Плоские потенциальные течения идеальной жидкости. Обтекание тел.

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

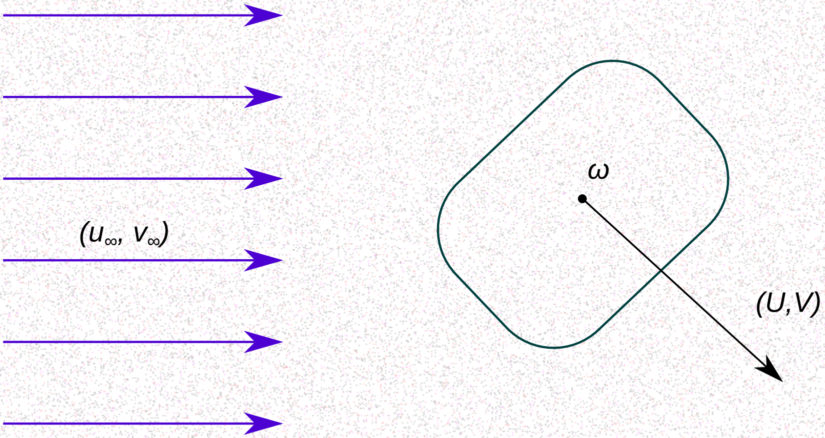
Кафедра аэрофизики и газовой динамики

2 сентября 2020 г.

Аннотация

Обтекание абсолютно твёрдого тела. Задание граничных условий. Формулы Блазиуса-Чаплыгина. Формулы Кутта-Жуковского.

Задача обтекания абсолютно твёрдого тела



Математическая постановка задачи обтекания тела потенциальным потоком идеальной жидкости

Требуется найти аналитический комплексный потенциал

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad z = x + iy,$$

определённый в рассматриваемой бесконечной области, и такой что

$$\Delta\psi(x, y) = 0,$$

связанный соответствующими условиями на бесконечности и границе с телом.

Замечание

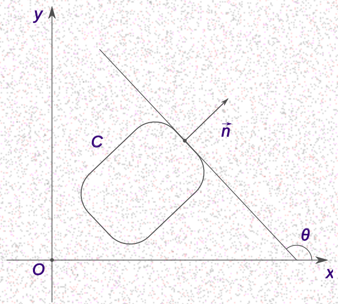
Так как потенциал φ связан с функцией тока ψ соотношениями Коши-Римана, то функция тока находится автоматически. Можно, наоборот, искать потенциал φ, а ψ выражать через соотношения Коши-Римана.

Плоское покоящееся течение на бесконечности

Условия на бесконечности

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$$

для бесконечно удалённых точек пространства, т.к. скорость на бесконечности равна 0.



Условие на границе с телом

Нормальная составляющая (относительно границы тела) скорость течения должна совпадать с нормальной составляющей скорости тела.

$$v_n = v_x \cos(\vec{n}, x) + v_y \cos(\vec{n}, y) = v_x \sin\theta - v_y \cos\theta =$$

$$= v_x \frac{dy}{ds} - v_y \frac{dx}{ds} = \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{ds} = \frac{\partial\psi}{\partial s},$$

где $x(s), y(s)$ – параметризованная граница тела в окрестности рассматриваемой точки.

Условие для движения абсолютно твёрдого тела

Пусть тело совершает поступательное движение со скоростью (U, V) и вращательное с угловой скоростью ω, тогда скорости точек тела будут иметь вид

$$u_x = U - \omega y, \quad u_y = V + \omega x,$$

где (x, y) – координаты точек тела во вращающейся системе координат, жёстко связанной с телом.

Условие для движения абсолютно твёрдого тела

Пусть тело совершает поступательное движение со скоростью (U, V) и вращательное с угловой скоростью ω, тогда скорости точек тела будут иметь вид

$$u_x = U - \omega y, \quad u_y = V + \omega x,$$

где (x, y) – координаты точек тела во вращающейся системе координат, жёстко связанной с телом.

Условие на границе с телом

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = u_x \cos(\vec{n}, y) + u_y \cos(\vec{n}, y) = u_x \frac{dy}{ds} - u_y \frac{dx}{ds} =$$

$$= (U - \omega y) \frac{dy}{ds} - (V + \omega x) \frac{dx}{ds}.$$

Отсюда,

$$\psi = Uy - Vx - \frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2) + c.$$

Частный случай набегающего потока на покоящееся тело

Условие на границе тела

В случае покоящегося тела $U = V = 0$, $\omega = 0$ условие на границе тела будет

$$\psi(x,y) = const.$$

Условие на бесконечности

В случае набегающего потока с параметрами на бесконечности равными

$$v_x = v_\infty, \quad v_y = 0,$$

то для бесконечно удалённых точек

$$\psi(x,y) = v_\infty y + const.$$

Задача обтекание тела

Таким образом, задача обтекания тела плоским потенциальным потоком идеальной жидкости сводится к решению задачи Дирихле для функции тока ψ:

- внутри исследуемой области решается уравнение Лапласа

$$\Delta\psi = 0,$$

- а на бесконечности и границе обтекаемого тела заданы значения функции ψ в зависимости от условий обтекания.

Сила при безотрывном обтекании

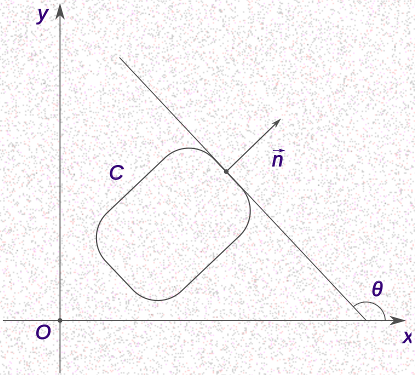
Определение

По аналогии с комплексными скоростью и потенциалом, определим комплексную силу R, действующую на контур C в области течения по формуле

$$R = X + iY,$$

где X, Y – вещественные проекции силы на оси координат.

Формула для силы через давление при безотрывном обтекании



Комплексно-сопряжённая сила R^* вдоль контура тела C при безотрывном обтекании

$$R^* = X - iY =$$

$$= -\oint_C p(\cos(\vec{n}, x) - i\cos(\vec{n}, y))ds =$$

$$= -\oint_C p(\sin\theta + i\cos\theta)ds =$$

$$= -i\oint_C pe^{-\theta i}ds.$$

Предварительные выкладки

Выражение для комплексного дифференциала

$$dz = dx + idy = ds(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{i\theta} ds,$$

$$dz^* = dx - idy = ds(\cos\theta - i\sin\theta) = e^{-i\theta} ds.$$

Отсюда

$$dz^* = e^{-2\theta i} dz.$$

Предварительные выкладки

Выражение для комплексного дифференциала

$$dz = dx + idy = ds(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{i\theta}ds,$$

$$dz^* = dx - idy = ds(\cos\theta - i\sin\theta) = e^{-i\theta}ds.$$

Отсюда

$$dz^* = e^{-2\theta i}dz.$$

Интеграл Бернулли

Связь давления и скорости через интеграл Бернулли

$$p = c - \frac{1}{2}\rho v^2$$

справедлива вдоль контура тела при безотрывном обтекании, т.к. он является линией тока. При потенциальном течении она справедлива во всей области течения.

Сила

$$R^* = -ic \oint\limits_C dz^* + \frac{i\rho}{2} \oint\limits_C v^2 dz^* = \frac{i\rho}{2} \oint\limits_C v^2 dz^* = \frac{i\rho}{2} \oint\limits_C (ve^{-i\theta})^2 dz.$$

Сила

$$R^* = -ic \oint_C dz^* + \frac{i\rho}{2} \oint_C v^2 dz^* = \frac{i\rho}{2} \oint_C v^2 dz^* = \frac{i\rho}{2} \oint_C (ve^{-i\theta})^2 dz.$$

Используя то, что

$$ve^{-i\theta} = v\cos\theta - iv\sin\theta = v_x - iv_y = v^*,$$

получим

$$R^* = X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint_C (v^*)^2 dz.$$

Момент главных сил

$$L = -\oint\limits_C p(x\cos(\vec{n},y) - y\cos(\vec{n},x))ds = -\oint\limits_C p(x\cos\theta + y\sin\theta)ds =$$

$$= -\oint\limits_C p(xdx + ydy) = -\oint\limits_C \left(c + \frac{\rho v^2}{2}\right)(xdx + ydy) =$$

$$= -\oint\limits_C c\,d(x^2 + y^2) - \frac{\rho}{2}\oint\limits_C v^2(xdx + ydy) = \mathrm{Re}\left(-\frac{\rho}{2}\oint\limits_C v^2 zdz^*\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(-\frac{\rho}{2}\oint\limits_C (v^*)^2 zdz,\right),$$

т.к. $v^2 dz^* = (v^*)^2 dz$.

Формулы Блазиуса-Чаплыгина для потенциального течения

Если течение потенциально, тогда существует комплексный потенциал

$$w(z) = \varphi(z) + i\psi(z) \quad \text{и} \quad \frac{dw}{dz} = v^*.$$

Формулы Блазиуса-Чаплыгина

$$R^* = X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint\limits_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz,$$

$$L = \operatorname{Re}\left[-\frac{\rho}{2} \oint\limits_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z dz\right].$$

Формула Кутта-Жуковского

Предположения

Поток потенциален везде вне тела, которое можно заменить на конечное число источников, вихрей и диполей, лежащих внутри границы тела, контура C.

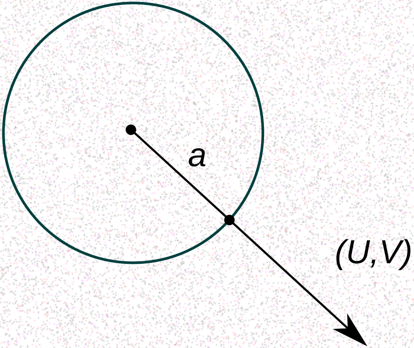
Формула для силы и реакции

$$R^* = X - iY = i\rho\Gamma v_\infty^*,$$

$$L = \mathrm{Re}\left[-\rho v_\infty^* \sum_{k=1}^{m} \Gamma_k b_k - i\rho M v_\infty^*\right],$$

где Γ_i – циркуляции вихрей, находящихся в точках b_i $(i = 1, \ldots, m)$; M – суммарный момент источников и диполей, Γ – суммарная циркуляция вихрей, находящихся внутри тела.

Задача обтекания кругового цилиндра



Найти комплексный потенциал обтекания кругового цилиндра радиуса a, движущегося в бесконечной покоящейся жидкости со скоростью (U, V).

Задача обтекания кругового цилиндра

Постановка задачи

В системе координат цилиндра найти потенциал

$$w(z) = \varphi(z) + i\psi(z),$$

такой, что его мнимая часть на окружности $|z| = a$ удовлетворяет условию

$$\psi(x + iy) = Uy - Vx + \text{const}.$$

Решение

$$
\begin{aligned}
w(z) &= \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z-(I+iV)\frac{a^2}{z},\\
\varphi(z) &= \frac{\Gamma}{2\pi\theta}-(U\cos\theta+V\sin\theta)\frac{a^2}{r},\\
\psi(z) &= -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r+(U\sin\theta-V\cos\theta)\frac{a^2}{r},
\end{aligned}
$$

где $z=re^{i\theta}$.

Задача обтекания кругового цилиндра жидкостью движущейся на бесконечности

Решение

Обтекание круга поступательным потоком имеет потенциал

$$w(z) = v_\infty^* z + \frac{a^2 v_\infty}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z.$$

Литература

- *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.:Гос. издат. физ.-мат. лит., 1963.