Вихревые течения идеальной жидкости

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики ФФ НГУ

15 ноября 2018 г.

Аннотация

Потенциальные и вихревые течения идеальной жидкости

Определение

Течение идеальной жидкости называется **вихревым**, если вектор $\vec{\Omega} = \operatorname{rot} \vec{v}$ в некоторых точках исследуемой области отличен от нулевого.

Потенциальные и вихревые течения идеальной жидкости

Определение

Течение идеальной жидкости называется **вихревым**, если вектор $\vec{\Omega} = \operatorname{rot} \vec{v}$ в некоторых точках исследуемой области отличен от нулевого.

Выражение для компонент вектора вихря

$$\Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Потенциальные и вихревые течения идеальной жидкости

Определение

Течение идеальной жидкости называется **вихревым**, если вектор $\vec{\Omega} = \operatorname{rot} \vec{v}$ в некоторых точках исследуемой области отличен от нулевого.

Выражение для компонент вектора вихря

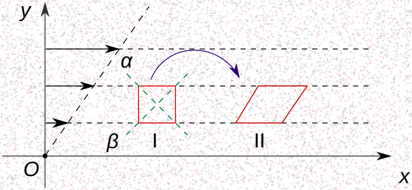
$$\Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Если же в исследуемой области везде $\vec{\Omega} = 0$, тогда течение в этой области называется потенциальным, и существует потенциал φ такой, что

$$\vec{v} = \nabla \varphi.$$

Справедливо и обратное утверждение.

Пример вихревого течения



Движение жидкости слоями

$$v_x = ay, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0.$$

Вихрь скорости

$$\Omega_x = 0, \quad \Omega_y = 0, \quad \Omega_z = -a.$$

Описание

По теореме Кельвина-Гельмгольца о скорости деформируемой частицы квадрат *I* переходит в параллелограмм *II* посредством сдвига вдоль оси x, поворота как твердого тела по указанной стрелке и чистой деформации в виде сжатия вдоль линии α и растяжения вдоль линии β.

Вихревые линии и вихревые трубки

Определение

Вихревой линией называется такая линия, во всякой точке которой вихрь скорости $\vec{\Omega}$ направлен по касательной к этой линии.

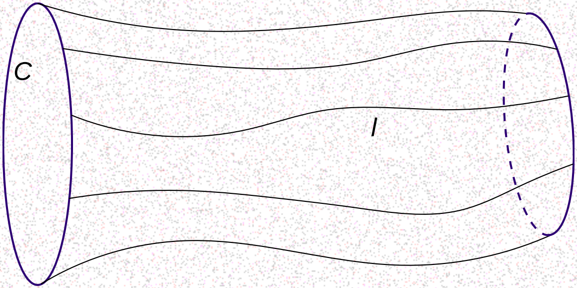
Уравнения вихревой линии

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z}.$$

Вихревая трубка

Определение

Вихревой трубкой называется совокупность точек пространства, ограниченных вихревыми линиями, проведёнными через заданный замкнуты контур.



Циркуляция скорости и теорема Стокса

Определение

Циркуляцией скорости Γ по замкнутому контуру называется линейный интеграл

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_C v_x dx + v_y dy + v_z dz.$$

Теорема Стокса

Циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через площадку, ограниченную этим контуром:

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{n} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) dS,$$

где вектор $\vec{n}$ – вектор единичной нормали к S, направленный по правилу буравчика.

Интенсивность вихревой трубки

Определение

Интенсивностью вихревой трубки называется поток вектора вихря Ω через сечение вихревой трубки

$$I = \int\limits_S \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS.$$

Теорема о постоянстве циркуляции для вихревой трубки

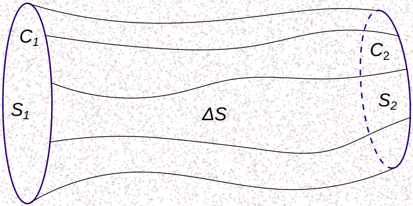
Теорема

Циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему данную вихревую трубку постоянна.

Теорема о постоянстве циркуляции для вихревой трубки

Теорема

Циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему данную вихревую трубку постоянна.

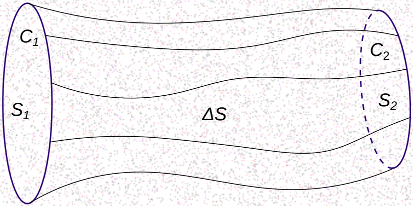


Рассмотрим вихревую трубку V, ограниченную с торцов сечениями S_1, S_2 и боковой поверхностью ΔS. Сечения S_1, S_2 пересекаются с ΔS по контурам C_1 и C_2.

Теорема о постоянстве циркуляции для вихревой трубки

Теорема

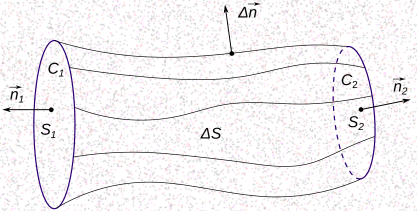
Циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему данную вихревую трубку постоянна.



Рассмотрим вихревую трубку V, ограниченную с торцов сечениями S_1, S_2 и боковой поверхностью ΔS. Сечения S_1, S_2 пересекаются с ΔS по контурам C_1 и C_2.

$$0 = \int\limits_V \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v}\, dV = \int\limits_V \operatorname{div} \vec{\Omega} dV = \int\limits_S \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS$$

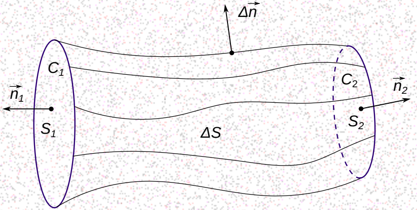
Теорема о постоянстве циркуляции для вихревой трубки: доказательство



$$\int\limits_S \vec{\Omega}\cdot\vec{n}dS = \int\limits_{S_1} \vec{\Omega}\cdot\vec{n}_1 dS + \int\limits_{S_2} \vec{\Omega}\cdot\vec{n}_2 dS + \int\limits_{\Delta S} \vec{\Omega}\cdot\Delta\vec{n} dS.$$

Т.к. на боковой поверхности вихревой трубки ΔS вектора $\vec{\Omega}$ и $\Delta\vec{n}$ ортогональны, то последний интеграл равен 0.

Теорема о постоянстве циркуляции для вихревой трубки: доказательство

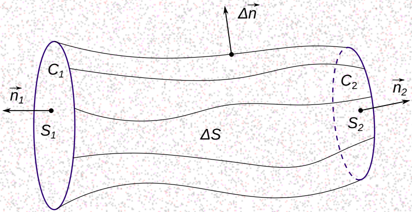


Таким образом, используя теорему Стокса, имеем

$$0 = \int\limits_{S_1} \vec{\Omega} \cdot \vec{n}_1 dS + \int\limits_{S_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{n}_2 dS = \oint\limits_{C_1} \vec{\Omega} \cdot d\vec{l} - \oint\limits_{C_2} \vec{\Omega} \cdot d\vec{l}.$$

В последнем равенстве появился знак минус, потому что нормали $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ направлены в разные стороны. Так как контуры C_1 и C_2 выбраны произвольно, то справедливо утверждение теоремы.

Теорема о постоянстве циркуляции для вихревой трубки: доказательство



Таким образом, используя теорему Стокса, имеем

$$0 = \int\limits_{S_1} \vec{\Omega} \cdot \vec{n}_1 dS + \int\limits_{S_2} \vec{\Omega} \cdot \vec{n}_2 dS = \oint\limits_{C_1} \vec{\Omega} \cdot d\vec{l} - \oint\limits_{C_2} \vec{\Omega} \cdot d\vec{l}.$$

Дополнительно показано, что интенсивность вихревой трубки одна и та же в любом сечении.

Литература

•