Силы, действующие на сплошную среду, тензор напряжений

Верещагин Антон Сергеевич
д-р. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрофизики и газовой динамики

9 октября 2024 г.

Аннотация

Объемные и массовые силы. Поверхностные силы. Тензор напряжений Коши. Разложение напряжения на составляющие. Главные напряжения и оси тензора напряжений.

Объемные и массовые силы

Определение

Силы, действующие на каждый элемент объема $d\omega$ независимо от того, существуют ли рядом с объемом $d\omega$ другие частицы или нет, называются объемными. Если такие силы отнесены к единице массы, то они называются массовыми.

Объемные и массовые силы

Определение

Силы, действующие на каждый элемент объема $d\omega$ независимо от того, существуют ли рядом с объемом $d\omega$ другие частицы или нет, называются объемными. Если такие силы отнесены к единице массы, то они называются массовыми.

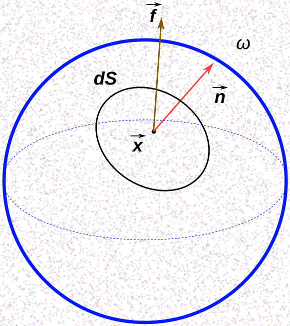
Пример

Объемная сила, действующая на частицу среды в поле силы тяжести, определяется соотношением:

$$d\vec{F} = \rho\vec{g}d\omega,$$

где ρ – плотность жидкой частицы; $\vec{g}$ – вектор ускорения свободного падения.

Поверхностные силы

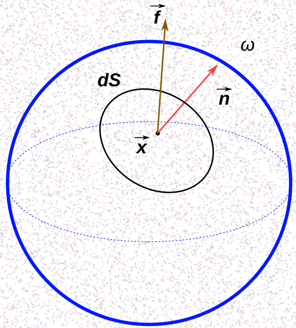


Выделенный объем сплошной среды ω с фиксированной точкой $\vec{x}$ внутри него и элементарной площадкой dS с единичной нормалью $\vec{n}$

Определение

Напряжением поверхностной силы $\vec{f}$ называется величина силы, отнесенная к элементарной площадке dS с единичной нормалью $\vec{n}$, возникающая в результате взаимодействия частей среды с разных сторон от элементарной площадки в малой окрестности точки $\vec{x}$.

Поверхностные силы

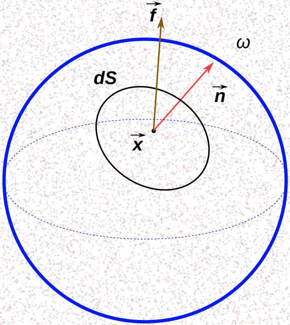


Выделенный объем сплошной среды ω, с фиксированной точкой $\vec{x}$ внутри него и элементарной площадкой dS с единичной нормалью $\vec{n}$

Замечания

1) поверхностная сила существует в каждой точке среды (как на поверхности, так и на границе);
2) поверхностная сила является функцией точки среды $\vec{x}$ и ориентации площадки $\vec{n}$:
$$\vec{f} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{n});$$
3) считаем, что $\vec{n}$ – вектор внешней единичной нормали;

Поверхностные силы



Выделенный объем сплошной среды ω с фиксированной точкой $\vec{x}$ внутри него и элементарной площадкой dS с единичной нормалью $\vec{n}$

Замечания

4) для определения суммарной силы, действующей на объем ω, ограниченный поверхностью S, необходимо проинтегрировать $\vec{f}(\vec{x},\vec{n}(\vec{x}))$ по этой поверхности:

$$\vec{F} = \int\limits_S \vec{f}(\vec{x},\vec{n}(\vec{x}))dS.$$

Принцип равенства действий и противодействий

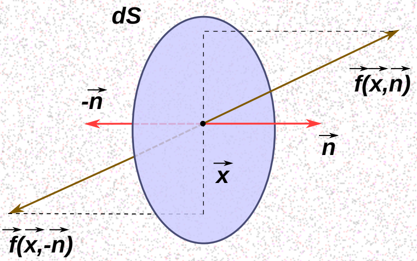
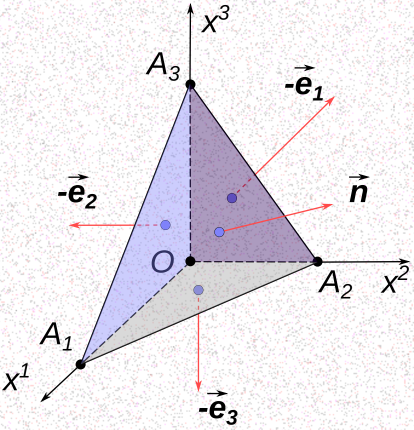


Иллюстрация равенства напряжения на противоположных направлениях

Рассмотрим напряжения, возникающие в точке $\vec{x}$ на площадке с единичной нормалью $\vec{n}$ и ей противоположной, и вследствие принципа равенства действия и противодействия получим:

$$\vec{f}(\vec{x},\vec{n}) = -\vec{f}(\vec{x}, -\vec{n}).$$

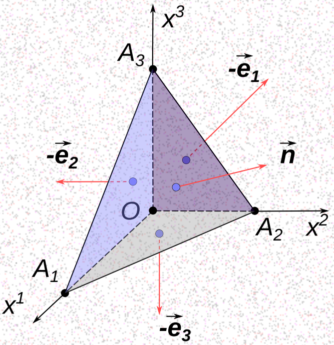
Тензор напряжений



Выделим в сплошной среде в окрестности точки O тетраэдр $OA_1A_2A_3$, у которого ребра OA_1, OA_2, OA_3 направлены вдоль координатных линий x_1, x_2, x_3, а грань $A_1A_2A_3$ перпендикулярна единичному вектору:

$$\vec{n} = n^1\vec{e}_1 + n^2\vec{e}_2 + n^3\vec{e}_3,$$

$$|\vec{n}| = 1.$$



Площади граней

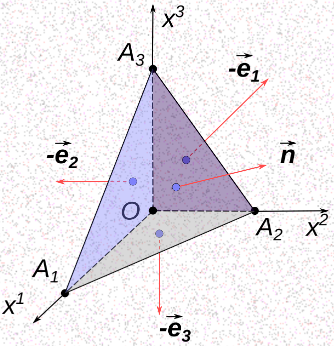
$$
\begin{aligned}
S_1 &= S_n \cos(\vec{n},\vec{e}_1) = S_n n^1,\\
S_2 &= S_n \cos(\vec{n},\vec{e}_2) = S_n n^2,\\
S_3 &= S_n \cos(\vec{n},\vec{e}_3) = S_n n^3,
\end{aligned}
$$

где S_i, S_n – площади граней, ортогональных $\vec{e}_i$ $(i = 1,2,3)$ и $\vec{n}$.

Объем тетраэдра

$$V = 1/3 S_n h,$$

где h – длина перпендикуляра, опущенного из точки O на грань $A_1A_2A_3$.



Уравнения равновесия поверхностных сил в точке

$$\int_V \vec{\Phi} dV + \int_S \vec{f}(\vec{x},\vec{n}(\vec{x}))dS = 0$$

$$(\vec{\Phi} = \rho(\vec{F} - \vec{a})),$$

где $\vec{\Phi}$ – отнесенная к единице объема сумма внешних объемных сил $\vec{F}$ и сил инерции из-за ускорения $\vec{a}$ – материальных точек.

Оценка объемного интеграла для уравнения равновесия

По теореме о среднем:

$$\int\limits_V \vec{\Phi} dV = \vec{\Phi}(M)V = \frac{1}{3}\vec{\Phi}(M)S_n h,$$

где M – точка внутри тетраэдра; V – объем тетраэдра.

Разложение

Используя принцип равенства действий и противодействий, имеем:

$$\int\limits_S \vec{f}(\vec{x},\vec{n}(\vec{x}))dS = \int\limits_{S_1} \vec{f}(\vec{x},-\vec{e}_1)dS + \int\limits_{S_2} \vec{f}(\vec{x},-\vec{e}_2)dS + \int\limits_{S_3} \vec{f}(\vec{x},-\vec{e}_3)dS +$$

$$+ \int\limits_{S_n} \vec{f}(\vec{x},\vec{n})dS =$$

Разложение

Используя принцип равенства действий и противодействий, имеем:

$$\int\limits_{S} \vec{f}(\vec{x},\vec{n}(\vec{x}))dS = \int\limits_{S_1} \vec{f}(\vec{x},-\vec{e}_1)dS + \int\limits_{S_2} \vec{f}(\vec{x},-\vec{e}_2)dS + \int\limits_{S_3} \vec{f}(\vec{x},-\vec{e}_3)dS +$$

$$+\int\limits_{S_n} \vec{f}(\vec{x},\vec{n})dS = -\int\limits_{S_1} \vec{f}(\vec{x},\vec{e}_1)dS - \int\limits_{S_2} \vec{f}(\vec{x},\vec{e}_2)dS - \int\limits_{S_3} \vec{f}(\vec{x},\vec{e}_3)dS +$$

$$+\int\limits_{S_n} \vec{f}(\vec{x},\vec{n})dS =$$

Оценка поверхностного интеграла

По теореме о среднем для поверхностного интеграла существуют точки M_i и M_n на поверхностях S_i $(i = 1,2,3)$ и S_n такие, что

$$= -S_1\vec{f}(M_1,\vec{e}_1) - S_2\vec{f}(M_2,\vec{e}_2) - S_3\vec{f}(M_3,\vec{e}_3) + S_n\vec{f}(M_n,\vec{n}) =$$

Оценка поверхностного интеграла

По теореме о среднем для поверхностного интеграла существуют точки M_i и M_n на поверхностях S_i $(i = 1,2,3)$ и S_n такие, что

$$= -S_1\vec{f}(M_1,\vec{e}_1) - S_2\vec{f}(M_2,\vec{e}_2) - S_3\vec{f}(M_3,\vec{e}_3) + S_n\vec{f}(M_n,\vec{n}) =$$

Используя связь площадей боковых граней пирамиды тетраэдра и ее основания, получаем:

$$= -S_n(\vec{f}(M_1,\vec{e}_1)n^1 + \vec{f}(M_2,\vec{e}_2)n^2 + \vec{f}(M_3,\vec{e}_3)n^3 - \vec{f}(M_n,\vec{n})).$$

Формула для напряжения на произвольной площадке

Таким образом, сокращая на S_n, имеем:

$$-\frac{1}{3}\vec{\Phi}(M)h = \vec{f}(M_1,\vec{e}_1)n^1 + \vec{f}(M_2,\vec{e}_2)n^2 + \vec{f}(M_3,\vec{e}_3)n^3 - \vec{f}(M_n,\vec{n}).$$

Формула для напряжения на произвольной площадке

Таким образом, сокращая на S_n, имеем:

$$-\frac{1}{3}\vec{\Phi}(M)h = \vec{f}(M_1,\vec{e}_1)n^1 + \vec{f}(M_2,\vec{e}_2)n^2 + \vec{f}(M_3,\vec{e}_3)n^3 - \vec{f}(M_n,\vec{n}).$$

При $h \to 0$ точки $M_i \to O$, $M_n \to O$, $M \to O$, при этом левая часть равенства стремится к 0.

Формула для напряжения на произвольной площадке

Таким образом, сокращая на S_n, имеем:

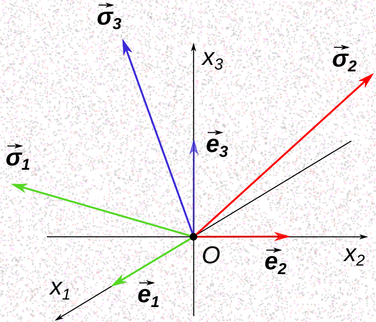
$$-\frac{1}{3}\vec{\Phi}(M)h = \vec{f}(M_1,\vec{e}_1)n^1 + \vec{f}(M_2,\vec{e}_2)n^2 + \vec{f}(M_3,\vec{e}_3)n^3 - \vec{f}(M_n,\vec{n}).$$

При $h \to 0$ точки $M_i \to O$, $M_n \to O$, $M \to O$, при этом левая часть равенства стремится к 0.

Таким образом, для произвольной точки O:

$$\vec{f}(O,\vec{n}) = \vec{f}(O,\vec{e}_1)n^1 + \vec{f}(O,\vec{e}_2)n^2 + \vec{f}(O,\vec{e}_3)n^3.$$

Тензор напряжений



Напряжение в точке $\vec{x}$ на площадке, перпендикулярной $\vec{n}$, вычисляется по формуле:

$$\vec{f}(\vec{x},\vec{n}) = \vec{\sigma}_n(\vec{x}) = n^i\vec{\sigma}_i(\vec{x}) = n^i\sigma_i^j(\vec{x})\vec{e}_j,$$

$$|\vec{n}| = 1.$$

Обозначения

$$\begin{aligned}
\vec{f}(\vec{x},\vec{e}_1) &= \sigma_1^1(\vec{x})\vec{e}_1 + \sigma_1^2(\vec{x})\vec{e}_2 + \sigma_1^3(\vec{x})\vec{e}_3 = \vec{\sigma}_1(\vec{x}),\\
\vec{f}(\vec{x},\vec{e}_2) &= \sigma_2^1(\vec{x})\vec{e}_1 + \sigma_2^2(\vec{x})\vec{e}_2 + \sigma_2^3(\vec{x})\vec{e}_3 = \vec{\sigma}_2(\vec{x}),\\
\vec{f}(\vec{x},\vec{e}_3) &= \sigma_3^1(\vec{x})\vec{e}_1 + \sigma_3^2(\vec{x})\vec{e}_2 + \sigma_3^3(\vec{x})\vec{e}_3 = \vec{\sigma}_3(\vec{x}).
\end{aligned}$$

Определение нового базиса

Рассмотрим новый базис $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ в заданной точке такой, что

$$\vec{e}_i = \alpha_i^j \vec{g}_j, \quad \vec{g}_l = \beta_l^j \vec{e}_j,$$

где α_i^j, β_j^l – матрицы перехода между базисами, причем $|\alpha_i^j| \neq 0$, $|\beta_j^l| \neq 0$ и $\alpha_i^j \beta_j^l = \delta_i^l$.

Формулы перехода

$$\vec{n} = \bar{n}^i \vec{g}_i = \bar{n}_i \beta_i^k \vec{e}_k = n^k \vec{e}_k$$

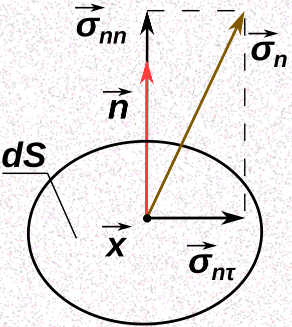
Следовательно, $n^k = \bar{n}^i \beta_i^k$.

Тогда

$$\vec{\sigma}_n = n^i \sigma_i^j \vec{e}_j = \bar{n}^k \beta_k^i \sigma_i^j \alpha_j^l \vec{g}_l = \bar{n}^k \bar{\sigma}_k^l \vec{g}_l,$$

где $\bar{\sigma}_k^l = \beta_k^i \alpha_j^l \sigma_i^j$. Такое преобразование компонентов матрицы σ_{ij} является признаком смешанного тензора 2-го ранга.

Разложение напряжения



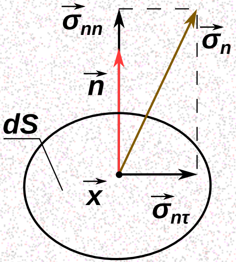
Разложение напряжения на нормальную и тангенциальную составляющие

Напряжение в точке $\vec{x}$, возникающее на площадке dS с единичной нормалью $\vec{n}$, можно представить в виде суммы нормальной $\vec{f}_n$ и тангенциальной составляющих $\vec{f}_\tau$:

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_{nn} + \vec{\sigma}_{n\tau}.$$

В этом случае $\vec{\sigma}_{nn}$ называется нормальным растяжением, или нормальным давлением. $\vec{\sigma}_{n\tau}$ называют косым напряжением, или силой трения.

Выражения для нормальной и тангенциальной составляющих



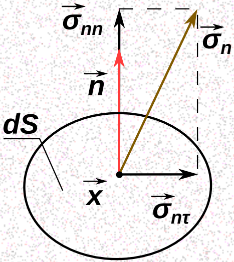
Разложение напряжения на нормальную и тангенциальную составляющие

Нормальная составляющая

$$\sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{n} = (n^i \sigma_i^j \vec{e}_j) \cdot (n^k \vec{e}_k) =$$

$$= n^i n^k \sigma_i^j (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k) = n^i n^k \sigma_{ik}$$

Выражения для нормальной и тангенциальной составляющих



Разложение напряжения на нормальную и тангенциальную составляющие

Нормальная составляющая

$$\sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{n} = (n^i \sigma_i^j \vec{e}_j) \cdot (n^k \vec{e}_k) =$$

$$= n^i n^k \sigma_i^j (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k) = n^i n^k \sigma_{ik}$$

Тангенциальная составляющая

$$\sigma_{n\tau}^2 = \sigma_n^2 - \sigma_{nn}^2 =$$

$$= (n^i \sigma_i^j \vec{e}_j) \cdot (n^k \sigma_k^l \vec{e}_l) - n^i n^j \sigma_{ij} n^k n^l \sigma_{kl} =$$

$$= n^i n^k \sigma_i^j \sigma_k^l (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_l) - n^i n^j n^k n^l \sigma_{ij} \sigma_{kl} =$$

$$= n^i n^k \sigma_{il} \sigma_{ks} g^{ls} - n^i n^j n^k n^l \sigma_{ij} \sigma_{kl} =$$

$$= n^i n^k \sigma_{il} \sigma_{ks} (g^{ls} - n^l n^s)$$

Главные напряжения, оси тензора напряжений

Допущение

Будем считать, что тензор напряжений симметричный (в дальнейшем это утверждение будет обосновано):

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

Теорема о разложении

Для тензора напряжений в каждой точке сплошной среды существует ортонормированная система координат, в которой он имеет диагональный вид, и имеются три направления, в которых действуют только нормальные напряжения.

Напряжение в системе координат главных осей

Пусть главные оси задаются ортонормированными векторами $\vec{g}_i$, а главные значения в этих осях тензора напряжений σ_i^j равны σ_l, тогда матрица перехода между ортонормированным базисом пространства $\vec{e}_j$ и введенным базисом будет ортогональная (обратная совпадает с транспонированной), т.е. $\alpha_i^j \alpha_j^k = \delta_i^k$, а контравариантные, ковариантные и смешанные компоненты тензора совпадают.

Напряжение на площадке с нормалью $\vec{n}$ имеет вид:

$$\vec{\sigma}_n = n^i \sigma_i^j \vec{e}_j = \bar{n}^k \bar{\sigma}_k^l \vec{g}_l = (\bar{n}^l \sigma_l) \vec{g}_l,$$

где $\bar{n}^k$ – координаты нормали в базисе $\vec{g}_k$; $\bar{\sigma}_k^l = \sigma_k \delta_k^l$ – тензор напряжений в главных осях.

Таким образом, учитывая, что $|\vec{n}| = 1$, из полученной формулы видим, что вдоль главных осей имеют место только растягивающие или сжимающие напряжения.

Инварианты тензора напряжений

Первый инвариант

$$I_1 = \operatorname{tr}\sigma = \sigma_1^1 + \sigma_2^2 + \sigma_3^3 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

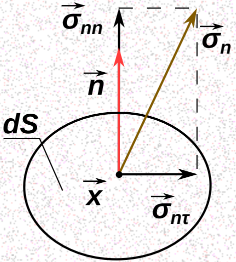
Второй инвариант

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^2 \\ \sigma_2^1 & \sigma_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^3 \\ \sigma_3^1 & \sigma_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_2^2 & \sigma_2^3 \\ \sigma_3^2 & \sigma_3^3 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3,$$

Третий инвариант

$$I_3 = \det\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^2 & \sigma_1^3 \\ \sigma_2^1 & \sigma_2^2 & \sigma_2^3 \\ \sigma_3^1 & \sigma_3^2 & \sigma_3^3 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

Нормальное, тангенциальное и полное напряжение в главных осях

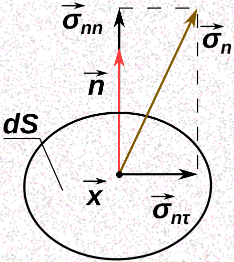


Разложение напряжения на нормальную и тангенциальную составляющие

Нормальная составляющая

$$\sigma_{nn} = n^i n^k \sigma_{ik} = (n^i)^2 \sigma_i$$

Нормальное, тангенциальное и полное напряжение в главных осях



Разложение напряжения на нормальную и тангенциальную составляющие

Нормальная составляющая

$$\sigma_{nn} = n^i n^k \sigma_{ik} = (n^i)^2 \sigma_i$$

Тангенциальная составляющая

$$\sigma_{n\tau}^2 = \sigma_n^2 - \sigma_{nn}^2 = n^i n^k \sigma_{il} \sigma_{ks} (g^{ls} - n^l n^s) =$$

$$= n^i n^k \sigma_i \sigma_k (\delta^{ik} - n^i n^k)$$

Полное напряжение

$$\vec{\sigma}_n^2 = (n^l \sigma_l \vec{g}_l) \cdot (n^k \sigma_k \vec{g}_k) = \sum_k (n^k \sigma_k)^2$$

Варианты напряженного состояния

Определение

Если все три главных напряжения не равны нулю, то такое напряженное состояние называется трехосным. Если одно из главных напряжений равно нулю, то такое напряженное состояние называется плоским, или двухосным. Если два главных напряжения равны нулю, то такое напряженное состояние называется одноосным.

Давление

Важной характеристикой тензора напряжений является давление, определяемое первым инвариантом тензора напряжений:

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = -\frac{1}{3}\sigma_{kk}.$$

Тензор напряжений часто записывают в виде суммы шаровой и девиаторной составляющих:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}.$$

Выражение для давления

$$\frac{p(\theta) - p_\infty}{\rho} = \frac{V^2}{2}\left(1 - \frac{9}{4}\sin^2\theta\right), \quad \sigma = -pI,$$

где $p(\theta)$ – давление жидкости на поверхности сферы; p_∞ – давление жидкости на бесконечности; V – скорость жидкости на бесконечности; ρ – плотность жидкости; θ – полярный угол в сферической системе координат.

Обтекание покоящейся сферы идеальной жидкостью

Выражение для давления

$$\frac{p(\theta) - p_\infty}{\rho} = \frac{V^2}{2}\left(1 - \frac{9}{4}\sin^2\theta\right), \quad \sigma = -pI,$$

где $p(\theta)$ – давление жидкости на поверхности сферы; p_∞ – давление жидкости на бесконечности; V – скорость жидкости на бесконечности; ρ – плотность жидкости; θ – полярный угол в сферической системе координат.

Парадокс Даламбера

$$\vec{F} = -\int\limits_S n^i \sigma_i^j \vec{e}_j \, dS = -\int\limits_S \left[\rho \frac{V^2}{2}\left(1 - \frac{9}{4}\sin^2\theta\right) + p_\infty\right] \vec{n} \, dS = 0.$$

Медленное обтекание покоящейся сферы вязкой жидкостью

Компоненты тензора напряжений на поверхности сферы

$$\sigma = -pI + 2\mu e,$$

где p – давление; μ – вязкость жидкости; e – тензор скоростей деформаций.

В сферической системе координат (r, θ, φ):

$$\sigma_{rr}|_{r=a} = \left(-p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}\right)_{r=a} = \frac{3}{2}\mu \frac{U}{a} \cos\theta, \quad \sigma_{\varphi r}|_{r=a} = \sigma_{r\varphi}|_{r=a} = 0,$$

$$\sigma_{\theta r}|_{r=a} = \sigma_{r\theta}|_{r=a} = \mu \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)_{r=a} = -\frac{3\mu U}{2a} \sin\theta,$$

где v_r, v_θ – радиальная и полярная составляющие скорости; a – радиус сферы; U – скорость жидкости на бесконечности; θ – полярный угол.

Медленное обтекание покоящейся сферы вязкой жидкостью

Формула Стокса

$$W = \vec{F}\cdot\vec{e}_z = -\int\limits_S (n^i\sigma_i^j\vec{e}_j)\cdot\vec{e}_z\,dS = \int\limits_S (\sigma_{rr}\cos\theta - \sigma_{r\theta}\sin\theta)dS =$$

$$= \int\limits_0^\pi (\sigma_{rr}\cos\theta - \sigma_{r\theta}\sin\theta)2\pi a^2\sin\theta d\theta = 3\pi\mu Ua\int\limits_0^\pi \sin\theta d\theta = 6\pi\mu Ua,$$

где $i,j \in \{r,\theta,\varphi\}$; $\vec{e}_z$ – единичный вектор, направленный по направлению течения.

Литература

Нигматулин Р.И. Механика сплошной среды. Кинематика. Динамика. Термодинамика. Статистическая динамика. М.:ГЭОТАР-Медиа, 2014.