

Движение твердого тела в идеальной жидкости

Верецагин Антон Сергеевич

канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрофизики и газовой динамики



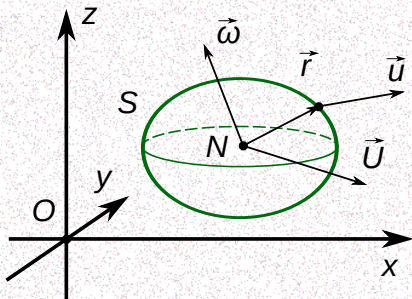
17 декабря 2020 г.

Постановка задачи о движении тела в бесконечной идеальной жидкости, покоящейся на бесконечности. Степень убывания потенциала на бесконечности. Условие на поверхности тела и разложение Кирхгофа для потенциала. Гидродинамические реакции при движении тела. Импульсивная сила, импульсивная пара. Коэффициенты присоединенной массы и их свойства.

Движение тела в безграничной жидкости

Основная задача

Исследовать влияние бесконечной идеальной жидкости, покоящейся на бесконечности, на движение тела, ограниченного поверхностью S , имеющего поступательную $\vec{U}(t)$ и вращательную $\vec{\omega}(t)$ ($t \geq 0$) скорость. Тело начинает движение из состояния покоя.



Скорость движения точки тела

$$\vec{u} = \vec{U} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Математическая постановка для жидкости

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

или по теореме Лагранжа для потенциальных течений

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Условие на границе с телом

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = u_n$$

Условие на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \text{ где } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Интеграл Коши

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\nabla \varphi^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t)^1$$

Интеграл Коши позволяет найти распределение давления по заданному потенциалу, определенному из уравнения неразрывности ($\rho = \text{const}$).

Для бесконечно удаленной точки

$$p = p_0 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho v^2}{2},$$

т.к. на бесконечности скорость жидкости равна 0, а давление p_0 .

¹Считаем, что поле внешних сил отсутствует.

Степень убывания потенциала на бесконечности

Разложение потенциала по сферическим функциям

$$\varphi(r, \theta, \lambda) = \frac{A}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{r^{(n+1)}},$$

где $Y_n(\theta, \lambda)$ – сферические функции. Сферические функции и потенциал заданы в сферической системе координат.

Степень убывания потенциала на бесконечности

Разложение потенциала по сферическим функциям

$$\varphi(r, \theta, \lambda) = \frac{A}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{r^{(n+1)}},$$

где $Y_n(\theta, \lambda)$ – сферические функции. Сферические функции и потенциал заданы в сферической системе координат.

Уравнение неразрывности

Пусть Σ – сфера большого радиуса R с центром в точке O , тогда

$$\int_V \operatorname{div} \vec{v} dV = \int_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = 0,$$

или

$$-4\pi A - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{R^{(n+2)}} \int_{\Sigma} Y_n(\theta, \lambda) dS = 0 \quad R \rightarrow \infty \quad A = 0.$$

Степень убывания потенциала на бесконечности

Общий вид потенциала

$$\varphi(r, \theta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{r^{n+1}}$$

Вывод

Можно считать, что $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ стремятся к 0 при $r \rightarrow \infty$, как величины порядка $1/r^3$, а φ – как $1/r^2$.

Условие на поверхности тела

Скорость точек тела

$$u_x = U_x + \omega_y z - \omega_z y, \quad u_y = U_y + \omega_z x - \omega_x z, \quad u_z = U_z + \omega_x y - \omega_y x$$

Скорость точек на поверхности тела вдоль нормали

Обозначим

$$\cos(\widehat{n, x}) = \alpha, \quad \cos(\widehat{n, y}) = \beta, \quad \cos(\widehat{n, z}) = \gamma$$

для косинусов углов, составляемых нормалью к поверхности S с осями координат.

Нормальная составляющая скорости к поверхности S :

$$u_n = u_x \alpha + u_y \beta + u_z \gamma = (U_x + \omega_y z - \omega_z y) \alpha + (U_y + \omega_z x - \omega_x z) \beta + (U_z + \omega_x y - \omega_y x) \gamma.$$

Соотношение для потенциала

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = U_x \alpha + U_y \beta + U_z \gamma + \omega_x (y\gamma - z\beta) + \omega_y (z\alpha - x\gamma) + \omega_z (x\beta - y\alpha)$$

Величины U_x , U_y , U_z , ω_x , ω_y , ω_z являются функциями времени t , а выражения справа от них – функциями точек пространства на поверхности S , т.е. координат.

Условие на поверхности тела

Вид потенциала в форме Кирхгофа

$$\varphi = U_x\varphi_1 + U_y\varphi_2 + U_z\varphi_3 + \omega_x\varphi_4 + \omega_y\varphi_5 + \omega_z\varphi_6,$$

причем

$$\Delta\varphi_i = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial\varphi_i}{\partial y} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial\varphi_i}{\partial z} = 0$$
$$(i = \overline{1, 6}).$$

На поверхности S :

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \alpha, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \beta, \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial n} = \gamma,$$
$$\frac{\partial\varphi_4}{\partial n} = y\gamma - z\beta, \quad \frac{\partial\varphi_5}{\partial n} = z\alpha - x\gamma, \quad \frac{\partial\varphi_6}{\partial n} = x\beta - y\alpha.$$

Условие на поверхности тела

Смысл введенных потенциалов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$

Потенциал φ_1 соответствует случаю движения тела, когда

$$U_x = 1, \quad U_y = 0, \quad U_z = 0, \quad \omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = 0,$$

т.е. описывает течение при движении тела вдоль оси Ox с единичной скоростью. Аналогичное значение имеют потенциалы φ_2, φ_3 .

Условие на поверхности тела

Смысл введенных потенциалов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$

Потенциал φ_1 соответствует случаю движения тела, когда

$$U_x = 1, \quad U_y = 0, \quad U_z = 0, \quad \omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = 0,$$

т.е. описывает течение при движении тела вдоль оси Ox с единичной скоростью. Аналогичное значение имеют потенциалы φ_2, φ_3 .

Смысл введенных потенциалов $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$

Потенциал φ_4 соответствует случаю движения тела, когда

$$U_x = 0, \quad U_y = 0, \quad U_z = 0, \quad \omega_x = 1, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = 0,$$

т.е. описывает течение при вращательном движении тела относительно оси Ox с единичной скоростью. Аналогичное значение имеют потенциалы φ_5, φ_6 .

Сила и момент сил давления, действующие на тело

$$\vec{R} = - \int_S p \vec{n} dS, \quad \vec{L} = - \int_S p (\vec{r} \times \vec{n}) dS,$$

где p – давление в жидкости; \vec{n} – вектор внешней единичной нормали, направленный из тела в жидкость; \vec{r} – радиус-вектор точек поверхности тела относительно начала координат.

Гидродинамические реакции при движении тела

Сила и момент сил давления, действующие на тело

$$\vec{R} = - \int_S p \vec{n} dS, \quad \vec{L} = - \int_S p (\vec{r} \times \vec{n}) dS,$$

где p – давление в жидкости; \vec{n} – вектор внешней единичной нормали, направленный из тела в жидкость; \vec{r} – радиус-вектор точек поверхности тела относительно начала координат.

Интеграл Коши для связи давления и потенциала

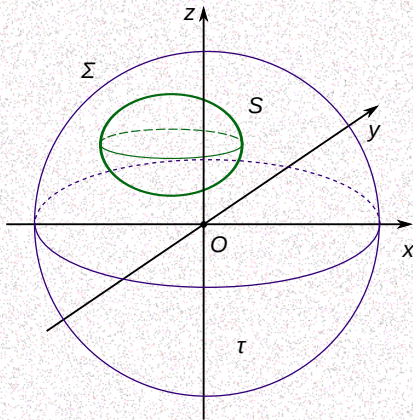
При отсутствии массовых сил, действующих на среду,

$$p = p_0 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho v^2}{2},$$

т.к. на бесконечности скорость жидкости равна 0 и давление равно p_0 .

Соображения для связи реакции и потенциала

Рассмотрим сферу большого радиуса с поверхностью Σ с центром в начале координат, содержащую исследуемое тело с поверхностью S . Обозначим объем, заключенный между S и Σ , через τ .



Закон сохранения импульса для объема τ

Изменение импульса объема τ равно работе сил давления на границах S , Σ и потери импульса через границу Σ в результате конвекции:

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \vec{v} dV = - \int_{S \cup \Sigma} p \vec{n} dS + \int_{\Sigma} \rho \vec{v} v_n dS.$$

Соображения для связи реакции и потенциала

Обозначения

Обозначим искомую силу, действующую на тело:

$$\vec{R} = - \int_S p \vec{n} dS.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \vec{v} dV + \int_{\Sigma} p \vec{n} dS - \int_{\Sigma} \rho \vec{v} v_n dS = \\ &= \rho \frac{d}{dt} \int_{\tau} \nabla \varphi dV + \int_{\Sigma} (p \vec{n} - \rho \vec{v} v_n) dS = \end{aligned}$$

Соображения для связи реакции и потенциала

По теореме Гаусса первый интеграл преобразуем в сумму интегралов по Σ и S , а во второй подставим значение для p из интеграла Коши:

$$= \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \rho \varphi \vec{n} dS + \frac{d}{dt} \int_S \rho \varphi \vec{n} dS + \int_{\Sigma} \left((p_0 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho v^2}{2}) \cdot \vec{n} - \rho \vec{v} v_n \right) dS =$$

Соображения для связи реакции и потенциала

По теореме Гаусса первый интеграл преобразуем в сумму интегралов по Σ и S , а во второй подставим значение для p из интеграла Коши:

$$= \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \rho \varphi \vec{n} dS + \frac{d}{dt} \int_S \rho \varphi \vec{n} dS + \int_{\Sigma} \left((p_0 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho v^2}{2}) \cdot \vec{n} - \rho \vec{v} v_n \right) dS =$$

Так как поверхность Σ не зависит от времени t , то

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \rho \varphi \vec{n} dS = \int_{\Sigma} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \vec{n} dS.$$

Продолжим цепочку:

$$= \frac{d}{dt} \int_S \rho \varphi \vec{n} dS + \int_{\Sigma} \left((p_0 - \frac{\rho v^2}{2}) \cdot \vec{n} - \rho \vec{v} v_n \right) dS =$$

Соображения для связи реакции и потенциала

Используя, что

$$\int_{\Sigma} p_0 \vec{n} dS = p_0 \int_{\Sigma} \vec{n} dS = 0,$$

получим продолжение цепочки:

$$= \frac{d}{dt} \int_S \rho \varphi \vec{n} dS - \rho \int_{\Sigma} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n} + \vec{v} v_n \right) dS.$$

Соображения для связи реакции и потенциала

Используя, что

$$\int_{\Sigma} p_0 \vec{n} dS = p_0 \int_{\Sigma} \vec{n} dS = 0,$$

получим продолжение цепочки:

$$= \frac{d}{dt} \int_S \rho \varphi \vec{n} dS - \rho \int_{\Sigma} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n} + \vec{v} v_n \right) dS.$$

Если положить, что Σ – поверхность сферы радиуса a , и вспомнить, что скорость v стремится к 0 на бесконечности, как $1/a^3$, тогда второе слагаемое в последнем равенстве будет иметь порядок:

$$a^2 / (a^3 \cdot a^3) = 1/a^4 \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0.$$

Выражение для силы

Сила давлений, действующая на тело в безграничной идеальной жидкости, покоящейся на бесконечности имеет вид:

$$\vec{R} = \frac{d}{dt} \int_S \rho \varphi \vec{n} dS.$$

Выражение для момента импульса

Аналогично, записав уравнение сохранения момента импульса для объема τ , можно получить момент сил давления \vec{L} , действующий на тело в безграничной идеальной жидкости, покоящейся на бесконечности:

$$\vec{L} = \frac{d}{dt} \int_S \rho \varphi (\vec{r} \times \vec{n}) dS.$$

Уравнения движения тела в потоке идеальной жидкости

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \rho \varphi \vec{n} dS + \vec{F}, \quad \frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \rho \varphi (\vec{r} \times \vec{n}) dS + \vec{M}$$

\Downarrow

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{G} - \int_S \rho \varphi \vec{n} dS \right) = \vec{F}, \quad \frac{d}{dt} \left(\vec{Q} - \int_S \rho \varphi (\vec{r} \times \vec{n}) dS \right) = \vec{M}$$

Здесь \vec{G} , \vec{Q} – собственный импульс и момент импульса тела; \vec{F} , \vec{M} – внешняя сила и момент внешних сил, не связанных движением жидкости.

Уравнения движения тела в потоке идеальной жидкости

Пусть

$$\vec{B} = -\rho \int_S \varphi \vec{n} dS, \quad \vec{I} = - \int_S \rho \varphi (\vec{r} \times \vec{n}) dS,$$

тогда уравнения движения принимают вид:

$$\frac{d(\vec{G} + \vec{B})}{dt} = \vec{F}, \quad \frac{d(\vec{Q} + \vec{I})}{dt} = \vec{M},$$

где $\vec{G} + \vec{B}$ называется **импульсивной силой**, а $\vec{Q} + \vec{I}$ – **импульсивной парой**.

Новые обозначения

$$U_x = U_1, \quad U_y = U_2, \quad U_z = U_3,$$

$$\omega_x = U_4, \quad \omega_y = U_5, \quad \omega_z = U_6.$$

Вид потенциала

$$\varphi = \sum_{k=1}^6 U_k \varphi_k$$

Коэффициенты B_i

Новые обозначения

$$B_x = B_1, \quad B_y = B_2, \quad B_z = B_3, \quad I_x = B_4, \quad I_y = B_5, \quad I_z = B_6.$$

Выражения для B_i

$$B_1 = -\rho \int_S \varphi \alpha dS = -\rho \int_S \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS,$$

$$B_2 = -\rho \int_S \varphi \beta dS = -\rho \int_S \varphi \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} dS,$$

$$B_3 = -\rho \int_S \varphi \gamma dS = -\rho \int_S \varphi \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} dS,$$

Коэффициенты B_i

Новые обозначения

$$B_x = B_1, \quad B_y = B_2, \quad B_z = B_3, \quad I_x = B_4, \quad I_y = B_5, \quad I_z = B_6.$$

Выражения для B_i

$$B_4 = -\rho \int_S \varphi(y\gamma - z\beta) dS = -\rho \int_S \varphi \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} dS,$$

$$B_5 = -\rho \int_S \varphi(z\alpha - x\gamma) dS = -\rho \int_S \varphi \frac{\partial \varphi_5}{\partial n} dS,$$

$$B_6 = -\rho \int_S \varphi(x\beta - y\alpha) dS = -\rho \int_S \varphi \frac{\partial \varphi_6}{\partial n} dS.$$

Коэффициенты B_i

Новые обозначения

$$B_x = B_1, \quad B_y = B_2, \quad B_z = B_3, \quad I_x = B_4, \quad I_y = B_5, \quad I_z = B_6.$$

Выражения для B_i

Или в общем виде:

$$B_i = -\rho \int_S \varphi \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS \quad (i = \overline{1, 6}).$$

Коэффициенты присоединенной массы

Определение

Подставим выражение для потенциала через переменные U_i в полученное выражение для коэффициентов B_i :

$$B_i = - \sum_{k=1}^6 \rho U_k \int_S \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS = \sum_{k=1}^6 \lambda_{ik} U_k,$$

где

$$\lambda_{ik} = -\rho \int_S \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS \quad (i, k = \overline{1, 6}).$$

Коэффициенты присоединенной массы

Определение

Подставим выражение для потенциала через переменные U_i в полученное выражение для коэффициентов B_i :

$$B_i = - \sum_{k=1}^6 \rho U_k \int_S \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS = \sum_{k=1}^6 \lambda_{ik} U_k,$$

где

$$\lambda_{ik} = -\rho \int_S \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS \quad (i, k = \overline{1, 6}).$$

Коэффициенты λ_{ik} определяются только геометрией тела и называются **коэффициентами присоединенной массы**.

Формула Грина

Для введенного объема жидкости τ , заключенного между поверхностью сферы большого радиуса Σ и поверхностью тела S , справедливо равенство:

$$\int_{\tau} (\varphi_i \Delta \varphi_k - \varphi_k \Delta \varphi_i) dV = \int_{\Sigma} \left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} - \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) dS + \int_S \left(\varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \right) dS.$$

Формула Грина

Для введенного объема жидкости τ , заключенного между поверхностью сферы большого радиуса Σ и поверхностью тела S , справедливо равенство:

$$\int_{\tau} (\varphi_i \Delta \varphi_k - \varphi_k \Delta \varphi_i) dV = \int_{\Sigma} \left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} - \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) dS + \int_S \left(\varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \right) dS.$$

Вследствие гармоничности φ_i :

$$\Delta \varphi_i = 0 \quad (i = \overline{1, 6}),$$

левая часть равенства равна 0.

Формула Грина

Для введенного объема жидкости τ , заключенного между поверхностью сферы большого радиуса Σ и поверхностью тела S , справедливо равенство:

$$\int_{\tau} (\varphi_i \Delta \varphi_k - \varphi_k \Delta \varphi_i) dV = \int_{\Sigma} \left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} - \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) dS + \int_S \left(\varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \right) dS.$$

Интеграл по Σ стремиться к 0 при возрастании радиуса сферы с одноименной поверхностью, т.к. площадь сферы имеет порядок $4\pi a^2$, а функции φ_i и $\frac{\partial \varphi_k}{\partial n} - 1/a^2$ и $1/a^3$, где a – радиус сферы.

Формула Грина

Для введенного объема жидкости τ , заключенного между поверхностью сферы большого радиуса Σ и поверхностью тела S , справедливо равенство:

$$\int_{\tau} (\varphi_i \Delta \varphi_k - \varphi_k \Delta \varphi_i) dV = \int_{\Sigma} \left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} - \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) dS + \int_S \left(\varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \right) dS.$$

Таким образом, в нашем случае получим:

$$\int_S \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS = \int_S \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} dS \quad \Rightarrow \quad \lambda_{ik} = \lambda_{ki} \quad (i, k = \overline{1, 6}).$$

Симметричность

Всего существует 36 коэффициентов присоединенных масс, но в силу симметрии

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ki} \quad (i, k = \overline{1, 6}, i \neq k)$$

различных всего 21.

Кинетическая энергия жидкости

Определение

Кинетическая энергия объема τ , ограниченного сферой большого радиуса a с поверхностью Σ и поверхностью тела S равна:

$$T_{\tau} = \frac{\rho}{2} \int_{\tau} v^2 dV = \frac{\rho}{2} \int_{\tau} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dV =$$

Кинетическая энергия жидкости

Определение

Кинетическая энергия объема τ , ограниченного сферой большого радиуса a с поверхностью Σ и поверхностью тела S равна:

$$T_{\tau} = \frac{\rho}{2} \int_{\tau} v^2 dV = \frac{\rho}{2} \int_{\tau} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] dV =$$

По формуле Грина получим:

$$= \frac{\rho}{2} \int_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS - \frac{\rho}{2} \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \xrightarrow{a \rightarrow \infty} - \frac{\rho}{2} \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS,$$

т.к. площадь сферы имеет порядок $4\pi a^2$, а функции φ и $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \sim 1/a^2$ и $1/a^3$.

Кинетическая энергия жидкости

Определение

Кинетическая энергия всей жидкости равна:

$$T = -\frac{\rho}{2} \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS.$$

Подставим выражение для разложения Кирхгофа потенциала φ :

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^6 \lambda_{ik} U_k U_i.$$

1. *Валландер С. В.* Лекции по аэрогидромеханике. Учеб. пособие. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1978.
2. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Гос. издат. физ.-мат. лит., 1963.