Обобщенные движения сплошной среды

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрофизики и газовой динамики

30 декабря 2020 г.

Аннотация

Обобщенные движения сплошной среды. Соотношения на сильном скачке. Классификация сильных разрывов. Соотношение для ударных волн.

Законы сохранения в дивергентной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho\vec{v}}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}\otimes\vec{v} - \sigma) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(\varepsilon + \frac{\vec{v}^2}{2}\right)\right) + \mathrm{div}\left(\rho\left(\varepsilon + \frac{\vec{v}^2}{2}\right)\vec{v} - \sigma\cdot\vec{v} + \vec{q}\right) = 0.$$

Обобщенная форма записи

Каждый из этих законов можно записать в следующем виде, который представляет собой дивергенцию вектора в четырехмерном пространстве относительно $(t, \vec{x})$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}(f\vec{v} + \vec{\varphi}) = 0.$$

Интеграл в четырехмерном пространстве

Рассмотрим $\Omega \subset R^4$ – ограниченную область с кусочно-гладкой границей Γ и сечениями $\omega_\Omega(t)$ гиперплоскостями при $t = const$. Интегралы по Ω от законов сохранения в дивергентной форме имеют вид

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega_\Omega(t)} (f_t + \mathrm{div}(f\vec{v} + \vec{\varphi}))d\omega dt = 0.$$

Обобщенные движения

Слабая форма записи

Согласно теореме Гаусса – Остроградского для вектора

$$\vec{g} = (f, f v_1 + \varphi_1, f v_2 + \varphi_2, f v_3 + \varphi_3)$$

имеет место

$$\int\limits_{\Gamma} \vec{g} \cdot \vec{\nu} d\Gamma = 0,$$

где $\vec{\nu} = \vec{l} \cos(\vec{\nu}, t) + \vec{n} \sin(\vec{\nu}, t)$ – нормаль к Γ в четырехмерном пространстве; $\vec{l}$ – орт оси t; $\vec{n}$ – орт внешней нормали к сечению Γ гиперплоскостью $t = const$.

Интегральная форма записи

Так как

$$\vec{g}\cdot\vec{\nu} = f\cos(\vec{\nu},t) + (f\vec{v}+\vec{\varphi})\cdot\vec{n}\sin(\vec{\nu},t),$$

то

$$\int\limits_{\Gamma} \left(f\cos(\vec{\nu},t) + (f\vec{v}+\vec{\varphi})\cdot\vec{n}\sin(\vec{\nu},t)\right) d\Gamma = 0.$$

Обобщенное движение сплошной среды

Определение

Набор функций $\rho, \vec{v}, \sigma, \varepsilon$, определенных в $R^4(t,\vec{x})$, называется обобщенным движением сплошной среды, если для любой замкнутой кусочно-гладкой поверхности $\Gamma \subset R^4(t,\vec{x})$ эти функции удовлетворяют соотношениям:

$$\int\limits_{\Gamma} \left(\rho \cos(\vec{\nu},t) + \rho\vec{v}\cdot\vec{n}\sin(\vec{\nu},t)\right) d\Gamma = 0,$$

$$\int\limits_{\Gamma} \left(\rho\vec{v}\cos(\vec{\nu},t) + (\rho\vec{v}\otimes\vec{v} - \sigma)\cdot\vec{n}\sin(\vec{\nu},t)\right) d\Gamma = 0,$$

$$\int\limits_{\Gamma} \left(\rho\left(\varepsilon + \frac{\vec{v}^2}{2}\right)\cos(\vec{\nu},t) + \left(\rho\left(\varepsilon + \frac{\vec{v}^2}{2}\right)\vec{v} - \sigma\cdot\vec{v} + \vec{q}\right)\cdot\vec{n}\sin(\vec{\nu},t)\right) d\Gamma = $$
$$= 0.$$

Движение с сильным разрывом

Определение

Если в области определения обобщенного движения существует гиперповерхность $\Sigma \subset R^4$, на которой величины ρ, $\vec{v}$, σ, ε имеют разрыв первого рода и вне которой это движение гладкое, то такое движение называется движением с сильным разрывом, а сечение $B(t)$ гиперповерхности Σ гиперплоскостями $t = const$ называется поверхностью сильного разрыва.

Сильные разрывы

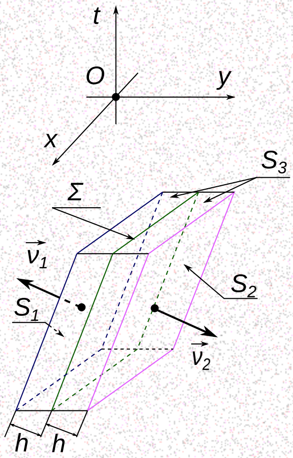
Величины разрывов (скачков) не могут быть произвольными, а должны удовлетворять уравнениям сильного разрыва, которые следуют из уравнений обобщенного движения.

Соотношения на сильном скачке

Рассмотрим временной интервал $[t_1, t_2]$, на котором существует разрыв функции Σ. Для каждого t рассмотрим небольшую окрестность разрыва в R^3 высоты $2h$. Тогда для этой области можно записать закон сохранения в общем виде:

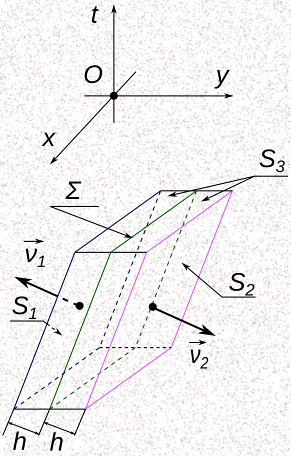
$$\int_{\Gamma} \left(f\cos(\vec{\nu},t) + (fv_n + \varphi_n)\sin(\vec{\nu},t)\right) d\Gamma = 0.$$

Интеграл по Γ разбивается на 3 интеграла по поверхностям S_1, S_2, параллельным гиперповерхности разрыва Σ и боковой поверхности S_3.



Соотношения на сильном скачке

При $h \to 0$ интеграл по поверхности S_3 будет стремиться к 0, а интегралы по S_1 и S_2 – к интегралам от параметров среды справа и слева от гиперповерхности разрыва, при этом $\vec{\nu}_1 = -\vec{\nu}_2$.



В силу произвольности выбранных S_1 и S_2 и непрерывности подынтегральных выражений слева и справа от разрыва получится выражение:

$$[f\cos(\vec{\nu},t) + (fv_n + \varphi_n)\sin(\vec{\nu},t)] = 0,$$

где $[a] = a_2 - a_1$ – скачок величины a на разрыве.

Соотношения на сильном скачке

Определение

Скоростью перемещения поверхности разрыва $B(t)$ в точке M называется предел

$$D_n(M) = \lim_{t\to 0} \frac{H(M,t,\delta t)}{\delta t},$$

где $H(M,t,\delta t)$ – расстояние, на которое переместилась поверхность вдоль нормали $\vec{n}$, выпущенной из заданной точки поверхности разрыва M в момент времени t. D_n принимает отрицательные значения, если движение направлено в противоположную сторону $\vec{n}$.

Свойство

Вектор

$$D_n \vec{n} + \vec{l}$$

является касательным вектором к гиперповерхности Σ, потому что точка M за время δt переместится на вектор $H(M,t,\delta t)\delta t\, \vec{n} + \delta t\, \vec{l}$.

Связь вектора $\vec{\nu}$ и скорости D_n

Вектор $D_n \vec{n} + \vec{l}$ ортогонален вектору $\vec{\nu} = \vec{l} \cos(\vec{\nu},t) + \vec{n} \sin(\vec{\nu},t)$, нормали к гиперповерхности Σ, таким образом:

$$(\cos(\vec{\nu},t)\, \vec{l} + \sin(\vec{\nu},t)\, \vec{n}) \cdot (D_n \vec{n} + \vec{l}) = D_n \sin(\vec{\nu},t) + \cos(\vec{\nu},t) = 0$$

и

$$D_n = -\cos(\vec{\nu},t) / \sin(\vec{\nu},t).$$

Соотношения на сильном скачке

В общем виде

С учетом связи $D_n = -\cos(\vec{\nu},t)/\sin(\vec{\nu},t)$:

$$[f(v_n - D_n) + \varphi_n] = 0.$$

Уравнения Гюгонио в газовой динамике

Положив, что в исходных уравнениях $\sigma = -pI$, $\vec{q} = \vec{0}$, получаем в результате подстановки выражений для f и φ из законов сохранения соотношения:

$$[\rho(v_n - D_n)] = 0,$$

$$[\rho\vec{v}(v_n - D_n) + p\vec{n}] = 0,$$

$$\left[\rho\left(\varepsilon + \frac{\vec{v}^2}{2}\right)(v_n - D_n) + pv_n\right] = 0.$$

Определения

Обозначим, что $m = \rho(v_n - D_n)$ – массовый поток вещества, проходящего через поверхность разрыва. Обозначим, что v_τ – составляющая скорости, лежащая в касательной плоскости к поверхности разрыва.

Классификация сильных разрывов

Определения

Обозначим, что $m = \rho(v_n - D_n)$ – массовый поток вещества, проходящего через поверхность разрыва. Обозначим, что v_τ – составляющая скорости, лежащая в касательной плоскости к поверхности разрыва.

Контактный разрыв ($m = 0$)

$[p] = 0$ и $[v_n] = 0$,

$[\rho] \neq 0$, $[\varepsilon] \neq 0$, $v_\tau \neq 0$.

Классификация сильных разрывов

Определения

Обозначим, что $m = \rho(v_n - D_n)$ – массовый поток вещества, проходящего через поверхность разрыва. Обозначим, что v_τ – составляющая скорости, лежащая в касательной плоскости к поверхности разрыва.

Контактный разрыв ($m = 0$)

$[p] = 0$ и $[v_n] = 0$,

$[\rho] \neq 0$, $[\varepsilon] \neq 0$, $v_\tau \neq 0$.

Ударная волна ($m \neq 0$)

$[v_\tau] = 0$,

$[p] \neq 0$, $[\rho] \neq 0$, $[\varepsilon] \neq 0$, $v_n \neq 0$.

Соглашение для ударных волн

Определение

Поверхность ударной волны называют фронтом ударной волны.

Определение

Та сторона ударной волны, с которой газ натекает на нее, называется передней стороной (или стороной перед фронтом) ударной волны. Противоположная сторона фронта называется задней стороной (или стороной за фронтом) ударной волны.

Соглашение

Нормаль $\vec{n}$ к фронту ударной волны направлена в переднюю сторону ударной волны (в область перед фронтом). Индекс «1» отмечает значения газодинамических параметров на передней стороне, а индекс «2» – на задней стороне ударной волны.

Альтернативная форма записи соотношений на разрыве для ударных волн

Введем скорость течения газа относительно фронта УВ в направлении нормали $\vec{n}$:

$$u = v_n - D_n.$$

В этих обозначениях соотношения на разрыве для одномерных течений имеют вид:

$$\rho_2 u_2 = \rho_1 u_1,$$

$$p_2 + \rho_2 u_2^2 = p_1 + \rho_1 u_1^2,$$

$$\varepsilon_2 + p_2 V_2 + \frac{u_2^2}{2} = \varepsilon_1 + p_1 V_1 + \frac{u_1^2}{2},$$

где $V = 1/\rho$.

Литература

Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. Москва-Ижевск:Институт компьютерных исследований, 2003.