# Законы сохранения механики сплошной среды

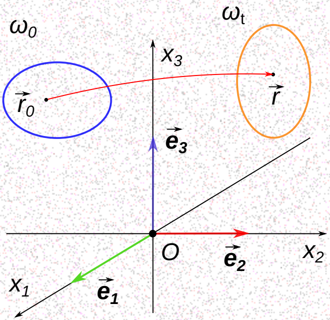
*Верещагин Антон Сергеевич*
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики ФФ НГУ

16 октября 2018 г.

# Аннотация

# Траектории движения точек и теорема об определителе




## Иллюстрация перемещения сплошной среды

$\omega_0$, $\omega_t$ – положение части сплошной среды в начальный момент времени и момент $t$.

$$\vec{r}_0 = \xi^1\vec{e}_1 + \xi^2\vec{e}_2 + \xi^3\vec{e}_3,$$

$$\vec{r} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3.$$

## Траектории движения

Пусть траектории движения жидких частиц задаются функцией

$$\vec{x} = \vec{x}(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3),$$

где $\vec{\xi}$, $\vec{x}$ – лагранжевы и эйлеровы координаты частицы.

# Определение траекторий по заданному полю движения

## Поле скоростей

Поле скоростей частиц сплошной среды в эйлеровой систем координат задаётся функцией $\vec{v}(t, x^1, x^2, x^3)$. В лагранжевой системе координат скорость определяется соотношением

$$\vec{v}(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3) = \frac{\partial \vec{x}(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3)}{\partial t}.$$

## Задача определения траекторий движения по заданному полю скоростей

По заданному полю скоростей $\vec{v}(t, x^1, x^2, x^3)$ требуется найти траектории движения частиц $x^i = x^i(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ с лагранжевыми координатами $(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$:

$$\frac{\partial x^i}{\partial t} = v^i(t, x^1, x^2, x^3), \quad x^i|_{t=0} = \xi^i \quad (i = 1, 2, 3).$$

# Уравнения для нахождения матрицы Якоби

## Матричное уравнение на матрицу Якоби

Дифференцируя уравнения для нахождения траекторий по $\xi^j$ получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^j}, \qquad \left.\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right|_{t=0} = \delta^i_j.$$

Тогда матрица Якоби $y_{ij} = \dfrac{\partial x^i}{\partial \xi^j}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = AY, \qquad Y|_{t=0} = E,$$

где $A$ – матрица, составленная из производных $\dfrac{\partial v^i}{\partial x^j}$, $E$ – единичная матрица.

# Дифференцирование определителя матрицы Якоби

Обозначим $\Delta(t) = \det Y(t)$, тогда из определения определителя, как суммы произведений его элементов и правила дифференцирования произведения, имеем

$$\Delta'(t) = \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y'_{11} & y'_{12} & y'_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y'_{21} & y'_{22} & y'_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y'_{31} & y'_{32} & y'_{33} \end{vmatrix}.$$

# Дифференцирование определителя матрицы Якоби

Из матричного уравнения $\dfrac{dY}{dt} = AY$ следует, что

$$y'_{1j} = a_{11}y_{1j} + a_{12}y_{2j} + a_{13}y_{3j},$$

поэтому

$$(y'_{11}, y'_{12}, y'_{13}) = a_{11}(y_{11}, y_{12}, y_{13}) + a_{12}(y_{21}, y_{22}, y_{23}) + a_{13}(y_{31}, y_{32}, y_{33}).$$

Отсюда, вычитая из первой строки с производными линейную комбинацию остальных строк, имеем

$$\begin{vmatrix} y'_{11} & y'_{12} & y'_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}y_{11} & a_{11}y_{12} & a_{11}y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\Delta(t).$$

# Дифференцирование определителя матрицы Якоби

По аналогии можно получить, что

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y'_{21} & y'_{22} & y'_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{vmatrix} = a_{22}\Delta(t), \qquad \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y'_{31} & y'_{32} & y'_{33} \end{vmatrix} = a_{33}\Delta(t).$$

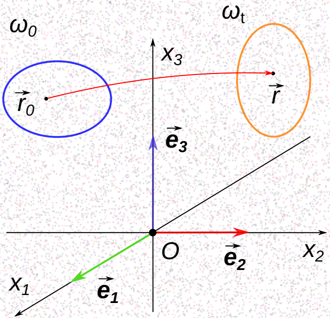
Таким образом,

$$\Delta'(t) = (a_{11} + a_{22} + a_{33})\Delta(t) = \operatorname{tr} A\, \Delta(t).$$

Правило дифференцирования определителя матрицы Якоби

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right| = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right|\left(\frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial v^3}{\partial x^3}\right) = \left|\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right| \operatorname{div} \vec{v}.$$

# Закон сохранения массы сплошной среды




## Интегральный вид ЗСМ

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_t}\rho(t,x^1,x^2,x^3)d\vec{x}=0,$$

где $\rho(t,x^1,x^2,x^3)$ – плотность жидкой частицы в точке $\vec{r}$ в момент времени $t$.

## Упрощения

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_t}\rho(t,x^1,x^2,x^3)d\vec{x}=\frac{d}{dt}\int\limits_{\omega_0}\rho(t,\xi^1,\xi^2,\xi^3)\Delta(t)d\vec{\xi}=$$

$$=\int\limits_{\omega_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(t,\xi^1,\xi^2,\xi^3)\Delta(t)\right)d\vec{\xi}=$$

# Закон сохранения массы сплошной среды

## Упрощения

$$= \int\limits_{\omega_0} \left( \frac{\partial \rho(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3)}{\partial t} \Delta(t) + \rho(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3) \frac{\partial \Delta(t)}{\partial t} \right) d\vec{\xi} =$$

$$= \int\limits_{\omega_0} \left( \frac{\partial \rho(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3)}{\partial t} + \rho(t, \xi^1, \xi^2, \xi^3) \operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v} \right) \Delta(t) d\vec{\xi} =$$

$$= \int\limits_{\omega_t} \left( \frac{\partial \rho(t, x^1, x^2, x^3)}{\partial t} + \rho(t, x^1, x^2, x^3) \operatorname{div}_{\vec{x}} \vec{v} \right) d\vec{x}.$$

## ЗСМ в дифференциальной форме

В силу произвольности $\omega_t$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$