

Плоские потенциальные течения идеальной жидкости. Обтекание тел.

Верещагин Антон Сергеевич

канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

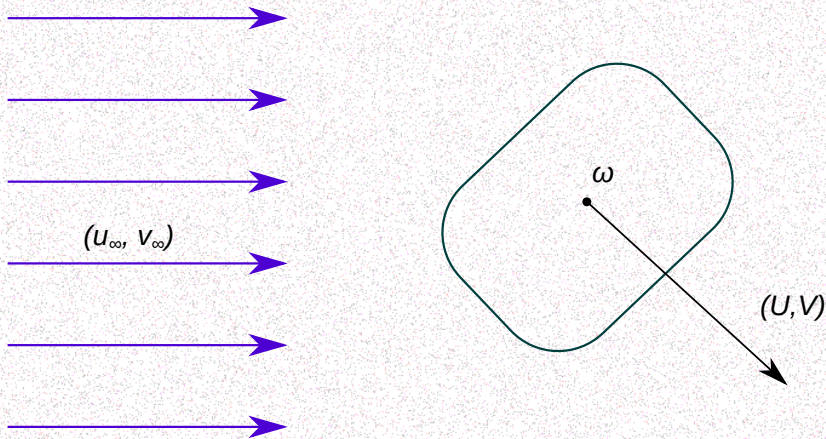
Кафедра аэрофизики и газовой динамики



25 февраля 2020 г.

Обтекание абсолютно твёрдого тела. Задание граничных условий.
Формулы Блазиуса-Чаплыгина. Формулы Кутта-Жуковского.

Задача обтекания абсолютно твёрдого тела



Математическая постановка задачи обтекания тела потенциальным потоком идеальной жидкости

Требуется найти **аналитический комплексный потенциал**

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad z = x + iy,$$

определённый в рассматриваемой бесконечной области, и такой что

$$\Delta\psi(x, y) = 0,$$

связанный соответствующими условиями на бесконечности и границе с телом.

Замечание

Так как потенциал φ связан с функцией тока ψ соотношениями Коши-Римана, то функция тока находится автоматически. Можно, наоборот, искать потенциал φ , а ψ выражать через соотношения Коши-Римана.

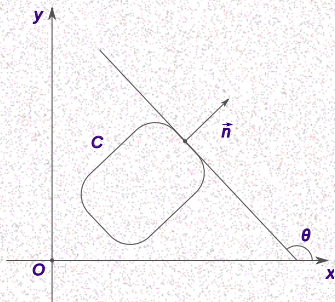
Плоское покоящееся течение на бесконечности

Условия на бесконечности

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

для бесконечно удалённых точек пространства, т.к. скорость на бесконечности равна 0.

Условие «непротекания» на границе с телом



Условие на границе с телом

Нормальная составляющая (относительно границы тела) скорость течения должна совпадать с нормальной составляющей скорости тела.

$$\begin{aligned} v_n &= v_x \cos(\vec{n}, x) + v_y \cos(\vec{n}, y) = v_x \sin \theta - v_y \cos \theta = \\ &= v_x \frac{dy}{ds} - v_y \frac{dx}{ds} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial \psi}{\partial s}, \end{aligned}$$

где $x(s), y(s)$ – параметризованная граница тела в окрестности рассматриваемой точки.

Условие для движения абсолютно твёрдого тела

Пусть тело совершает поступательное движение со скоростью (U, V) и вращательное с угловой скоростью ω , тогда скорости точек тела будут иметь вид

$$u_x = U - \omega y, \quad u_y = V + \omega x,$$

где (x, y) – координаты точек тела во вращающейся системе координат, жёстко связанной с телом.

Условие для движения абсолютно твёрдого тела

Пусть тело совершает поступательное движение со скоростью (U, V) и вращательное с угловой скоростью ω , тогда скорости точек тела будут иметь вид

$$u_x = U - \omega y, \quad u_y = V + \omega x,$$

где (x, y) – координаты точек тела во вращающейся системе координат, жёстко связанной с телом.

Условие на границе с телом

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial s} &= u_x \cos(\vec{n}, y) + u_y \cos(\vec{n}, x) = u_x \frac{dy}{ds} - u_y \frac{dx}{ds} = \\ &= (U - \omega y) \frac{dy}{ds} - (V + \omega x) \frac{dx}{ds}. \end{aligned}$$

Отсюда,

$$\psi = Uy - Vx - \frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2) + c.$$

Частный случай набегающего потока на покоящееся тело

Условие на границе тела

В случае покоящегося тела $U = V = 0$, $\omega = 0$ условие на границе тела будет

$$\psi(x, y) = \text{const.}$$

Условие на бесконечности

В случае набегающего потока с параметрами на бесконечности равными

$$v_x = v_\infty, \quad v_y = 0,$$

то для бесконечно удалённых точек

$$\psi(x, y) = v_\infty y + \text{const.}$$

Задача обтекание тела

Таким образом, задача обтекания тела плоским потенциальным потоком идеальной жидкости сводится к решению задачи Дирихле для функции тока ψ :

- внутри исследуемой области решается уравнение Лапласа

$$\Delta\psi = 0,$$

- а на бесконечности и границе обтекаемого тела заданы значения функции ψ в зависимости от условий обтекания.

Сила при безотрывном обтекании

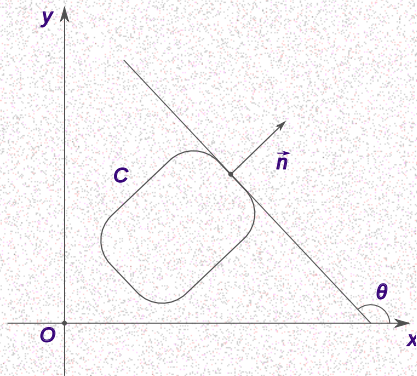
Определение

По аналогии с комплексными скоростью и потенциалом, определим комплексную силу R , действующую на контур C в области течения по формуле

$$R = X + iY,$$

где X , Y – вещественные проекции силы на оси координат.

Формула для силы через давление при безотрывном обтекании



Комплексно-сопряжённая сила R^* вдоль контура тела C при безотрывном обтекании

$$\begin{aligned} R^* &= X - iY = \\ &= - \oint_C p(\cos(\vec{n}, x) - i \cos(\vec{n}, y)) ds = \\ &= - \oint_C p(\sin \theta + i \cos \theta) ds = \\ &= -i \oint_C p e^{-\theta i} ds. \end{aligned}$$

Предварительные выкладки

Выражение для комплексного дифференциала

$$dz = dx + i dy = ds(\cos \theta + i \sin \theta) = e^{i\theta} ds,$$

$$dz^* = dx - i dy = ds(\cos \theta - i \sin \theta) = e^{-i\theta} ds.$$

Отсюда

$$dz^* = e^{-2\theta i} dz.$$

Предварительные выкладки

Выражение для комплексного дифференциала

$$\begin{aligned} dz &= dx + i dy = ds(\cos \theta + i \sin \theta) = e^{i\theta} ds, \\ dz^* &= dx - i dy = ds(\cos \theta - i \sin \theta) = e^{-i\theta} ds. \end{aligned}$$

Отсюда

$$dz^* = e^{-2\theta i} dz.$$

Интеграл Бернулли

Связь давления и скорости через интеграл Бернулли

$$p = c - \frac{1}{2} \rho v^2$$

справедлива вдоль контура тела при безотрывном обтекании, т.к. он является линией тока. При потенциальном течении она справедлива во всей области течения.

Сила

$$R^* = -ic \oint_C dz^* + \frac{i\rho}{2} \oint_C v^2 dz^* = \frac{i\rho}{2} \oint_C v^2 dz^* = \frac{i\rho}{2} \oint_C (ve^{-i\theta})^2 dz.$$

Сила

$$R^* = -ic \oint_C dz^* + \frac{i\rho}{2} \oint_C v^2 dz^* = \frac{i\rho}{2} \oint_C v^2 dz^* = \frac{i\rho}{2} \oint_C (ve^{-i\theta})^2 dz.$$

Используя то, что

$$ve^{-i\theta} = v \cos \theta - iv \sin \theta = v_x - iv_y = v^*,$$

получим

$$R^* = X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint_C (v^*)^2 dz.$$

Момент главных сил

$$\begin{aligned} L &= - \oint_C p(x \cos(\vec{n}, y) - y \cos(\vec{n}, x)) ds = - \oint_C p(x \cos \theta + y \sin \theta) ds = \\ &= - \oint_C p(x dx + y dy) = - \oint_C \left(c + \frac{\rho v^2}{2} \right) (x dx + y dy) = \\ &= - \oint_C c d(x^2 + y^2) - \frac{\rho}{2} \oint_C v^2 (x dx + y dy) = \operatorname{Re} \left(-\frac{\rho}{2} \oint_C v^2 z dz^* \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left(-\frac{\rho}{2} \oint_C (v^*)^2 z dz \right), \end{aligned}$$

т.к. $v^2 dz^* = (v^*)^2 dz$.

Формулы Блазиуса-Чаплыгина для потенциального течения

Если течение потенциально, тогда существует комплексный потенциал

$$w(z) = \varphi(z) + i\psi(z) \quad \text{и} \quad \frac{dw}{dz} = v^*.$$

Формулы Блазиуса-Чаплыгина

$$R^* = X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz,$$

$$L = \operatorname{Re} \left[-\frac{\rho}{2} \oint_C \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 z dz \right].$$

Формула Кутта-Жуковского

Предположения

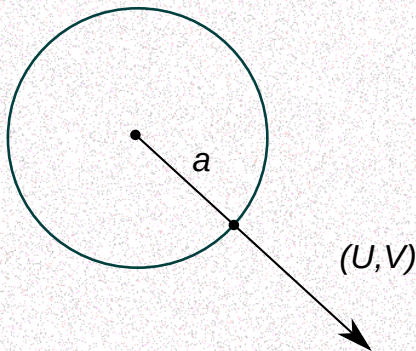
Поток потенциален везде вне тела, которое можно заменить на конечное число источников, вихрей и диполей, лежащих внутри границы тела, контура C .

Формула для силы и реакции

$$R^* = X - iY = i\rho\Gamma v_\infty^*,$$
$$L = \operatorname{Re} \left[-\rho v_\infty^* \sum_{k=1}^m \Gamma_k b_k - i\rho M v_\infty^* \right],$$

где Γ_i – циркуляции вихрей, находящихся в точках b_i ($i = 1, \dots, m$); M – суммарный момент источников и диполей, Γ – суммарная циркуляция вихрей, находящихся внутри тела.

Задача обтекания кругового цилиндра



Найти комплексный потенциал обтекания кругового цилиндра радиуса a , движущегося в бесконечной покоящейся жидкости со скоростью (U, V) .

Задача обтекания кругового цилиндра

Постановка задачи

В системе координат цилиндра найти потенциал

$$w(z) = \varphi(z) + i\psi(z),$$

такой, что его мнимая часть на окружности $|z| = a$ удовлетворяет условию

$$\psi(x + iy) = Uy - Vx + \text{const.}$$

Задача обтекания кругового цилиндра

Решение

$$\begin{aligned}w(z) &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - (U + iV) \frac{a^2}{z}, \\ \varphi(z) &= \frac{\Gamma}{2\pi\theta} - (U \cos \theta + V \sin \theta) \frac{a^2}{r}, \\ \psi(z) &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + (U \sin \theta - V \cos \theta) \frac{a^2}{r},\end{aligned}$$

где $z = re^{i\theta}$.

Задача обтекания кругового цилиндра жидкостью движущейся на бесконечности

Решение

Обтекание круга поступательным потоком имеет потенциал

$$w(z) = v_{\infty}^* z + \frac{a^2 v_{\infty}}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

Литература

- *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.:Гос. издат. физ.-мат. лит., 1963.