

# Плоские потенциальные течения идеальной жидкости

*Верещагин Антон Сергеевич*

д-р. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрофизики и газовой динамики



7 февраля 2024 г.

Определение плоского течения. Функция тока и ее свойства. Связь потенциала и функции тока. Комплексный потенциал и его свойства. Простейшие течения.

# Уравнения плоского течения идеальной жидкости

Если можно ввести систему координат так, что течение идеальной жидкости ( $\rho = \text{const}$ ) будет описываться уравнениями:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y},$$

где  $v_x = v_x(t, x, y)$ ,  $v_y = v_y(t, x, y)$ ,  $p = p(t, x, y)$ , то говорят, что движение идеальной жидкости **плоскопараллельное**.

# Функция тока

## Определение

Функция  $\psi = \psi(x,y)$  такая, что

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad -v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

называется **функцией тока**. Если течение нестационарное, то  $t$  – дополнительный параметр.

# Функция тока: уравнение неразрывности

Уравнение неразрывности  
Уравнение

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0$$

выполняется тождественно.

# Функция тока: линии тока

Рассмотрим уравнение линий тока:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y},$$

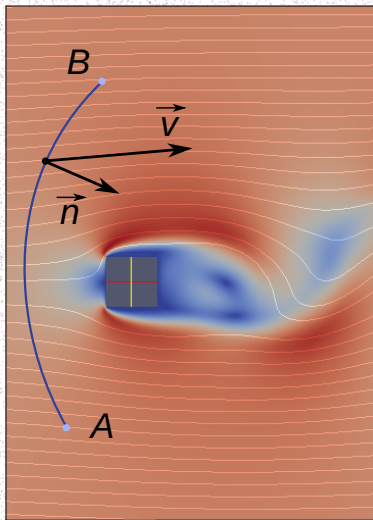
тогда

$$0 = -v_y dx + v_x dy = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi.$$

Таким образом,  $\psi = \psi(x,y)$  **сохраняет** одно и то же значение **на линиях тока**.



# Функция тока: поток жидкости



$$\begin{aligned}\int_B^A \vec{v} \cdot \vec{n} ds &= \int_B^A (v_x n_1 + v_y n_2) ds = \\&= \int_0^{s_0} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} \right) ds = \\&= \int_0^{s_0} \frac{d}{ds} \psi(x(s), y(s)) ds = \psi(A) - \psi(B), \\x &= x(s), \quad y = y(s), \\(x, y)|_{s=0} &= B, \quad (x, y)|_{s=s_0} = A.\end{aligned}$$

# Функция тока: вектор вихря

Вектор вихря  $\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v}$  задается формулами:

$$\Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \quad \Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0,$$

$$\Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}.$$



# Функция тока: вектор вихря

Вектор вихря  $\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v}$  задается формулами:

$$\Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \quad \Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0,$$

$$\Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}.$$

В случае безвихревого течения:

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

# Связь потенциала и функции тока

Если плоское течение идеальной жидкости потенциально, тогда существует функция  $\varphi(x,y)$  такая, что

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

при этом

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

# Связь потенциала и функции тока

Если плоское течение идеальной жидкости потенциально, тогда существует функция  $\varphi(x,y)$  такая, что

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

при этом

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Иначе,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Отсюда следует, что линии  $\varphi = \text{const}$  и  $\psi = \text{const}$  **ортогональны**.  
Такие  $\varphi$  и  $\psi$  называются **сопряженными**.

## Комплексный потенциал

Функции  $\varphi$  и  $\psi$  связаны между собой условием Коши – Римана, поэтому функция комплексного переменного  $w = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$  является **аналитической функцией** комплексного аргумента  $z = x + iy$ :

$$w = f(x + iy) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y).$$

Функция  $w(z)$  называется **комплексным потенциалом**.

# Комплексная скорость

## Свойство

Так как  $w(z)$  – аналитическая функция, то существует  $dw/dz$ :

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} i = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} i.$$



# Комплексная скорость

## Свойство

Так как  $w(z)$  – аналитическая функция, то существует  $dw/dz$ :

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} i = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} i.$$

Следовательно,

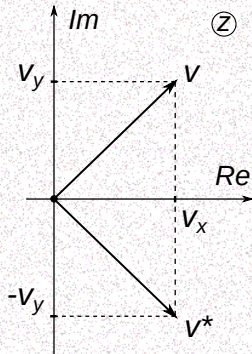
$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y.$$

Если ввести **комплексную скорость** как

$$v(z) = v_x(x,y) + iv_y(x,y),$$

то

$$\frac{dw}{dz} = v^* = v_x - iv_y.$$





## Соотношение

$$w = f(x + iy) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$$

связывает аналитическую функцию  $w(z)$  с определенной кинематической картиной течения и полем  $(v_x, v_y)$  с помощью аппарата теории функций комплексного переменного.

Рассмотрим простейшие примеры.

# Однородное поступательное течение

## Комплексный потенциал

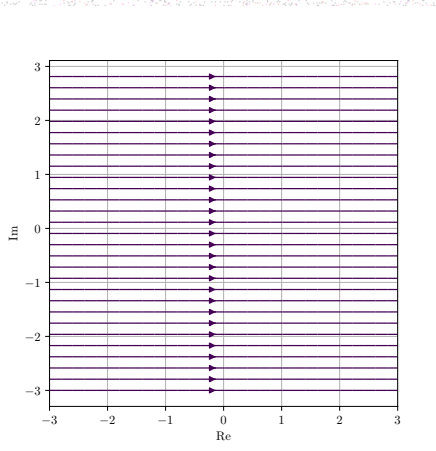
$$w(z) = az, \quad a \in \mathbb{R}.$$

## Комплексная скорость

$$\frac{dw}{dz} = a = v_x - iv_y \Rightarrow v_x = a, \quad v_y = 0.$$

# Однородное поступательное течение: картина течения

$$a > 0$$



## Комплексный потенциал

$$w(z) = \frac{q}{2\pi} \ln(z - z_0), \quad q \in \mathbb{R}, z_0 \in \mathbb{C}.$$

## Комплексная скорость (при $z_0 = 0$ )

Пусть  $z = x + iy = re^{i\theta}$ , тогда

$$\frac{dw}{dz} = \frac{q}{2\pi} \frac{1}{z} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{q}{2\pi r} \cos \theta, \\ v_y = \frac{q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{q}{2\pi r} \sin \theta. \end{cases}$$

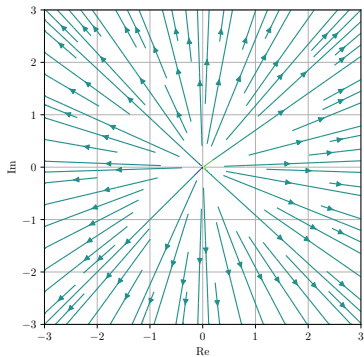
## Картина течения

Нарисовать картину течения при  $q > 0$  (источник) и  $q < 0$  (сток).

# Источник и сток: картина течения

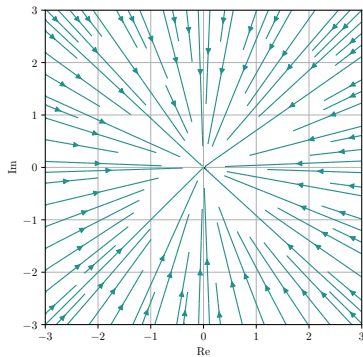
Источник

$$q > 0$$



Сток

$$q < 0$$



## Комплексный потенциал

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0), \quad \Gamma \in \mathbb{R}, z_0 \in \mathbb{C}.$$

## Комплексная скорость (при $z_0 = 0$ )

Пусть  $z = x + iy = re^{i\theta}$ , тогда

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} \Rightarrow \begin{cases} v_x = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \sin \theta, \\ v_y = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \cos \theta. \end{cases}$$

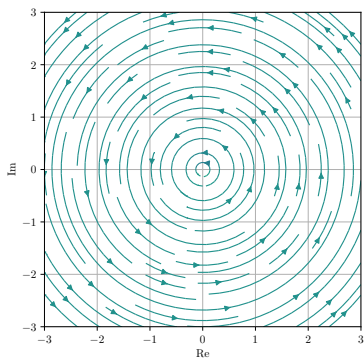
## Картина течения

Нарисовать картину течения при  $\Gamma > 0$  и  $\Gamma < 0$ .

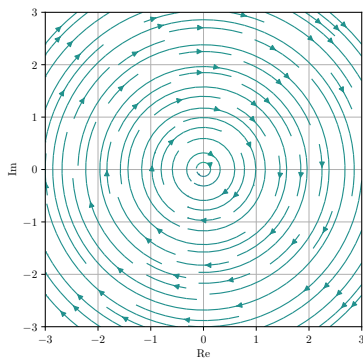


# Вихрь: картина течения

$$\Gamma > 0$$



$$\Gamma < 0$$



# Принцип суперпозиций

## Утверждение

Вследствие линейности уравнения неразрывности относительно потенциала, если в области имеется несколько течений с потенциалами  $w_1(z)$ ,  $w_2(z)$ , ...,  $w_n(z)$ , то общий потенциал всего течения в заданной точке равен сумме потенциалов всех течений, присутствующих в области:

$$w(z) = w_1(z) + w_2(z) + \dots + w_n(z).$$

## Комплексный потенциал

$$w(z) = \frac{De^{i\alpha}}{2\pi z}, \quad D, \alpha \in \mathbb{R}.$$

## Комплексная скорость (при $\alpha = 0$ )

Пусть  $z = x + iy = re^{i\theta}$ , тогда

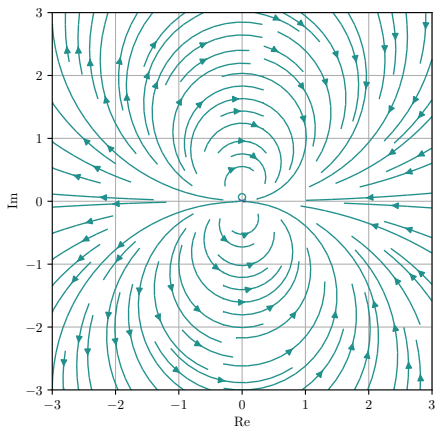
$$\frac{dw}{dz} = -\frac{D}{2\pi} \frac{1}{z^2} \Rightarrow \begin{cases} v_x = -\frac{D}{2\pi r^2} \cos 2\theta, \\ v_y = -\frac{D}{2\pi r^2} \sin 2\theta. \end{cases}$$

## Картина течения

Нарисовать картину течения.

# Диполь: картина течения

$$D > 0$$



*Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.:Гос. издат. физ.-мат. лит., 1963.