

# Обтекание тел плоскими потенциальными течениями идеальной жидкости

*Верещагин Антон Сергеевич*  
канд. физ.-мат. наук, доцент

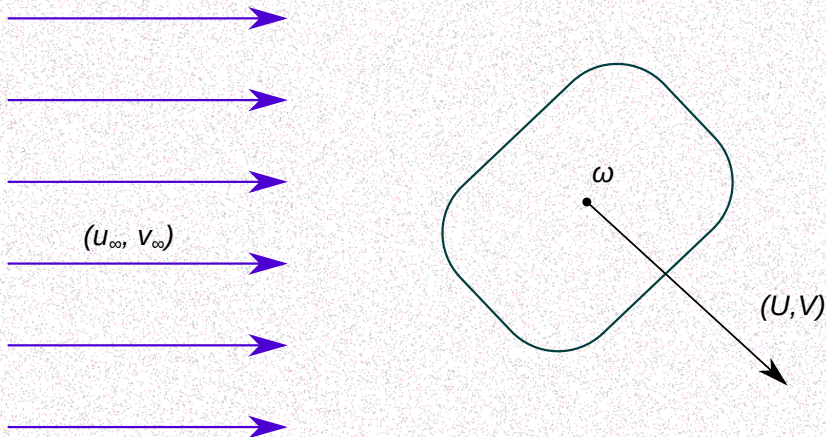
Кафедра аэрофизики и газовой динамики



30 декабря 2020 г.

Обтекание абсолютно твердого тела. Задание граничных условий.  
Формулы Блазиуса – Чаплыгина. Формулы Кутты – Жуковского.

# Задача обтекания абсолютно твердого тела



# Математическая постановка задачи обтекания тела потенциальным потоком идеальной жидкости

Требуется найти **аналитический комплексный потенциал**

$$w(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y), \quad z = x + iy,$$

определенный в рассматриваемой бесконечной области, связанный соответствующими условиями на бесконечности и границе с телом и такой, что

$$\Delta\psi(x,y) = 0.$$

## Замечание

Так как потенциал  $\varphi$  связан с функцией тока  $\psi$  соотношениями Коши – Римана, то функция тока находится автоматически. Можно, наоборот, искать потенциал  $\varphi$ , а  $\psi$  выражать через соотношения Коши – Римана.

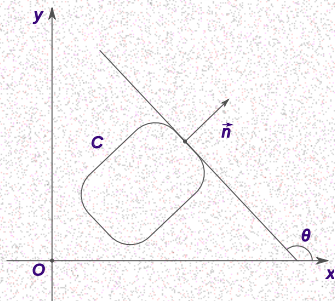
## Условия на бесконечности

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

для бесконечно удаленных точек пространства, т.к. скорость на бесконечности равна 0.



# Условие «непротекания» на границе с телом



## Условие на границе с телом

Нормальная составляющая (относительно границы тела) скорость течения должна совпадать с нормальной составляющей скорости тела.

$$\begin{aligned} v_n &= v_x \cos(\vec{n}, x) + v_y \cos(\vec{n}, y) = v_x \sin \theta - v_y \cos \theta = \\ &= v_x \frac{dy}{ds} - v_y \frac{dx}{ds} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial \psi}{\partial s}, \end{aligned}$$

где  $x(s)$ ,  $y(s)$  – параметризованная граница тела в окрестности рассматриваемой точки.

# Условие для движения абсолютно твердого тела

Пусть тело совершает поступательное движение со скоростью  $(U, V)$  и вращательное движение с угловой скоростью  $\omega$ , тогда скорости точек тела будут иметь вид:

$$u_x = U - \omega y, \quad u_y = V + \omega x,$$

где  $(x, y)$  – координаты точек тела во вращающейся системе координат, жестко связанной с телом.

# Условие для движения абсолютно твердого тела

Пусть тело совершает поступательное движение со скоростью  $(U, V)$  и вращательное движение с угловой скоростью  $\omega$ , тогда скорости точек тела будут иметь вид:

$$u_x = U - \omega y, \quad u_y = V + \omega x,$$

где  $(x, y)$  – координаты точек тела во вращающейся системе координат, жестко связанной с телом.

## Условие на границе с телом

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial s} &= u_x \cos(\vec{n}, y) + u_y \cos(\vec{n}, x) = u_x \frac{dy}{ds} - u_y \frac{dx}{ds} = \\ &= (U - \omega y) \frac{dy}{ds} - (V + \omega x) \frac{dx}{ds} \end{aligned}$$

Отсюда,

$$\psi = Uy - Vx - \frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2) + c.$$



# Частный случай набегающего потока на покоящееся тело

## Условие на границе тела

В случае покоящегося тела  $U = V = 0$ ,  $\omega = 0$  условие на границе тела будет:

$$\psi(x,y) = \text{const.}$$

## Условие на бесконечности

В случае набегающего потока с параметрами на бесконечности

$$v_x = v_\infty, \quad v_y = 0,$$

условие для бесконечно удаленных точек будет:

$$\psi(x,y) = v_\infty y + \text{const.}$$

# Задача обтекание тела

Таким образом, задача обтекания тела плоским потенциальным потоком идеальной жидкости сводится к решению задачи Дирихле для функции тока  $\psi$ :

- 1) внутри исследуемой области решается уравнение Лапласа:

$$\Delta\psi = 0;$$

- 2) а на бесконечности и границе обтекаемого тела заданы значения функции  $\psi$  в зависимости от условий обтекания.

# Сила при безотрывном обтекании

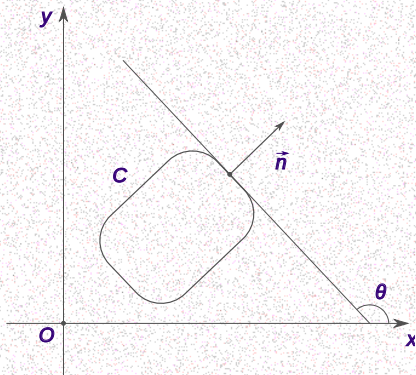
## Определение

По аналогии с комплексными скоростью и потенциалом определим комплексную силу  $R$ , действующую на контур  $C$  в области течения по формуле

$$R = X + iY,$$

где  $X$ ,  $Y$  – вещественные проекции силы на оси координат.

# Формула для силы через давление при безотрывном обтекании



Комплексно-сопряженная сила  $R^*$  вдоль контура тела  $C$  при безотрывном обтекании:

$$\begin{aligned} R^* &= X - iY = \\ &= - \oint_C p(\cos(\vec{n}, x) - i \cos(\vec{n}, y)) ds = \\ &= - \oint_C p(\sin \theta + i \cos \theta) ds = \\ &= -i \oint_C p e^{-\theta i} ds. \end{aligned}$$

## Выражение для комплексного дифференциала

$$dz = dx + idy = ds(\cos \theta + i \sin \theta) = e^{i\theta} ds,$$

$$dz^* = dx - idy = ds(\cos \theta - i \sin \theta) = e^{-i\theta} ds.$$

Отсюда

$$dz^* = e^{-2\theta i} dz.$$



## Выражение для комплексного дифференциала

$$\begin{aligned} dz &= dx + idy = ds(\cos \theta + i \sin \theta) = e^{i\theta} ds, \\ dz^* &= dx - idy = ds(\cos \theta - i \sin \theta) = e^{-i\theta} ds. \end{aligned}$$

Отсюда

$$dz^* = e^{-2\theta i} dz.$$

## Интеграл Бернулли

Связь давления и скорости через интеграл Бернулли

$$p = c - \frac{1}{2} \rho v^2$$

справедлива вдоль контура тела при безотрывном обтекании, т.к. он является линией тока. При потенциальном течении эта связь справедлива во всей области течения.

$$R^* = -ic \oint_C dz^* + \frac{i\rho}{2} \oint_C v^2 dz^* = \frac{i\rho}{2} \oint_C v^2 dz^* = \frac{i\rho}{2} \oint_C (ve^{-i\theta})^2 dz$$

$$R^* = -ic \oint_C dz^* + \frac{i\rho}{2} \oint_C v^2 dz^* = \frac{i\rho}{2} \oint_C v^2 dz^* = \frac{i\rho}{2} \oint_C (ve^{-i\theta})^2 dz$$

Используя, что

$$ve^{-i\theta} = v \cos \theta - iv \sin \theta = v_x - iv_y = v^*,$$

получим:

$$R^* = X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint_C (v^*)^2 dz.$$

$$\begin{aligned}
 L &= - \oint_C p(x \cos(\vec{n}, y) - y \cos(\vec{n}, x)) ds = - \oint_C p(x \cos \theta + y \sin \theta) ds = \\
 &= - \oint_C p(x dx + y dy) = - \oint_C \left( c + \frac{\rho v^2}{2} \right) (x dx + y dy) = \\
 &= - \oint_C c d(x^2 + y^2) - \frac{\rho}{2} \oint_C v^2 (x dx + y dy) = \operatorname{Re} \left( -\frac{\rho}{2} \oint_C v^2 z dz^* \right) = \\
 &= \operatorname{Re} \left( -\frac{\rho}{2} \oint_C (v^*)^2 z dz, \right),
 \end{aligned}$$

т.к.  $v^2 dz^* = (v^*)^2 dz$ .

# Формулы Блазиуса – Чаплыгина для потенциального течения

Если течение потенциально, тогда существует комплексный потенциал:

$$w(z) = \varphi(z) + i\psi(z) \quad \text{и} \quad \frac{dw}{dz} = v^*.$$

## Формулы Блазиуса – Чаплыгина

$$R^* = X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz,$$

$$L = \operatorname{Re} \left[ -\frac{\rho}{2} \oint_C \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 z dz \right].$$



# Формула Кутты – Жуковского

## Предположения

Поток потенциален вне тела, которое можно заменить на конечное число источников, вихрей и диполей, лежащих внутри границы тела – контура  $C$ .

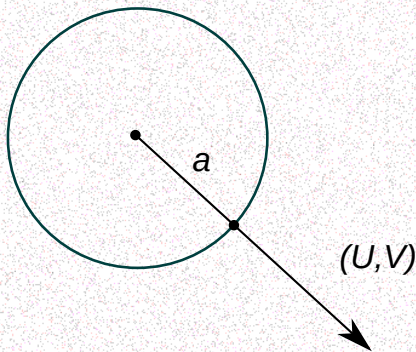
## Формула для силы и реакции

$$R^* = X - iY = i\rho\Gamma v_\infty^*,$$

$$L = \operatorname{Re} \left[ -\rho v_\infty^* \sum_{k=1}^m \Gamma_k b_k - i\rho M v_\infty^* \right],$$

где  $\Gamma_i$  – циркуляции вихрей, находящихся в точках  $b_i$  ( $i = 1, \dots, m$ );  $M$  – суммарный момент источников и диполей;  $\Gamma$  – суммарная циркуляция вихрей, находящихся внутри тела.

# Задача обтекания кругового цилиндра



Найти комплексный потенциал обтекания кругового цилиндра радиуса  $a$ , движущегося в бесконечной покоящейся жидкости со скоростью  $(U, V)$ .

# Задача обтекания кругового цилиндра

## Постановка задачи

В системе координат цилиндра найти потенциал

$$w(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$$

такой, что его мнимая часть на окружности  $|z| = a$  удовлетворяет условию

$$\psi(x + iy) = Uy - Vx + \text{const.}$$

# Задача обтекания кругового цилиндра

## Решение

$$\begin{aligned}w(z) &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - (U + iV) \frac{a^2}{z}, \\ \varphi(z) &= \frac{\Gamma}{2\pi\theta} - (U \cos \theta + V \sin \theta) \frac{a^2}{r}, \\ \psi(z) &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + (U \sin \theta - V \cos \theta) \frac{a^2}{r},\end{aligned}$$

где  $z = re^{i\theta}$ .

# Задача обтекания кругового цилиндра жидкостью движущейся на бесконечности

## Решение

Обтекание круга поступательным потоком имеет потенциал

$$w(z) = v_{\infty}^* z + \frac{a^2 v_{\infty}}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$



1. *Валландер С. В.* Лекции по гидроаэромеханике. Учеб. пособие. Л. Изд-во Ленингр. ун-та, 1978.
2. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Гос. издат. физ.-мат. лит., 1963.