# Звуковые колебания

*Верещагин Антон Сергеевич*
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики ФФ НГУ

11 марта 2019 г.

# Аннотация

# Основные уравнения динамики идеального газа

Уравнения сохранения для идеального газа

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)S = 0.$$

Замыкающие соотношения

$$p = p(\rho, S).$$

# Звуковые волны

**Определение**

Колебательное движение с малыми амплитудами в сжимаемом газе называют звуковыми волнами.

# Звуковые волны

**Определение**

Колебательное движение с малыми амплитудами в сжимаемом газе называют звуковыми волнами.

**Замечание**

При рассмотрении звуковых колебаний будет считать течение изоэнтропическим ($S = const$), тогда из общей системы уравнений остаются только уравнение неразрывности и уравнение Эйлера, а в замыкающем соотношении пропадает зависимость от $S$, как функции от координаты и времени.

# Звуковые волны

**Определение**
Колебательное движение с малыми амплитудами в сжимаемом газе называют звуковыми волнами.

**Замечание**
При рассмотрении звуковых колебаний будет считать течение изоэнтропическим ($S = const$), тогда из общей системы уравнений остаются только уравнение неразрывности и уравнение Эйлера, а в замыкающем соотношении пропадает зависимость от $S$, как функции от координаты и времени.

# Скорость звука

Уравнения сохранения для идеального газа

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \nabla \rho,$$

$$p = p(\rho).$$

# Скорость звука

## Уравнения сохранения для идеального газа

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \nabla \rho,$$

$$p = p(\rho).$$

## Определение

Величина $c > 0$, определяемая соотношением

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S,$$

называется скоростью звука.

Как видно из определения $c = c(\rho, S)$. Для изоэнтропических течений зависимостью от $S$ как от функции переменных пространства и времени можно пренебречь.

# Линеаризация уравнений движения

## Замена переменных

Рассмотрим малые колебания газа в окрестности постоянного решения $\vec{v} = 0$, $p = p_0$, $\rho = \rho_0$:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}', \\ c &= c_0 + c', \\ \rho &= \rho_0 + \rho'. \end{aligned}$$

# Линеаризация уравнений движения

## Замена переменных

Рассмотрим малые колебания газа в окрестности постоянного решения $\vec{v} = 0$, $p = p_0$, $\rho = \rho_0$:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}', \\ c &= c_0 + c', \\ \rho &= \rho_0 + \rho'. \end{aligned}$$

## Уравнения движения

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0 + \rho')\vec{v}' = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + (\vec{v}' \cdot \nabla)\vec{v}' = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'}(c_0 + c')^2 \nabla(\rho_0 + \rho').$$

## Основные уравнения

Считая колебания малыми, отбрасываем все слагаемые, имеющие порядок малости два и выше, получим

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = 0, \qquad \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \nabla \rho' = 0.$$

# Уравнения звуковых колебаний

## Основные уравнения

Считая колебания малыми, отбрасываем все слагаемые, имеющие порядок малости два и выше, получим

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}\vec{v}' = 0, \qquad \frac{\partial\vec{v}'}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0}\nabla\rho' = 0.$$

## Потенциальное течение и волновое уравнение

Если $\vec{v}' = \nabla\varphi$, тогда

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho_0\Delta\varphi = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi + \frac{c_0^2}{\rho_0}\nabla\rho' = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \Delta\varphi.$$

# Решение волнового уравнения с плоскими волнами

## Одномерное плоское течение

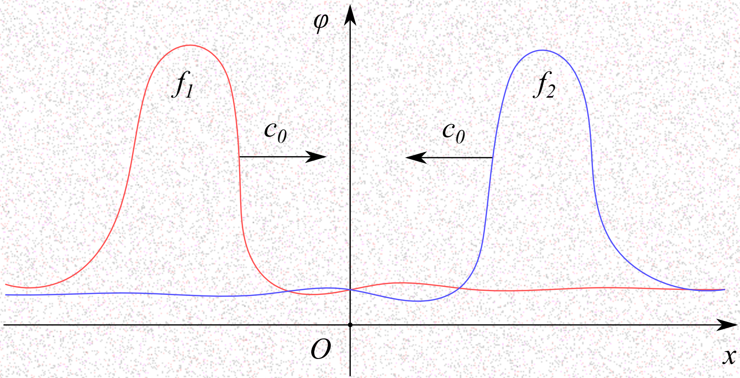
Если $\varphi = \varphi(t,x)$, тогда решением полученного волнового уравнения будет

$$\varphi(t,x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t) = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

где $f_1(\xi), f_2(\eta)$ – произвольные дважды дифференцируемые функции своих аргументов

$$\xi = x - c_0 t, \quad \eta = x + c_0 t.$$

# Прогрессивные волны




Решение $\varphi(t,x)$ представляет собой сумму перемещающихся поступательно вправо и влево волн неизменного вида с скоростью $c_0$.

# Литература

•