Решения со слабыми разрывами уравнений газовой динамики

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики ФФ НГУ

22 апреля 2019 г.

Аннотация

Характеристики системы квазилинейных уравнений

Основная система уравнений

Будем исследовать систему квазилинейных дифференциальных уравнений от n функций вида

$$\vec{u}_t + A(\vec{u})\vec{u}_x = \vec{f}(\vec{u}), \tag{1}$$

где $\vec{u}(t,x) = \{u_1(t,x), u_2(t,x), \ldots, u_n(t,x)\}^T$,

$$A(\vec{u}) = \begin{pmatrix} a_{11}(\vec{u}) & a_{12}(\vec{u}) & \ldots & a_{1n}(\vec{u}) \\ a_{21}(\vec{u}) & a_{22}(\vec{u}) & \ldots & a_{2n}(\vec{u}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(\vec{u}) & a_{n2}(\vec{u}) & \ldots & a_{nn}(\vec{u}) \end{pmatrix},$$

$$\vec{f}(\vec{u}) = \{f_1(\vec{u}), f_2(\vec{u}), \ldots, f_n(\vec{u})\}^T.$$

Характеристики системы квазилинейных уравнений

Собственные числа и собственные векторы матрицы A^T

Пусть матрица $A^T(\vec{u})$ имеет собственное число $\lambda(\vec{u})$, которому соответствует собственный вектор $\vec{\alpha}(\vec{u})$:

$$A^T\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} \quad (\vec{\alpha} \neq 0). \tag{2}$$

Преобразования исходной системы

Умножим систему (1) скалярно на вектор $\vec{\alpha}(\vec{u})$ и преобразуем в соответствие с (2), тогда

$$\vec{u}_t \cdot \vec{\alpha} + (A\vec{u}_x) \cdot \vec{\alpha} = \vec{f} \cdot \vec{\alpha}.$$

Выражение преобразуется

$$(A\vec{u}_x) \cdot \vec{\alpha} = \vec{u}_x \cdot (A^T\vec{\alpha}) = \vec{u}_x \cdot \lambda\vec{\alpha} = (\lambda\vec{u}_x) \cdot \vec{\alpha}.$$

Характеристики системы квазилинейных уравнений

Характеристическая форма записи

Основная система, записанная в форме

$$(\vec{u}_t + \lambda\vec{u}_x) \cdot \vec{\alpha} = \vec{f} \cdot \vec{\alpha}, \tag{3}$$

называется характеристической формой λ.

Если у матрицы A^T имеется n вещественных собственных чисел и полная система из n линейно независимых собственных векторов, тогда всю систему (1) можно переписать в виде (3) и она будет называться гиперболической.

Инварианты Римана системы квазилинейных уравнений

Инварианты Римана

Пусть $F(\vec{u})$ является потенциалом для собственного вектора $\vec{\alpha}(\vec{u})$

$$\nabla_u F = \vec{\alpha},$$

тогда $F(\vec{u})$ называют инвариантом Римана.

Инварианты Римана системы квазилинейных уравнений

Рассмотрим кривую в плоскости (t, x), называемую характеристической, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(\vec{u}(t, x)), \tag{4}$$

где $\vec{u} = \vec{u}(t, x)$ – решение исходной системы уравнений (1).

Тогда полная производная от инварианта Римана $F(t, x(t))$ вдоль характеристической кривой (4) имеет вид

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = \nabla_u F \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = \alpha \cdot (\vec{u}_t + \lambda \vec{u}_x) = \vec{\alpha} \cdot \vec{f}.$$

Если у системы (1) имеется n существенно различных инвариантов Римана, тогда она может быть проинтегрирована вдоль характеристик.

Инварианты Римана для уравнений газовой динамики

Одномерная система уравнений газовой динамики

$$\begin{aligned}
\rho_t + v\rho_x + \rho v_x &= 0,\\
v_t + vv_x + \frac{p_x}{\rho} &= 0,\\
S_t + vS_x &= 0.
\end{aligned}$$

Калорическое уравнение состояния

$$p = p(\rho, S).$$

Инварианты Римана для уравнений газовой динамики

Одномерная система уравнений газовой динамики

$$
\begin{aligned}
\rho_t + v\rho_x + \rho v_x &= 0,\\
v_t + vv_x + \frac{p_x}{\rho} &= 0,\\
S_t + vS_x &= 0.
\end{aligned}
$$

Калорическое уравнение состояния

$$p = p(\rho, S).$$

Матричная форма записи

$$u_t + Au_x = 0,$$

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ S \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ c^2/\rho & v & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix}.$$

Литература