Течения газа в сужающейся трубке тока. Элементарная теория сопла Лаваля.

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики

2 сентября 2020 г.

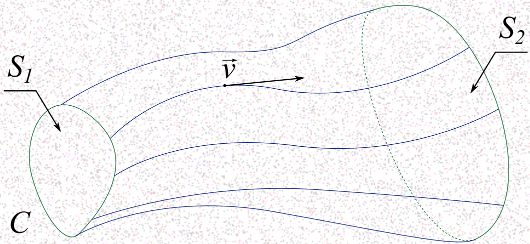
Аннотация

Трубка тока. Постоянство расхода газа в трубке тока для стационарных течений. Сжимаемость трубок тока. Простое сопло, сопло Лаваля. Истечение газа из простого сопла. Элементарная теория сопла Лаваля.

Трубка тока

Определение

Трубкой тока называется поверхность, образованная линиями тока, построенными из некоторой замкнутой кривой.



Постоянство расхода для трубки тока

Закон сохранения массы в трубке тока

Закон сохранения массы имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0.$$

Для стационарного течения: $\mathrm{div}(\rho\vec{v}) = 0$.

Теорема

Для стационарного течения расход газа через любое поперечное сечение трубки тока имеет одну и ту же величину

$$\int_{S_1} \rho v_n dS = \int_{S_2} \rho v_n dS,$$

где S_1, S_2 – различные сечения трубки тока.

Постоянство расхода для трубки тока

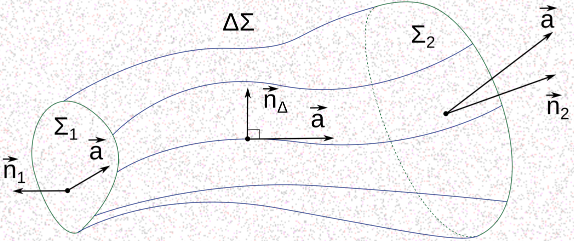
Доказательство.

Пусть далее

$$\vec{a} = \rho\vec{v},$$

тогда

$$0 = \int\limits_V \operatorname{div} \vec{a} dV =$$

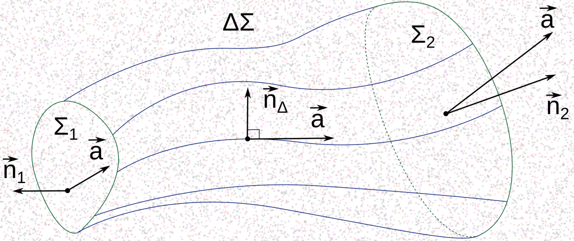


Доказательство.

Пусть далее

$$\vec{a} = \rho\vec{v},$$

тогда



$$0 = \int\limits_V \operatorname{div}\vec{a}dV = \int\limits_\Sigma \vec{a}\cdot\vec{n}dS =$$

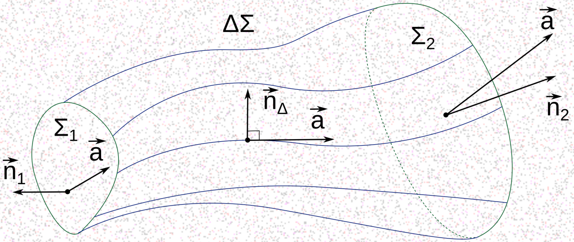
Постоянство расхода для трубки тока

Доказательство.

Пусть далее

$$\vec{a} = \rho\vec{v},$$

тогда



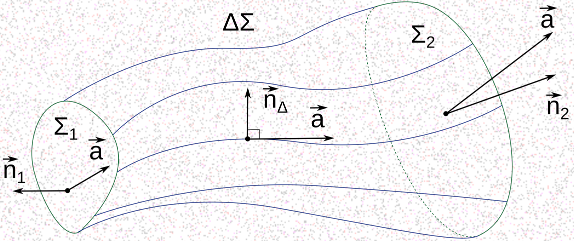
$$0 = \int\limits_V \operatorname{div}\vec{a}dV = \int\limits_\Sigma \vec{a}\cdot\vec{n}dS = \int\limits_{\Sigma_1} \vec{a}\cdot\vec{n}_1 dS + \int\limits_{\Delta\Sigma} \vec{a}\cdot\vec{n}_\Delta dS + \int\limits_{\Sigma_2} \vec{a}\cdot\vec{n}_2 dS.$$

Доказательство.

Пусть далее

$$\vec{a} = \rho\vec{v},$$

тогда



$$0 = \int\limits_V \operatorname{div}\vec{a}dV = \int\limits_\Sigma \vec{a}\cdot\vec{n}dS = \int\limits_{\Sigma_1} \vec{a}\cdot\vec{n}_1 dS + \int\limits_{\Delta\Sigma} \vec{a}\cdot\vec{n}_\Delta dS + \int\limits_{\Sigma_2} \vec{a}\cdot\vec{n}_2 dS.$$

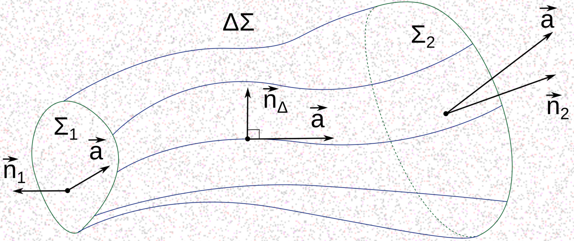
Отсюда $\int\limits_{\Sigma_1} \vec{a}\cdot\vec{n}_1 dS = -\int\limits_{\Sigma_2} \vec{a}\cdot\vec{n}_2 dS,$

Доказательство.

Пусть далее

$$\vec{a} = \rho\vec{v},$$

тогда



$$0 = \int_V \operatorname{div}\vec{a}dV = \int_\Sigma \vec{a}\cdot\vec{n}dS = \int_{\Sigma_1} \vec{a}\cdot\vec{n}_1 dS + \int_{\Delta\Sigma} \vec{a}\cdot\vec{n}_\Delta dS + \int_{\Sigma_2} \vec{a}\cdot\vec{n}_2 dS.$$

Отсюда $\int\limits_{\Sigma_1} \vec{a}\cdot\vec{n}_1 dS = -\int\limits_{\Sigma_2} \vec{a}\cdot\vec{n}_2 dS$, т.к. $\int\limits_{\Delta\Sigma} \vec{a}\cdot\vec{n}_\Delta dS = 0$ в силу ортогональности векторов $\vec{a}$ и $\vec{n}_\Delta$,

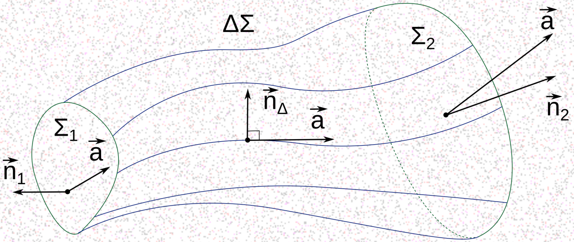
Постоянство расхода для трубки тока

Доказательство.

Пусть далее

$$\vec{a} = \rho \vec{v},$$

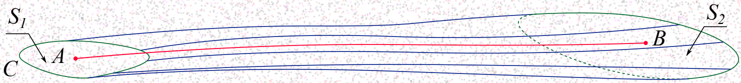
тогда



$$0 = \int\limits_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \int\limits_\Sigma \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int\limits_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS + \int\limits_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_\Delta dS + \int\limits_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS.$$

Отсюда $\int\limits_{\Sigma_1} \vec{a} \cdot \vec{n}_1 dS = -\int\limits_{\Sigma_2} \vec{a} \cdot \vec{n}_2 dS$, т.к. $\int\limits_{\Delta\Sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}_\Delta dS = 0$ в силу ортогональности векторов $\vec{a}$ и $\vec{n}_\Delta$, т.е. потоки вектора $\vec{a}$ через Σ_1 и Σ_2 совпадают. $\square$

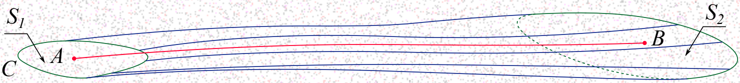
Сжимаемость трубок тока



Основные предположения

Далее будем рассматривать очень узкие трубки тока, для которых можно считать, что параметры ρ, p, c и $\vec{v}$ мало меняются по её сечению, построенному перпендикулярно выделенной линии тока (на рисунке AB), а рассматриваемое течение изоэнтропическое.

Сжимаемость трубок тока



Основные предположения

Далее будем рассматривать очень узкие трубки тока, для которых можно считать, что параметры ρ, p, c и $\vec{v}$ мало меняются по её сечению, построенному перпендикулярно выделенной линии тока (на рисунке AB), а рассматриваемое течение изоэнтропическое.

Соотношения на выделенной линии тока

Параметризовав линию тока AB, можно записать закон сохранения массы и интеграл Бернулли для параметров течения

$$\rho v S = C_1, \qquad \frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} = C_2.$$

Сжимаемость трубок тока

Соотношение для параметров течения в дифференциалах

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dS}{S} = 0, \quad v\,dv + \frac{2c}{\gamma - 1}\,dc = 0.$$

Сжимаемость трубок тока

Соотношение для параметров течения в дифференциалах

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dS}{S} = 0, \qquad v\,dv + \frac{2c}{\gamma - 1}\,dc = 0.$$

Дополнительные соотношения

Так как для изоэнтропических течений $dp = c^2\,d\rho$ и $c^2 = \dfrac{\gamma p}{\rho}$, тогда рассмотрим дифференциал от последнего

$$2c\,dc = \frac{\gamma}{\rho}\,dp - \frac{\gamma p}{\rho^2}\,d\rho = (\gamma - 1)c^2\frac{d\rho}{\rho}.$$

Подставляя дополнительные соотношения в интеграл Бернулли в дифференциалах, получим

$$v\,dv + c^2\frac{d\rho}{\rho} = 0.$$

Сжимаемость трубок тока

Связь между скоростью, сечением и числом Маха

Исключая из последнего выражения $d\rho/\rho$ с помощью закона сохранения массы в дифференциалах, получим уравнение Гюгонио

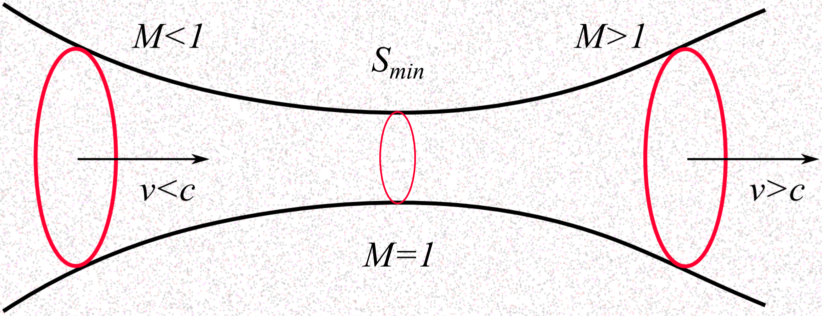
$$(M^2 - 1)\,\frac{dv}{v} = \frac{dS}{S} \quad (v > 0),$$

где $M = v/c$ – число Маха.

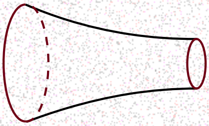
$M < 1$	$M = 1$	$M > 1$
$dv < 0 \iff dS > 0$		$dv < 0 \iff dS < 0$
$dv = 0 \iff dS = 0$	$dS = 0$	$dv = 0 \iff dS = 0$
$dv > 0 \iff dS < 0$		$dv > 0 \iff dS > 0$

Таким образом, $S(v) = \dfrac{C_1}{\rho^* v \left(1 - \dfrac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{1/(\gamma-1)}}$.

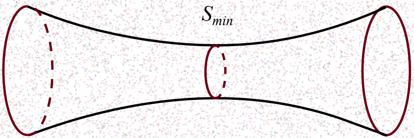
Сужающаяся и расширяющаяся трубка тока



Простое сопло и сопло Лаваля



Простое сопло



Сопло Лаваля

Насадок, предназначенный для адиабатического разгона потока от дозвуковых скоростей к сверхзвуковым, обладающий зоной сужения и расширения называется соплом Лаваля. Насадок имеющий только зону сжатия называется простым соплом.

Связь между параметрами газа в различных сечениях

$$\frac{S}{S_1} = \frac{\rho_1 v_1}{\rho v} = \frac{M_1}{M}\left(\frac{1+\dfrac{\gamma-1}{2}M^2}{1+\dfrac{\gamma-1}{2}M_1^2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}},$$

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{1+\dfrac{\gamma-1}{2}M^2}{1+\dfrac{\gamma-1}{2}M_1^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \frac{\rho}{\rho_1} = \left(\frac{1+\dfrac{\gamma-1}{2}M^2}{1+\dfrac{\gamma-1}{2}M_1^2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

$$\frac{T}{T_1} = \frac{1+\dfrac{\gamma-1}{2}M^2}{1+\dfrac{\gamma-1}{2}M_1^2}, \quad \frac{v}{v_1} = \frac{M}{M_1}\left(\frac{1+\dfrac{\gamma-1}{2}M^2}{1+\dfrac{\gamma-1}{2}M_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Эти формулы дают параметрическое решение задачи об квази-одномерном изоэнтропическом стационарном газовом потоке в трубке тока (сопле) переменного сечения.

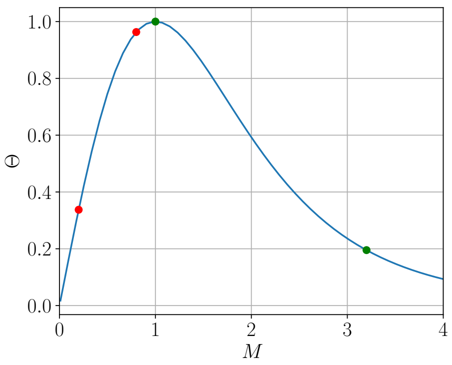
Связь между параметрами газа, в котором есть критическое сечение

Положим, что в сечении $S_1 = S_{min}$ реализуется $M_1 = 1$, тогда

$$\frac{S}{S_{min}} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{1}{M} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \Theta^{-1}(M),$$

$$\begin{aligned}
\frac{p}{p_{\text{кр}}} &= \left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \\
\frac{\rho}{\rho_{\text{кр}}} &= \left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{-\frac{1}{\gamma-1}}, \\
\frac{T}{T_{\text{кр}}} &= \left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{-1}, \\
\frac{v}{v_{\text{кр}}} &= M\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Зависимость числа Маха от площади сечения для воздуха

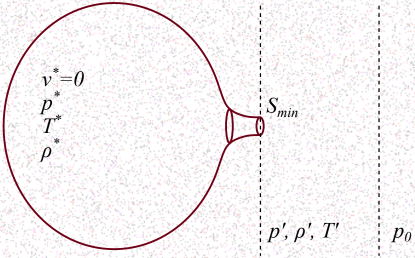


$$\frac{S_{min}}{S} = \Theta = \Theta(M)$$

Из рисунка следует, что для повышения числа M от $0,2$ до $0,8$ газ должен пройти через конфузор с сечением, уменьшающимся в три раза.

А чтобы увеличить M от значения 1 в критическом сечении до $3,2$, необходимо построить сверхзвуковой диффузор с площадью в пять раз превышающую S_{min}.

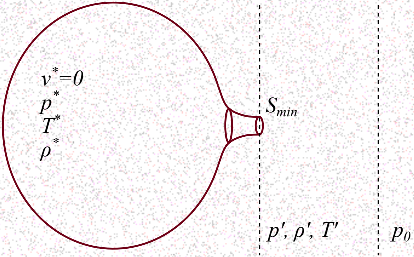
Истечение газа через простое сопло



Постановка и решение задачи

Рассмотрим истечение газа из ёмкости большого объёма через конфузор с критическим сечением S_{min} и параметрами торможения газа вдали от сопла в ёмкости p^*, ρ^*, T^*. Противодавление снаружи равно p_0. Штрихами будем обозначать параметры на срезе сопла.

Истечение газа через простое сопло



Постановка и решение задачи

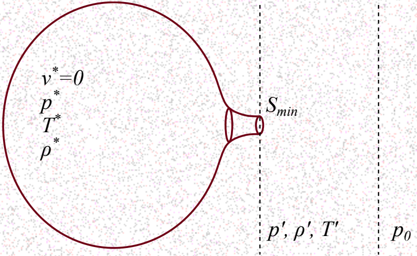
Пусть m – массовый расход газа через любое сечение сопла, тогда

$$m = \rho v S = \rho' v' S_{min}.$$

Пусть $m_{\text{кр}} = \rho_{\text{кр}} v_{\text{кр}} S_{min}$ – критическое значение массы, соответствующее числу Маха, равному 1, тогда

$$\frac{m}{m_{\text{кр}}} = \frac{\rho' v'}{\rho_{\text{кр}} v_{\text{кр}}} = \theta(M').$$

Истечение газа через простое сопло



Постановка и решение задачи

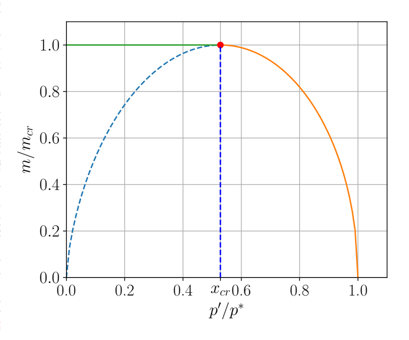
Используя формулу

$$p' = p^* \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M'^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}},$$

исключаем M' из выражения для $m/m_{\text{кр}}$ и получаем

$$\frac{m}{m_{\text{кр}}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\left(\frac{p'}{p^*}\right)^{\frac{2}{\gamma}}\left[1 - \left(\frac{p'}{p^*}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}.$$

Истечение газа через простое сопло



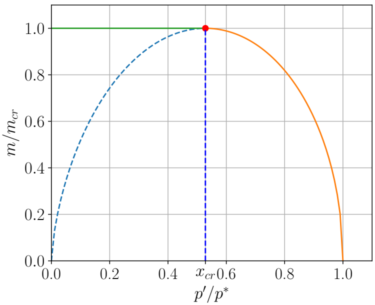
Описание

При уменьшении p_0 до тех пор, пока течение на срезе сопла не станет звуковым, будет реализовываться режим, описываемый на графике оранжевой ветвью, и давление на выходе из сопла можно принимать равным противодавлению

$$p' = p_0.$$

$$\frac{m}{m_{\text{кр}}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\left(\frac{p'}{p^*}\right)^{\frac{2}{\gamma}}\left[1-\left(\frac{p'}{p^*}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}.$$

Истечение газа через простое сопло



Описание

Как только на срезе сопла установится звуковое течение

$$M' = 1,$$

то произойдёт его запирание. В критическом сечении установятся критические параметры, которым соответствует максимальный возможный расход газа $m_{\text{кр}}$ (зелёная ветвь графика).

$$x_{\text{кр}} = \frac{p_{\text{кр}}}{p^*} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad m_{\text{кр}} = \left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \sqrt{\gamma p^* \rho^*} S_{min}.$$

Литература

- **Л.И. Седов.** *Механика сплошной среды*. Том 2. М.:Наука, 1970.
- **Лойцянский Л. Г.** *Механика жидкости газа и плазмы*. Учеб. для вузов. — 7-е изд., испр. – М.:Дрофа, 2003