

Общая теория движения жидких и газообразных сред

Верещагин Антон Сергеевич
д-р. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрофизики и газовой динамики



4 декабря 2024 г.

Баротропные течения. Функция давления. Форма Громеки – Лэмба для уравнения движения. Уравнения динамической возможности движения. Интегралы Бернулли и Коши и условия их существования. Кинетическая энергия безвихревого течения. Теорема Томсона.

Модель баротропного течения идеального газа

Основные уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f},$$

где ρ, p, \vec{v} – плотность, давление и скорость среды, заданные в эйлеровой системе координат (x, y, z) ; \vec{f} – вектор объемных сил.

Определение

Течение называется **баротропным**, если между плотностью и давлением имеет место соотношение

$$p = p(\rho).$$

Примеры баротропных течений

1) изотермические течения:

$$p = \rho RT, \quad T = \text{const},$$

где R – газовая постоянная; T – заданная температура;

2) изоэнтропические течения политропного газа:

$$p = A(S)\rho^\gamma, \quad S = \text{const},$$

где S – энтропия; $\gamma = C_p/C_V$ – показатель политропы;

3) идеальная жидкость:

$$\rho = \text{const}.$$

Преобразование конвективной части закона движения

Предпосылки

Из формулы

$$\text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} + (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + \vec{b} \times \text{rot } \vec{a} + \vec{a} \times \text{rot } \vec{b}$$

следует, что

$$\text{grad} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) = (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \vec{v} \times \text{rot } \vec{v}.$$

Модификация уравнений

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) + \text{rot } \vec{v} \times \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

Функция давления $\mathcal{P}(p)$

Определение

Для баротропного течения, если существует $\rho = \rho(p)$, то определим:

$$\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}.$$

Свойство

Используя соотношения, аналогичные

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{P}(p) = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

получим:

$$\text{grad } \mathcal{P}(p) = \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

Форма Громеки – Лэмба уравнения движения

Основные уравнения

Используя преобразование конвективной составляющей уравнения движения и введенную функцию давления, получим уравнения движения в форме Громеки – Лэмба:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } E + \vec{\Omega} \times \vec{v} = 0,$$

где

$$E = \frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P} + \Pi, \quad \vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v}.$$

Здесь Π – потенциал массовых сил $\vec{f} = -\text{grad } \Pi$.

Определение

E – полная приведенная механическая энергия системы, $\vec{\Omega}$ – вектор вихря.

Уравнение динамической возможности движения

Из уравнения в форме Громеки – Лэмба следует, что

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} = -\text{grad } E,$$

поэтому

$$\text{rot} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} \right) = 0.$$

Зная разложение для ротора векторного произведения

$$\text{rot}(\vec{\Omega} \times \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\Omega} - (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{v} + \vec{\Omega} \text{div } \vec{v} - \vec{v} \text{div } \vec{\Omega},$$

получим, используя полную производную, **уравнение динамической возможности движения**:

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = (\vec{\Omega} \cdot \nabla) \vec{v} - \vec{\Omega} \text{div } \vec{v}.$$

Постоянство E вдоль линий тока и вихревых линий

Пусть $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$, тогда, умножив уравнение движения в форме Громеки – Лэмба скалярно на вектор скорости \vec{v} , получим:

$$\vec{v} \cdot \text{grad } E + \vec{v} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = 0.$$

Второе слагаемое равно нулю в силу определения векторного произведения, а первое является производной от E вдоль линии тока $\vec{r} = \vec{r}(s)$ таких, что $\frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = \vec{v}$:

$$\text{grad } E \cdot \vec{v} = \text{grad } E \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} = \frac{\partial E}{\partial s} = 0.$$

Аналогично умножая уравнение движения скалярно на вектор $\vec{\Omega}$, можно показать, что функция E постоянна вдоль вихревых линий.

Интеграл Бернулли для баротропного стационарного течения идеального газа

Условия существования

$$p = p(\rho), \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0.$$

Интеграл Бернулли

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P}(p) + \Pi = C(L),$$

где $C(L)$ – константа вдоль линии тока или вихревой линии;
 $\mathcal{P}(p)$ – функция давления; Π – потенциал объемных сил.

$$\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}, \quad \vec{f} = -\nabla \Pi.$$

Существование интеграла Бернулли во всей исследуемой области

Пусть в исследуемой области $\vec{\Omega} \times \vec{v} = \vec{0}$ и движение стационарно, тогда автоматически выполняется условие

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + \mathcal{P}(p) + \Pi = const$$

во всей области.

$$\vec{\Omega} \times \vec{v} = \vec{0}$$

- $\vec{v} = 0$ – покоящееся течение (гидростатика);
- $\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v} = \vec{0}$ – безвихревое, или потенциальное, течение;
- $\vec{\Omega} \parallel \vec{v}$ – вихревые линии совпадают с линиями тока (винтовое течение).

Баротропное безвихревое течение

Определение

Течение называется **безвихревым**, или **потенциальным**, если

$$\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{v} = \vec{0}$$

или

$$\vec{v} = \nabla \varphi,$$

где $\varphi(\vec{x})$ – потенциал скорости.

Уравнение движения в форме Громеки – Лэмба для потенциального течения

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} + \mathcal{P} + \Pi \right) = 0$$

Слагаемое $\vec{\Omega} \times \vec{v} = 0$ в силу того, что $\vec{\Omega} = \vec{0}$.

Интеграл Коши для баротропного потенциального течения идеального газа

Условия существования

$$p = p(\rho), \quad \vec{v} = \nabla \varphi.$$

Интеграл Коши

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} + \mathcal{P} + \Pi = F(t),$$

где $F(t)$ – постоянная функция во всей области, различающаяся в разные моменты времени; $\mathcal{P}(p)$ – функция давления; Π – потенциал объемных сил;

$$\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}, \quad \vec{f} = -\nabla \Pi.$$

Кинетическая энергия безвихревого стационарного течения идеальной жидкости

Определение

Рассмотрим ограниченный односвязный объем ω , в котором реализуется потенциальное течение с потенциалом φ идеальной жидкости ($\rho = \text{const}$). Тогда кинетическая энергия этого объема будет задаваться формулой

$$T = \frac{1}{2} \int_{\omega} \rho \vec{v}^2 d\omega = \frac{1}{2} \rho \int_{\omega} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\omega.$$

Кинетическая энергия безвихревого стационарного течения идеальной жидкости

Формула Грина

$$\int_{\omega} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi'}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right) d\omega = - \int_S \varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial n} dS - \\ - \int_{\omega} \varphi \left(\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} \right) d\omega,$$

где S – поверхность ω ; \vec{n} – вектор внешней единичной нормали.

Уравнение неразрывности

Подставляя в уравнение неразрывности $\vec{v} = \nabla \varphi$ и $\rho = \text{const}$, получим:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Кинетическая энергия безвихревого стационарного течения идеальной жидкости

Кинетическая энергия

Используя формулу Грина и уравнение неразрывности, получим:

$$T = -\frac{1}{2}\rho \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS.$$

Таким образом, кинетическая энергия объема зависит только от значений потенциала и его производной на границе. Если на границе реализуется условие непротекания $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ или потенциал постоянен (а он определяется с точностью до константы), то жидкость внутри односвязного объема покоится.

Теорема

Кинетическая энергия несжимаемой жидкости, движущейся в односвязном объеме с потенциалом скоростей, меньше кинетической энергии во всяком другом движении, при котором на границах объема жидкость обладает движением, одинаковым с безвихревым, внутри же обладает вихрями.

Теорема Томсона

Математическая формулировка

Рассмотрим два стационарных течения идеальной жидкости с плотностью ρ , одно – безвихревое с потенциалом φ , другое – непотенциальное со скоростью \vec{v} . Рассмотрим односвязный объем ω с границей S такой, что на нем выполняется условие равенства нормальных скоростей:

$$\vec{v} \cdot \vec{n}|_S = \nabla \varphi \cdot \vec{n}|_S,$$

где \vec{n} – вектор внешней единичной нормали к S . Тогда

$$T' > T,$$

где T, T' – кинетическая энергия объема ω для потенциального и вихревого течений соответственно.

Теорема Томсона: доказательство

Рассмотрим разность:

$$\begin{aligned} T' - T &= \frac{1}{2}\rho \int_{\omega} \vec{v}^2 d\omega - \frac{1}{2}\rho \int_{\omega} (\nabla\varphi)^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{2}\rho \int_{\omega} 2 \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} \left(v_x - \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \left(v_y - \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \left(v_z - \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \right] d\omega + \\ &\quad + \frac{1}{2}\rho \int_{\omega} \left[\left(v_x - \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(v_y - \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(v_z - \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\omega. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно первое слагаемое.

Теорема Томсона: доказательство

В силу того, что жидкость несжимаемая и справедливы уравнения неразрывности

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \Delta \varphi = 0,$$

то

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(v_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(v_y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(v_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] d\omega = \\ = \int_{\omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi \left(v_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi \left(v_y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left[\varphi \left(v_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] \right\} d\omega. \end{aligned}$$

Теорема Томсона: доказательство

В силу теоремы Гаусса – Остроградского:

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi \left(v_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi \left(v_y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left[\varphi \left(v_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right] \right\} d\omega = \\ & = \int_S \varphi \left[\left(v_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) n_1 + \left(v_y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) n_2 + \left(v_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) n_3 \right] dS, \end{aligned}$$

где $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – вектор внешней единичной нормали к S . И это выражение **равно 0** из-за равенства нормальных составляющих скоростей на S (по условию теоремы).

Теорема Томсона: доказательство

Таким образом,

$$T' - T = \frac{1}{2}\rho \int_{\omega} \left[\left(v_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(v_y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(v_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] d\omega$$

и

$$T' - T > 0,$$

если скорость \vec{v} хоть в одной точке не совпадает с потенциалом $\nabla \varphi$. Что и требовалось доказать.

1. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.:Гос. издат. физ.-мат. лит., 1963.
2. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газ: Учеб. для вузов. – 7-е изд., испр. М.:Дрофа, 2003.