

Силы, действующие на сплошную среду, тензор напряжений

Верещагин Антон Сергеевич

канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики



25 февраля 2020 г.

Объемные и массовые силы. Поверхностные силы. Тензор напряжения Коши. Разложение напряжения на составляющие. Главные напряжения и оси тензора напряжения.

Объемные и массовые силы

Определение

Силы, действующие на каждый элемент объема $d\omega$ независимо от того, существуют ли рядом с объемом $d\omega$ другие частицы или нет, называются **объемными**. Если такие силы отнесены к единице массы, то они называются **массовыми**.

Объемные и массовые силы

Определение

Силы, действующие на каждый элемент объема $d\omega$ независимо от того, существуют ли рядом с объемом $d\omega$ другие частицы или нет, называются **объемными**. Если такие силы отнесены к единице массы, то они называются **массовыми**.

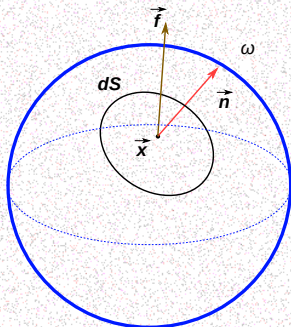
Пример

Объемная сила, действующая на частицу среды в поле силы тяжести, определяется соотношением

$$d\vec{F} = \rho \vec{g} d\omega,$$

где ρ – плотность жидкой частицы, \vec{g} – вектор ускорения свободного падения.

Поверхностные силы

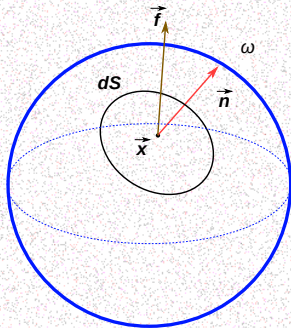


Выделенный объем сплошной среды ω , с фиксированной точкой \vec{x} внутри него и элементарной площадкой dS с единичной нормалью \vec{n}

Определение

Напряжением поверхностной силы \vec{f} называется величина силы, отнесенная к элементарной площадке dS с единичной нормалью \vec{n} , возникающая в результате взаимодействия частей среды с разных сторон от элементарной площадки в малой окрестности точки \vec{x} .

Поверхностные силы



Выделенный объем сплошной среды ω , с фиксированной точкой \vec{x} внутри него и элементарной площадкой dS с единичной нормалью \vec{n}

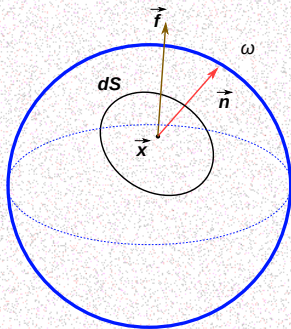
Замечания

- Поверхностная сила существует в каждой точке среды (как на поверхности, так и на границе).
- Поверхностная сила является функцией точки среды \vec{x} и ориентации площадки \vec{n} :

$$\vec{f} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{n}).$$

- Считаем, что \vec{n} – вектор внешней единичной нормали.

Поверхностные силы



Выделенный объем сплошной среды ω , с фиксированной точкой \vec{x} внутри него и элементарной площадкой dS с единичной нормалью \vec{n}

Замечания

- Для определения суммарной силы, действующей на объем ω , ограниченного поверхностью S , необходимо проинтегрировать $\vec{f}(\vec{x}, \vec{n}(\vec{x}))$ по этой поверхности:

$$\vec{F} = \int_S \vec{f}(\vec{x}, \vec{n}(\vec{x})) dS.$$

Принцип равенства действий и противодействий

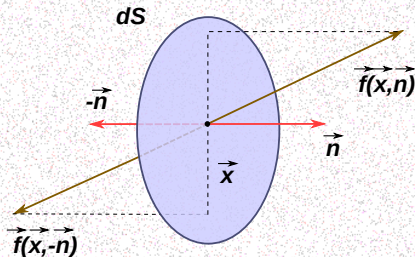
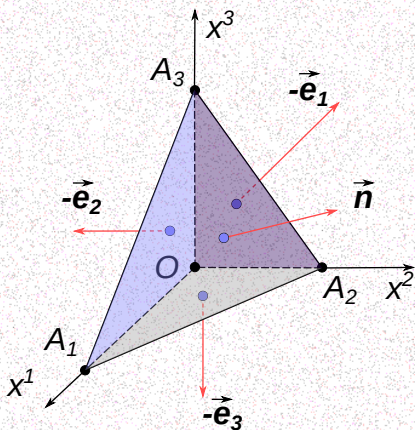


Иллюстрация равенства напряжения на противоположных направлениях

Если рассмотреть напряжения, возникающие в точке \vec{x} на площадке с единичной нормалью \vec{n} и ей противоположной, то в следствие принципа равенства действия и противодействия

$$\vec{f}(\vec{x}, \vec{n}) = -\vec{f}(\vec{x}, -\vec{n}).$$

Тензор напряжений



Выделим в сплошной среде, в окрестности точки O , тетраэдр $OA_1A_2A_3$, у которого рёбра OA_1 , OA_2 , OA_3 направлены вдоль координатных линий x_1 , x_2 , x_3 , а грань $A_1A_2A_3$ перпендикулярна единичному вектору

$$\vec{n} = n^1 \vec{e}_1 + n^2 \vec{e}_2 + n^3 \vec{e}_3,$$

$$|\vec{n}| = 1.$$

Тензор напряжений

Площади граней

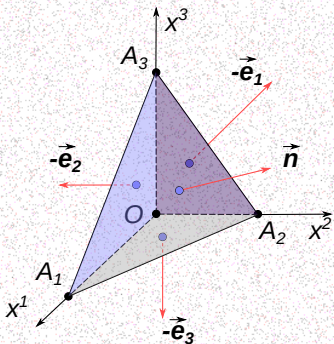
$$\begin{aligned} S_1 &= S_n \cos(\vec{n}, \vec{e}_1) = S_n n^1, \\ S_2 &= S_n \cos(\vec{n}, \vec{e}_2) = S_n n^2, \\ S_3 &= S_n \cos(\vec{n}, \vec{e}_3) = S_n n^3, \end{aligned}$$

где S_i, S_n – площади граней, ортогональных \vec{e}_i ($i = 1, 2, 3$) и \vec{n} .

Объем тетраэдра

$$V = 1/3 S_n h,$$

где h – длина перпендикуляра, опущенного из точки O на грань $A_1 A_2 A_3$.



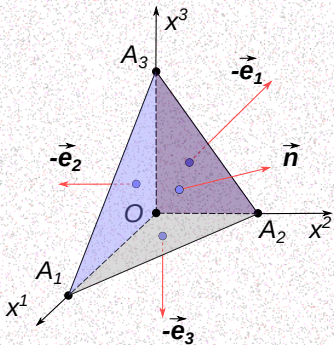
Тензор напряжений

Уравнения равновесия
поверхностных сил в точке

$$\int_V \vec{\Phi} dV + \int_S \vec{f}(\vec{x}, \vec{n}(\vec{x})) dS = 0$$

$$(\vec{\Phi} = \rho(\vec{F} - \vec{a})),$$

где $\vec{\Phi}$ – отнесённая к единице объёма
сумма внешних объёмных сил \vec{F} и сил
инерции из-за ускорения \vec{a} – материаль-
ных точек.



Тензор напряжений

Оценка объёмного интеграла для уравнения равновесия
По теореме о среднем

$$\int_V \vec{\Phi} dV = \vec{\Phi}(M)V = \frac{1}{3}\vec{\Phi}(M)S_n h,$$

где M – точка внутри тетраэдра, V – объем тетраэдра.

Тензор напряжений

Разложение

Используя принцип равенства действий и противодействий имеем

$$\begin{aligned} \int_S \vec{f}(\vec{x}, \vec{n}(\vec{x})) dS &= \int_{S_1} \vec{f}(\vec{x}, -\vec{e}_1) dS + \int_{S_2} \vec{f}(\vec{x}, -\vec{e}_2) dS + \int_{S_3} \vec{f}(\vec{x}, -\vec{e}_3) dS + \\ &+ \int_{S_n} \vec{f}(\vec{x}, \vec{n}) dS = \end{aligned}$$

Тензор напряжений

Разложение

Используя принцип равенства действий и противодействий имеем

$$\begin{aligned}\int_S \vec{f}(\vec{x}, \vec{n}(\vec{x})) dS &= \int_{S_1} \vec{f}(\vec{x}, -\vec{e}_1) dS + \int_{S_2} \vec{f}(\vec{x}, -\vec{e}_2) dS + \int_{S_3} \vec{f}(\vec{x}, -\vec{e}_3) dS + \\ &+ \int_{S_n} \vec{f}(\vec{x}, \vec{n}) dS = - \int_{S_1} \vec{f}(\vec{x}, \vec{e}_1) dS - \int_{S_2} \vec{f}(\vec{x}, \vec{e}_2) dS - \int_{S_3} \vec{f}(\vec{x}, \vec{e}_3) dS + \\ &+ \int_{S_n} \vec{f}(\vec{x}, \vec{n}) dS =\end{aligned}$$

Тензор напряжения

Оценка поверхностного интеграла

По теореме о среднем для поверхностного интеграла существуют точки M_i и M_n на поверхностях S_i ($i = 1, 2, 3$) и S_n , такие что

$$= -S_1 \vec{f}(M_1, \vec{e}_1) - S_2 \vec{f}(M_2, \vec{e}_2) - S_3 \vec{f}(M_3, \vec{e}_3) + S_n \vec{f}(M_n, \vec{n}) =$$

Тензор напряжения

Оценка поверхностного интеграла

По теореме о среднем для поверхностного интеграла существуют точки M_i и M_n на поверхностях S_i ($i = 1, 2, 3$) и S_n , такие что

$$= -S_1 \vec{f}(M_1, \vec{e}_1) - S_2 \vec{f}(M_2, \vec{e}_2) - S_3 \vec{f}(M_3, \vec{e}_3) + S_n \vec{f}(M_n, \vec{n}) =$$

Используя связь площадей боковых граней пирамиды тетраэдра и её основания,

$$= -S_n (\vec{f}(M_1, \vec{e}_1)n^1 + \vec{f}(M_2, \vec{e}_2)n^2 + \vec{f}(M_3, \vec{e}_3)n^3 - \vec{f}(M_n, \vec{n})).$$

Тензор напряжения

Формула для напряжения на произвольной площадке

Таким образом, сокращая на S_n , имеем

$$-\frac{1}{3}\vec{\Phi}(M)h = \vec{f}(M_1, \vec{e}_1)n^1 + \vec{f}(M_2, \vec{e}_2)n^2 + \vec{f}(M_3, \vec{e}_3)n^3 - \vec{f}(M_n, \vec{n}).$$

Тензор напряжения

Формула для напряжения на произвольной площадке

Таким образом, сокращая на S_n , имеем

$$-\frac{1}{3}\vec{\Phi}(M)h = \vec{f}(M_1, \vec{e}_1)n^1 + \vec{f}(M_2, \vec{e}_2)n^2 + \vec{f}(M_3, \vec{e}_3)n^3 - \vec{f}(M_n, \vec{n}).$$

При $h \rightarrow 0$ точки $M_i \rightarrow O$, $M_n \rightarrow O$, $M \rightarrow O$, при этом левая часть равенства стремится к 0.

Тензор напряжения

Формула для напряжения на произвольной площадке

Таким образом, сокращая на S_n , имеем

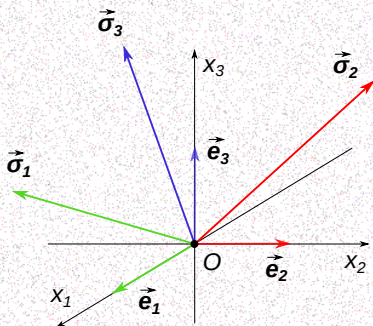
$$-\frac{1}{3}\vec{\Phi}(M)h = \vec{f}(M_1, \vec{e}_1)n^1 + \vec{f}(M_2, \vec{e}_2)n^2 + \vec{f}(M_3, \vec{e}_3)n^3 - \vec{f}(M_n, \vec{n}).$$

При $h \rightarrow 0$ точки $M_i \rightarrow O$, $M_n \rightarrow O$, $M \rightarrow O$, при этом левая часть равенства стремится к 0.

Таким образом, для произвольной точки O

$$\vec{f}(O, \vec{n}) = \vec{f}(O, \vec{e}_1)n^1 + \vec{f}(O, \vec{e}_2)n^2 + \vec{f}(O, \vec{e}_3)n^3.$$

Тензор напряжения



Обозначения

Напряжение в точке \vec{x} на площадке перпендикулярной \vec{n} :

$$\vec{f}(\vec{x}, \vec{n}) = \vec{\sigma}_n(\vec{x}) = n^i \vec{\sigma}_i(\vec{x}) = n^i \sigma_i^j(\vec{x}) \vec{e}_j,$$

$$|\vec{n}| = 1.$$

$$\vec{f}(\vec{x}, \vec{e}_1) = \sigma_1^1(\vec{x}) \vec{e}_1 + \sigma_1^2(\vec{x}) \vec{e}_2 + \sigma_1^3(\vec{x}) \vec{e}_3 = \vec{\sigma}_1(\vec{x}),$$

$$\vec{f}(\vec{x}, \vec{e}_2) = \sigma_2^1(\vec{x}) \vec{e}_1 + \sigma_2^2(\vec{x}) \vec{e}_2 + \sigma_2^3(\vec{x}) \vec{e}_3 = \vec{\sigma}_2(\vec{x}),$$

$$\vec{f}(\vec{x}, \vec{e}_3) = \sigma_3^1(\vec{x}) \vec{e}_1 + \sigma_3^2(\vec{x}) \vec{e}_2 + \sigma_3^3(\vec{x}) \vec{e}_3 = \vec{\sigma}_3(\vec{x}).$$

Тензор напряжений

Определение нового базиса

Рассмотрим новый базис $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ в заданной точке, такой что

$$\vec{e}_i = \alpha_i^j \vec{g}_j, \quad \vec{g}_l = \beta_l^j \vec{e}_j,$$

где α_i^j, β_j^l – матрицы перехода между базисами, причём $|\alpha_i^j| \neq 0$, $|\beta_j^l| \neq 0$ и $\alpha_i^j \beta_j^l = \delta_i^l$.

Формулы перехода

$$\vec{n} = \bar{n}^i \vec{g}_i = \bar{n}_i \beta_i^k \vec{e}_k = n^k \vec{e}_k.$$

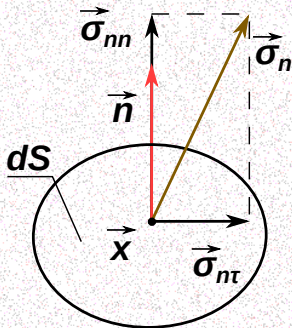
Следовательно, $n^k = \bar{n}^i \beta_i^k$.

Тогда

$$\vec{\sigma}_n = n^i \sigma_i^j \vec{e}_j = \bar{n}^k \beta_k^i \sigma_i^j \alpha_j^l \vec{g}_l = \bar{n}^k \bar{\sigma}_k^l \vec{g}_l,$$

где $\bar{\sigma}_k^l = \beta_k^i \alpha_j^l \sigma_i^j$. Такое преобразование компонент матрицы σ_{ij} является признаком смешанного тензора второго ранга.

Разложение напряжения



Разложение напряжения на нормальную и тангенциальную составляющие

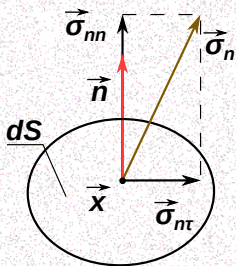
Напряжение в точке \vec{x} , возникающее на площадке dS с единичной нормалью \vec{n} , можно представить в виде суммы нормальной \vec{f}_n и тангенциальной составляющих \vec{f}_τ :

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_{nn} + \vec{\sigma}_{n\tau}.$$

В этом случае $\vec{\sigma}_{nn}$ называется **нормальным растяжением** или **нормальным давлением**. $\vec{\sigma}_{n\tau}$ называют **косым напряжением** или **силой трения**.

Выражения для нормальной и тангенциальной составляющих

Нормальная составляющая

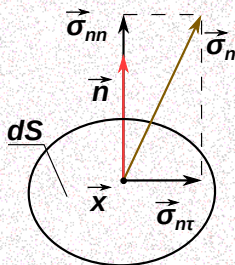


Разложение напряжения на нормальную и тангенциальную составляющие

$$\begin{aligned}\sigma_{nn} &= \vec{\sigma}_n \cdot \vec{n} = (n^i \sigma_i^j \vec{e}_j) \cdot (n^k \vec{e}_k) = \\ &= n^i n^k \sigma_i^j (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k) = n^i n^k \sigma_{ik}.\end{aligned}$$

Выражения для нормальной и тангенциальной составляющих

Нормальная составляющая



Разложение напряжения на нормальную и тангенциальную составляющие

$$\begin{aligned}\sigma_{nn} &= \vec{\sigma}_n \cdot \vec{n} = (n^i \sigma_i^j \vec{e}_j) \cdot (n^k \vec{e}_k) = \\ &= n^i n^k \sigma_i^j (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k) = n^i n^k \sigma_{ik}.\end{aligned}$$

Тангенциальная составляющая

$$\begin{aligned}\sigma_{n\tau}^2 &= \sigma_n^2 - \sigma_{nn}^2 = \\ &= (n^i \sigma_i^j \vec{e}_j) \cdot (n^k \sigma_k^l \vec{e}_l) - n^i n^j \sigma_{ij} n^k n^l \sigma_{kl} = \\ &= n^i n^k \sigma_i^j \sigma_k^l (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_l) - n^i n^j n^k n^l \sigma_{ij} \sigma_{kl} = \\ &= n^i n^k \sigma_{il} \sigma_{ks} g^{ls} - n^i n^j n^k n^l \sigma_{ij} \sigma_{kl} = \\ &= n^i n^k \sigma_{il} \sigma_{ks} (g^{ls} - n^l n^s).\end{aligned}$$

Главные напряжения, оси тензора напряжений

Допущение

Будем считать, что тензор напряжений симметричный (в дальнейшем это утверждение будет обосновано)

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

Теорема о разложении

Для тензора напряжения в каждой точке сплошной среды существует ортонормированная система координат, в которой он имеет диагональный вид, и существуют три направления, в которых действуют только нормальные напряжения.

Напряжение в системе координат главных осей

Пусть главные оси задаются ортонормированными векторами \vec{g}_i , а главные значения в этих осях тензора напряжения σ_i^j равны σ_l , тогда матрица перехода между ортонормированным базисом пространства \vec{e}_j и введённым будет ортогональная (обратная совпадает с транспонированной), т.е. $\alpha_i^j \alpha_j^k = \delta_i^k$, а контравариантные, ковариантные и смешанные компоненты тензора совпадают.

Напряжении на площадке с нормалью \vec{n} имеет вид

$$\vec{\sigma}_n = n^i \sigma_i^j \vec{e}_j = \vec{n}^k \bar{\sigma}_k^l \vec{g}_l = (\vec{n}^l \sigma_l) \vec{g}_l,$$

где \vec{n}^k – координаты нормали в базисе \vec{g}_k , $\bar{\sigma}_k^l = \sigma_k \delta_k^l$ – тензор напряжений в главных осях.

Таким образом, учитывая то, что $|\vec{n}| = 1$, из полученной формулы видно, что вдоль главных осей имеют место только растягивающие или сжимающие напряжения.

Инварианты тензора напряжений

Первый инвариант

$$I_1 = \text{tr } \sigma = \sigma_1^1 + \sigma_2^2 + \sigma_3^3 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

Второй инвариант

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^2 \\ \sigma_2^1 & \sigma_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^3 \\ \sigma_3^1 & \sigma_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_2^2 & \sigma_2^3 \\ \sigma_3^2 & \sigma_3^3 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3,$$

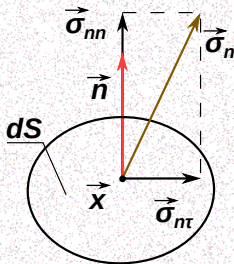
Третий инвариант

$$I_3 = \det \sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^2 & \sigma_1^3 \\ \sigma_2^1 & \sigma_2^2 & \sigma_2^3 \\ \sigma_3^1 & \sigma_3^2 & \sigma_3^3 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Нормальное, тангенциальное и полное напряжение в главных осях

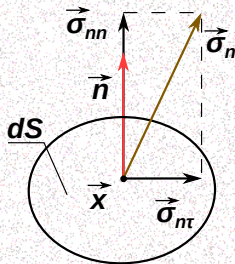
Нормальная составляющая

$$\sigma_{nn} = n^i n^k \sigma_{ik} = (n^i)^2 \sigma_i.$$



Разложение напряжения на нормальную и тангенциальную составляющие

Нормальное, тангенциальное и полное напряжение в главных осях



Разложение напряжения на нормальную и тангенциальную составляющие

Нормальная составляющая

$$\sigma_{nn} = n^i n^k \sigma_{ik} = (n^i)^2 \sigma_i.$$

Тангенциальная составляющая

$$\begin{aligned} \sigma_{n\tau}^2 &= \sigma_n^2 - \sigma_{nn}^2 = n^i n^k \sigma_{il} \sigma_{ks} (g^{ls} - n^l n^s) = \\ &= n^i n^k \sigma_i \sigma_k (\delta^{ik} - n^i n^k). \end{aligned}$$

Полное напряжение

$$\vec{\sigma}_n^2 = (n^l \sigma_l \vec{g}_l) \cdot (n^k \sigma_k \vec{g}_k) = \sum_k (n^k \sigma_k)^2,$$

Варианты напряжённого состояния

Определение

Если все три главных напряжения не равны нулю, то такое напряжённое состояние называется **трехосным**. Если одно из главных напряжений равно нулю, то такое напряжённое состояние называется плоским или **двухосным**. Если два главных напряжения равны нулю, то такое напряжённое состояние называется **одноосным**.

Давление

Важной характеристикой тензора напряжения является давление, определяемое первым инвариантом тензора напряжений:

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = -\frac{1}{3}\sigma_{kk}.$$

Тензор напряжения часто записывают в виде суммы шаровой и девиаторной составляющих

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}.$$

Литература

- *Низматулин Р.И.* Механика сплошной среды. Кинематика. Динамика. Термодинамика. Статистическая динамика. М.:ГЭОТАР-Медиа, 2014.