

Обтекание тел плоскими потенциальными течениями идеальной жидкости

Верещагин Антон Сергеевич

д-р. физ.-мат. наук, доцент

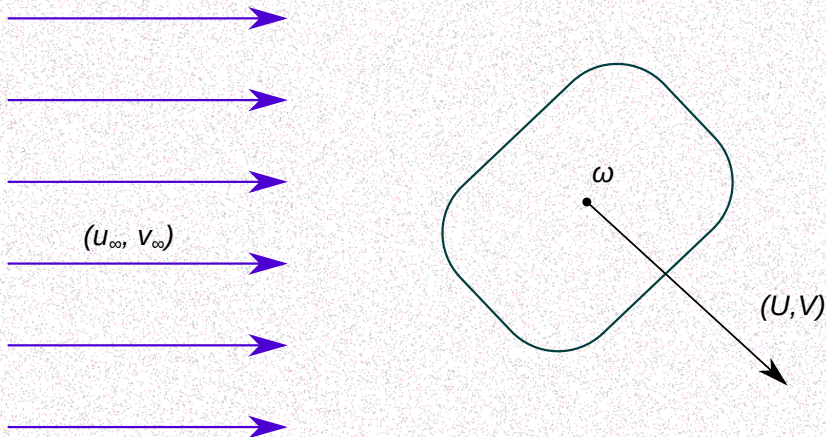
Кафедра аэрофизики и газовой динамики



28 февраля 2024 г.

Обтекание абсолютно твердого тела. Задание граничных условий.
Формулы Блазиуса – Чаплыгина. Формулы Кутты – Жуковского.

Задача обтекания абсолютно твердого тела



Математическая постановка задачи обтекания тела потенциальным потоком идеальной жидкости

Требуется найти **аналитический комплексный потенциал**

$$w(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y), \quad z = x + iy,$$

определенный в рассматриваемой бесконечной области, связанный соответствующими условиями на бесконечности и границе с телом и такой, что

$$\Delta\psi(x,y) = 0.$$

Замечание

Так как потенциал φ связан с функцией тока ψ соотношениями Коши – Римана, то функция тока находится автоматически. Можно, наоборот, искать потенциал φ , а ψ выражать через соотношения Коши – Римана.

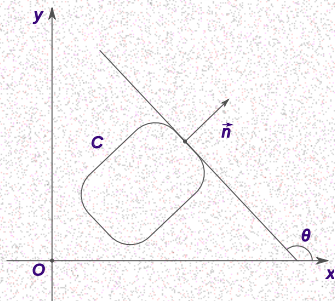
Плоское покоящееся течение на бесконечности

Условия на бесконечности

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

для бесконечно удаленных точек пространства, т.к. скорость на бесконечности равна 0.

Условие «непротекания» на границе с телом



Условие на границе с телом

Нормальная составляющая (относительно границы тела) скорость течения должна совпадать с нормальной составляющей скорости тела.

$$\begin{aligned} v_n &= v_x \cos(\vec{n}, x) + v_y \cos(\vec{n}, y) = v_x \sin \theta - v_y \cos \theta = \\ &= v_x \frac{dy}{ds} - v_y \frac{dx}{ds} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{\partial \psi}{\partial s}, \end{aligned}$$

где $x(s)$, $y(s)$ – параметризованная граница тела в окрестности рассматриваемой точки.

Условие для движения абсолютно твердого тела

Пусть тело совершает поступательное движение со скоростью (U, V) и вращательное движение с угловой скоростью ω , тогда скорости точек тела будут иметь вид:

$$u_x = U - \omega y, \quad u_y = V + \omega x,$$

где (x, y) – координаты точек тела во вращающейся системе координат, жестко связанной с телом.

Условие для движения абсолютно твердого тела

Пусть тело совершает поступательное движение со скоростью (U, V) и вращательное движение с угловой скоростью ω , тогда скорости точек тела будут иметь вид:

$$u_x = U - \omega y, \quad u_y = V + \omega x,$$

где (x, y) – координаты точек тела во вращающейся системе координат, жестко связанной с телом.

Условие на границе с телом

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial s} &= u_x \cos(\vec{n}, x) + u_y \cos(\vec{n}, y) = u_x \frac{dy}{ds} - u_y \frac{dx}{ds} = \\ &= (U - \omega y) \frac{dy}{ds} - (V + \omega x) \frac{dx}{ds} \end{aligned}$$

Отсюда,

$$\psi = Uy - Vx - \frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2) + c.$$

Частный случай набегающего потока на покоящееся тело

Условие на границе тела

В случае покоящегося тела $U = V = 0$, $\omega = 0$ условие на границе тела будет:

$$\psi(x,y) = \text{const.}$$

Условие на бесконечности

В случае набегающего потока с параметрами на бесконечности

$$v_x = v_\infty, \quad v_y = 0,$$

условие для бесконечно удаленных точек будет:

$$\psi(x,y) = v_\infty y + \text{const.}$$

Задача обтекание тела

Таким образом, задача обтекания тела плоским потенциальным потоком идеальной жидкости сводится к решению задачи Дирихле для функции тока ψ :

- 1) внутри исследуемой области решается уравнение Лапласа:

$$\Delta\psi = 0;$$

- 2) а на бесконечности и границе обтекаемого тела заданы значения функции ψ в зависимости от условий обтекания.

Сила при безотрывном обтекании

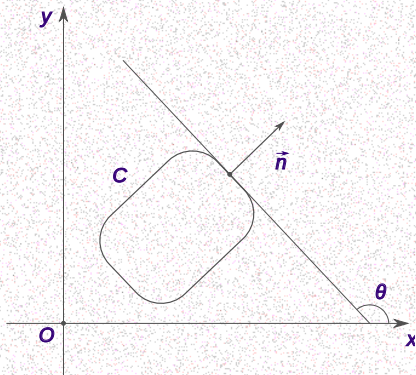
Определение

По аналогии с комплексными скоростью и потенциалом определим комплексную силу R , действующую на контур C в области течения по формуле

$$R = X + iY,$$

где X , Y – вещественные проекции силы на оси координат.

Формула для силы через давление при безотрывном обтекании



Комплексно-сопряженная сила R^* вдоль контура тела C при безотрывном обтекании:

$$\begin{aligned} R^* &= X - iY = \\ &= - \oint_C p(\cos(\vec{n}, x) - i \cos(\vec{n}, y)) ds = \\ &= - \oint_C p(\sin \theta + i \cos \theta) ds = \\ &= -i \oint_C p e^{-\theta i} ds. \end{aligned}$$

Выражение для комплексного дифференциала

$$dz = dx + idy = ds(\cos \theta + i \sin \theta) = e^{i\theta} ds,$$

$$dz^* = dx - idy = ds(\cos \theta - i \sin \theta) = e^{-i\theta} ds.$$

Отсюда

$$dz^* = e^{-2\theta i} dz.$$

Выражение для комплексного дифференциала

$$\begin{aligned} dz &= dx + idy = ds(\cos \theta + i \sin \theta) = e^{i\theta} ds, \\ dz^* &= dx - idy = ds(\cos \theta - i \sin \theta) = e^{-i\theta} ds. \end{aligned}$$

Отсюда

$$dz^* = e^{-2\theta i} dz.$$

Интеграл Бернулли

Связь давления и скорости через интеграл Бернулли

$$p = c - \frac{1}{2} \rho v^2$$

справедлива вдоль контура тела при безотрывном обтекании, т.к. он является линией тока. При потенциальном течении эта связь справедлива во всей области течения.

$$R^* = -ic \oint_C dz^* + \frac{i\rho}{2} \oint_C v^2 dz^* = \frac{i\rho}{2} \oint_C v^2 dz^* = \frac{i\rho}{2} \oint_C (ve^{-i\theta})^2 dz$$

$$R^* = -ic \oint_C dz^* + \frac{i\rho}{2} \oint_C v^2 dz^* = \frac{i\rho}{2} \oint_C v^2 dz^* = \frac{i\rho}{2} \oint_C (ve^{-i\theta})^2 dz$$

Используя, что

$$ve^{-i\theta} = v \cos \theta - iv \sin \theta = v_x - iv_y = v^*,$$

получим:

$$R^* = X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint_C (v^*)^2 dz.$$

$$\begin{aligned}
 L &= - \oint_C p(x \cos(\vec{n}, y) - y \cos(\vec{n}, x)) ds = \oint_C p(x \cos \theta + y \sin \theta) ds = \\
 &= \oint_C p(x dx + y dy) = \oint_C \left(c - \frac{\rho v^2}{2} \right) (x dx + y dy) = \\
 &= \oint_C c d(x^2 + y^2) - \frac{\rho}{2} \oint_C v^2 (x dx + y dy) = \operatorname{Re} \left(-\frac{\rho}{2} \oint_C v^2 z dz^* \right) = \\
 &= \operatorname{Re} \left(-\frac{\rho}{2} \oint_C (v^*)^2 z dz, \right),
 \end{aligned}$$

т.к. $v^2 dz^* = (v^*)^2 dz$.

Формулы Блазиуса – Чаплыгина для потенциального течения

Если течение потенциально, тогда существует комплексный потенциал:

$$w(z) = \varphi(z) + i\psi(z) \quad \text{и} \quad \frac{dw}{dz} = v^*.$$

Формулы Блазиуса – Чаплыгина

$$R^* = X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz,$$

$$L = \operatorname{Re} \left[-\frac{\rho}{2} \oint_C \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 z dz \right].$$

Формула Кутты – Жуковского

Предположения

Поток потенциален вне тела, которое можно заменить на конечное число источников, вихрей и диполей, лежащих внутри границы тела – контура C .

Формула для силы и реакции

$$R^* = X - iY = i\rho\Gamma v_\infty^*,$$

$$L = \operatorname{Re} \left[-\rho v_\infty^* \sum_{k=1}^m \Gamma_k b_k - i\rho M v_\infty^* \right],$$

где Γ_i – циркуляции вихрей, находящихся в точках b_i ($i = 1, \dots, m$); M – суммарный момент источников и диполей; Γ – суммарная циркуляция вихрей, находящихся внутри тела.

Метод конформных отображений

Основная идея

Использование метода конформных отображений и теоремы Римана о конформном отображении односвязных областей.

Дано

- 1) конформное отображение $z = f(\zeta)$;
- 2) потенциал течения на вспомогательной плоскости $\psi(\zeta)$.

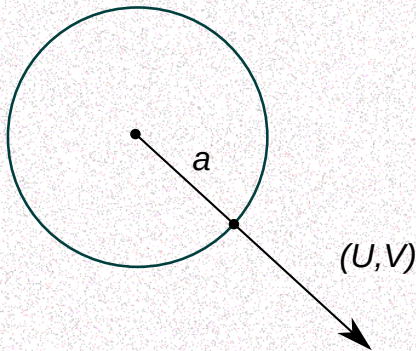
Решение

$$\begin{cases} \chi = \chi(f(\zeta)) = \psi(\zeta), \\ z = f(\zeta). \end{cases}$$

$$v^* = \frac{d\chi}{dz} = \frac{d\psi}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz},$$

где $\chi(z)$ — потенциал течения в физической плоскости.

Задача обтекания кругового цилиндра



Найти комплексный потенциал обтекания кругового цилиндра радиуса a , движущегося в бесконечной покоящейся жидкости со скоростью (U, V) .

Задача обтекания кругового цилиндра

Постановка задачи

В системе координат цилиндра найти потенциал

$$w(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$$

такой, что его мнимая часть на окружности $|z| = a$ удовлетворяет условию

$$\psi(x + iy) = Uy - Vx + \text{const.}$$

Задача обтекания кругового цилиндра

Постановка задачи

Решение ищется в виде ряда:

$$\frac{dw}{dz} = v^*(z) = c_0 + \frac{c}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \dots,$$

т.к. $v^*(z)$ – однозначна, определена вне $|z| > a$, ограничена и на бесконечности стремится к 0.

Сразу следует, что

$$c_0 = 0$$

и

$$w(z) = c \ln(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}.$$

Задача обтекания кругового цилиндра

Постановка задачи

Для обеспечения выполнения граничных условий необходимо

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = U \cos \theta + V \sin \theta.$$

При $c = A + iB$, $c_n = A_n + iB_n$, $z = re^{i\theta}$

$$w(z) = \varphi + i\psi = (A + iB)(\ln r + i\theta) + (A_1 + iB_1)\frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n + iB_n)\frac{1}{r^n}(\cos n\theta - i \sin n\theta).$$

Задача обтекания кругового цилиндра

Постановка задачи

Таким образом,

$$\varphi(r) = \operatorname{Re}(w(z)) = A \ln r - B\theta + (A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta) \frac{1}{r} + \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^n} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{A}{r} - (A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta) \frac{1}{r^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{r^{n+1}} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

Задача обтекания кругового цилиндра

Постановка задачи

Полагая $r = a$,

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} &= \frac{A}{a} - (A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta) \frac{1}{a^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{a^{n+1}} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = \\ &= U \cos \theta + V \sin \theta.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$A = 0, \quad A_1 = -Ua^2, \quad B_1 = -Va^2, \quad A_n = B_n = 0.$$

Коэффициент B остался не определён. Положим $B = -\frac{\Gamma}{2\pi}$, тогда

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - \frac{Ua^2 + iVa^2}{z}.$$

Задача обтекания кругового цилиндра

Решение

$$\begin{aligned}w(z) &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - (U + iV) \frac{a^2}{z}, \\ \varphi(z) &= \frac{\Gamma}{2\pi\theta} - (U \cos \theta + V \sin \theta) \frac{a^2}{r}, \\ \psi(z) &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + (U \sin \theta - V \cos \theta) \frac{a^2}{r},\end{aligned}$$

где $z = re^{i\theta}$.

Задача обтекания кругового цилиндра жидкостью, движущейся на бесконечности

Решение

Потенциал для задачи обтекания круга поступательным потоком, имеющим на бесконечности скорость $v_\infty = v_{\infty,x} + iv_{\infty,y}$, имеет вид:

$$w(z) = v_\infty^* z + (v_\infty - U - iV) \frac{a^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

Интересный случай — обтекание неподвижного цилиндра $U = V = 0$.

1. *Валландер С. В.* Лекции по гидроаэромеханике. Учеб. пособие. Л. Изд-во Ленингр. ун-та, 1978.
2. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Гос. издат. физ.-мат. лит., 1963.