

# Течения вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса

*Верещагин Антон Сергеевич*

д-р. физ.-мат. наук, доцент

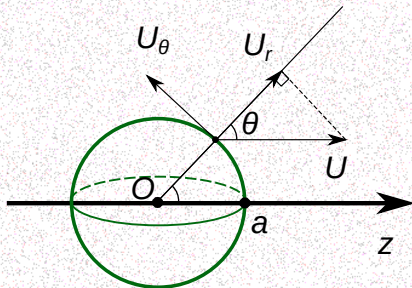
Кафедра аэрофизики и газовой динамики



8 сентября 2024 г.

Задача обтекания сферы вязкой жидкостью. Модель Стокса. Решение задачи обтекания сферы в рамках модели Стокса. Сравнение со случаем обтекания идеальной жидкости. Сила Стокса. Применимость теории Стокса. Формулы Озеена, Озеена – Гольдштейна, Буссинеска.

# Обтекание сферы вязкой жидкостью



## Постановка задачи (*G.G Stokes, 1851*)

Определить силу, действующую на сферу радиуса  $a$ , движущуюся со скоростью  $U$  в потоке вязкой жидкости, плотности  $\rho$  и динамической вязкости  $\mu$ , при малых числах Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{2aU\rho}{\mu} \ll 1.$$

# Математическая постановка задачи

Задача обтекания движущейся сферы со скоростью  $U$  эквивалентна задаче обтекания покоящейся сферы в начале координат с заданным значением скорости потока на бесконечности. Стационарное течение жидкости около сферы описывается уравнениями Навье – Стокса:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$(\nabla \cdot \vec{v})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta \vec{v}$$

с граничным условием на сфере ( $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ),

$$\vec{v}|_{r=a} = 0$$

и на бесконечности при  $r \rightarrow \infty$

$$v_x \rightarrow 0, \quad v_y \rightarrow 0, \quad v_z \rightarrow U.$$

Оценка слагаемых в уравнениях Навье – Стокса

$$\frac{\rho |(\nabla \cdot \vec{v}) \vec{v}|}{\mu |\Delta \vec{v}|} \sim \frac{\rho U^2}{2a} : \frac{\mu U}{(2a)^2} = \text{Re} \ll 1$$



# Уравнения Стокса

## Оценка слагаемых в уравнениях Навье – Стокса

$$\frac{\rho |(\nabla \cdot \vec{v}) \vec{v}|}{\mu |\Delta \vec{v}|} \sim \frac{\rho U^2}{2a} : \frac{\mu U}{(2a)^2} = \text{Re} \ll 1$$

## Модель Стокса для описания ползущих течений

Отбрасывая **нелинейные инерционные члены** в уравнении импульса из модели Навье – Стокса, получим уравнения:

$$\text{div } \vec{v} = 0, \quad \nabla p = \mu \Delta \vec{v},$$

которые будем решать в сферической системе координат.

Данная модель является **линейной** относительно функций  $p$  и  $\vec{v}$  вида:

$$v_r = v_r(r, \theta), \quad v_\theta = v_\theta(r, \theta), \quad v_\lambda = 0, \quad p = p(r, \theta).$$

# Задача обтекания сферы в постановке Стокса

## Основные уравнения

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2} v_\theta \right),$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right),$$
$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} = 0.$$

## Граничные условия

$$v_r(a, \theta) = 0, \quad v_\theta(a, \theta) = 0.$$

$$v_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} U \cos \theta, \quad v_\theta \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -U \sin \theta.$$

## Вид искомых функций

$$v_r(r, \theta) = f(r) \cos \theta, \quad v_\theta(r, \theta) = -g(r) \sin \theta, \quad p(r, \theta) = \mu h(r) \cos \theta.$$

## Упрощение исходной системы

$$h' = f'' + \frac{2}{r}f' - \frac{4(f-g)}{r^2},$$

$$\frac{h}{r} = g'' + \frac{2}{r}g' + \frac{2(f-g)}{r^2},$$

$$f' + \frac{2(f-g)}{r} = 0.$$

## Начальные условия

$$f(a) = 0, \quad g(a) = 0, \quad f(\infty) = U, \quad g(\infty) = U.$$



## Метод исключения переменных

$$\begin{cases} g = f' r / 2 + f, \\ h = f''' r^2 / 2 + 3r f'' + 2f', \\ r^3 f^{(4)} + 8r^2 f^{(3)} + 8r f'' - 8f' = 0. \end{cases}$$

## Метод исключения переменных

$$\begin{cases} g = f'r/2 + f, \\ h = f'''r^2/2 + 3rf'' + 2f', \\ r^3f^{(4)} + 8r^2f^{(3)} + 8rf'' - 8f' = 0. \end{cases}$$

## Решение для уравнения типа Эйлера

Пусть  $f = r^k$ , тогда

$$k(k-1)(k-2)(k-3) + 8k(k-1)(k-2) + 8k(k-1) - 8k = 0.$$

Решение:

$$k = 0, \quad k = 2, \quad k = -1, \quad k = -3.$$

Общий вид  $f, g, h$

$$f = \frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + C + Dr^2,$$

$$g = -\frac{A}{2r^3} + \frac{B}{2r} + C + 2Dr^2, \quad h = \frac{B}{r^2} + 10Dr.$$

Уточнение констант из граничных условий

$$D = 0, \quad C = U, \quad B = -\frac{3}{2}Ua, \quad A = \frac{1}{2}Ua^3.$$

## Скорость и давление

$$\begin{aligned}v_r(r,\theta) &= U \cos \theta \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{a}{r} + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} \right], \\v_\theta(r,\theta) &= -U \sin \theta \left[ 1 - \frac{3}{4} \frac{a}{r} - \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^3} \right], \\p(r,\theta) &= -\frac{3}{2} \mu \frac{Ua}{r^2} \cos \theta.\end{aligned}$$

Коэффициент давления

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = -\frac{3\mu}{\rho U a} \frac{\cos \theta}{(r/a)^2} = -\frac{6}{\text{Re}} \frac{\cos \theta}{(r/a)^2}$$



## Коэффициент давления

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = -\frac{3\mu}{\rho U a} \frac{\cos \theta}{(r/a)^2} = -\frac{6}{\text{Re}} \frac{\cos \theta}{(r/a)^2}$$

- (1) Коэффициент давления является функцией числа Рейнольдса  $\text{Re}$  и угла  $\theta$ .

## Коэффициент давления

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = -\frac{3\mu}{\rho U a} \frac{\cos \theta}{(r/a)^2} = -\frac{6}{\text{Re}} \frac{\cos \theta}{(r/a)^2}$$

- (1) Коэффициент давления является функцией числа Рейнольдса  $\text{Re}$  и угла  $\theta$ .
- (2) Распределение давления не симметрично относительно миделевой плоскости так, что главный вектор сил давления отличен от 0 (парадокс Даламбера не имеет места).

## Коэффициент давления

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = -\frac{3\mu}{\rho U a} \frac{\cos \theta}{(r/a)^2} = -\frac{6}{\text{Re}} \frac{\cos \theta}{(r/a)^2}$$

- (1) Коэффициент давления является функцией числа Рейнольдса  $\text{Re}$  и угла  $\theta$ .
- (2) Распределение давления не симметрично относительно миделевой плоскости так, что главный вектор сил давления отличается от 0 (парадокс Даламбера не имеет места).
- (3) Коэффициент давления в критических точках не равен единице; при  $\theta = \pi/2$  давление равно давлению в невозмущенном потоке; максимальное разрежение достигается в задней критической точке.

# Сила, действующая на тело со стороны жидкости

## Компоненты тензора напряжений в сферической системе координат

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \sigma_{r\theta} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right), \quad \sigma_{\theta\lambda} = \mu \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} - \frac{v_\lambda \operatorname{ctg} \theta}{r} \right), \\ \sigma_{\lambda\lambda} &= -p + 2\mu \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} \right), \\ \sigma_{\lambda r} &= \mu \left( \frac{\partial v_\lambda}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \lambda} - \frac{v_\lambda}{r} \right).\end{aligned}$$

## Сила

$$\vec{F} = \int_S \vec{n} \cdot \sigma dS,$$

где  $S$  – поверхность тела;  $\vec{n}$  – вектор внешней единичной нормали, направленный в жидкость.

## Компоненты тензора напряжений на поверхности сферы

$$\sigma_{rr}|_{r=a} = \left( -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)_{r=a} = \frac{3}{2}\mu \frac{U}{a} \cos \theta,$$

$$\sigma_{\theta r}|_{r=a} = \sigma_{r\theta}|_{r=a} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)_{r=a} = -\frac{3\mu U}{2a} \sin \theta.$$



## Компоненты тензора напряжений на поверхности сферы

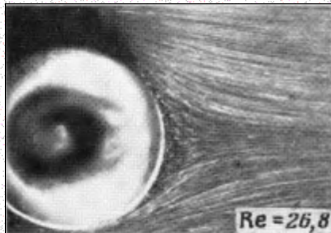
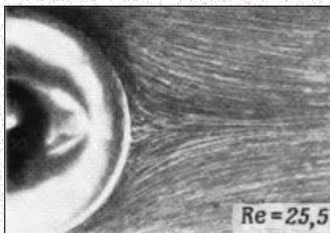
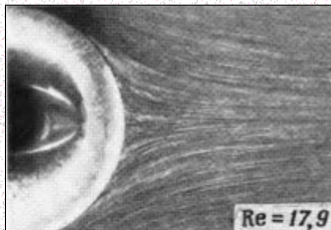
$$\sigma_{rr}|_{r=a} = \left( -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)_{r=a} = \frac{3}{2} \mu \frac{U}{a} \cos \theta,$$

$$\sigma_{\theta r}|_{r=a} = \sigma_{r\theta}|_{r=a} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right)_{r=a} = -\frac{3\mu U}{2a} \sin \theta.$$

## Сила, действующая на сферу

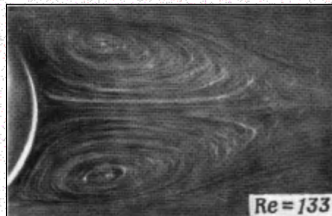
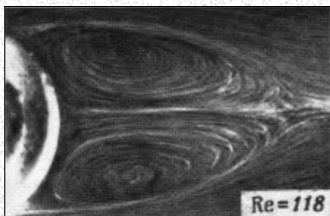
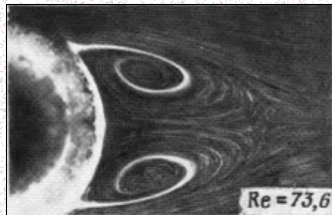
$$\begin{aligned} W &= \int_S (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) dS = \int_0^\pi (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) 2\pi a^2 \sin \theta d\theta = \\ &= 3\pi \mu U a \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 6\pi \mu U a. \end{aligned}$$

# Границы применимости формулы Стокса



Линии тока в осевой плоскости установившегося течения около сферы радиуса  $a$  (Танеда, 1956б)

# Границы применимости формулы Стокса



Линии тока в осевой плоскости установившегося течения около сферы радиуса  $a$  (Танеда, 1956б)

# Коэффициент сопротивления

## Коэффициент сопротивления для решения Стокса

$$c_z = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho U^2 \pi a^2} = \frac{6\pi\mu a U}{\frac{1}{2}\rho U^2 \pi a^2} = \frac{24}{\text{Re}}$$

# Коэффициент сопротивления

## Коэффициент сопротивления для решения Стокса

$$c_z = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho U^2 \pi a^2} = \frac{6\pi\mu a U}{\frac{1}{2}\rho U^2 \pi a^2} = \frac{24}{\text{Re}}$$

## Теория Озеена и Озеена – Гольдштейна

$$c_z = \frac{24}{\text{Re}} \left( 1 + \frac{3}{16} \text{Re} - \frac{19}{1280} \text{Re}^2 + \dots \right)$$

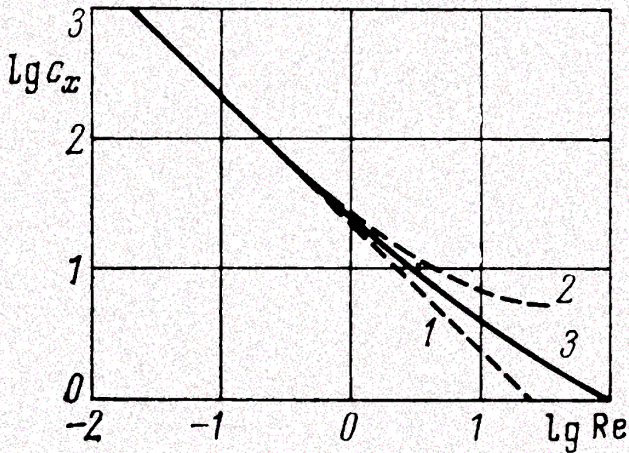
Если сохранить только первый член, то будет формула Стокса, если первые два – формула Озеена и т.д.

Формула Озеена получается при линеаризации конвективного слагаемого в уравнениях Навье – Стокса по формуле

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \approx (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{v}.$$



# Сравнение теорий



Зависимость коэффициента сопротивления сферы от числа Рейнольдса (1 – Стокс, 2 – Озеен, 3 – эксперимент)

# Другие решения уравнений Стокса

## Постановка задачи

Определить силу сопротивления сферы радиуса  $a$  потоку вязкой несжимаемой жидкости плотности  $\rho$  и вязкости  $\mu$ , движущемуся поступательно, с заданной переменной скоростью  $\vec{U}(t)$  ( $\vec{U}(0) = 0$ ).

# Другие решения уравнений Стокса

## Постановка задачи

Определить силу сопротивления сферы радиуса  $a$  потоку вязкой несжимаемой жидкости плотности  $\rho$  и вязкости  $\mu$ , движущемуся поступательно, с заданной переменной скоростью  $\vec{U}(t)$  ( $\vec{U}(0) = 0$ ).

## Формула Буссинеска

$$\vec{W} = \underbrace{-6\pi\mu a \vec{U}(t)}_{\text{Стокс}} \underbrace{-\frac{2}{3}\pi\rho a^3 \vec{U}'(t)}_{\text{присоединенная масса}} \underbrace{-6\pi\mu a^2 \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{\vec{U}'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}}_{\text{Бассе}}$$

# Другие решения уравнений Стокса

## Постановка задачи

Определить силу сопротивления сферы радиуса  $a$  потоку вязкой несжимаемой жидкости плотности  $\rho$  и вязкости  $\mu$ , движущемуся поступательно, с заданной переменной скоростью  $\vec{U}(t)$  ( $\vec{U}(0) = 0$ ).

## Формула Буссинеска

$$\vec{W} = \underbrace{-6\pi\mu a \vec{U}(t)}_{\text{Стокс}} + \underbrace{-\frac{2}{3}\pi\rho a^3 \vec{U}'(t)}_{\text{присоединенная масса}} + \underbrace{-6\pi\mu a^2 \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \int_0^t \frac{\vec{U}'(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}}_{\text{Бассе}}$$

Сила для импульсно приведенного из состояния покоя в движение шара до скорости  $U_0$ :

$$W = 6\pi\mu a U_0 \left( 1 + \sqrt{\frac{a^2}{\pi\nu t}} \right).$$

1. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. — М.: Мир, 1973.
2. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Гос. издат. физ.-мат. лит., 1963.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. — 3-е изд., перераб. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.
4. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости газа и плазмы: Учеб. для вузов. — 7-е изд., испр. — М.: Дрофа, 2003.