Аффинный ортогональный тензор

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

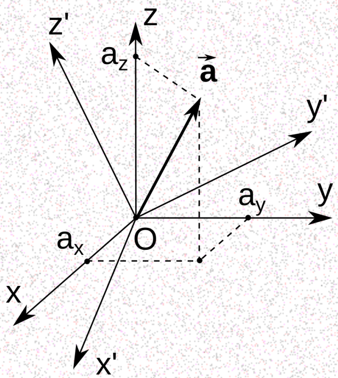
Кафедра аэрофизики и газовой динамики

25 февраля 2020 г.

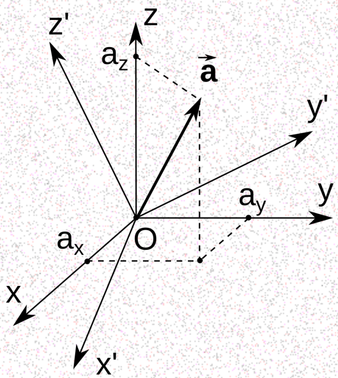
Аннотация

Аффинный ортогональный тензор второго ранга. Диада. Сопряженный тензор. Симметричные и антисимметричные тензоры. Теоремы о разложении тензора. Скалярное и векторное умножение тензора на вектор. Скалярное произведение тензоров.

Аффинный ортогональный вектор



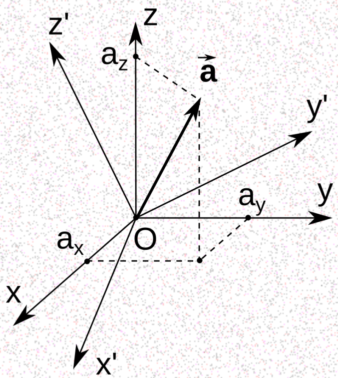
Аффинный ортогональный вектор



Пусть в некоторой ортогональной прямолинейной системе координат $Oxyz$

$$\vec{a} = ia_x + ja_y + ka_z.$$

Аффинный ортогональный вектор



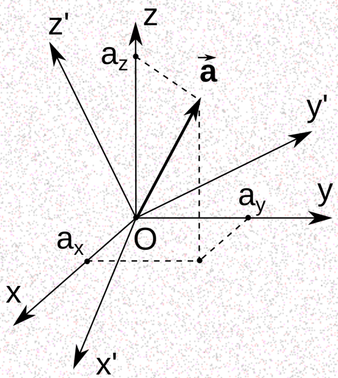
Пусть в некоторой ортогональной прямолинейной системе координат $Oxyz$

$$\vec{a} = ia_x + ja_y + ka_z.$$

Тогда в другой ортогональной прямолинейной системе координат $Ox'y'z'$ вектор будет иметь координаты:

$$a_{x'} \quad = \quad a_x \cos(x, x') + a_y \cos(y, x') + a_z \cos(z, x'),$$

Аффинный ортогональный вектор



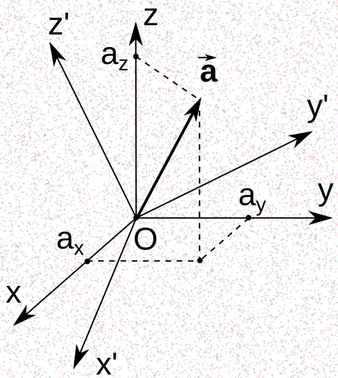
Пусть в некоторой ортогональной прямолинейной системе координат $Oxyz$

$$\vec{a} = ia_x + ja_y + ka_z.$$

Тогда в другой ортогональной прямолинейной системе координат $Ox'y'z'$ вектор будет иметь координаты:

$$\begin{aligned} a_{x'} &= a_x \cos(x, x') + a_y \cos(y, x') + a_z \cos(z, x'), \\ a_{y'} &= a_x \cos(x, y') + a_y \cos(y, y') + a_z \cos(z, y'), \end{aligned}$$

Аффинный ортогональный вектор



Пусть в некоторой ортогональной прямолинейной системе координат $Oxyz$

$$\vec{a} = ia_x + ja_y + ka_z.$$

Тогда в другой ортогональной прямолинейной системе координат $Ox'y'z'$ вектор будет иметь координаты:

$$\begin{aligned}
a_{x'} &= a_x \cos(x, x') + a_y \cos(y, x') + a_z \cos(z, x'),\\
a_{y'} &= a_x \cos(x, y') + a_y \cos(y, y') + a_z \cos(z, y'),\\
a_{z'} &= a_x \cos(x, z') + a_y \cos(y, z') + a_z \cos(z, z').
\end{aligned}$$

Аффинный ортогональный вектор

Если для прямолинейной ортогональной системы координат $Oxyz$ имеется совокупность трех величин a_x, a_y, a_z, преобразующихся по вышеуказанным формулам в величины $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$, в другой ортогональной прямолинейной системе координат $Ox'y'z'$,

Аффинный ортогональный вектор

Если для прямолинейной ортогональной системы координат $Oxyz$ имеется совокупность трех величин a_x, a_y, a_z, преобразующихся по вышеуказанным формулам в величины $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$, в другой ортогональной прямолинейной системе координат $Ox'y'z'$, то совокупность этих величин определяет аффинный ортогональный вектор $\vec{a}$. Скалярные величины a_x, a_y, a_z называются составляющими (компонентами) вектора $\vec{a}$ по осям Ox, Oy, Oz.

Аффинный ортогональный тензор второго ранга

Если для прямолинейной ортогональной системы координат $Oxyz$ имеется совокупность трех векторов $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$, $\vec{p}_z$, преобразующихся по формулам в величины $\vec{p}_{x'}$, $\vec{p}_{y'}$, $\vec{p}_{z'}$, в другой системе координат $Ox'y'z'$:

$$
\begin{aligned}
\vec{p}_{x'} &= \vec{p}_x \cos(x,x') + \vec{p}_y \cos(y,x') + \vec{p}_z \cos(z,x'), \\
\vec{p}_{y'} &= \vec{p}_x \cos(x,y') + \vec{p}_y \cos(y,y') + \vec{p}_z \cos(z,y'), \\
\vec{p}_{z'} &= \vec{p}_x \cos(x,z') + \vec{p}_y \cos(y,z') + \vec{p}_z \cos(z,z'),
\end{aligned}
$$

Аффинный ортогональный тензор второго ранга

Если для прямолинейной ортогональной системы координат $Oxyz$ имеется совокупность трех векторов $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$, $\vec{p}_z$, преобразующихся по формулам в величины $\vec{p}_{x'}$, $\vec{p}_{y'}$, $\vec{p}_{z'}$, в другой системе координат $Ox'y'z'$:

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{x'} &= \vec{p}_x \cos(x,x') + \vec{p}_y \cos(y,x') + \vec{p}_z \cos(z,x'),\\
\vec{p}_{y'} &= \vec{p}_x \cos(x,y') + \vec{p}_y \cos(y,y') + \vec{p}_z \cos(z,y'),\\
\vec{p}_{z'} &= \vec{p}_x \cos(x,z') + \vec{p}_y \cos(y,z') + \vec{p}_z \cos(z,z'),
\end{aligned}$$

то совокупность этих величин определяет аффинный ортогональный тензор второго ранга. Векторы $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$, $\vec{p}_z$ называются составляющими (компонентами) тензора П по осям Ox, Oy, Oz.

Матричное представление тензора

Будем обозначать

$$\Pi = i\vec{p}_x + j\vec{p}_y + k\vec{p}_z.$$

Матричное представление тензора

Будем обозначать

$$\Pi = i\vec{p}_x + j\vec{p}_y + k\vec{p}_z.$$

Таким образом, тензор представляет собой набор из 9 компонент:

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}$$

Матричное представление тензора

Будем обозначать

$$\Pi = i\vec{p}_x + j\vec{p}_y + k\vec{p}_z.$$

Таким образом, тензор представляет собой набор из 9 компонент:

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} \begin{array}{lc} \leftarrow & \vec{p}_x = p_{xx}i + p_{xy}j + p_{xz}k \\ \leftarrow & \vec{p}_y = p_{yx}i + p_{yy}j + p_{yz}k \\ \leftarrow & \vec{p}_z = p_{zx}i + p_{zy}j + p_{zz}k \end{array}$$

Матричное представление тензора

Будем обозначать

$$\Pi = i\vec{p}_x + j\vec{p}_y + k\vec{p}_z.$$

Таким образом, тензор представляет собой набор из 9 компонент:

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} \begin{array}{ll} \leftarrow & \vec{p}_x = p_{xx}i + p_{xy}j + p_{xz}k \\ \leftarrow & \vec{p}_y = p_{yx}i + p_{yy}j + p_{yz}k \\ \leftarrow & \vec{p}_z = p_{zx}i + p_{zy}j + p_{zz}k \end{array}$$

В дальнейшем:

вместо координат x, y,z будем писать x_1, x_2, x_3;

базисные векторы будем обозначать i_1, i_2, i_3;

компоненты тензора будем нумеровать, т.е. p_{ij} $(i,j = \overline{1,3})$.

Преобразование ортогональных систем координат

Пусть задано некоторое преобразование одной ортогональной прямолинейной системы координат в другую с помощью матрицы преобразования, т.е. заданы направляющие косинусы единичных векторов новых базисных векторов $\alpha_{ik} = \cos(x_i, x'_k)$:

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

Преобразование ортогональных систем координат

Пусть задано некоторое преобразование одной ортогональной прямолинейной системы координат в другую с помощью матрицы преобразования, т.е. заданы направляющие косинусы единичных векторов новых базисных векторов $\alpha_{ik} = \cos(x_i, x'_k)$:

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_{is}^2 = 1 & (s = \overline{1,3}), \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_{is}\alpha_{ik} = 0 & (s, k = \overline{1,3}; s \neq k). \end{cases}$$

Преобразование ортогональных систем координат

Пусть задано некоторое преобразование одной ортогональной прямолинейной системы координат в другую с помощью матрицы преобразования, т.е. заданы направляющие косинусы единичных векторов новых базисных векторов $\alpha_{ik} = \cos(x_i, x'_k)$:

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_{is}^2 = 1 & (s = \overline{1,3}), \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_{is}\alpha_{ik} = 0 & (s, k = \overline{1,3}; s \neq k). \end{cases}$$

Таким образом, Q – ортогональная матрица, т.к.

$$Q^{-1} = Q^{\mathrm{t}}.$$

Компоненты тензора в штрихованной системе координат

Компоненты вектора $\vec{a}$ и тензора П в новой штрихованной системе координат a'_1, a'_2, a'_3 и $\vec{p'}_1, \vec{p'}_2, \vec{p'}_3$ имеют вид:

$$a'_k = a_{x'_k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} a_{x_i}, \quad \vec{p'}_k = \vec{p}_{x'_k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} \vec{p}_{x_i} \quad (k = \overline{1,3}).$$

Компоненты тензора в штрихованной системе координат

Компоненты вектора $\vec{a}$ и тензора П в новой штрихованной системе координат a'_1, a'_2, a'_3 и $\vec{p'}_1, \vec{p'}_2, \vec{p'}_3$ имеют вид:

$$a'_k = a_{x'_k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} a_{x_i}, \quad \vec{p'}_k = \vec{p}_{x'_k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} \vec{p}_{x_i} \quad (k = \overline{1,3}).$$

Проекция вектора $\vec{p}_{x'_k}$ на ось x'_l: $(\vec{p}_{x'_k})_{x'_l} = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr} (\vec{p}_{x_r})_{x'_l}$.

Компоненты тензора в штрихованной системе координат

Компоненты вектора $\vec{a}$ и тензора П в новой штрихованной системе координат a'_1, a'_2, a'_3 и $\vec{p'}_1, \vec{p'}_2, \vec{p'}_3$ имеют вид:

$$a'_k = a_{x'_k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} a_{x_i}, \quad \vec{p'}_k = \vec{p}_{x'_k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} \vec{p}_{x_i} \quad (k = \overline{1,3}).$$

Проекция вектора $\vec{p}_{x'_k}$ на ось x'_l: $(\vec{p}_{x'_k})_{x'_l} = \sum\limits_{r=1}^{3} \alpha_{kr} (\vec{p}_{x_r})_{x'_l}$.

Из определения аффинного вектора: $(\vec{p}_{x_r})_{x'_l} = \sum\limits_{s=1}^{3} \alpha_{ls} \vec{p}_{x_r x_s}$.

Компоненты тензора в штрихованной системе координат

Компоненты вектора $\vec{a}$ и тензора П в новой штрихованной системе координат a'_1, a'_2, a'_3 и $\vec{p'}_1, \vec{p'}_2, \vec{p'}_3$ имеют вид:

$$a'_k = a_{x'_k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} a_{x_i}, \quad \vec{p'}_k = \vec{p}_{x'_k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} \vec{p}_{x_i} \quad (k = \overline{1,3}).$$

Проекция вектора $\vec{p}_{x'_k}$ на ось x'_l: $(\vec{p}_{x'_k})_{x'_l} = \sum\limits_{r=1}^{3} \alpha_{kr} (\vec{p}_{x_r})_{x'_l}$.

Из определения аффинного вектора: $(\vec{p}_{x_r})_{x'_l} = \sum\limits_{s=1}^{3} \alpha_{ls} \vec{p}_{x_r x_s}$.

Подставим последнее равенство в предпоследнее:

$$p_{x'_k x'_l} = \sum^{3} \sum^{3} \alpha_{kr} \alpha_{ls} p_{x_r x_s} \text{ или } p'_{kl} = \sum^{3} \sum^{3} \alpha_{kr} \alpha_{ls} p_{rs}.$$

Определение тензора (альтернативное)

[альтернативное]
Если для каждой прямолинейной прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$ имеется совокупность девяти величин p_{kl}, преобразующихся в величины p'_{kl} в новой системе координат $Ox'_1x'_2x'_3$ по формуле:

$$p'_{kl} = \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \alpha_{kr}\alpha_{ls}p_{rs},$$

то совокупность этих величин определяет аффинный ортогональный тензор второго ранга Π в пространстве трех измерений.

Альтернативная запись тензора

Записанную в новых обозначения формулу для разложения векторов

$$\vec{p}_k = \sum_{l=1}^{3} \vec{i}_l p_{kl}, \qquad (k = 1, 2, 3)$$

Альтернативная запись тензора

Записанную в новых обозначения формулу для разложения векторов

$$\vec{p}_k = \sum_{l=1}^{3} \vec{i}_l p_{kl}, \quad (k = 1, 2, 3)$$

подставим в равенство, определяющее тензор, и получим условную запись

$$\Pi = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \vec{i}_k \vec{i}_l p_{kl}.$$

Единичный тензор

Пусть

$$I = i_1 i_1 + i_2 i_2 + i_3 i_3.$$

Тензор I называется единичным тензором.

Единичный тензор

Пусть
$$I = i_1 i_1 + i_2 i_2 + i_3 i_3.$$

Тензор I называется единичным тензором.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Единичный тензор

Пусть

$$I = i_1 i_1 + i_2 i_2 + i_3 i_3.$$

Тензор I называется единичным тензором.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & \vec{p}_1 = i_1 \\ \leftarrow & \vec{p}_2 = i_2 \\ \leftarrow & \vec{p}_3 = i_3 \end{matrix}$$

Единичный тензор

Пусть
$$I = i_1 i_1 + i_2 i_2 + i_3 i_3.$$

Тензор I называется единичным тензором.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & \vec{p}_1 = i_1 \\ \leftarrow & \vec{p}_2 = i_2 \\ \leftarrow & \vec{p}_3 = i_3 \end{matrix} \qquad p_{rs} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s, \\ 0, r \neq s. \end{cases}$$

Единичный тензор

Пусть

$$I = i_1 i_1 + i_2 i_2 + i_3 i_3.$$

Тензор I называется единичным тензором.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \quad \vec{p}_1 = i_1 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_2 = i_2 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_3 = i_3 \end{array} \qquad p_{rs} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s, \\ 0, r \neq s. \end{cases}$$

В альтернативной системе координат

$$p'_{kl} =$$

Единичный тензор

Пусть

$$I = i_1 i_1 + i_2 i_2 + i_3 i_3.$$

Тензор I называется единичным тензором.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \quad \vec{p}_1 = i_1 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_2 = i_2 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_3 = i_3 \end{array} \qquad p_{rs} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s, \\ 0, r \neq s. \end{cases}$$

В альтернативной системе координат

$$p'_{kl} = \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} \alpha_{kr} \alpha_{ls} p_{rs} =$$

Единичный тензор

Пусть

$$I = i_1 i_1 + i_2 i_2 + i_3 i_3.$$

Тензор I называется единичным тензором.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \quad \vec{p}_1 = i_1 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_2 = i_2 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_3 = i_3 \end{array} \qquad p_{rs} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s, \\ 0, r \neq s. \end{cases}$$

В альтернативной системе координат

$$p'_{kl} = \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} \alpha_{kr} \alpha_{ls} p_{rs} = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr} \alpha_{lr} =$$

Единичный тензор

Пусть
$$I = i_1 i_1 + i_2 i_2 + i_3 i_3.$$

Тензор I называется единичным тензором.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \quad \vec{p}_1 = i_1 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_2 = i_2 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_3 = i_3 \end{array} \qquad p_{rs} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s, \\ 0, r \neq s. \end{cases}$$

В альтернативной системе координат

$$p'_{kl} = \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} \alpha_{kr} \alpha_{ls} p_{rs} = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr} \alpha_{lr} = \delta_{kl}.$$

Единичный тензор

Пусть

$$I = i_1 i_1 + i_2 i_2 + i_3 i_3.$$

Тензор I называется единичным тензором.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \quad \vec{p}_1 = i_1 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_2 = i_2 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_3 = i_3 \end{array} \qquad p_{rs} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s, \\ 0, r \neq s. \end{cases}$$

В альтернативной системе координат

$$p'_{kl} = \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} \alpha_{kr} \alpha_{ls} p_{rs} = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr} \alpha_{lr} = \delta_{kl}.$$

Тензор I имеет одни и те же компоненты в любой ортогональной системе координат.

Диада

Пусть $\vec{a} = i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3$ и $\vec{b} = i_1 b_1 + i_2 b_2 + i_3 b_3$,

Диада

Пусть $\vec{a} = i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3$ и $\vec{b} = i_1 b_1 + i_2 b_2 + i_3 b_3$, тогда диадным или тензорными произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется тензор, определяемый следующим соотношением:

Диада

Пусть $\vec{a} = i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3$ и $\vec{b} = i_1 b_1 + i_2 b_2 + i_3 b_3$, тогда диадным или тензорными произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется тензор, определяемый следующим соотношением:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a}\vec{b} =$$

Диада

Пусть $\vec{a} = i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3$ и $\vec{b} = i_1 b_1 + i_2 b_2 + i_3 b_3$, тогда диадным или тензорными произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется тензор, определяемый следующим соотношением:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a}\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

Корректность определения диады

При переходе к новой системе координат $Ox'_1x'_2x'_3$ компоненты этих векторов преобразуются по формулам:

$$a'_k = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr} a_r, \quad b'_l = \sum_{s=1}^{3} \alpha_{ls} b_s \quad (k, l = 1, 2, 3).$$

Корректность определения диады

При переходе к новой системе координат $Ox_1'x_2'x_3'$ компоненты этих векторов преобразуются по формулам:

$$a_k' = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr} a_r, \quad b_l' = \sum_{s=1}^{3} \alpha_{ls} b_s \quad (k, l = 1, 2, 3).$$

Перемножив оба эти равенства, получим

$$a_k' b_l' = \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} \alpha_{ks} \alpha_{ls} a_r b_s.$$

следовательно приведенное выражение является тензором по определению (альтернативному).

Сопряженный тензор

Тензор Π_c называется сопряженным к тензору Π, если компоненты его получены транспонированием компонент тензора Π.

Сопряженный тензор

Тензор Π_c называется сопряженным к тензору Π, если компоненты его получены транспонированием компонент тензора Π.

Сопряжение диады

$$(\vec{a}\vec{b})_c =$$

Сопряженный тензор

Тензор Π_c называется сопряженным к тензору Π, если компоненты его получены транспонированием компонент тензора Π.

Сопряжение диады

$$(\vec{a}\vec{b})_c = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}_c =$$

Сопряженный тензор

Тензор Π_c называется сопряженным к тензору Π, если компоненты его получены транспонированием компонент тензора Π.

Сопряжение диады

$$(\vec{a}\vec{b})_c = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}_c = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 \end{pmatrix} =$$

Сопряженный тензор

Тензор Π_c называется сопряженным к тензору Π, если компоненты его получены транспонированием компонент тензора Π.

Сопряжение диады

$$(\vec{a}\vec{b})_c = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}_c = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 \end{pmatrix} = \vec{b}\vec{a}.$$

Сопряженный тензор

Тензор Π_c называется сопряженным к тензору Π, если компоненты его получены транспонированием компонент тензора Π.

Сопряжение диады

$$(\vec{a}\vec{b})_c = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}_c = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 \end{pmatrix} = \vec{b}\vec{a}.$$

Таким образом, $(\vec{a}\vec{b})_c = \vec{b}\vec{a}$.

Сумма тензоров

Суммой тензоров A и B называется тензор C, компоненты которого равны сумме компонент тензоров A и B. Пишут $C = A + B$.

Сумма тензоров

Суммой тензоров A и B называется тензор C, компоненты которого равны сумме компонент тензоров A и B. Пишут $C = A + B$.

Используя альтернативное определение легко показать, что определение суммы корректно, т.е. C является тензором.

Симметричный тензор

Тензор S называется симметричным, если $S_c = S$.

Симметричный тензор

Тензор S называется симметричным, если $S_c = S$.

Покомпонентная запись симметричного тензора

$$S = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix}$$

Симметричный тензор

Тензор S называется симметричным, если $S_c = S$.

Покомпонентная запись симметричного тензора

$$S = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix}$$

Симметричный тензор определяется 6 компонентами.

Антисимметричный тензор

Тензор A называется антисимметричным, если $A_c = -A$.

Антисимметричный тензор

Тензор A называется антисимметричным, если $A_c = -A$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$.

Антисимметричный тензор

Тензор A называется антисимметричным, если $A_c = -A$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$A = i_1\vec{p}_1 + i_2\vec{p}_2 + i_3\vec{p}_3 =$$

Антисимметричный тензор

Тензор A называется антисимметричным, если $A_c = -A$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$A = i_1\vec{p}_1 + i_2\vec{p}_2 + i_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

Антисимметричный тензор

Тензор A называется антисимметричным, если $A_c = -A$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$A = i_1\vec{p}_1 + i_2\vec{p}_2 + i_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\vec{p}_1 \ = \ -\omega_3 i_2 + \omega_2 i_3 \ = \ i_1 \ \times \ \vec{\omega},$

Антисимметричный тензор

Тензор A называется антисимметричным, если $A_c = -A$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$A = i_1\vec{p}_1 + i_2\vec{p}_2 + i_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\vec{p}_1 = -\omega_3 i_2 + \omega_2 i_3 = i_1 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_2 = \omega_3 i_1 - \omega_1 i_3 = i_2 \times \vec{\omega}$,

Антисимметричный тензор

Тензор A называется антисимметричным, если $A_c = -A$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$A = i_1\vec{p}_1 + i_2\vec{p}_2 + i_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\vec{p}_1 = -\omega_3 i_2 + \omega_2 i_3 = i_1 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_2 = \omega_3 i_1 - \omega_1 i_3 = i_2 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_3 = -\omega_2 i_1 + \omega_1 i_2 = i_3 \times \vec{\omega}$.

Антисимметричный тензор

Тензор A называется антисимметричным, если $A_c = -A$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$A = i_1\vec{p}_1 + i_2\vec{p}_2 + i_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\vec{p}_1 = -\omega_3 i_2 + \omega_2 i_3 = i_1 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_2 = \omega_3 i_1 - \omega_1 i_3 = i_2 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_3 = -\omega_2 i_1 + \omega_1 i_2 = i_3 \times \vec{\omega}$.

Таким образом, $A = i_1(i_1 \times \vec{\omega}) + i_2(i_2 \times \vec{\omega}) + i_3(i_3 \times \vec{\omega})$.

Антисимметричный тензор

Тензор A называется антисимметричным, если $A_c = -A$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$A = i_1\vec{p}_1 + i_2\vec{p}_2 + i_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\vec{p}_1 = -\omega_3 i_2 + \omega_2 i_3 = i_1 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_2 = \omega_3 i_1 - \omega_1 i_3 = i_2 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_3 = -\omega_2 i_1 + \omega_1 i_2 = i_3 \times \vec{\omega}$.

Таким образом, $A = i_1(i_1 \times \vec{\omega}) + i_2(i_2 \times \vec{\omega}) + i_3(i_3 \times \vec{\omega})$.

Антисимметричный тензор задается 3 компонентами.

Теорема о разложении тензора

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Теорема о разложении тензора

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.
Пусть задан тензор Π.

Теорема о разложении тензора

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.
Пусть задан тензор Π. Легко убедиться, что

$$\Pi = S + A,$$

где $S = \dfrac{\Pi + \Pi_c}{2}$ – симметричный, а $A = \dfrac{\Pi - \Pi_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$S_c =$$

Теорема о разложении тензора

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.
Пусть задан тензор П. Легко убедиться, что

$$\Pi = S + A,$$

где $S = \dfrac{\Pi + \Pi_c}{2}$ – симметричный, а $A = \dfrac{\Pi - \Pi_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$S_c = \left(\frac{\Pi + \Pi_c}{2}\right)_c =$$

Теорема о разложении тензора

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.
Пусть задан тензор П. Легко убедиться, что

$$\Pi = S + A,$$

где $S = \dfrac{\Pi + \Pi_c}{2}$ – симметричный, а $A = \dfrac{\Pi - \Pi_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$S_c = \left(\frac{\Pi + \Pi_c}{2}\right)_c = \frac{\Pi_c + (\Pi_c)_c}{2} =$$

Теорема о разложении тензора

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.
Пусть задан тензор Π. Легко убедиться, что

$$\Pi = S + A,$$

где $S = \dfrac{\Pi + \Pi_c}{2}$ – симметричный, а $A = \dfrac{\Pi - \Pi_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$S_c = \left(\frac{\Pi + \Pi_c}{2}\right)_c = \frac{\Pi_c + (\Pi_c)_c}{2} = \frac{\Pi + \Pi_c}{2} =$$

Теорема о разложении тензора

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.
Пусть задан тензор Π. Легко убедиться, что

$$\Pi = S + A,$$

где $S = \dfrac{\Pi + \Pi_c}{2}$ – симметричный, а $A = \dfrac{\Pi - \Pi_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$S_c = \left(\frac{\Pi + \Pi_c}{2}\right)_c = \frac{\Pi_c + (\Pi_c)_c}{2} = \frac{\Pi + \Pi_c}{2} = S,$$

$$A_c =$$

Теорема о разложении тензора

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.
Пусть задан тензор П. Легко убедиться, что

$$\Pi = S + A,$$

где $S = \dfrac{\Pi + \Pi_c}{2}$ – симметричный, а $A = \dfrac{\Pi - \Pi_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$S_c = \left(\frac{\Pi + \Pi_c}{2}\right)_c = \frac{\Pi_c + (\Pi_c)_c}{2} = \frac{\Pi + \Pi_c}{2} = S,$$

$$A_c = \left(\frac{\Pi - \Pi_c}{2}\right)_c =$$

Теорема о разложении тензора

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.
Пусть задан тензор П. Легко убедиться, что

$$\Pi = S + A,$$

где $S = \dfrac{\Pi + \Pi_c}{2}$ – симметричный, а $A = \dfrac{\Pi - \Pi_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$S_c = \left(\frac{\Pi + \Pi_c}{2}\right)_c = \frac{\Pi_c + (\Pi_c)_c}{2} = \frac{\Pi + \Pi_c}{2} = S,$$

$$A_c = \left(\frac{\Pi - \Pi_c}{2}\right)_c = \frac{\Pi_c - (\Pi_c)_c}{2} =$$

Теорема о разложении тензора

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.
Пусть задан тензор П. Легко убедиться, что

$$\Pi = S + A,$$

где $S = \dfrac{\Pi + \Pi_c}{2}$ – симметричный, а $A = \dfrac{\Pi - \Pi_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$S_c = \left(\frac{\Pi + \Pi_c}{2}\right)_c = \frac{\Pi_c + (\Pi_c)_c}{2} = \frac{\Pi + \Pi_c}{2} = S,$$

$$A_c = \left(\frac{\Pi - \Pi_c}{2}\right)_c = \frac{\Pi_c - (\Pi_c)_c}{2} = -\frac{\Pi - \Pi_c}{2} =$$

Теорема о разложении тензора

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.
Пусть задан тензор Π. Легко убедиться, что

$$\Pi = S + A,$$

где $S = \dfrac{\Pi + \Pi_c}{2}$ – симметричный, а $A = \dfrac{\Pi - \Pi_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$S_c = \left(\frac{\Pi + \Pi_c}{2}\right)_c = \frac{\Pi_c + (\Pi_c)_c}{2} = \frac{\Pi + \Pi_c}{2} = S,$$

$$A_c = \left(\frac{\Pi - \Pi_c}{2}\right)_c = \frac{\Pi_c - (\Pi_c)_c}{2} = -\frac{\Pi - \Pi_c}{2} = -A.$$

□

Теорема о разложении тензора

Всякий тензор можно разложить в сумму трёх диад, такое разложение не единственно.

Теорема о разложении тензора

Всякий тензор можно разложить в сумму трёх диад, такое разложение не единственно.

Доказательство.
Пусть задан тензор Π. Легко убедиться, что

$$\Pi = i\vec{p}_x + j\vec{p}_y + k\vec{p}_z,$$

где i, j, k – базисные векторы пространства R^3; $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$ – компоненты тензора в указанном базисе.

□

Скалярное и векторное умножение тензора на вектор

Под скалярным произведением тензора $\Pi = \vec{i}_1\vec{p}_1 + \vec{i}_2\vec{p}_2 + \vec{i}_3\vec{p}_3$ на вектор $\vec{a} = \vec{i}_1 a_1 + \vec{i}_2 a_2 + \vec{i}_3 a_3$ справа будем понимать вектор $\vec{a}'$:

$$\vec{a}' = \Pi \cdot \vec{a} = \vec{i}_1(\vec{p}_1 \cdot \vec{a}) + \vec{i}_2(\vec{p}_2 \cdot \vec{a}) + \vec{i}_3(\vec{p}_3 \cdot \vec{a}).$$

Скалярное и векторное умножение тензора на вектор

Под скалярным произведением тензора $\Pi = \vec{i}_1\vec{p}_1 + \vec{i}_2\vec{p}_2 + \vec{i}_3\vec{p}_3$ на вектор $\vec{a} = \vec{i}_1 a_1 + \vec{i}_2 a_2 + \vec{i}_3 a_3$ справа будем понимать вектор $\vec{a}'$:

$$\vec{a}' = \Pi \cdot \vec{a} = \vec{i}_1(\vec{p}_1 \cdot \vec{a}) + \vec{i}_2(\vec{p}_2 \cdot \vec{a}) + \vec{i}_3(\vec{p}_3 \cdot \vec{a}).$$

Под скалярным произведением вектора $\vec{a}$ на тензор Π слева понимается вектор $\vec{a}''$:

$$\vec{a}'' = \vec{a} \cdot \Pi = (\vec{a} \cdot \vec{i}_1)\vec{p}_1 + (\vec{a} \cdot \vec{i}_2)\vec{p}_2 + (\vec{a} \cdot \vec{i}_3)\vec{p}_3 =$$

$$= a_1\vec{p}_1 + a_2\vec{p}_2 + a_3\vec{p}_3.$$

Диада (повтор)

Пусть $\vec{a} = i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3$ и $\vec{b} = i_1 b_1 + i_2 b_2 + i_3 b_3$, тогда диадным или тензорными произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется тензор, определяемый следующим соотношением:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a}\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} = i_1(a_1\vec{b}) + i_2(a_2\vec{b}) + i_3(a_3\vec{b}).$$

Диада (повтор)

Пусть $\vec{a} = i_1 a_1 + i_2 a_2 + i_3 a_3$ и $\vec{b} = i_1 b_1 + i_2 b_2 + i_3 b_3$, тогда диадным или тензорными произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется тензор, определяемый следующим соотношением:

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a}\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} = i_1(a_1\vec{b}) + i_2(a_2\vec{b}) + i_3(a_3\vec{b}).$$

Линейность диады по каждому аргументу

$$(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}.$$

$$\vec{c}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c}\vec{a} + \vec{c}\vec{b}.$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = (i_1 b_1 \vec{c} + i_2 b_2 \vec{c} + i_3 b_3 \vec{c})\cdot\vec{a} =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = (i_1 b_1 \vec{c} + i_2 b_2 \vec{c} + i_3 b_3 \vec{c})\cdot\vec{a} = i_1 b_1 (\vec{c}\cdot\vec{a}) + i_2 b_2 (\vec{c}\cdot\vec{a}) + i_3 b_3 (\vec{c}\cdot\vec{a}) =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = (i_1 b_1 \vec{c} + i_2 b_2 \vec{c} + i_3 b_3 \vec{c})\cdot\vec{a} = i_1 b_1 (\vec{c}\cdot\vec{a}) + i_2 b_2 (\vec{c}\cdot\vec{a}) + i_3 b_3 (\vec{c}\cdot\vec{a}) =$$

$$= (i_1 b_1 + i_2 b_2 + i_3 b_3)(\vec{c}\cdot\vec{a}) =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = (i_1 b_1\vec{c}+i_2 b_2\vec{c}+i_3 b_3\vec{c})\cdot\vec{a} = i_1 b_1(\vec{c}\cdot\vec{a})+i_2 b_2(\vec{c}\cdot\vec{a})+i_3 b_3(\vec{c}\cdot\vec{a}) =$$

$$= (i_1 b_1 + i_2 b_2 + i_3 b_3)(\vec{c}\cdot\vec{a}) = \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}).$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\vec{c}) =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = (i_1 b_1\vec{c}+i_2 b_2\vec{c}+i_3 b_3\vec{c})\cdot\vec{a} = i_1 b_1(\vec{c}\cdot\vec{a})+i_2 b_2(\vec{c}\cdot\vec{a})+i_3 b_3(\vec{c}\cdot\vec{a}) =$$

$$= (i_1 b_1 + i_2 b_2 + i_3 b_3)(\vec{c}\cdot\vec{a}) = \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}).$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\vec{c}) = \vec{a}\cdot(i_1 b_1\vec{c} + i_2 b_2\vec{c} + i_3 b_3\vec{c}) =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = (i_1 b_1\vec{c}+i_2 b_2\vec{c}+i_3 b_3\vec{c})\cdot\vec{a} = i_1 b_1(\vec{c}\cdot\vec{a})+i_2 b_2(\vec{c}\cdot\vec{a})+i_3 b_3(\vec{c}\cdot\vec{a}) =$$

$$= (i_1 b_1 + i_2 b_2 + i_3 b_3)(\vec{c}\cdot\vec{a}) = \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}).$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\vec{c}) = \vec{a}\cdot(i_1 b_1\vec{c} + i_2 b_2\vec{c} + i_3 b_3\vec{c}) = a_1 b_1\vec{c} + a_2 b_2\vec{c} + a_3 b_3\vec{c} =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = (i_1 b_1 \vec{c}+i_2 b_2 \vec{c}+i_3 b_3 \vec{c})\cdot\vec{a} = i_1 b_1(\vec{c}\cdot\vec{a})+i_2 b_2(\vec{c}\cdot\vec{a})+i_3 b_3(\vec{c}\cdot\vec{a}) =$$

$$= (i_1 b_1 + i_2 b_2 + i_3 b_3)(\vec{c}\cdot\vec{a}) = \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}).$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\vec{c}) = \vec{a}\cdot(i_1 b_1 \vec{c} + i_2 b_2 \vec{c} + i_3 b_3 \vec{c}) = a_1 b_1 \vec{c} + a_2 b_2 \vec{c} + a_3 b_3 \vec{c} =$$

$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)\vec{c} =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = (i_1 b_1 \vec{c} + i_2 b_2 \vec{c} + i_3 b_3 \vec{c})\cdot\vec{a} = i_1 b_1 (\vec{c}\cdot\vec{a}) + i_2 b_2 (\vec{c}\cdot\vec{a}) + i_3 b_3 (\vec{c}\cdot\vec{a}) =$$

$$= (i_1 b_1 + i_2 b_2 + i_3 b_3)(\vec{c}\cdot\vec{a}) = \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}).$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\vec{c}) = \vec{a}\cdot(i_1 b_1 \vec{c} + i_2 b_2 \vec{c} + i_3 b_3 \vec{c}) = a_1 b_1 \vec{c} + a_2 b_2 \vec{c} + a_3 b_3 \vec{c} =$$

$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}.$$

Векторное произведение тензора на вектор

Под **векторным произведением тензора** Π **на вектор** $\vec{a}$ **справа** понимается новый тензор Π', вычисленный по формуле:

$$\Pi' = \Pi \times \vec{a} = \vec{i}_1(\vec{p}_1 \times \vec{a}) + \vec{i}_2(\vec{p}_2 \times \vec{a}) + \vec{i}_3(\vec{p}_3 \times \vec{a}).$$

Векторное произведение тензора на вектор

Под векторным произведением тензора Π на вектор $\vec{a}$ справа понимается новый тензор Π', вычисленный по формуле:

$$\Pi' = \Pi \times \vec{a} = \vec{i}_1(\vec{p}_1 \times \vec{a}) + \vec{i}_2(\vec{p}_2 \times \vec{a}) + \vec{i}_3(\vec{p}_3 \times \vec{a}).$$

Под векторным произведением вектора $\vec{a}$ на тензор Π слева понимается новый тензор Π'', вычисленный по формуле:

$$\Pi'' = \vec{a} \times \Pi = (\vec{a} \times \vec{i}_1)\vec{p}_1 + (\vec{a} \times \vec{i}_2)\vec{p}_2 + (\vec{a} \times \vec{i}_3)\vec{p}_3.$$

Векторное произведение тензора на вектор

Под векторным произведением тензора Π на вектор $\vec{a}$ справа понимается новый тензор Π', вычисленный по формуле:

$$\Pi' = \Pi \times \vec{a} = \vec{i}_1(\vec{p}_1 \times \vec{a}) + \vec{i}_2(\vec{p}_2 \times \vec{a}) + \vec{i}_3(\vec{p}_3 \times \vec{a}).$$

Под векторным произведением вектора $\vec{a}$ на тензор Π слева понимается новый тензор Π'', вычисленный по формуле:

$$\Pi'' = \vec{a} \times \Pi = (\vec{a} \times \vec{i}_1)\vec{p}_1 + (\vec{a} \times \vec{i}_2)\vec{p}_2 + (\vec{a} \times \vec{i}_3)\vec{p}_3.$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (i_1 b_1 \vec{c} + i_2 b_2 \vec{c} + i_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (i_1 b_1 \vec{c} + i_2 b_2 \vec{c} + i_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= i_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + i_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + i_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (i_1 b_1 \vec{c} + i_2 b_2 \vec{c} + i_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= i_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + i_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + i_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (i_1 b_1 \vec{c} + i_2 b_2 \vec{c} + i_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= i_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + i_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + i_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

$$\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (i_1 b_1 \vec{c} + i_2 b_2 \vec{c} + i_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= i_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + i_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + i_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

$$\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \times (i_1 b_1 \vec{c} + i_2 b_2 \vec{c} + i_3 b_3 \vec{c}) =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (i_1 b_1 \vec{c} + i_2 b_2 \vec{c} + i_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= i_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + i_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + i_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

$$\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \times (i_1 b_1 \vec{c} + i_2 b_2 \vec{c} + i_3 b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times i_1)(b_1 \vec{c}) + (a \times i_2)(b_2 \vec{c}) + (a \times i_3)(b_3 \vec{c}) =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (i_1 b_1 \vec{c} + i_2 b_2 \vec{c} + i_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= i_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + i_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + i_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

$$\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \times (i_1 b_1 \vec{c} + i_2 b_2 \vec{c} + i_3 b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times i_1)(b_1 \vec{c}) + (a \times i_2)(b_2 \vec{c}) + (a \times i_3)(b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times i_1 b_1)\vec{c} + (a \times i_2 b_2)\vec{c} + (a \times i_3 b_3)\vec{c} =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (i_1 b_1 \vec{c} + i_2 b_2 \vec{c} + i_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= i_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + i_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + i_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

$$\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \times (i_1 b_1 \vec{c} + i_2 b_2 \vec{c} + i_3 b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times i_1)(b_1 \vec{c}) + (a \times i_2)(b_2 \vec{c}) + (a \times i_3)(b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times i_1 b_1)\vec{c} + (a \times i_2 b_2)\vec{c} + (a \times i_3 b_3)\vec{c} =$$

$$= (a \times i_1 b_1 + a \times i_2 b_2 + a \times i_3 b_3)\vec{c} =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (i_1 b_1 \vec{c} + i_2 b_2 \vec{c} + i_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= i_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + i_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + i_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

$$\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \times (i_1 b_1 \vec{c} + i_2 b_2 \vec{c} + i_3 b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times i_1)(b_1 \vec{c}) + (a \times i_2)(b_2 \vec{c}) + (a \times i_3)(b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times i_1 b_1)\vec{c} + (a \times i_2 b_2)\vec{c} + (a \times i_3 b_3)\vec{c} =$$

$$= (a \times i_1 b_1 + a \times i_2 b_2 + a \times i_3 b_3)\vec{c} = (a \times (i_1 b_1 + i_2 b_2 + i_3 b_3))\vec{c} =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (i_1 b_1 \vec{c} + i_2 b_2 \vec{c} + i_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= i_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + i_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + i_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

$$\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \times (i_1 b_1 \vec{c} + i_2 b_2 \vec{c} + i_3 b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times i_1)(b_1 \vec{c}) + (a \times i_2)(b_2 \vec{c}) + (a \times i_3)(b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times i_1 b_1)\vec{c} + (a \times i_2 b_2)\vec{c} + (a \times i_3 b_3)\vec{c} =$$

$$= (a \times i_1 b_1 + a \times i_2 b_2 + a \times i_3 b_3)\vec{c} = (a \times (i_1 b_1 + i_2 b_2 + i_3 b_3))\vec{c} =$$

Пример

Рассмотрим единичный тензор $I = i_1 i_1 + i_2 i_2 + i_3 i_3$.

Пример

Рассмотрим единичный тензор $I = i_1 i_1 + i_2 i_2 + i_3 i_3$. Построим тензор Ψ

$$\Psi = \vec{\omega} \times I = (\vec{\omega} \times i_1) i_1 + (\vec{\omega} \times i_2) i_2 + (\vec{\omega} \times i_3) i_3.$$

Пример

Рассмотрим единичный тензор $I = i_1 i_1 + i_2 i_2 + i_3 i_3$. Построим тензор Ψ

$$\Psi = \vec{\omega} \times I = (\vec{\omega} \times i_1) i_1 + (\vec{\omega} \times i_2) i_2 + (\vec{\omega} \times i_3) i_3.$$

Умножим тензор Ψ на произвольный вектор $\vec{a}$ справа

$$\Psi \cdot \vec{a} =$$

Пример

Рассмотрим единичный тензор $I = i_1 i_1 + i_2 i_2 + i_3 i_3$. Построим тензор Ψ

$$\Psi = \vec{\omega} \times I = (\vec{\omega} \times i_1) i_1 + (\vec{\omega} \times i_2) i_2 + (\vec{\omega} \times i_3) i_3.$$

Умножим тензор Ψ на произвольный вектор $\vec{a}$ справа

$$\Psi \cdot \vec{a} = (\vec{\omega} \times i_1)(i_1 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times i_2)(i_2 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times i_3)(i_3 \cdot \vec{a}) =$$

Пример

Рассмотрим единичный тензор $I = i_1 i_1 + i_2 i_2 + i_3 i_3$. Построим тензор Ψ

$$\Psi = \vec{\omega} \times I = (\vec{\omega} \times i_1) i_1 + (\vec{\omega} \times i_2) i_2 + (\vec{\omega} \times i_3) i_3.$$

Умножим тензор Ψ на произвольный вектор $\vec{a}$ справа

$$\Psi \cdot \vec{a} = (\vec{\omega} \times i_1)(i_1 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times i_2)(i_2 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times i_3)(i_3 \cdot \vec{a}) =$$

$$= (\vec{\omega} \times i_1) a_1 + (\vec{\omega} \times i_2) a_2 + (\vec{\omega} \times i_3) a_3 =$$

Пример

Рассмотрим единичный тензор $I = i_1 i_1 + i_2 i_2 + i_3 i_3$. Построим тензор Ψ

$$\Psi = \vec{\omega} \times I = (\vec{\omega} \times i_1) i_1 + (\vec{\omega} \times i_2) i_2 + (\vec{\omega} \times i_3) i_3.$$

Умножим тензор Ψ на произвольный вектор $\vec{a}$ справа

$$\Psi \cdot \vec{a} = (\vec{\omega} \times i_1)(i_1 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times i_2)(i_2 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times i_3)(i_3 \cdot \vec{a}) =$$

$$= (\vec{\omega} \times i_1) a_1 + (\vec{\omega} \times i_2) a_2 + (\vec{\omega} \times i_3) a_3 =$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{a}.$$

Пример

Рассмотрим единичный тензор $I = i_1 i_1 + i_2 i_2 + i_3 i_3$. Построим тензор Ψ

$$\Psi = \vec{\omega} \times I = (\vec{\omega} \times i_1) i_1 + (\vec{\omega} \times i_2) i_2 + (\vec{\omega} \times i_3) i_3.$$

Умножим тензор Ψ на произвольный вектор $\vec{a}$ справа

$$\Psi \cdot \vec{a} = (\vec{\omega} \times i_1)(i_1 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times i_2)(i_2 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times i_3)(i_3 \cdot \vec{a}) =$$

$$= (\vec{\omega} \times i_1) a_1 + (\vec{\omega} \times i_2) a_2 + (\vec{\omega} \times i_3) a_3 =$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{a}.$$

Таким образом, любой антисимметричный тензор может быть представлен в виде

Произведение тензоров

Рассмотрим два тензора A и B и вектор $\vec{c}$. Тогда пусть

$$\vec{c'} = B \cdot \vec{c}.$$

и

$$\vec{c''} = A \cdot \vec{c'} = A \cdot (B \cdot \vec{c}).$$

Произведение тензоров

Рассмотрим два тензора A и B и вектор $\vec{c}$. Тогда пусть

$$\vec{c'} = B \cdot \vec{c}.$$

и

$$\vec{c''} = A \cdot \vec{c'} = A \cdot (B \cdot \vec{c}).$$

Если переход от вектора $\vec{c}$ к вектору $\vec{c''}$ осуществляется с помощью одного тензора Π со скалярными элементами p_{kl}:

$$\vec{c''} = \Pi \cdot \vec{c},$$

то тензор Π называется скалярным произведением тензоров A и B:

$$\Pi = A \cdot B.$$

Покомпонентные формулы для скалярного произведения тензоров

Определитель тензора

Определителем тензора Π называется определитель матрицы его компонент:

$$D(\Pi) = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}.$$

Определитель тензора

Определителем тензора Π называется определитель матрицы его компонент:

$$D(\Pi) = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}.$$

Определитель произведения тензоров

Т.к. тензоры перемножаются как матрицы, то

$$D(\Pi) = D(A)D(B).$$

Скалярное произведение диад

Пусть $A = \vec{p}\vec{q}$ и $B = \vec{r}\vec{s}$, тогда

$$\Pi = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}\vec{s}) = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

Скалярное произведение диад

Пусть $A = \vec{p}\vec{q}$ и $B = \vec{r}\vec{s}$, тогда

$$\Pi = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}\vec{s}) = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

Доказательство.
Для произвольного вектора $\vec{x}$ рассмотрим

$$\Pi \cdot \vec{x} =$$

Скалярное произведение диад

Пусть $A = \vec{p}\vec{q}$ и $B = \vec{r}\vec{s}$, тогда

$$\Pi = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}\vec{s}) = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

Доказательство.
Для произвольного вектора $\vec{x}$ рассмотрим

$$\Pi \cdot \vec{x} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot ((\vec{r}\vec{s}) \cdot \vec{x}) = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}(\vec{s} \cdot \vec{x})) =$$

Скалярное произведение диад

Пусть $A = \vec{p}\vec{q}$ и $B = \vec{r}\vec{s}$, тогда

$$\Pi = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}\vec{s}) = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

Доказательство.
Для произвольного вектора $\vec{x}$ рассмотрим

$$\Pi \cdot \vec{x} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot ((\vec{r}\vec{s}) \cdot \vec{x}) = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}(\vec{s} \cdot \vec{x})) = \vec{p}(\vec{q} \cdot \vec{r})(\vec{s} \cdot \vec{x}) =$$

Скалярное произведение диад

Пусть $A = \vec{p}\vec{q}$ и $B = \vec{r}\vec{s}$, тогда

$$\Pi = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}\vec{s}) = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

Доказательство.
Для произвольного вектора $\vec{x}$ рассмотрим

$$\Pi \cdot \vec{x} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot ((\vec{r}\vec{s}) \cdot \vec{x}) = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}(\vec{s} \cdot \vec{x})) = \vec{p}(\vec{q} \cdot \vec{r})(\vec{s} \cdot \vec{x}) =$$

$$= ((\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}) \cdot \vec{x}.$$

Скалярное произведение диад

Пусть $A = \vec{p}\vec{q}$ и $B = \vec{r}\vec{s}$, тогда

$$\Pi = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}\vec{s}) = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

Доказательство.
Для произвольного вектора $\vec{x}$ рассмотрим

$$\Pi \cdot \vec{x} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot ((\vec{r}\vec{s}) \cdot \vec{x}) = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}(\vec{s} \cdot \vec{x})) = \vec{p}(\vec{q} \cdot \vec{r})(\vec{s} \cdot \vec{x}) =$$

$$= ((\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}) \cdot \vec{x}.$$

Таким образом,

$$\Pi = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

□

Литература

Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд. 9-е. М.: Наука, 1965.