

Введение в механику сплошных сред

Верецагин Антон Сергеевич

канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрофизики и газовой динамики

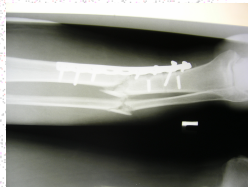
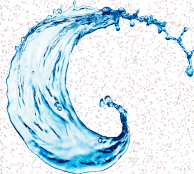


10 января 2021 г.

Предмет механики сплошных сред. Основные гипотезы механики сплошных сред. Понятие материальной точки. Лагранжево и эйлерово описание сплошной среды. Траектория, скорость, ускорение. Стационарное, нестационарное течение. Линии тока поля скорости.

Предмет механики сплошных сред

Механика сплошных сред изучает движение газообразных, жидких и твердых деформируемых тел.



Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том 1. М.:Наука, 1970.

Разделы механики сплошных сред

- 1) механика жидкости (гидродинамика, гидростатика);
- 2) аэрогазодинамика;
- 3) механика деформируемого твердого тела (теория упругости, пластичности, разрушения);
- 4) механика плазмы;
- 5) биомеханика;
- 6) механика многофазных сред.

Дифференциальное исчисление

Уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\frac{\nabla p}{\rho}.\end{aligned}$$

Интегральное исчисление

Закон сохранения
массы сплошной
среды:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega_t} \rho d\omega = 0.$$

Тензорный анализ

Связь между
тензором
напряжений и
тензором скоростей
деформаций для
вязкой
несжимаемой
жидкости:

$$\sigma = -pI + 2\mu e.$$

Евклидово пространство

- 1) существует декартова система координат ($Oxyz$);
- 2) расстояние между точками A и B задается с помощью евклидовой метрики:

$$r_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

Абсолютное время

Время течет одинаково во всех системах координат.

Нигматулин Р.И. Механика сплошной среды. Кинематика. Динамика. Термодинамика. Статистическая динамика. М.:ГЭОТАР-Медиа, 2014.

Абсолютная масса

- 1) у всех тел существует масса;
- 2) масса неотрицательна:

$$m \geq 0;$$

- 3) масса аддитивна:

$$m_{A+B} = m_A + m_B;$$

- 4) масса инварианта во всех системах координат, т.е. является скаляром.

Низматулин Р.И. Механика сплошной среды. Кинематика. Динамика. Термодинамика. Статистическая динамика. М.:ГЭОТАР-Медиа, 2014.

Основные гипотезы: принцип равноправия инерциальных систем координат

Постулат Галилея

Формулировки всех физических законов не зависят от выбора инерциальной системы координат.

Основные гипотезы: принцип сплошности

Определение

Сплошная среда – модель вещества, в которой распределение массы, сил, импульса, энергии и параметров, характеризующих состояние и движение этого вещества, определяется кусочно-непрерывными и дифференцируемыми функциями, заданными во всех точках рассматриваемого объема и во все моменты исследуемого времени.

Критерий сплошности

Безразмерное **число Кнудсена**:

$$\text{Kn} = \frac{\lambda}{d} \ll 1,$$

где λ – длина свободного пробега (в случае газа), расстояние между атомами, молекулами (жидкость, твердое вещество);

d – характерный размер исследуемого явления.

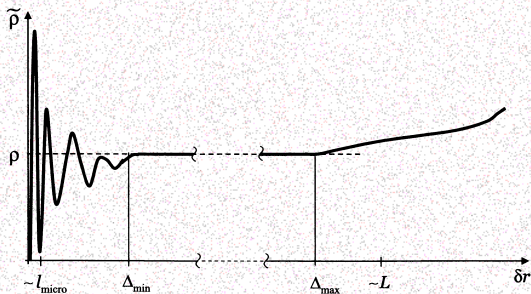
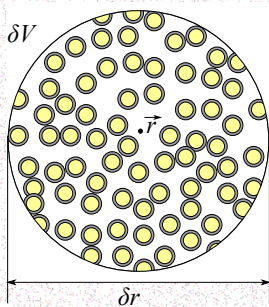
Приближение, или гипотеза индивидуализации

Положение каждой точки, составляющей среду (континуум), можно находить в любой момент времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t),$$

$$\vec{r}_{t=0} = \vec{r}_0.$$

Основные гипотезы: средние величины



Определение средней (макроскопической) плотности вещества, распределенного дискретно в пространстве

Определение плотности и условие устойчивости

$$\tilde{\rho} = \frac{\delta m}{\delta V}, \quad l_{micro} \ll \delta r \ll L.$$

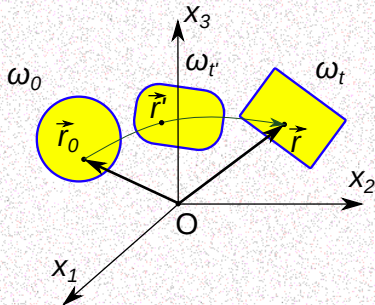
Определение

Материальной точкой, или **жидкой частицей**, называется частица среды (вещества) как центра макроскопического объема δV с характерным размером порядка δr , обладающая массой, импульсом, внутренней энергией и др., определяемыми в соответствии с условиями осреднения.

Условия на поля, определяющие параметры тел

- 1) *устойчивость* (независимость от δr);
- 2) *регулярность* (непрерывность, дифференцируемость за исключением отдельных поверхностей, линий и точек);
- 3) *представительность* (параметры тела являются интегралом от соответствующих параметров его составляющих жидких частиц).

Лагранжево описание сплошной среды



Закон движения, или
траектории, материальных точек
тела:

$$x_1 = x_1(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

$$x_2 = x_2(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

$$x_3 = x_3(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

или

$$\vec{r} = \vec{r}(t, \vec{r}_0).$$

Перемещение и деформация
сплошной среды при временах $0, t'$
и t , где $\vec{r}_0 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$,
 $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$

Определение

Координаты материальных точек тела (ξ_1, ξ_2, ξ_3) называют **лагран-
жевыми координатами**, а такой подход — **лагранжевым**.

Принцип сплошности

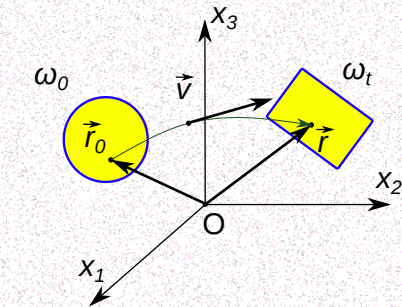
Критерий

Принцип сплошности реализуется, если

$$\Delta^{(x,\xi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Принцип сплошности **нарушается** на ударных волнах, в зонах разрушения, разбрызгивания, при коагуляции капель, столкновении тел, на поверхностных, линейных и точечных источниках и стоках.

Скорость материальных точек



Скорость точки вдоль траектории
движения

Определение

$$\vec{v}(t, \vec{r}_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t, \vec{r}_0) - \vec{r}(t, \vec{r}_0)}{\Delta t} = \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|_{\vec{r}=\vec{r}_0}$$

$$v_1 = v_1(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

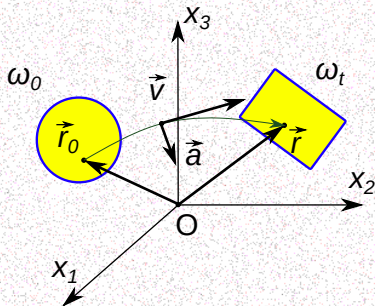
$$v_2 = v_2(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

$$v_3 = v_3(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

или

$$\vec{v} = \vec{v}(t, \vec{r}_0).$$

Ускорение материальных точек



Ускорение материальной точки

Определение

$$\vec{a}(t, \vec{r}_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t, \vec{r}_0) - \vec{v}(t, \vec{r}_0)}{\Delta t} = \left. \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right|_{\vec{r}=\vec{r}_0} = \left. \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} \right|_{\vec{r}=\vec{r}_0}$$

$$a_1 = a_1(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

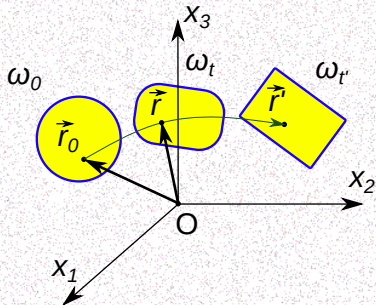
$$a_2 = a_2(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

$$a_3 = a_3(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

или

$$\vec{a} = \vec{a}(t, \vec{r}_0).$$

Эйлерово описание сплошной среды



Наблюдатель находится в точке (x_1, x_2, x_3) и следит за изменением параметров среды со временем.

Перемещение и деформация сплошной среды при временах $0, t'$ и t , где $\vec{r}_0 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$,
 $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$

Определение

Координаты материальных точек тела (x_1, x_2, x_3) называют **эйлеровыми координатами**, а такой подход — **эйлеровым**.

Переход от лагранжева представления к эйлерову

Пусть задан параметр среды f в лагранжевых координатах:

$$f = f(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Если задан закон движения среды $\vec{r} = \vec{r}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и $\Delta^{(x, \xi)} \neq 0$, тогда существует обратное преобразование:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi_1(t, x_1, x_2, x_3), \\ \xi_2 &= \xi_2(t, x_1, x_2, x_3), \\ \xi_3 &= \xi_3(t, x_1, x_2, x_3)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}f(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3) &= f(t, \xi_1(t, x_1, x_2, x_3), \xi_2(t, x_1, x_2, x_3), \xi_3(t, x_1, x_2, x_3)) = \\ &= \tilde{f}(t, x_1, x_2, x_3).\end{aligned}$$

Переход от эйлера представления к лагранжеву

Пусть задан параметр среды f в эйлеровых координатах:

$$f = f(t, x_1, x_2, x_3).$$

Если задан закон движения среды $\vec{r} = \vec{r}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, тогда

$$\begin{aligned} f(t, x_1, x_2, x_3) &= f(t, x_1(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), x_2(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), x_3(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)) = \\ &= \bar{f}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3). \end{aligned}$$

Определение

Если при эйлеровом описании движения сплошной среды и ее параметры не зависят от времени, а зависят только от пространственных координат (x_1, x_2, x_3) , то такие движения называются **установившимися**, или **стационарными**.

Определение

Линиями тока, или **векторными линиями**, поля скорости \vec{v} называются линии, касательные в каждой точке которых совпадают по направлению со скоростью \vec{v} в этой точке в данный момент времени.

Уравнения линий тока:

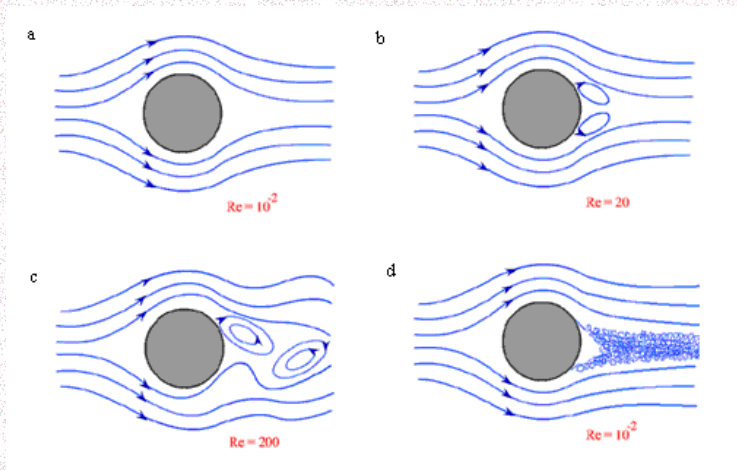
$$d\vec{r} = \vec{v}(x_1, x_2, x_3) d\lambda, \quad (t = \text{const}),$$

где λ – переменная, идентифицирующая точки вдоль линии тока.
Это уравнение сводится к

$$d\lambda = \frac{dx_1}{v_1(t, x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_2}{v_2(t, x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_3}{v_3(t, x_1, x_2, x_3)},$$

где t – параметр и каждая линия тока относится к фиксированному моменту времени.

Пример обтекания цилиндра



Картины обтекания цилиндра набегающим потоком при различных числах Рейнольдса

<http://www.heuristic.su/effects/catalog/est/byId/description/1201/index.html>

Частная и субстанциональная (полная) производная

Рассмотрим параметр среды, заданный в эйлеровых координатах

$$\varphi = \varphi(t, x_1, x_2, x_3),$$

и закон движения сплошной среды

$$\vec{r} = \vec{r}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Частная производная

Производная в заданной точке пространства

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x_1, x_2, x_3)$$

определяет изменение параметра φ в фиксированной точке пространства.

Полная производная

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varphi(t, x_1(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), x_2(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), x_3(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)) &= \\&= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} = \\&= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \varphi = \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \right) \varphi\end{aligned}$$

определяет изменение параметра φ в жидкой частице в фиксированной точке пространства, где $\vec{v}(t, x_1, x_2, x_3)$ – вектор скорости.

Определение

Оператор $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)$ называется оператором **субстанциональной (полной)** производной.

1. *Нигматулин Р.И.* Механика сплошной среды. Кинематика. Динамика. Термодинамика. Статистическая динамика. М.:ГЭОТАР-Медиа, 2014.
2. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Том 1. М.:Наука, 1970.
3. *Эглит М.Э.* Лекции по основам механики сплошных сред. Изд. 2-е, испр. М.: Книжный дом «Либроком», 2010.