Классические модели механики жидкости и газа в рамках континуального подхода

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики

28 октября 2020 г.

Аннотация

Жидкость, газ, твёрдое тело основные отличия. Идеальные, не идеальные и линейные и нелинейные среды. Модели идеальной несжимаемой жидкости, идеального политропного нетеплопроводного газа, вязкой несжимаемой жидкости, вязкого сжимаемого теплопроводного газа.

В чём отличие?

Жидкость, газ, твёрдое тело

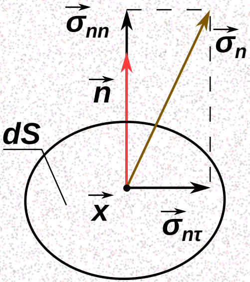
Свойство	**Газ**	**Жидкость**	**Твёрдое тело**
Сжимаемость	сильная	очень слабая	практически отсутствует
Анизотропия	нет	нет	бывает
Внутренние напряжения	функции градиента скорости (при наличие вязкости)	функции градиента скорости (при наличии вязкости)	функции градиента перемещений

Идеальная среда

Идеальная среда – это такая среда, в которой отсутствует тангенциальная составляющая вектора напряжения $\vec{\sigma}_{n\tau}$ на любой площадке с нормалью $\vec{n}$, отвечающая за трение между слоями сплошной среды. При этом

$$\vec{\sigma}_n(\vec{x}) = -p(\vec{x})\vec{n}.$$

Функция $p(\vec{x})$ определяет давление в точке $\vec{x}$.



$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_{nn} + \vec{\sigma}_{n\tau}$$

Линейность среды

Сплошная среда называется линейной, если имеет место линейная зависимость между напряжениями возникающими в ней и изменениями деформаций или изменениями скоростей деформаций.

Для *твёрдых тел* имеет место обобщённый закон Гука:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkm}\varepsilon_{km}, \quad \varepsilon_{km} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k}\right).$$

Для *жидкостей или газов*:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + D_{ijkm}e_{km}, \quad e_{km} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k}\right).$$

Такие жидкости и газы называются ньютоновскими.

Тензор напряжений в вязкой ньютоновской жидкости

Связь тензора напряжений и тензора скоростей деформаций

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad \tau_{ij} = D_{ijkm} e_{km}, \quad e_{km} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k}\right).$$

В матричной форме

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \\ \tau_{32} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1123} & D_{1113} & D_{1112} & D_{1132} & D_{1131} & D_{1121} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & D_{2223} & D_{2213} & D_{2212} & D_{2232} & D_{2231} & D_{2221} \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & D_{3323} & D_{3313} & D_{3312} & D_{3332} & D_{3331} & D_{3321} \\ D_{2311} & D_{2322} & D_{2333} & D_{2323} & D_{2313} & D_{2312} & D_{2332} & D_{2331} & D_{2321} \\ D_{1311} & D_{1322} & D_{1333} & D_{1323} & D_{1313} & D_{1313} & D_{1332} & D_{1331} & D_{1321} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1233} & D_{1223} & D_{1213} & D_{1212} & D_{1232} & D_{1231} & D_{1221} \\ D_{3211} & D_{3222} & D_{3233} & D_{3223} & D_{3213} & D_{3212} & D_{3232} & D_{3231} & D_{3221} \\ D_{3111} & D_{3122} & D_{3133} & D_{3123} & D_{3113} & D_{3112} & D_{3132} & D_{3131} & D_{3121} \\ D_{2111} & D_{2122} & D_{2133} & D_{2123} & D_{2113} & D_{2112} & D_{2132} & D_{2131} & D_{2121} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{23} \\ e_{13} \\ e_{12} \\ e_{32} \\ e_{31} \\ e_{21} \end{pmatrix}$$

Тензор напряжений в вязкой ньютоновской жидкости

Изотропность свойств жидкости

Пусть $Q = (q_{pr})_{1\leq p,r\leq 3}$ произвольное ортогональное преобразование координат ($Q^{-1} = Q^T$), тогда коэффициенты тензора D в новой системе координат не меняют вид, т.е.

$$\bar{D}_{ijkm} = q_{\alpha i} q_{\beta j} q_{\gamma k} q_{\delta m} D_{\alpha\beta\gamma\delta} = D_{ijkm}.$$

Симметричность тензоров τ_{ij} и e_{ij}

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad e_{ij} = e_{ji}$$

$$\Downarrow$$

$$D_{ijkl} = D_{jikl} = D_{jilk} = D_{ijlk}$$

Тензор напряжений в вязкой ньютоновской жидкости

Изотропность свойств жидкости

Пусть $Q = (q_{pr})_{1\le p,r\le 3}$ произвольное ортогональное преобразование координат ($Q^{-1} = Q^T$), тогда коэффициенты тензора D в новой системе координат не меняют вид, т.е.

$$\bar{D}_{ijkm} = q_{\alpha i} q_{\beta j} q_{\gamma k} q_{\delta m} D_{\alpha\beta\gamma\delta} = D_{ijkm}.$$

Симметричность тензоров τ_{ij} и e_{ij}

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}, \quad e_{ij} = e_{ji}$$

$$\Downarrow$$

$$D_{ijkl} = D_{jikl} = D_{jilk} = D_{ijlk}$$

Тензор напряжений в вязкой ньютоновской жидкости

Инвариантность относительно отражений

$$Q_1^r = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_3^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ограничение на коэффициенты

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \\ \tau_{32} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{2323} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1313} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1212} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{3232} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{2121} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{23} \\ e_{13} \\ e_{12} \\ e_{32} \\ e_{31} \\ e_{21} \end{pmatrix}$$

Тензор напряжений в вязкой ньютоновской жидкости

Инвариантность относительно изменения порядка базиса

$$Q_1^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2^c = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_3^c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ограничение на коэффициенты

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \\ \tau_{32} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1122} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{1122} & D_{1111} & D_{1122} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{1122} & D_{1122} & D_{1111} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{1212} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1212} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1212} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1212} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{23} \\ e_{13} \\ e_{12} \\ e_{32} \\ e_{31} \\ e_{21} \end{pmatrix}$$

Тензор напряжений в вязкой ньютоновской жидкости

Инвариантность относительно поворота на угол $2\pi/3$

$$Q_{120} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D_{1212} = \frac{1}{2}\left(D_{1111} - D_{1122}\right)$$

Ограничение на коэффициенты

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \\ \tau_{32} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{23} \\ e_{13} \\ e_{12} \\ e_{32} \\ e_{31} \\ e_{21} \end{pmatrix}$$

λ, μ – коэффициенты Ламе или коэффициенты объёмной и динамической вязкости.

Тензор напряжений в вязкой ньютоновской жидкости

Тензорная запись

$$D_{ijkm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{km} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jk}),$$

Тензор напряжений в вязкой ньютоновской жидкости

Тензорная запись

$$D_{ijkm} = \lambda\delta_{ij}\delta_{km} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk}),$$

$$\tau_{ij} = (\lambda\delta_{ij}\delta_{km} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk}))e_{km} = \lambda\delta_{ij}e_{kk} + 2\mu e_{ij} = \lambda\delta_{ij}\,\mathrm{div}\,\vec{v} + 2\mu e_{ij},$$

Тензор напряжений в вязкой ньютоновской жидкости

Тензорная запись

$$D_{ijkm} = \lambda\delta_{ij}\delta_{km} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jk}),$$

$$\tau_{ij} = (\lambda\delta_{ij}\delta_{km}+\mu(\delta_{ik}\delta_{jm}+\delta_{im}\delta_{jk}))e_{km} = \lambda\delta_{ij}e_{kk}+2\mu e_{ij} = \lambda\delta_{ij}\operatorname{div}\vec{v}+2\mu e_{ij},$$

$$\sigma = -(p + \lambda\operatorname{div}\vec{v})I + 2\mu e,$$

где I – единичный тензор, e – тензор скоростей деформаций.

Идеальная несжимаемая жидкость

Основные допущения

- Постоянная плотность среды

$$\rho = const$$

- Напряжение на площадке с произвольной нормалью одинаково и направлено вдоль неё

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}.$$

В этом случае для любого вектора $\vec{n}$ единичной длины

$$\vec{\sigma}_n = \vec{n} \cdot \sigma = -p\vec{n}.$$

Идеальная несжимаемая жидкость

Уравнения Эйлера

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0,$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{f},$$

Неизвестные функции

Четыре искомых дифференцируемых функции, определённые в области $\Omega \subset R \times R^3$:

$$\vec{v}(t,\vec{x}) = v_1(t,\vec{x})\vec{e}_1 + v_2(t,\vec{x})\vec{e}_2 + v_3(t,\vec{x})\vec{e}_3,$$

$$p = p(t,\vec{x}).$$

Заданные параметры

ρ – плотность жидкости; $\vec{f} = \vec{f}(t,\vec{x})$ – вектор массовых сил.

Идеальный политропный нетеплопроводный газ

Основные допущения

- Уравнение состояния идеального газа:

$$p = \rho R_1 T,$$

где p, ρ, T – давление, плотность и температура газа; R_1 – газовая постоянная для выбранного газа.

- Линейная связь между удельной внутренней энергией и температурой:

$$\varepsilon = C_V T,$$

где C_V – коэффициент теплоёмкости при постоянном объёме.

- Напряжение на площадке с произвольной нормалью одинаково и направлено вдоль неё

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}.$$

Идеальный политропный нетеплопроводный газ

Основные уравнения

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0, \qquad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p,$$

$$C_V\frac{dT}{dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Неизвестные функции

Пять искомых дифференцируемых функции, определённых в области $\Omega \subset R \times R^3$: $\vec{v}(t,\vec{x}) = v_1(t,\vec{x})\vec{e}_1 + v_2(t,\vec{x})\vec{e}_2 + v_3(t,\vec{x})\vec{e}_3$, $\rho = \rho(t,\vec{x})$, $T = T(t,\vec{x})$.

Дополнительные соотношения

$$p = \rho R_1 T, \qquad \varepsilon = C_V T,$$

где R_1, C_V – заданные параметры газа.

Вязкая несжимаемая жидкость

Основные допущения

- Плотность жидкости постоянна

$$\rho = const.$$

- Тензор напряжения имеет вид

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right),$$

где p – давление жидкости; μ – коэффициент динамической вязкости; e_{ij} – тензор скоростей деформаций.

Вязкая несжимаемая жидкость

Уравнения Навье-Стокса

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0,$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{v} + \vec{f}.$$

Неизвестные функции

Четыре искомых дифференцируемых функции, определённых в области $\Omega \subset R \times R^3 : \vec{v}(t,\vec{x}) = v_1(t,\vec{x})\vec{e}_1 + v_2(t,\vec{x})\vec{e}_2 + v_3(t,\vec{x})\vec{e}_3$, $p = p(t,\vec{x})$.

Параметры среды

ρ – плотность; μ – динамическая вязкость; $\nu = \mu/\rho$ – кинематическая вязкость жидкости; $f(t,\vec{x})$ – заданный вектор массовых сил.

Вязкий сжимаемый теплопроводный газ

Основные допущения

- Уравнение состояния газа: $p = p(\rho, T)$.
- Калорическое уравнение состояния: $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$.
- Тензор напряжения имеет вид

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda\delta_{ij}\,\mathrm{div}\,\vec{v}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right),$$

  где λ, μ – коэффициенты объёмной и динамической вязкостей; e_{ij} – тензор скоростей деформаций.
- Закон Фурье теплопроводности газа

$$\vec{q} = -\kappa\nabla T,$$

  где κ – коэффициент теплопроводности.

Вязкий сжимаемый теплопроводный газ

Уравнения Навье-Стокса-Дюгема

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + (\lambda + \mu) \nabla (\operatorname{div} \vec{v}) + \rho \vec{f},$$

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} = -p \operatorname{div} \vec{v} + \lambda (\operatorname{div} \vec{v})^2 + 2\mu e_{ij} e_{ij} + \kappa \Delta T.$$

Замыкающие соотношения

$$p = p(\rho, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T).$$

Параметры среды

λ, μ – объемная и динамическая вязкости; κ – коэффициент теплопроводности; $\vec{f}$ – вектор массовых сил.

Литература

- *Дж. Мейз*. Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Изд-во «Мир», 1974.
- *Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Розенберг Г. Д.*. Нефтегазовая гидромеханика: Учебное пособие для вузов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 544 с.