

# Звуковые колебания

*Верещагин Антон Сергеевич*  
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики ФФ НГУ

26 марта 2019 г.

## Аннотация

Звуковые волны. Скорость звука (определение). Скорость звука в идеальном политропном газе. Линеаризация уравнений сохранения. Плоские и сферические звуковые волны. Запаздывающие потенциалы. Способы конструирования решений. Распространение возмущений с до- и сверхзвуковой скоростью.

# Основные уравнения динамики идеального газа

Уравнения сохранения для идеального газа

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) S = 0.$$

Замыкающие соотношения

$$p = p(\rho, S).$$

# Звуковые волны

## Определение

Колебательное движение с малыми амплитудами в сжимаемом газе называют **звуковыми волнами**.

# Звуковые волны

## Определение

Колебательное движение с малыми амплитудами в сжимаемом газе называют **звуковыми волнами**.

## Замечание

При рассмотрении звуковых колебаний будет считать течение **изоэнтропическим** ( $S = \text{const}$ ), тогда из общей системы уравнений остаются только уравнение неразрывности и уравнение Эйлера, а в замыкающем соотношении пропадает зависимость от  $S$ , как функции от координаты и времени.

# Скорость звука

Уравнения сохранения для идеального газа

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \nabla \rho,$$
$$p = p(\rho).$$

# Скорость звука

Уравнения сохранения для идеального газа

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \nabla \rho,$$
$$p = p(\rho).$$

Определение

Величина  $c > 0$ , определяемая соотношением

$$c^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S,$$

называется **скоростью звука**.

Как видно из определения  $c = c(\rho, S)$ . Для изоэнтропических течений зависимостью от  $S$  как от функции переменных пространства и времени можно пренебречь.

# Скорость звука в идеальном политропном газе

Уравнение состояния идеального политропного газа

$$p = A(S)\rho^\gamma \quad \text{или} \quad p = \rho RT/\mu,$$

где  $\gamma = c_p/c_V$  – показатель политропы,  $A(S)$  – функция энтропии,  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность,  $T$  – температура,  $R$  – газовая постоянная,  $\mu$  – молярная масса газа.

$$c^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S = \gamma A(S) \rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma \frac{RT}{\mu}.$$

Таким образом,

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}.$$

# Линеаризация уравнений движения

## Замена переменных

Рассмотрим малые колебания газа в окрестности постоянного решения  $\vec{v} = 0, p = p_0, \rho = \rho_0$ :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}, \\ c &= c_0 + c', \\ \rho &= \rho_0 + \rho'.\end{aligned}$$

# Линеаризация уравнений движения

## Замена переменных

Рассмотрим малые колебания газа в окрестности постоянного решения  $\vec{v} = 0, p = p_0, \rho = \rho_0$ :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}, \\ c &= c_0 + c', \\ \rho &= \rho_0 + \rho'.\end{aligned}$$

## Уравнения движения

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0 + \rho')\vec{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'}(c_0 + c')^2 \nabla(\rho_0 + \rho').$$

# Уравнения звуковых колебаний

## Основные уравнения

Считая колебания малыми, отбрасываем все слагаемые, имеющие порядок малости два и выше, получим

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \nabla \rho' = 0.$$

# Уравнения звуковых колебаний

## Основные уравнения

Считая колебания малыми, отбрасываем все слагаемые, имеющие порядок малости два и выше, получим

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \nabla \rho' = 0.$$

## Потенциальное течение и волновое уравнение

Если  $\vec{v} = \nabla \varphi$ , тогда

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \Delta \varphi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi + \frac{c_0^2}{\rho_0} \nabla \rho' = 0.$$



$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta \varphi.$$

# Решение волнового уравнения для плоских волн

## Одномерное плоское течение

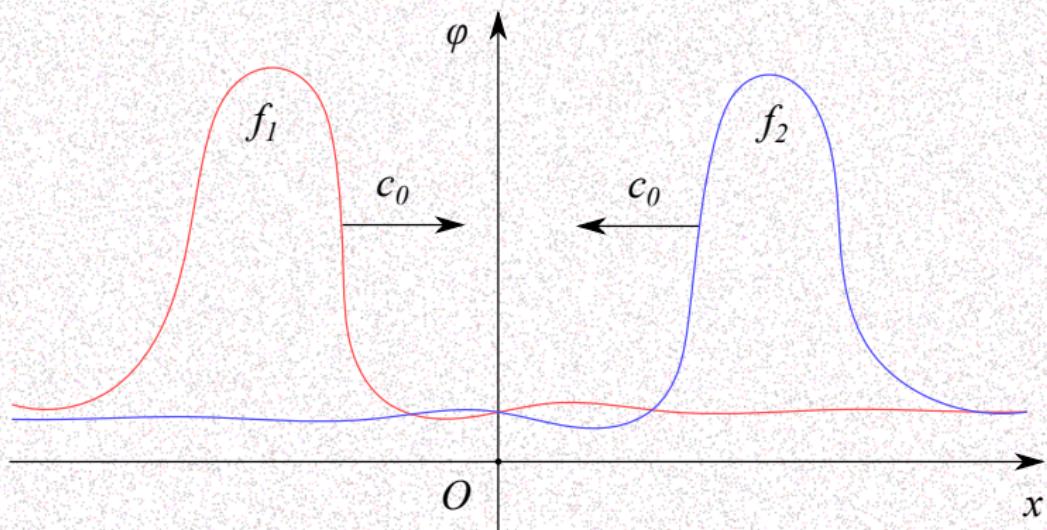
Если  $\varphi = \varphi(t, x)$ , тогда решением полученного волнового уравнения будет

$$\varphi(t, x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t) = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

где  $f_1(\xi), f_2(\eta)$  – произвольные дважды дифференцируемые функции своих аргументов

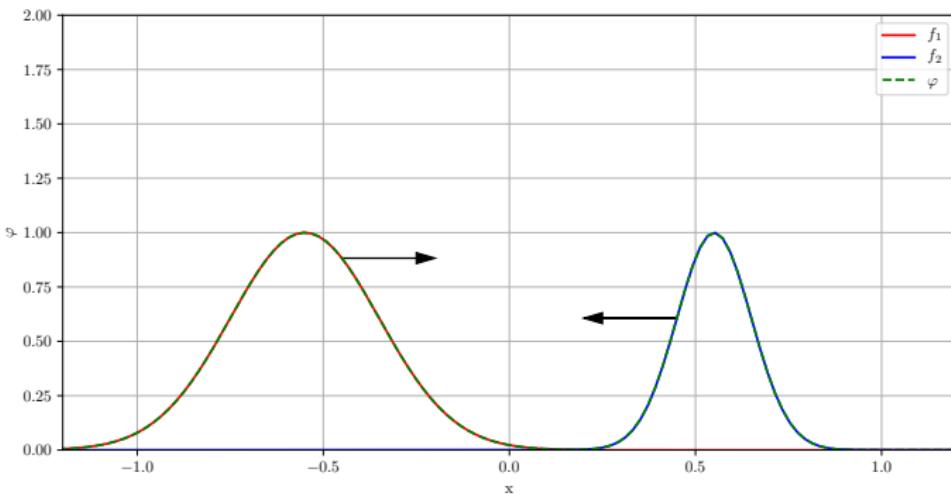
$$\xi = x - c_0 t, \quad \eta = x + c_0 t.$$

# Прогрессивные волны



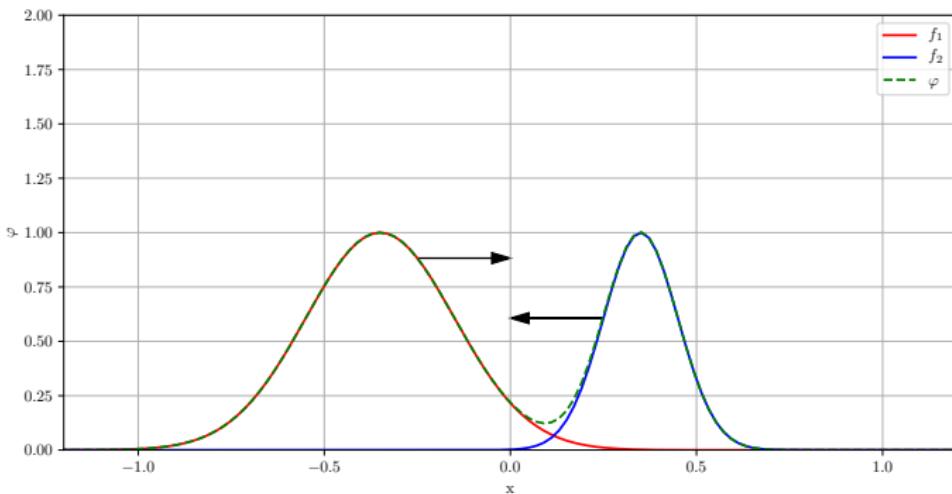
Решение  $\varphi(t, x)$  представляет собой сумму перемещающихся поступательно вправо и влево волн неизменного вида с скоростью  $c_0$ .

# Иллюстрация распространения плоских волн



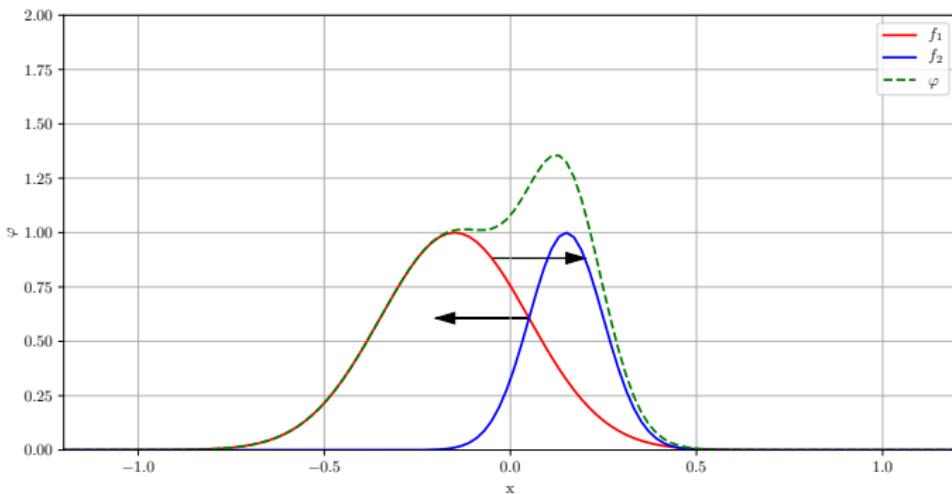
На рисунке  $\varphi(t, x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t)$  для заданных функций  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\eta)$ .

# Иллюстрация распространения плоских волн



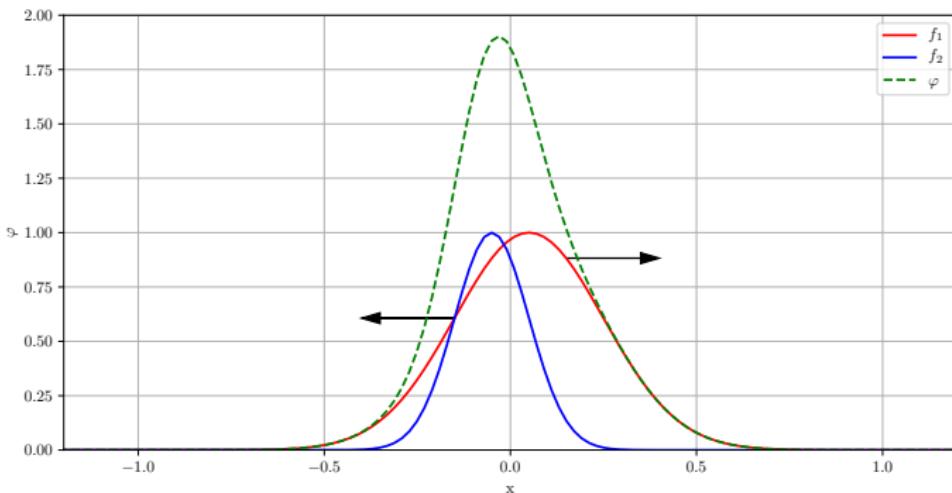
На рисунке  $\varphi(t, x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t)$  для заданных функций  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\eta)$ .

# Иллюстрация распространения плоских волн



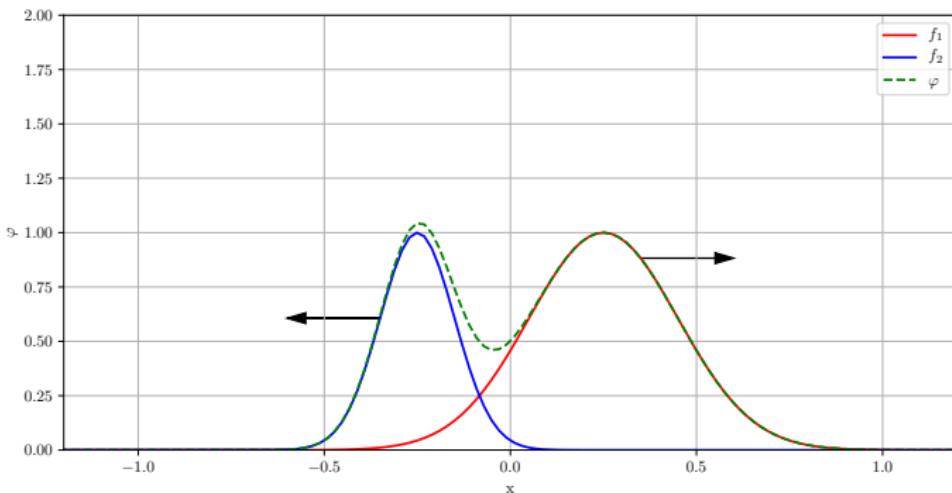
На рисунке  $\varphi(t, x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t)$  для заданных функций  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\eta)$ .

# Иллюстрация распространения плоских волн



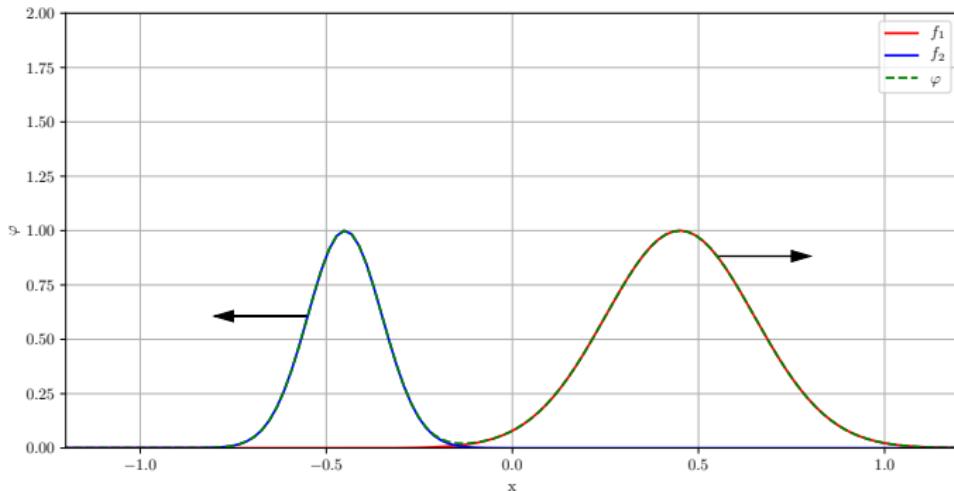
На рисунке  $\varphi(t, x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t)$  для заданных функций  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\eta)$ .

# Иллюстрация распространения плоских волн



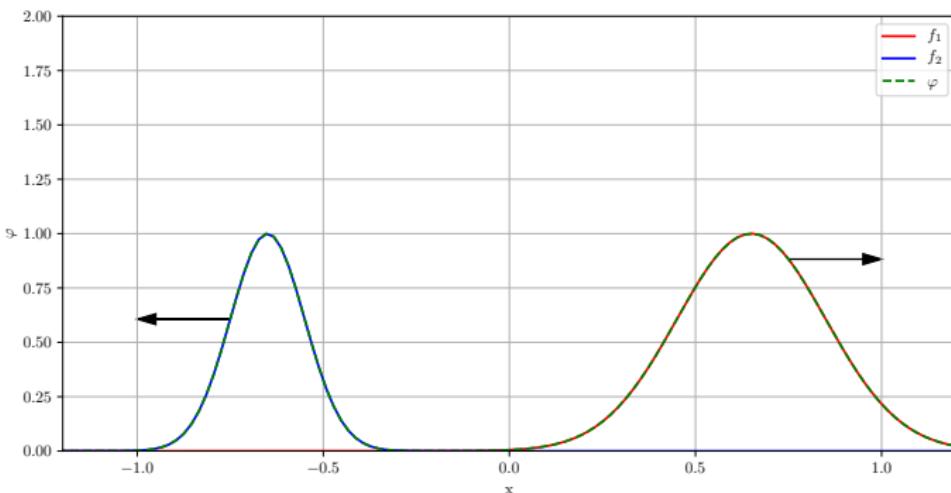
На рисунке  $\varphi(t, x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t)$  для заданных функций  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\eta)$ .

# Иллюстрация распространения плоских волн



На рисунке  $\varphi(t, x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t)$  для заданных функций  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\eta)$ .

# Иллюстрация распространения плоских волн



На рисунке  $\varphi(t, x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t)$  для заданных функций  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\eta)$ .

# Решение волнового уравнения в сферической симметрии

**Волновое уравнение в сферической симметрии**

Если  $\varphi = \varphi(t, r)$ , тогда волновое уравнение имеет вид

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right) \iff \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\varphi) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi).$$

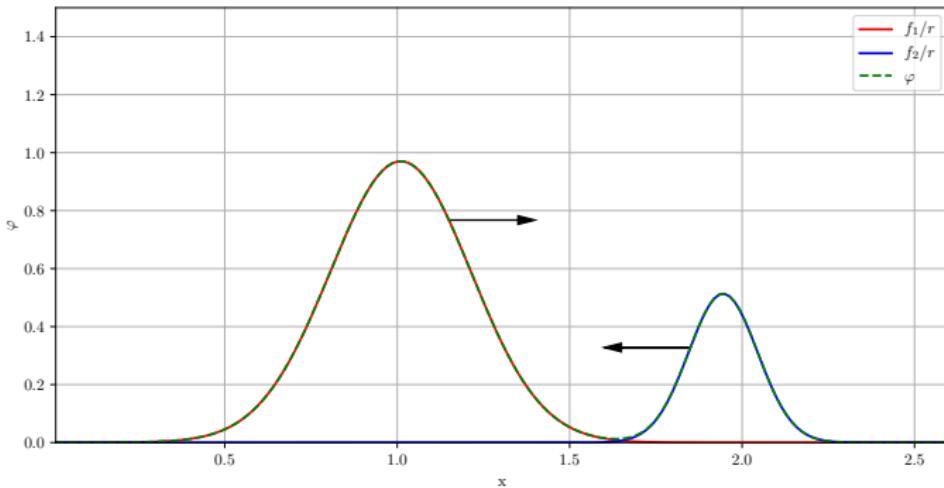
**Одномерное сферическое течение**

Решением полученного волнового уравнения будет

$$\varphi(t, r) = \frac{f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t)}{r} = \frac{Q_1(\xi)}{r} + \frac{Q_2(\eta)}{r},$$

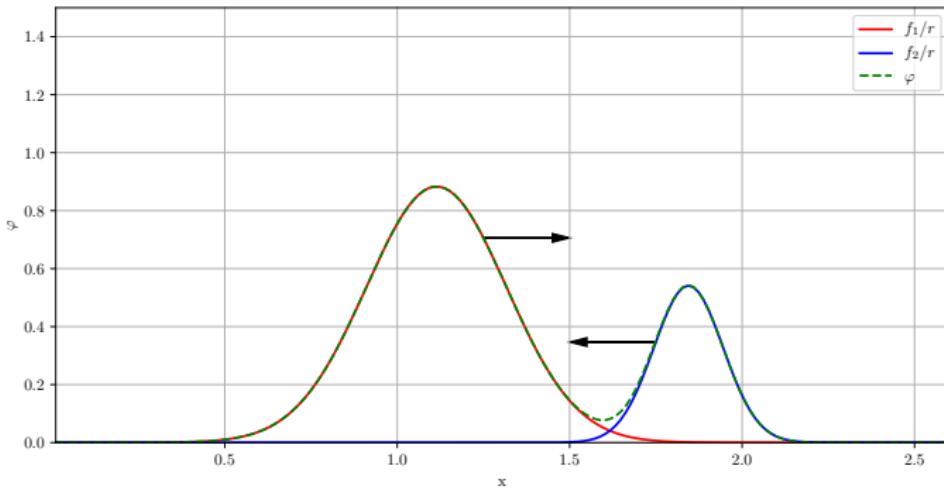
где  $Q_1(\xi)$ ,  $Q_2(\eta)$  – произвольные дважды дифференцируемые функции своих аргументов  $\xi = r - c_0 t$ ,  $\eta = r + c_0 t$ .

# Иллюстрация распространения сферических волн



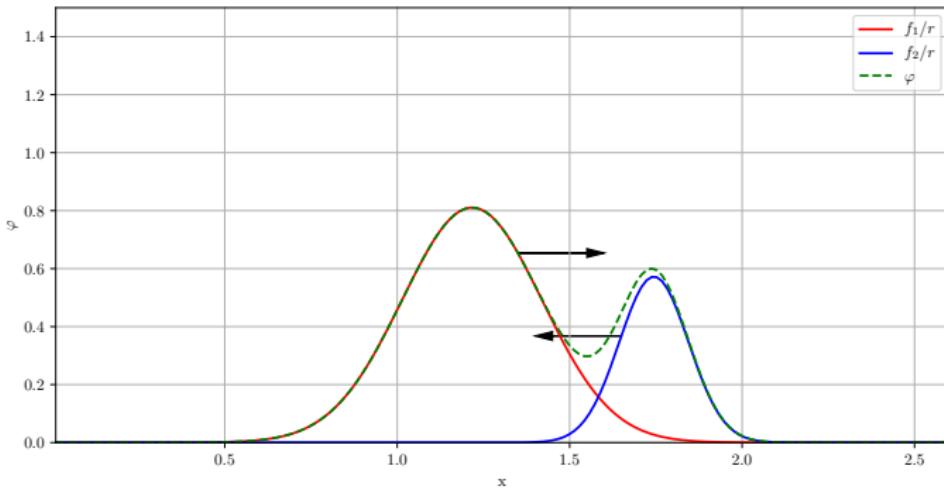
На рисунке  $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$  для заданных функций  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\eta)$ .

# Иллюстрация распространения сферических волн



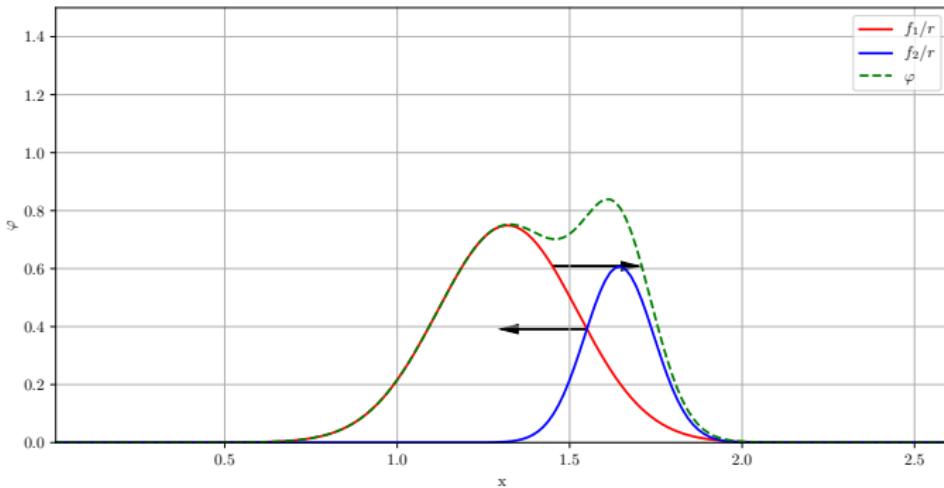
На рисунке  $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$  для заданных функций  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\eta)$ .

# Иллюстрация распространения сферических волн



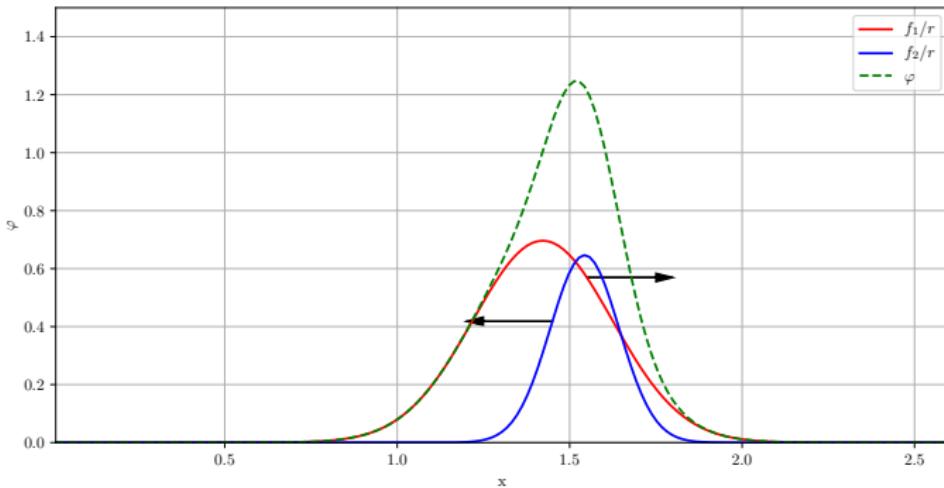
На рисунке  $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$  для заданных функций  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\eta)$ .

# Иллюстрация распространения сферических волн



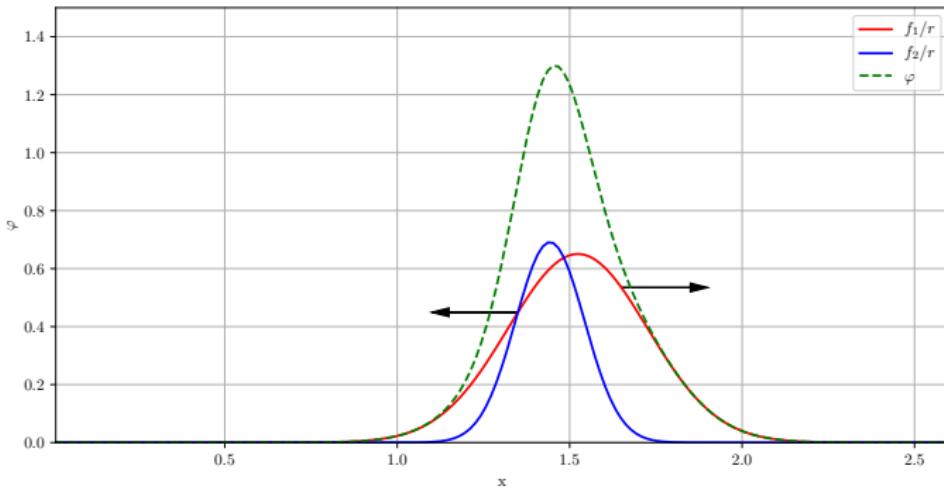
На рисунке  $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$  для заданных функций  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\eta)$ .

# Иллюстрация распространения сферических волн



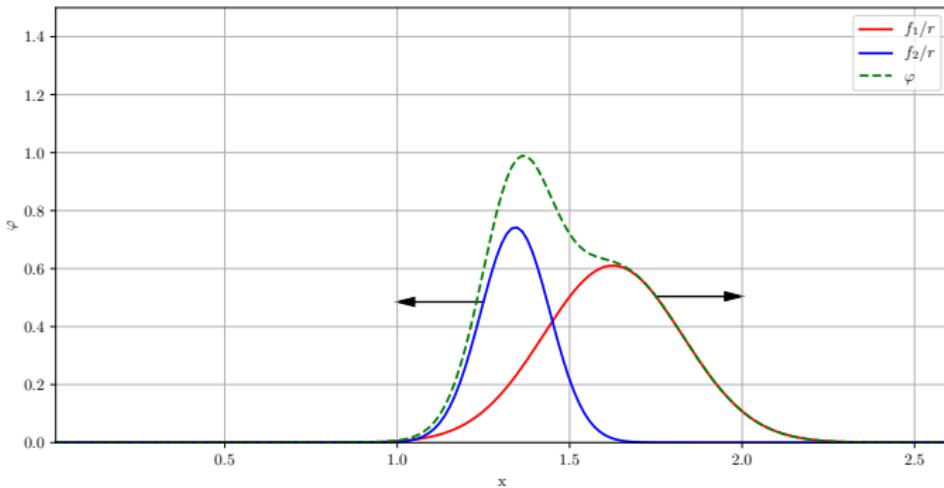
На рисунке  $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$  для заданных функций  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\eta)$ .

# Иллюстрация распространения сферических волн



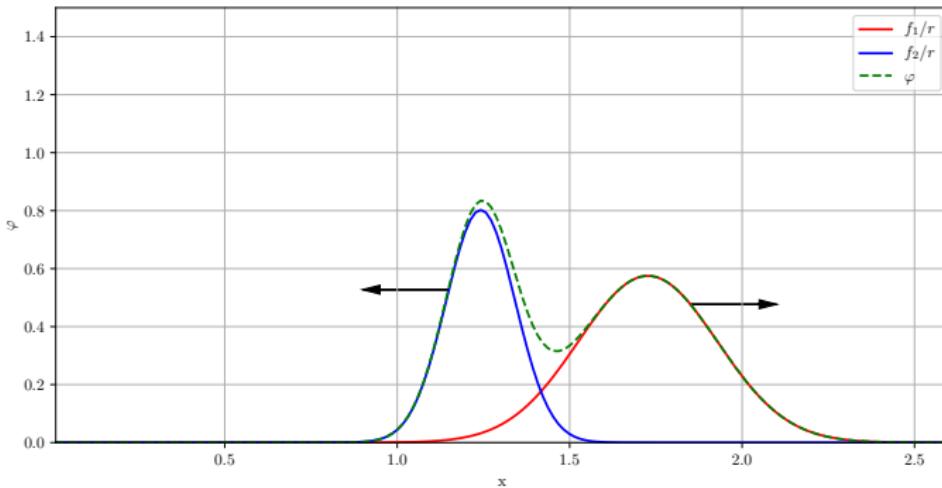
На рисунке  $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$  для заданных функций  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\eta)$ .

# Иллюстрация распространения сферических волн



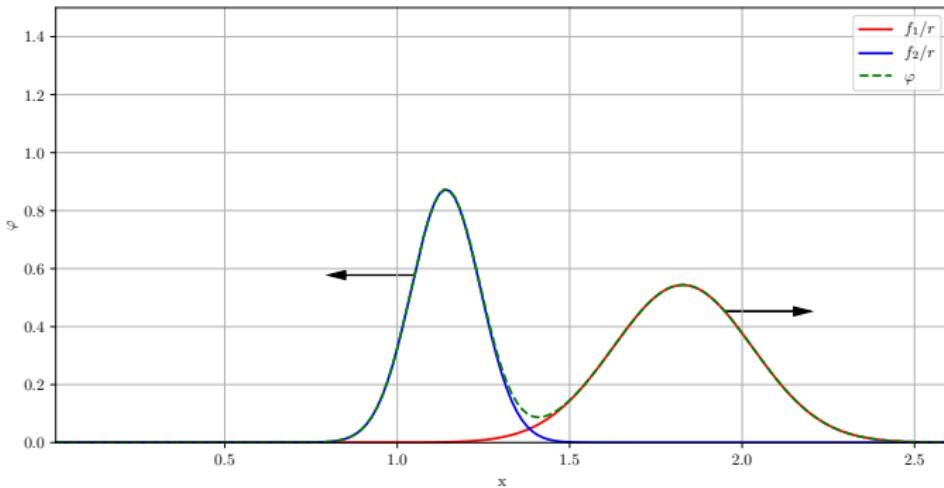
На рисунке  $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$  для заданных функций  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\eta)$ .

# Иллюстрация распространения сферических волн



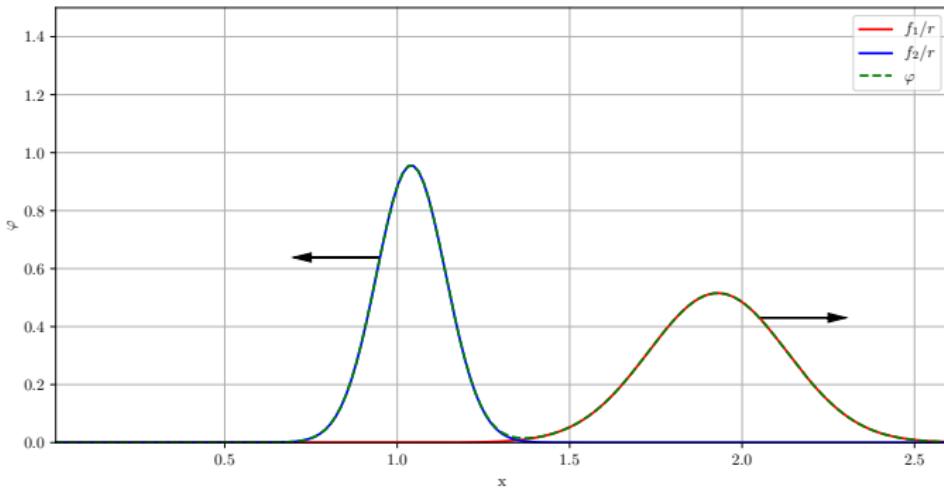
На рисунке  $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$  для заданных функций  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\eta)$ .

# Иллюстрация распространения сферических волн



На рисунке  $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$  для заданных функций  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\eta)$ .

# Иллюстрация распространения сферических волн



На рисунке  $\varphi(t, r) = \frac{1}{r} (f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t))$  для заданных функций  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\eta)$ .

# Запаздывающие потенциалы

## Определение

Возмущения из точки  $r = 0$  доходят до некоторой точки  $r \neq 0$  только через определённое время, поэтому полученное решение волнового уравнения называется **запаздывающим потенциалом**.

# Запаздывающие потенциалы

## Определение

Возмущения из точки  $r = 0$  доходят до некоторой точки  $r \neq 0$  только через определённое время, поэтому полученное решение волнового уравнения называется **запаздывающим потенциалом**.

## Потенциал источника звука

Функция вида

$$\varphi^*(t, x, y, z) = -\frac{Q \left( c_0(t - t_0) - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \right)}{4\pi \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}$$

является решением волнового уравнения для источника звука, начинаяющего действовать в момент времени  $t = t_0$  в точке с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$ .

# Способы конструирования решений волнового уравнения

## Принцип суперпозиций

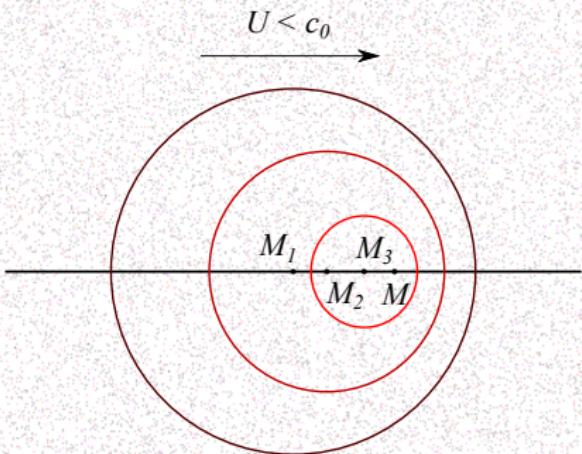
В силу линейности волнового уравнения суммарным потенциалом при движении твёрдого тела по траектории

$$x_0 = x_0(t_0), \quad y_0 = y_0(t_0), \quad z_0 = z_0(t_0)$$

можно рассматривать потенциал, являющийся суммой источников звука, возбуждаемых телом в момент времени  $t_0$  в соответствующих точках траектории с заданной интенсивностью  $Q_{t_0}$ , при этом

$$\varphi = \int_0^t \varphi^* dt_0.$$

# Распространение возмущений от источника, движущегося с дозвуковой скоростью

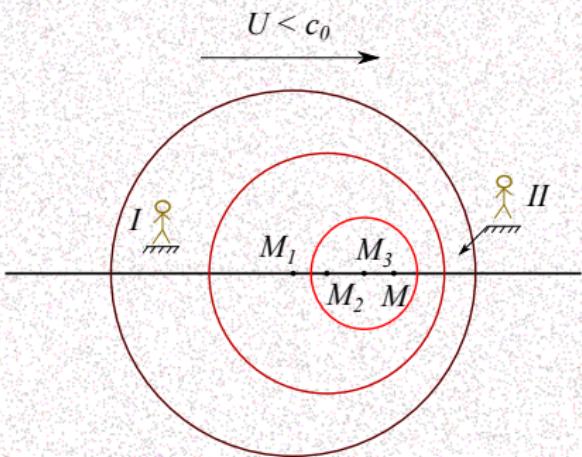


При движения тела прямолинейно с дозвуковой скоростью

$$U < c_0,$$

возмущения, возникающие на траектории его движения движутся быстрее, чем само тело, поэтому в его окрестности среда до него и после **возмущена**. Возмущения, посланные источником звука ранее, всегда обгоняют более поздние.

# Распространение возмущений от источника, движущегося с дозвуковой скоростью



## Эффект Допплера

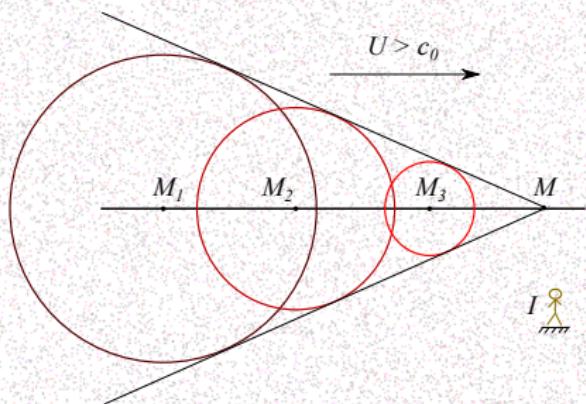
При движения тела прямолинейно с дозвуковой скоростью

$$U < c_0,$$

частота звука до перед телом (положение II) имеет большую частоту, чем за ним (положение I). Это обстоятельство объясняет так называемый **эффект Допплера**.

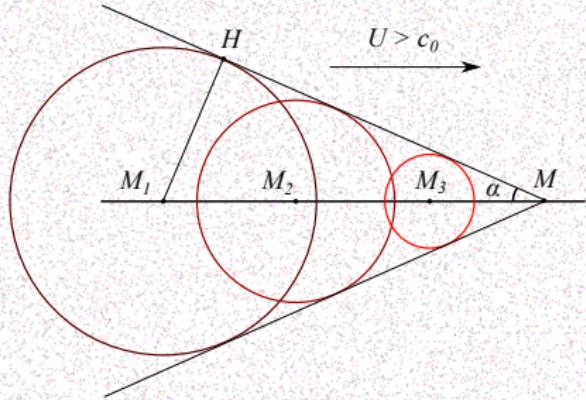
# Распространение возмущений от источника, движущегося со сверхзвуковой скоростью

При движения тела прямолинейно со сверхзвуковой скоростью



$U > c_0$ ,  
возмущения от источника будут распространяться медленнее, чем тело. Поэтому среда перед телом всегда будет **невозмущенная**. Наблюдатель, стоящий перед источником, движущимся со сверхзвуковой скоростью **не слышит** звуковых колебаний, создаваемых этим источником.

# Распространение возмущений от источника, движущегося со сверхзвуковой скоростью



## Конус Маха

При движении тела прямолинейно со сверхзвуковой скоростью  $U > c_0$ , огибающая возмущений будет образовывать конус с углом при вершине  $\angle HMM_1$ , обозначенным  $\alpha$ , таким что

$$\sin \alpha = \frac{M_1 H}{M_1 M} = \frac{c_0 \Delta t}{U \Delta t} = \frac{c_0}{U} = \frac{1}{M},$$

где  $\Delta t$  – время, за которое тело прошло расстояние  $M_1 M$ ;  $M = U/c_0$  – **число Маха**.

Угол  $\alpha$  называется **углом Маха**, а поверхность конуса – **конусом Маха**.

# Энергия звуковых колебаний

## Закон сохранения энергии идеального газа

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left( \varepsilon + \frac{v^2}{2} \right) + \operatorname{div} \rho \vec{v} \left( \varepsilon + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0.$$

## Энергия единицы объёма

Разложение полной энергии единицы объёма покоящейся сплошной среды относительно состояния  $\rho_0, \varepsilon_0$  при её малых возмущениях

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon'$$

до второго порядка малости имеет вид

$$E = \rho \varepsilon + \frac{\rho v^2}{2} \approx \rho_0 \varepsilon_0 + \rho' \left. \frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} + \frac{\rho'^2}{2} \left. \frac{\partial^2(\rho \varepsilon)}{\partial \rho^2} \right|_{\rho=\rho_0} + \frac{\rho_0 v^2}{2}.$$

# Энергия звуковых колебаний

Термодинамические соотношения  
Т.к.

$$d\varepsilon = TdS - pdV = TdS + \frac{p}{\rho^2}d\rho \quad \text{или} \quad dw = TdS + \frac{dp}{\rho},$$

где  $w = \varepsilon + p/\rho$  – энталпия, то

$$\left( \frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho} \right)_S = \varepsilon + \frac{p}{\rho} = w,$$

# Энергия звуковых колебаний

Термодинамические соотношения  
Т.к.

$$d\varepsilon = TdS - pdV = TdS + \frac{p}{\rho^2}d\rho \quad \text{или} \quad dw = TdS + \frac{dp}{\rho},$$

где  $w = \varepsilon + p/\rho$  – энталпия, то

$$\left( \frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho} \right)_S = \varepsilon + \frac{p}{\rho} = w,$$

$$\left( \frac{\partial^2(\rho\varepsilon)}{\partial\rho^2} \right)_S = \left( \frac{\partial w}{\partial\rho} \right)_S = \left( \frac{\partial w}{\partial p} \right)_S \left( \frac{\partial p}{\partial\rho} \right)_S = \frac{c^2}{\rho}.$$

# Энергия звуковых колебаний

Полная энергия единицы объёма сплошной среды

$$E \approx \rho_0 \varepsilon_0 + w_0 \rho' + \frac{c_0^2}{2\rho_0} \rho'^2 + \rho_0 \frac{v^2}{2},$$

# Энергия звуковых колебаний

Полная энергия единицы объёма сплошной среды

$$E \approx \rho_0 \varepsilon_0 + w_0 \rho' + \frac{c_0^2}{2\rho_0} \rho'^2 + \rho_0 \frac{v^2}{2},$$

где

- 1)  $\rho_0 \varepsilon_0$  – энергия единицы объёма неподвижной среды;

# Энергия звуковых колебаний

Полная энергия единицы объёма сплошной среды

$$E \approx \rho_0 \varepsilon_0 + w_0 \rho' + \frac{c_0^2}{2\rho_0} \rho'^2 + \rho_0 \frac{v^2}{2},$$

где

- 1)  $\rho_0 \varepsilon_0$  – энергия единицы объёма неподвижной среды;
- 2)  $w_0 \rho'$  – изменение энергии, связанное с изменением количества вещества (массы).

# Энергия звуковых колебаний

Полная энергия единицы объёма сплошной среды

$$E \approx \rho_0 \varepsilon_0 + w_0 \rho' + \frac{c_0^2}{2\rho_0} \rho'^2 + \rho_0 \frac{v^2}{2},$$

где

- 1)  $\rho_0 \varepsilon_0$  – энергия единицы объёма неподвижной среды;
- 2)  $w_0 \rho'$  – изменение энергии, связанное с изменением количества вещества (массы).

Плотность звуковой энергии

$$E_s = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{c_0^2 \rho'^2}{2\rho_0}.$$

# Энергия звуковых колебаний

Полная энергия единицы объёма сплошной среды

$$E \approx \rho_0 \varepsilon_0 + w_0 \rho' + \frac{c_0^2}{2\rho_0} \rho'^2 + \rho_0 \frac{v^2}{2},$$

где

- 1)  $\rho_0 \varepsilon_0$  – энергия единицы объёма неподвижной среды;
- 2)  $w_0 \rho'$  – изменение энергии, связанное с изменением количества вещества (массы).

Плотность звуковой энергии

$$E_s = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{c_0^2 \rho'^2}{2\rho_0}.$$

В случае плоских волн  $\rho' = \rho_0 v / c_0$

$$E_s = \rho_0 v^2.$$

# Плотность потока энергии звуковых колебаний

## Плотность потока энергии

Линеаризация плотности потока покоящегося идеального газа около состояния

$$w = w_0 + w', \quad p = p_0 + p'$$

имеет вид

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \left( \varepsilon + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = \rho \vec{v} \left( \frac{v^2}{2} + w \right) \approx w_0 \rho \vec{v} + \rho w' \vec{v}.$$

## Плотность потока энергии звуковых колебаний

С точностью до первого порядка малости  $w' = \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_S p' = \frac{p'}{\rho}$ , отсюда

$$\vec{j} \approx w_0 \rho \vec{v} + p' \vec{v},$$

## Плотность потока энергии звуковых колебаний

С точностью до первого порядка малости  $w' = \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_S p' = \frac{p'}{\rho}$ , отсюда

$$\vec{j} \approx w_0 \rho \vec{v} + p' \vec{v},$$

где слагаемое  $w_0 \rho \vec{v}$  отвечает за плотность потока энергии, связанного с движением массы.

## Плотность потока энергии звуковых колебаний

С точностью до первого порядка малости  $w' = \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_S p' = \frac{p'}{\rho}$ , отсюда

$$\vec{j} \approx w_0 \rho \vec{v} + p' \vec{v},$$

где слагаемое  $w_0 \rho \vec{v}$  отвечает за плотность потока энергии, связанного с движением массы.

## Плотность потока энергии звуковых колебаний

$$\vec{j}_s = p' \vec{v}.$$

## Плотность потока энергии звуковых колебаний

С точностью до первого порядка малости  $w' = \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_S p' = \frac{p'}{\rho}$ , отсюда

$$\vec{j} \approx w_0 \rho \vec{v} + p' \vec{v},$$

где слагаемое  $w_0 \rho \vec{v}$  отвечает за плотность потока энергии, связанного с движением массы.

## Плотность потока энергии звуковых колебаний

$$\vec{j}_s = p' \vec{v}.$$

### Плоская волна

Учитывая соотношение для плоской волны  $p' = c_0 \rho_0 v$ ,

$$\vec{j}_s = c_0 \rho_0 v^2 \vec{n} = c_0 E_s \vec{n},$$

где  $\vec{n}$  – вектор направления движения волны,  $E_s$  – энергия плоской звуковой волны.

# Уравнение сохранения энергии для звуковых колебаний

$$\frac{\partial E_s}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_s = 0,$$

где

$$E_s = \frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{c_0^2 \rho'^2}{2\rho_0},$$

$$\vec{j}_s = p' \vec{v}.$$

# Литература

- *Л.И. Седов.* Механика сплошной среды. Том 2. М.:Наука, 1970.