Решения со слабыми разрывами уравнений газовой динамики

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики ФФ НГУ

23 апреля 2019 г.

Аннотация

Характеристики системы квазилинейных уравнений

Основная система уравнений

Будем исследовать систему квазилинейных дифференциальных уравнений от n функций вида

$$\vec{u}_t + A(\vec{u})\vec{u}_x = \vec{f}(\vec{u}), \tag{1}$$

где $\vec{u}(t,x) = \{u_1(t,x), u_2(t,x), \ldots, u_n(t,x)\}^T$,

$$A(\vec{u}) = \begin{pmatrix} a_{11}(\vec{u}) & a_{12}(\vec{u}) & \ldots & a_{1n}(\vec{u}) \\ a_{21}(\vec{u}) & a_{22}(\vec{u}) & \ldots & a_{2n}(\vec{u}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(\vec{u}) & a_{n2}(\vec{u}) & \ldots & a_{nn}(\vec{u}) \end{pmatrix},$$

$$\vec{f}(\vec{u}) = \{f_1(\vec{u}), f_2(\vec{u}), \ldots, f_n(\vec{u})\}^T.$$

Характеристики системы квазилинейных уравнений

Собственные числа и собственные векторы матрицы A^T

Пусть матрица $A^T(\vec{u})$ имеет собственное число $\lambda(\vec{u})$, которому соответствует собственный вектор $\vec{\alpha}(\vec{u})$:

$$A^T\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} \quad (\vec{\alpha} \neq 0). \tag{2}$$

Преобразования исходной системы

Умножим систему (1) скалярно на вектор $\vec{\alpha}(\vec{u})$ и преобразуем в соответствие с (2), тогда

$$\vec{u}_t \cdot \vec{\alpha} + (A\vec{u}_x) \cdot \vec{\alpha} = \vec{f} \cdot \vec{\alpha}.$$

Выражение преобразуется

$$(A\vec{u}_x) \cdot \vec{\alpha} = \vec{u}_x \cdot (A^T\vec{\alpha}) = \vec{u}_x \cdot \lambda\vec{\alpha} = (\lambda\vec{u}_x) \cdot \vec{\alpha}.$$

Характеристики системы квазилинейных уравнений

Характеристическая форма записи

Основная система, записанная в форме

$$(\vec{u}_t + \lambda \vec{u}_x) \cdot \vec{\alpha} = \vec{f} \cdot \vec{\alpha}, \tag{3}$$

называется характеристической формой λ.

Если у матрицы A^T имеется n вещественных собственных чисел и полная система из n линейно независимых собственных векторов, тогда всю систему (1) можно переписать в виде (3) и она будет называться гиперболической.

Инварианты Римана системы квазилинейных уравнений

Инварианты Римана

Пусть $F(\vec{u})$ является потенциалом для собственного вектора $\vec{\alpha}(\vec{u})$

$$\nabla_u F = \vec{\alpha},$$

тогда $F(\vec{u})$ называют **инвариантом Римана**.

Инварианты Римана системы квазилинейных уравнений

Рассмотрим кривую в плоскости (t, x), называемую характеристической, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(\vec{u}(t, x)), \tag{4}$$

где $\vec{u} = \vec{u}(t, x)$ – решение исходной системы уравнений (1).

Тогда полная производная от инварианта Римана $F(t, x(t))$ вдоль характеристической кривой (4) имеет вид

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \lambda \frac{\partial F}{\partial x} = \nabla_u F \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = \alpha \cdot (\vec{u}_t + \lambda \vec{u}_x) = \vec{\alpha} \cdot \vec{f}.$$

Если у системы (1) имеется n существенно различных инвариантов Римана, тогда она может быть проинтегрирована вдоль характеристик.

Характеристический вид уравнений газовой динамики

Одномерная система уравнений газовой динамики

$$
\begin{aligned}
\rho_t + v\rho_x + \rho v_x &= 0, \\
v_t + v v_x + \frac{p_x}{\rho} &= 0, \\
S_t + v S_x &= 0.
\end{aligned}
$$

Калорическое уравнение состояния

$$p = p(\rho, S).$$

Характеристический вид уравнений газовой динамики

Одномерная система уравнений газовой динамики

$$
\begin{aligned}
\rho_t + v\rho_x + \rho v_x &= 0,\\
v_t + v v_x + \frac{p_x}{\rho} &= 0,\\
S_t + vS_x &= 0.
\end{aligned}
$$

Калорическое уравнение состояния

$$p = p(\rho, S).$$

Матричная форма записи

$$u_t + Au_x = 0,$$

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ S \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ c^2/\rho & v & p_S/\rho \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix}, \quad c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho,S).$$

Характеристический вид уравнений газовой динамики

Характеристическое уравнение

$$\chi(\lambda) = (v - \lambda)((v - \lambda)^2 - c^2) = 0 \iff \lambda_{1,2} = v \pm c, \quad \lambda_3 = v.$$

Собственные векторы

$$\lambda_1 = v - c \Rightarrow \alpha_3 = \left(-\frac{c}{\rho}, 1, -\frac{1}{\rho c} p_S\right).$$

$$\lambda_2 = v + c \Rightarrow \alpha_2 = \left(\frac{c}{\rho}, 1, \frac{1}{\rho c} p_S\right),$$

$$\lambda_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = (0, 0, 1),$$

Характеристический вид уравнений газовой динамики

Запись через частные производные

$$S_t + vS_x = 0,$$

$$v_t + (v-c)v_x - \frac{c}{\rho}\left[\rho_t + (v-c)\rho_x\right] - \frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial S}\left[S_t + (v-c)S_x\right] = 0,$$

$$v_t + (v+c)v_x + \frac{c}{\rho}\left[\rho_t + (v+c)\rho_x\right] + \frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial S}\left[S_t + (v+c)S_x\right] = 0,$$

Запись в дифференциалах

$$dx = (v-c)dt, \quad dv - \frac{c}{\rho}d\rho - \frac{\partial p}{\partial S}\frac{1}{\rho c}dS = 0,$$

$$dx = v dt, \quad dS = 0,$$

$$dx = (v+c)dt, \quad dv + \frac{c}{\rho}d\rho + \frac{\partial p}{\partial S}\frac{1}{\rho c}dS = 0.$$

Инварианты Римана для изоэнтропических течений

Условия

Пусть $S(t,x) = S_0$ в всей области течения, тогда

$$p = p(\rho, S_0) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial S} = 0, \quad c(\rho) = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}.$$

Инварианты Римана

Найдём $s(\rho,v)$ и $r(\rho,v)$ такие, что $\nabla_{(\rho,v)} s = \alpha_1$, $\nabla_{(\rho,v)} r = \alpha_2$.

$$\frac{\partial s}{\partial \rho} = -\frac{c(\rho)}{\rho}, \quad \frac{\partial s}{\partial v} = 1 \Rightarrow s = v - \int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho.$$

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = \frac{c(\rho)}{\rho}, \quad \frac{\partial r}{\partial v} = 1 \Rightarrow r = v + \int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho.$$

Инварианты Римана для изоэнтропических течений

Условия

Пусть $S(t,x) = S_0$ в всей области течения, тогда

$$p = p(\rho, S_0) \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial S} = 0, \quad c(\rho) = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S}.$$

Инварианты Римана

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (v - c)\frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + (v + c)\frac{\partial r}{\partial x} = 0.$$

Полученные $s(\rho,v)$ и $r(\rho,v)$ называются левым и правым инвариантом Римана соответственно.

Инварианты Римана для политропного газа

Уравнение состояния

$$p = a(S)\rho^{\gamma}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_V} > 1,$$

$$c^2 = a(S)\gamma\rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma p}{\rho}.$$

Инварианты Римана

$$s = v - \int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho = v - \frac{2}{\gamma - 1} c, \quad r = v + \int \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho = v + \frac{2}{\gamma - 1} c.$$

$$\Downarrow$$

$$v = \frac{r+s}{2}, \quad c = \frac{\gamma - 1}{4}(r - s).$$

Система дифференциальных уравнений изоэнтропического течения политропного газа

Общий случай

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\alpha s + \beta r)\frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + (\alpha r + \beta s)\frac{\partial s}{\partial x} = 0,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4} > \frac{1}{2} > 0, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{\gamma - 1}{4}.$$

Система дифференциальных уравнений изоэнтропического течения политропного газа

Общий случай

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\alpha s + \beta r)\frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + (\alpha r + \beta s)\frac{\partial s}{\partial x} = 0,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4} > \frac{1}{2} > 0, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{\gamma - 1}{4}.$$

Газ Чаплыгина $\gamma = 1$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + r\frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + s\frac{\partial s}{\partial x} = 0.$$

Система дифференциальных уравнений изоэнтропического течения политропного газа

Общий случай

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\alpha s + \beta r)\frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + (\alpha r + \beta s)\frac{\partial s}{\partial x} = 0,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4} > \frac{1}{2} > 0, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{\gamma - 1}{4}.$$

Газ Чаплыгина $\gamma = 1$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + r\frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + s\frac{\partial s}{\partial x} = 0.$$

Случай $\gamma = 3$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + s\frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + r\frac{\partial s}{\partial x} = 0.$$

Задача Коши для изоэнтропического течения политропного газа

Общий случай

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\alpha s + \beta r)\frac{\partial s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t} + (\alpha r + \beta s)\frac{\partial s}{\partial x} = 0,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4}, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{\gamma - 1}{4}, \quad \gamma \neq 1.$$

Начальные условия при $t = 0$:

$$s(x,0) = s_0(x), \quad r(x,0) = r_0(x).$$

В этом случае, из общей теории, следует существование решения в некоторой полосе $0 \leq t < t_0$; величина t_0 есть момент времени, в который производные решения становятся неограниченными.

Бегущие волны (волны Римана)

Определение

Если в какой-то области изоэнтропического течения один из инвариантов Римана остаётся постоянным, то такое течение называют волной Римана или бегущей волной.

Характеристики в области бегущей волны

Уравнения бегущей волны

Пусть в некоторой области $r = r_0 = const$, тогда течение будет описываться уравнением

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\alpha s + \beta r_0)\frac{\partial s}{\partial x} = 0,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4}, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{\gamma - 1}{4}, \quad \gamma \neq 1.$$

Характеристики в области бегущей волны

Уравнения бегущей волны

Пусть в некоторой области $r = r_0 = const$, тогда течение будет описываться уравнением

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\alpha s + \beta r_0)\frac{\partial s}{\partial x} = 0,$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\gamma - 1}{4}, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{\gamma - 1}{4}, \quad \gamma \neq 1.$$

Уравнения характеристик

Вдоль линии

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \alpha s(x,t) + \beta r_0$$

сохраняется инвариант $s(x,t)$, это означает, что характеристики будут прямыми линиями.

Волны сжатия и разрежения в случае бегущей r-волны

Цепочка алгебраических следствий

$$\frac{\partial s}{\partial x} > 0 \quad \text{и} \quad \begin{aligned} v &= \frac{1}{2}(r_0 + s) && \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x} > 0, \\ c &= \frac{\gamma - 1}{4}(r_0 - s) && \Rightarrow \quad \frac{\partial c}{\partial x} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} < 0. \end{aligned}$$

Волны сжатия и разрежения в случае бегущей r-волны

Цепочка алгебраических следствий

$$
\frac{\partial s}{\partial x} > 0 \quad \text{и} \quad
\begin{array}{llll}
v = \dfrac{1}{2}(r_0 + s) & \Rightarrow & \dfrac{\partial v}{\partial x} > 0, & \\
c = \dfrac{\gamma - 1}{4}(r_0 - s) & \Rightarrow & \dfrac{\partial c}{\partial x} < 0 & \Rightarrow \quad \dfrac{\partial \rho}{\partial x} < 0.
\end{array}
$$

Условия существования волн сжатия и разрежения

Таким образом, в области, где инвариант Римана $s(t, x)$ увеличивается, там происходит разгон течения с одновременным его *расширением*. Такое течение будет называться волной разрежения.

Волны сжатия и разрежения в случае бегущей r-волны

Цепочка алгебраических следствий

$$\frac{\partial s}{\partial x} > 0 \quad \text{и} \quad \begin{array}{lcll} v = \dfrac{1}{2}(r_0 + s) & \Rightarrow & \dfrac{\partial v}{\partial x} > 0, & \\ c = \dfrac{\gamma - 1}{4}(r_0 - s) & \Rightarrow & \dfrac{\partial c}{\partial x} < 0 & \Rightarrow \quad \dfrac{\partial \rho}{\partial x} < 0. \end{array}$$

Условия существования волн сжатия и разрежения

Таким образом, в области, где инвариант Римана $s(t, x)$ увеличивается, там происходит разгон течения с одновременным его *расширением*. Такое течение будет называться волной разрежения.

В случае *уменьшения* инварианта $s(t, x)$, наоборот, скорость $v(t, x)$ будет *уменьшаться*, а плотность $\rho(t, x)$ *увеличиваться*. Такая бегущая волна будет называться волной сжатия.

Волны сжатия и разрежения в случае бегущей s-волны

Цепочка алгебраических следствий

$$\frac{\partial r}{\partial x} > 0 \quad \text{и} \quad \begin{aligned} v &= \frac{1}{2}(r + s_0) && \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x} > 0, \\ c &= \frac{\gamma - 1}{4}(r - s_0) && \Rightarrow \quad \frac{\partial c}{\partial x} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} > 0. \end{aligned}$$

Волны сжатия и разрежения в случае бегущей s-волны

Цепочка алгебраических следствий

$$\frac{\partial r}{\partial x} > 0 \quad \text{и} \quad \begin{aligned} v &= \frac{1}{2}(r + s_0) && \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x} > 0, \\ c &= \frac{\gamma - 1}{4}(r - s_0) && \Rightarrow \quad \frac{\partial c}{\partial x} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} > 0. \end{aligned}$$

Условия существования волн сжатия и разрежения

Таким образом, в области, где инвариант Римана $r(t, x)$ *увеличивается* будет реализовываться волна сжатия.

Волны сжатия и разрежения в случае бегущей s-волны

Цепочка алгебраических следствий

$$\frac{\partial r}{\partial x} > 0 \quad \text{и} \qquad \begin{array}{llll} v = \dfrac{1}{2}(r + s_0) & \Rightarrow \quad \dfrac{\partial v}{\partial x} > 0, & & \\ c = \dfrac{\gamma - 1}{4}(r - s_0) & \Rightarrow \quad \dfrac{\partial c}{\partial x} > 0 & \Rightarrow & \dfrac{\partial \rho}{\partial x} > 0. \end{array}$$

Условия существования волн сжатия и разрежения

Таким образом, в области, где инвариант Римана $r(t, x)$ *увеличивается* будет реализовываться волна сжатия.

И наоборот, в случае *уменьшения* инварианта $s(t, x)$ будет реализовываться волна разрежения.

Центрированные волны

Определение
Волна Римана ($r = r_0$) называется центрированной, если s-характеристики образуют пучок прямых, выходящих из одной точки (t_0, x_0). Так как, s постоянен вдоль любой характеристики, то

$$s = s\left(\frac{x - x_0}{t - t_0}\right), \quad r = r_0.$$

Определение
Волна Римана ($s = s_0$) называется центрированной, если r-характеристики образуют пучок прямых, выходящих из одной точки (t_0, x_0). Так как, r постоянен вдоль любой характеристики, то

$$r = r\left(\frac{x - x_0}{t - t_0}\right), \quad s = s_0.$$

Литература