

Течения газа в сужающейся трубке тока. Элементарная теория сопла Лавалья.

Верещагин Антон Сергеевич

канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики ФФ НГУ

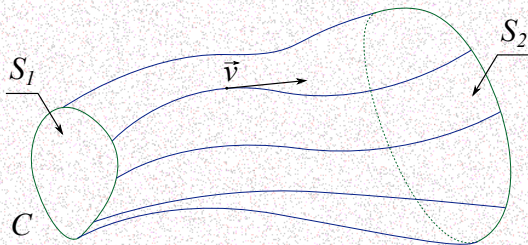
15 апреля 2019 г.

Аннотация

Трубка тока

Определение

Трубкой тока называется поверхность, образованная линиями тока, построенными из некоторой замкнутой кривой.



Постоянство расхода для трубки тока

Закон сохранения массы в трубке тока

Закон сохранения массы имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

Для стационарного течения: $\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$.

Теорема

Для стационарного течения расход газа через любое поперечное сечение трубки тока имеет одну и ту же величину

$$\int_{S_1} \rho v_n dS = \int_{S_2} \rho v_n dS,$$

где S_1, S_2 – различные сечения трубки тока.

Постоянство расхода для трубки тока

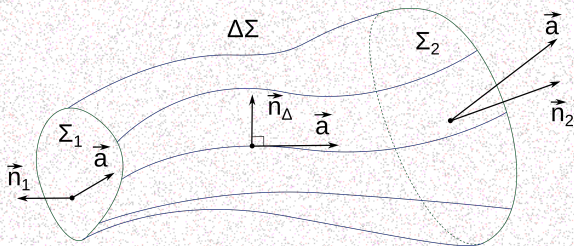
Доказательство.

Пусть далее

$$\vec{a} = \rho \vec{v},$$

тогда

$$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV =$$



Постоянство расхода для трубки тока

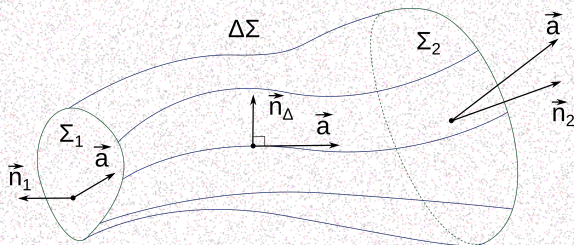
Доказательство.

Пусть далее

$$\vec{a} = \rho \vec{v},$$

тогда

$$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int_{\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} dS =$$



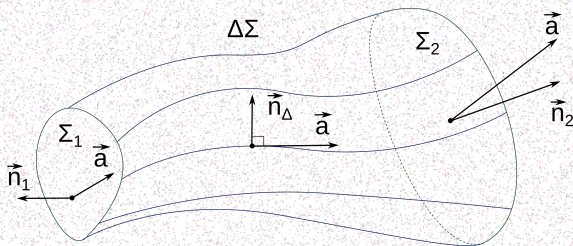
Постоянство расхода для трубки тока

Доказательство.

Пусть далее

$$\vec{a} = \rho \vec{v},$$

тогда



$$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int_\Sigma \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_\Delta dS + \int_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS.$$

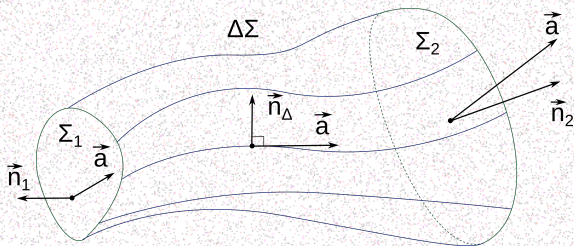
Постоянство расхода для трубки тока

Доказательство.

Пусть далее

$$\vec{a} = \rho \vec{v},$$

тогда



$$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int_{\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_\Delta dS + \int_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS.$$

$$\text{Отсюда } \int_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS = - \int_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS,$$

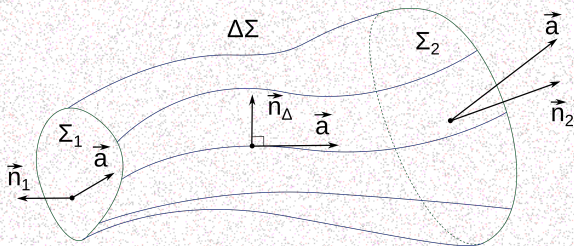
Постоянство расхода для трубки тока

Доказательство.

Пусть далее

$$\vec{a} = \rho \vec{v},$$

тогда



$$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int_{\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_{\Delta} dS + \int_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS.$$

Отсюда $\int_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS = - \int_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS$, т.к. $\int_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_{\Delta} dS = 0$ в силу ортогональности векторов \vec{a} и \vec{n}_{Δ} ,

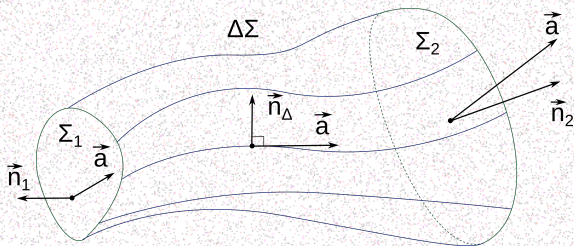
Постоянство расхода для трубки тока

Доказательство.

Пусть далее

$$\vec{a} = \rho \vec{v},$$

тогда

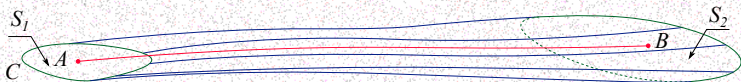


$$0 = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int_{\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_\Delta dS + \int_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS.$$

Отсюда $\int_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS = - \int_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS$, т.к. $\int_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_\Delta dS = 0$ в силу ортогональности векторов \vec{a} и \vec{n}_Δ , т.е. потоки вектора \vec{a} через Σ_1 и Σ_2 совпадают.



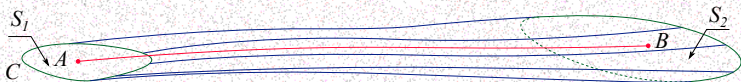
Сжимаемость трубок тока



Основные предположения

Далее будем рассматривать очень узкие трубки тока, для которых можно считать, что параметры ρ , p , c и \vec{v} мало меняются по её сечению, построенному перпендикулярно выделенной линии тока (на рисунке AB), а рассматриваемое течение изэнтропическое.

Сжимаемость трубок тока



Основные предположения

Далее будем рассматривать очень узкие трубки тока, для которых можно считать, что параметры ρ , p , c и \vec{v} мало меняются по её сечению, построенному перпендикулярно выделенной линии тока (на рисунке AB), а рассматриваемое течение изэнтропическое.

Соотношения на выделенной линии тока

Параметризовав линию тока AB можно записать закон сохранения массы и интеграл Бернулли для параметров течения

$$\rho v S = C_1, \quad \frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} = C_2.$$

Сжимаемость трубок тока

Соотношение для параметров течения в дифференциалах

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dS}{S} = 0, \quad v dv + \frac{2c}{\gamma - 1} dc = 0.$$

Сжимаемость трубок тока

Соотношение для параметров течения в дифференциалах

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dS}{S} = 0, \quad v dv + \frac{2c}{\gamma - 1} dc = 0.$$

Дополнительные соотношения

Так как для изэнтропических течений $dp = c^2 d\rho$ и $c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$, тогда рассмотрим дифференциал от последнего

$$2c dc = \frac{\gamma}{\rho} dp - \frac{\gamma p}{\rho^2} d\rho = (\gamma - 1)c^2 \frac{d\rho}{\rho}.$$

Подставляя дополнительные соотношения в интеграл Бернулли в дифференциалах, получим

$$v dv + c^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0.$$

Сжимаемость трубок тока

Связь между скоростью, сечением и числом Маха

Исключая из последнего выражения $d\rho/\rho$ с помощью закона сохранения массы в дифференциалах, получим

$$(M^2 - 1) \frac{dv}{v} = \frac{dS}{S} \quad (v > 0),$$

где $M = v/c$ – число Маха.

$$M < 1$$

$$dv < 0 \iff dS > 0$$

$$dv = 0 \iff dS = 0$$

$$dv > 0 \iff dS < 0$$

$$M = 1$$

$$dS = 0$$

$$M > 1$$

$$dv < 0 \iff dS < 0$$

$$dv = 0 \iff dS = 0$$

$$dv > 0 \iff dS > 0$$

Литература

-