Законы сохранения в механике сплошных сред

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрофизики и газовой динамики

10 января 2021 г.

Аннотация

Траектория движения сплошной среды. Формула Эйлера. Законы сохранения параметров сплошной среды в интегральной и дифференциальной форме.

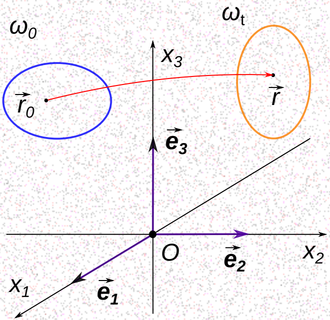


Иллюстрация перемещения сплошной среды

ω_0, ω_t – положение части сплошной среды в начальный момент времени и момент t.

$$\vec{r}_0 = \xi^1\vec{e}_1 + \xi^2\vec{e}_2 + \xi^3\vec{e}_3,$$

$$\vec{r} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3.$$

Траектории движения

Траектории движения жидких частиц задаются функцией

$$\vec{x} = \vec{x}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

где $\vec{\xi}, \vec{x}$ – лагранжевы и эйлеровы координаты частицы.

Определение траекторий по заданному полю движения

Поле скоростей

Поле скоростей частиц сплошной среды в эйлеровой системе координат задается функцией $\vec{v}(t,x_1,x_2,x_3)$. В лагранжевой системе координат скорость определяется соотношением

$$\vec{v}(t,\vec{\xi}) = \frac{\partial \vec{x}(t,\vec{\xi})}{\partial t}.$$

Задача определения траекторий движения по заданному полю скоростей

По заданному полю скоростей $\vec{v}(t,\vec{x})$ требуется найти траектории движения частиц $x^i = x^i(t,\vec{\xi})$ с лагранжевыми координатами $(\vec{\xi})$:

$$\frac{\partial x^i}{\partial t} = v^i(t,\vec{x}), \quad x^i|_{t=0} = \xi^i \quad (i = 1,2,3).$$

Матричное уравнение для нахождения матрицы Якоби

Дифференцируя уравнения для нахождения траекторий по ξ^j, получим:

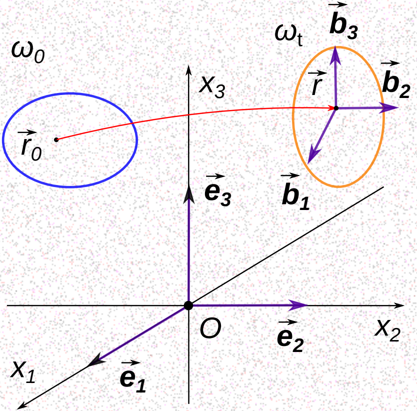
$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^j}, \qquad \left.\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right|_{t=0} = \delta^i_j.$$

Тогда матрица Якоби $y_{ij} = \dfrac{\partial x^i}{\partial \xi^j}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = AY, \quad Y|_{t=0} = E,$$

где A – матрица, составленная из производных $\dfrac{\partial v^i}{\partial x^j}$; E – единичная матрица.

Геометрический смысл определителя



Сопутствующий базис

$$\vec{b}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \xi^i} \vec{e}_j$$

Элементарный объем

$$\Delta(t, \vec{\xi}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^1} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^2} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^3} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^3} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^3} \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{b}_1 \cdot (\vec{b}_2 \times \vec{b}_3)$$

Дифференцирование определителя матрицы Якоби

Обозначим $\Delta(t, \vec{\xi}) = \det Y(t, \vec{\xi})$, тогда из формулы определителя как суммы произведений его элементов и правила дифференцирования произведения имеем:

$$\Delta'(t) = \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y'_{11} & y'_{12} & y'_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y'_{21} & y'_{22} & y'_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y'_{31} & y'_{32} & y'_{33} \end{vmatrix}.$$

Дифференцирование определителя матрицы Якоби

Из матричного уравнения $\dfrac{dY}{dt} = AY$ следует, что

$$y'_{1j} = a_{11}y_{1j} + a_{12}y_{2j} + a_{13}y_{3j},$$

поэтому

$$(y'_{11}, y'_{12}, y'_{13}) = a_{11}(y_{11}, y_{12}, y_{13}) + a_{12}(y_{21}, y_{22}, y_{23}) + a_{13}(y_{31}, y_{32}, y_{33}).$$

Отсюда, вычитая из первой строки с производными линейную комбинацию остальных строк, получаем:

$$\begin{vmatrix} y'_{11} & y'_{12} & y'_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}y_{11} & a_{11}y_{12} & a_{11}y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\Delta(t).$$

Дифференцирование определителя матрицы Якоби

По аналогии можно получить, что

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y'_{21} & y'_{22} & y'_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} = a_{22}\Delta(t), \qquad \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y'_{31} & y'_{32} & y'_{33} \end{vmatrix} = a_{33}\Delta(t).$$

Таким образом,

$$\Delta'(t) = (a_{11} + a_{22} + a_{33})\Delta(t) = \operatorname{tr} A\,\Delta(t).$$

Правило дифференцирования определителя матрицы Якоби, или формула Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right| = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right|\left(\frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^3}{\partial x^3}\right) = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right| \operatorname{div}\vec{v}$$

Закон дифференцирования интеграла, зависящего от времени

Упрощения

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_t} F(t,\vec{x})d\vec{x} = \frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_0} F(t,\vec{\xi})\Delta(t,\vec{\xi})d\vec{\xi} = \int\limits_{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t}(F(t,\vec{\xi})\Delta(t,\vec{\xi}))d\vec{\xi} =$$

$$= \int\limits_{\omega_0} \left(\frac{\partial F(t,\vec{\xi})}{\partial t}\Delta(t,\vec{\xi}) + F(t,\vec{\xi})\frac{\partial \Delta(t,\vec{\xi})}{\partial t} \right) d\vec{\xi} =$$

$$= \int\limits_{\omega_0} \left(\frac{\partial F(t,\vec{\xi})}{\partial t} + F(t,\vec{\xi})\,\mathrm{div}_\xi\,\vec{v}(t,\vec{\xi}) \right) \Delta(t,\vec{\xi})d\vec{\xi} =$$

$$= \int\limits_{\omega_t} \left(\frac{\partial F(t,\vec{x})}{\partial t} + \frac{\partial F(t,\vec{x})}{\partial x^i}v^i(t,\vec{x}) + F(t,\vec{x})\,\mathrm{div}_x\,\vec{v}(t,\vec{x}) \right) d\vec{x}$$

Закон дифференцирования интеграла, зависящего от времени

Окончательный вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_t} F(t,\vec{x})d\vec{x} = \int\limits_{\omega_t}\left(\frac{dF(t,\vec{x})}{dt} + F(t,\vec{x})\,\mathrm{div}_x\,\vec{v}(t,\vec{x})\right)d\vec{x},$$

где d/dt – оператор полного дифференцирования в правой части равенства, который задается формулой:

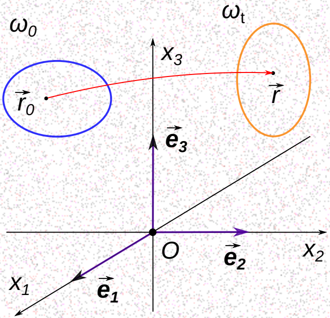
$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla).$$

Упрощения

Легко показать, что для $F = F(t,\vec{x})$, $\vec{v} = \vec{v}(t,\vec{x})$:

$$\frac{dF}{dt} + F\,\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathrm{div}(F\vec{v}).$$

Закон сохранения массы сплошной среды



Интегральный вид ЗСМ

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_t} \rho(t,\vec{x})d\vec{x} = 0,$$

где $\rho(t,\vec{x})$ – плотность жидкой частицы в точке $\vec{r}$ в момент времени t.

Дифференциальная форма

Консервативная	*Неконсервативная*
$\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0$	$\dfrac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\vec{v} = 0$

Закон сохранения импульса сплошной среды

Интегральная форма

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_t} \rho\vec{v}\,d\vec{x} = \int\limits_{s_t} \vec{\sigma}_n dS + \int\limits_{\omega_t} \rho\vec{f}\,d\vec{x},$$

где $\rho(t,\vec{x})$, $\vec{v}(t,\vec{x})$ – плотность и скорость материальной точки сплошной среды; $\vec{\sigma}_n(t,\vec{x})$ – напряжение, возникающее на обозначенной s_t поверхности объема ω_t, на площадке с внешней единичной нормалью $\vec{n}$; $\vec{f}(t,\vec{x})$ – массовая сила, действующая на сплошную среду.

Дифференциальная форма

Консервативная	*Неконсервативная*
$\dfrac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}\otimes\vec{v} - \sigma) = \rho\vec{f}$	$\rho\dfrac{d\vec{v}}{dt} - \operatorname{div}\sigma = \rho\vec{f}$

Закон сохранения момента импульса сплошной среды

Интегральная форма

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_t}\left(\rho\vec{v}\times\vec{x}+\rho\vec{k}\right)\,d\vec{x}=\int\limits_{s_t}\vec{\sigma}_n\times\vec{x}\,dS+\int\limits_{\omega_t}\rho\vec{f}\times\vec{x}\,d\vec{x}+$$

$$+\int\limits_{\omega_t}\rho\vec{h}\,d\vec{x}+\int\limits_{\omega_t}\vec{M}_n dS,$$

где $\rho(t,\vec{x})$, $\vec{v}(t,\vec{x})$ – плотность и скорость материальной точки сплошной среды; $\vec{\sigma}_n(t,\vec{x})$ – напряжение, возникающее на обозначенной s_t поверхности объема ω_t, на площадке с внешней единичной нормалью $\vec{n}$; $\vec{f}(t,\vec{x})$ – массовая сила, действующая на сплошную среду; $\vec{k}$ – плотность собственного момента количества движения; $\vec{h}$, $\vec{M}_n$ – плотность массовых и поверхностных пар.

Предположения

$$\vec{k}=\vec{h}=\vec{0},\quad \vec{M}_n=\vec{0}.$$

Следствия закона сохранения момента импульса

Дифференциальная форма

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\vec{v}\times\vec{x}\right)+\left(\rho\vec{v}\,\mathrm{div}\,\vec{v}\right)\times\vec{x}-\mathrm{div}\left(\sigma\times\vec{x}\right)=\rho\vec{f}\times\vec{x}$$

Упрощения

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\vec{v}\times\vec{x}\right)=\frac{d}{dt}(\rho\vec{v})\times\vec{x}+\rho\vec{v}\times\frac{d\vec{x}}{dt}=\frac{d(\rho\vec{v})}{dt}\times\vec{x}$$

$$\mathrm{div}\left(\sigma\times\vec{x}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{\sigma}_i\times\vec{x})=\frac{\partial\vec{\sigma}_i}{\partial x_i}\times\vec{x}+\vec{\sigma}_i\times\frac{\partial\vec{x}}{\partial x_i}=\mathrm{div}\,\sigma\times\vec{x}+\vec{\sigma}_i\times\vec{e}_i$$

Упрощение закона сохранения момента импульса

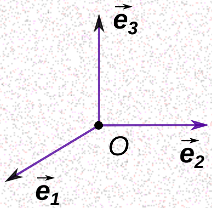
Умножая векторно закон сохранения импульса на $\vec{x}$ и вычитая из дифференциальной формы с учетом проделанных операций, имеем:

$$\vec{\sigma}_1\times\vec{e}_1+\vec{\sigma}_2\times\vec{e}_2+\vec{\sigma}_3\times\vec{e}_3=\vec{0}.$$

Следствия закона сохранения момента импульса

Упростим равенство:

$$\vec{\sigma}_1 \times \vec{e}_1 + \vec{\sigma}_2 \times \vec{e}_2 + \vec{\sigma}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}.$$



$$
\begin{array}{rcl}
\sigma_{1j}\vec{e}_j \times \vec{e}_1 & = & -\sigma_{12}\vec{e}_3 + \sigma_{13}\vec{e}_2 \\
\sigma_{2j}\vec{e}_j \times \vec{e}_2 & = & \sigma_{21}\vec{e}_3 - \sigma_{23}\vec{e}_1 \\
+\ \sigma_{3j}\vec{e}_j \times \vec{e}_3 & = & -\sigma_{31}\vec{e}_2 + \sigma_{32}\vec{e}_1 \\
\hline
\vec{\sigma}_i \times \vec{e}_i & = & (\sigma_{32} - \sigma_{23})\vec{e}_1 + \\
 & & +(\sigma_{13} - \sigma_{31})\vec{e}_2 + \\
 & & +(\sigma_{21} - \sigma_{12})\vec{e}_3.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 & = & \vec{e}_3, \\
\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 & = & \vec{e}_1, \\
\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 & = & \vec{e}_2.
\end{array}
$$

Симметричность тензора напряжений

При отсутствии собственного момента количества движения среды и массовых и поверхностных пар имеет место симметричность тензора напряжений:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

Закон сохранения энергии сплошной среды

Интегральная форма

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_t}\rho\left(\varepsilon+\frac{\vec{v}^2}{2}\right)\,d\vec{x}=\int\limits_{s_t}(\vec{\sigma}_n\cdot\vec{v})\,dS-\int\limits_{s_t}(\vec{q}\cdot\vec{n})\,dS+\int\limits_{\omega_t}\rho\vec{f}\cdot\vec{v}\,d\vec{x},$$

где $\varepsilon(t,\vec{x})$ – внутренняя энергия единицы массы частицы сплошной среды; $\vec{q}(t,\vec{x})$ – закон перетока тепла в сплошной среде. Пренебрегаем работой массовых и поверхностных пар сил и массовым притоком тепла.

Дифференциальная форма

Консервативная

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{\vec{v}^2}{2}\right)\right]+\operatorname{div}\left[\rho\left(\varepsilon+\frac{\vec{v}^2}{2}\right)\vec{v}-\sigma\cdot\vec{v}+\vec{q}\right]=\rho\vec{f}\cdot\vec{v}$$

Закон динамики кинетической энергии

Умножив закон сохранения массы в недивергентной форме на $\dfrac{\vec{v}^2}{2}$, а уравнение закона сохранения импульса – скалярно на вектор $\vec{v}$, получим:

$$\frac{\vec{v}^2}{2}\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho\vec{v}^2}{2}\operatorname{div}\vec{v} \quad \text{и} \quad \rho\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = \operatorname{div}\sigma\cdot\vec{v} + \rho\vec{f}\cdot\vec{v}.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\frac{\rho\vec{v}^2}{2} = \frac{d}{dt}\frac{\rho\vec{v}\cdot\vec{v}}{2} = \rho\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}^2}{2}\frac{d\rho}{dt} = \operatorname{div}\sigma\cdot\vec{v} + \rho\vec{f}\cdot\vec{v} - \frac{\rho\vec{v}^2}{2}\operatorname{div}\vec{v},$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\rho\vec{v}^2}{2}\right) + \frac{\rho\vec{v}^2}{2}\operatorname{div}\vec{v} - \operatorname{div}\sigma\cdot\vec{v} = \rho\vec{f}\cdot\vec{v}.$$

Работа поверхностных сил

Рассмотрим слагаемое, связанное с работой поверхностных сил:

$$\operatorname{div}(\sigma \cdot \vec{v}) = \operatorname{div} \sigma \cdot \vec{v} + \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Используя разложение тензора на симметричную и несимметричную составляющие

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\right) = e_{jk} + \omega_{jk},$$

получим:

$$\operatorname{div}(\sigma \cdot \vec{v}) = \operatorname{div} \sigma \cdot \vec{v} + \sigma_{ij} e_{ij},$$

где e_{ij}, ω_{ij} – компоненты тензоров скоростей деформаций и вихря. Слагаемое $\sigma_{ij}\omega_{ij}$ равно 0, т.к. это свертка симметричного и антисимметричного тензоров.

Неконсервативная форма закона сохранения энергии

Вычитая из уравнения закона сохранения уравнение соотношения динамики кинетической энергии, полученное соотношение из предыдущего слайда и закон сохранения массы, умноженный на ε, получим:

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt} = \sigma_{ij}e_{ij} - \operatorname{div}\vec{q}.$$

Литература

1. *Годунов С. К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами: Учебное пособие. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1994. – Т.1.: Краевые задачи.
2. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
3. *Эглит М. Э.* Лекции по основам механики сплошных сред. Изд. 2-е, испр. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010.