

# Тензоры деформаций

*Верещагин Антон Сергеевич*

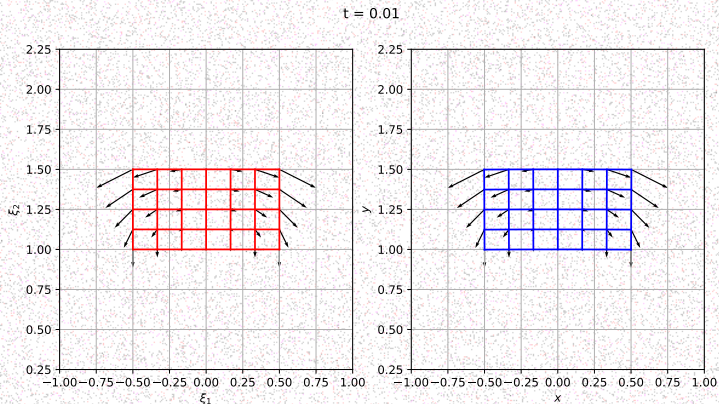
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики

24 сентября 2019 г.

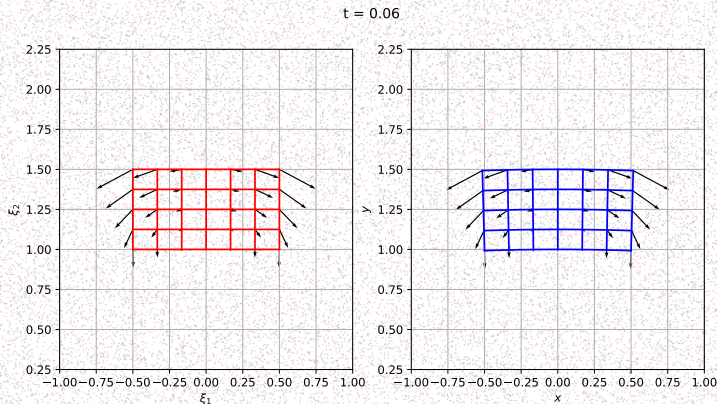
Движение сплошной среды. Сопутствующий базис. Метрический тензор. Нелинейный тензор деформации. Геометрическая интерпретация компонент тензора деформаций. Главные деформации и инварианты. Связь между относительным изменением объёма и инвариантами тензора деформаций.

# Пример деформации сплошной среды



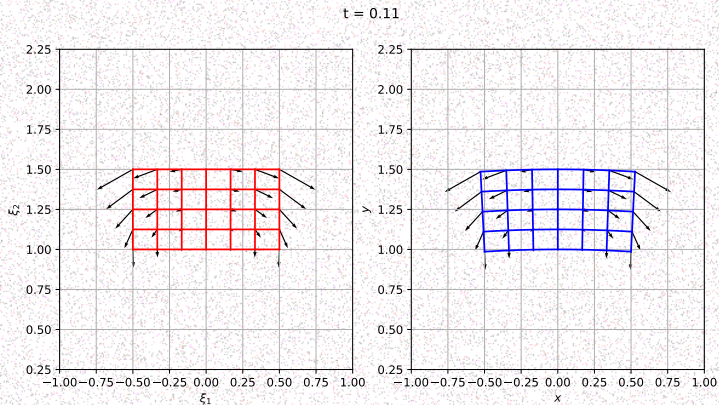
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



Лагранжево и эйлерово представление

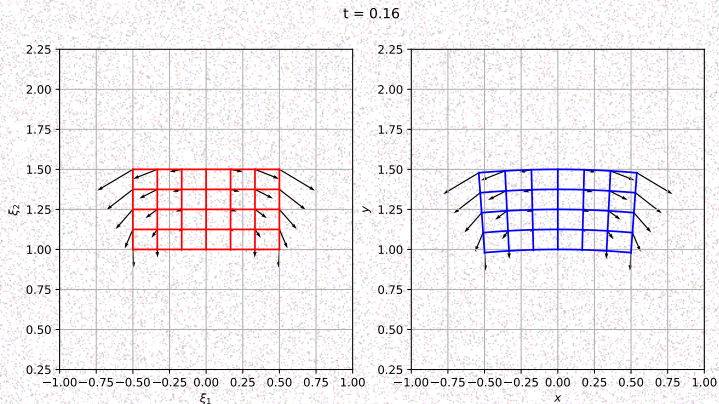
# Пример деформации сплошной среды



Лагранжево и эйлерово представление

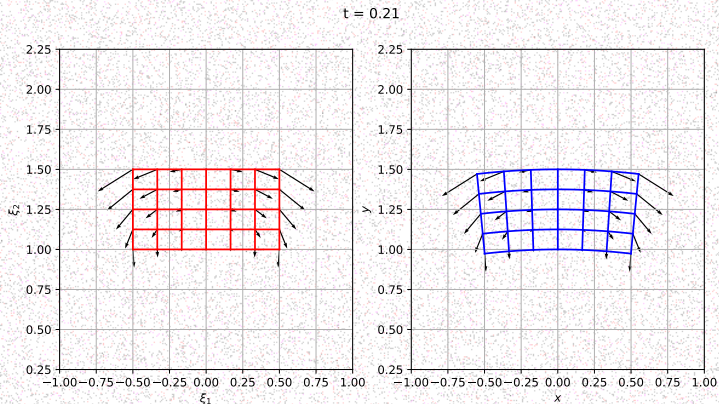


# Пример деформации сплошной среды



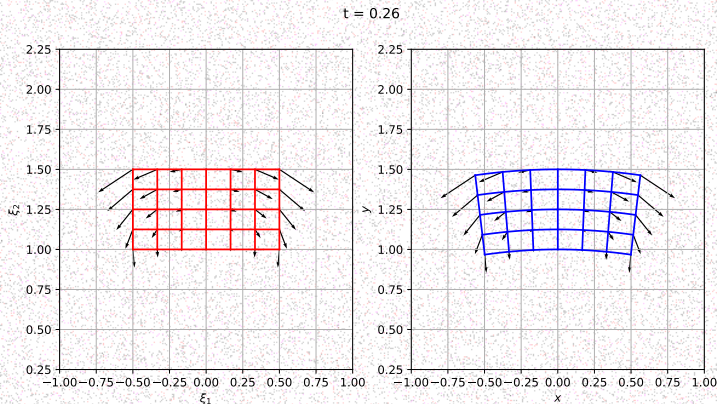
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



Лагранжево и эйлерово представление

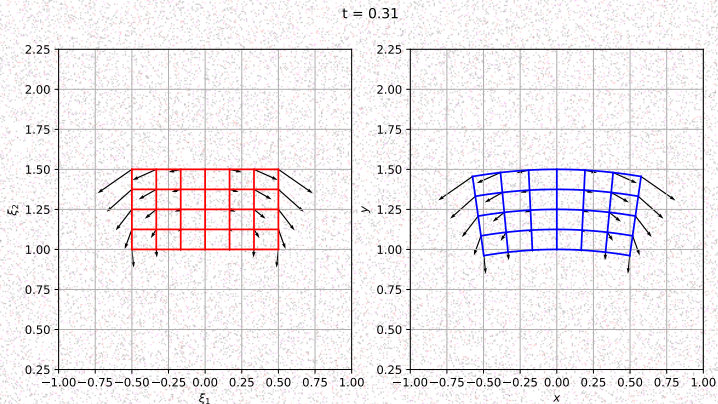
# Пример деформации сплошной среды



Лагранжево и эйлерово представление

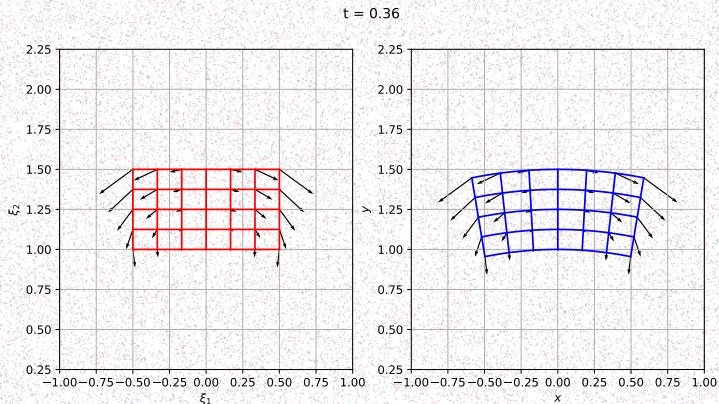


# Пример деформации сплошной среды



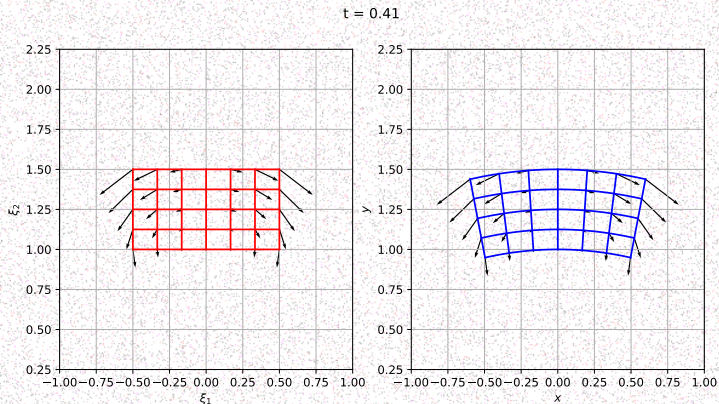
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



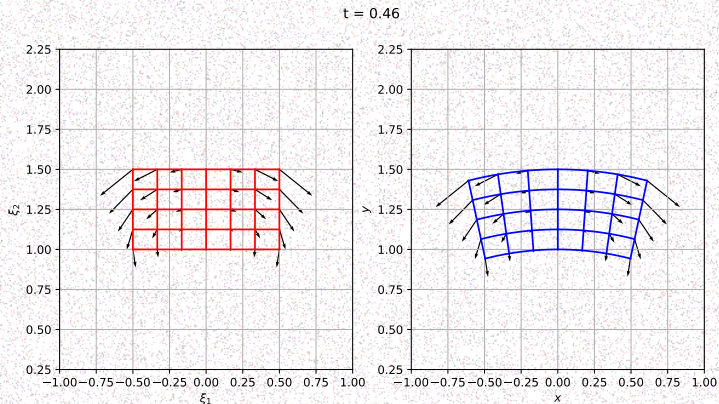
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



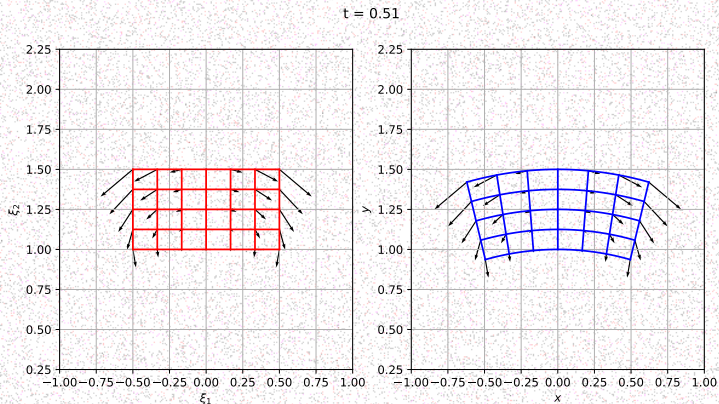
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



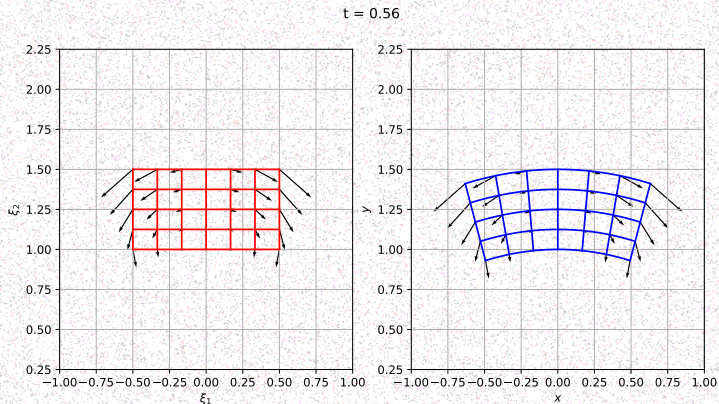
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



Лагранжево и эйлерово представление

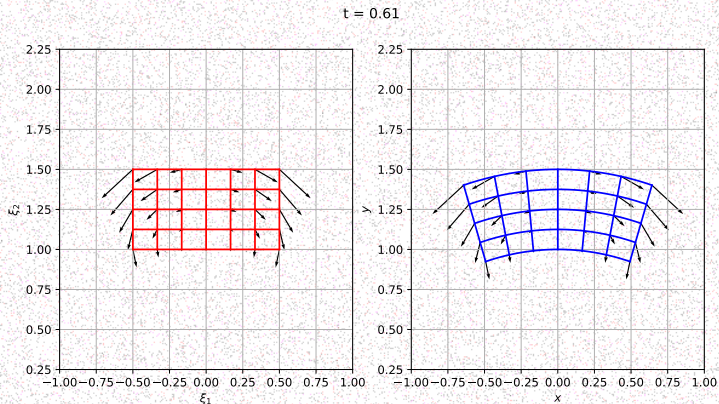
# Пример деформации сплошной среды



Лагранжево и эйлерово представление

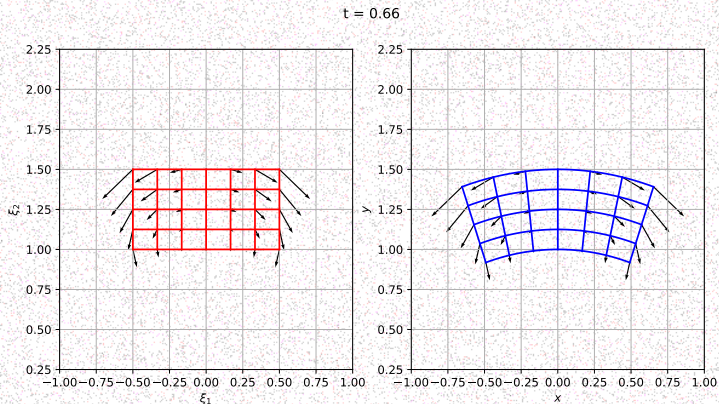


# Пример деформации сплошной среды



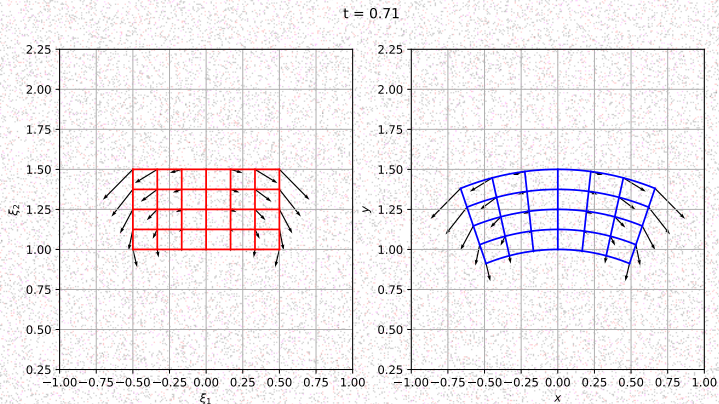
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



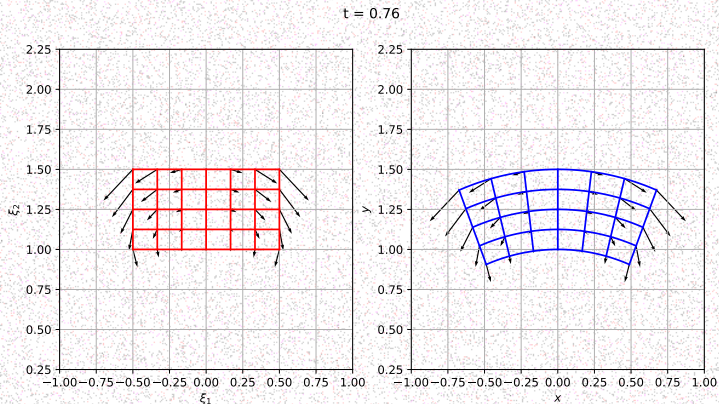
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



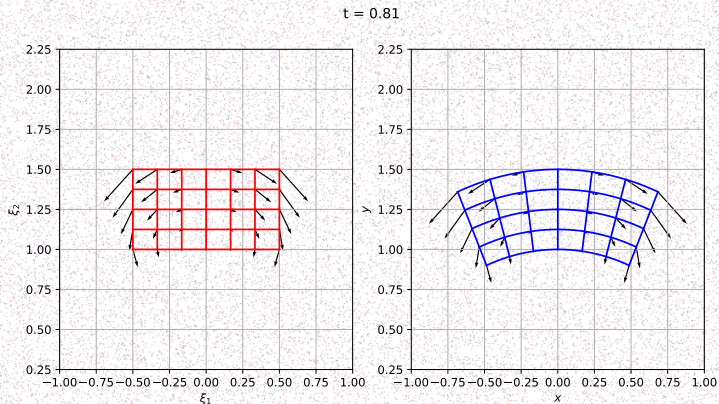
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



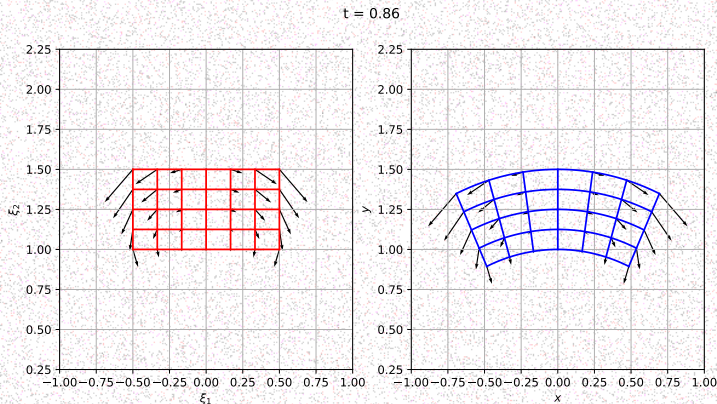
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



Лагранжево и эйлерово представление

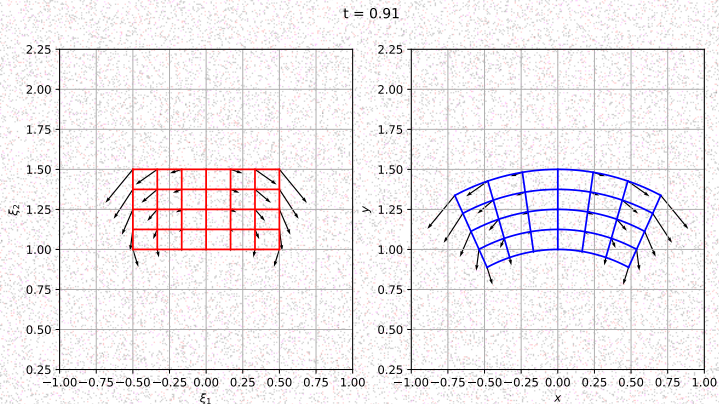
# Пример деформации сплошной среды



Лагранжево и эйлерово представление

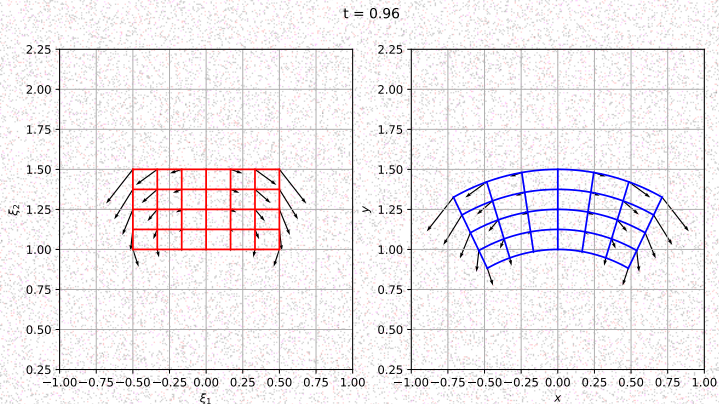


# Пример деформации сплошной среды



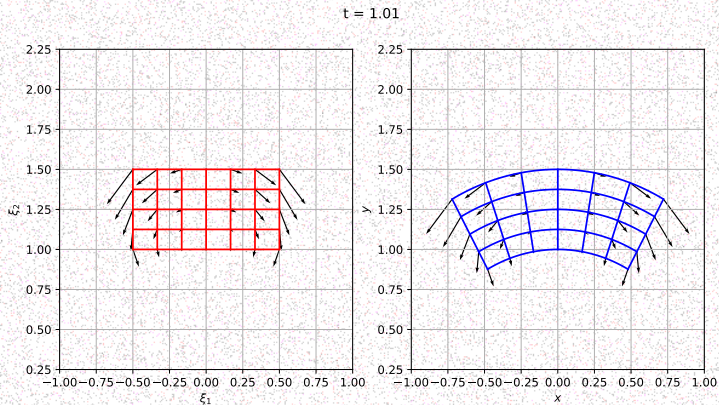
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



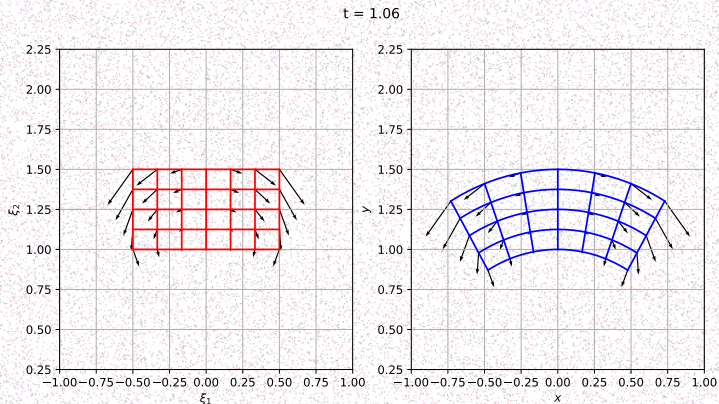
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



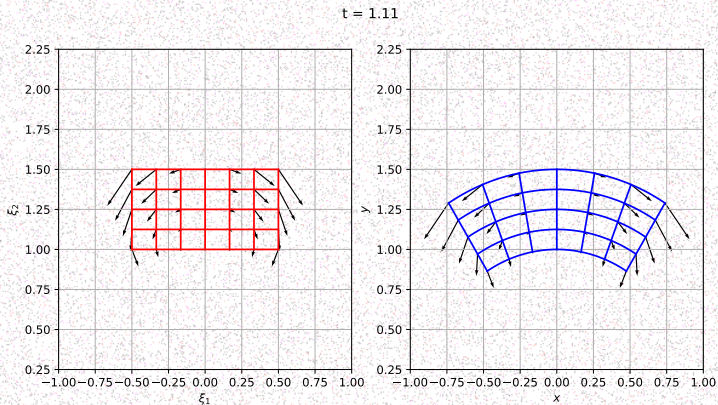
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



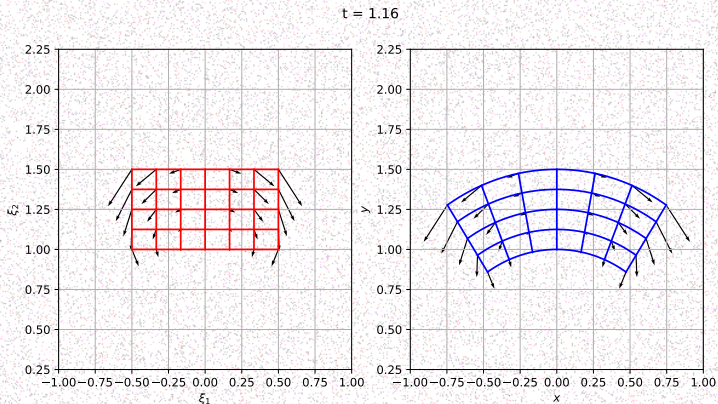
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



Лагранжево и эйлерово представление

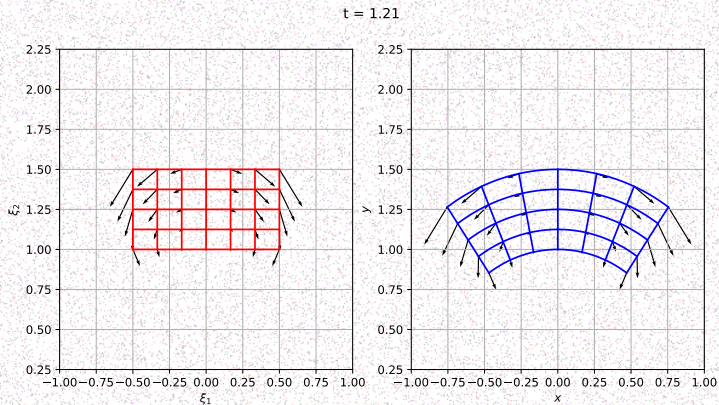
# Пример деформации сплошной среды



Лагранжево и эйлерово представление

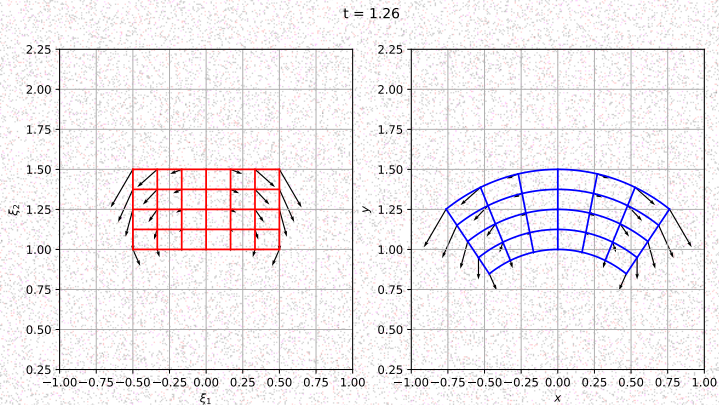


# Пример деформации сплошной среды



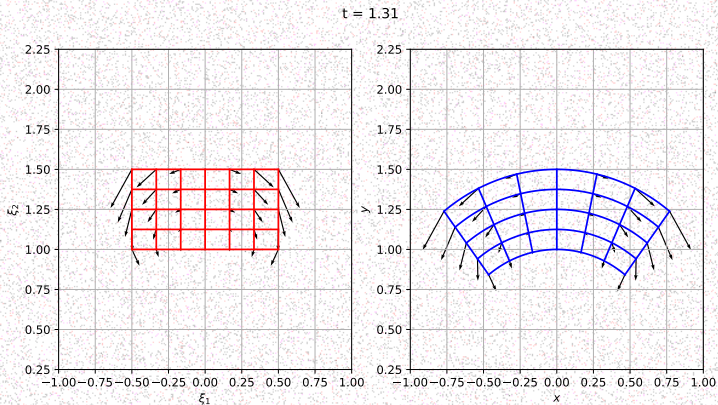
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



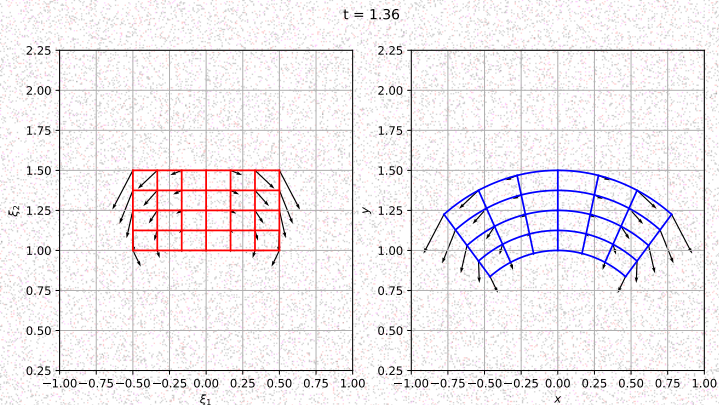
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



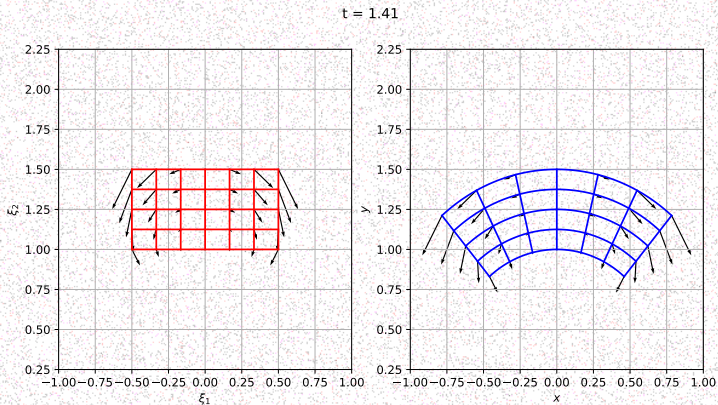
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



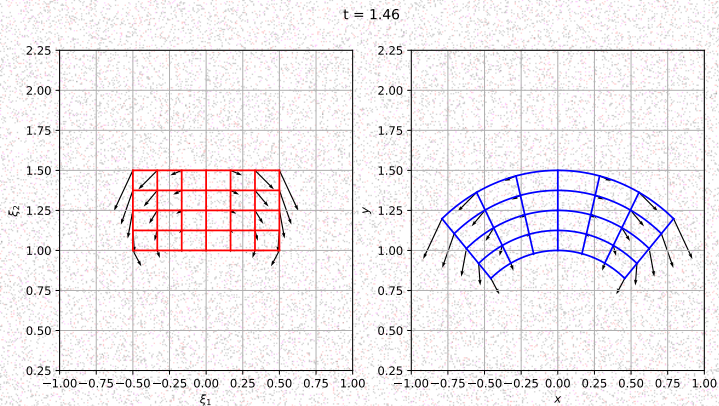
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



Лагранжево и эйлерово представление

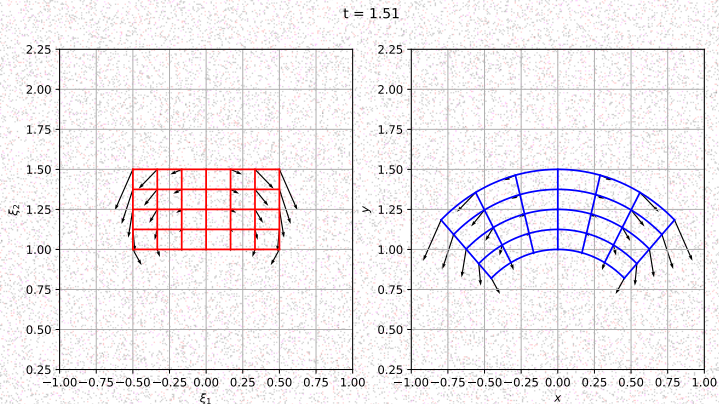
# Пример деформации сплошной среды



Лагранжево и эйлерово представление

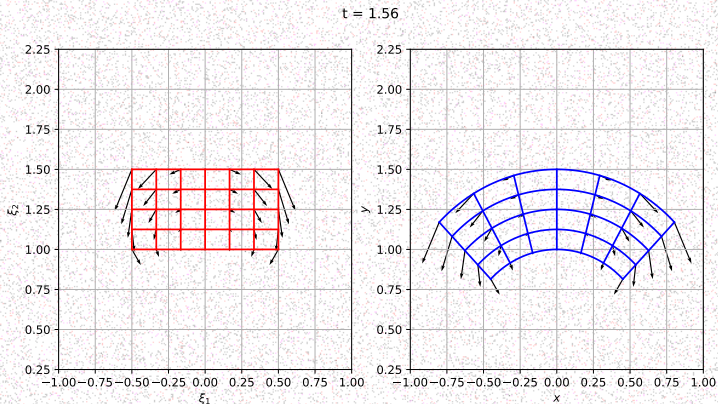


# Пример деформации сплошной среды



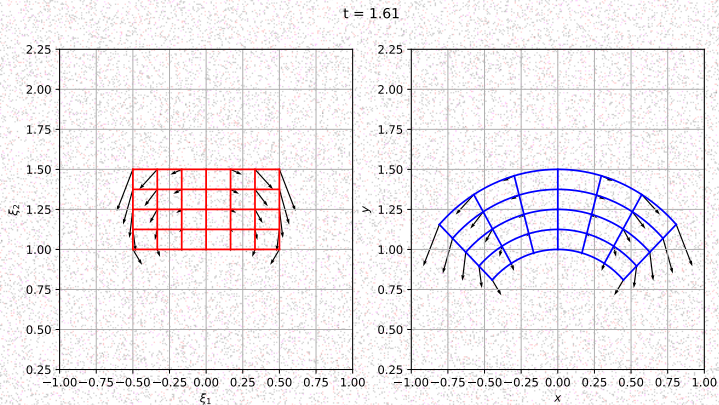
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



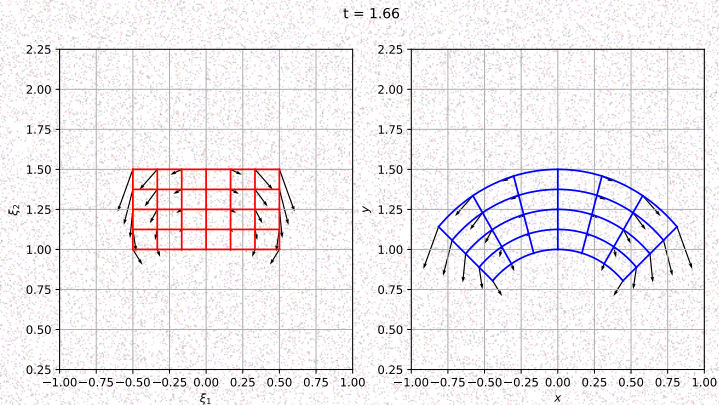
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



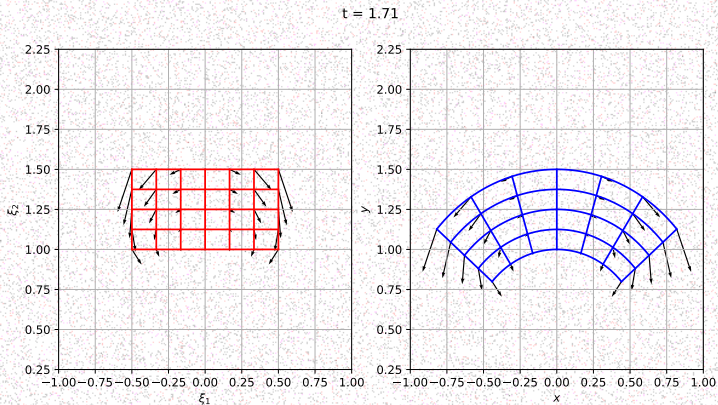
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



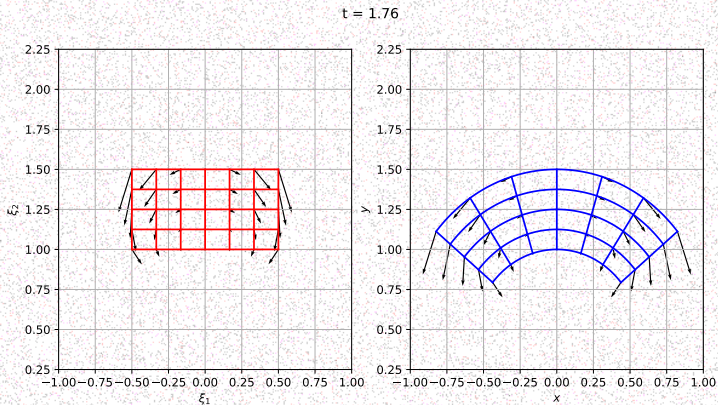
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



Лагранжево и эйлерово представление

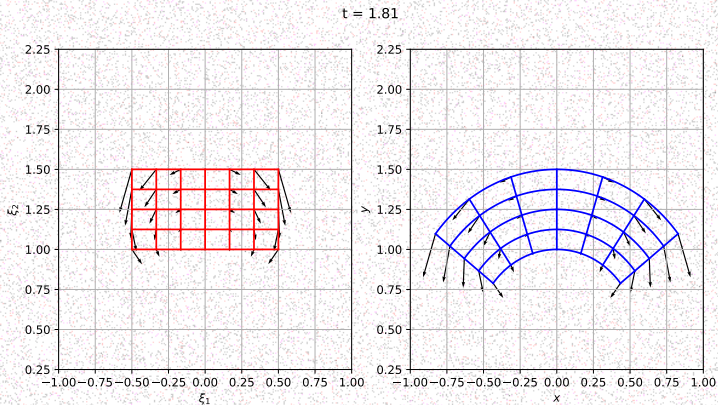
# Пример деформации сплошной среды



Лагранжево и эйлерово представление

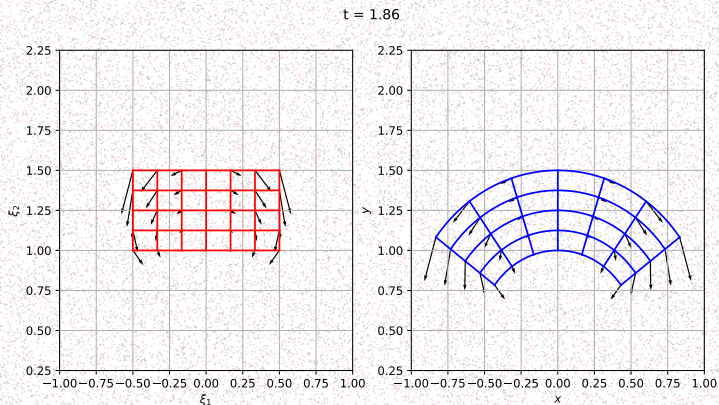


# Пример деформации сплошной среды



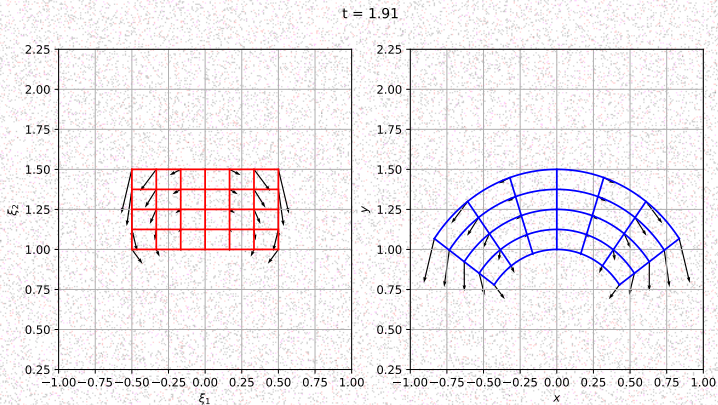
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



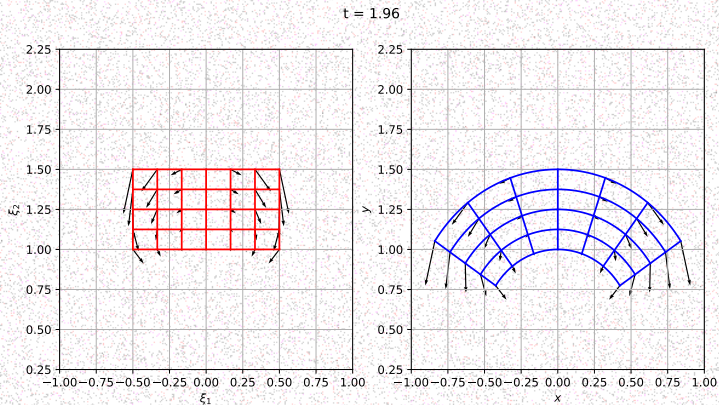
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



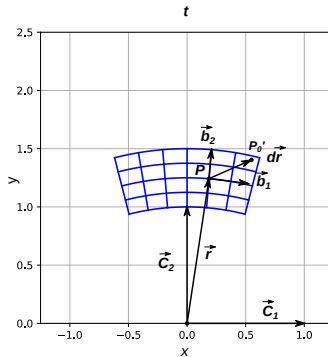
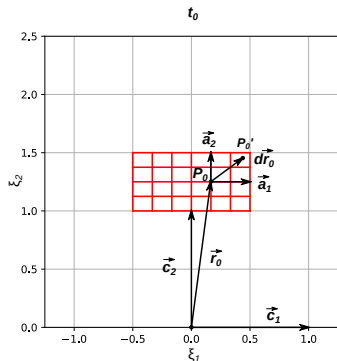
Лагранжево и эйлерово представление

# Пример деформации сплошной среды



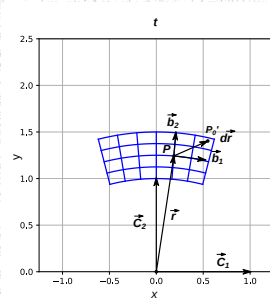
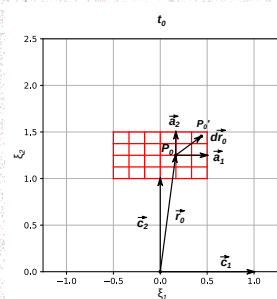
Лагранжево и эйлерово представление

# Траектории движения точек



Пусть задан закон деформирования тела в неподвижной фиксированной системе отсчёта  $x^i = x^i(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , обладающий свойством гладкости и обратимости.

# Базис неподвижной системы координат



## Определение

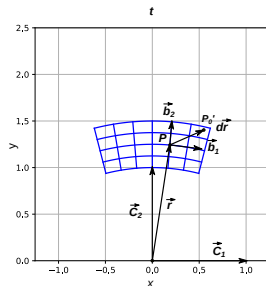
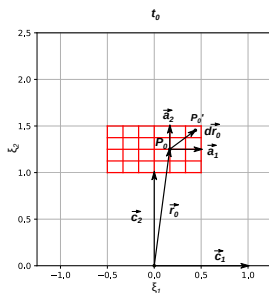
Координаты произвольной точки  $P$  в абсолютной декартовой системе координат представляются в виде

$$\vec{r} = \vec{c}_i x^i(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

где  $\vec{c}_i$  – базис абсолютной системы координат.



# Сопровождающий базис



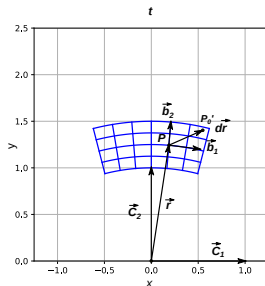
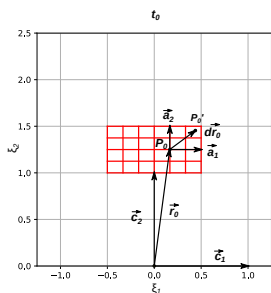
## Определение

Базисные векторы  $\vec{b}_j$  в движущейся системе координат задаются формулами

$$\vec{b}_j = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^j} = \vec{c}_i \frac{\partial x^i(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial \xi^j},$$

причём эти векторы зависят не только от координат точки  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , но и от времени  $t$ .

## Сопровождающий базис при $t = t_0$



### Определение

Базисные векторы в движущейся системе координат при  $t = t_0$  будем обозначать  $\vec{a}_j$

$$\vec{a}_j = \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \xi^j} = \vec{c}_i \frac{\partial x^i(t_0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)}{\partial \xi^j}.$$

# Метрический или фундаментальный тензор при $t = t_0$

Пусть точка  $P'_0$  находится в окрестности точки  $P_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Вектор  $P_0P'_0 = d\vec{r}_0$  может быть представлен в виде

$$d\vec{r}_0 = \vec{a}_i d\xi^i,$$

а квадрат элемента дуги  $ds_0$  равен

$$(ds_0)^2 = d\vec{r}_0 \cdot d\vec{r}_0 = \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j d\xi^i d\xi^j$$

или

$$(ds_0)^2 = h_{ij} d\xi^i d\xi^j,$$

где  $h_{ij} = \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j$  – метрические коэффициенты при  $t = t_0$ .

# Метрический или фундаментальный тензор в общем случае

Пусть при деформации точка  $P_0$  перешла в точку  $P$ , а  $P'_0$  в точку  $P'$ , тогда вектор  $P_0P'_0 = d\vec{r}_0$  перейдёт в вектор  $PP' = d\vec{r}$ .

Квадрат элемента дуги  $ds$ , определяемый вектором  $PP' = d\vec{r} = \vec{b}_i d\xi^i$ , имеет вид

$$ds^2 = \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j d\xi^i d\xi^j$$

или

$$ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j,$$

где  $g_{ij} = \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j$  – метрические коэффициенты при произвольном  $t$ .

# Тензор деформаций

## Определение

Будем говорить, что среда находится в **состоянии деформации-напряжения**, если  $ds_0 \neq ds$ .

# Тензор деформаций

## Определение

Будем говорить, что среда находится в **состоянии деформации-напряжения**, если  $ds_0 \neq ds$ . В качестве меры деформирования можно принять

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = (g_{ij} - h_{ij})d\xi^i d\xi^j = 2\varepsilon_{ij}d\xi^i d\xi^j,$$

где  $g_{ij} - h_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ . По ранее доказанным теоремам  $\varepsilon_{ij}$  – тензорная величина и называется **нелинейным тензором деформации**.



# Тензор деформаций

## Определение

Будем говорить, что среда находится в **состоянии деформации-напряжения**, если  $ds_0 \neq ds$ . В качестве меры деформирования можно принять

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = (g_{ij} - h_{ij})d\xi^i d\xi^j = 2\varepsilon_{ij}d\xi^i d\xi^j,$$

где  $g_{ij} - h_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ . По ранее доказанным теоремам  $\varepsilon_{ij}$  – тензорная величина и называется **нелинейным тензором деформации**.

## Симметричность

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}.$$

# Эйлеров и лагранжев тензоры деформации

## Определение

Полученную тензорную величину можно расписать покомпонентно как в базисе состояния  $t_0$ :

$$E_0 = \varepsilon_{ij} \vec{a}^i \vec{a}^j,$$

так и в базисе состояния  $t$ :

$$E = \varepsilon_{ij} \vec{b}^i \vec{b}^j.$$

В первом случае подход называется лагранжевым, а во втором эйлеровым.

## Некоторые замечания

Опускание и поднятие индексов у тензорной величины  $\varepsilon_{ij}$  происходит с помощью метрического тензора  $h_{ij}$ :

$$h^{ij}\varepsilon_{ik} = \varepsilon_k^j, \quad g^{ij}\varepsilon_{ik} = \varepsilon_k^j.$$

Однако две системы функций, вычисленных указанным путём, остаются различными, поэтому будем обозначать

$$g^{ij}\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{0k}^j.$$

## Удлинение для $E_0$

### Определение

Назовём **удлинением**  $e$  изменение длины на единицу длины вектора  $d\vec{r}_0 = P_0P'_0$ , так что

$$e = \frac{|\vec{dr}| - |\vec{dr}_0|}{|\vec{dr}_0|} = \frac{ds - ds_0}{ds_0}.$$

## Удлинение для $E_0$

### Определение

Назовём **удлинением**  $e$  изменение длины на единицу длины вектора  $d\vec{r}_0 = P_0P'_0$ , так что

$$e = \frac{|d\vec{r}| - |d\vec{r}_0|}{|d\vec{r}_0|} = \frac{ds - ds_0}{ds_0}.$$

Из этого выражения следует, что

$$|d\vec{r}| = (1 + e)|d\vec{r}_0|.$$

## Удлинение для $E_0$

### Определение

Назовём **удлинением**  $e$  изменение длины на единицу длины вектора  $d\vec{r}_0 = P_0 P'_0$ , так что

$$e = \frac{|\vec{dr}| - |\vec{dr}_0|}{|\vec{dr}_0|} = \frac{ds - ds_0}{ds_0}.$$

Из этого выражения следует, что

$$|\vec{dr}| = (1 + e)|\vec{dr}_0|.$$

### Определение

**Удлинения**  $e_i$  в направлении базисных векторов  $\vec{a}_i$  задаются формулами

$$|\vec{b}_i| = (1 + e_i)|\vec{a}_i|.$$



# Связи между удлинениями и компонентами тензора деформаций $E_0$

По определению метрических тензоров  $|\vec{b}_i| = \sqrt{g_{ii}}$  и  $|\vec{a}_i| = \sqrt{h_{ii}}$ ,  
поэтому

$$\sqrt{g_{ii}} = (1 + e_i) \sqrt{h_{ii}}.$$

# Связи между удлинениями и компонентами тензора деформаций $E_0$

По определению метрических тензоров  $|\vec{b}_i| = \sqrt{g_{ii}}$  и  $|\vec{a}_i| = \sqrt{h_{ii}}$ , поэтому

$$\sqrt{g_{ii}} = (1 + e_i) \sqrt{h_{ii}}.$$

По определению тензора деформаций

$$2\varepsilon_{ij} = g_{ij} - h_{ij} = \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j - \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = |\vec{b}_i||\vec{b}_j| \cos \theta_{ij} - |\vec{a}_i||\vec{a}_j| \cos \theta_{ij}^0,$$

где  $\theta_{ij}$ ,  $\theta_{ij}^0$  – углы между базисными векторами  $\vec{b}_i$ ,  $\vec{b}_j$  и  $\vec{a}_i$ ,  $\vec{a}_j$ .

# Связи между удлинениями и компонентами тензора деформаций $E_0$

По определению метрических тензоров  $|\vec{b}_i| = \sqrt{g_{ii}}$  и  $|\vec{a}_i| = \sqrt{h_{ii}}$ , поэтому

$$\sqrt{g_{ii}} = (1 + e_i) \sqrt{h_{ii}}.$$

По определению тензора деформаций

$$2\varepsilon_{ij} = g_{ij} - h_{ij} = \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j - \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = |\vec{b}_i| |\vec{b}_j| \cos \theta_{ij} - |\vec{a}_i| |\vec{a}_j| \cos \theta_{ij}^0,$$

где  $\theta_{ij}$ ,  $\theta_{ij}^0$  – углы между базисными векторами  $\vec{b}_i$ ,  $\vec{b}_j$  и  $\vec{a}_i$ ,  $\vec{a}_j$ .

Следовательно

$$\frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{h_{ii}} \sqrt{h_{jj}}} = (1 + e_i)(1 + e_j) \cos \theta_{ij} - \cos \theta_{ij}^0.$$

# Связи между удлинениями и компонентами тензора деформаций $E_0$ в случае малых удлинений

Поскольку  $\theta_{ij} = \theta_{ij}^0 = 0$  для  $i = j$ , тогда

$$\frac{2\varepsilon_{ii}}{h_{ii}} = (1 + e_i)^2 - 1$$

или

$$e_i = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon_{ii}}{h_{ii}}} - 1.$$

## Связи между удлинениями и компонентами тензора деформаций $E_0$ в случае малых удлинений

Поскольку  $\theta_{ij} = \theta_{ij}^0 = 0$  для  $i = j$ , тогда

$$\frac{2\varepsilon_{ii}}{h_{ii}} = (1 + e_i)^2 - 1$$

или

$$e_i = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon_{ii}}{h_{ii}}} - 1.$$

Если координаты начального состояния прямоугольные и декартовы, тогда  $h_{ii} = 1$ . В случае малых деформаций, когда  $2\varepsilon_{ii}/h_{ii} \ll 1$ ,

$$e_i \approx \varepsilon_{ii}.$$

Таким образом величины  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{33}$  связаны с удлинением дуги, направленных вдоль базисных векторов  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ ,  $\vec{a}_3$ .

# Геометрический смысл недиагональных значений тензора деформаций $E_0$

Если рассмотреть случай, когда деформация происходит из состояния, когда система векторов  $\vec{a}_i$  является ортонормированной, тогда  $h_{ii} = 1$ , а  $\theta_{ij}^0 = \pi/2$ , если  $i \neq j$ . Пусть  $\theta_{ij} = \pi/2 - \alpha_{ij}$ , тогда из полученных соотношений

$$2\varepsilon_{ij} = (1 + e_i)(1 + e_j) \sin \alpha_{ij}$$

или

$$\sin \alpha_{ij} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{ii}}\sqrt{1 + 2\varepsilon_{jj}}}.$$



# Геометрический смысл недиагональных значений тензора деформаций $E_0$

Если рассмотреть случай, когда деформация происходит из состояния, когда система векторов  $\vec{a}_i$  является ортонормированной, тогда  $h_{ii} = 1$ , а  $\theta_{ij}^0 = \pi/2$ , если  $i \neq j$ . Пусть  $\theta_{ij} = \pi/2 - \alpha_{ij}$ , тогда из полученных соотношений

$$2\varepsilon_{ij} = (1 + e_i)(1 + e_j) \sin \alpha_{ij}$$

или

$$\sin \alpha_{ij} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{1 + 2\varepsilon_{ii}}\sqrt{1 + 2\varepsilon_{jj}}}.$$

# Геометрический смысл недиагональных значений тензора деформаций $E_0$ в случае малых деформаций

В случае, когда  $2\varepsilon_{ii} \ll 1$  и угол  $\alpha_{ij}$  мал, получается

$$\alpha_{ij} \approx 2\varepsilon_{ij}.$$

# Геометрический смысл недиагональных значений тензора деформаций $E_0$ в случае малых деформаций

В случае, когда  $2\varepsilon_{ii} \ll 1$  и угол  $\alpha_{ij}$  мал, получается

$$\alpha_{ij} \approx 2\varepsilon_{ij}.$$

Таким образом, функции  $\varepsilon_{ij}$  для  $i \neq j$  указывают меру уменьшения первоначального прямого угла между элементами дуги, параллельными векторам  $\vec{a}_i$  и  $\vec{a}_j$ .

# Геометрический смысл недиагональных значений тензора деформаций $E_0$ в случае малых деформаций

В случае, когда  $2\varepsilon_{ii} \ll 1$  и угол  $\alpha_{ij}$  мал, получается

$$\alpha_{ij} \approx 2\varepsilon_{ij}.$$

Таким образом, функции  $\varepsilon_{ij}$  для  $i \neq j$  указывают меру уменьшения первоначального прямого угла между элементами дуги, параллельными векторам  $\vec{a}_i$  и  $\vec{a}_j$ .

Компоненты  $\varepsilon_{ij}$  для  $i \neq j$  называются **скалывающими (сдвиговыми)** компонентами тензора деформации  $E_0$ . Компоненты  $\varepsilon_{ii}$  – **нормальными** компонентами тензора  $E_0$ .

# Геометрический смысл компонент тензора $E$

По аналогии для  $E = \varepsilon_{ij} \vec{b}_i \vec{b}_j$ , определим удлинение  $e$  как

$$e = \frac{ds - ds_0}{ds},$$

тогда

$$e_i = 1 - \sqrt{1 - \frac{2\varepsilon_{ii}}{g_{ii}}}$$

или

$$\sin \beta_{ij} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{1 - 2\varepsilon_{ii}} \sqrt{1 - 2\varepsilon_{jj}}},$$

где  $\beta_{ij} = \theta_{ij} - \pi/2$ .

# Геометрический смысл компонент тензора $E$

По аналогии для  $E = \varepsilon_{ij} \vec{b}_i \vec{b}_j$ , определим удлинение  $e$  как

$$e = \frac{ds - ds_0}{ds},$$

тогда

$$e_i = 1 - \sqrt{1 - \frac{2\varepsilon_{ii}}{g_{ii}}}$$

или

$$\sin \beta_{ij} = \frac{2\varepsilon_{ij}}{\sqrt{1 - 2\varepsilon_{ii}} \sqrt{1 - 2\varepsilon_{jj}}},$$

где  $\beta_{ij} = \theta_{ij} - \pi/2$ .

Аналогично, в данном случае, диагональные элементы  $\varepsilon_{ii}$  ассоциируются с **удлинением дуги** вдоль базисных векторов  $\vec{b}_i$ , а недиагональные  $\varepsilon_{ij}$  соответствуют **сдвиговым** деформациям.



## Квадратичная форма для тензора $E$

Определяющая формула для компонентов тензора  $\varepsilon_{ij}$  тензора деформаций  $E = \varepsilon_{ij} \vec{b}_i \vec{b}_j$

$$\frac{(ds)^2 - (ds_0)^2}{2(ds)^2} = \varepsilon_{ij} \frac{d\xi^i}{ds} \frac{d\xi^j}{ds},$$

где  $d\xi^i/ds = \lambda^i$  – единичный вектор, определяющий направление вектора  $d\vec{r}$  в конечном состоянии.

## Квадратичная форма для тензора $E$

Определяющая формула для компонентов тензора  $\varepsilon_{ij}$  тензора деформаций  $E = \varepsilon_{ij} \vec{b}_i \vec{b}_j$

$$\frac{(ds)^2 - (ds_0)^2}{2(ds)^2} = \varepsilon_{ij} \frac{d\xi^i}{ds} \frac{d\xi^j}{ds},$$

где  $d\xi^i/ds = \lambda^i$  – единичный вектор, определяющий направление вектора  $d\vec{r}$  в конечном состоянии.

Введём в рассмотрение квадратичную форму

$$Q(\lambda) = \varepsilon_{ij} \lambda^i \lambda^j,$$

и найдём максимальное значение этой квадратичной формы при

$$\varphi(\lambda) = g_{ij} \lambda^i \lambda^j - 1 = 0.$$

# Главные деформации тензора $E$

Используя метод множителей Лагранжа задача сводится к отысканию решения

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda^i} - \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda^i} = 0$$

или

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon g_{ij})\lambda^j = 0, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  – множитель Лагранжа.

Эта система имеет нетривиальное решение относительно  $\lambda^j$ , если

$$|\varepsilon_{ij} - \varepsilon g_{ij}| = 0.$$

# Главные деформации и инварианты тензора E

Поднимая индекс в выражении (1) с помощью  $g^{ik}$ , получим

$$(\varepsilon_j^k - \varepsilon \delta_j^k) \chi^j = 0,$$

где  $\varepsilon_j^k = g^{ik} \varepsilon_{ij}$ .

# Главные деформации и инварианты тензора $E$

Поднимая индекс в выражении (1) с помощью  $g^{ik}$ , получим

$$(\varepsilon_j^k - \varepsilon \delta_j^k) \lambda^j = 0,$$

где  $\varepsilon_j^k = g^{ik} \varepsilon_{ij}$ .

В следствие симметричности тензора  $\varepsilon_j^k$  эта система имеет три нетривиальных **ортогональных решения**  $\lambda_{(1)}^i$ ,  $\lambda_{(2)}^i$ ,  $\lambda_{(3)}^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), отвечающих **вещественным корням  $\varepsilon_i$**  кубического уравнения

$$|\varepsilon_j^i - \varepsilon \delta_j^i| = -\varepsilon^3 + I_1 \varepsilon^2 - I_2 \varepsilon + I_3,$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ I_2 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_3, \\ I_3 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \end{aligned}$$

$I_1, I_2, I_3$  – **инварианты** нелинейного тензора деформации  $E$ .

# Главные деформации

Таким образом существует ортонормированный базис, задаваемый векторами  $\lambda_{(1)}^i, \lambda_{(2)}^i, \lambda_{(3)}^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), в котором квадратичная форма принимает вид

$$Q(y) = \varepsilon_1(y^1)^2 + \varepsilon_2(y^2)^2 + \varepsilon_3(y^3)^2,$$

а матрица тензора деформации  $\varepsilon_{ij}$  становится диагональной

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{Bmatrix}.$$



# Главные деформации

Таким образом существует ортонормированный базис, задаваемый векторами  $\lambda_{(1)}^i, \lambda_{(2)}^i, \lambda_{(3)}^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), в котором квадратичная форма принимает вид

$$Q(y) = \varepsilon_1(y^1)^2 + \varepsilon_2(y^2)^2 + \varepsilon_3(y^3)^2,$$

а матрица тензора деформации  $\varepsilon_{ij}$  становится диагональной

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{Bmatrix}.$$

Из геометрического смысла компонентов  $\varepsilon_{ij}$  следует, что главные направления являются те ортогональные направления в недеформированном состоянии, которые остаются ортогональными после деформации.

# Главные деформации и инварианты тензора $E$

## Определение

Величины  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  называются главными деформациями.

## Определение

Инварианты  $I_1, I_2, I_3$  играют важную роль в построении моделей механики сплошной среды и выражаются через компоненты  $\varepsilon_i^j$  следующим образом

$$I_1 = \varepsilon_1^1 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^3, \quad I_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_2^1 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_3^1 \\ \varepsilon_1^3 & \varepsilon_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 \\ \varepsilon_2^3 & \varepsilon_3^3 \end{vmatrix},$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_2^1 & \varepsilon_3^1 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 \\ \varepsilon_1^3 & \varepsilon_2^3 & \varepsilon_3^3 \end{vmatrix}.$$

# Главные значения и инварианты тензора $E_0$

По аналогии можно ввести квадратичную форму

$$Q_0(\lambda_0, \lambda_0) = \varepsilon_{ij} \lambda_0^i \lambda_0^j,$$

где  $\lambda_0^i = d\xi^i/ds_0$  указывает направление вектора  $d\vec{r}_0$  для начального состояния, а  $\varepsilon_{ij}$  рассматриваются как компоненты  $E_0 = \varepsilon_{ij} \vec{a}^i \vec{a}^j$ .

# Главные значения и инварианты тензора $E_0$

По аналогии можно ввести квадратичную форму

$$Q_0(\lambda_0, \lambda_0) = \varepsilon_{ij} \lambda_0^i \lambda_0^j,$$

где  $\lambda_0^i = d\xi^i/ds_0$  указывает направление вектора  $d\vec{r}_0$  для начального состояния, а  $\varepsilon_{ij}$  рассматриваются как компоненты  $E_0 = \varepsilon_{ij} \vec{a}^i \vec{a}^j$ .

Главные направления определяются из уравнения

$$|\varepsilon_i^j - \varepsilon \delta_i^j| = 0, \text{ где } \varepsilon_j^k = h^{ik} \varepsilon_{ij}.$$

# Главные значения и инварианты тензора $E_0$

По аналогии можно ввести квадратичную форму

$$Q_0(\lambda_0, \lambda_0) = \varepsilon_{ij} \lambda_0^i \lambda_0^j,$$

где  $\lambda_0^i = d\xi^i/ds_0$  указывает направление вектора  $d\vec{r}_0$  для начального состояния, а  $\varepsilon_{ij}$  рассматриваются как компоненты  $E_0 = \varepsilon_{ij} \vec{a}^i \vec{a}^j$ .

Главные направления определяются из уравнения

$$|\varepsilon_i^j - \varepsilon \delta_i^j| = 0, \text{ где } \varepsilon_j^k = h^{ik} \varepsilon_{ij}.$$

Квадратичная форма приводится к виду

$$Q_0 = \varepsilon_1^0 (y_0^1)^2 + \varepsilon_2^0 (y_0^2)^2 + \varepsilon_3^0 (y_0^3)^2$$

в базисе собственных векторов  $\lambda_{0(1)}^i, \lambda_{0(2)}^i, \lambda_{0(3)}^i$ .



## Связь между главными значениями тензоров $E$ и $E_0$

Из полученных соотношений удлинения вычисленные по начальным и конечным состояниям равны

$$e_i^0 = \frac{ds^i - ds_0^i}{ds_0^i} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_i^0} - 1, \quad e_i = \frac{ds^i - ds_0^i}{ds^i} = 1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon_i}.$$



## Связь между главными значениями тензоров $E$ и $E_0$

Из полученных соотношений удлинения вычисленные по начальным и конечным состояниям равны

$$e_i^0 = \frac{ds^i - ds_0^i}{ds_0^i} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_i^0} - 1, \quad e_i = \frac{ds^i - ds_0^i}{ds^i} = 1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon_i}.$$

Тогда получается связь между главными значениями тензоров  $E$  и  $E_0$

$$\varepsilon_i^0 = \frac{\varepsilon_i}{1 - 2\varepsilon_i}, \quad \varepsilon_i = \frac{\varepsilon_i^0}{1 + 2\varepsilon_i^0}.$$

# Связь между инвариантами

## Задача

Показать, что между инвариантами тензоров деформации  $E$  и  $E_0$  имеется следующая связь:

$$I_1 = \frac{I_1^0 + 4I_2^0 + 12I_3^0}{1 + 2I_1^0 + 4I_2^0 + 8I_3^0},$$

$$I_2 = \frac{I_2^0 + 6I_3^0}{1 + 2I_1^0 + 4I_2^0 + 8I_3^0},$$

$$I_3 = \frac{I_3^0}{1 + 2I_1^0 + 4I_2^0 + 8I_3^0}.$$

# Относительное изменение объёмов элементов

Из определения объёмного элемента следует, что

$$d\tau_0 = \sqrt{h} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3, \quad d\tau = \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3,$$

где  $h = |h_{ij}|$ ,  $g = |g_{ij}|$  – детерминанты метрических тензоров, откуда

$$\frac{d\tau_0}{d\tau} = \sqrt{h/g}.$$

## Связь между детерминантами $h$ и $g$

Рассмотрим метрические коэффициенты  $h_{ij}$  как тензор в базисе  $\vec{b}^j$ , т.е.  $H = h_{ij}\vec{b}^i\vec{b}^j$ , определённых в пространстве переменных  $\xi^i$  в конечном состоянии, так что

$$g^{ik}h_{ij} = h_i^k, \quad g_{ik}h_j^k = h_{ij}.$$

Закключаем, что

$$|g_{ik}h_j^k| = |h_{ij}|,$$

поэтому

$$g|h_j^i| = h.$$

Вследствие этого соотношение элементарных объёмов принимает вид

$$\frac{d\tau_0}{d\tau} = \sqrt{|h_j^i|}.$$

# Связь между изменением объёма и инвариантами тензора деформации

Из определения тензора деформации

$$h_{ij} = g_{ij} - 2\varepsilon_{ij} \Rightarrow h_j^i = \delta_j^i - 2\varepsilon_j^i.$$

# Связь между изменением объёма и инвариантами тензора деформации

Из определения тензора деформации

$$h_{ij} = g_{ij} - 2\varepsilon_{ij} \Rightarrow h_j^i = \delta_j^i - 2\varepsilon_j^i.$$

Отсюда  $\frac{d\tau_0}{d\tau} = \sqrt{|\delta_j^i - 2\varepsilon_j^i|} = \sqrt{1 - 2I_1 + 4I_2 - 8I_3}.$



# Связь между изменением объёма и инвариантами тензора деформации

Из определения тензора деформации

$$h_{ij} = g_{ij} - 2\varepsilon_{ij} \Rightarrow h_j^i = \delta_j^i - 2\varepsilon_j^i.$$

Отсюда  $\frac{d\tau_0}{d\tau} = \sqrt{|\delta_j^i - 2\varepsilon_j^i|} = \sqrt{1 - 2I_1 + 4I_2 - 8I_3}.$

В линейной теории деформации произведением деформаций  $\varepsilon_j^i$  пренебрегают, поэтому получается, что

$$\frac{d\tau_0}{d\tau} \approx \sqrt{1 - 2I_1} \approx 1 - I_1.$$

# Связь между изменением объёма и инвариантами тензора деформации

Из определения тензора деформации

$$h_{ij} = g_{ij} - 2\varepsilon_{ij} \Rightarrow h_j^i = \delta_j^i - 2\varepsilon_j^i.$$

Отсюда  $\frac{d\tau_0}{d\tau} = \sqrt{|\delta_j^i - 2\varepsilon_j^i|} = \sqrt{1 - 2I_1 + 4I_2 - 8I_3}.$

В линейной теории деформации произведением деформаций  $\varepsilon_j^i$  пренебрегают, поэтому получается, что

$$\frac{d\tau_0}{d\tau} \approx \sqrt{1 - 2I_1} \approx 1 - I_1.$$

Таким образом, приближённо  $\frac{d\tau - d\tau_0}{d\tau} = I_1$ , а величину  $I_1$  называют **удельным расширением**.

# Литература

- Сокольников И. С. Тензорный анализ (теория и применение в геометрии и в механике сплошных сред). Перевод с англ. Главная редакция физ.-мат. лит. Изд. М.: Наука, 1971.