Стационарные изоэнтропические течения идеального газа

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики ФФ НГУ

16 апреля 2019 г.

Аннотация

Уравнение состояния идеального политропного газа. Интеграл Бернулли изоэнтропического течения политропного газа. Параметры торможения потока, максимальная скорость, критическая скорость звука, критическая скорость. Формула Сен-Венана–Венцеля для истечения газа из большого сосуда. Число Маха и коэффициент скорости. Связь параметров торможения и числа Маха и коэффициента скорости. Нагревание тел в потоке газа, влияние сжимаемости на течение.

Уравнения состояния идеального политропного газа

Термическое уравнение состояния

$$p = p_0 e^{(S-S_0)/c_V} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} = A(S)\rho^{\gamma}.$$

Внутренняя энергия и энтальпия в адиабатном процессе ($S = const$)

$$d\varepsilon = TdS - pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = A(S)\rho^{\gamma-2}d\rho$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + \varepsilon_0, \quad i = \varepsilon + \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + i_0,$$

где ε_0, i_0 – константы интегрирования, которые можно будет опустить.

Интеграл Бернулли для изоэнтропического течения политропного газа

Интеграл Бернулли

$$i^* = \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} = \frac{v^2}{2} + i = \frac{v^2}{2} + c_p T = C(l),$$

где $C(l)$ – константа характерная для выбранной линии тока и отсутствуют массовые силы[1]; c_p – коэффициент теплоёмкости при постоянном давлении.

Основные следствия

Давление, плотность и температура с ростом скорости вдоль линии тока падают.

---

[1] Массовыми силами не всегда можно пренебречь, например, в метеорологии.

Параметры торможения потока

Температура торможения

Самая высокая температура на линии тока будет там, где $v = 0$, тогда

$$i^* = c_p T^*,$$

где T^* – температура торможения, а i^* – полное теплосодержание.

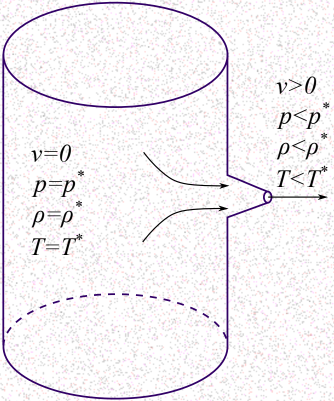
Давление и плотность торможения

$$i^* = c_p T^* = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} e^{(S-S_0)/c_p} p^{*(\gamma-1)/\gamma} =$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0^\gamma} e^{(S-S_0)/c_p} \rho^{*(\gamma-1)} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p^*}{\rho^*},$$

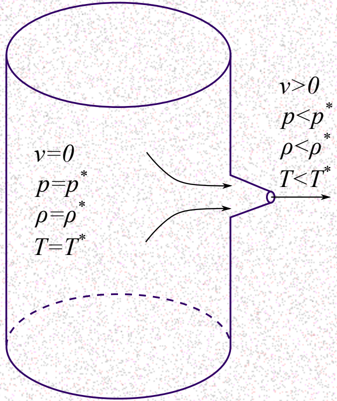
где p^*, ρ^* – давление и плотность торможения.

Задача об истечении газа из большого сосуда



При установившемся адиабатическом истечении газа из большого сосуда скорость v в далёких от отверстия точках равна нулю, а давление, плотность и температура соответственно равны давлению торможения, плотности торможения и температуре торможения.

Задача об истечении газа из большого сосуда



Максимальная скорость истечения газа

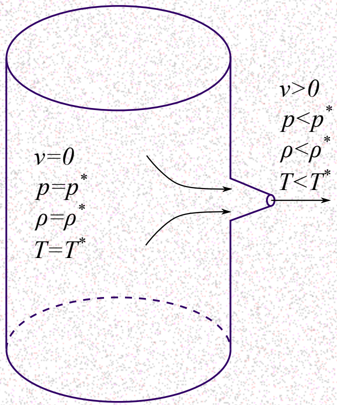
Максимальная скорость v_{max} достигается, при адиабатическом истечении газа в пустоту $p = 0$, $\rho = 0$, $T = 0$

$$i^* = \frac{v_{max}^2}{2}$$

или

$$v_{max} = \sqrt{2c_pT^*}.$$

Задача об истечении газа из большого сосуда



Скорость звука

Для совершенного газа скорость звука имеет вид

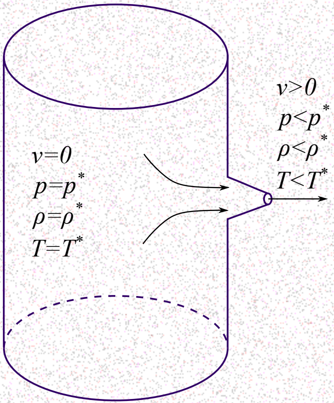
$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma R T}.$$

Интеграл Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} = \frac{v_{max}^2}{2}.$$

При изменении скорости потока, скорость звука вдоль линии тока меняется.

Задача об истечении газа из большого сосуда



Критическая скорость звука

Критическая скорость звука c^* достигается при $v = 0$

$$i^* = c_p T^* = \frac{c^{*2}}{\gamma - 1} = \frac{v_{max}^2}{2}.$$

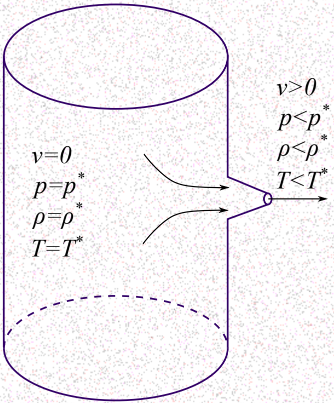
Поэтому

$$c^* = \sqrt{\gamma R T^*},$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} c^*.$$

Величина c^* зависит только от температуры торможения T^*.

Задача об истечении газа из большого сосуда



Критическая скорость

Значение скорости частицы газа, равное местной скорости звука, называется критической скоростью $v_{\text{кр}}$

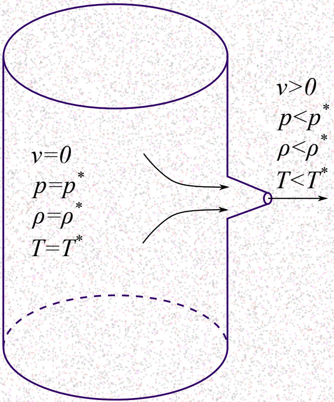
$$\frac{v_{\text{кр}}^2}{2} + \frac{v_{\text{кр}}^2}{\gamma - 1} = \frac{c^{*2}}{\gamma - 1} = \frac{v_{max}^2}{2},$$

откуда

$$v_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}} c^* = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} v_{max}.$$

Значение $v_{\text{кр}}$ зависит только от температуры торможения T^*.

Задача об истечении газа из большого сосуда



Формула для скорости истечения газа

Так как

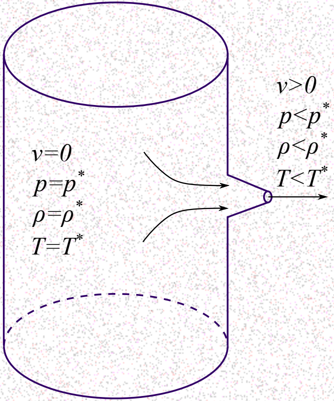
$$i^* = \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} e^{(S-S_0)/c_p} p^{(\gamma-1)/\gamma} =$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} e^{(S-S_0)/c_p} p^{*(\gamma-1)/\gamma} = \frac{v_{max}^2}{2},$$

то

$$\frac{v^2}{v_{max}^2} + \left(\frac{p}{p^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} = 1.$$

Задача об истечении газа из большого сосуда



Формула для скорости истечения газа

Таким образом,

$$v^2 = v_{max}^2 \left[1 - \left(\frac{p}{p^*} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right],$$

и, так как

$$v_{max} = \sqrt{2c_p T^*},$$

то получается формула Сен-Венана–Венцеля

$$v = \sqrt{2c_p T^*} \left[1 - \left(\frac{p}{p^*} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right]^{1/2}.$$

Пример критических значений и параметров торможения

Пусть $T^* = 288$ K и $\gamma = 1{,}4$, тогда

$$c^* \approx 340 \text{ м/с}, \quad v_{max} \approx 756 \text{ м/с}, \quad v_{\text{кр}} \approx 310 \text{ м/с}.$$

Число Маха и коэффициент скорости

Определение

Отношение скорости движения частиц к местной скорости звука называется числом Маха

$$M = \frac{v}{c}.$$

Для дозвуковых течений $M < 1$, для сверхзвуковых – $M > 1$, для трансзвуковых – $M \sim 1$.

Определение

Отношение скорости движения частиц к критической скорости называется коэффициентом скорости

$$\lambda = \frac{v}{v_{\text{кр}}} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \frac{v}{v_{max}}.$$

Связь параметров потока и с параметрами торможения и коэффициентом скорости

Разрешая интеграл Бернулли относительно давления, плотности, температуры и скорости звука, имеем

$$
\begin{aligned}
p &= p^* \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} &&= p^* \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \\
\rho &= \rho^* \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{1/(\gamma-1)} &&= \rho^* \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{1/(\gamma-1)}, \\
T &= T^* \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right) &&= T^* \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right), \\
c &= c^* \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{1/2} &&= c^* \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Связь коэффициента скорости и числа Маха

Разделим обе части интеграла Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} = \frac{v_{max}^2}{2}$$

на $v^2/2$, тогда получим

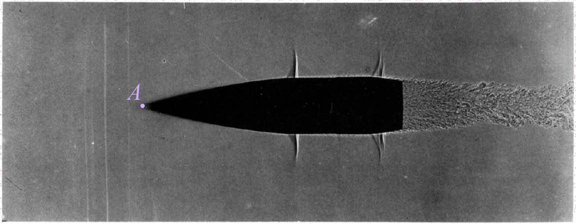
$$\frac{v^2}{v_{max}^2} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\gamma - 1}\frac{1}{M^2}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\lambda^2.$$

Связь параметров потока и с параметрами торможения и числа Маха

Разрешая интеграл Бернулли относительно давления, плотности, температуры и скорости звука имеем

$$\begin{aligned}
p &= p^* \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)}, \\
\rho &= \rho^* \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1/(\gamma-1)}, \\
T &= T^* \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1}, \\
c &= c^* \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1/2}.
\end{aligned}$$

Нагревание тела в потоке газа



M = 0,900

Температура потока в точке торможения A на рисунке вычисляется по формуле

$$T^* = T\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right).$$

Для воздуха ($\gamma \approx 1{,}4$) при температуре вдали от тела $T = 250$ K:

- при $M = 1$ $T^* \approx 290$ K,
- при $M = 3$ $T^* \approx 700$ K,
- при $M = 5$ $T^* \approx 1500$ K.

Влияние сжимаемости

Интегралы Бернулли для давления для несжимаемой жидкости и адиабатического движения газа

$$p = p^* - \rho_0 \frac{v^2}{2} \quad \text{и} \quad p = p^* \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Разложим интеграл для газа в ряд Тейлора по параметру $\dfrac{v^2}{v_{max}^2} \ll 1$:

$$p = p^* \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} =$$

$$= p^* \left[1 - \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{v^2}{v_{max}^2} + \frac{\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} - 1\right)}{2!}\frac{v^4}{v_{max}^4} + \ldots\right] =$$

вспомним, что $v_{max}^2 = \dfrac{2c^{*2}}{\gamma - 1}$ и $\dfrac{\gamma p^*}{\rho^*} = c^{*2}$, тогда

Влияние сжимаемости

Интегралы Бернулли для давления для несжимаемой жидкости и адиабатического движения газа

$$p = p^* - \rho_0 \frac{v^2}{2} \quad \text{и} \quad p = p^* \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} .$$

Разложим интеграл для газа в ряд Тейлора по параметру $\dfrac{v^2}{v_{max}^2} \ll 1$:

$$= p^* - \frac{\rho^* v^2}{2} \left(1 - \frac{1}{2(\gamma-1)} \frac{v^2}{v_{max}^2} + \ldots\right) = p^* - \frac{\rho^* v^2}{2} \left(1 - \boxed{\frac{v^2}{4c^{*2}}} + \ldots\right).$$

Разница не будет превышать 1 %, когда

$$\boxed{v^2/(4c^{*2})} \le 0{,}01 \quad \text{или} \quad v \le c^*/5.$$

При $c^* = 340$ м/с получается условие для скорости $v \le 68$ м/с.

Влияние сжимаемости

Разложение интеграла Бернулли для плотности по формуле Тейлора имеет вид

$$\frac{\rho}{\rho^*} = 1 - \frac{1}{\gamma - 1}\frac{v^2}{v_{max}^2} + \dots$$

Легко проверить, что при $v < \dfrac{c^*}{5} = 68\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$ будет справедливо

$$\frac{|\rho - \rho^*|}{\rho^*} \leq 0{,}02.$$

Литература

- **Л.И. Седов.** *Механика сплошной среды*. Том 2. М.:Наука, 1970.
- **М. Ван-Дайк**. *Альбом течений жидкости и газа*. М.:Мир, 1986