

# Обобщенные движения сплошной среды

*Верецагин Антон Сергеевич*

канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрофизики и газовой динамики



16 декабря 2020 г.

Обобщенные движения сплошной среды. Соотношения на сильном скачке. Классификация сильных разрывов. Соотношение для ударных волн.

# Законы сохранения в дивергентной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v} - \sigma) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \left( \varepsilon + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) \right) + \operatorname{div} \left( \rho \left( \varepsilon + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) \vec{v} - \sigma \cdot \vec{v} + \vec{q} \right) = 0.$$

## Обобщенная форма записи

Каждый из этих законов можно записать в следующем виде, который представляет собой дивергенцию вектора в четырехмерном пространстве относительно  $(t, \vec{x})$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f \vec{v} + \vec{\varphi}) = 0.$$

## Интеграл в четырехмерном пространстве

Рассмотрим  $\Omega \subset R^4$  – ограниченную область с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$  и сечениями  $\omega_\Omega(t)$  гиперплоскостями при  $t = \text{const}$ . Интегралы по  $\Omega$  от законов сохранения в дивергентной форме имеют вид:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega_\Omega(t)} (f_t + \operatorname{div}(\tilde{f}\vec{v} + \vec{\varphi})) d\omega dt = 0.$$

## Слабая форма записи

Согласно теореме Гаусса-Остроградского для вектора  $\vec{g} = (f, fv_1 + \varphi_1, fv_2 + \varphi_2, fv_3 + \varphi_3)$  имеет место

$$\int_{\Gamma} \vec{g} \cdot \vec{\nu} d\Gamma = 0,$$

где  $\vec{\nu} = \vec{l} \cos(\vec{\nu}, t) + \vec{n} \sin(\vec{\nu}, t)$  – нормаль к  $\Gamma$  в четырехмерном пространстве;  $\vec{l}$  – орт оси  $t$ ,  $\vec{n}$  – орт внешней нормали к сечению  $\Gamma$  гиперплоскостью  $t = \text{const}$ .



## Интегральная форма записи

Так как

$$\vec{g} \cdot \vec{\nu} = f \cos(\vec{\nu}, t) + (f\vec{\nu} + \vec{\varphi}) \cdot \vec{n} \sin(\vec{\nu}, t),$$

то

$$\int_{\Gamma} (f \cos(\vec{\nu}, t) + (f\vec{\nu} + \vec{\varphi}) \cdot \vec{n} \sin(\vec{\nu}, t)) d\Gamma = 0.$$

# Обобщенное движение сплошной среды

## Определение

Набор функций  $\rho, \vec{v}, \sigma, \varepsilon$ , определенных в  $R^4(t, \vec{x})$ , называется **обобщенным движением** сплошной среды, если для любой замкнутой кусочно-гладкой поверхности  $\Gamma \subset R^4(t, \vec{x})$  эти функции удовлетворяют соотношениям:

$$\int_{\Gamma} (\rho \cos(\vec{\nu}, t) + \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \sin(\vec{\nu}, t)) d\Gamma = 0,$$

$$\int_{\Gamma} (\rho \vec{v} \cos(\vec{\nu}, t) + (\rho \vec{v} \otimes \vec{v} - \sigma) \cdot \vec{n} \sin(\vec{\nu}, t)) d\Gamma = 0,$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left( \rho \left( \varepsilon + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) \cos(\vec{\nu}, t) + \left( \rho \left( \varepsilon + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) \vec{v} - \sigma \cdot \vec{v} + \vec{q} \right) \cdot \vec{n} \sin(\vec{\nu}, t) \right) d\Gamma = \\ = 0. \end{aligned}$$

# Движение с сильным разрывом

## Определение

Если в области определения обобщенного движения существует гиперповерхность  $\Sigma \subset R^4$ , на которой величины  $\rho$ ,  $\vec{v}$ ,  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  имеют разрыв первого рода и вне которой это движение гладкое, то такое движение называется **движением с сильным разрывом**, а сечение  $B(t)$  гиперповерхности  $\Sigma$  гиперплоскостями  $t = \text{const}$  называется поверхностью сильного разрыва.

## Сильные разрывы

Величины разрывов (скачков) не могут быть произвольными, а должны удовлетворять уравнениям сильного разрыва, которые следуют из уравнений обобщенного движения.

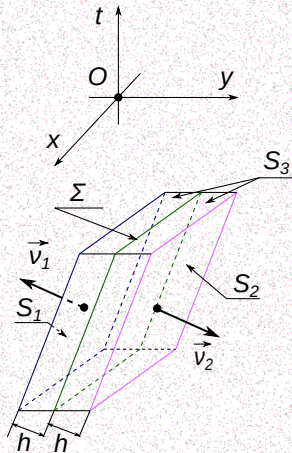


# Соотношения на сильном скачке

Рассмотрим временной интервал  $[t_1, t_2]$ , на котором существует разрыв функции  $\Sigma$ . Для каждого  $t$  рассмотрим небольшую окрестность разрыва в  $R^3$  высоты  $2h$ . Тогда для этой области можно записать закон сохранения в общем виде:

$$\int_{\Gamma} (f \cos(\vec{v}, t) + (fv_n + \varphi_n) \sin(\vec{v}, t)) d\Gamma = 0.$$

Интеграл по  $\Gamma$  разбивается на 3 интеграла по поверхностям  $S_1$ ,  $S_2$ , параллельным гиперповерхности разрыва  $\Sigma$  и боковой поверхности  $S_3$ .



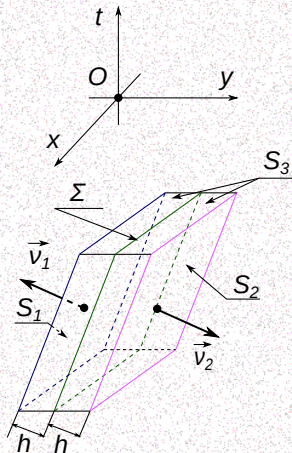
# Соотношения на сильном скачке

При  $h \rightarrow 0$  интеграл по поверхности  $S_3$  будет стремиться к 0, а интегралы по  $S_1$  и  $S_2$  – к интегралам от параметров среды справа и слева от гиперповерхности разрыва, при этом  $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$ .

В силу произвольности выбранных  $S_1$  и  $S_2$  и непрерывности подынтегральных выражений слева и справа от разрыва получится выражение:

$$[f \cos(\vec{\nu}, t) + (fv_n + \varphi_n) \sin(\vec{\nu}, t)] = 0,$$

где  $[a] = a_2 - a_1$  – скачок величины  $a$  на разрыве.



## Определение

Скоростью перемещения поверхности разрыва  $B(t)$  в точке  $M$  называется предел:

$$D_n(M) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{H(M, t, \delta t)}{\delta t},$$

где  $H(M, t, \delta t)$  – расстояние, на которое переместилась поверхность вдоль нормали  $\vec{n}$ , выпущенной из заданной точки поверхности разрыва  $M$  в момент времени  $t$ .  $D_n$  принимает отрицательные значения, если движение направлено в противоположную сторону  $\vec{n}$ .

## СВОЙСТВО Вектор

$$D_n \vec{n} + \vec{l}$$

является касательным вектором к гиперповерхности  $\Sigma$ , потому что точка  $M$  за время  $\delta t$  переместится на вектор  $H(M, t, \delta t) \delta t \vec{n} + \delta t \vec{l}$ .

## Связь вектора $\vec{v}$ и скорости $D_n$

Вектор  $D_n \vec{n} + \vec{l}$  ортогонален вектору  $\vec{v} = \vec{l} \cos(\vec{v}, t) + \vec{n} \sin(\vec{v}, t)$ , нормали к гиперповерхности  $\Sigma$ , таким образом:

$$(\cos(\vec{v}, t) \vec{l} + \sin(\vec{v}, t) \vec{n}) \cdot (D_n \vec{n} + \vec{l}) = D_n \sin(\vec{v}, t) + \cos(\vec{v}, t) = 0$$

и

$$D_n = -\cos(\vec{v}, t) / \sin(\vec{v}, t).$$

# Соотношения на сильном скачке

## В общем виде

С учетом связи  $D_n = -\cos(\vec{v}, t) / \sin(\vec{v}, t)$ :

$$[f(v_n - D_n) + \varphi_n] = 0.$$

## Уравнения Гюгонио в газовой динамике

Положив, что в исходных уравнениях  $\sigma = -pI$ ,  $\vec{q} = \vec{0}$ , получаем в результате подстановки выражений для  $f$  и  $\varphi$  из законов сохранения соотношения:

$$[\rho(v_n - D_n)] = 0,$$

$$[\rho \vec{v}(v_n - D_n) + p\vec{n}] = 0,$$

$$\left[ \rho \left( \varepsilon + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) (v_n - D_n) + p v_n \right] = 0.$$



# Классификация сильных разрывов

## Определения

Обозначим, что  $m = \rho(v_n - D_n)$  – массовый поток вещества, проходящего через поверхность разрыва. Обозначим, что  $v_\tau$  – составляющая скорости, лежащая в касательной плоскости к поверхности разрыва.

## Определения

Обозначим, что  $m = \rho(v_n - D_n)$  – массовый поток вещества, проходящего через поверхность разрыва. Обозначим, что  $v_\tau$  – составляющая скорости, лежащая в касательной плоскости к поверхности разрыва.

## Контактный разрыв ( $m = 0$ )

$$[p] = 0 \text{ и } [v_n] = 0,$$

$$[\rho] \neq 0, [\varepsilon] \neq 0, v_\tau \neq 0.$$

# Классификация сильных разрывов

## Определения

Обозначим, что  $m = \rho(v_n - D_n)$  – массовый поток вещества, проходящего через поверхность разрыва. Обозначим, что  $v_\tau$  – составляющая скорости, лежащая в касательной плоскости к поверхности разрыва.

## Контактный разрыв ( $m = 0$ )

$$[p] = 0 \text{ и } [v_n] = 0,$$

$$[\rho] \neq 0, [\varepsilon] \neq 0, v_\tau \neq 0.$$

## Ударная волна ( $m \neq 0$ )

$$[v_\tau] = 0,$$

$$[p] \neq 0, [\rho] \neq 0, [\varepsilon] \neq 0, v_n \neq 0.$$

# Соглашение для ударных волн

## Определение

Поверхность ударной волны называют **фронтом ударной волны**.

## Определение

Та сторона ударной волны, с которой газ натекает на нее, называется **передней стороной** (или стороной перед фронтом) ударной волны. Противоположная сторона фронта называется **задней стороной** (или стороной за фронтом) ударной волны.

## Соглашение

Нормаль  $\vec{n}$  к фронту ударной волны направлена в переднюю сторону ударной волны (в область перед фронтом). Индекс «1» отмечает значения газодинамических параметров на передней стороне, а индекс «2» – на задней стороне ударной волны.

# Альтернативная форма записи соотношений на разрыве для ударных волн

Введем скорость течения газа относительно фронта УВ в направлении нормали  $\vec{n}$ :

$$u = v_n - D_n.$$

В этих обозначениях соотношения на разрыве **для одномерных течений** имеют вид:

$$\rho_2 u_2 = \rho_1 u_1,$$

$$p_2 + \rho_2 u_2^2 = p_1 + \rho_1 u_1^2,$$

$$\varepsilon_2 + p_2 V_2 + \frac{u_2^2}{2} = \varepsilon_1 + p_1 V_1 + \frac{u_1^2}{2},$$

где  $V = 1/\rho$ .



*Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.