газе. Линеаризация уравнений сохранения. Плоские и сферические звуковые волны. Запаздывающие потенциалы. Способы конструирования решений. Распространение возмущений с до- и сверхзвуковой скоростью. Монохроматические волны и спектральное разложение. Волновой вектор и волновое число. Энергия и плотность потока энергии звуковых колебаний. Задача от отражении и преломлении звуковой волны.

Основные уравнения динамики идеального газа

Уравнения сохранения для идеального газа

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) S = 0.$$

Замыкающие соотношения

$$p = p(\rho, S).$$

Звуковые волны

Определение

Колебательное движение с малыми амплитудами в сжимаемом газе называют **звуковыми волнами**.

Звуковые волны

Определение

Колебательное движение с малыми амплитудами в сжимаемом газе называют **звуковыми волнами**.

Замечание

При рассмотрении звуковых колебаний будет считать течение **изоэнтропическим** ($S = \text{const}$), тогда из общей системы уравнений остаются только уравнение неразрывности и уравнение Эйлера, а в замыкающем соотношении пропадает зависимость от S , как функции от координаты и времени.

Скорость звука

Уравнения сохранения для идеального газа

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \nabla \rho,$$

$$p = p(\rho).$$

Скорость звука

Уравнения сохранения для идеального газа

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \nabla \rho,$$
$$p = p(\rho).$$

Определение

Величина $c > 0$, определяемая соотношением

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S,$$

называется **скоростью звука**.

Как видно из определения $c = c(\rho, S)$. Для изоэнтропических течений зависимостью от S как от функции переменных пространства и времени можно пренебречь.

Скорость звука в идеальном политропном газе

Уравнение состояния идеального политропного газа

$$p = A(S)\rho^\gamma \quad \text{или} \quad p = \rho RT/\mu,$$

где $\gamma = c_p/c_V$ – показатель политропы, $A(S)$ – функция энтропии, p – давление, ρ – плотность, T – температура, R – газовая постоянная, μ – молярная масса газа.

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S = \gamma A(S) \rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma \frac{RT}{\mu}.$$

Таким образом,

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}.$$

Линеаризация уравнений движения

Замена переменных

Рассмотрим малые колебания газа в окрестности постоянного решения $\vec{v} = 0, p = p_0, \rho = \rho_0$:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}, \\ c &= c_0 + c', \\ \rho &= \rho_0 + \rho'.\end{aligned}$$

Линеаризация уравнений движения

Замена переменных

Рассмотрим малые колебания газа в окрестности постоянного решения $\vec{v} = 0, p = p_0, \rho = \rho_0$:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}, \\ c &= c_0 + c', \\ \rho &= \rho_0 + \rho'.\end{aligned}$$

Уравнения движения

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0 + \rho')\vec{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'}(c_0 + c')^2 \nabla(\rho_0 + \rho').$$

Уравнения звуковых колебаний

Основные уравнения

Считая колебания малыми, отбрасываем все слагаемые, имеющие порядок малости два и выше, получим

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \nabla \rho' = 0.$$

Уравнения звуковых колебаний

Основные уравнения

Считая колебания малыми, отбрасываем все слагаемые, имеющие порядок малости два и выше, получим

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \nabla \rho' = 0.$$

Потенциальное течение и волновое уравнение

Если $\vec{v} = \nabla \varphi$, тогда

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \Delta \varphi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi + \frac{c_0^2}{\rho_0} \nabla \rho' = 0.$$

⇓

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta \varphi.$$

Решение волнового уравнения для плоских волн

Одномерное плоское течение

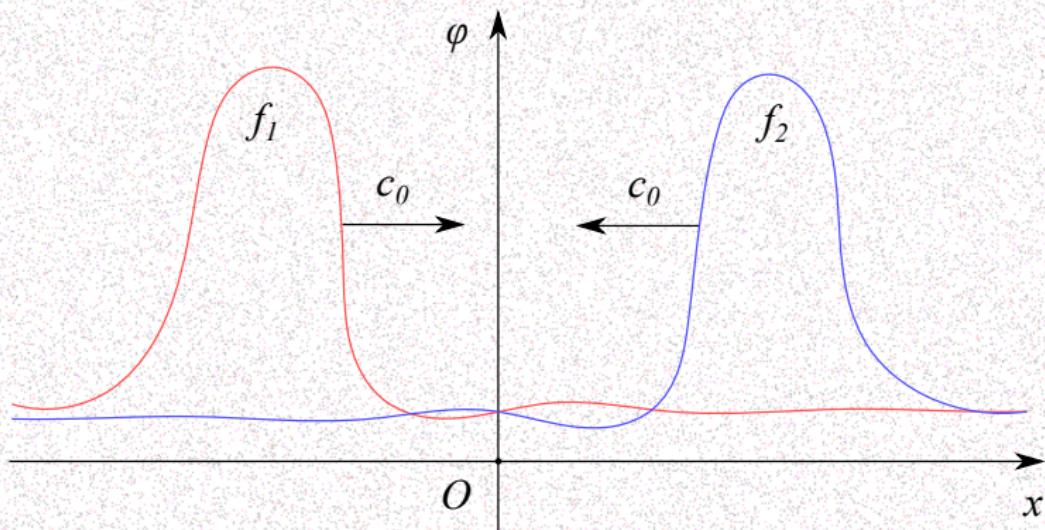
Если $\varphi = \varphi(t, x)$, тогда решением полученного волнового уравнения будет

$$\varphi(t, x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t) = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

где $f_1(\xi), f_2(\eta)$ – произвольные дважды дифференцируемые функции своих аргументов

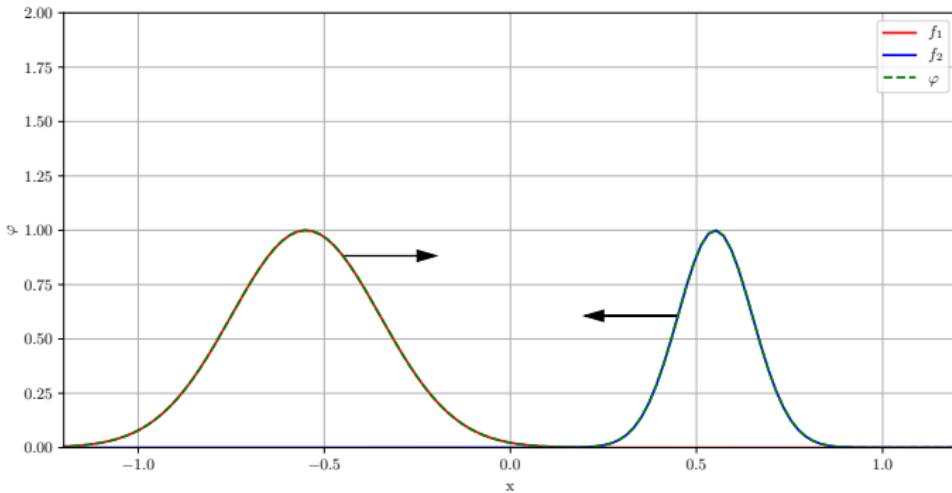
$$\xi = x - c_0 t, \quad \eta = x + c_0 t.$$

Прогрессивные волны



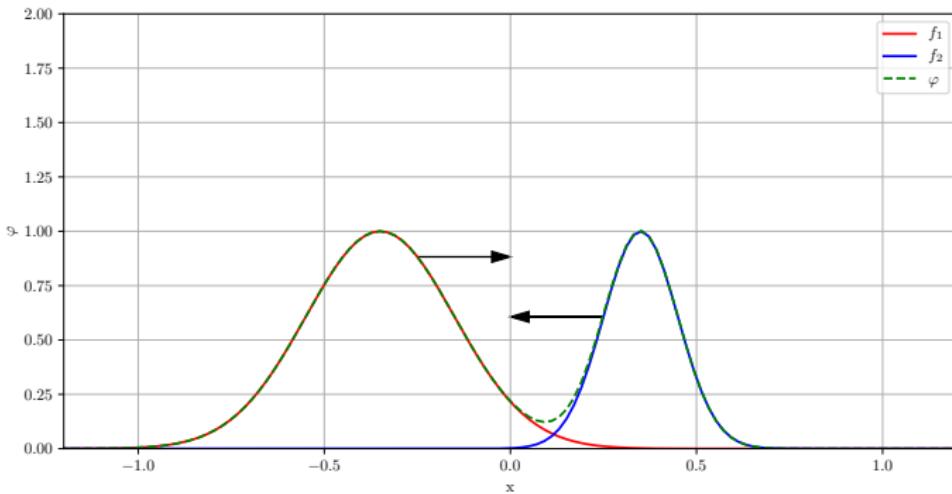
Решение $\varphi(t, x)$ представляет собой сумму перемещающихся поступательно вправо и влево волн неизменного вида с скоростью c_0 .

Иллюстрация распространения плоских волн



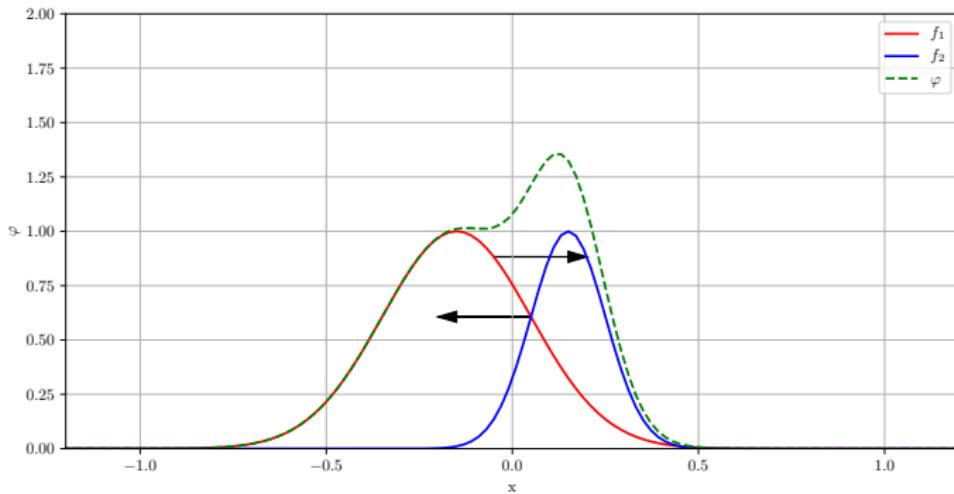
На рисунке $\varphi(t, x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t)$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения плоских волн



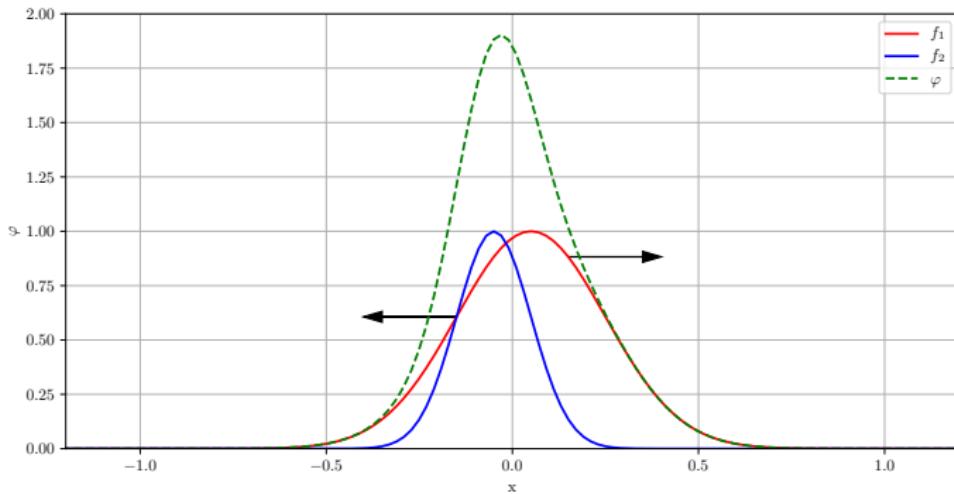
На рисунке $\varphi(t, x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t)$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения плоских волн



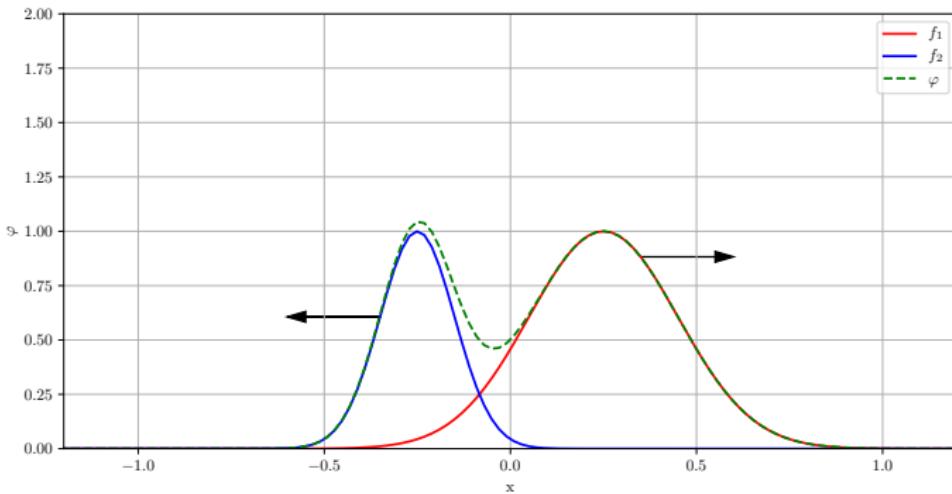
На рисунке $\varphi(t, x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t)$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения плоских волн



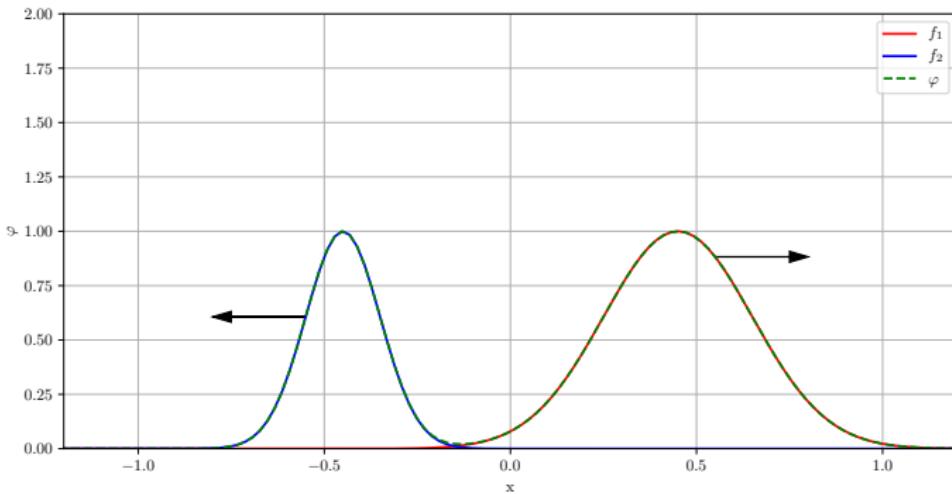
На рисунке $\varphi(t, x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t)$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения плоских волн



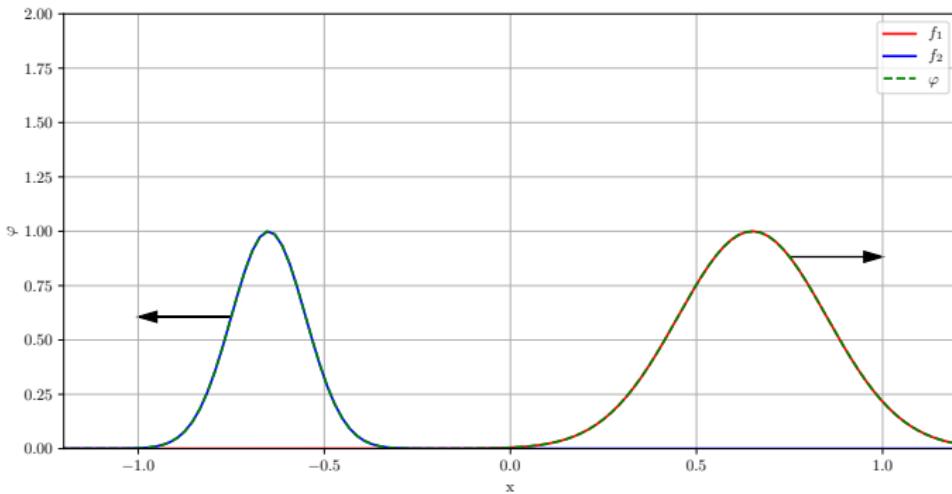
На рисунке $\varphi(t, x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t)$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения плоских волн



На рисунке $\varphi(t, x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t)$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения плоских волн



На рисунке $\varphi(t, x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t)$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Решение волнового уравнения в сферической симметрии

Волновое уравнение в сферической симметрии

Если $\varphi = \varphi(t, r)$, тогда волновое уравнение имеет вид

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\varphi) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi).$$

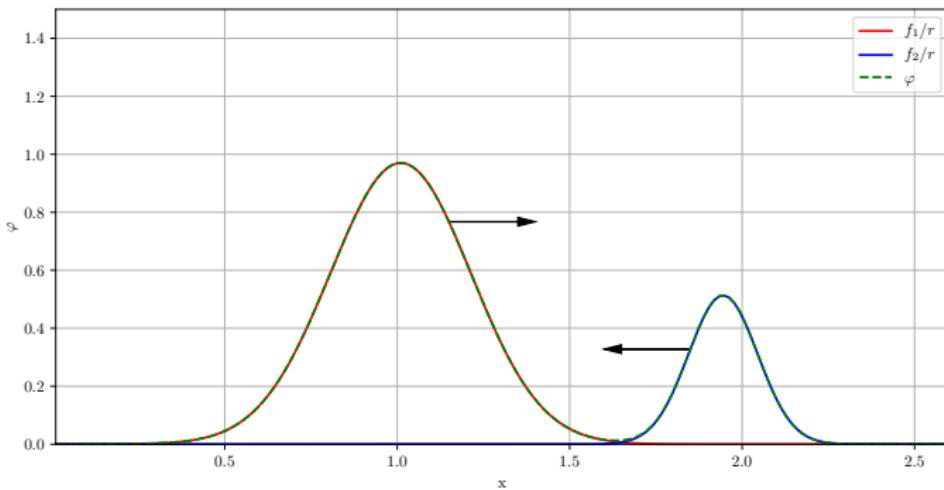
Одномерное сферическое течение

Решением полученного волнового уравнения будет

$$\varphi(t, r) = \frac{f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t)}{r} = \frac{Q_1(\xi)}{r} + \frac{Q_2(\eta)}{r},$$

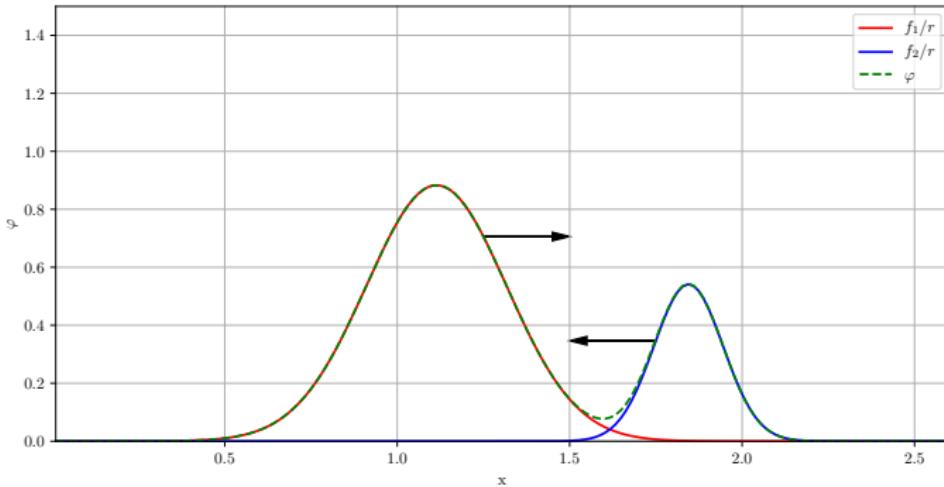
где $Q_1(\xi)$, $Q_2(\eta)$ – произвольные дважды дифференцируемые функции своих аргументов $\xi = r - c_0 t$, $\eta = r + c_0 t$.

Иллюстрация распространения сферических волн



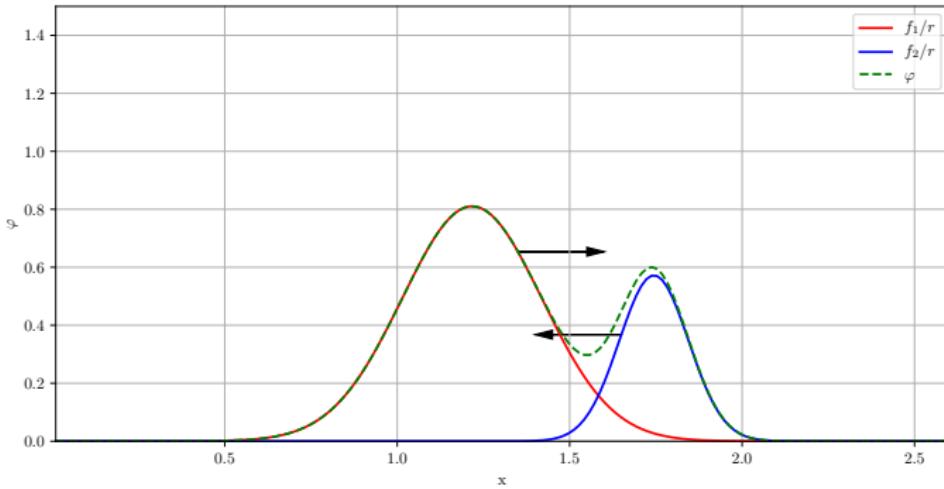
На рисунке $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения сферических волн



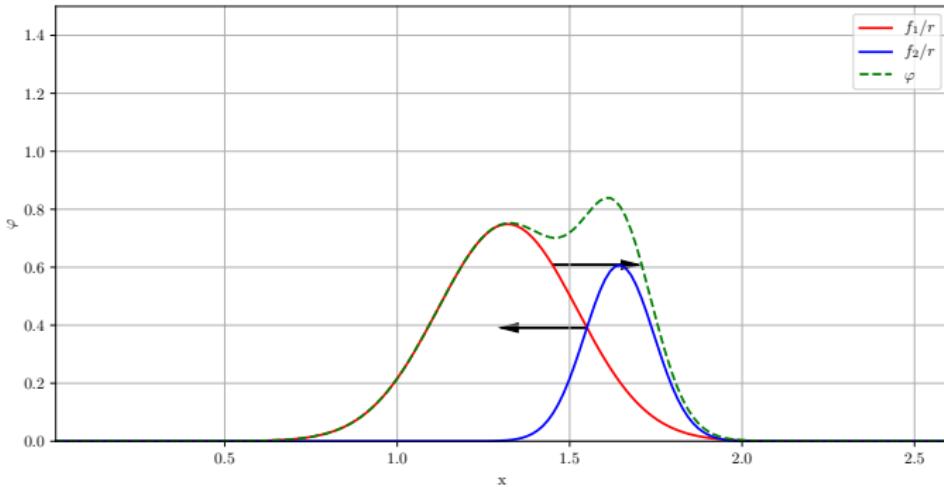
На рисунке $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения сферических волн



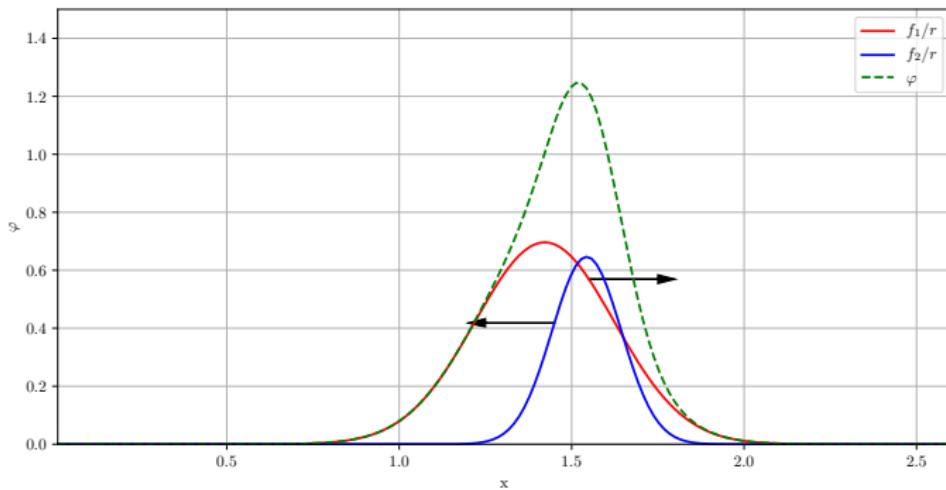
На рисунке $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения сферических волн



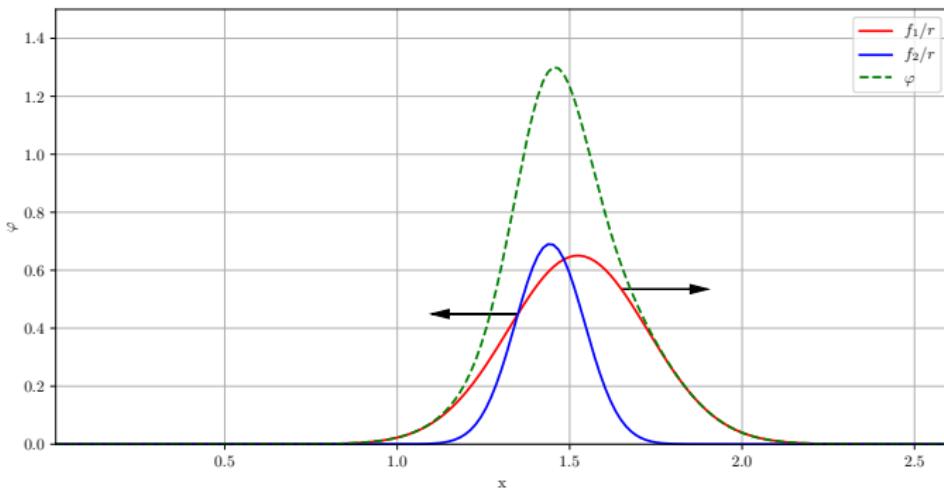
На рисунке $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения сферических волн



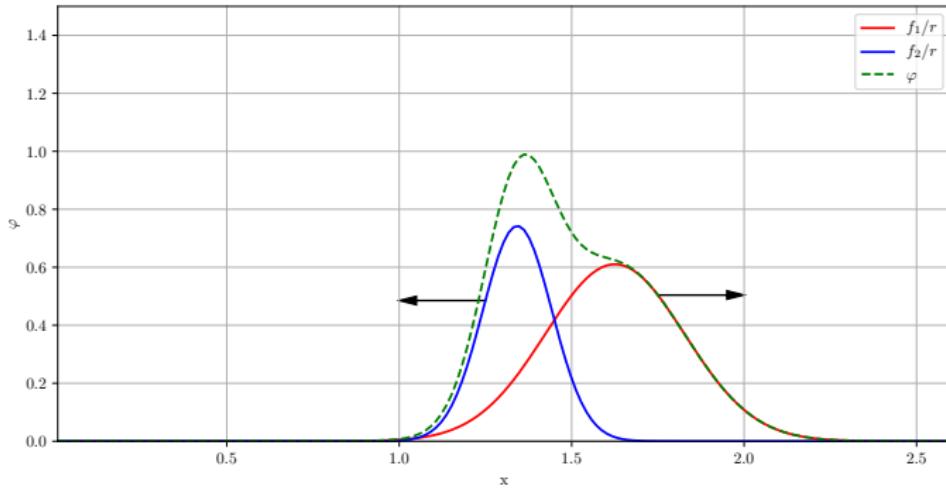
На рисунке $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения сферических волн



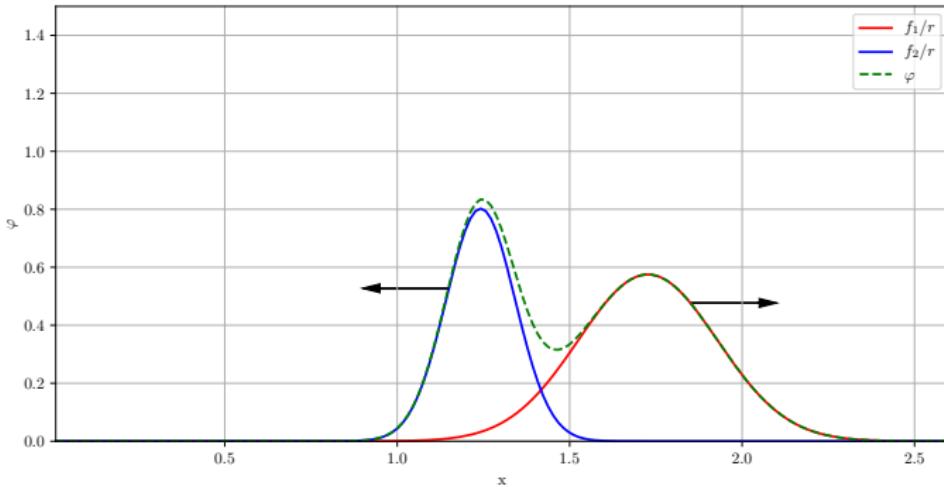
На рисунке $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения сферических волн



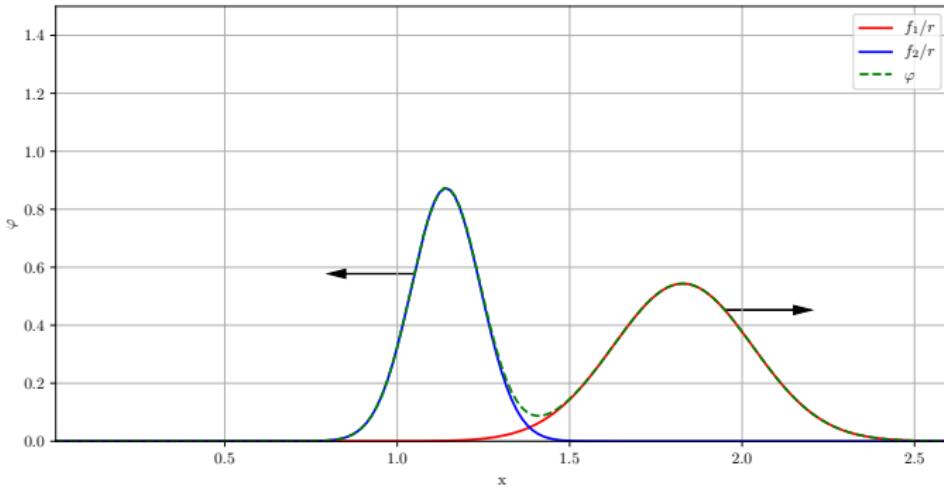
На рисунке $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения сферических волн



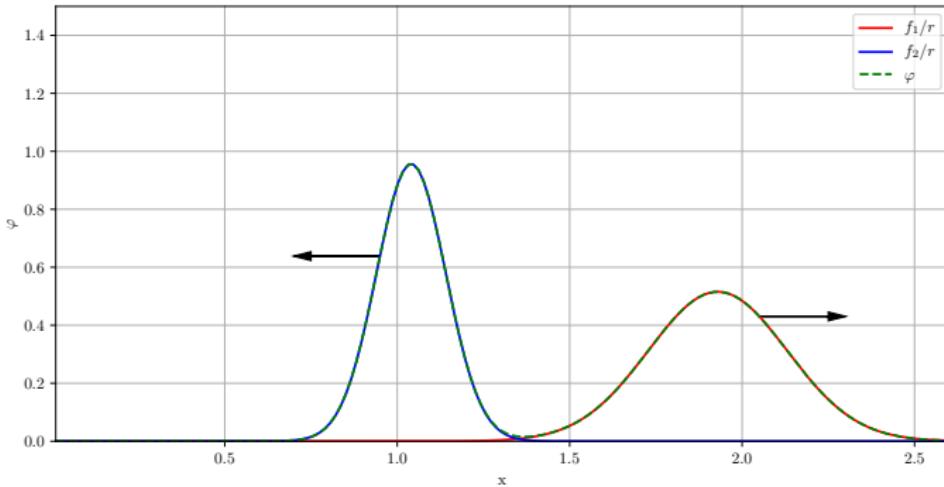
На рисунке $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения сферических волн



На рисунке $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения сферических волн



На рисунке $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Запаздывающие потенциалы

Определение

Возмущения из точки $r = 0$ доходят до некоторой точки $r \neq 0$ только через определённое время, поэтому полученное решение волнового уравнения называется **запаздывающим потенциалом**.

Запаздывающие потенциалы

Определение

Возмущения из точки $r = 0$ доходят до некоторой точки $r \neq 0$ только через определённое время, поэтому полученное решение волнового уравнения называется **запаздывающим потенциалом**.

Потенциал источника звука

Функция вида

$$\varphi^*(t, x, y, z) = -\frac{Q \left(c_0(t - t_0) - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \right)}{4\pi \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}$$

является решением волнового уравнения для источника звука, начавшего действовать в момент времени $t = t_0$ в точке с координатами (x_0, y_0, z_0) .

Способы конструирования решений волнового уравнения

Принцип суперпозиций

В силу линейности волнового уравнения суммарным потенциалом при движении твёрдого тела по траектории

$$x_0 = x_0(t_0), \quad y_0 = y_0(t_0), \quad z_0 = z_0(t_0)$$

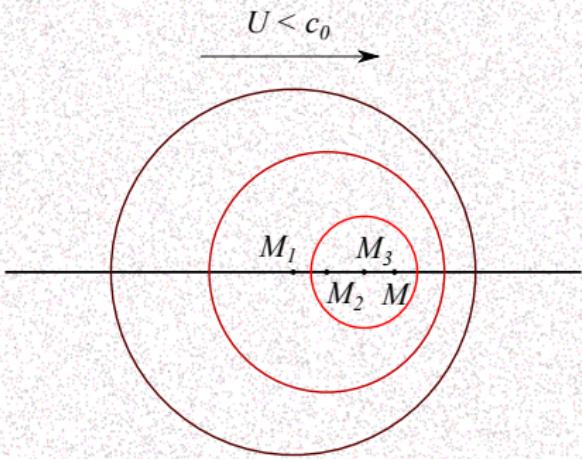
можно рассматривать потенциал, являющийся суммой источников звука, возбуждаемых телом в момент времени t_0 в соответствующих точках траектории с заданной интенсивностью Q_{t_0} , при этом

$$\varphi = \int_0^t \varphi^* dt_0.$$

Распространение возмущений от источника, движущегося с дозвуковой скоростью

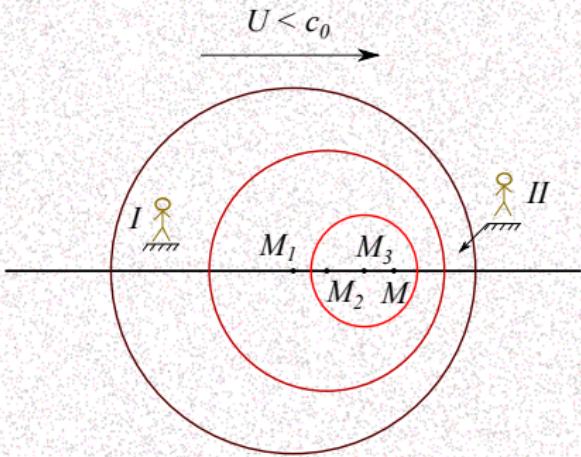
При движения тела прямолинейно с дозвуковой скоростью

$$U < c_0,$$



возмущения, возникающие на траектории его движения движутся быстрее, чем само тело, поэтому в его окрестности среда до него и после **возмущена**. Возмущения, посланные источником звука ранее, всегда обгоняют более поздние.

Распространение возмущений от источника, движущегося с дозвуковой скоростью



Эффект Допплера

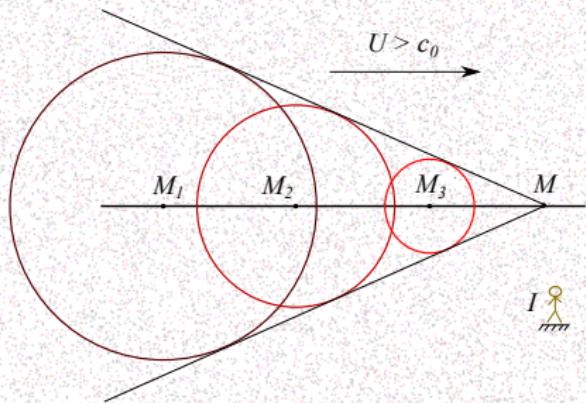
При движения тела прямолинейно с дозвуковой скоростью

$$U < c_0,$$

частота звука до перед телом (положение II) имеет большую частоту, чем за ним (положение I). Это обстоятельство объясняет так называемый **эффект Допплера**.

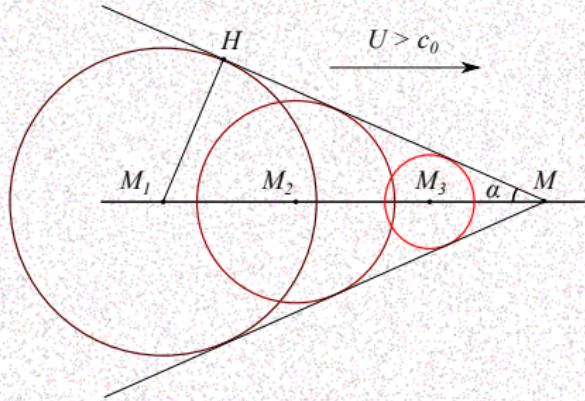
Распространение возмущений от источника, движущегося со сверхзвуковой скоростью

При движения тела прямолинейно со сверхзвуковой скоростью



$U > c_0$,
возмущения от источника будут распространяться медленнее, чем тело. Поэтому среда перед телом всегда будет **невозмущенная**. Наблюдатель, стоящий перед источником, движущимся со сверхзвуковой скоростью **не слышит** звуковых колебаний, создаваемых этим источником.

Распространение возмущений от источника, движущегося со сверхзвуковой скоростью



Конус Маха

При движении тела прямолинейно со сверхзвуковой скоростью $U > c_0$, огибающая возмущений будет образовывать конус с углом при вершине $\angle HMM_1$, обозначенным α , таким что

$$\sin \alpha = \frac{M_1 H}{M_1 M} = \frac{c_0 \Delta t}{U \Delta t} = \frac{c_0}{U} = \frac{1}{M},$$

где Δt – время, за которое тело прошло расстояние $M_1 M$; $M = U/c_0$ – **число Маха**.

Угол α называется **углом Маха**, а поверхность конуса – **конусом Маха**.

Монохроматические волны

Определение

Монохроматической волной называют функции, в которых все величины являются простыми периодическим (гармоническими) функциями времени вида

$$\varphi_0 = \operatorname{Re}\{\varphi_0(x, y, z)e^{-i\omega t}\},$$

где ω – частота волны.

Уравнение монохроматической волны

$$\Delta\varphi_0 + \frac{\omega^2}{c^2}\varphi_0 = 0,$$

получаемое подстановкой выражения для монохроматической волны в волновое уравнение.

Бегущая плоская монохроматическая волна

Определение

Потенциал вида

$$\varphi = \operatorname{Re} \left\{ A e^{-i\omega(t - \frac{x}{c})} \right\}$$

является бегущей плоской монохроматической волной, где A – комплексная амплитуда.

Вещественное представление

$$\varphi = a \cos \left(\frac{\omega}{c}x - \omega t + \alpha \right),$$

где a – вещественная амплитуда волны, аргумент под знаком \cos – фаза.

Волновой вектор и волновое число

Определение

Вектор

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}$$

называют **волновым вектором**, а его абсолютную величину **волновым числом**, где \vec{n} – единичный вектор в направлении распространения волны.

Спектральное разложение

Вообще говоря любую волну можно представить в виде совокупности плоских монохроматических волн с различными волновыми векторами и частотами вида

$$\varphi = \operatorname{Re} \left\{ A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right\},$$

где \vec{r} – радиус вектор. Такое разложение является разложением в ряд или интегралом Фурье.

Энергия звуковых колебаний

Закон сохранения энергии идеального газа

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) + \operatorname{div} \rho \vec{v} \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0.$$

Энергия единицы объёма

Разложение полной энергии единицы объёма покоящейся сплошной среды относительно состояния ρ_0, ε_0 при её малых возмущениях

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon'$$

до второго порядка малости имеет вид

$$E = \rho \varepsilon + \frac{\rho v^2}{2} \approx \rho_0 \varepsilon_0 + \rho' \left. \frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} + \frac{\rho'^2}{2} \left. \frac{\partial^2(\rho \varepsilon)}{\partial \rho^2} \right|_{\rho=\rho_0} + \frac{\rho_0 v^2}{2}.$$

Энергия звуковых колебаний

Термодинамические соотношения
Т.к.

$$d\varepsilon = TdS - pdV = TdS + \frac{p}{\rho^2}d\rho \quad \text{или} \quad dw = TdS + \frac{dp}{\rho},$$

где $w = \varepsilon + p/\rho$ – энталпия, то

$$\left(\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho} \right)_S = \varepsilon + \frac{p}{\rho} = w,$$

Энергия звуковых колебаний

Термодинамические соотношения
Т.к.

$$d\varepsilon = TdS - pdV = TdS + \frac{p}{\rho^2}d\rho \quad \text{или} \quad dw = TdS + \frac{dp}{\rho},$$

где $w = \varepsilon + p/\rho$ – энталпия, то

$$\left(\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho} \right)_S = \varepsilon + \frac{p}{\rho} = w,$$

$$\left(\frac{\partial^2(\rho\varepsilon)}{\partial\rho^2} \right)_S = \left(\frac{\partial w}{\partial\rho} \right)_S = \left(\frac{\partial w}{\partial p} \right)_S \left(\frac{\partial p}{\partial\rho} \right)_S = \frac{c^2}{\rho}.$$

Энергия звуковых колебаний

Полная энергия единицы объёма сплошной среды

$$E \approx \rho_0 \varepsilon_0 + w_0 \rho' + \frac{c_0^2}{2\rho_0} \rho'^2 + \rho_0 \frac{v^2}{2},$$

Энергия звуковых колебаний

Полная энергия единицы объёма сплошной среды

$$E \approx \rho_0 \varepsilon_0 + w_0 \rho' + \frac{c_0^2}{2\rho_0} \rho'^2 + \rho_0 \frac{v^2}{2},$$

где

- 1) $\rho_0 \varepsilon_0$ – энергия единицы объёма неподвижной среды;

Энергия звуковых колебаний

Полная энергия единицы объёма сплошной среды

$$E \approx \rho_0 \varepsilon_0 + w_0 \rho' + \frac{c_0^2}{2\rho_0} \rho'^2 + \rho_0 \frac{v^2}{2},$$

где

- 1) $\rho_0 \varepsilon_0$ – энергия единицы объёма неподвижной среды;
- 2) $w_0 \rho'$ – изменение энергии, связанное с изменением количества вещества (массы).

Энергия звуковых колебаний

Полная энергия единицы объёма сплошной среды

$$E \approx \rho_0 \varepsilon_0 + w_0 \rho' + \frac{c_0^2}{2\rho_0} \rho'^2 + \rho_0 \frac{v^2}{2},$$

где

- 1) $\rho_0 \varepsilon_0$ – энергия единицы объёма неподвижной среды;
- 2) $w_0 \rho'$ – изменение энергии, связанное с изменением количества вещества (массы).

Плотность звуковой энергии

$$E_s = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{c_0^2 \rho'^2}{2\rho_0}.$$

Энергия звуковых колебаний

Полная энергия единицы объёма сплошной среды

$$E \approx \rho_0 \varepsilon_0 + w_0 \rho' + \frac{c_0^2}{2\rho_0} \rho'^2 + \rho_0 \frac{v^2}{2},$$

где

- 1) $\rho_0 \varepsilon_0$ – энергия единицы объёма неподвижной среды;
- 2) $w_0 \rho'$ – изменение энергии, связанное с изменением количества вещества (массы).

Плотность звуковой энергии

$$E_s = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{c_0^2 \rho'^2}{2\rho_0}.$$

В случае плоских волн $\rho' = \rho_0 v / c_0$

$$E_s = \rho_0 v^2.$$

Плотность потока энергии звуковых колебаний

Плотность потока энергии

Линеаризация плотности потока покоящегося идеального газа около состояния

$$w = w_0 + w', \quad p = p_0 + p'$$

имеет вид

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = \rho \vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + w \right) \approx w_0 \rho \vec{v} + \rho w' \vec{v}.$$

Плотность потока энергии звуковых колебаний

С точностью до первого порядка малости $w' = \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_S p' = \frac{p'}{\rho}$, отсюда

$$\vec{j} \approx w_0 \rho \vec{v} + p' \vec{v},$$

Плотность потока энергии звуковых колебаний

С точностью до первого порядка малости $w' = \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_S p' = \frac{p'}{\rho}$, отсюда

$$\vec{j} \approx w_0 \rho \vec{v} + p' \vec{v},$$

где слагаемое $w_0 \rho \vec{v}$ отвечает за плотность потока энергии, связанного с движением массы.

Плотность потока энергии звуковых колебаний

С точностью до первого порядка малости $w' = \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_S p' = \frac{p'}{\rho}$, отсюда

$$\vec{j} \approx w_0 \rho \vec{v} + p' \vec{v},$$

где слагаемое $w_0 \rho \vec{v}$ отвечает за плотность потока энергии, связанного с движением массы.

Плотность потока энергии звуковых колебаний

$$\vec{j}_s = p' \vec{v}.$$

Плотность потока энергии звуковых колебаний

С точностью до первого порядка малости $w' = \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_S p' = \frac{p'}{\rho}$, отсюда

$$\vec{j} \approx w_0 \rho \vec{v} + p' \vec{v},$$

где слагаемое $w_0 \rho \vec{v}$ отвечает за плотность потока энергии, связанного с движением массы.

Плотность потока энергии звуковых колебаний

$$\vec{j}_s = p' \vec{v}.$$

Плоская волна

Учитывая соотношение для плоской волны $p' = c_0 \rho_0 v$,

$$\vec{j}_s = c_0 \rho_0 v^2 \vec{n} = c_0 E_s \vec{n},$$

где \vec{n} – вектор направления движения волны, E_s – энергия плоской звуковой волны.

Уравнение сохранения энергии для звуковых колебаний

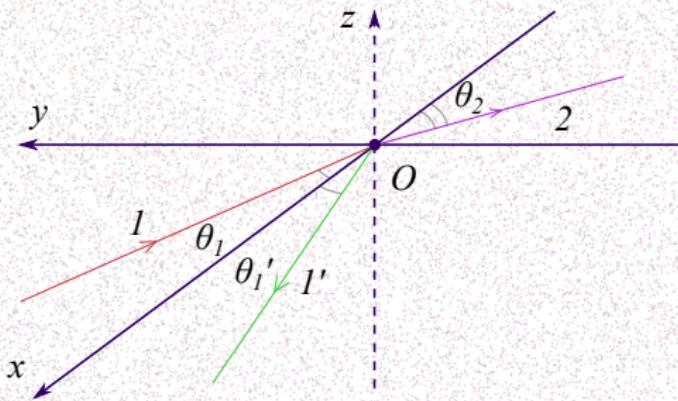
$$\frac{\partial E_s}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_s = 0,$$

где

$$E_s = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{c_0^2 \rho'^2}{2\rho_0},$$

$$\vec{j}_s = p' \vec{v}.$$

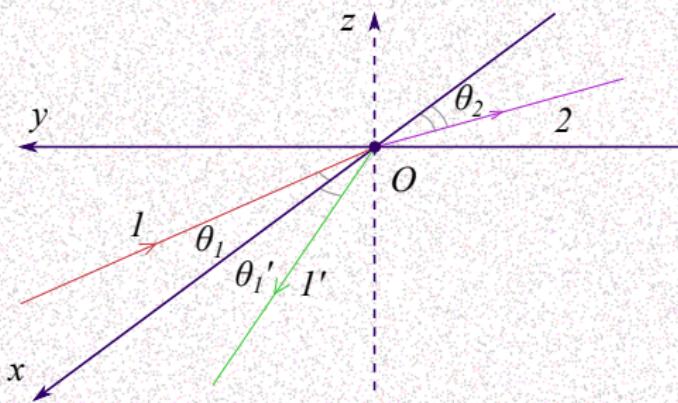
Задача об отражении и преломлении волны



Постановка задачи

Описать отражённую и преломлённую волны получившиеся в результате взаимодействия падающей монохроматической волны с границей раздела двух сред.

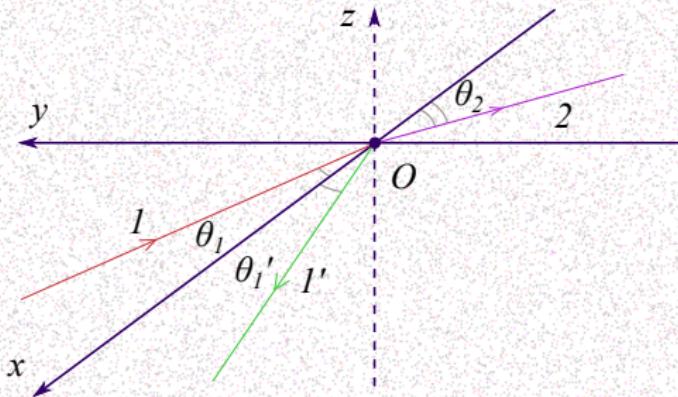
Задача об отражении и преломлении волн



Основные предположения

Волна падает в плоскости Oxy , а граница раздела находится в плоскости Oxz .

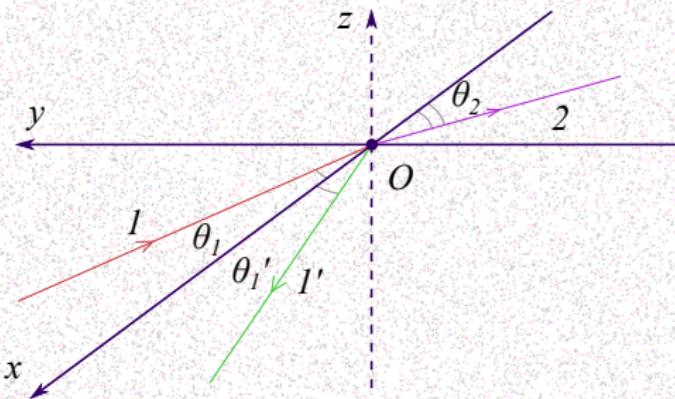
Задача об отражении и преломлении волны



Основные предположения

Все три волны будут иметь одинаковые частоты ω и одинаковые компоненты k_y, k_z , т.к. уравнение описывающее волну одно и тоже, а граничные условия при $x = 0$ не зависят от y, z, ω .

Задача об отражении и преломлении волны



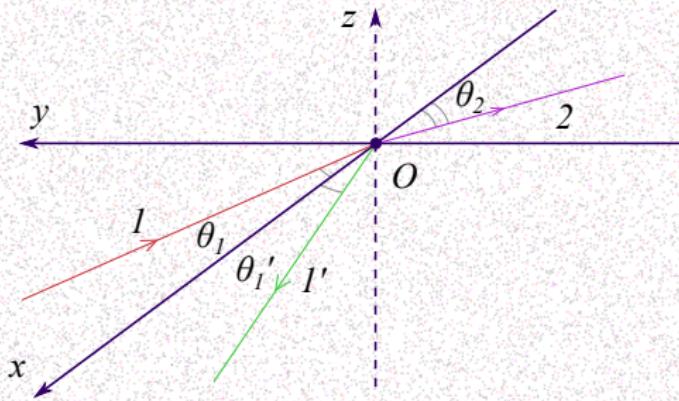
Волновые векторы

Из рисунка видно, что

$$\vec{k}_1 = \frac{\omega}{c_1}(-\cos \theta_1; -\sin \theta_1; 0), \quad \vec{k}'_1 = \frac{\omega}{c_1}(\cos \theta'_1; -\sin \theta'_1; 0),$$

$$\vec{k}_2 = \frac{\omega}{c_2}(-\cos \theta_2; -\sin \theta_2; 0).$$

Задача об отражении и преломлении волны

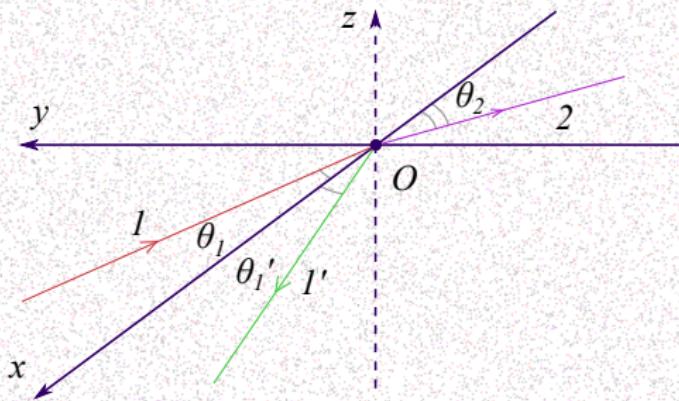


Граничные условия

Из того, что k_y одно и тоже во всех трёх волнах следует, что

$$\theta_1 = \theta'_{I'} \quad \text{и} \quad \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Задача об отражении и преломлении волны



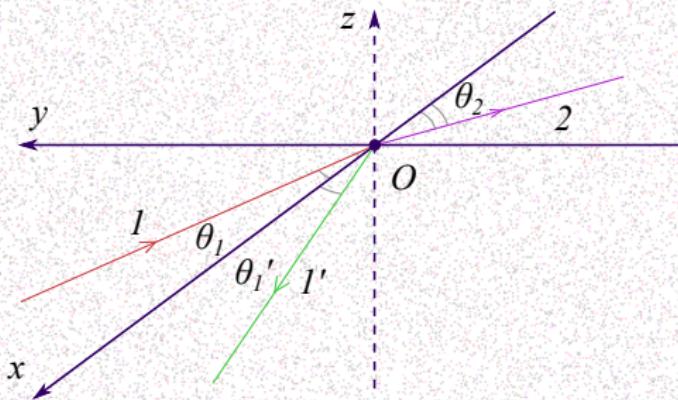
Потенциалы волн

$$\varphi_1 = A_1 \exp \left\{ i\omega \left(-\frac{x}{c_1} \cos \theta_1 - \frac{y}{c_1} \cos \theta_1 - t \right) \right\},$$

$$\varphi'_1 = A'_1 \exp \left\{ i\omega \left(\frac{x}{c_1} \cos \theta_1 - \frac{y}{c_1} \cos \theta_1 - t \right) \right\},$$

$$\varphi_2 = A_2 \exp \left\{ i\omega \left(-\frac{x}{c_2} \cos \theta_2 - \frac{y}{c_2} \cos \theta_2 - t \right) \right\}.$$

Задача об отражении и преломлении волны

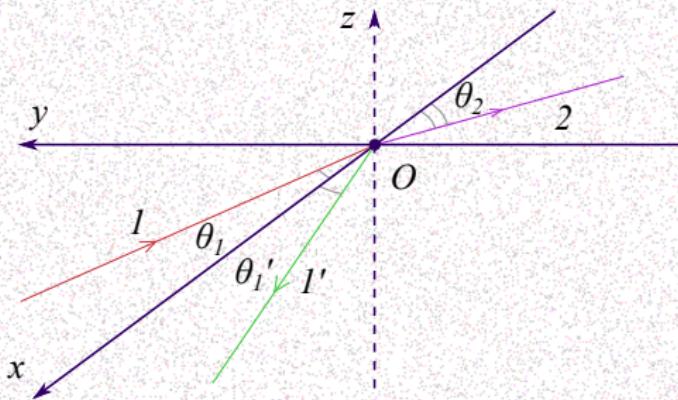


Границные условия

Из условий сохранения на контактном разрыве следует равенство давления ($p = -\rho(\partial\varphi/\partial t)$) и непрерывность нормальной составляющей скорости ($v_x = \partial\varphi/\partial x$)

$$\rho_1(A_1 + A'_1) = \rho_2 A_2, \quad \frac{\cos \theta_1}{c_1} (A_1 - A'_1) = \frac{\cos \theta_2}{c_2} A_2.$$

Задача об отражении и преломлении волны

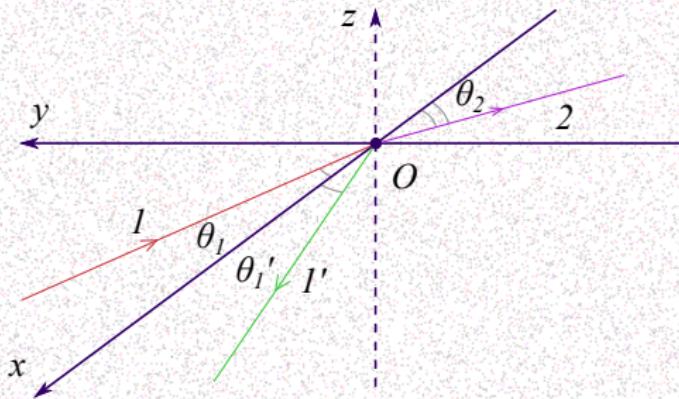


Коэффициент отражения

Коэффициент отражения определяет отношение средних (по времени) плотностей потока энергии в отраженной и падающей волнах

$$R = \frac{c_1 \rho_1 v_1'^2}{c_1 \rho_1 v_1^2} = \frac{|A'_1|^2}{|A_1|^2} = \left(\frac{\rho_2 \operatorname{tg} \theta_2 - \rho_1 \operatorname{tg} \theta_1}{\rho_2 \operatorname{tg} \theta_2 + \rho_1 \operatorname{tg} \theta_1} \right)^2.$$

Задача об отражении и преломлении волны



Коэффициент отражения

$$R = \left[\frac{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 - \rho_1 \sqrt{c_1^2 - c_2^2 \sin^2 \theta_1}}{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 + \rho_1 \sqrt{c_1^2 - c_2^2 \sin^2 \theta_1}} \right]^2.$$

Литература

- *Л.И. Седов.* Механика сплошной среды. Том 2. М.:Наука, 1970.
- *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. – 3-е изд., перераб. — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1986.