Трехмерные осесимметричные потенциальные течения идеальной жидкости

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрофизики и газовой динамики

24 июня 2022 г.

Аннотация

Трехмерные потенциалы при течении идеальной жидкости. Потенциалы простейших течений. Обтекание сферы, парадокс Даламбера. Функция тока в осесимметричном случае. Связь между функцией тока и потенциалом. Обтекание тел вращения.

Определение

Течение называется осесимметричным, если существует такая прямая l, что во всех плоскостях, проходящих через l, картина течения одинакова и траектория жидкой частицы лежит в полуплоскостях, проходящих через l.

Определение

Течение называется потенциальным, если в некоторой области пространства можно определить потенциал $\varphi(t,x,y,z)$ такой, что

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi.$$

Основные уравнения

Для трехмерных потенциальных течений идеальной жидкости, определенных в некоторой области пространства, справедливы следующие уравнения.

Уравнение неразрывности

$$\operatorname{div}\vec{v} = \Delta\varphi = 0, \quad \vec{v} = \nabla\varphi.$$

Интеграл Коши

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\nabla\varphi^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t)^1$$

Интеграл Коши позволяет найти распределение давления по заданному потенциалу, известному из уравнения неразрывности ($\rho = const$).

[1] Считаем, что поле внешних сил отстутствует.

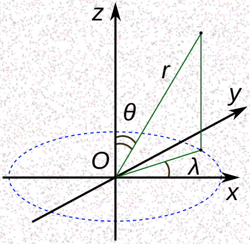
Уравнение неразрывности в различных системах координат

Сферическая система координат r, θ, λ

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)\right\} = 0,$$

где

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}, \quad v_\lambda = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}.$$



В случае осесимметричного течения можно пренебречь зависимостью φ от λ.

Уравнение неразрывности в различных системах координат

Цилиндрическая система координат r, θ, z

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{\partial}{\partial\theta}v_\theta+\frac{\partial}{\partial z}(rv_z)\right\}=0,$$

где

$$v_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r},\quad v_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta},\quad v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

В случае осесимметричного течения вдоль оси Oz можно пренебречь зависимостью φ от θ.

Источник в пространстве

Сферически симметричное течение

$$\varphi = \varphi(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{d\varphi}{dr}\right) = 0$$

Источник в пространстве

Сферически симметричное течение

$$\varphi = \varphi(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{d\varphi}{dr}\right) = 0$$

Потенциал источника, расположенного в точке с координатами (a,b,c)

$$\varphi(x,y,z) = -\frac{q}{4\pi\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

Источник в пространстве

Сферически симметричное течение

$$\varphi = \varphi(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{d\varphi}{dr}\right) = 0$$

Потенциал источника, расположенного в точке с координатами (a,b,c)

$$\varphi(x,y,z) = -\frac{q}{4\pi\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

Расход жидкости через любую поверхность, охватывающую центр источника S

$$q = \int\limits_S v_n dS = \int\limits_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$$

Диполь в пространстве

Потенциал

Рассмотрим источник и сток одной и той же обильности q, которые находятся на оси Oz на расстоянии l друг от друга. Тогда их суммарный потенциал будет иметь вид

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + (z - l/2)^2}} + \frac{q}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + (z + l/2)^2}}.$$

Потенциал

Рассмотрим источник и сток одной и той же обильности q, которые находятся на оси Oz на расстоянии l друг от друга. Тогда их суммарный потенциал будет иметь вид

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + (z - l/2)^2}} + \frac{q}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + (z + l/2)^2}}.$$

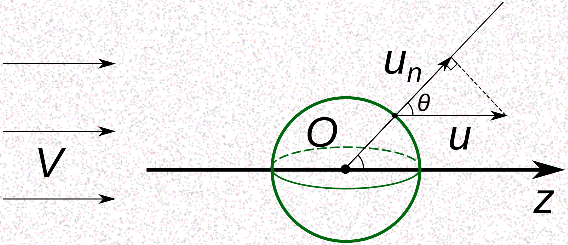
При переходе к пределу при $l \to 0$, а $q \to \infty$, причем $ql = M$, получится предельный потенциал

$$\varphi = -\frac{Mz}{4\pi r^3}, \quad \text{или} \quad \varphi = -\frac{M}{4\pi}\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r}\right),$$

где M – момент диполя; l – направление оси диполя.

Постановка

Требуется найти распределение скорости и давления при потенциальном обтекании сферы радиуса R, движущейся поступательно вдоль оси Oz со скоростью u в потоке идеальной жидкости, имеющей на бесконечности скорость V, направленную вдоль оси Oz, и давление p_∞.



Математическая постановка

Основные уравнения

В сферической системе координат пренебрегаем зависимостью от λ. Тогда для функции $\varphi = \varphi(r,\theta)$ запишем уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) = 0.$$

Граничные условия на сфере

$$v_n = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{r=R} = u\cos\theta$$

Граничные условия на бесконечности

$$v_r = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right|_{r\to\infty} = V\cos\theta, \quad v_\theta = \frac{1}{r}\left.\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right|_{r\to\infty} = -V\sin\theta.$$

Решение задачи обтекания сферы

Упрощение

Пусть $\varphi(r,\theta) = Q(r)\cos\theta$, тогда уравнение неразрывности будет иметь вид:

$$r^2\frac{d^2Q}{dr^2} + 2r\frac{dQ}{dr} - 2Q = 0.$$

Аналитическое решение

$$\varphi(r,\theta) = \left(Vr + \frac{V-u}{2}\frac{R^3}{r^2}\right)\cos\theta$$

можно переписать в виде:

$$\varphi = Vz - \frac{R^3}{2}(V-u)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Это сумма потенциала поступательного движения потока со скоростью V и потенциала диполя с моментом $M = 2\pi R^3(u-V)$.

Обтекание покоящейся сферы

Если $u = 0$, тогда

$$\varphi = V\left(r + \frac{1}{2}\frac{R^3}{r^2}\right)\cos\theta$$

и

$$v_r = V\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\cos\theta, \quad v_\theta = -V\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right)\sin\theta.$$

Максимальное значение скорости на поверхности сферы достигается в точках $\theta = \pm\pi/2$ и равно $3/2V$.

Парадокс Даламбера для покоящейся сферы

Интеграл Бернулли

Так как течение потенциально и стационарно, то

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{V^2}{2} + \frac{p_\infty}{\rho}.$$

Выражение для давления

$$\frac{p - p_\infty}{\rho} = \frac{V^2}{2}\left(1 - \frac{9}{4}\sin^2\theta\right)$$

Суммарная сила, вызванная давлением потенциального течения жидкости на покоящуюся сферу, равна 0 вследствие симметрии распределения сил давления. Это называется парадоксом Даламбера.

Функция тока для осесимметричных течений

Уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат с осевой симметрией в переменных (r,z)

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial}{\partial z}(rv_z)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) = -\frac{\partial}{\partial z}(rv_z)$$

Существование полного дифференциала

$$d\psi = rv_r dz - rv_z dr = \frac{\partial\psi}{\partial z}dz + \frac{\partial\psi}{\partial r}dr$$

является полным дифференциалом (см. теорию про интегрирующий множитель).

Определение

Функцию $\psi(r,z)$ такую, что $v_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial z}$, $v_z = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial r}$, называют функцией тока для осесимметричных течений.

Свойства функции тока

Постоянство на линиях тока

Уравнение линий тока в случае осесимметричного течения:

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{dz}{v_z},$$

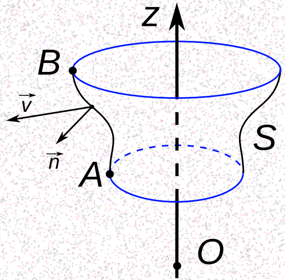
поэтому на линиях тока:

$$v_r dz - v_z dr = 0,$$

следовательно

$$d\psi = r(v_r dz - v_z dr) = 0$$

и $\psi = const$.



Поток жидкости через поверхность S

$$\int\limits_S \vec{v}\cdot\vec{n}ds = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_B^A (v_z n_z + v_r n_r)\, r d\theta dl =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{l_0} \left(\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\left(-\frac{\partial r}{\partial l}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial l}\right) rdl =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{s_0} \frac{d}{dl}\psi(r(l),z(l))dl = 2\pi(\psi(A)-\psi(B)),$$

$$r = r(l), \quad z = z(l),$$

$$(r,z)|_{l=0} = B, \quad (r,z)|_{l=l_0} = A.$$

Связь функции тока и потенциала для осесимметричных течений

Соотношения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

Полученные соотношения отличаются от условий Коши – Римана.

Связь функции тока и потенциала для осесимметричных течений

Соотношения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

Полученные соотношения отличаются от условий Коши – Римана.

Уравнение для функции тока

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0$$

Полученное соотношение не является уравнением Лапласа, записанным в цилиндрической системе координат. В случае осесимметричных течений не работают методы ТФКП. В этом случае может быть применен метод источников и стоков.

Связь между функций тока и потенциалом

Предпосылки

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = -r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} dr - \frac{\partial \varphi}{\partial r} dz \right),$$

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} dr - \frac{\partial \psi}{\partial r} dz \right).$$

Искомые соотношения

$$\psi(r,z) = \psi(r_0,z_0) + \int\limits_{r_0,z_0}^{r,z} r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} dz - \frac{\partial \varphi}{\partial z} dr \right),$$

$$\varphi(r,z) = \varphi(r_0,z_0) + \int\limits_{r_0,z_0}^{r,z} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} dr - \frac{\partial \psi}{\partial r} dz \right).$$

Функция тока для простейших осесимметричных течений

Поступательное движение

$$\varphi = Vz \quad \Rightarrow \quad \psi = -\frac{V}{2}r^2 + C$$

Источник

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \quad \Rightarrow \quad \psi = \frac{q}{4\pi}\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} + C$$

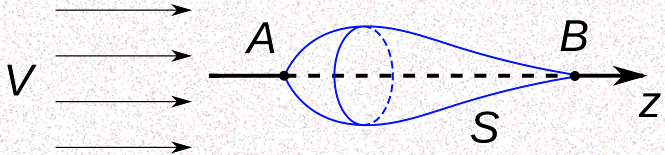
Диполь

$$\varphi = -\frac{M}{4\pi}\frac{z}{(\sqrt{r^2+z^2})^3} \quad \Rightarrow \quad \psi = -\frac{M}{4\pi}\frac{r^2}{(\sqrt{r^2+z^2})^3} + C$$

Продольное обтекание тела вращения

Постановка задачи

Требуется найти потенциал или функцию тока течения, описывающие осесимметричное течение идеальной жидкости на бесконечности, направленной вдоль оси Oz около тела, образованного вращением заданной дуги AB вокруг оси Oz.



Продольное обтекание тела вращения

Метод источников и стоков

Рассмотрим на оси Oz распределенные источники и стоки с плотностью распределения $\mu(\zeta)$, где ζ – положение на оси Oz между точками A и B.

Функция тока от источников, распределенных вдоль оси Oz

$$\psi_1(r,z) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_A^B \mu(\zeta)\left(1 - \frac{z-\zeta}{\sqrt{r^2+(z-\zeta)^2}}\right)d\zeta$$

Функция тока от поступательного потока

$$\psi_2 = -r^2\frac{V}{2}$$

Продольное обтекание тела вращения

Искомая функция тока для задачи

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = -r^2 \frac{V}{2} - \frac{1}{4\pi} \int_A^B \mu(\zeta) \left(1 - \frac{z - \zeta}{\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}} \right) d\zeta$$

Продольное обтекание тела вращения

Искомая функция тока для задачи

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = -r^2 \frac{V}{2} - \frac{1}{4\pi} \int_A^B \mu(\zeta) \left(1 - \frac{z - \zeta}{\sqrt{r^2 + (z - \zeta)^2}} \right) d\zeta$$

Условие «ограниченности» тела

$$\int_A^B \mu(\zeta) d\zeta = 0$$

Продольное обтекание тела вращения

Искомая функция тока для задачи

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = -r^2\frac{V}{2} - \frac{1}{4\pi}\int_A^B \mu(\zeta)\left(1 - \frac{z-\zeta}{\sqrt{r^2+(z-\zeta)^2}}\right)d\zeta$$

Условие «ограниченности» тела

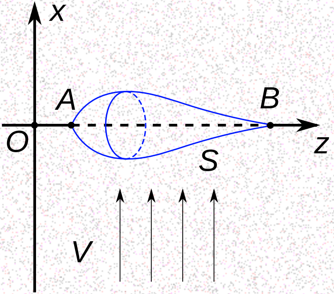
$$\int_A^B \mu(\zeta)d\zeta = 0$$

Поверхность тела – поверхность тока

$$\psi|_S = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4\pi}\int_A^B \frac{(z-\zeta)\mu(\zeta)d\zeta}{\sqrt{\tilde{r}(z)^2+(z-\zeta)^2}} = \frac{1}{2}V\tilde{r}(z),$$

где $r = \tilde{r}(z)$ – уравнение дуги AB; z – координата между точками A и B.

Поперечное обтекание тела вращения



Постановка задачи

Требуется найти потенциал или функцию тока течения, описывающие течение идеальной жидкости на бесконечности, направленной вдоль оси Ox около тела, образованного вращением заданной дуги AB вокруг оси Oz.

Метод источников и стоков

Рассмотрим диполи, распределенные на оси Oz, с плотностью распределения $\mu(\zeta)$, где ζ – положение на оси Oz между точками A и B.

Поперечное обтекание тела вращения

Метод источников и стоков

Рассмотрим диполи, распределенные на оси Oz, с плотностью распределения $\mu(\zeta)$, где ζ – положение на оси Oz между точками A и B.

Потенциал диполей

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_A^B \frac{-\mu(\zeta) x d\zeta}{\left(\sqrt{x^2+y^2+(z-\zeta)^2}\right)^3} = \frac{r\cos\theta}{4\pi}\int\limits_A^B \frac{-\mu(\zeta) d\zeta}{\left(\sqrt{r^2+(z-\zeta)^2}\right)^3}$$

Потенциал поступательного движения

$$\varphi_2 = Vx = Vr\cos\theta$$

Поперечное обтекание тела вращения

Искомый потенциал течения

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = Vr\cos\theta - \frac{r\cos\theta}{4\pi}\int\limits_A^B \frac{\mu(\zeta)d\zeta}{\left(\sqrt{r^2+(z-\zeta)^2}\right)^3}$$

Поперечное обтекание тела вращения

Искомый потенциал течения

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = Vr\cos\theta - \frac{r\cos\theta}{4\pi}\int\limits_A^B \frac{\mu(\zeta)d\zeta}{\left(\sqrt{r^2 + (z-\zeta)^2}\right)^3}$$

Уравнения линий тока в цилиндрической системе координат

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{dz}{v_z} = \frac{rd\theta}{v_\theta},$$

где

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = V\cos\theta - \frac{\cos\theta}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left\{ r\int_A^B \frac{\mu(\zeta)d\zeta}{\left(\sqrt{r^2 + (z-\zeta)^2}\right)^3} \right\},$$

Поперечное обтекание тела вращения

Искомый потенциал течения

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = Vr\cos\theta - \frac{r\cos\theta}{4\pi}\int\limits_A^B \frac{\mu(\zeta)d\zeta}{\left(\sqrt{r^2+(z-\zeta)^2}\right)^3}$$

Уравнения линий тока в цилиндрической системе координат

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{dz}{v_z} = \frac{rd\theta}{v_\theta},$$

где

$$v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{r\cos\theta}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\int\limits_A^B \frac{\mu(\zeta)d\zeta}{\left(\sqrt{r^2+(z-\zeta)^2}\right)^3}\right\},$$

Поперечное обтекание тела вращения

Искомый потенциал течения

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = Vr\cos\theta - \frac{r\cos\theta}{4\pi}\int\limits_A^B \frac{\mu(\zeta)d\zeta}{\left(\sqrt{r^2 + (z-\zeta)^2}\right)^3}$$

Уравнения линий тока в цилиндрической системе координат

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{dz}{v_z} = \frac{rd\theta}{v_\theta},$$

где

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -V\sin\theta + -\frac{\sin\theta}{4\pi}\int\limits_A^B \frac{\mu(\zeta)d\zeta}{\left(\sqrt{r^2 + (z-\zeta)^2}\right)^3}.$$

Поперечное обтекание тела вращения

Линии тока на теле вращения

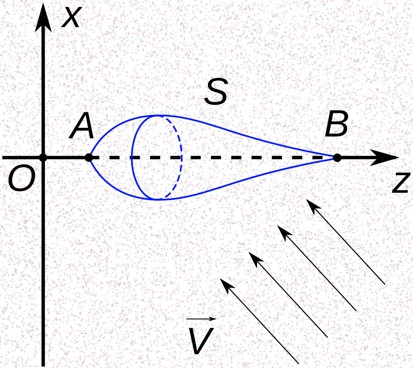
Линии тока должны проходить вдоль поверхности тела вращения, поэтому соотношение

$$\frac{dr}{dz} = \frac{v_r}{v_z} = f(r,z) = \frac{V - \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial r}\left[r\displaystyle\int_A^B \frac{\mu(\zeta)d\zeta}{\left(\sqrt{r^2 + (z-\zeta)^2}\right)^3}\right]}{-\dfrac{r}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial z}\left[\displaystyle\int_A^B \frac{\mu(\zeta)d\zeta}{\left(\sqrt{r^2 + (z-\zeta)^2}\right)^3}\right]},$$

где $r = \Phi(z)$ и $\dfrac{dr}{dz} = \Phi'(z)$ – заданные функции, описывающие поверхность тела вращения, позволяет найти распределение диполей $\mu(\zeta)$, где ζ – координата между точками A и B.

Постановка задачи

Требуется найти потенциал течения при обтекании тела вращения с поверхностью S поступательным потоком идеальной жидкости со скоростью $\vec{V}$ на бесконечности.



Общий случай обтекания тела вращения

Математическая постановка задачи

Всегда можно выбрать систему координат так, чтобы вектор $\vec{V}$ лежал в плоскости Oxz, тогда для потенциала течения требуется решить

$$\Delta\varphi = 0$$

при условии на поверхности тела

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = 0$$

и на бесконечности

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = V_x, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = V_z.$$

Общий случай обтекания тела вращения

Задача обтекания тела продольным потоком со скоростью V_z

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_S = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = V_z.$$

Общий случай обтекания тела вращения

Задача обтекания тела продольным потоком со скоростью V_z

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_S = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = V_z.$$

Задача обтекания тела поперечным потоком со скоростью V_x

$$\Delta\varphi_2 = 0, \quad \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_S = 0, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = V_x, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = 0.$$

Общий случай обтекания тела вращения

Задача обтекания тела продольным потоком со скоростью V_z

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad \left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_S = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = V_z.$$

Задача обтекания тела поперечным потоком со скоростью V_x

$$\Delta\varphi_2 = 0, \quad \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_S = 0, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = V_x, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = 0.$$

Искомый потенциал

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

Литература

1. *Валландер С. В.* Лекции по аэрогидромеханике. Учеб. пособие. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1978.
2. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.:Гос. издат. физ.-мат. лит., 1963.