Введение в механику сплошных сред

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат.наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики ФФ НГУ

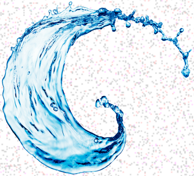
2 октября 2018 г.

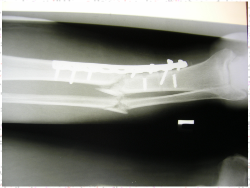
Аннотация

Предмет механики сплошных сред. Основные гипотезы механики сплошных сред. Понятие материальной точки. Лагранжево и эйлерово описание сплошной среды. Траектория, скорость, ускорение. Стационарное нестационарное течение. Линии тока поля скорости.

Предмет механики сплошных сред

Механика сплошных сред изучает движение газообразных, жидких и твёрдых деформируемых тел.





Л.И. Седов. Механика сплошной среды. Том 1. М.:Наука, 1970.

Разделы механики сплошных сред

- Механика жидкости (гидродинамика, гидростатика)
- Аэрогазодинамика
- Механика деформируемого твердого тела (теория упругости, пластичности, разрушения)
- Механика плазмы
- Биомеханика
- Механика многофазных сред

Методы механики сплошной среды

Дифференциальное исчисление

Уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\vec{v} &= 0, \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\frac{\nabla p}{\rho}. \end{aligned}$$

Интегральное исчисление

Закон сохранения массы сплошной среды:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\omega_t} \rho d\omega = 0.$$

Тензорный анализ

Связь между тензором напряжения и тензором скоростей деформации для вязкой несжимаемой жидкости:

$$\sigma = -pI + 2\mu\varepsilon.$$

Основные гипотезы: евклидово пространство, время

Евклидово пространство

- Существует декартова система координат $(Oxyz)$
- Расстояние между точками A и B задаётся с мощью евклидовой метрики

$$r_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

Абсолютное время

Время течёт одинаково во всех системах координат

Нигматулин Р.И. Механика сплошной среды. Кинематика. Динамика. Термодинамика. Статистическая динамика. М.:ГЭОТАР-Медиа, 2014.

Основные гипотезы: масса

Абсолютная масса

- У всех тел существует масса
- Масса неотрицательна

$$m \geq 0$$

- Масса аддитивна

$$m_{A+B} = m_A + m_B$$

- Масса инварианта во всех системах координат, т.е. является скаляром

Нигматулин Р.И. Механика сплошной среды. Кинематика. Динамика. Термодинамика. Статистическая динамика. М.:ГЭОТАР-Медиа, 2014.

Основные гипотезы: принцип равноправия инерциальных систем координат

Постулат Галлилея

Формилировки всех физических законов не зависят от выбора инерциальной системы координат.

Основные гипотезы: принцип сплошности

Определение

Сплошная среда – модель вещества, в которой распределение масса, сил, импульса, энергии и параметров, характеризующих состояние и движение этого вещества, определяется кусочно-непрерывными и дифференцируемыми функциями, заданными во всех точках рассматриваемого объема и во все моменты исследуемого времени.

Критерий сплошности

Безразмерное число Кнудсена

$$\mathrm{Kn} = \frac{\lambda}{d} \ll 1,$$

где λ – длина свободного пробега (в случае газа), расстояние между атомами, молекулами (жидкость, твердое вещество); d – характерный размер исследуемого явления.

Основные гипотезы: индивидуализация

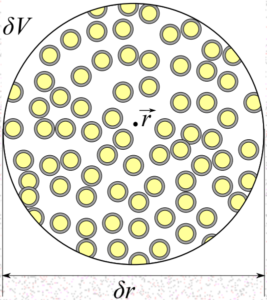
Приближение или гипотеза индивидуализации

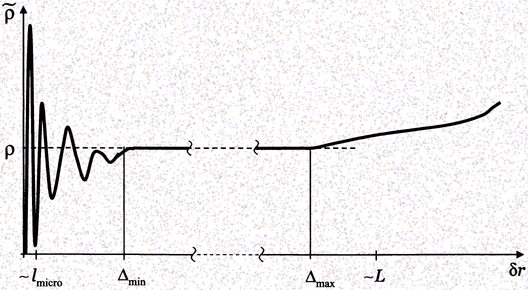
Положение каждой точки, составляющей среду (континуум), можно находить в любой момент времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t),$$

$$\vec{r}_{t=0} = \vec{r}_0.$$

Основные гипотезы: средние величины





Определение средней (макроскопической) плотности вещества, распределенного дискретно в пространстве

Определение плотности и условие устойчивости

$$\tilde{\rho} = \frac{\delta m}{\delta V}, \quad l_{micro} \ll \delta r \ll L.$$

Материальная точка и поля в механике сплошных сред

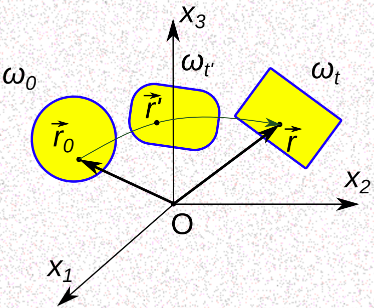
Определение

Материальной точкой или жидкой частицей называется частица среды (вещества) как центра макроскопического объёма δV с характерным размером порядка δr, обладающий массой, импульсом, внутренней энергией и др., определяемыми в соответствии с условиями осреднения.

Условия на поля, определяющие параметры тел

- *Устойчивость* (независимость от δr)
- *Регулярность* (непрерывность, дифференцируемость за исключением отдельных поверхностей, линий и точек)
- *Представительность* (параметры тела являются интегралом от соответствующих параметров его составляющих жидких частиц)

Лагранжево описание сплошной среды



Перемещение и деформация сплошной среды при временах 0, t' и t, где $\vec{r}_0 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$

Закон движения или траектории материальных точек тела:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), \\
x_2 &= x_2(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), \\
x_3 &= x_3(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)
\end{aligned}
$$

или

$$\vec{r} = \vec{r}(t, \vec{r}_0).$$

Определение

Координаты материальных точек тела (ξ_1, ξ_2, ξ_3) называются лагранжевыми координатами а такой подход лагранжевым.

Принцип сплошности

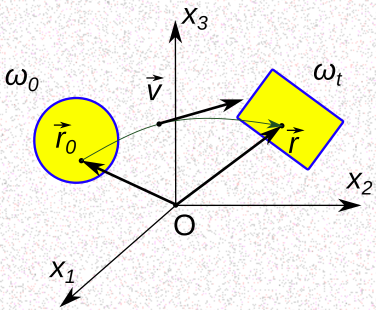
Критерий

Принцип сплошности реализуется, если

$$\Delta^{(x,\xi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Принцип сплошности нарушается на ударных волнах, в зонах разрушения, разбрызгивания, при коагуляции капель, столкновении тел, на поверхностных, линейных и точечных источниках и стоках.

Скорость материальных точек



Скорость точки вдоль траектории движения

$$
\begin{aligned}
v_1 &= v_1(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), \\
v_2 &= v_2(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), \\
v_3 &= v_3(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)
\end{aligned}
$$

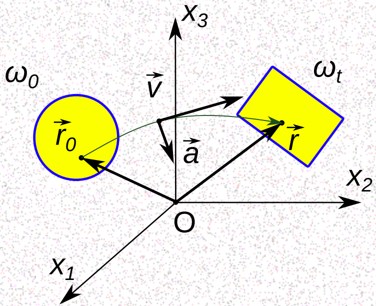
или

$$\vec{v} = \vec{v}(t, \vec{r}_0).$$

Определение

$$\vec{v}(t, \vec{r}_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t, \vec{r}_0) - \vec{r}(t, \vec{r}_0)}{\Delta t} = \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|_{\vec{r} = \vec{r}_0}.$$

Ускорение материальных точек



Ускорение материальной точки

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ a_2 &= a_2(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ a_3 &= a_3(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{aligned}$$

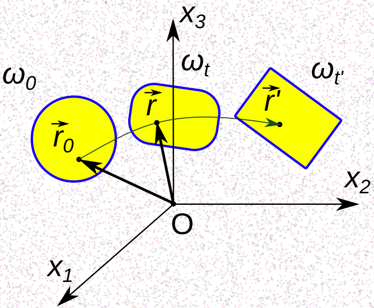
или

$$\vec{a} = \vec{a}(t, \vec{r}_0).$$

Определение

$$\vec{a}(t, \vec{r}_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t, \vec{r}_0) - \vec{v}(t, \vec{r}_0)}{\Delta t} = \left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right|_{\vec{r} = \vec{r}_0} = \left.\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2}\right|_{\vec{r} = \vec{r}_0}.$$

Эйлерово описание сплошной среды



Перемещение и деформация сплошной среды при временах 0, t' и t, где $\vec{r}_0 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$

Наблюдатель находится в точке (x_1, x_2, x_3) и следит за изменением параметров среды со временем.

Определение

Координаты материальных точек тела (x_1, x_2, x_3) называются эйлеровыми координатами а такой подход эйлеров.

Переход от лагранжевого представления к эйлерову

Пусть задан параметр среды f в лагранжевых координатах

$$f = f(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Если задан закон движения среды $\vec{r} = \vec{r}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $\Delta^{(x,\xi)} \neq 0$, тогда существует обратное преобразование:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1(t, x_1, x_2, x_3), \\ \xi_2 &= \xi_2(t, x_1, x_2, x_3), \\ \xi_3 &= \xi_3(t, x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

и

$$f(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = f(t, \xi_1(t, x_1, x_2, x_3), \xi_2(t, x_1, x_2, x_3), \xi_3(t, x_1, x_2, x_3)) =$$

$$= \tilde{f}(t, x_1, x_2, x_3).$$

Переход от эйлерова представления к лагранжеву

Пусть задан параметр среды f в эйлеровых координатах

$$f = f(t, x_1, x_2, x_3).$$

Если задан закон движения среды $\vec{r} = \vec{r}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, тогда

$$f(t, x_1, x_2, x_3) = f(t, x_1(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), x_2(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), x_3(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)) =$$

$$= \bar{f}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Стационарные движения и линии тока

Определение

Если при эйлеровом описании движение сплошной среды и её параметры не зависят от времени, а зависят только от от пространственных координат (x_1, x_2, x_3), то такие движения называются установившимися или стационарными.

Определение

Линиями тока, или векторными линиями поля скорости $\vec{v}$, называются линии, касательные в каждой точке которых совпадают по направлению со скоростью $\vec{v}$ в этой точке в данный момент времени.

Математическое описание линий тока

Уравнения линий тока

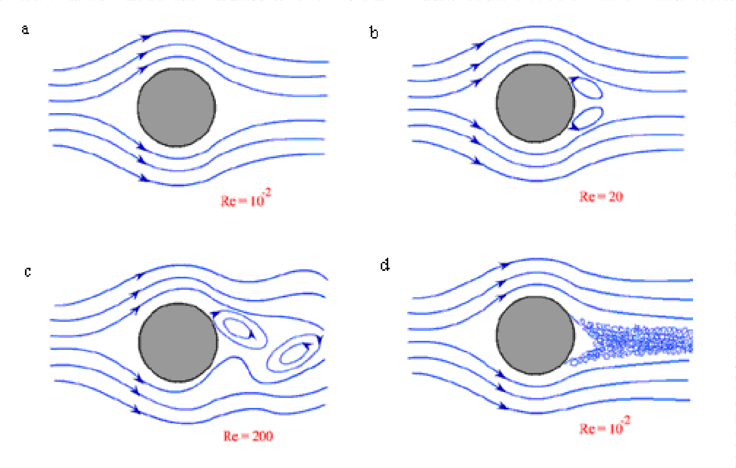
$$d\vec{r} = \vec{v}(x_1, x_2, x_3)d\lambda, \quad (t = const),$$

где λ – переменная, идентифицирующая точки вдоль линии тока. Это уравнение сводится к

$$d\lambda = \frac{dx_1}{v_1(t, x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_2}{v_2(t, x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_3}{v_3(t, x_1, x_2, x_3)},$$

где t является параметром и каждая линия тока относится к фиксированному моменту времени.

Пример обтекания цилиндра



Картины обтекания цилиндра набегающим потоком при различных числах Рейнольдса

http://www.heuristic.su/effects/catalog/est/byId/description/1201/index.html

Частная и субстанциональная (полная) производная

Рассмотрим параметр среды, заданный в эйлеровых координатах $\varphi(t, x_1, x_2, x_3)$ и закон движения сплошной среды

$$\vec{r} = \vec{r}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Частная производная в заданной точке пространства

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x_1, x_2, x_3)$ определяет изменение параметров в фиксированной точке пространства.

Частная и субстанциональная (полная) производная

Полная производная

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, x_1(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), x_2(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), x_2(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)) =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\right)\varphi$$

определяет изменение параметра φ в жидкой частице в фиксированной точке пространства, где $\vec{v}(t, x_1, x_2, x_3)$ – вектор скорости.

Определение

Оператор $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)$ называется оператором полной (субстанциональной) производной.

Литература

- *Л.И. Седов.* Механика сплошной среды. Том 1. М.:Наука, 1970.
- *Нигматулин Р.И.* Механика сплошной среды. Кинематика. Динамика. Термодинамика. Статистическая динамика. М.:ГЭОТАР-Медиа, 2014.
- *Эглит М.Э.* Лекции по основам механики сплошных сред. Изд. 2-е, испр. М.: Книжный дом «Либроком», 2010.