

Элементы тензорного исчисления

Верецагин Антон Сергеевич

канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрофизики и газовой динамики



15 декабря 2020 г.

Криволинейные системы координат. Скаляр. Вектор. Ковариантность и контравариантность. Тензор. Тензорная алгебра. Произведение тензоров. Сокращение индексов. Теоремы о тензорах. Фундаментальная квадратичная форма и тензор. Метрика. Скалярное произведение векторов.

Определение

Пусть задана связь между криволинейными системами координат:

$$x^\alpha = x^\alpha(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n), \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

и

$$\frac{D(x^1, x^2, \dots, x^n)}{D(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^n} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \cdots & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^2} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

тогда существует обратное преобразование координат:

$$\bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n).$$

Определение

Если для каждой системы координат (x^1, x^2, \dots, x^n) определена функция $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ такая, что при преобразовании системы координат (1) выполняется условие:

$$f(x^1, x^2, \dots, x^n) = f(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n),$$

то говорят, что функция точек $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ есть **инвариант**, или **скаляр**.

Контравариантный вектор

Определение

Если для каждой системы координат (x^1, x^2, \dots, x^n) определена совокупность n функций A^1, A^2, \dots, A^n такая, что для системы координат $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$ мы имеем свою совокупность функций $\bar{A}^1, \bar{A}^2, \dots, \bar{A}^n$, и если при преобразовании координат (1) эти функции преобразуются по следующим формулам:

$$\bar{A}^i = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} A^\alpha \quad (i = 1, \dots, n),$$

то говорят, что совокупность величин A^1, A^2, \dots, A^n определяет **контравариантный вектор**, а величины A^i называются **компонентами контравариантного вектора** A^i .

Пример контравариантного вектора

Соглашение

Условимся проводить суммирование по повторяющимся индексам в одночлене от 1 до n , если не сделано отдельных оговорок заранее.

Пример контравариантного вектора

Соглашение

Условимся проводить суммирование по повторяющимся индексам в одночлене от 1 до n , если не сделано отдельных оговорок заранее.

Вектор $d\bar{x}^i$

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^n} dx^n = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha.$$

Пример ковариантного вектора

Градиент функции

Рассмотрим градиент функции $\nabla\varphi(x^1, x^2, \dots, x^n)$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x^n}.$$

Пример ковариантного вектора

Градиент функции

Рассмотрим градиент функции $\nabla\varphi(x^1, x^2, \dots, x^n)$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^1}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^n}.$$

По правилам дифференцирования:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}^i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial\bar{x}^i} + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial\bar{x}^i} + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial\bar{x}^i}.$$

Пример ковариантного вектора

Градиент функции

Рассмотрим градиент функции $\nabla\varphi(x^1, x^2, \dots, x^n)$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x^2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x^n}.$$

По правилам дифференцирования:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^i} + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}.$$

Положим, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} = A_\alpha, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{x}^\alpha} = \bar{A}_\alpha,$$

тогда получим

$$\bar{A}_i = A_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}.$$

Ковариантный вектор

Определение

Если для каждой системы координат x^α определена совокупность n функций A_α и если при преобразовании координат (1) эти функции преобразуются по формулам

$$\bar{A}_i = A_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i},$$

то величины A_α определяют **ковариантный вектор**, составляющими, или компонентами, которого они являются.

Соглашение

Будем различать ковариантные векторы от контравариантных, тем, что у контравариантных векторов индексы будем ставить сверху (например, dx^i), а у ковариантных – снизу (например, A_j).

Тензор второго ранга (контравариантный)

Определение

Если для каждой системы координат x^α определена совокупность n^2 функций $A^{\alpha\beta}$, которые при преобразовании координат (1) испытывают преобразование

$$\bar{A}^{ik} = A^{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\beta},$$

то эти функции определяют **контравариантный тензор второго ранга**, составляющими которого они являются.

Тензор второго ранга (ковариантный)

Определение

Если же определена совокупность n^2 функций $A_{\alpha\beta}$, которые при преобразовании координат (1) испытывают преобразование

$$\bar{A}_{ik} = A_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k},$$

то эти функции определяют **ковариантный тензор второго ранга**, составляющим которого они являются.

Тензор второго ранга (смешанный)

Определение

Если же определена совокупность n^2 функций $A_{\alpha}^{\cdot\beta}$, которые при преобразовании координат (1) испытывают преобразование

$$\bar{A}_{i\cdot}^{\cdot k} = A_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^{\beta}},$$

то эти функции определяют **смешанный тензор второго ранга**, составляющими которого они являются.

Символ Кронекера

$$\delta_{\alpha}^{\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

является смешанным тензором 2-го ранга.

Доказательство

$$\bar{\delta}_i^k = \delta_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^{\alpha}} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Тензоры более высоких рангов

Пример

По аналогии можно ввести тензоры более высоких рангов, это такой набор величин, для которых при переходе из одной системы координат в другую (1) выполняются аналогичные соотношения, например:

$$\bar{A}^l_{ik} = A^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^{\gamma}}.$$

В данном случае тензор $A^{\gamma}_{\alpha\beta}$ является **смешанным тензором 3-го ранга** дважды ковариантным и один раз контравариантным.

Тензорная алгебра: умножение на число и сумма

Умножение тензора на число

При **умножении** всех компонентов тензора $A_{\alpha\beta}^{\gamma}$ **на число** λ получается новый тензор с компонентами $\lambda A_{\alpha\beta}^{\gamma}$ (док-во очевидно).

Тензорная алгебра: умножение на число и сумма

Умножение тензора на число

При **умножении** всех компонентов тензора $A_{\alpha\beta}^{\gamma}$ **на число** λ получается новый тензор с компонентами $\lambda A_{\alpha\beta}^{\gamma}$ (док-во очевидно).

Сложение

Суммой двух тензоров $A_{\alpha\beta}^{\gamma}$ и $B_{\alpha\beta}^{\gamma}$ одинаковой размерности будет тензор $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ такого же вида с компонентами

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma} = A_{\alpha\beta}^{\gamma} + B_{\alpha\beta}^{\gamma}.$$

Видно, что сложение тензоров обладает свойствами **коммутативности**, **ассоциативности**, а вместе с операцией умножение на число образует **векторное пространство**.

Тензорная алгебра: симметричность, антисимметричность

Симметричность

Тензор $A^{\alpha\beta}$ называется **симметричным**, если для всех α и β

$$A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}.$$

Тензорная алгебра: симметричность, антисимметричность

Симметричность

Тензор $A^{\alpha\beta}$ называется **симметричным**, если для всех α и β

$$A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}.$$

Антисимметричность

Тензор $A^{\alpha\beta}$ называется **антисимметричным**, если для всех α и β

$$A^{\alpha\beta} = -A^{\beta\alpha}.$$

Тензорная алгебра: симметричность, антисимметричность

Симметричность

Тензор $A^{\alpha\beta}$ называется **симметричным**, если для всех α и β

$$A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}.$$

Антисимметричность

Тензор $A^{\alpha\beta}$ называется **антисимметричным**, если для всех α и β

$$A^{\alpha\beta} = -A^{\beta\alpha}.$$

По аналогии с ортогональными тензорами второго ранга можно показать, что любой тензор можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного по двум выбранным (одновременно ковариантным или контравариантным) индексам, причем единственным образом.

Тензорная алгебра: произведение тензоров

Определение

Назовем произведением тензора A_{α}^{β} и тензора $B_{\gamma\delta}^{\varepsilon}$ тензор $C_{\alpha\gamma\delta}^{\beta\varepsilon}$, образуемый по формуле $C_{\alpha\gamma\delta}^{\beta\varepsilon} = A_{\alpha}^{\beta} B_{\gamma\delta}^{\varepsilon}$.

Тензорная алгебра: произведение тензоров

Определение

Назовем произведением тензора A_{α}^{β} и тензора $B_{\gamma\delta}^{\varepsilon}$ тензор $C_{\alpha\gamma\delta}^{\beta\varepsilon}$, образуемый по формуле $C_{\alpha\gamma\delta}^{\beta\varepsilon} = A_{\alpha}^{\beta} B_{\gamma\delta}^{\varepsilon}$.

Корректность определения

Для тензоров A_{α}^{β} и $B_{\gamma\delta}^{\varepsilon}$ справедливы соотношения:

$$\bar{A}_i^k = A_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^{\beta}}, \quad \bar{B}_{lm}^n = B_{\gamma\delta}^{\varepsilon} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^{\varepsilon}},$$

следовательно компоненты $C_{\alpha\gamma\delta}^{\beta\varepsilon}$ в новой системе координат:

$$\bar{C}_{ilm}^{kn} = \bar{A}_i^k \bar{B}_{lm}^n = C_{\alpha\gamma\delta}^{\beta\varepsilon} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \bar{x}^l} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial \bar{x}^m} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^{\varepsilon}}.$$

Тензорная алгебра: сокращение индексов

Докажем, что тензор $B_\alpha = A_{\alpha\beta}^\beta$, полученный из смешанного тензора $A_{\alpha\beta}^\gamma$ путем суммирования по повторяющемуся индексу β от 1 до n , является тензором первого ранга.

Имеем

$$\bar{A}_{ik}^l = A_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^\gamma},$$

тогда

$$\bar{B}_i = \bar{A}_{ik}^k = A_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\gamma} = A_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \delta_\gamma^\beta = A_{\alpha\beta}^\beta \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} = B_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i},$$

что доказывает, что B_α – ковариантный вектор.

Вывод

Для каждого смешанного тензора можно получить новый тензор путем **сокращения** одного ковариантного и контравариантного **индекса**.

Скалярное произведение векторов: $a = A^\alpha B_\alpha$.

Примеры

Скалярное произведение векторов: $a = A^\alpha B_\alpha$.

Скалярное произведение тензора и вектора: $C_\beta = A_{\alpha\beta} B^\alpha$.

Примеры

Скалярное произведение векторов: $a = A^\alpha B_\alpha$.

Скалярное произведение тензора и вектора: $C_\beta = A_{\alpha\beta} B^\alpha$.

Бискалярное произведение тензоров: $b = A_{\alpha\beta} B^{\beta\alpha}$.

Теорема о тензорной природе объекта

Теорема

Если для каждой системы координат (x^1, x^2, \dots, x^n) имеем совокупность n^3 величин $A_{\alpha\beta}^{\gamma}$ и если при любом выборе трех векторов u^{α} , v^{β} и w_{γ} выражение

$$f = A_{\alpha\beta}^{\gamma} u^{\alpha} v^{\beta} w_{\gamma}$$

является инвариантом, то величины $A_{\alpha\beta}^{\gamma}$ являются составляющими тензора два раза ковариантного раз контравариантного.

Теорема о тензорной природе объекта

Доказательство

В силу произвольности u^α , v^β и w_γ возьмем их так, что для заранее заданных i, j, k в новой системе координат:

$$\bar{u}^\alpha = \delta_i^\alpha, \quad \bar{v}^\beta = \delta_k^\beta, \quad \bar{w}_\gamma = \delta_\gamma^j.$$

Теорема о тензорной природе объекта

Доказательство

В силу произвольности u^α , v^β и w_γ возьмем их так, что для заранее заданных i, j, k в новой системе координат:

$$\bar{u}^\alpha = \delta_i^\alpha, \quad \bar{v}^\beta = \delta_k^\beta, \quad \bar{w}_\gamma = \delta_\gamma^j.$$

$$\text{Тогда } u^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r} \bar{u}^r = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r} \delta_i^r = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}, \quad v^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}, \quad w_\gamma = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\gamma}.$$

Теорема о тензорной природе объекта

Доказательство

В силу произвольности u^α , v^β и w_γ возьмем их так, что для заранее заданных i, j, k в новой системе координат:

$$\bar{u}^\alpha = \delta_i^\alpha, \quad \bar{v}^\beta = \delta_k^\beta, \quad \bar{w}_\gamma = \delta_\gamma^j.$$

$$\text{Тогда } u^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r} \bar{u}^r = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r} \delta_i^r = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}, \quad v^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}, \quad w_\gamma = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\gamma}.$$

$$\bar{f} = \bar{A}_{\alpha\beta}^\gamma \bar{u}^\alpha \bar{v}^\beta \bar{w}_\gamma = \bar{A}_{ik}^j,$$

Теорема о тензорной природе объекта

Доказательство

В силу произвольности u^α , v^β и w_γ возьмем их так, что для заранее заданных i, j, k в новой системе координат:

$$\bar{u}^\alpha = \delta_i^\alpha, \quad \bar{v}^\beta = \delta_k^\beta, \quad \bar{w}_\gamma = \delta_\gamma^j.$$

$$\text{Тогда } u^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r} \bar{u}^r = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r} \delta_i^r = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}, \quad v^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}, \quad w_\gamma = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\gamma}.$$

$$\bar{f} = \bar{A}_{\alpha\beta}^\gamma \bar{u}^\alpha \bar{v}^\beta \bar{w}_\gamma = \bar{A}_{ik}^j, \quad f = A_{\alpha\beta}^\gamma u^\alpha v^\beta w_\gamma = A_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\gamma}.$$

Теорема о тензорной природе объекта

Доказательство

В силу произвольности u^α , v^β и w_γ возьмем их так, что для заранее заданных i, j, k в новой системе координат:

$$\bar{u}^\alpha = \delta_i^\alpha, \quad \bar{v}^\beta = \delta_k^\beta, \quad \bar{w}_\gamma = \delta_\gamma^j.$$

$$\text{Тогда } u^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r} \bar{u}^r = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r} \delta_i^r = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}, \quad v^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}, \quad w_\gamma = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\gamma}.$$

$$\bar{f} = \bar{A}_{\alpha\beta}^\gamma \bar{u}^\alpha \bar{v}^\beta \bar{w}_\gamma = \bar{A}_{ik}^j, \quad f = A_{\alpha\beta}^\gamma u^\alpha v^\beta w_\gamma = A_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\gamma}.$$

$$\text{По условию теоремы } f - \text{скаляр, значит, } \bar{A}_{\alpha\beta}^\gamma = A_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\gamma}.$$

Теорема о тензорной природе объекта 2

Теорема

Если для каждой системы координат x^α имеется совокупность n^2 величин $A_{\alpha\beta}$ и если при любом выборе вектора u^α выражение

$$f = A_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta$$

является инвариантом, то величина

$$B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha})$$

является составляющей ковариантного тензора.

Теорема о тензорной природе объекта 2

Доказательство

Положим, $u^\alpha = v^\alpha + w^\alpha$ – произвольное разложение вектора u^α в сумму двух векторов, тогда

$$\begin{aligned} f &= A_{\alpha\beta}(v^\alpha + w^\alpha)(v^\beta + w^\beta) = A_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta + A_{\alpha\beta}w^\alpha w^\beta + \\ &\quad + A_{\alpha\beta}v^\alpha w^\beta + A_{\alpha\beta}v^\beta w^\alpha. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$A_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta, \quad A_{\alpha\beta}w^\alpha w^\beta$$

являются инвариантами по условию теоремы, а

$$A_{\alpha\beta}v^\alpha w^\beta = A_{\beta\alpha}v^\alpha w^\beta.$$

Поэтому выражение $g = (A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha})v^\alpha w^\beta$ является инвариантом, а $A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}$ – ковариантным тензором по теореме 1.

Признак тензорной природы для симметричного объекта

Следствие

Если величины $A_{\alpha\beta}$ обладают свойством симметричности, т.е. $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$, то из инвариантности

$$f = A_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta}$$

для любого вектора u^{α} следует, что $A_{\alpha\beta}$ являются компонентами ковариантного тензора.

Определение

Выражение

$$ds^2 = g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n) dx^i dx^k, \quad (2)$$

определяющее расстояние между двумя бесконечно близкими точками многообразия, называется **фундаментальной квадратичной формой**.

Постулаты для фундаментального тензора

Инвариантность

ds^2 – инвариант по определению.

Постулаты для фундаментального тензора

Инвариантность

ds^2 – инвариант по определению.

Симметричность

$$g_{ij} = g_{ji}$$

Постулаты для фундаментального тензора

Инвариантность

ds^2 – инвариант по определению.

Симметричность

$$g_{ij} = g_{ji}$$

Определитель

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Постулаты для фундаментального тензора

Инвариантность

ds^2 – инвариант по определению.

Симметричность

$$g_{ij} = g_{ji}$$

Определитель

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Тензорная природа (следствие)

g_{ij} – ковариантный тензор по тензорному признаку для симметричного объекта.

Определение

Пусть A^k – произвольный вектор, тогда рассмотрим вектор

$$A_i = g_{ik}A^k.$$

Определение

Пусть A^k – произвольный вектор, тогда рассмотрим вектор

$$A_i = g_{ik} A^k.$$

Эти равенства можно рассматривать как систему из n линейных уравнений относительно A^k , и т. к. $g \neq 0$, то существуют такие числа g^{ik} , что

$$A^i = g^{ik} A_k.$$

Контравариантный фундаментальный тензор

Определение

Пусть A^k – произвольный вектор, тогда рассмотрим вектор

$$A_i = g_{ik} A^k.$$

Эти равенства можно рассматривать как систему из n линейных уравнений относительно A^k , и т. к. $g \neq 0$, то существуют такие числа g^{ik} , что

$$A^i = g^{ik} A_k.$$

Так как A^i , A_k произвольные векторы, то по признаку тензорного объекта g^{ik} является контравариантным тензором и называется **контравариантным фундаментальным тензором**.

Смешанный фундаментальный тензор

Определение

Смешанный тензор

$$g_i^k = g_{i\alpha} g^{\alpha k}$$

называется **смешанным фундаментальным тензором**.

Смешанный фундаментальный тензор

Определение

Смешанный тензор

$$g_i^k = g_{i\alpha} g^{\alpha k}$$

называется **смешанным фундаментальным тензором**.

Свойства

Равенство $A_i = g_{i\alpha} A^\alpha = g_{i\alpha} g^{\alpha k} A_k = g_i^k A_k$ имеет место для всех A_k , поэтому

$$g_i^k = \delta_i^k = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Сокращение смешанного фундаментального тензора по его индексам дает размерность рассматриваемого многообразия, т.к.

$$g_i^i = \delta_i^i = n.$$

Переход между контравариантными и ковариантными величинами

Для векторов

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad A^i = g^{ik} A_k,$$

где A_i, A^k – ковариантные и контравариантные компоненты одного и того же вектора.

Переход между контравариантными и ковариантными величинами

Для векторов

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad A^i = g^{ik} A_k,$$

где A_i, A^k – ковариантные и контравариантные компоненты одного и того же вектора.

Для тензоров

$$A_{i\cdot}^{\cdot\beta} = A^{\alpha\beta} g_{i\alpha}, \quad A_{\cdot k}^{\alpha\cdot} = A^{\alpha\beta} g_{\beta k},$$

Переход между контравариантными и ковариантными величинами

Для векторов

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad A^i = g^{ik} A_k,$$

где A_i, A^k – ковариантные и контравариантные компоненты одного и того же вектора.

Для тензоров

$$A_{i\cdot}^{\cdot\beta} = A^{\alpha\beta} g_{i\alpha}, \quad A_{\cdot k}^{\alpha\cdot} = A^{\alpha\beta} g_{\beta k},$$

$$A_{ik} = A_{i\cdot}^{\cdot\beta} g_{\beta k} = A^{\alpha\beta} g_{i\alpha} g_{\beta k},$$

Переход между контравариантными и ковариантными величинами

Для векторов

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad A^i = g^{ik} A_k,$$

где A_i, A^k – ковариантные и контравариантные компоненты одного и того же вектора.

Для тензоров

$$A_{i\cdot}^{\cdot\beta} = A^{\alpha\beta} g_{i\alpha}, \quad A_{\cdot k}^{\alpha\cdot} = A^{\alpha\beta} g_{\beta k},$$

$$A_{ik} = A_{i\cdot}^{\cdot\beta} g_{\beta k} = A^{\alpha\beta} g_{i\alpha} g_{\beta k},$$

$$A^{\alpha\beta} = A_{i\cdot}^{\cdot\beta} g^{i\alpha} = A_{ik} g^{k\beta} g^{i\alpha},$$

где $A_{ik}, A^{\alpha\beta}, A_{i\cdot}^{\cdot\beta}, A_{\cdot k}^{\alpha\cdot}$ – компоненты одного и того же тензора.

Связь фундаментальной формы и преобразования координат

Пусть подпространство E_n вложено в евклидово пространство E_m ($m \geq n$) и преобразование координат задается

$$\begin{cases} y_1 &= y_1(x^1, x^2, \dots, x^n), \\ \vdots & \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ y_m &= y_m(x^1, x^2, \dots, x^n), \end{cases}$$

где y_α – координаты точек в прямолинейной ортогональной системе координат.

Связь фундаментальной формы и преобразования координат

Пусть подпространство E_n вложено в евклидово пространство E_m ($m \geq n$) и преобразование координат задается

$$\begin{cases} y_1 &= y_1(x^1, x^2, \dots, x^n), \\ \vdots &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ y_m &= y_m(x^1, x^2, \dots, x^n), \end{cases}$$

где y_α – координаты точек в прямолинейной ортогональной системе координат.

Тогда фундаментальная квадратичная форма будет иметь вид

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^m dy_\alpha^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \text{ где } g_{ik} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^k}.$$

Длина вектора

Рассмотрим контравариантный вектор A^i . Подберем бесконечно малый вектор dx^i такой, что

$$dx^i = \lambda A^i, \quad A^i = \frac{1}{\lambda} dx^i.$$

Так как при преобразовании системы координат компоненты векторов dx^i и A^k преобразуются по одним и тем же формулам, то величина λ является инвариантом.

Длина вектора

Рассмотрим контравариантный вектор A^i . Подберем бесконечно малый вектор dx^i такой, что

$$dx^i = \lambda A^i, \quad A^i = \frac{1}{\lambda} dx^i.$$

Так как при преобразовании системы координат компоненты векторов dx^i и A^k преобразуются по одним и тем же формулам, то величина λ является инвариантом.

Вектору в подпространстве R^n с координатами dx^i отвечает вектор в пространстве R^m с координатами y_α , длина которого равна ds . Таким образом,

$$ds^2 = \lambda^2 g_{ik} A^i A^k.$$

Длина вектора

Определение

Длиной вектора будем называть величину

$$l(A^i) = \sqrt{g_{ik}A^iA^k}.$$

Свойства

$$l(A^i) = \sqrt{g_{ik}A^iA^k} = \sqrt{A_iA^i} = \sqrt{g^{ij}A_iA_j}$$

Скалярное произведение векторов

Так как скалярному вектору dx^i отвечает в пространстве вектор с составляющими

$$dy_\alpha = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} dx^i \quad (\alpha = 1, \dots, m),$$

то вектор $A^i = dx^i/\lambda$ в пространстве R^m будет иметь компоненты

$$a_\alpha = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} A^i \quad (\alpha = 1, \dots, m).$$

Рассмотрим еще один вектор с компонентами B^i , имеющий в R^m компоненты

$$b_\alpha = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^k} B^k \quad (\alpha = 1, \dots, m).$$

Определение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{\alpha=1}^m a_{\alpha} b_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^i} A^i \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^k} B^k = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^k} A^i B^k = g_{ik} A^i B^k$$

Скалярное произведение векторов

Определение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{\alpha=1}^m a_{\alpha} b_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^i} A^i \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^k} B^k = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^k} A^i B^k = g_{ik} A^i B^k$$

Свойства

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = g_{ik} A^i B^k = A_k B^k = A^i B_i = g^{ij} A_i B_j.$$

Скалярное произведение векторов

Определение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{\alpha=1}^m a_{\alpha} b_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^i} A^i \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^k} B^k = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^k} A^i B^k = g_{ik} A^i B^k$$

Свойства

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = g_{ik} A^i B^k = A_k B^k = A^i B_i = g^{ij} A_i B_j.$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{g_{ik} A^i B^k}{\sqrt{g_{ik} A^i A^k} \sqrt{g_{ik} B^i B^k}};$$

Скалярное произведение векторов

Определение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{\alpha=1}^m a_{\alpha} b_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^i} A^i \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^k} B^k = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial y_{\alpha}}{\partial x^k} A^i B^k = g_{ik} A^i B^k$$

Свойства

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = g_{ik} A^i B^k = A_k B^k = A^i B_i = g^{ij} A_i B_j.$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{g_{ik} A^i B^k}{\sqrt{g_{ik} A^i A^k} \sqrt{g_{ik} B^i B^k}};$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow g_{ik} A^i B^k = 0.$$

Векторное произведение

Определение

Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, тогда

$$\begin{aligned} u_i &= e^{\alpha\beta}{}_i A_\alpha B_\beta = g_{i\gamma} e^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha B_\beta = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \{g_{i1}(A_2 B_3 - A_3 B_2) + g_{i2}(A_3 B_1 - A_1 B_3) + g_{i3}(A_1 B_2 - A_2 B_1)\}. \end{aligned}$$

Обозначения

$$e_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{g} \delta_{\alpha\beta\gamma}, \quad e^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{g}} \delta^{\alpha\beta\gamma}, \quad g = |g_{ik}|.$$

$$\begin{aligned} \delta_{123} &= \delta_{231} = \delta_{312} = 1, \\ \delta_{132} &= \delta_{213} = \delta_{321} = -1, \end{aligned}$$

$\delta_{ijk} = 0$ во всех остальных случаях.

- *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд. 9-е. М.: Наука, 1965.