

# Течения вязкой жидкости

*Верецагин Антон Сергеевич*

канд. физ.-мат. наук, доцент

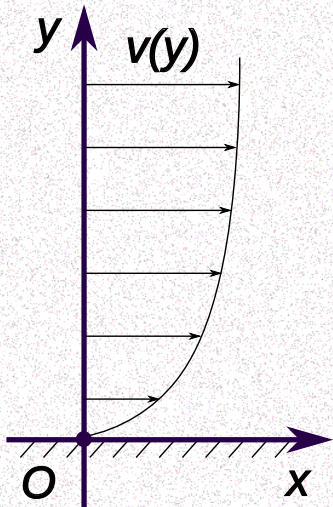
Кафедра аэрофизики и газовой динамики



10 января 2021 г.

Понятие вязкой жидкости. Тензор напряжений для вязкой несжимаемой жидкости. Система уравнений Навье – Стокса. Постановка граничных условий. Подобие течений вязкой несжимаемой жидкости. П-теорема. Течение Пуазейля.

# Понятие вязкой жидкости

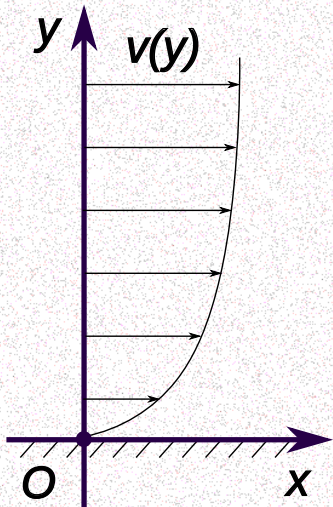


Касательная сила, действующая на стенку

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} = \rho \nu \frac{dv}{dy},$$

где  $\mu = \rho \nu$  – коэффициент динамической вязкости;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости;  $\rho$  – плотность.

# Понятие вязкой жидкости



Касательная сила, действующая на стенку

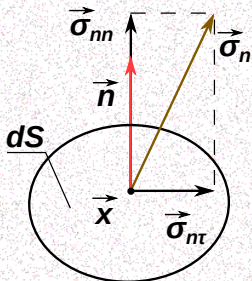
$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} = \rho \nu \frac{dv}{dy},$$

где  $\mu = \rho \nu$  – коэффициент динамической вязкости;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости;  $\rho$  – плотность.

Размерность коэффициентов вязкости

$$[\mu] = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}, \quad [\nu] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

# Тензор напряжений вязкой несжимаемой жидкости



Разложение напряжения, возникающего в сплошной среде, на тангенциальную и нормальную составляющие

## Связь тензора напряжений и тензора скоростей деформаций

$$\sigma = -pI + 2\mu e,$$

где  $p$  – давление;  $I$  – единичный тензор;  $e$  – тензор скоростей деформаций, задаваемый соотношением

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

где  $v_i$  – компоненты вектора скорости ( $i = 1, 2, 3$ ).



# Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости

## Уравнения Навье – Стокса

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{f},$$

$$c_V \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) T \right) = \frac{\kappa}{\rho} \Delta T + \frac{2\mu}{\rho} e_{ij} e_{ij}.$$

**Неизвестные функции**, определенные и дифференцируемые в некоторой области пространства:  $\vec{v}(t, \vec{x})$  – вектор скорости;  $p(t, \vec{x})$  – давление;  $T(t, \vec{x})$  – температура.

**Константы**:  $\rho$  – плотность;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости;  $\kappa$  – коэффициент температуропроводности.

**Обозначения**:  $e_{ij}$  – компоненты тензора скоростей деформаций;  $\vec{f}$  – вектор внешних сил.

# Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости

Система уравнений разбивается на две подсистемы:

## Уравнения Навье – Стокса

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{f}.$$

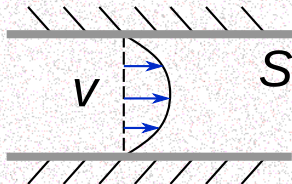
## Закон динамики температуры

$$c_V \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) T \right) = \frac{\kappa}{\rho} \Delta T + \frac{2\mu}{\rho} e_{ij} e_{ij}$$

Решив уравнения Навье – Стокса, мы найдем распределение скорости и давления. Зная распределение скорости, из второй части находим распределение температуры. Дальше будут рассматриваться решения только первой части, т.е. уравнений Навье – Стокса.

# Граничные условия для уравнения Навье – Стокса

Условия на неподвижной границе



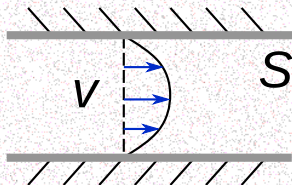
Кинематическое условие:

$$\vec{v}|_S = 0.$$



# Граничные условия для уравнения Навье – Стокса

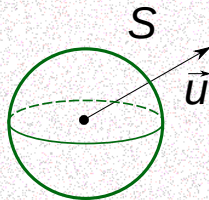
Условия на неподвижной границе



Кинематическое условие:

$$\vec{v}|_S = 0.$$

Условие на подвижной границе

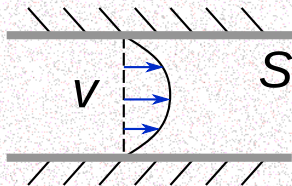


Кинематическое условие:

$$\vec{v}|_S = \vec{u}.$$

# Граничные условия для уравнения Навье – Стокса

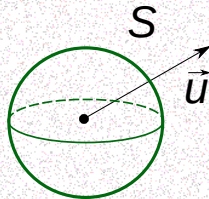
Условия на неподвижной границе



Кинематическое условие:

$$\vec{v}|_S = 0.$$

Условие на подвижной границе



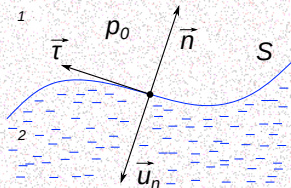
Кинематическое условие:

$$\vec{v}|_S = \vec{u}.$$

Такого вида граничные условия называются условиями  
«прилипания».

# Граничные условия для уравнения Навье – Стокса

## Условия на свободной границе



1 – газ; 2 – вязкая жидкость

Кинематическое условие:

$$v_n|_S = u_n.$$

Динамические условия:

$$(\vec{n} \cdot \sigma) \cdot \vec{n}|_S = p|_S = p_0,$$

$$(\vec{n} \cdot \sigma) \cdot \vec{\tau}|_S = 0.$$

## Определение

Два физических явления называются **подобными**, если величины, характеризующие одно явление, могут быть получены из соответствующих величин другого, взятых в сходственных пространственно-временных точках, простым умножением на *одинаковые во всех точках множители*, называемые *коэффициентами подобия*.

## Уравнения Навье – Стокса в декартовой системе координат

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right).$$



## Замена переменных

$$t = Tt', \quad x = Lx', \quad y = Ly', \quad z = Lz',$$

$$v_x = Vv'_x, \quad v_y = Vv'_y, \quad v_z = Vv'_z, \quad p = Pp',$$

$$X = FX', \quad Y = FY', \quad Z = FZ',$$

где  $T, L, V, P, F$  – характерные значения времени, размера течения, скорости, давления, силы сплошной среды.

Штрихами обозначены новые безразмерные переменные.

# Подобие при течениях вязкой несжимаемой жидкости

## Уравнения Навье – Стокса, записанные с использованием безразмерных комплексов

$$Sh \frac{\partial v'_x}{\partial t'} + v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial v'_x}{\partial z'} = \frac{1}{Fr} X' - Eu \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial z'^2} \right),$$

$$Sh \frac{\partial v'_y}{\partial t'} + v'_x \frac{\partial v'_y}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_y}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial v'_y}{\partial z'} = \frac{1}{Fr} Y' - Eu \frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v'_y}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_y}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_y}{\partial z'^2} \right),$$

$$Sh \frac{\partial v'_z}{\partial t'} + v'_x \frac{\partial v'_z}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_z}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial v'_z}{\partial z'} = \frac{1}{Fr} Z' - Eu \frac{\partial p'}{\partial z'} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v'_z}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_z}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_z}{\partial z'^2} \right).$$

## Безразмерные комплексы – критерии подобия

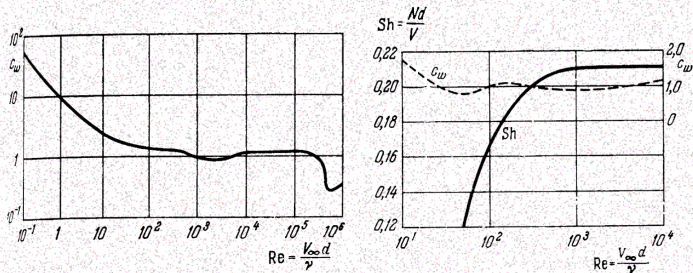
$$\frac{L}{VT} = Sh - \text{число Струхала},$$

$$\frac{P}{\rho V^2} = Eu - \text{число Эйлера},$$

$$\frac{VL}{\nu} = Re - \text{число Рейнольдса},$$

$$\frac{V^2}{FL} = Fr - \text{число Фруда}.$$

# Колебание струн в однородном потоке воздуха



Rochko A. On the development of turbulent wakes from vortex streets. - NACA Rep., 1954, v. 1191.

## Критерии подобия

$$Sh = Sh(Re) = \frac{Nd}{V_\infty}, \quad c_w = Eu(Re) = \frac{P}{\rho V_\infty^2}, \quad Re = \frac{V_\infty d}{\nu}.$$

*Заданные величины:*  $d$  – диаметр струны;  $V_\infty$  – скорость набегающего потока;  $\nu$  – вязкость;  $\rho$  – плотность.

*Неизвестные:*  $N$  – частота колебаний;  $P$  – давление.

## Определение

Функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется **размернооднородной**, если существует такая совокупность чисел  $b_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ), что имеет место равенство

$$f(\alpha_1^{a_{11}} \dots \alpha_m^{a_{1m}} x_1, \dots, \alpha_1^{a_{n1}} \dots \alpha_m^{a_{nm}} x_n) = \alpha_1^{b_1} \alpha_2^{b_2} \dots \alpha_m^{b_m} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

для всех  $\alpha_k$  ( $k = \overline{1, m}$ ) и  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) в области определения.

## П-теорема (Бекингем, Федерман)

Если  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – численные значения  $n$  физических величин,  $A = (a_{ij})$  ( $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ ) – матрица их размерностей по отношению к единицам измерения  $M_1, M_2, \dots, M_m$ ,  $f$  – произвольная размернооднородная функция переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , а  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_p$  ( $p = n - r$ ,  $r$  – ранг матрицы  $A$ ) – фундаментальная система степенных одночленов переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , то при произвольных действительных числах  $k_1, k_2, \dots, k_n$  имеет место равенство

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} G(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_p).$$



# Основы теории размерности

## Размерности параметров в уравнениях Навье – Стокса

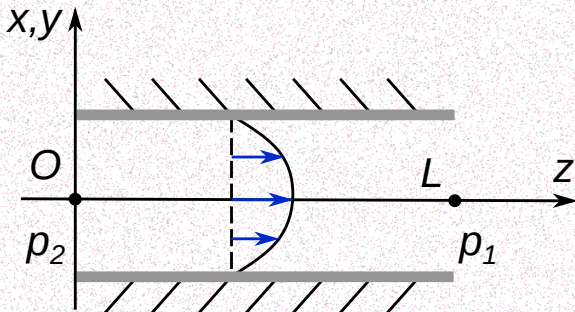
	кг	м	с
$x, y, z$	0	1	0
$t$	0	0	1
$u, v, w$	0	1	-1
$p$	1	-1	-2
$g$	0	1	-2
$\rho$	1	-3	0
$\mu$	1	-1	-1

Ранг матрицы  $r = 3$ . Число размерных величин, определяющих движение, равно 7. Фундаментальная система параметров  $\Pi$  содержит  $p = n - r = 4$  параметра. Это, например, ранее введенные **числа подобия Re, Sh, Eu, Fr**.

## Общее решение уравнений Навье – Стокса без учета краевых и начальных условий

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} G(\text{Re}, \text{Fr}, \text{Sh}, \text{Eu})$$

# Течение Пуазейля



## Постановка задачи

В трубе постоянного сечения под действием перепада давления  $\Delta p = p_2 - p_1$  течет жидкость плотности  $\rho$  и вязкостью  $\nu$ . Требуется найти кинематические и динамические характеристики потока.

# Постановка математической задачи

Ищем решение стационарных уравнений Навье – Стокса в виде:

$$p = p(x,y,z), \quad \vec{v} = v(x,y,z)\vec{e}_z.$$

Система уравнений, спроектированная на оси координат:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right).$$

Условия на границах:

$$p|_{z=0} = p_2, \quad p|_{z=L} = p_1,$$

$$v|_S = 0,$$

где  $S$  – поверхность трубы.

## Решение

Так как  $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$  и  $p = p(z)$ , то

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{p_2 - p_1}{L}.$$

Из граничных условий следует решение для давления

$$p(z) = p_2 + \frac{p_1 - p_2}{L}z$$

и задача Дирихле для определения профиля скорости

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\Delta p}{\mu L}, \quad v|_{\gamma} = 0,$$

где  $\gamma$  – кривая на пересечении поверхности  $S$  и плоскости  $Oxy$ .

# Течение Пуазейля: плоский канал

## Скорость течения

$$v(y) = \frac{\Delta p \cdot h^2}{2\mu L} \left[ 1 - \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right],$$

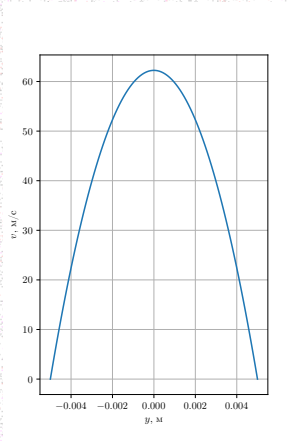
$$v_{max} = \frac{1}{2} \frac{\Delta p \cdot h^2}{\mu L}.$$

## Расход по сечению

$$Q = \int_{-h}^h v(y) dy = \frac{2}{3} \frac{\Delta p \cdot h^3}{\mu L}$$

## Средняя скорость по течению

$$v_{avg} = \frac{Q}{2h} = \frac{1}{3} \frac{\Delta p \cdot h^2}{\mu L} = \frac{2}{3} v_{max}$$



Профиль скорости при  
 $\Delta p = 5 \cdot 10^4$  Па,  $h = 5$  мм,  
 $L = 10$  м,  $\mu = 1004 \cdot 10^{-6}$  Па·с



## Закон сопротивления плоского канала

Вводя коэффициент сопротивления  $\lambda$  для плоского канала

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{2h} \frac{\rho v_{avg}^2}{2},$$

получим выражение для коэффициента сопротивления через число Рейнольдса:

$$\lambda = \frac{24}{\text{Re}},$$

$$\text{где } \text{Re} = \frac{v_{avg} 2h}{\nu}.$$

# Течение Пуазейля: эллиптический канал

## Скорость течения

$$v(x,y) = \frac{\Delta p}{2\mu L} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right),$$
$$v_{max} = \frac{\Delta p}{2\mu L} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

## Расход по сечению

$$Q = \int_S v(x,y) dx dy = \frac{1}{2} \pi ab v_{max}$$

## Средняя скорость по течению

$$v_{avg} = \frac{Q}{\pi ab} = \frac{1}{2} v_{max}$$

# Течение Пуазейля: круглый канал

## Скорость течения

$$v(x,y) = \frac{\Delta p}{2\mu L} \frac{r^2}{2} \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{r^2} \right),$$

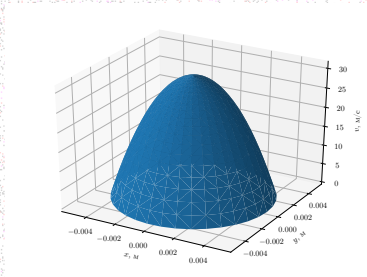
$$v_{max} = \frac{\Delta p}{2\mu L} \frac{r^2}{2}.$$

## Расход по сечению

$$Q = \int_S v(x,y) dx dy = \frac{1}{2} \pi r^2 v_{max}$$

## Средняя скорость по течению

$$v_{avg} = \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{1}{2} v_{max}$$



Профиль скорости при  
 $\Delta p = 5 \cdot 10^4$  Па,  $r = 5$  мм,  $L = 10$  м,  
 $\mu = 1004 \cdot 10^{-6}$  Па·с

# Течение Пуазейля: круглый канал

## Закон сопротивления круглого канала

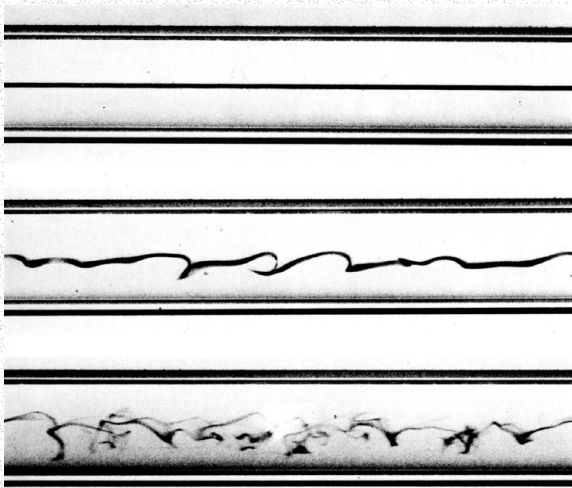
Вводя коэффициент сопротивления  $\lambda$  для круглого канала диаметра  $d$

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{d} \frac{\rho v_{avg}^2}{2},$$

получим выражение для коэффициента сопротивления через число Рейнольдса:

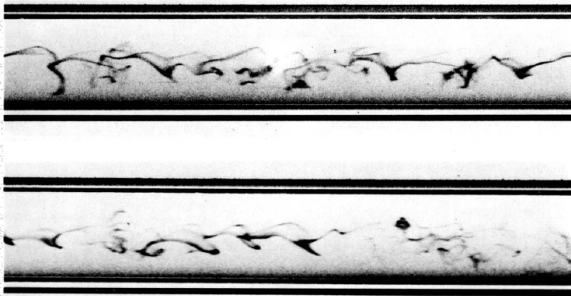
$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}, \text{ где } \text{Re} = \frac{v_{avg} d}{\nu}.$$

# Реальное течение в канале





# Реальное течение в канале



Повторение эксперимента Рейнольдса с краской. Критическое число Рейнольдса  $Re$  в приведенном эксперименте оказалось ниже 13000 в отличие от оригинального эксперимента Рейнольдса вследствие помех от уличного движения в современном Манчестере.

*М. Ван-Дайк. Альбом течений жидкости и газа. М.:Мир, 1986*

*Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости газа и плазмы: Учеб. для вузов. — 7-е изд., испр. — М.: Дрофа, 2003.