# Течения вязкой жидкости

*Верещагин Антон Сергеевич*
канд. физ.-мат. наук, доцент

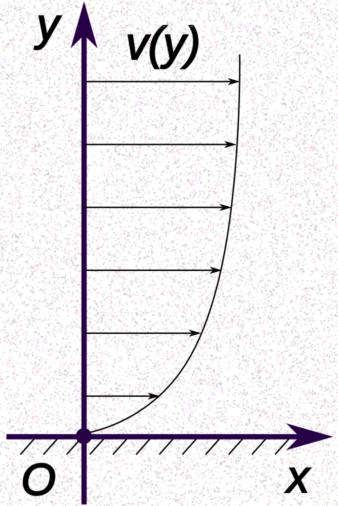
Кафедра аэрофизики и газовой динамики

17 декабря 2020 г.

# Аннотация

Понятие вязкой жидкости. Тензор напряжений для вязкой несжимаемой жидкости. Система уравнений Навье-Стокса. Постановка граничных условий. Подобие течений вязкой несжимаемой жидкости. П-теорема. Течение Пуазейля.

# Понятие вязкой жидкости

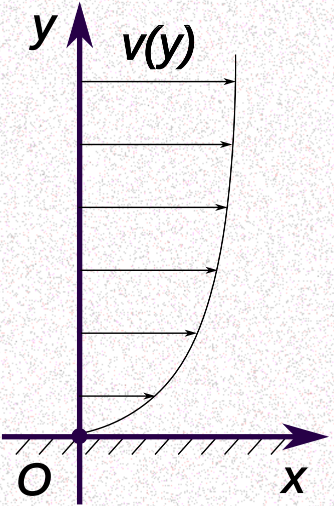



Касательная сила, действующая на стенку

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} = \rho\nu \frac{dv}{dy},$$

где $\mu = \rho\nu$ – коэффициент динамической вязкости; $\nu$ – коэффициент кинематической вязкости; $\rho$ – плотность.

# Понятие вязкой жидкости




Касательная сила, действующая на стенку

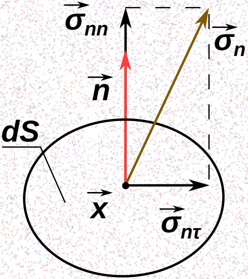
$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} = \rho\nu \frac{dv}{dy},$$

где $\mu = \rho\nu$ – коэффициент динамической вязкости; $\nu$ – коэффициент кинематической вязкости; $\rho$ – плотность.

Размерность коэффициентов вязкости

$$[\mu] = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}, \quad [\nu] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

# Тензор напряжений вязкой несжимаемой жидкости




Разложение напряжения, возникающего в сплошной среде, на тангенциальную и нормальную составляющие

## Связь тензора напряжения и тензора скоростей деформации

$$\sigma = -pI + 2\mu e,$$

где $p$ – давление; $I$ – единичный тензор; $e$ – тензор скоростей деформаций, задаваемый соотношением:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right),$$

где $v_i$ – компоненты вектора скорости ($i = 1, 2, 3$).

# Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости

## Уравнения Навье-Стокса

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{v} + \vec{f},$$

$$c_V\left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)T\right) = \frac{\kappa}{\rho}\Delta T + \frac{2\mu}{\rho}e_{ij}e_{ij}.$$

Неизвестные функции, определенные и дифференцируемые в некоторой области пространства: $\vec{v}(t,\vec{x})$ – вектор скорости; $p(t,\vec{x})$ – давление; $T(t,\vec{x})$ – температура.

Константы: $\rho$ – плотность; $\nu$ – коэффициент кинематической вязкости; $\kappa$ – коэффициент температуропроводности.

Обозначения: $e_{ij}$ – компоненты тензора скоростей деформации; $\vec{f}$ – вектор внешних сил.

# Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости

Система уравнений разбивается на две подсистемы:

**Уравнения Навье-Стокса**

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0,$$

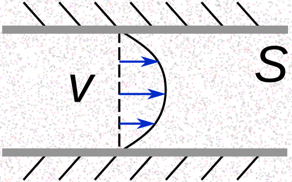
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{v} + \vec{f}.$$

**Закон динамики температуры**

$$c_V\left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)T\right) = \frac{\kappa}{\rho}\Delta T + \frac{2\mu}{\rho}e_{ij}e_{ij}.$$

Решив уравнения Навье-Стокса, мы найдем распределение скорости и давления. Зная распределение скорости, из второй части находим распределение температуры. Дальше будут рассматриваться решения только первой части, уравнений Навье-Стокса.

## Условия на неподвижной границе

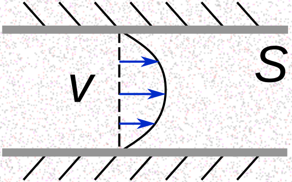



Кинематическое условие:

$$\vec{v}|_S = 0.$$

# Граничные условия для уравнения Навье-Стокса

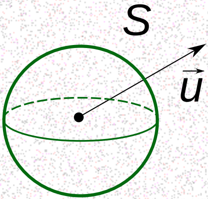
Условия на неподвижной границе




Кинематическое условие:

$$\vec{v}|_S = 0.$$

Условие на подвижной границе

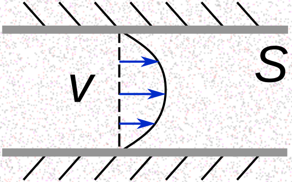



Кинематическое условие:

$$\vec{v}|_S = \vec{u}.$$

# Граничные условия для уравнения Навье-Стокса

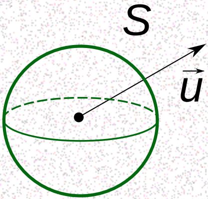
Условия на неподвижной границе




Кинематическое условие:

$$\vec{v}|_S = 0.$$

Условие на подвижной границе

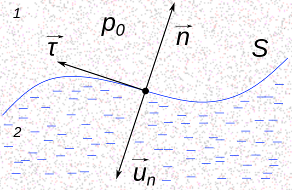



Кинематическое условие:

$$\vec{v}|_S = \vec{u}.$$

Такого вида граничные условия называются условиями «прилипания».

## Условия на свободной границе




1 – газ; 2 – вязкая жидкость.

Кинематическое условие:

$$v_n|_S = u_n.$$

Динамические условия:

$$(\vec{n}\cdot\sigma)\cdot\vec{n}|_S = p|_S = p_0,$$

$$(\vec{n}\cdot\sigma)\cdot\vec{\tau}|_S = 0.$$

# Подобие при течениях вязкой несжимаемой жидкости

**Определение**

Два физических явления называются подобными, если величины, характеризующие одно явление, могут быть получены из соответствующих величин другого, взятых в сходственных пространственно-временных точках, простым умножением на *одинаковые во всех точках множители*, называемые *коэффициентами подобия*.

# Подобие при течениях вязкой несжимаемой жидкости

Уравнения Навье-Стокса в декартовой системе координат

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right).$$

# Подобие при течениях вязкой несжимаемой жидкости

Замена переменных

$$t = Tt', \quad x = Lx', \quad y = Ly', \quad z = Lz',$$

$$v_x = Vv_x', \quad v_y = Vv_y', \quad v_z = Vv_z', \quad p = Pp',$$

$$X = FX', \quad Y = FY', \quad Z = FZ',$$

где $T$, $L$, $V$, $P$, $F$ – характерные значения времени, размера течения, скорости, давления, силы сплошной среды.
Штрихами обозначены новые безразмерные переменные.

# Подобие при течениях вязкой несжимаемой жидкости

## Уравнения Навье-Стокса, записанные с использованием безразмерных комплексов

$$Sh\frac{\partial v'_x}{\partial t'}+v'_x\frac{\partial v'_x}{\partial x'}+v'_y\frac{\partial v'_x}{\partial y'}+v'_z\frac{\partial v'_x}{\partial z'}=\frac{1}{Fr}X'-Eu\frac{\partial p'}{\partial x'}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 v'_x}{\partial z'^2}\right),$$

$$Sh\frac{\partial v'_y}{\partial t'}+v'_x\frac{\partial v'_y}{\partial x'}+v'_y\frac{\partial v'_y}{\partial y'}+v'_z\frac{\partial v'_y}{\partial z'}=\frac{1}{Fr}Y'-Eu\frac{\partial p'}{\partial y'}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v'_y}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 v'_y}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 v'_y}{\partial z'^2}\right),$$

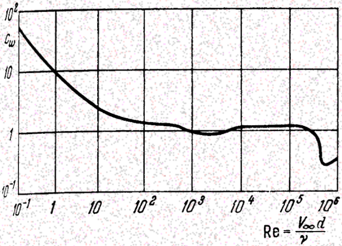
$$Sh\frac{\partial v'_z}{\partial t'}+v_x\frac{\partial v'_z}{\partial x'}+v'_y\frac{\partial v'_z}{\partial y'}+v'_z\frac{\partial v'_z}{\partial z'}=\frac{1}{Fr}Z'-Eu\frac{\partial p'}{\partial z'}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v'_z}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 v'_z}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 v'_z}{\partial z'^2}\right).$$

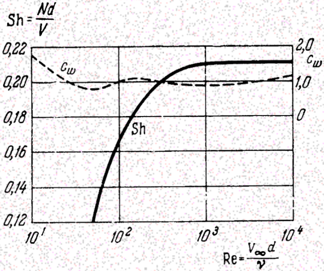
## Безразмерные комплексы - критерии подобия

$\frac{L}{VT}=\mathrm{Sh}$ – число Струхаля, $\frac{P}{\rho V^2}=\mathrm{Eu}$ – число Эйлера,

$\frac{VL}{\nu}=\mathrm{Re}$ – число Рейнольдса, $\frac{V^2}{FL}=\mathrm{Fr}$ – число Фруда.

# Колебание струн в однородном потоке воздуха




*Rochko A.* On the development of turbulent wakes from vortex streets. - NACA Rep., 1954, v. 1191.

## Критерии подобия

$$\mathrm{Sh} = \mathrm{Sh}(\mathrm{Re}) = \frac{Nd}{V_\infty}, \quad c_w = \mathrm{Eu}(\mathrm{Re}) = \frac{P}{\rho V_\infty^2}, \quad \mathrm{Re} = \frac{V_\infty d}{\nu}.$$

*Заданные величины*: $d$ – диаметр струны, $V_\infty$ – скорость набегающего потока, $\nu$ – вязкость, $\rho$ – плотность.

*Неизвестные*: $N$ – частота колебаний, $P$ – давление.

**Определение**

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется размерноoднородной, если существует такая совокупность чисел $b_k$ $(k = \overline{1, m})$, что имеет место равенство:

$$f(\alpha_1^{a_{11}} \ldots \alpha_m^{a_{1m}} x_1, \ldots, \alpha_1^{a_{n1}} \ldots \alpha_m^{a_{nm}} x_n) = \alpha_1^{b_1} \alpha_2^{b_2} \ldots \alpha_m^{b_m} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

для всех $\alpha_k$ $(k = \overline{1, m})$ и $x_i$ $(i = \overline{1, n})$ в области определения.

# Основы теории размерности

П-теорема (Бекингем, Федерман)

Если $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ – численные значения $n$ физических величин, $A = (a_{ij})$ $(i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m})$ – матрица их размерностей по отношению к единцам измерения $M_1, M_2, \ldots, M_m$, $f$ – произвольная размерноoднородная функция переменных $x_1$, $x_2$, …, $x_n$, а $\Pi_1$, $\Pi_2$, …, $\Pi_p$ $(p = n - r$, $r$ – ранг матрицы $A)$ – фундаментальная система степенных одночленов переменных $x_1$, $x_2$, …, $x_n$, то при произвольных действительных числах $k_1$, $k_2$, …, $k_n$ имеет место равенство:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} G(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_p).$$

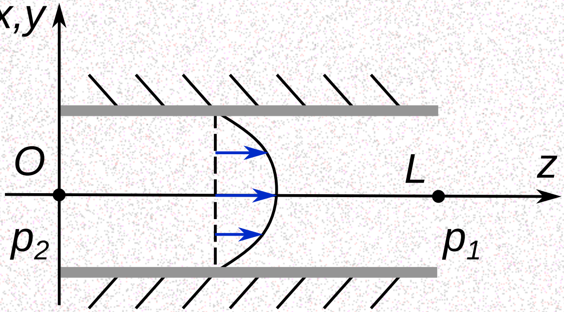
## Размерности параметров в уравнениях Навье-Стокса

| | кг | м | с |
|---|---|---|---|
| $x, y, z$ | 0 | 1 | 0 |
| $t$ | 0 | 0 | 1 |
| $u, v, w$ | 0 | 1 | $-1$ |
| $p$ | 1 | $-1$ | $-2$ |
| $g$ | 0 | 1 | $-2$ |
| $\rho$ | 1 | $-3$ | 0 |
| $\mu$ | 1 | $-1$ | $-1$ |

Ранг матрицы $r = 3$. Число размерных величин, определяющих движение, равно 7. Фундаментальная система параметров П содержит $p = n - r = 4$ параметра. Это, например, ранее введенные числа подобия Re, Sh, Eu, Fr.

## Общее решение уравнений Навье-Стокса без учета краевых и начальных условий

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} G(\mathrm{Re}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Sh}, \mathrm{Eu}).$$




## Постановка задачи

В трубе постоянного сечения под действием перепада давления $\Delta p = p_2 - p_1$ течет жидкость плотности $\rho$ и вязкостью $\nu$. Требуется найти кинематические и динамические характеристики потока.

# Постановка математической задачи

Ищем решение стационарных уравнений Навье-Стокса в виде:

$$p = p(x, y, z), \quad \vec{v} = v(x, y, z)\vec{e}_z.$$

Система уравнений, спроектированная на оси координат:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$v\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right).$$

Условия на границах:

$$p|_{z=0} = p_2, \quad p|_{z=L} = p_1,$$

$$v|_S = 0,$$

где $S$ – поверхность трубы.

# Течение Пуазейля

## Решение

Так как $\dfrac{\partial v}{\partial z} = 0$ и $p = p(z)$, то

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{p_2 - p_1}{L}.$$

Из граничных условий следует решение для давления

$$p(z) = p_2 + \frac{p_1 - p_2}{L} z$$

и задача Дирихле для определения профиля скорости

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\Delta p}{\mu L}, \quad v|_\gamma = 0,$$

где $\gamma$ – кривая на пересечении поверхности $S$ и плоскости $Oxy$.

# Течение Пуазейля: плоский канал

## Скорость течения

$$v(y) = \frac{\Delta p \cdot h^2}{2\mu L}\left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right],$$

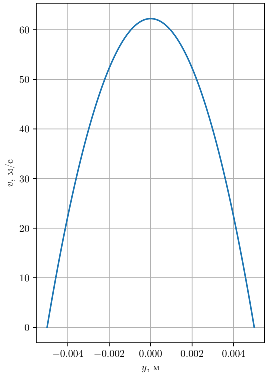
$$v_{max} = \frac{1}{2}\frac{\Delta p \cdot h^2}{\mu L}.$$

## Расход по сечению

$$Q = \int\limits_{-h}^{h} v(y)dy = \frac{2}{3}\frac{\Delta p \cdot h^3}{\mu L}$$

## Средняя скорость по течению

$$v_{avg} = \frac{Q}{2h} = \frac{1}{3}\frac{\Delta p \cdot h^2}{\mu L} = \frac{2}{3}v_{max}$$




Профиль скорости при $\Delta p = 5 \cdot 10^4$ Па, $h = 5$ мм, $L = 10$ м, $\mu = 1004 \cdot 10^{-6}$ Па·с

# Течение Пуазейля: плоский канал

## Закон сопротивления плоского канала

Вводя коэффициент сопротивления $\lambda$ для плоского канала

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{2h} \frac{\rho v_{avg}^2}{2},$$

получим выражение для коэффициента сопротивления через число Рейнольдса:

$$\lambda = \frac{24}{\mathrm{Re}}, \text{ где } \mathrm{Re} = \frac{v_{avg} 2h}{\nu}.$$

# Течение Пуазейля: эллиптический канал

Скорость течения

$$v(x,y) = \frac{\Delta p}{2\mu L}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right),$$

$$v_{max} = \frac{\Delta p}{2\mu L}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Расход по сечению

$$Q = \int\limits_S v(x,y)dxdy = \frac{1}{2}\pi ab v_{max}$$

Средняя скорость по течению

$$v_{avg} = \frac{Q}{\pi ab} = \frac{1}{2}v_{max}$$

# Течение Пуазейля: круглый канал

## Скорость течения

$$v(x,y) = \frac{\Delta p}{2\mu L}\frac{r^2}{2}\left(1 - \frac{x^2+y^2}{r^2}\right),$$

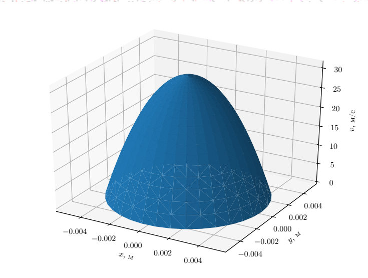
$$v_{max} = \frac{\Delta p}{2\mu L}\frac{r^2}{2}.$$

## Расход по сечению

$$Q = \int\limits_S v(x,y)dxdy = \frac{1}{2}\pi r^2 v_{max}$$

## Средняя скорость по течению

$$v_{avg} = \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{1}{2}v_{max}$$




Профиль скорости при $\Delta p = 5 \cdot 10^4$ Па, $r = 5$ мм, $L = 10$ м, $\mu = 1004 \cdot 10^{-6}$ Па·с

## Закон сопротивления круглого канала

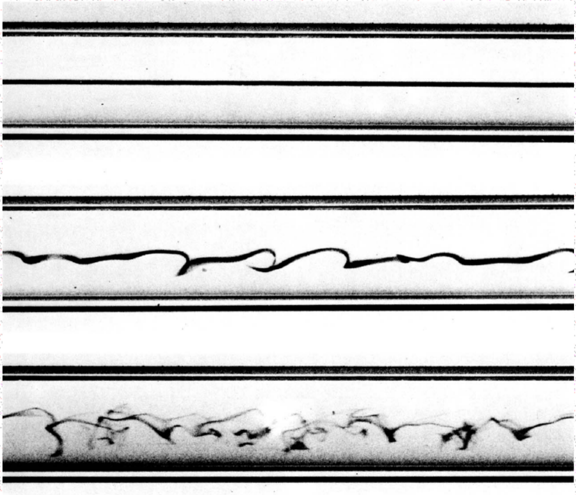
Вводя коэффициент сопротивления $\lambda$ для круглого канала диаметра $d$

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{d} \frac{\rho v_{avg}^2}{2},$$

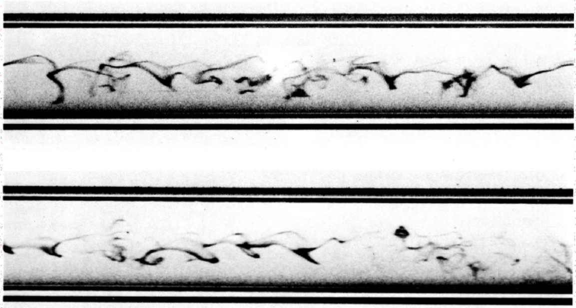
получим выражение для коэффициента сопротивления через число Рейнольдса:

$$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}}, \text{ где } \mathrm{Re} = \frac{v_{avg} d}{\nu}.$$

# Реальное течение в канале



# Реальное течение в канале



Повторение эксперимента Рейнольдса с краской. Критическое число Рейнольдса Re в приведенном эксперименте оказалось ниже 13000 в отличие от оригинального эксперимента Рейнольдса вследствие помех от уличного движения в современном Манчестере.

*М. Ван-Дайк*. Альбом течений жидкости и газа. М.:Мир, 1986

# Литература

*Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости газа и плазмы: Учеб. для вузов. — 7-е изд., испр. – М.:Дрофа, 2003.