

Вихревые течения идеальной жидкости

Верецагин Антон Сергеевич

д-р. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрофизики и газовой динамики



11 декабря 2024 г.

Вихревые течения. Вихревые линия, трубка. Теорема о циркуляции вектора вихря. Теорема о производной циркуляции скорости. Теорема Томсона. Теорема Лагранжа. Первая и вторая теорема Гельмгольца.

Потенциальные и вихревые течения идеальной жидкости

Определение

Течение идеальной жидкости называется **вихревым**, если вектор $\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v}$ в некоторых точках исследуемой области отличен от нулевого.

Потенциальные и вихревые течения идеальной жидкости

Определение

Течение идеальной жидкости называется **вихревым**, если вектор $\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v}$ в некоторых точках исследуемой области отличен от нулевого.

Выражение для компонентов вектора вихря:

$$\Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Потенциальные и вихревые течения идеальной жидкости

Определение

Течение идеальной жидкости называется **вихревым**, если вектор $\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v}$ в некоторых точках исследуемой области отличен от нулевого.

Выражение для компонентов вектора вихря:

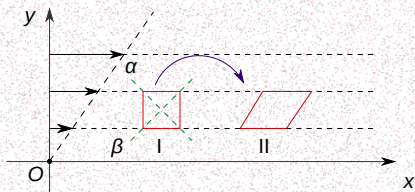
$$\Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Если же в исследуемой области везде $\vec{\Omega} = 0$, тогда течение в этой области называется потенциальным и существует потенциал φ такой, что

$$\vec{v} = \nabla \varphi.$$

Справедливо и обратное утверждение.

Пример вихревого течения



Движение жидкости слоями:

$$v_x = ay, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0.$$

Вихрь скорости:

$$\Omega_x = 0, \quad \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = -a.$$

Описание

По теореме Коши – Гельмгольца о скорости деформируемой частицы квадрат *I* переходит в параллелограмм *II* посредством сдвига вдоль оси *x*, поворота как твердого тела по указанной стрелке и чистой деформации в виде сжатия вдоль линии α и растяжения вдоль линии β .

Вихревые линии и вихревые трубки

Определение

Вихревой линией называется такая линия, во всякой точке которой вихрь скорости $\vec{\Omega}$ направлен по касательной к этой линии.

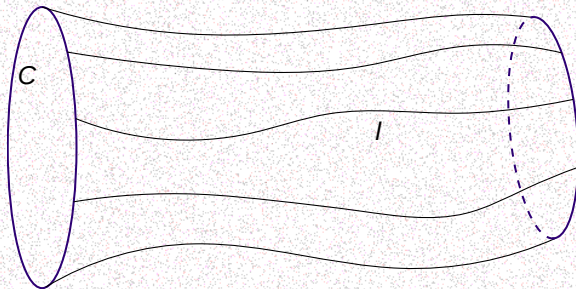
Уравнения вихревой линии

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z}$$

Вихревая трубка

Определение

Вихревой трубкой называется совокупность точек пространства, ограниченных вихревыми линиями, проведенными через заданный замкнутый контур.



Циркуляция скорости и теорема Стокса

Определение

Циркуляцией скорости Γ по замкнутому контуру называется линейный интеграл

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_C v_x dx + v_y dy + v_z dz.$$

Теорема Стокса

Циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через площадку, ограниченную этим контуром:

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{v}) dS,$$

где \vec{n} – вектор единичной нормали к S , направленный по правилу буравчика.

Интенсивность вихревой трубки

Определение

Интенсивностью вихревой трубки называется поток вектора вихря $\vec{\Omega}$ через сечение вихревой трубки:

$$I = \int_S \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS.$$

Теорема о постоянстве циркуляции для вихревой трубки

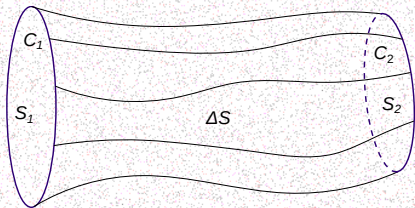
Теорема

Циркуляция вектора скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему данную вихревую трубку, постоянна.

Теорема о постоянстве циркуляции для вихревой трубки

Теорема

Циркуляция вектора скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему данную вихревую трубку, постоянна.

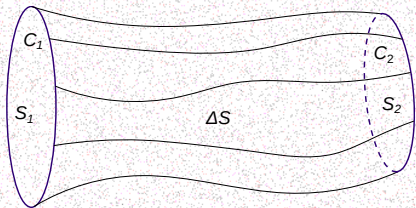


Рассмотрим вихревую трубку V , ограниченную с торцов сечениями S_1 , S_2 и боковой поверхностью ΔS . Сечения S_1 , S_2 пересекаются с ΔS по контурам C_1 и C_2 .

Теорема о постоянстве циркуляции для вихревой трубки

Теорема

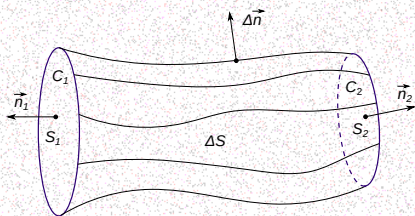
Циркуляция вектора скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему данную вихревую трубку, постоянна.



Рассмотрим вихревую трубку V , ограниченную с торцов сечениями S_1 , S_2 и боковой поверхностью ΔS . Сечения S_1 , S_2 пересекаются с ΔS по контурам C_1 и C_2 .

$$0 = \int_V \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} dV = \int_V \operatorname{div} \vec{\Omega} dV = \int_S \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS$$

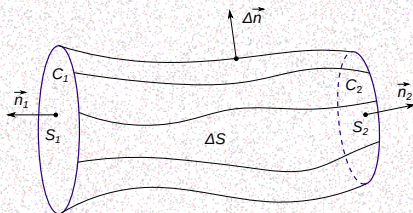
Теорема о постоянстве циркуляции для вихревой трубки: доказательство



$$\int_S \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_1} \vec{\Omega} \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{S_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{n}_2 dS + \int_{\Delta S} \vec{\Omega} \cdot \Delta \vec{n} dS$$

Так как на боковой поверхности вихревой трубки ΔS вектора $\vec{\Omega}$ и $\Delta \vec{n}$ ортогональны, то последний интеграл равен 0.

Теорема о постоянстве циркуляции для вихревой трубки: доказательство

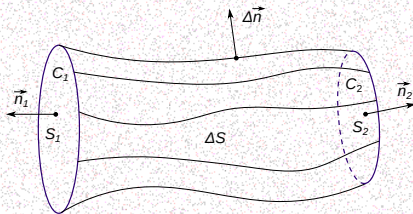


Таким образом, используя теорему Стокса, имеем:

$$0 = \int_{S_1} \vec{\Omega} \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{S_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{n}_2 dS = \oint_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{l} - \oint_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{l}.$$

В последнем равенстве появился знак минус, потому что нормали \vec{n}_1 и \vec{n}_2 направлены в разные стороны. Так как контуры C_1 и C_2 выбраны произвольно, то утверждение теоремы справедливо.

Теорема о постоянстве циркуляции для вихревой трубки: доказательство



Таким образом, используя теорему Стокса, имеем:

$$0 = \int_{S_1} \vec{\Omega} \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{S_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{n}_2 dS = \oint_{C_1} \vec{v} \cdot d\vec{l} - \oint_{C_2} \vec{v} \cdot d\vec{l}.$$

Дополнительно показано, что интенсивность вихревой трубки одна и та же в любом сечении.

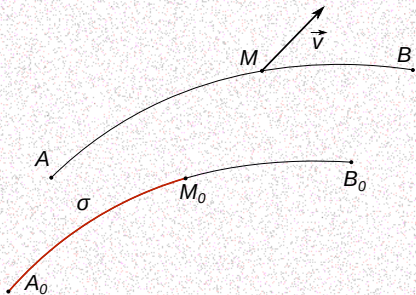
Теорема о производной циркуляции скорости

Теорема

Производная по времени от циркуляции скорости \vec{v} по некоторому замкнутому контуру равна циркуляции от ускорения $d\vec{v}/dt$ по тому же контуру:

$$\frac{d}{dt} \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint_L \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s}.$$

Теорема о производной циркуляции скорости: доказательство



Рассмотрим в момент времени t_0 какую-нибудь состоящую из жидких частиц линию A_0B_0 , проведенную в жидкости, и переходящую в момент времени t в другую линию AB . Рассмотрим линейный интеграл от скорости по этой кривой:

$$J = \int_{AB} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Теорема о производной циркуляции скорости: доказательство

В момент времени $t' = t + \Delta t$ линия AB перейдет в $A'B'$ и можно определить J' :

$$J' = \int_{A'B'} \vec{v}' \cdot d\vec{s}.$$

Теорема о производной циркуляции скорости: доказательство

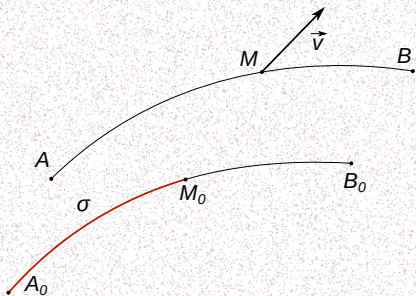
В момент времени $t' = t + \Delta t$ линия AB перейдет в $A'B'$ и можно определить J' :

$$J' = \int_{A'B'} \vec{v}' \cdot d\vec{s}.$$

Определим производную по времени от линейного интеграла $\frac{dJ}{dt}$
как

$$\frac{dJ}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{J' - J}{\Delta t}.$$

Теорема о производной циркуляции скорости: доказательство



Параметризуем отрезок A_0B_0 параметром σ , равным расстоянию от выбранной точки M_0 вдоль дуги A_0M_0 . Тогда точку M отрезка AB в момент времени t можно однозначно определить с помощью следующих соотношений:

$$x = x(\sigma, t), \quad y = y(\sigma, t), \quad z = z(\sigma, t),$$

или

$$\vec{r} = \vec{r}(\sigma, t) \quad (0 \leq \sigma \leq \sigma_0, t \geq t_0),$$

при этом

$$\vec{r}(0, t) = A, \quad \vec{r}(\sigma, t) = M, \quad \vec{r}(\sigma_0, t) = B.$$

Теорема о производной циркуляции скорости: доказательство

Скорости жидких частиц отрезка AB также можно параметризовать через σ и t :

$$\vec{v} = \vec{v}(\sigma, t).$$

Теорема о производной циркуляции скорости: доказательство

Скорости жидких частиц отрезка AB также можно параметризовать через σ и t :

$$\vec{v} = \vec{v}(\sigma, t).$$

Линейный интеграл J , используя σ и t , можно переписать в форме:

$$J = \int_0^{\sigma_0} \left(v_x \frac{\partial x}{\partial \sigma} + v_y \frac{\partial y}{\partial \sigma} + v_z \frac{\partial z}{\partial \sigma} \right) d\sigma = \int_0^{\sigma_0} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} \right) d\sigma,$$

где предел интегрирования не зависит от переменной t .

Теорема о производной циркуляции скорости: доказательство

Рассмотрим производную от J по t :

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{dt} &= \int_0^{\sigma_0} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} \right) d\sigma + \int_0^{\sigma_0} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \sigma \partial t} \right) d\sigma = \\ &= \int_0^{\sigma_0} \left(\vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} \right) d\sigma + \int_0^{\sigma_0} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \sigma} \right) d\sigma.\end{aligned}$$

Здесь

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{r}(\sigma, t) = \vec{v}(\sigma, t), \quad \frac{\partial^2}{\partial \sigma \partial t} \vec{r}(\sigma, t) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \vec{v}(\sigma, t), \quad \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}(\sigma, t) = \vec{a}(\sigma, t),$$

где \vec{a} – ускорение жидкой частицы.

Теорема о производной циркуляции скорости: доказательство

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое.

$$\int_0^{\sigma_0} \left(\vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} \right) d\sigma = \int_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{s} = \int_{AB} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s},$$

где d/dt в последнем равенстве – полная производная.

Теорема о производной циркуляции скорости: доказательство

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое.

$$\int_0^{\sigma_0} \left(\vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \sigma} \right) d\sigma = \int_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{s} = \int_{AB} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s},$$

где d/dt в последнем равенстве – полная производная.

$$\int_0^{\sigma_0} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \sigma} \right) d\sigma = \frac{1}{2} \int_0^{\sigma_0} \frac{\partial}{\partial \sigma} (\vec{v} \cdot \vec{v}) d\sigma = \frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2},$$

где $\vec{v}_B = \vec{v}(\sigma_0, t)$, $\vec{v}_A = \vec{v}(0, t)$ – скорости жидких частиц в точках B , A .

Теорема о производной циркуляции скорости: итог

Подведем итог вышесказанного:

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{AB} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} + \frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2}.$$

Теорема о производной циркуляции скорости: итог

Подведем итог вышесказанного:

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{AB} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} + \frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2}.$$

Результат

Если в качестве линии AB рассматривать замкнутый контур L , тогда точки A и B совпадают и

$$\frac{d}{dt} \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint_L \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s}.$$

Теорема

Если массовые силы допускают потенциал, а идеальная жидкость баротропна, то циркуляция скорости по любому замкнутому контуру во все время движения жидкости остается неизменной.

Теорема Томсона: доказательство

Уравнение движения

Для баротропного течения идеальной жидкости с потенциальными массовыми силами уравнение движения допускает следующее упрощение (см. предыдущую лекцию):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad}(\mathcal{P}(p) + \Pi).$$

Здесь

$$\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}, \quad \vec{f} = -\nabla \Pi,$$

где $\mathcal{P}(p)$ – функция давления; \vec{f} , Π – вектор и потенциал объемных сил.

Теорема Томсона: доказательство

Рассмотрим производную циркуляции вектора скорости по замкнутому контуру L . По теореме о циркуляции и закона движения имеем:

$$\frac{d}{dt} \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint_L \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = - \oint_L \text{grad}(\mathcal{P}(p) + \Pi) \cdot d\vec{s} = 0.$$

Теорема Томсона: доказательство

Рассмотрим производную циркуляции вектора скорости по замкнутому контуру L . По теореме о циркуляции и закона движения имеем:

$$\frac{d}{dt} \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint_L \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = - \oint_L \text{grad}(\mathcal{P}(p) + \Pi) \cdot d\vec{s} = 0.$$

Результат

Таким образом,

$$\oint_L \vec{v} \cdot d\vec{s} = \text{const.}$$

Теорема Лагранжа

Теорема

Если при баротропном течении идеальной жидкости в потенциальном внешнем поле в начальный момент времени какие-то жидкие частицы не имели завихренности, то ее в них не было раньше и не будет позже.

Теорема Лагранжа

Теорема

Если при баротропном течении идеальной жидкости в потенциальном внешнем поле в начальный момент времени какие-то жидкие частицы не имели завихренности, то ее в них не было раньше и не будет позже.

Теорема (альтернативная формулировка)

Если баротропное течение идеальной жидкости в потенциальном внешнем поле в начальный момент времени было потенциально, то оно останется потенциальным в любой другой момент и далее.

Теорема Лагранжа: доказательство

Пусть в некоторый момент времени в каком-то объеме жидкости $\vec{\Omega} = 0$, тогда по теореме Стокса циркуляция по любому замкнутому контуру в этой области равна 0. По теореме Томсона циркуляция для такой жидкости не меняется от времени, а значит, для рассматриваемых жидких частиц циркуляция в любой другой момент времени тоже равна 0.

Теорема Лагранжа: доказательство

Пусть в некоторый момент времени в каком-то объеме жидкости $\vec{\Omega} = 0$, тогда по теореме Стокса циркуляция по любому замкнутому контуру в этой области равна 0. По теореме Томсона циркуляция для такой жидкости не меняется от времени, а значит, для рассматриваемых жидких частиц циркуляция в любой другой момент времени тоже равна 0.

В окрестности выбранной жидкой частицы рассмотрим всевозможные маленькие площадки S с нормалью \vec{n} и контуром L , тогда по теореме Стокса:

$$\int_S \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0,$$

следовательно

$$\vec{\Omega} = 0.$$

Первая теорема Гельмгольца

Теорема (о сохранении вихревых линий)

В баротропном течении идеальной жидкости в потенциальном внешнем поле частицы жидкости, образующие в некоторый момент вихревую линию, во все время движения будут образовывать вихревую линию.

Первая теорема Гельмгольца: доказательство

Рассмотрим **вихревую поверхность** – поверхность, образованную вихревыми линиями, проведенными через некоторую линию в пространстве, которая сама не является вихревой линией. В каждой точке поверхности вектор $\vec{\Omega}$ будет ортогонален вектору нормали \vec{n} к этой поверхности. Покажем, что частицы, составляющие вихревую поверхность в какой-то момент времени будут ей являться далее.

Первая теорема Гельмгольца: доказательство

Рассмотрим **вихревую поверхность** – поверхность, образованную вихревыми линиями, проведенными через некоторую линию в пространстве, которая сама не является вихревой линией. В каждой точке поверхности вектор $\vec{\Omega}$ будет ортогонален вектору нормали \vec{n} к этой поверхности. Покажем, что частицы, составляющие вихревую поверхность в какой-то момент времени будут ей являться далее.

Рассмотрим на поверхности контур L , образующий на поверхности площадку S , и посчитаем циркуляцию вектора скорости по этому контуру:

$$\oint_L \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS = 0.$$

Последнее равенство выполнено в силу того, что $\vec{\Omega} \perp \vec{n}$.

Первая теорема Гельмгольца: доказательство

В последующие моменты времени поверхность перейдет в другую поверхность, а контур L в контур L' , ограничивающий площадку S' . По теореме Томсона циркуляция по контуру L' равна циркуляции по контуру L и равна 0, следовательно, используя теорему Стокса:

$$0 = \oint_{L'} \vec{v}' \cdot d\vec{s} = \int_{S'} \vec{\Omega}' \cdot \vec{n}' dS,$$

где \vec{v}' , $\vec{\Omega}'$ – векторы скорости и вихря в последующий рассматриваемый момент времени; \vec{n}' – нормаль к поверхности, образованной теми же самыми жидкими частицами.

Первая теорема Гельмгольца: доказательство

В последующие моменты времени поверхность перейдет в другую поверхность, а контур L в контур L' , ограничивающий площадку S' . По теореме Томсона циркуляция по контуру L' равна циркуляции по контуру L и равна 0, следовательно, используя теорему Стокса:

$$0 = \oint_{L'} \vec{v}' \cdot d\vec{s} = \int_{S'} \vec{\Omega}' \cdot \vec{n}' dS,$$

где \vec{v}' , $\vec{\Omega}'$ – векторы скорости и вихря в последующий рассматриваемый момент времени; \vec{n}' – нормаль к поверхности, образованной теми же самыми жидкими частицами.

Так как в последнем равенстве S' можно взять неограниченно маленькой величины, то $\vec{\Omega}' \perp \vec{n}'$. Таким образом, поверхность, образованная теми же самыми жидкими частицами, тоже будет вихревой поверхностью.

Первая теорема Гельмгольца: доказательство

Рассмотрим вихревую линию l , являющуюся пересечением двух вихревых поверхностей S и Σ , в какой-то момент времени. В следующий рассматриваемый момент времени она перейдет в линию l' , являющуюся пересечением вихревых поверхностей S' и Σ' , в которые перейдут вихревые поверхности S и Σ .

Первая теорема Гельмгольца: доказательство

Рассмотрим вихревую линию l , являющуюся пересечением двух вихревых поверхностей S и Σ , в какой-то момент времени. В следующий рассматриваемый момент времени она перейдет в линию l' , являющуюся пересечением вихревых поверхностей S' и Σ' , в которые перейдут вихревые поверхности S и Σ .

В каждой точке кривой l' вихрь $\vec{\Omega}'$ лежит в касательной плоскости S' и Σ' , а значит, и является касательным вектором для кривой l' .

Первая теорема Гельмгольца: доказательство

Рассмотрим вихревую линию l , являющуюся пересечением двух вихревых поверхностей S и Σ , в какой-то момент времени. В следующий рассматриваемый момент времени она перейдет в линию l' , являющуюся пересечением вихревых поверхностей S' и Σ' , в которые перейдут вихревые поверхности S и Σ .

В каждой точке кривой l' вихрь $\vec{\Omega}'$ лежит в касательной плоскости S' и Σ' , а значит, и является касательным вектором для кривой l' .

Результат

В рассматриваемом случае каждая вихревая линия перемещается в пространстве вместе с жидкими частицами, ее образующими. Это свойство называется **сохраняемостью вихревых линий**.

Первая теорема Гельмгольца: следствие

Теорема

В баротропном течении идеальной жидкости в потенциальном внешнем поле частицы жидкости, образующие в некоторый момент вихревую трубку, во все время движения будут образовывать вихревую трубку.

Вторая теорема Гельмгольца

Теорема

В баротропном течении идеальной жидкости в потенциальном внешнем поле интенсивность выделенной вихревой трубки будет сохраняться во время ее движения.

Вторая теорема Гельмгольца

Теорема

В баротропном течении идеальной жидкости в потенциальном внешнем поле интенсивность выделенной вихревой трубки будет сохраняться во время ее движения.

Доказательство

Интенсивность вихревой трубки определяется циркуляцией по любому замкнутому контуру этой трубки:

$$\Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{s},$$

которая по теореме о сохранении циркуляции будет равна циркуляции по контуру трубки тока, образованной из тех же жидких частиц в последующие моменты времени, т.е. интенсивность ее будет такой же.

Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М.:Гос. издат. физ.-мат. лит., 1963.