# Течения вязкой жидкости

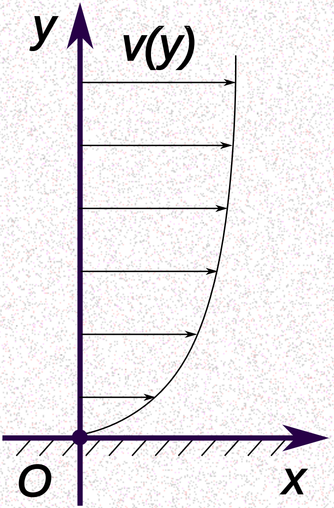
*Верещагин Антон Сергеевич*
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики ФФ НГУ

18 февраля 2019 г.

# Аннотация

# Понятие вязкой жидкости

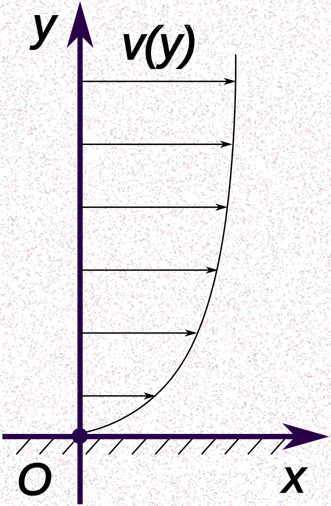



Касательная сила, действующая на стенку

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} = \rho\nu \frac{dv}{dy},$$

здесь $\mu = \rho\nu$ – коэффициент динамической вязкости; $\nu$ – коэффициент кинематической вязкости; $\rho$ – плотность.

# Понятие вязкой жидкости




Касательная сила, действующая на стенку

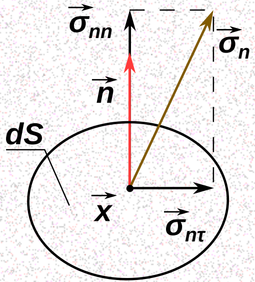
$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} = \rho\nu \frac{dv}{dy},$$

здесь $\mu = \rho\nu$ – коэффициент динамической вязкости; $\nu$ – коэффициент кинематической вязкости; $\rho$ – плотность.

Размерность коэффициентов вязкости

$$[\mu] = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}, \quad [\nu] = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

# Тензор напряжений вязкой несжимаемой жидкости




Разложение напряжения, возникающего в сплошной среде, на тангенциальную и нормальную составляющие

## Связь тензора напряжения и тензора скоростей деформации

$$\sigma = -pI + 2\mu e,$$

где $p$ – давление; $I$ – единичный тензор; $e$ – тензор скоростей деформаций, задаваемый соотношением

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right);$$

$v_i$ – компоненты вектора скорости ($i = \overline{1, n}$).

# Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости

## Уравнения Навье-Стокса

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{f},$$

$$c_V \left( \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) T \right) = \frac{\kappa}{\rho} \Delta T + \frac{2\mu}{\rho} e_{ij} e_{ij},$$

Неизвестные функции, определённые и дифференцируемые в некоторой области пространства: $\vec{v}(t, \vec{x})$ – вектор скорости; $p(t, \vec{x})$ – давление; $T(t, \vec{x})$ – температура.

Константы: $\rho$ – плотность; $\nu$ – коэффициент кинематической вязкости; $\kappa$ – коэффициент температуропроводности; $e_{ij}$ – компоненты тензора скоростей деформации; $\vec{f}$ – вектор внешних сил.

# Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости

Система уравнений разбивается на две подсистемы:

Уравнения Навье-Стокса

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{v} + \vec{f}.$$

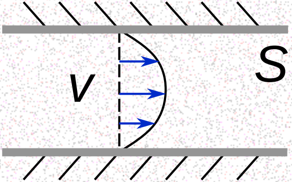
Закон динамики температуры

$$c_V\left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)T\right) = \frac{\kappa}{\rho}\Delta T + \frac{2\mu}{\rho}e_{ij}e_{ij}.$$

Решив уравнения Навье-Стокса мы найдём распределение скорости и давления. Зная распределение скорости, из второй части, находится распределение температуры. Дальше будет рассматриваться только первая часть системы.

# Граничные условия для уравнения Навье-Стокса

## Условия на неподвижной границе

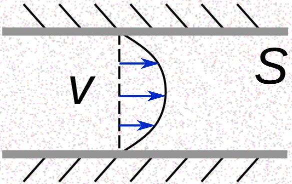



Кинематическое условие:

$$\vec{v}|_S = 0.$$

# Граничные условия для уравнения Навье-Стокса

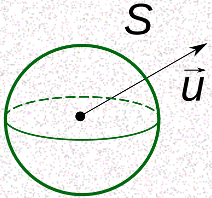
Условия на неподвижной границе




Кинематическое условие:

$$\vec{v}|_S = 0.$$

Условие на подвижной границе

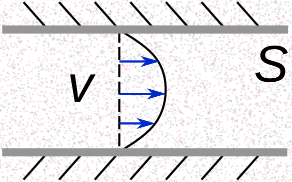



Кинематическое условие:

$$\vec{v}|_S = \vec{u}.$$

# Граничные условия для уравнения Навье-Стокса

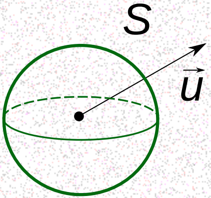
Условия на неподвижной границе




Кинематическое условие:

$$\vec{v}|_S = 0.$$

Условие на подвижной границе



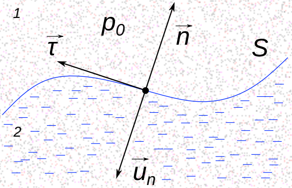

Кинематическое условие:

$$\vec{v}|_S = \vec{u}.$$

Такого вида граничные условия называются условиями «прилипания».

# Граничные условия для уравнения Навье-Стокса

## Условия на свободной границе




1 – воздух (газ); 2 – вязкая жидкость

Кинематическое условие:

$$v_n|_S = u_n.$$

Динамические условия:

$$\vec{n} \cdot \sigma|_S = p|_S = p_0,$$

$$\vec{\tau} \cdot \sigma|_S = 0.$$

# Уравнения Навье-Стокса в декартовой системе координат

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right).$$

# Литература


- *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.:Гос. издат. физ.-мат. лит., 1963.
- *Валландер С. В.* Лекции по аэрогидромеханике. Учеб. пособие. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1978.