

# Плоские потенциальные течения идеальной жидкости. Обтекание тел.

*Верецагин Антон Сергеевич*

канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

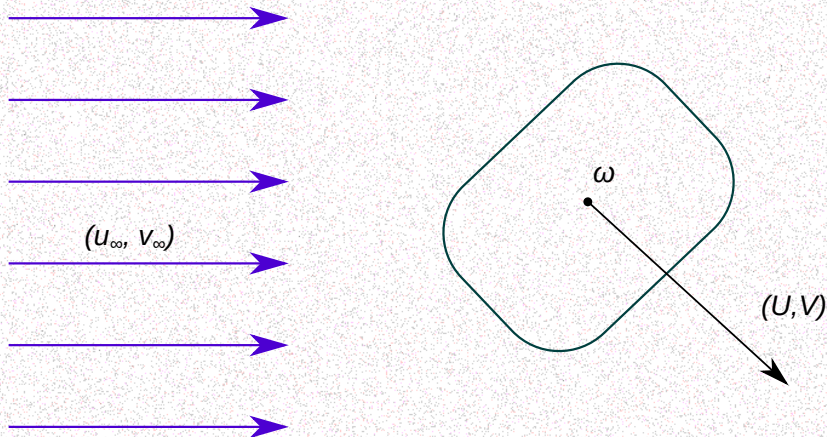
Кафедра аэрофизики и газовой динамики ФФ НГУ

12 декабря 2018 г.

# Аннотация

Обтекание абсолютно твёрдого тела. Задание граничных условий.  
Формулы Блазиуса-Чаплыгина. Формулы Кутта-Жуковского.

# Задача обтекания абсолютно твёрдого тела



# Математическая постановка задачи обтекания тела потенциальным потоком идеальной жидкости

Требуется найти **аналитический комплексный потенциал**

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad z = x + iy,$$

определённый в рассматриваемой бесконечной области, и такой что

$$\Delta\psi(x, y) = 0,$$

связанный соответствующими условиями на бесконечности и границе с телом.

## Замечание

Так как потенциал  $\varphi$  связан с функцией тока  $\psi$  соотношениями Коши-Римана, то функция тока находится автоматически. Можно, наоборот, искать потенциал  $\varphi$ , а  $\psi$  выражать через соотношения Коши-Римана.

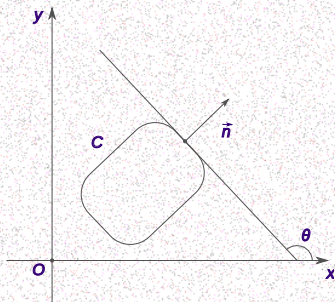
# Плоское покоящееся течение на бесконечности

## Условия на бесконечности

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

для бесконечно удалённых точек пространства, т.к. скорость на бесконечности равна 0.

# Условие «непротекания» на границе с телом



## Условие на границе с телом

Нормальная составляющая (относительно границы тела) скорость течения должна совпадать с нормальной составляющей скорости тела.

$$\begin{aligned} v_n &= v_x \cos(\vec{n}, x) + v_y \cos(\vec{n}, y) = v_x \sin \theta - v_y \cos \theta = \\ &= v_x \frac{dy}{ds} - v_y \frac{dx}{ds} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial \psi}{\partial s}, \end{aligned}$$

где  $x(s), y(s)$  – параметризованная граница тела в окрестности рассматриваемой точки.



## Условие для движения абсолютно твёрдого тела

Пусть тело совершает поступательное движение со скоростью  $(U, V)$  и вращательное с угловой скоростью  $\omega$ , тогда скорости точек тела будут иметь вид

$$u_x = U - \omega y, \quad u_y = V + \omega x,$$

где  $(x, y)$  – координаты точек тела во вращающейся системе координат, жёстко связанной с телом.

## Условие для движения абсолютно твёрдого тела

Пусть тело совершает поступательное движение со скоростью  $(U, V)$  и вращательное с угловой скоростью  $\omega$ , тогда скорости точек тела будут иметь вид

$$u_x = U - \omega y, \quad u_y = V + \omega x,$$

где  $(x, y)$  – координаты точек тела во вращающейся системе координат, жёстко связанной с телом.

**Условие на границе с телом**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial s} &= u_x \cos(\vec{n}, y) + u_y \cos(\vec{n}, x) = u_x \frac{dy}{ds} - u_y \frac{dx}{ds} = \\ &= (U - \omega y) \frac{dy}{ds} - (V + \omega x) \frac{dx}{ds}. \end{aligned}$$

Отсюда,

$$\psi = Uy - Vx - \frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2) + c.$$



# Частный случай набегающего потока на покоящееся тело

## Условие на границе тела

В случае покоящегося тела  $U = V = 0$ ,  $\omega = 0$  условие на границе тела будет

$$\psi(x, y) = \text{const.}$$

## Условие на бесконечности

В случае набегающего потока с параметрами на бесконечности равными

$$v_x = v_\infty, \quad v_y = 0,$$

то для бесконечно удалённых точек

$$\psi(x, y) = v_\infty y + \text{const.}$$

# Задача обтекание тела

Таким образом, задача обтекания тела плоским потенциальным потоком идеальной жидкости сводится к решению задачи Дирихле для функции тока  $\psi$ :

- внутри исследуемой области решается уравнение Лапласа

$$\Delta\psi = 0,$$

- а на бесконечности и границе обтекаемого тела заданы значения функции  $\psi$  в зависимости от условий обтекания.

# Сила при безотрывном обтекании

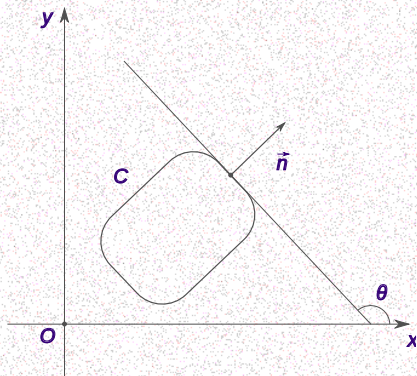
## Определение

По аналогии с комплексными скоростью и потенциалом, определим комплексную силу  $R$ , действующую на контур  $C$  в области течения по формуле

$$R = X + iY,$$

где  $X$ ,  $Y$  – вещественные проекции силы на оси координат.

# Формула для силы через давление при безотрывном обтекании



Комплексно-сопряжённая сила  $R^*$  вдоль контура тела  $C$  при безотрывном обтекании

$$\begin{aligned} R^* &= X - iY = \\ &= - \oint_C p(\cos(\vec{n}, x) - i \cos(\vec{n}, y)) ds = \\ &= - \oint_C p(\sin \theta + i \cos \theta) ds = \\ &= -i \oint_C p e^{-\theta i} ds. \end{aligned}$$

# Предварительные выкладки

## Выражение для комплексного дифференциала

$$dz = dx + i dy = ds(\cos \theta + i \sin \theta) = e^{i\theta} ds,$$

$$dz^* = dx - i dy = ds(\cos \theta - i \sin \theta) = e^{-i\theta} ds.$$

Отсюда

$$dz^* = e^{-2\theta i} dz.$$

# Предварительные выкладки

## Выражение для комплексного дифференциала

$$\begin{aligned} dz &= dx + i dy = ds(\cos \theta + i \sin \theta) = e^{i\theta} ds, \\ dz^* &= dx - i dy = ds(\cos \theta - i \sin \theta) = e^{-i\theta} ds. \end{aligned}$$

Отсюда

$$dz^* = e^{-2\theta i} dz.$$

## Интеграл Бернулли

Связь давления и скорости через интеграл Бернулли

$$p = c - \frac{1}{2} \rho v^2$$

справедлива вдоль контура тела при безотрывном обтекании, т.к. он является линией тока. При потенциальном течении она справедлива во всей области течения.



# Сила

$$R^* = -ic \oint_C dz^* + \frac{i\rho}{2} \oint_C v^2 dz^* = \frac{i\rho}{2} \oint_C v^2 dz^* = \frac{i\rho}{2} \oint_C (ve^{-i\theta})^2 dz.$$

# Сила

$$R^* = -ic \oint_C dz^* + \frac{i\rho}{2} \oint_C v^2 dz^* = \frac{i\rho}{2} \oint_C v^2 dz^* = \frac{i\rho}{2} \oint_C (ve^{-i\theta})^2 dz.$$

Используя то, что

$$ve^{-i\theta} = v \cos \theta - iv \sin \theta = v_x - iv_y = v^*,$$

получим

$$R^* = X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint_C (v^*)^2 dz.$$

## Момент главных сил

$$\begin{aligned} L &= - \oint_C p(x \cos(\vec{n}, y) - y \cos(\vec{n}, x)) ds = - \oint_C p(x \cos \theta + y \sin \theta) ds = \\ &= - \oint_C p(x dx + y dy) = - \oint_C \left( c + \frac{\rho v^2}{2} \right) (x dx + y dy) = \\ &= - \oint_C c d(x^2 + y^2) - \frac{\rho}{2} \oint_C v^2 (x dx + y dy) = \operatorname{Re} \left( -\frac{\rho}{2} \oint_C v^2 z dz^* \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left( -\frac{\rho}{2} \oint_C (v^*)^2 z dz \right), \end{aligned}$$

т.к.  $v^2 dz^* = (v^*)^2 dz$ .

# Формулы Блазиуса-Чаплыгина для потенциального течения

Если течение потенциально, тогда существует комплексный потенциал

$$w(z) = \varphi(z) + i\psi(z) \quad \text{и} \quad \frac{dw}{dz} = v^*.$$

## Формулы Блазиуса-Чаплыгина

$$R^* = X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz,$$

$$L = \operatorname{Re} \left[ -\frac{\rho}{2} \oint_C \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 z dz \right].$$

# Формула Кутта-Жуковского

## Предположения

Поток потенциален везде вне тела, которое можно заменить на конечное число источников, вихрей и диполей, лежащих внутри границы тела, контура  $C$ .

## Формула для силы и реакции

$$R^* = X - iY = i\rho\Gamma v_\infty^*,$$
$$L = \operatorname{Re} \left[ -\rho v_\infty^* \sum_{k=1}^m \Gamma_k b_k - i\rho M v_\infty^* \right],$$

где  $\Gamma_i$  – циркуляции вихрей, находящихся в точках  $b_i$  ( $i = 1, \dots, m$ );  $M$  – суммарный момент источников и диполей,  $\Gamma$  – суммарная циркуляция вихрей, находящихся внутри тела.

# Литература

- *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.:Гос. издат. физ.-мат. лит., 1963.