

Звуковые колебания

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики ФФ НГУ

12 марта 2019 г.

Аннотация

Звуковые волны. Скорость звука (определение). Скорость звука в идеальном политропном газе. Линеаризация уравнений сохранения. Плоские и сферические звуковые волны. Запаздывающие потенциалы. Способы конструирования решений. Распространение возмущений с до- и сверхзвуковой скоростью.

Основные уравнения динамики идеального газа

Уравнения сохранения для идеального газа

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) S = 0.$$

Замыкающие соотношения

$$p = p(\rho, S).$$

Звуковые волны

Определение

Колебательное движение с малыми амплитудами в сжимаемом газе называют **звуковыми волнами**.

Звуковые волны

Определение

Колебательное движение с малыми амплитудами в сжимаемом газе называют **звуковыми волнами**.

Замечание

При рассмотрении звуковых колебаний будет считать течение **изоэнтропическим** ($S = \text{const}$), тогда из общей системы уравнений остаются только уравнение неразрывности и уравнение Эйлера, а в замыкающем соотношении пропадает зависимость от S , как функции от координаты и времени.

Скорость звука

Уравнения сохранения для идеального газа

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \nabla \rho,$$
$$p = p(\rho).$$

Скорость звука

Уравнения сохранения для идеального газа

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \nabla \rho,$$
$$p = p(\rho).$$

Определение

Величина $c > 0$, определяемая соотношением

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S,$$

называется **скоростью звука**.

Как видно из определения $c = c(\rho, S)$. Для изоэнтропических течений зависимостью от S как от функции переменных пространства и времени можно пренебречь.

Скорость звука в идеальном политропном газе

Уравнение состояния идеального политропного газа

$$p = A(S)\rho^\gamma \quad \text{или} \quad p = \rho RT/\mu,$$

где $\gamma = c_p/c_V$ – показатель политропы, $A(S)$ – функция энтропии, p – давление, ρ – плотность, T – температура, R – газовая постоянная, μ – молярная масса газа.

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S = \gamma A(S) \rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma \frac{RT}{\mu}.$$

Таким образом,

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}.$$

Линеаризация уравнений движения

Замена переменных

Рассмотрим малые колебания газа в окрестности постоянного решения $\vec{v} = 0, p = p_0, \rho = \rho_0$:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}', \\ c &= c_0 + c', \\ \rho &= \rho_0 + \rho'.\end{aligned}$$

Линеаризация уравнений движения

Замена переменных

Рассмотрим малые колебания газа в окрестности постоянного решения $\vec{v} = 0, p = p_0, \rho = \rho_0$:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}', \\ c &= c_0 + c', \\ \rho &= \rho_0 + \rho'.\end{aligned}$$

Уравнения движения

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0 + \rho')\vec{v}' = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + (\vec{v}' \cdot \nabla)\vec{v}' = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'}(c_0 + c')^2 \nabla(\rho_0 + \rho').$$

Уравнения звуковых колебаний

Основные уравнения

Считая колебания малыми, отбрасываем все слагаемые, имеющие порядок малости два и выше, получим

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \nabla \rho' = 0.$$

Уравнения звуковых колебаний

Основные уравнения

Считая колебания малыми, отбрасываем все слагаемые, имеющие порядок малости два и выше, получим

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \nabla \rho' = 0.$$

Потенциальное течение и волновое уравнение

Если $\vec{v}' = \nabla \varphi$, тогда

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \Delta \varphi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi + \frac{c_0^2}{\rho_0} \nabla \rho' = 0.$$



$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta \varphi.$$

Решение волнового уравнения для плоских волн

Одномерное плоское течение

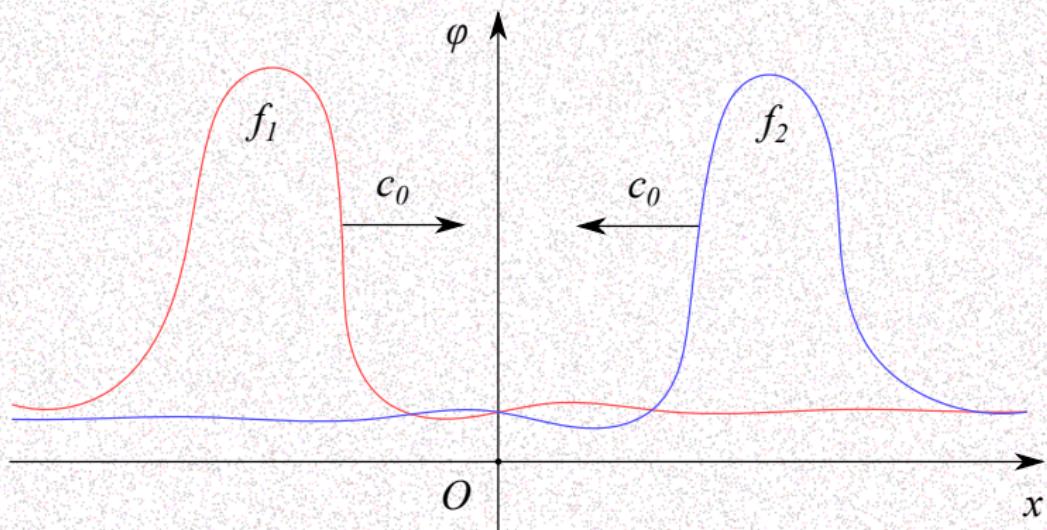
Если $\varphi = \varphi(t, x)$, тогда решением полученного волнового уравнения будет

$$\varphi(t, x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t) = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

где $f_1(\xi), f_2(\eta)$ – произвольные дважды дифференцируемые функции своих аргументов

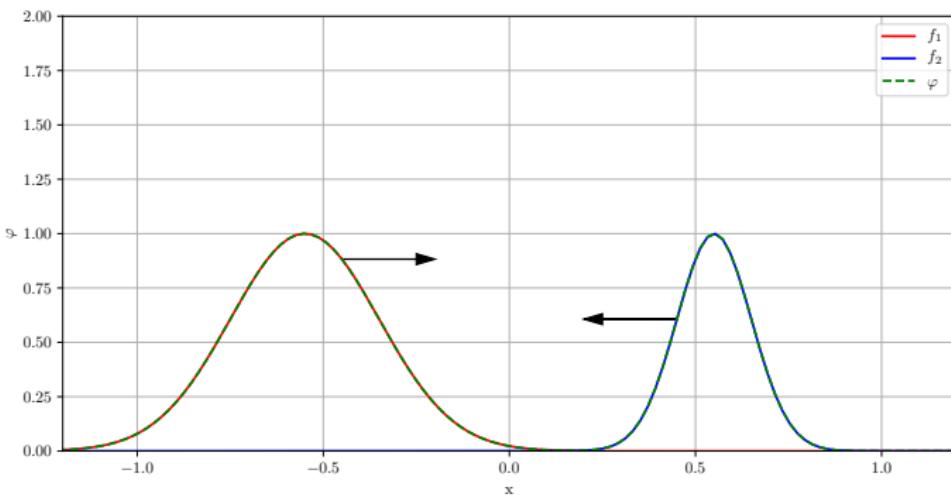
$$\xi = x - c_0 t, \quad \eta = x + c_0 t.$$

Прогрессивные волны



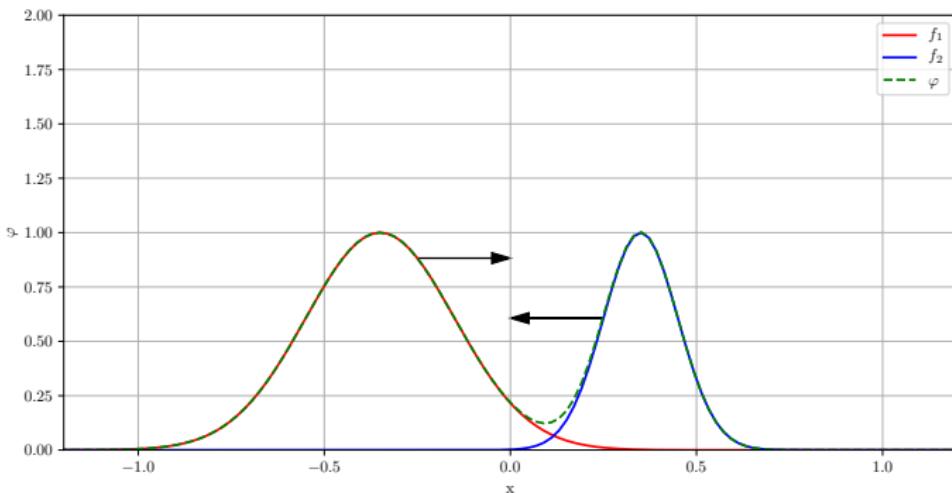
Решение $\varphi(t, x)$ представляет собой сумму перемещающихся поступательно вправо и влево волн неизменного вида с скоростью c_0 .

Иллюстрация распространения плоских волн



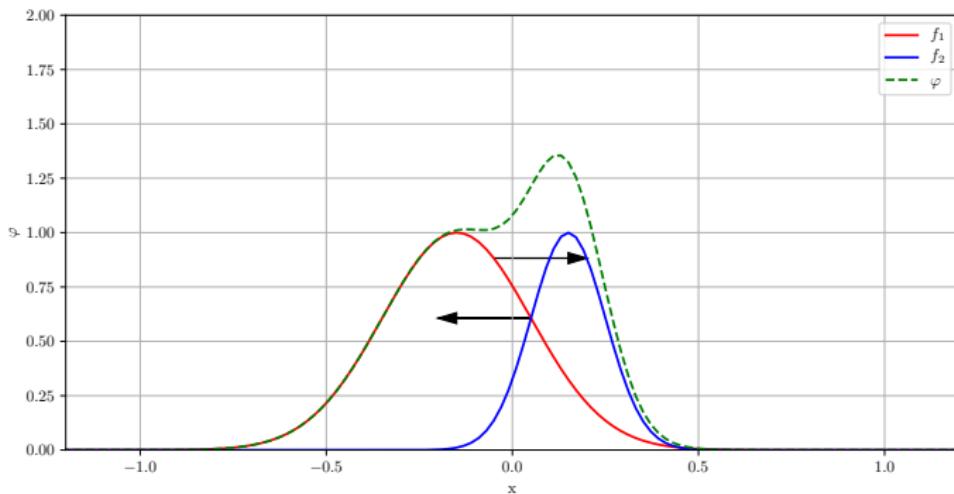
На рисунке $\varphi(t, x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t)$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения плоских волн



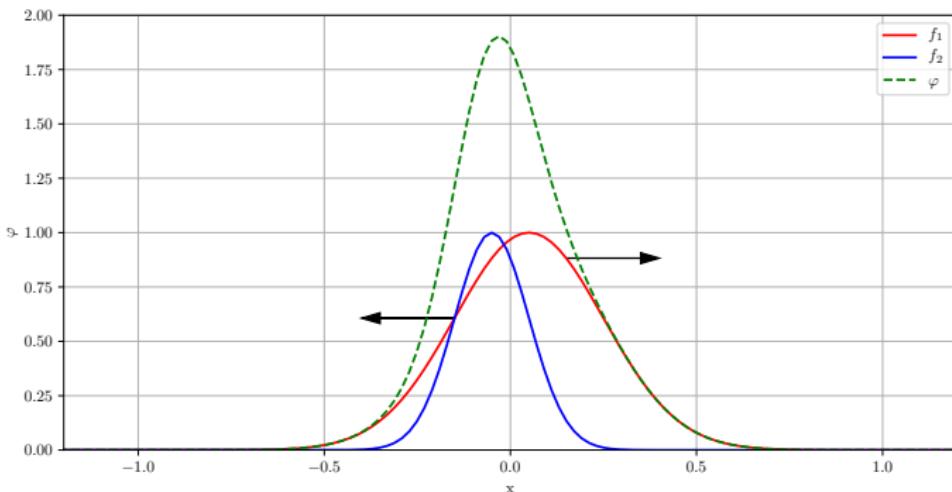
На рисунке $\varphi(t, x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t)$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения плоских волн



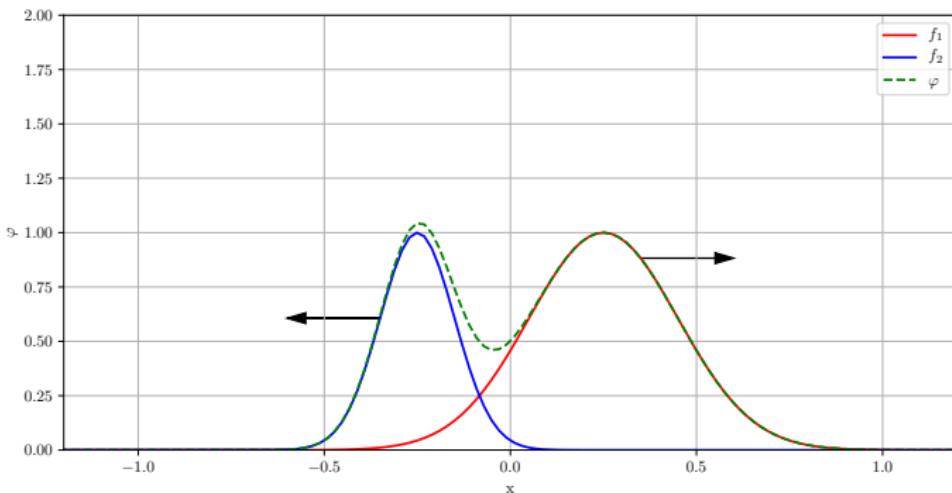
На рисунке $\varphi(t, x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t)$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения плоских волн



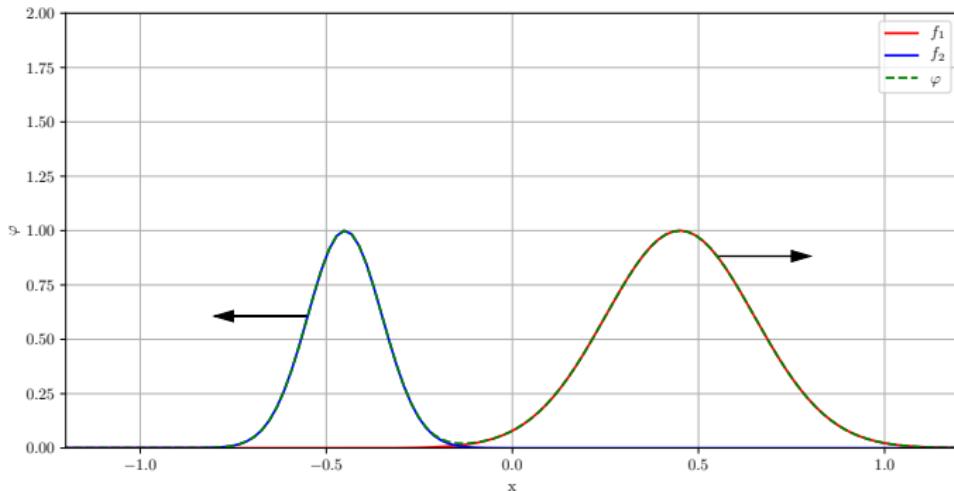
На рисунке $\varphi(t, x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t)$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения плоских волн



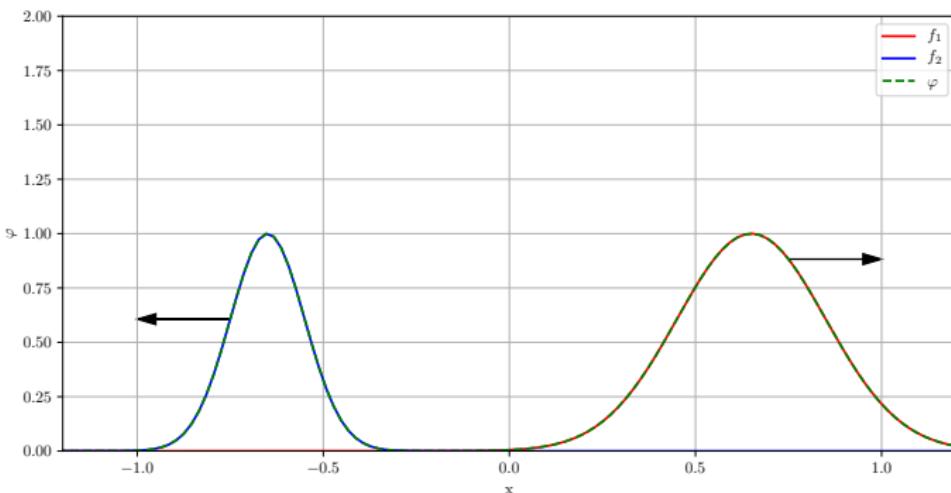
На рисунке $\varphi(t, x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t)$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения плоских волн



На рисунке $\varphi(t, x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t)$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения плоских волн



На рисунке $\varphi(t, x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t)$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Решение волнового уравнения в сферической симметрии

Волновое уравнение в сферической симметрии

Если $\varphi = \varphi(t, r)$, тогда волновое уравнение имеет вид

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right) \iff \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\varphi) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi).$$

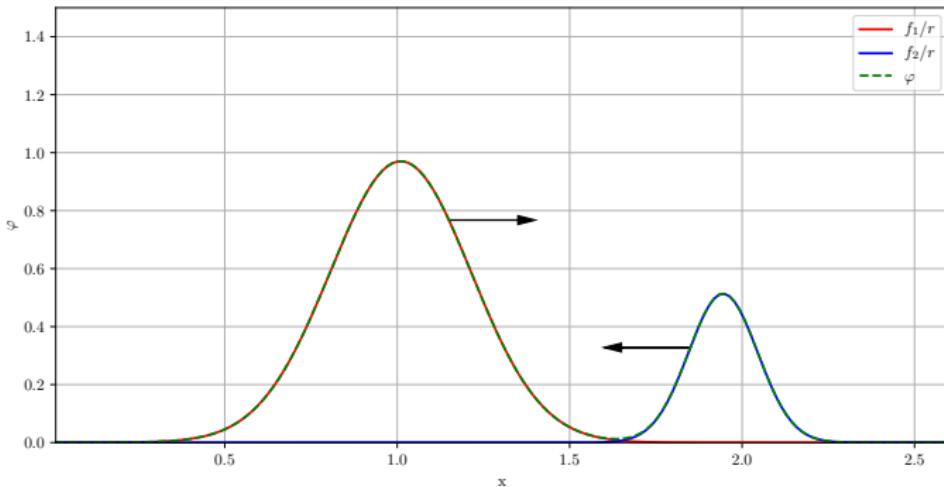
Одномерное сферическое течение

Решением полученного волнового уравнения будет

$$\varphi(t, r) = \frac{f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t)}{r} = \frac{Q_1(\xi)}{r} + \frac{Q_2(\eta)}{r},$$

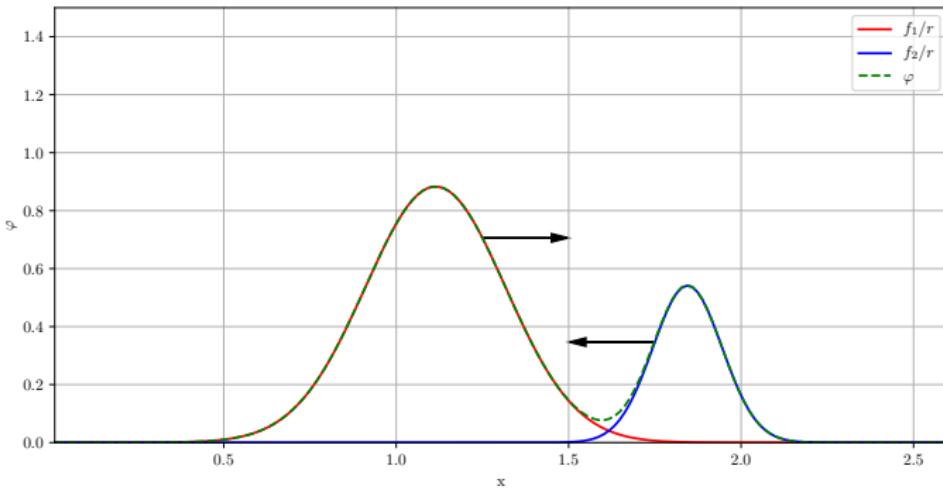
где $Q_1(\xi)$, $Q_2(\eta)$ – произвольные дважды дифференцируемые функции своих аргументов $\xi = r - c_0 t$, $\eta = r + c_0 t$.

Иллюстрация распространения сферических волн



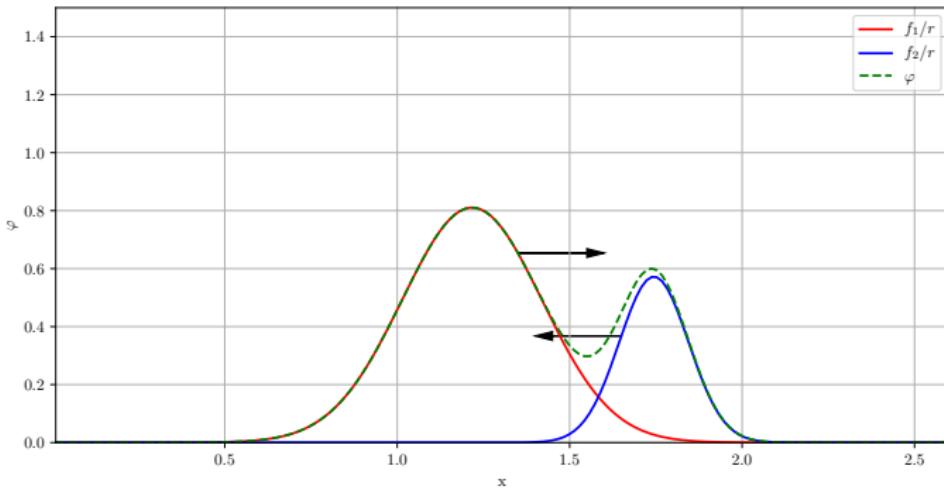
На рисунке $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения сферических волн



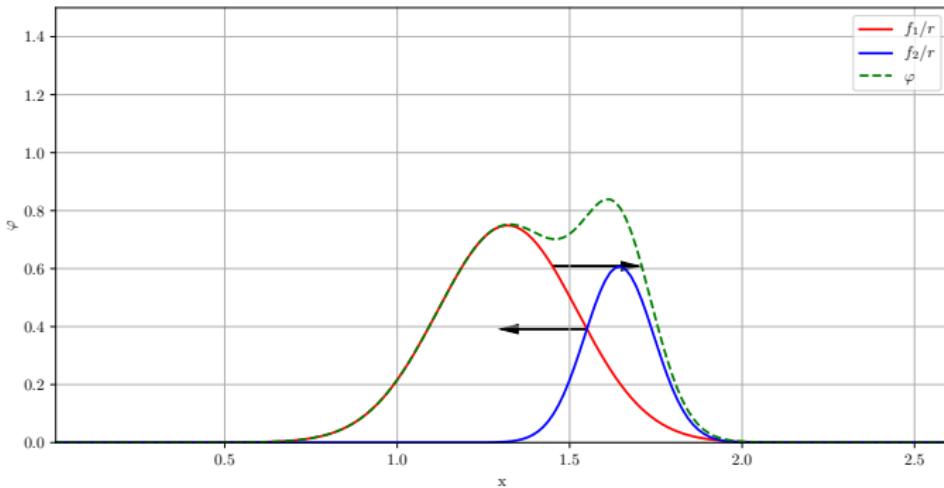
На рисунке $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения сферических волн



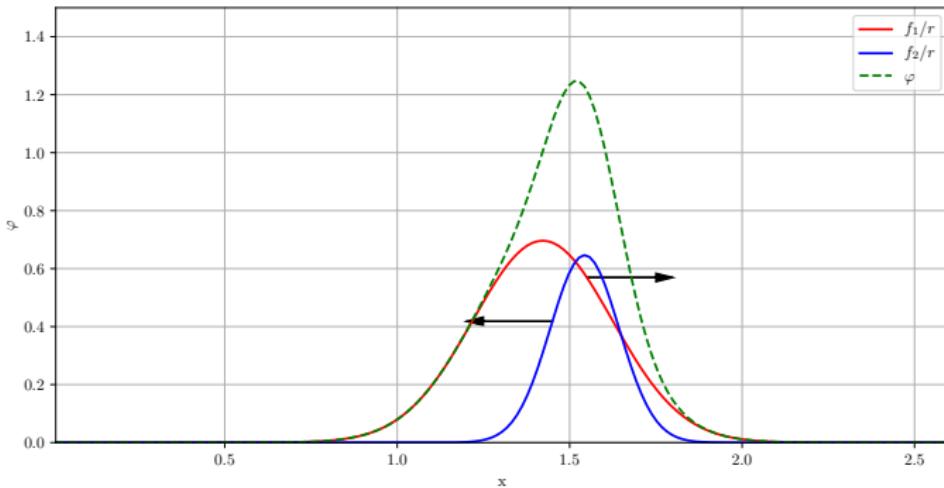
На рисунке $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения сферических волн



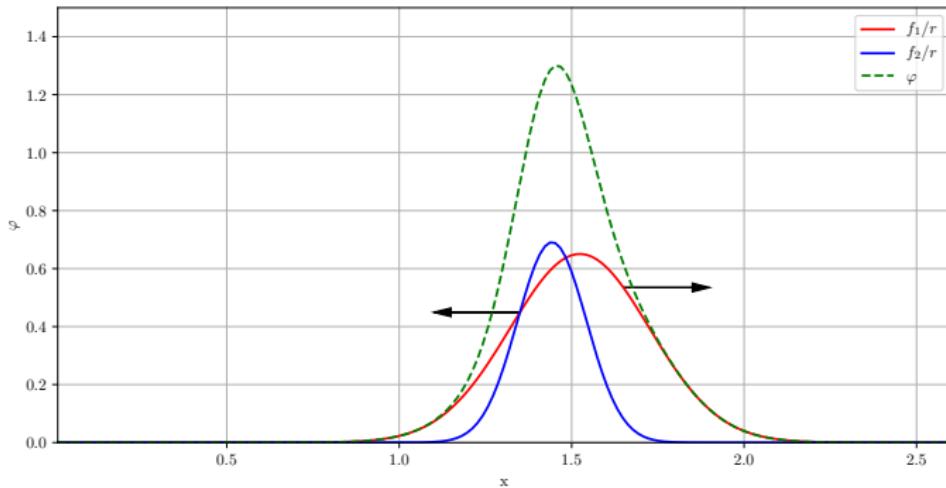
На рисунке $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения сферических волн



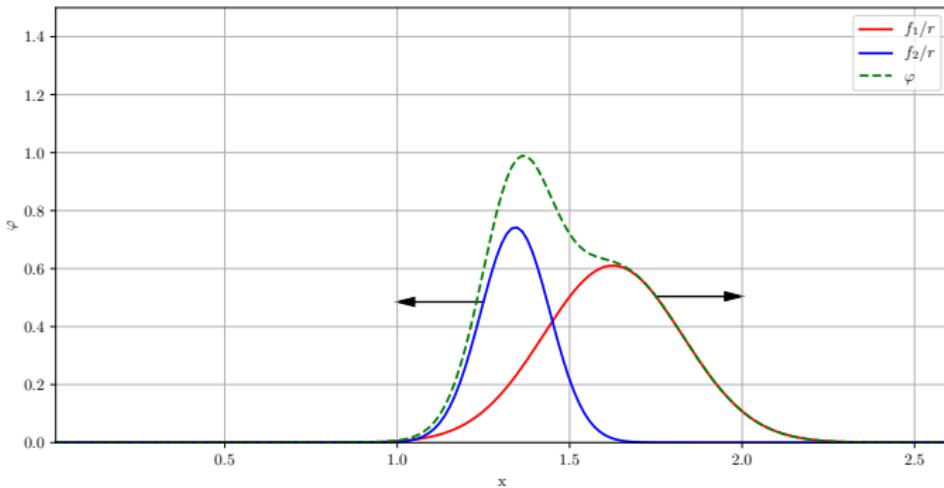
На рисунке $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения сферических волн



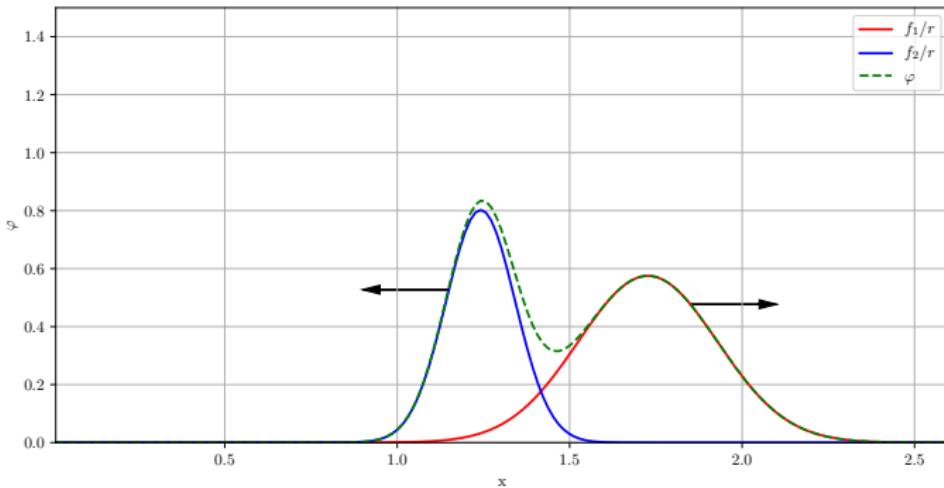
На рисунке $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения сферических волн



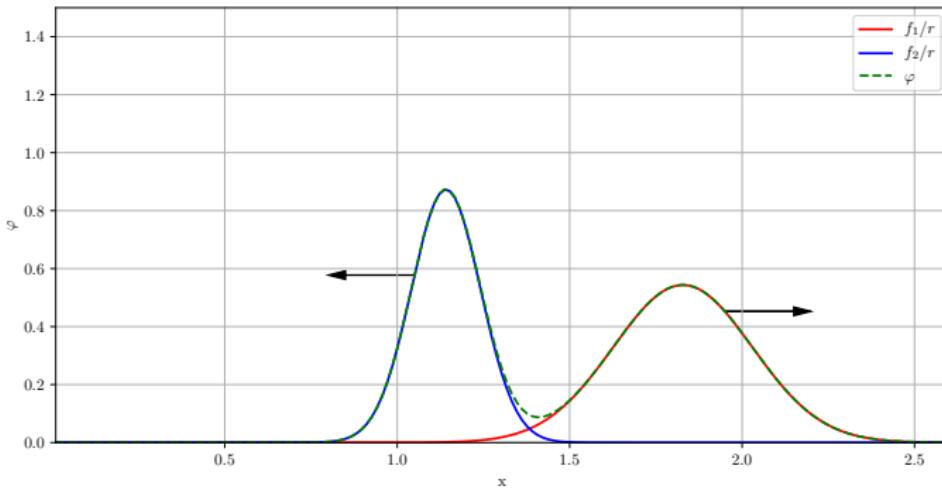
На рисунке $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения сферических волн



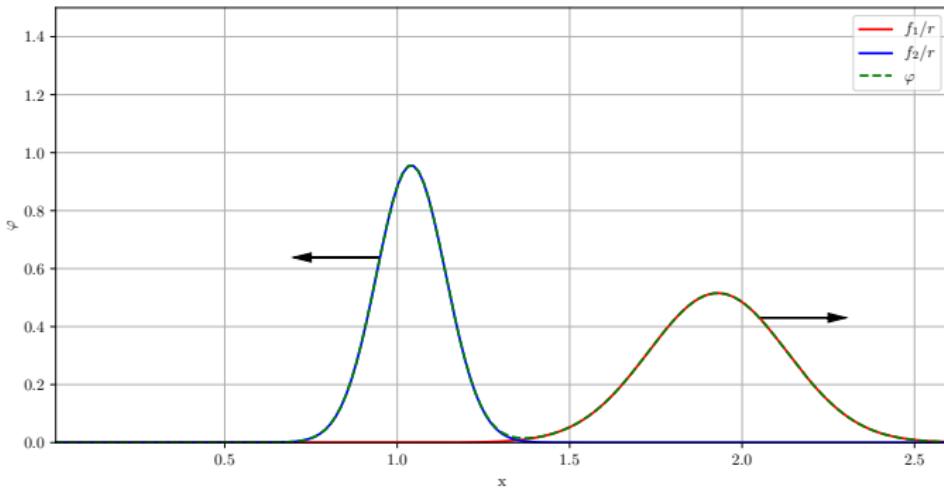
На рисунке $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения сферических волн



На рисунке $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация распространения сферических волн



На рисунке $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Запаздывающие потенциалы

Определение

Возмущения из точки $r = 0$ доходят до некоторой точки $r \neq 0$ только через определённое время, поэтому полученное решение волнового уравнения называется **запаздывающим потенциалом**.

Запаздывающие потенциалы

Определение

Возмущения из точки $r = 0$ доходят до некоторой точки $r \neq 0$ только через определённое время, поэтому полученное решение волнового уравнения называется **запаздывающим потенциалом**.

Потенциал источника звука

Функция вида

$$\varphi^*(t, x, y, z) = -\frac{Q \left(c_0(t - t_0) - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \right)}{4\pi \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}$$

является решением волнового уравнения для источника звука, начинаяющего действовать в момент времени $t = t_0$ в точке с координатами (x_0, y_0, z_0) .

Способы конструирования решений волнового уравнения

Принцип суперпозиций

В силу линейности волнового уравнения суммарным потенциалом при движении твёрдого тела по траектории

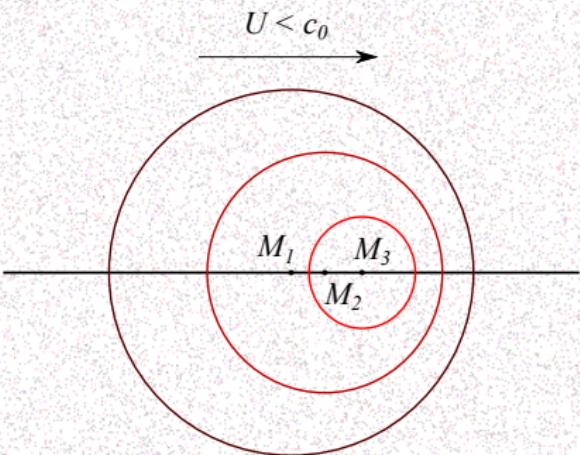
$$x_0 = x_0(t_0), \quad y_0 = y_0(t_0), \quad z_0 = z_0(t_0)$$

можно рассматривать потенциал, являющийся суммой источников звука, возбуждаемых телом в момент времени t_0 в соответствующих точках траектории с заданной интенсивностью Q_{t_0} , при этом

$$\varphi = \int_0^t \varphi^* dt_0.$$

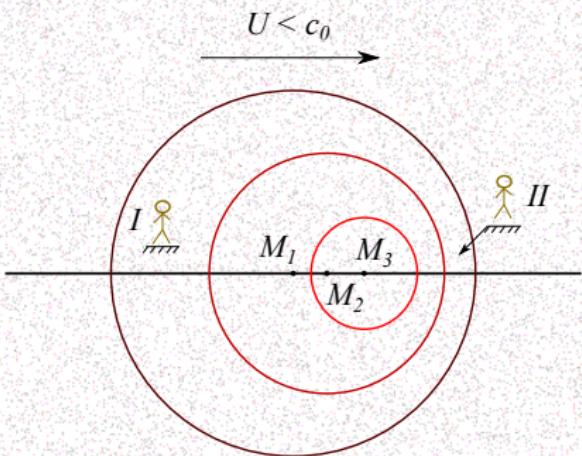
Распространение возмущений от источника, движущегося с дозвуковой скоростью

При движения тела прямолинейно с дозвуковой скоростью



возмущения, возникающие на траектории его движения движутся быстрее, чем само тело, поэтому в его окрестности среда до него и после **возмущена**. Возмущения, посланные источником звука ранее, всегда обгоняют более поздние.

Распространение возмущений от источника, движущегося с дозвуковой скоростью



Эффект Допплера

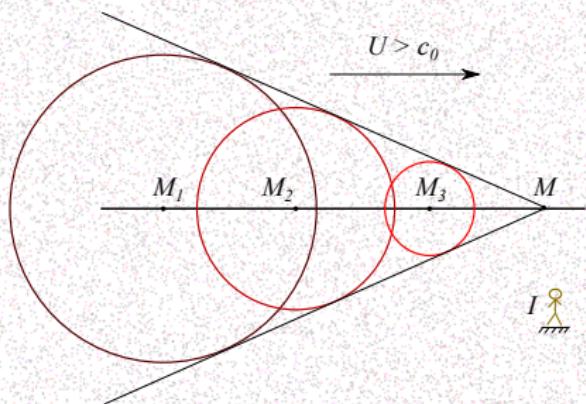
При движения тела прямолинейно с дозвуковой скоростью

$$U < c_0,$$

частота звука до перед телом (положение II) имеет большую частоту, чем за ним (положение I). Это обстоятельство объясняет так называемый **эффект Допплера**.

Распространение возмущений от источника, движущегося со сверхзвуковой скоростью

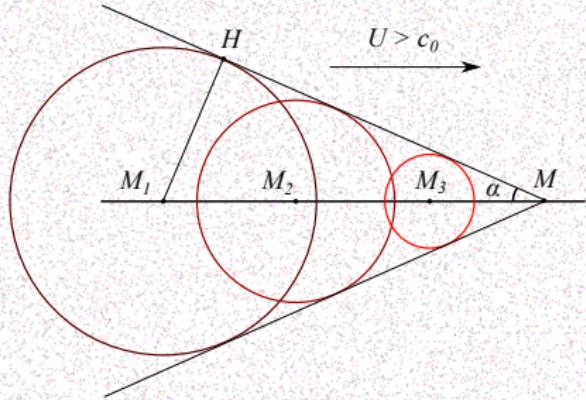
При движения тела прямолинейно со сверхзвуковой скоростью



$$U > c_0,$$

возмущения от источника будут распространяться медленнее, чем тело. Поэтому среда перед телом всегда будет **невозмущенная**. Наблюдатель, стоящий перед источником, движущимся со сверхзвуковой скоростью **не слышит** звуковых колебаний, создаваемых этим источником.

Распространение возмущений от источника, движущегося со сверхзвуковой скоростью



Конус Маха

При движении тела прямолинейно со сверхзвуковой скоростью $U > c_0$, огибающая возмущений будет образовывать конус с углом при вершине $\angle HMM_1$, обозначенным α , таким что

$$\sin \alpha = \frac{M_1 H}{M_1 M} = \frac{c_0 \Delta t}{U \Delta t} = \frac{c_0}{U} = \frac{1}{M},$$

где Δt – время, за которое тело прошло расстояние $M_1 M$; $M = U/c_0$ – **число Маха**.

Угол α называется **углом Маха**, а поверхность конуса – **конусом Маха**.

Литература

- *Л.И. Седов.* Механика сплошной среды. Том 2. М.:Наука, 1970.