

# Трёхмерные осесимметричные потенциальные течения идеальной жидкости

*Верещагин Антон Сергеевич*

д-р. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрофизики и газовой динамики



28 февраля 2024 г.

Трехмерные потенциалы при течении идеальной жидкости. Потенциалы простейших течений. Обтекание сферы, парадокс Даламбера. Функция тока в осесимметричном случае. Связь между функцией тока и потенциалом. Обтекание тел вращения.

## Определение

Течение называется **осесимметричным**, если существует такая прямая  $l$ , что во всех плоскостях, проходящих через  $l$ , картина течения одинакова и траектория жидкой частицы лежит в полуплоскостях, проходящих через  $l$ .

## Определение

Течение называется **потенциальным**, если в некоторой области пространства можно определить потенциал  $\varphi(t, x, y, z)$  такой, что

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi.$$

# Основные уравнения

Для трехмерных потенциальных течений идеальной жидкости, определенных в некоторой области пространства, справедливы следующие уравнения.

## Уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \vec{v} = \Delta \varphi = 0, \quad \vec{v} = \nabla \varphi.$$

## Интеграл Коши

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\nabla \varphi^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t)^1$$

Интеграл Коши позволяет найти распределение давления по заданному потенциалу, известному из уравнения неразрывности ( $\rho = \text{const}$ ).

---

<sup>1</sup>Считаем, что поле внешних сил отсутствует.

# Уравнение неразрывности в различных системах координат

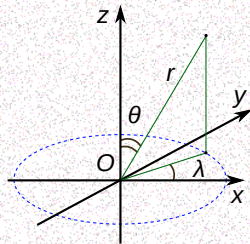
Сферическая система координат  $r, \theta, \lambda$

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) \right\} = 0,$$

где

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad v_\lambda = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}.$$

В случае осесимметричного течения можно пренебречь зависимостью  $\varphi$  от  $\lambda$ .





# Уравнение неразрывности в различных системах координат

Цилиндрическая система координат  $r, \theta, z$

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} v_\theta + \frac{\partial}{\partial z} (rv_z) \right\} = 0,$$

где

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

В случае осесимметричного течения вдоль оси  $Oz$  можно пренебречь зависимостью  $\varphi$  от  $\theta$ .

## Сферически симметричное течение

$$\varphi = \varphi(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0$$

## Сферически симметричное течение

$$\varphi = \varphi(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0$$

Потенциал источника, расположенного в точке с координатами  $(a, b, c)$

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{q}{4\pi \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$



# Источник в пространстве

Сферически симметричное течение

$$\varphi = \varphi(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0$$

Потенциал источника, расположенного в точке с координатами  $(a, b, c)$

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{q}{4\pi \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

Расход жидкости через любую поверхность, охватывающую центр источника S

$$q = \int_S v_n dS = \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$$

# Диполь в пространстве

## Потенциал

Рассмотрим источник и сток одной и той же обильности  $q$ , которые находятся на оси  $Oz$  на расстоянии  $l$  друг от друга. Тогда их суммарный потенциал будет иметь вид

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + (z - l/2)^2}} + \frac{q}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + (z + l/2)^2}}.$$

# Диполь в пространстве

## Потенциал

Рассмотрим источник и сток одной и той же обильности  $q$ , которые находятся на оси  $Oz$  на расстоянии  $l$  друг от друга. Тогда их суммарный потенциал будет иметь вид

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + (z - l/2)^2}} + \frac{q}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + (z + l/2)^2}}.$$

При переходе к пределу при  $l \rightarrow 0$ , а  $q \rightarrow \infty$ , причем  $ql = M$ , получится предельный потенциал

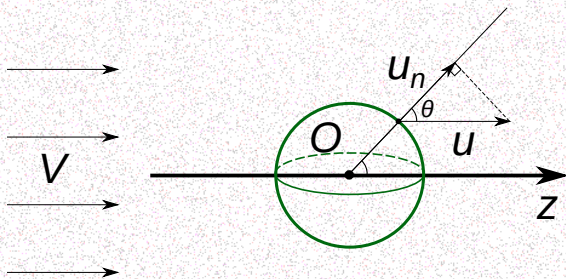
$$\varphi = -\frac{Mz}{4\pi r^3}, \quad \text{или} \quad \varphi = \frac{M}{4\pi} \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{r} \right),$$

где  $M$  – момент диполя;  $l$  – направление оси диполя.

# Обтекание сферы

## Постановка

Требуется найти распределение скорости и давления при потенциальном обтекании сферы радиуса  $R$ , движущейся поступательно вдоль оси  $Oz$  со скоростью  $u$  в потоке идеальной жидкости, имеющей на бесконечности скорость  $V$ , направленную вдоль оси  $Oz$ , и давление  $p_\infty$ .



# Математическая постановка

## Основные уравнения

В сферической системе координат пренебрегаем зависимостью от  $\lambda$ . Тогда для функции  $\varphi = \varphi(r, \theta)$  запишем уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0.$$

## Граничные условия на сфере

$$v_n = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{r=R} = u \cos \theta$$

## Граничные условия на бесконечности

$$v_r = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r \rightarrow \infty} = V \cos \theta, \quad v_\theta = \left. \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right|_{r \rightarrow \infty} = -V \sin \theta.$$



# Решение задачи обтекания сферы

## Упрощение

Пусть  $\varphi(r, \theta) = Q(r) \cos \theta$ , тогда уравнение неразрывности будет иметь вид:

$$r^2 \frac{d^2 Q}{dr^2} + 2r \frac{dQ}{dr} - 2Q = 0.$$

## Аналитическое решение

$$\varphi(r, \theta) = \left( Vr + \frac{V - u}{2} \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta$$

можно переписать в виде:

$$\varphi = Vz - \frac{R^3}{2} (V - u) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right).$$

Это сумма потенциала поступательного движения потока со скоростью  $V$  и потенциала диполя с моментом  $M = 2\pi R^3(u - V)$ .

# Обтекание покоящейся сферы

Если  $u = 0$ , тогда

$$\varphi = V \left( r + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta$$

и

$$v_r = V \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta, \quad v_\theta = -V \left( 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \sin \theta.$$

Максимальное значение скорости на поверхности сферы достигается в точках  $\theta = \pm\pi/2$  и равно  $3/2V$ .

# Парадокс Даламбера для покоящейся сферы

## Интеграл Бернулли

Так как течение потенциально и стационарно, то

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{V^2}{2} + \frac{p_{\infty}}{\rho}.$$

## Выражение для давления

$$\frac{p - p_{\infty}}{\rho} = \frac{V^2}{2} \left( 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right)$$

Суммарная сила, вызванная давлением потенциального течения жидкости на покоящуюся сферу, равна 0 вследствие симметрии распределения сил давления. Это называется **парадоксом Даламбера**.

# Функция тока для осесимметричных течений

Уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат с осевой симметрией в переменных  $(r, z)$

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial}{\partial z}(rv_z) \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = -\frac{\partial}{\partial z}(rv_z)$$

Существование полного дифференциала

$$d\psi = rv_r dz - rv_z dr = \frac{\partial \psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \psi}{\partial r} dr$$

является полным дифференциалом (см. теорию про интегрирующий множитель).

Определение

Функцию  $\psi(r, z)$  такую, что  $v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}$ ,  $v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$ , называют функцией тока для осесимметричных течений.

## Постоянство на линиях тока

Уравнение линий тока в случае осесимметричного течения:

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{dz}{v_z},$$

поэтому на линиях тока:

$$v_r dz - v_z dr = 0,$$

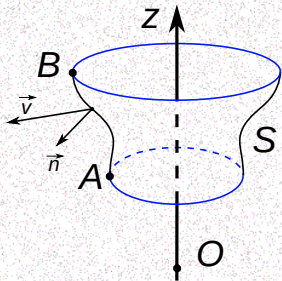
следовательно

$$d\psi = r(v_r dz - v_z dr) = 0$$

и  $\psi = \text{const.}$



## Поток жидкости через поверхность $S$



$$\begin{aligned} \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} ds &= \int_0^{2\pi} \int_B^A (v_z n_z + v_r n_r) r d\theta dl = \\ &= 2\pi \int_0^{l_0} \left( \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \left( -\frac{\partial r}{\partial l} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l} \right) r dl = \\ &= 2\pi \int_0^{s_0} \frac{d}{dl} \psi(r(l), z(l)) dl = 2\pi (\psi(A) - \psi(B)), \end{aligned}$$

$$r = r(l), \quad z = z(l),$$

$$(r, z)|_{l=0} = B, \quad (r, z)|_{l=l_0} = A.$$

# Связь функции тока и потенциала для осесимметричных течений

## Соотношения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Полученные соотношения **отличаются** от условий Коши – Римана.

# Связь функции тока и потенциала для осесимметричных течений

## Соотношения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Полученные соотношения **отличаются** от условий Коши – Римана.

## Уравнение для функции тока

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

Полученное соотношение не является уравнением Лапласа, записанным в цилиндрической системе координат. В случае осесимметричных течений не работают методы ТФКП. В этом случае может быть применен **метод источников и стоков**.

# Связь между функцией тока и потенциалом

## Предпосылки

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}dr + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz = -r \left( \frac{\partial\varphi}{\partial z}dr - \frac{\partial\varphi}{\partial r}dz \right),$$

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}dr + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial\psi}{\partial z}dr - \frac{\partial\psi}{\partial r}dz \right).$$

## Искомые соотношения

$$\psi(r,z) = \psi(r_0,z_0) + \int_{r_0,z_0}^{r,z} r \left( \frac{\partial\varphi}{\partial r}dz - \frac{\partial\varphi}{\partial z}dr \right),$$

$$\varphi(r,z) = \varphi(r_0,z_0) + \int_{r_0,z_0}^{r,z} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial\psi}{\partial z}dr - \frac{\partial\psi}{\partial r}dz \right).$$

# Функция тока для простейших осесимметричных течений

## Поступательное движение

$$\varphi = Vz \Rightarrow \psi = -\frac{V}{2}r^2 + C$$

## Источник

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \Rightarrow \psi = \frac{q}{4\pi} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} + C$$

## Диполь

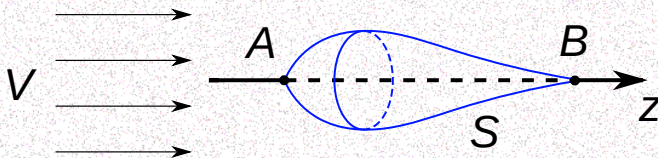
$$\varphi = -\frac{M}{4\pi} \frac{z}{(\sqrt{r^2 + z^2})^3} \Rightarrow \psi = -\frac{M}{4\pi} \frac{r^2}{(\sqrt{r^2 + z^2})^3} + C$$



# Продольное обтекание тела вращения

## Постановка задачи

Требуется найти потенциал или функцию тока течения, описывающие осесимметричное течение идеальной жидкости на бесконечности, направленной вдоль оси  $Oz$  около тела, образованного вращением заданной дуги  $AB$  вокруг оси  $Oz$ .



# Продольное обтекание тела вращения

## Метод источников и стоков

Рассмотрим на оси  $Oz$  распределенные источники и стоки с плотностью распределения  $\mu(\zeta)$ , где  $\zeta$  – положение на оси  $Oz$  между точками  $A$  и  $B$ .

## Функция тока от источников, распределенных вдоль оси $Oz$

$$\psi_1(r, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_A^B \mu(\zeta) \left( 1 - \frac{z - \zeta}{\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}} \right) d\zeta$$

## Функция тока от поступательного потока

$$\psi_2 = -r^2 \frac{V}{2}$$

Искомая функция тока для задачи

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = -r^2 \frac{V}{2} - \frac{1}{4\pi} \int_A^B \mu(\zeta) \left( 1 - \frac{z - \zeta}{\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}} \right) d\zeta$$

# Продольное обтекание тела вращения

Искомая функция тока для задачи

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = -r^2 \frac{V}{2} - \frac{1}{4\pi} \int_A^B \mu(\zeta) \left( 1 - \frac{z - \zeta}{\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}} \right) d\zeta$$

Условие «ограниченности» тела

$$\int_A^B \mu(\zeta) d\zeta = 0$$

# Продольное обтекание тела вращения

Искомая функция тока для задачи

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = -r^2 \frac{V}{2} - \frac{1}{4\pi} \int_A^B \mu(\zeta) \left( 1 - \frac{z - \zeta}{\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}} \right) d\zeta$$

Условие «ограниченности» тела

$$\int_A^B \mu(\zeta) d\zeta = 0$$

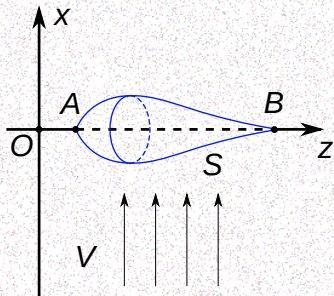
Поверхность тела – поверхность тока

$$\psi|_S = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4\pi} \int_A^B \frac{(z - \zeta) \mu(\zeta) d\zeta}{\sqrt{\tilde{r}(z)^2 + (z - \zeta)^2}} = \frac{1}{2} V \tilde{r}(z),$$

где  $r = \tilde{r}(z)$  – уравнение дуги  $AB$ ;  $z$  – координата между точками  $A$  и  $B$ .



# Поперечное обтекание тела вращения



## Постановка задачи

Требуется найти потенциал или функцию тока течения, описывающие течение идеальной жидкости на бесконечности, направленной вдоль оси  $Ox$  около тела, образованного вращением заданной дуги  $AB$  вокруг оси  $Oz$ .

## Метод источников и стоков

Рассмотрим диполи, распределенные на оси  $Oz$ , с плотностью распределения  $\mu(\zeta)$ , где  $\zeta$  – положение на оси  $Oz$  между точками  $A$  и  $B$ .

# Поперечное обтекание тела вращения

## Метод источников и стоков

Рассмотрим диполи, распределенные на оси  $Oz$ , с плотностью распределения  $\mu(\zeta)$ , где  $\zeta$  – положение на оси  $Oz$  между точками  $A$  и  $B$ .

## Потенциал диполей

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi} \int_A^B \frac{-\mu(\zeta)xd\zeta}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2}\right)^3} = \frac{r \cos \theta}{4\pi} \int_A^B \frac{-\mu(\zeta)d\zeta}{\left(\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}\right)^3}$$

## Потенциал поступательного движения

$$\varphi_2 = Vx = Vr \cos \theta$$

## Искомый потенциал течения

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = Vr \cos \theta - \frac{r \cos \theta}{4\pi} \int_A^B \frac{\mu(\zeta) d\zeta}{\left(\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}\right)^3}$$

# Поперечное обтекание тела вращения

## Искомый потенциал течения

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = Vr \cos \theta - \frac{r \cos \theta}{4\pi} \int_A^B \frac{\mu(\zeta) d\zeta}{\left(\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}\right)^3}$$

## Уравнения линий тока в цилиндрической системе координат

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{dz}{v_z} = \frac{rd\theta}{v_\theta},$$

где

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = V \cos \theta - \frac{\cos \theta}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \int_A^B \frac{\mu(\zeta) d\zeta}{\left(\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}\right)^3} \right\},$$



# Поперечное обтекание тела вращения

## Искомый потенциал течения

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = Vr \cos \theta - \frac{r \cos \theta}{4\pi} \int_A^B \frac{\mu(\zeta) d\zeta}{\left(\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}\right)^3}$$

## Уравнения линий тока в цилиндрической системе координат

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{dz}{v_z} = \frac{r d\theta}{v_\theta},$$

где

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{r \cos \theta}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_A^B \frac{\mu(\zeta) d\zeta}{\left(\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}\right)^3} \right\},$$

# Поперечное обтекание тела вращения

## Искомый потенциал течения

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = Vr \cos \theta - \frac{r \cos \theta}{4\pi} \int_A^B \frac{\mu(\zeta) d\zeta}{\left(\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}\right)^3}$$

## Уравнения линий тока в цилиндрической системе координат

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{dz}{v_z} = \frac{rd\theta}{v_\theta},$$

где

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -V \sin \theta + -\frac{\sin \theta}{4\pi} \int_A^B \frac{\mu(\zeta) d\zeta}{\left(\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}\right)^3}.$$

# Поперечное обтекание тела вращения

## Линии тока на теле вращения

Линии тока должны проходить вдоль поверхности тела вращения, поэтому соотношение

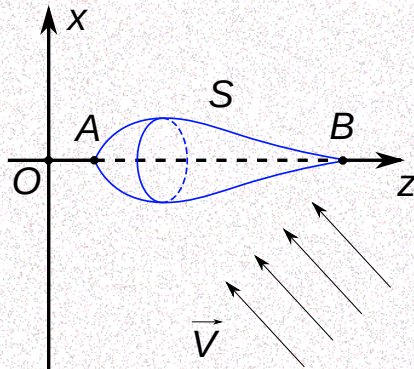
$$\frac{dr}{dz} = \frac{v_r}{v_z} = f(r, z) = \frac{V - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \int_A^B \frac{\mu(\zeta) d\zeta}{\left( \sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2} \right)^3} \right]}{-\frac{r}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \int_A^B \frac{\mu(\zeta) d\zeta}{\left( \sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2} \right)^3} \right]},$$

где  $r = \Phi(z)$  и  $\frac{dr}{dz} = \Phi'(z)$  – заданные функции, описывающие поверхность тела вращения, позволяет найти распределение диполей  $\mu(\zeta)$ , где  $\zeta$  – координата между точками  $A$  и  $B$ .

# Общий случай обтекания тела вращения

## Постановка задачи

Требуется найти потенциал течения при обтекании тела вращения с поверхностью  $S$  поступательным потоком идеальной жидкости со скоростью  $\vec{V}$  на бесконечности.



# Общий случай обтекания тела вращения

## Математическая постановка задачи

Всегда можно выбрать систему координат так, чтобы вектор  $\vec{V}$  лежал в плоскости  $Oxz$ , тогда для потенциала течения требуется решить

$$\Delta\varphi = 0$$

при условии на поверхности тела

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_S = 0$$

и на бесконечности

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = V_x, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = V_z.$$



# Общий случай обтекания тела вращения

Задача обтекания тела продольным потоком со скоростью  $V_z$

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} \right|_S = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = V_z.$$

# Общий случай обтекания тела вращения

Задача обтекания тела продольным потоком со скоростью  $V_z$

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} \right|_S = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = V_z.$$

Задача обтекания тела поперечным потоком со скоростью  $V_x$

$$\Delta\varphi_2 = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \right|_S = 0, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = V_x, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = 0.$$

# Общий случай обтекания тела вращения

Задача обтекания тела продольным потоком со скоростью  $V_z$

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} \right|_S = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = V_z.$$

Задача обтекания тела поперечным потоком со скоростью  $V_x$

$$\Delta\varphi_2 = 0, \quad \left. \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \right|_S = 0, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = V_x, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = 0.$$

Искомый потенциал

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

1. *Валландер С. В.* Лекции по аэрогидромеханике. Учеб. пособие. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1978.
2. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.:Гос. издат. физ.-мат. лит., 1963.