# Элементы тензорного исчисления

*Верещагин Антон Сергеевич*
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрофизики и газовой динамики

10 января 2021 г.

# Аннотация

Криволинейные системы координат. Скаляр. Вектор. Ковариантность и контравариантность. Тензор. Тензорная алгебра. Произведение тензоров. Сокращение индексов. Теоремы о тензорах. Фундаментальная квадратичная форма и тензор. Метрика. Скалярное произведение векторов.

## Определение

Пусть задана связь между криволинейными системами координат

$$x^\alpha = x^\alpha(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n), \quad (\alpha = 1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

и

$$\frac{D(x^1, x^2, \ldots, x^n)}{D(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^n} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \cdots & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^2} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

тогда существует обратное преобразование координат:

$$\bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad (\alpha = 1,2,\ldots,n).$$

# Скаляр

**Определение**

Если для каждой системы координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ определена функция $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ такая, что при преобразовании системы координат (1) выполняется условие

$$f(x^1, x^2, \ldots, x^n) = f(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n),$$

то говорят, что функция точек $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ есть инвариант, или скаляр.

# Контравариантный вектор

## Определение

Если для каждой системы координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ определена совокупность $n$ функций $A^1$, $A^2$,…, $A^n$ такая, что для системы координат $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$ мы имеем свою совокупность функций $\bar{A}^1$, $\bar{A}^2$,…, $\bar{A}^n$, и если при преобразовании координат (1) эти функции преобразуются по следующим формулам:

$$\bar{A}^i = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} A^\alpha \quad (i = 1, \ldots, n),$$

то говорят, что совокупность величин $A^1$, $A^2$,…, $A^n$ определяет контравариантный вектор, а величины $A^i$ называются компонентами контравариантного вектора $A^i$.

# Пример контравариантного вектора

### Соглашение

Условимся проводить суммирование по повторяющимся индексам в одночлене от 1 до $n$, если не сделано отдельных оговорок заранее.

# Пример контравариантного вектора

## Соглашение

Условимся проводить суммирование по повторяющимся индексам в одночлене от 1 до $n$, если не сделано отдельных оговорок заранее.

## Вектор $d\bar{x}^i$

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^2} dx^2 + \ldots + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^n} dx^n = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$$

# Пример ковариантного вектора

## Градиент функции

Рассмотрим градиент функции $\nabla\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^1}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^n}.$$

# Пример ковариантного вектора

## Градиент функции

Рассмотрим градиент функции $\nabla\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^1}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^n}.$$

По правилам дифференцирования:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial\bar{x}^i} + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial\bar{x}^i} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\bar{x}^i}.$$

# Пример ковариантного вектора

## Градиент функции

Рассмотрим градиент функции $\nabla\varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^1}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^n}.$$

По правилам дифференцирования:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial\bar{x}^i} + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial\bar{x}^i} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial\bar{x}^i}.$$

Положим, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} = A_\alpha, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^\alpha} = \bar{A}_\alpha,$$

тогда получим

$$\bar{A}_i = A_\alpha\frac{\partial x^\alpha}{\partial\bar{x}^i}.$$

# Ковариантный вектор

## Определение

Если для каждой системы координат $x^\alpha$ определена совокупность $n$ функций $A_\alpha$ и если при преобразовании координат (1) эти функции преобразуются по формуле

$$\bar{A}_i = A_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i},$$

то величины $A_\alpha$ определяют ковариантный вектор, составляющими, или компонентами, которого они являются.

## Соглашение

Будем различать ковариантные векторы от контравариантных тем, что у контравариантных векторов индексы будем ставить сверху (например, $dx^i$), а у ковариантных – снизу (например, $A_j$).

# Тензор второго ранга (контравариантный)

## Определение

Если для каждой системы координат $x^\alpha$ определена совокупность $n^2$ функций $A^{\alpha\beta}$, которые при преобразовании координат (1) испытывают преобразование

$$\bar{A}^{ik} = A^{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\beta},$$

то эти функции определяют контравариантный тензор второго ранга, составляющими которого они являются.

# Тензор второго ранга (ковариантный)

**Определение**

Если же определена совокупность $n^2$ функций $A_{\alpha\beta}$, которые при преобразовании координат (1) испытывают преобразование

$$\bar{A}_{ik} = A_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k},$$

то эти функции определяют ковариантный тензор второго ранга, составляющими которого они являются.

# Тензор второго ранга (смешанный)

**Определение**

Если же определена совокупность $n^2$ функций $A_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}$, которые при преобразовании координат (1) испытывают преобразование

$$\bar{A}_{i\cdot}^{\cdot k} = A_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\beta},$$

то эти функции определяют смешанный тензор второго ранга, составляющими которого они являются.

# Пример смешанного тензора

Символ Кронекера

$$\delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

является смешанным тензором 2-го ранга.

Доказательство

$$\bar{\delta}_i^k = \delta_\alpha^\beta \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\alpha} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

**Пример**

По аналогии можно ввести тензоры более высоких рангов – это такой набор величин, для которых при переходе из одной системы координат в другую (1) выполняются аналогичные соотношения, например:

$$\bar{A}^{l}_{ik} = A^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{i}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^{k}} \frac{\partial \bar{x}^{l}}{\partial x^{\gamma}}.$$

В данном случае тензор $A^{\gamma}_{\alpha\beta}$ является смешанным тензором 3-го ранга дважды ковариантным и один раз контравариантным.

# Тензорная алгебра: умножение на число и сумма

## Умножение тензора на число

При умножении всех компонентов тензора $A^{\gamma}_{\alpha\beta}$ на число $\lambda$ получается новый тензор с компонентами $\lambda A^{\gamma}_{\alpha\beta}$ (док-во очевидно).

# Тензорная алгебра: умножение на число и сумма

## Умножение тензора на число

При умножении всех компонентов тензора $A^{\gamma}_{\alpha\beta}$ на число $\lambda$ получается новый тензор с компонентами $\lambda A^{\gamma}_{\alpha\beta}$ (док-во очевидно).

## Сложение

Суммой двух тензоров $A^{\gamma}_{\alpha\beta}$ и $B^{\gamma}_{\alpha\beta}$ одинаковой размерности будет тензор $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ такого же вида с компонентами

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} = A^{\gamma}_{\alpha\beta} + B^{\gamma}_{\alpha\beta}.$$

Видно, что сложение тензоров обладает свойствами коммутативности, ассоциативности, а вместе с операцией умножение на число образует векторное пространство.

# Тензорная алгебра: симметричность, антисимметричность

## Симметричность

Тензор $A^{\alpha\beta}$ называется симметричным, если для всех $\alpha$ и $\beta$

$$A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}.$$

# Тензорная алгебра: симметричность, антисимметричность

## Симметричность

Тензор $A^{\alpha\beta}$ называется симметричным, если для всех $\alpha$ и $\beta$

$$A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}.$$

## Антисимметричность

Тензор $A^{\alpha\beta}$ называется антисимметричным, если для всех $\alpha$ и $\beta$

$$A^{\alpha\beta} = -A^{\beta\alpha}.$$

# Тензорная алгебра: симметричность, антисимметричность

## Симметричность

Тензор $A^{\alpha\beta}$ называется симметричным, если для всех $\alpha$ и $\beta$

$$A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}.$$

## Антисимметричность

Тензор $A^{\alpha\beta}$ называется антисимметричным, если для всех $\alpha$ и $\beta$

$$A^{\alpha\beta} = -A^{\beta\alpha}.$$

По аналогии с ортогональными тензорами 2-го ранга можно показать, что любой тензор можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного по двум выбранным (одновременно ковариантным или контравариантным) индексам, причем единственным образом.

# Тензорная алгебра: произведение тензоров

### Определение

Назовем произведением тензора $A_\alpha^\beta$ и тензора $B_{\gamma\delta}^\varepsilon$ тензор $C_{\alpha\gamma\delta}^{\beta\varepsilon}$, образуемый по формуле $C_{\alpha\gamma\delta}^{\beta\varepsilon} = A_\alpha^\beta B_{\gamma\delta}^\varepsilon$.

## Определение

Назовем произведением тензора $A_\alpha^\beta$ и тензора $B_{\gamma\delta}^\varepsilon$ тензор $C_{\alpha\gamma\delta}^{\beta\varepsilon}$, образуемый по формуле $C_{\alpha\gamma\delta}^{\beta\varepsilon} = A_\alpha^\beta B_{\gamma\delta}^\varepsilon$.

## Корректность определения

Для тензоров $A_\alpha^\beta$ и $B_{\gamma\delta}^\varepsilon$ справедливы соотношения:

$$\bar{A}_i^k = A_\alpha^\beta \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\beta}, \quad \bar{B}_{lm}^n = B_{\gamma\delta}^\varepsilon \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^\varepsilon},$$

следовательно компоненты $C_{\alpha\gamma\delta}^{\beta\varepsilon}$ в новой системе координат:

$$\bar{C}_{ilm}^{kn} = \bar{A}_i^k \bar{B}_{lm}^n = C_{\alpha\gamma\delta}^{\beta\varepsilon} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^\varepsilon}.$$

# Тензорная алгебра: сокращение индексов

Докажем, что тензор $B_\alpha = A^\beta_{\alpha\beta}$, полученный из смешанного тензора $A^\gamma_{\alpha\beta}$ путем суммирования по повторяющемуся индексу $\beta$ от 1 до $n$, является тензором 1-го ранга.

Имеем

$$\bar{A}^l_{ik} = A^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^\gamma},$$

тогда

$$\bar{B}_i = \bar{A}^k_{ik} = A^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\gamma} = A^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \delta^\beta_\gamma = A^\beta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} = B_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i},$$

что доказывает, что $B_\alpha$ – ковариантный вектор.

**Вывод**

Для каждого смешанного тензора можно получить новый тензор путем сокращения одного ковариантного и контравариантного индекса.

# Примеры

Скалярное произведение векторов: $a = A^{\alpha} B_{\alpha}$.

# Примеры

Скалярное произведение векторов: $a = A^{\alpha} B_{\alpha}$.

Скалярное произведение тензора и вектора: $C_{\beta} = A_{\alpha\beta} B^{\alpha}$.

# Примеры

Скалярное произведение векторов: $a = A^{\alpha} B_{\alpha}$.

Скалярное произведение тензора и вектора: $C_{\beta} = A_{\alpha\beta} B^{\alpha}$.

Бискалярное произведение тензоров: $b = A_{\alpha\beta} B^{\beta\alpha}$.

# Теорема о тензорной природе объекта

**Теорема**

Если для каждой системы координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ имеем совокупность $n^3$ величин $A^{\gamma}_{\alpha\beta}$ и если при любом выборе трех векторов $u^{\alpha}$, $v^{\beta}$ и $w_{\gamma}$ выражение

$$f = A^{\gamma}_{\alpha\beta} u^{\alpha} v^{\beta} w_{\gamma}$$

является инвариантом, то величины $A^{\gamma}_{\alpha\beta}$ являются составляющими тензора два раза ковариантного и один раз контравариантного.

# Теорема о тензорной природе объекта

**Доказательство**

В силу произвольности $u^\alpha$, $v^\beta$ и $w_\gamma$ возьмем их так, что для заранее заданных $i, j, k$ в новой системе координат:

$$\bar{u}^\alpha = \delta_i^\alpha, \quad \bar{v}^\beta = \delta_k^\beta, \quad \bar{w}_\gamma = \delta_\gamma^j.$$

# Теорема о тензорной природе объекта

Доказательство

В силу произвольности $u^\alpha$, $v^\beta$ и $w_\gamma$ возьмем их так, что для заранее заданных $i, j, k$ в новой системе координат:

$$\bar{u}^\alpha = \delta_i^\alpha, \quad \bar{v}^\beta = \delta_k^\beta, \quad \bar{w}_\gamma = \delta_\gamma^j.$$

Тогда $u^\alpha = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r}\bar{u}^r = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r}\delta_i^r = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}, v^\beta = \dfrac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}, w_\gamma = \dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\gamma}.$

### Доказательство

В силу произвольности $u^\alpha$, $v^\beta$ и $w_\gamma$ возьмем их так, что для заранее заданных $i, j, k$ в новой системе координат:

$$\bar{u}^\alpha = \delta_i^\alpha, \quad \bar{v}^\beta = \delta_k^\beta, \quad \bar{w}_\gamma = \delta_\gamma^j.$$

Тогда $u^\alpha = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r}\bar{u}^r = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r}\delta_i^r = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}, v^\beta = \dfrac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}, w_\gamma = \dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\gamma}.$

$$\bar{f} = \bar{A}^\gamma_{\alpha\beta}\bar{u}^\alpha\bar{v}^\beta\bar{w}_\gamma = \bar{A}^j_{ik},$$

# Теорема о тензорной природе объекта

**Доказательство**

В силу произвольности $u^\alpha$, $v^\beta$ и $w_\gamma$ возьмем их так, что для заранее заданных $i, j, k$ в новой системе координат:

$$\bar{u}^\alpha = \delta_i^\alpha, \quad \bar{v}^\beta = \delta_k^\beta, \quad \bar{w}_\gamma = \delta_\gamma^j.$$

Тогда $u^\alpha = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r}\bar{u}^r = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r}\delta_i^r = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}, v^\beta = \dfrac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}, w_\gamma = \dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\gamma}$.

$$\bar{f} = \bar{A}^\gamma_{\alpha\beta}\bar{u}^\alpha\bar{v}^\beta\bar{w}_\gamma = \bar{A}^j_{ik}, \quad f = A^\gamma_{\alpha\beta}u^\alpha v^\beta w_\gamma = A^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\gamma}.$$

# Теорема о тензорной природе объекта

## Доказательство

В силу произвольности $u^\alpha$, $v^\beta$ и $w_\gamma$ возьмем их так, что для заранее заданных $i, j, k$ в новой системе координат:

$$\bar{u}^\alpha = \delta_i^\alpha, \quad \bar{v}^\beta = \delta_k^\beta, \quad \bar{w}_\gamma = \delta_\gamma^j.$$

Тогда $u^\alpha = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r}\bar{u}^r = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r}\delta_i^r = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}$, $v^\beta = \dfrac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}$, $w_\gamma = \dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\gamma}$.

$$\bar{f} = \bar{A}^\gamma_{\alpha\beta}\bar{u}^\alpha\bar{v}^\beta\bar{w}_\gamma = \bar{A}^j_{ik}, \quad f = A^\gamma_{\alpha\beta}u^\alpha v^\beta w_\gamma = A^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\gamma}.$$

По условию теоремы $f$ – скаляр, значит, $\bar{A}^\gamma_{\alpha\beta} = A^\gamma_{\alpha\beta}\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}\dfrac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}\dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\gamma}$.

# Теорема о тензорной природе объекта 2

**Теорема**

Если для каждой системы координат $x^\alpha$ имеется совокупность $n^2$ величин $A_{\alpha\beta}$ и если при любом выборе вектора $u^\alpha$ выражение

$$f = A_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta$$

является инвариантом, то величина

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}\right)$$

является составляющей ковариантного тензора.

# Теорема о тензорной природе объекта 2

Доказательство

Положим, $u^\alpha = v^\alpha + w^\alpha$ – произвольное разложение вектора $u^\alpha$ в сумму двух векторов, тогда

$$f = A_{\alpha\beta}(v^\alpha + w^\alpha)(v^\beta + w^\beta) = A_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta + A_{\alpha\beta}w^\alpha w^\beta +$$

$$+ A_{\alpha\beta}v^\alpha w^\beta + A_{\alpha\beta}v^\beta w^\alpha.$$

Заметим, что

$$A_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta, \quad A_{\alpha\beta}w^\alpha w^\beta$$

являются инвариантами по условию теоремы, а

$$A_{\alpha\beta}v^\alpha w^\beta = A_{\beta\alpha}v^\alpha w^\beta.$$

Поэтому выражение $g = (A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha})v^\alpha w^\beta$ является инвариантом, а $A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}$ – ковариантным тензором по теореме 1.

# Признак тензорной природы для симметричного объекта

**Следствие**

Если величины $A_{\alpha\beta}$ обладают свойством симметричности, т.е. $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$, то из инвариантности

$$f = A_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta$$

для любого вектора $u^\alpha$ следует, что $A_{\alpha\beta}$ являются компонентами ковариантного тензора.

# Фундаментальный тензор

**Определение**

Выражение

$$ds^2 = g_{ik}(x^1, x^2, \ldots, x^n)dx^i dx^k, \tag{2}$$

определяющее расстояние между двумя бесконечно близкими точками многообразия, называется фундаментальной квадратичной формой.

# Постулаты для фундаментального тензора

## Инвариантность

$ds^2$ – инвариант по определению.

# Постулаты для фундаментального тензора

## Инвариантность

$ds^2$ – инвариант по определению.

## Симметричность

$$g_{ij} = g_{ji}$$

# Постулаты для фундаментального тензора

## Инвариантность

$ds^2$ – инвариант по определению.

## Симметричность

$$g_{ij} = g_{ji}$$

## Определитель

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

# Постулаты для фундаментального тензора

## Инвариантность

$ds^2$ – инвариант по определению.

## Симметричность

$$g_{ij} = g_{ji}$$

## Определитель

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

## Тензорная природа (следствие)

$g_{ij}$ – ковариантный тензор по тензорному признаку для симметричного объекта.

# Контравариантный фундаментальный тензор

**Определение**

Пусть $A^k$ – произвольный вектор, тогда рассмотрим вектор

$$A_i = g_{ik}A^k.$$

# Контравариантный фундаментальный тензор

**Определение**

Пусть $A^k$ – произвольный вектор, тогда рассмотрим вектор

$$A_i = g_{ik}A^k.$$

Эти равенства можно рассматривать как систему из $n$ линейных уравнений относительно $A^k$, и т. к. $g \neq 0$, то существуют такие числа $g^{ik}$, что

$$A^i = g^{ik}A_k.$$

# Контравариантный фундаментальный тензор

**Определение**

Пусть $A^k$ – произвольный вектор, тогда рассмотрим вектор

$$A_i = g_{ik}A^k.$$

Эти равенства можно рассматривать как систему из $n$ линейных уравнений относительно $A^k$, и т. к. $g \neq 0$, то существуют такие числа $g^{ik}$, что

$$A^i = g^{ik}A_k.$$

Так как $A^i$, $A_k$ – произвольные векторы, то по признаку тензорного объекта $g^{ik}$ является контравариантным тензором и называется контравариантным фундаментальным тензором.

# Смешанный фундаментальный тензор

**Определение**

Смешанный тензор

$$g_i^k = g_{i\alpha} g^{\alpha k}$$

называется смешанным фундаментальным тензором.

# Смешанный фундаментальный тензор

**Определение**

Смешанный тензор

$$g_i^k = g_{i\alpha} g^{\alpha k}$$

называется смешанным фундаментальным тензором.

**Свойства**

1) равенство $A_i = g_{i\alpha} A^\alpha = g_{i\alpha} g^{\alpha k} A_k = g_i^k A_k$ имеет место для всех $A_k$, поэтому

$$g_i^k = \delta_i^k = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

2) сокращение смешанного фундаментального тензора по его индексам дает размерность рассматриваемого многообразия, т.к.

$$g_i^i = \delta_i^i = n.$$

# Переход между контравариантными и ковариантными величинами

Формулы перехода для векторов

$$A_i = g_{ik}A^k, \quad A^i = g^{ik}A_k,$$

где $A_i$, $A^k$ – ковариантные и контравариантные компоненты одного и того же вектора.

# Переход между контравариантными и ковариантными величинами

Формулы перехода для векторов

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad A^i = g^{ik} A_k,$$

где $A_i$, $A^k$ – ковариантные и контравариантные компоненты одного и того же вектора.

Формулы перехода для тензоров

$$A_{i\cdot}^{\cdot\beta} = A^{\alpha\beta} g_{i\alpha}, \quad A_{\cdot k}^{\alpha\cdot} = A^{\alpha\beta} g_{\beta k},$$

# Переход между контравариантными и ковариантными величинами

Формулы перехода для векторов

$$A_i = g_{ik}A^k, \quad A^i = g^{ik}A_k,$$

где $A_i$, $A^k$ – ковариантные и контравариантные компоненты одного и того же вектора.

Формулы перехода для тензоров

$$A_{i\cdot}^{\cdot\beta} = A^{\alpha\beta}g_{i\alpha}, \quad A_{\cdot k}^{\alpha\cdot} = A^{\alpha\beta}g_{\beta k},$$

$$A_{ik} = A_{i\cdot}^{\cdot\beta}g_{\beta k} = A^{\alpha\beta}g_{i\alpha}g_{\beta k},$$

# Переход между контравариантными и ковариантными величинами

## Формулы перехода для векторов

$$A_i = g_{ik}A^k, \quad A^i = g^{ik}A_k,$$

где $A_i, A^k$ – ковариантные и контравариантные компоненты одного и того же вектора.

## Формулы перехода для тензоров

$$A_{i\cdot}^{\cdot\beta} = A^{\alpha\beta}g_{i\alpha}, \quad A_{\cdot k}^{\alpha\cdot} = A^{\alpha\beta}g_{\beta k},$$

$$A_{ik} = A_{i\cdot}^{\cdot\beta}g_{\beta k} = A^{\alpha\beta}g_{i\alpha}g_{\beta k},$$

$$A^{\alpha\beta} = A_{i\cdot}^{\cdot\beta}g^{i\alpha} = A_{ik}g^{k\beta}g^{i\alpha},$$

где $A_{ik}$, $A^{\alpha\beta}$, $A_{i\cdot}^{\cdot\beta}$, $A_{\cdot k}^{\alpha\cdot}$ – компоненты одного и того же тензора.

# Связь фундаментальной формы и преобразования координат

Пусть подпространство $E_n$ вложено в евклидово пространство $E_m$ ($m \geq n$) и преобразование координат задается

$$\begin{cases} y_1 & = & y_1(x^1, x^2, \ldots, x^n), \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_m & = & y_m(x^1, x^2, \ldots, x^n), \end{cases}$$

где $y_\alpha$ – координаты точек в прямолинейной ортогональной системе координат.

# Связь фундаментальной формы и преобразования координат

Пусть подпространство $E_n$ вложено в евклидово пространство $E_m$ $(m \geq n)$ и преобразование координат задается

$$\begin{cases} y_1 & = & y_1(x^1, x^2, \ldots, x^n), \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_m & = & y_m(x^1, x^2, \ldots, x^n), \end{cases}$$

где $y_\alpha$ – координаты точек в прямолинейной ортогональной системе координат.

Тогда фундаментальная квадратичная форма будет иметь вид

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{m} dy_\alpha^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \text{ где } g_{ik} = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^k}.$$

# Длина вектора

Рассмотрим контравариантный вектор $A^i$. Подберем бесконечно малый вектор $dx^i$ такой, что

$$dx^i = \lambda A^i, \quad A^i = \frac{1}{\lambda} dx^i.$$

Так как при преобразовании системы координат компоненты векторов $dx^i$ и $A^k$ преобразуются по одним и тем же формулам, то величина $\lambda$ является инвариантом.

# Длина вектора

Рассмотрим контравариантный вектор $A^i$. Подберем бесконечно малый вектор $dx^i$ такой, что

$$dx^i = \lambda A^i, \quad A^i = \frac{1}{\lambda} dx^i.$$

Так как при преобразовании системы координат компоненты векторов $dx^i$ и $A^k$ преобразуются по одним и тем же формулам, то величина $\lambda$ является инвариантом.

Вектору в подпространстве $R^n$ с координатами $dx^i$ отвечает вектор в пространстве $R^m$ с координатами $y_\alpha$, длина которого равна $ds$. Таким образом,

$$ds^2 = \lambda^2 g_{ik} A^i A^k.$$

# Длина вектора

**Определение**

**Длиной вектора** будем называть величину

$$l(A^i) = \sqrt{g_{ik}A^iA^k}.$$

**Свойства**

$$l(A^i) = \sqrt{g_{ik}A^iA^k} = \sqrt{A_iA^i} = \sqrt{g^{ij}A_iA_j}$$

# Скалярное произведение векторов

Так как скалярному вектору $dx^i$ отвечает в пространстве вектор с составляющими

$$dy_\alpha = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} dx^i \quad (\alpha = 1, \ldots, m),$$

то вектор $A^i = dx^i/\lambda$ в пространстве $R^m$ будет иметь компоненты

$$a_\alpha = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} A^i \quad (\alpha = 1, \ldots, m).$$

Рассмотрим еще один вектор с компонентами $B^i$, имеющий в $R^m$ компоненты

$$b_\alpha = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^k} B^k \quad (\alpha = 1, \ldots, m).$$

# Скалярное произведение векторов

## Определение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{\alpha=1}^{m} a_\alpha b_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} A^i \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^k} B^k = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^k} A^i B^k = g_{ik} A^i B^k$$

# Скалярное произведение векторов

## Определение

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_{\alpha=1}^{m} a_\alpha b_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} A^i \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^k} B^k = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y_\alpha}{\partial x^k} A^i B^k = g_{ik} A^i B^k$$

## Свойства:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = g_{ik}A^iB^k = A_kB^k = A^iB_i = g^{ij}A_iB_j;$

# Скалярное произведение векторов

## Определение

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sum_{\alpha=1}^{m}a_\alpha b_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i}A^i\frac{\partial y_\alpha}{\partial x^k}B^k=\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y_\alpha}{\partial x^k}A^iB^k=g_{ik}A^iB^k$$

## Свойства:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=g_{ik}A^iB^k=A_kB^k=A^iB_i=g^{ij}A_iB_j;$

2) $cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}=\dfrac{g_{ik}A^iB^k}{\sqrt{g_{ik}A^iA^k}\sqrt{g_{ik}B^iB^k}};$

# Скалярное произведение векторов

## Определение

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_{\alpha=1}^{m} a_\alpha b_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} A^i \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^k} B^k = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^k} A^i B^k = g_{ik} A^i B^k$$

## Свойства:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = g_{ik}A^iB^k = A_kB^k = A^iB_i = g^{ij}A_iB_j$;

2) $cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab} = \dfrac{g_{ik}A^iB^k}{\sqrt{g_{ik}A^iA^k}\sqrt{g_{ik}B^iB^k}}$;

3) $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow g_{ik}A^iB^k = 0.$

# Векторное произведение

## Определение

Пусть $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, тогда

$$u_i = e^{\alpha\beta}{}_i A_\alpha B_\beta = g_{i\gamma} e^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha B_\beta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ g_{i1}(A_2B_3 - A_3B_2) + g_{i2}(A_3B_1 - A_1B_3) + g_{i3}(A_1B_2 - A_2B_1) \right\}.$$

## Обозначения

$$e_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{g}\,\delta_{\alpha\beta\gamma}, \quad e^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{g}}\delta_{\alpha\beta\gamma}, \quad g = |g_{ik}|.$$

$$\begin{array}{ccccccc} \delta_{123} & = & \delta_{231} & = & \delta_{312} & = & 1, \\ \delta_{132} & = & \delta_{213} & = & \delta_{321} & = & -1, \end{array}$$

$\delta_{ijk} = 0$ во всех остальных случаях.

# Литература

*Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд. 9-е. М.: Наука, 1965.