Стационарные изоэнтропические течения идеального газа

Верещагин Антон Сергеевич
д-р. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрофизики и газовой динамики

10 апреля 2024 г.

Аннотация

Уравнение состояния идеального политропного газа. Интеграл Бернулли изоэнтропического течения политропного газа. Параметры торможения потока, максимальная скорость, критическая скорость звука, критическая скорость. Формула Сен-Венана–Ванцеля для истечения газа из большого сосуда. Число Маха и коэффициент скорости. Связь параметров торможения и числа Маха и коэффициента скорости. Нагревание тел в потоке газа, влияние сжимаемости на течение.

Уравнения состояния идеального политропного газа

Термическое уравнение состояния

$$p = p_0 e^{(S-S_0)/c_V} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma = A(S)\rho^\gamma$$

Внутренняя энергия и энтальпия в адиабатном процессе ($S = const$)

$$d\varepsilon = TdS - pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = A(S)\rho^{\gamma-2}d\rho$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + \varepsilon_0, \quad i = \varepsilon + \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + i_0,$$

где ε_0, i_0 – константы интегрирования, которые можно будет опустить.

Интеграл Бернулли для изоэнтропического течения политропного газа

Интеграл Бернулли

$$i^* = \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} = \frac{v^2}{2} + i = \frac{v^2}{2} + c_p T = C(l),$$

где $C(l)$ – константа, характерная для выбранной линии тока; c_p – коэффициент теплоемкости при постоянном давлении. Массовые силы отсутствуют[1].

Основные следствия

Давление, плотность и температура с ростом скорости вдоль линии тока падают.

[1] Массовыми силами не всегда можно пренебречь, например, в метеорологии.

Параметры торможения потока

Температура торможения

Самая высокая температура на линии тока будет там, где $v = 0$, тогда

$$i^* = c_p T^*,$$

где T^* – температура торможения, а i^* – полное теплосодержание.

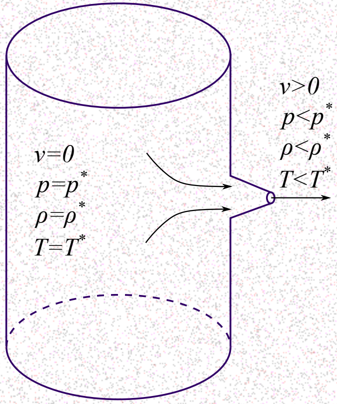
Давление и плотность торможения

$$i^* = c_p T^* = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0} e^{(S-S_0)/c_p} p^{*(\gamma-1)/\gamma} =$$

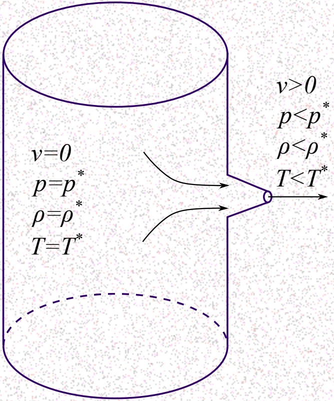
$$= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0^{\gamma}} e^{(S-S_0)/c_p} \rho^{*(\gamma-1)} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p^*}{\rho^*},$$

где p^*, ρ^* – давление и плотность торможения.

Задача об истечении газа из большого сосуда



При установившемся адиабатическом истечении газа из большого сосуда скорость v в далеких от отверстия точках равна нулю, а давление, плотность и температура соответственно равны давлению торможения, плотности торможения и температуре торможения.



Максимальная скорость истечения газа

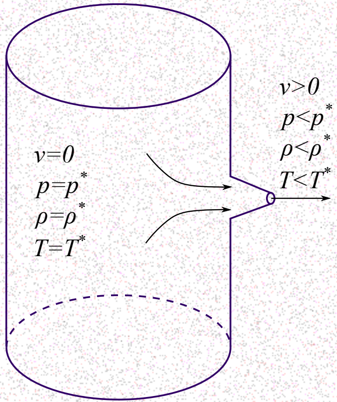
Максимальная скорость v_{max} достигается при адиабатическом истечении газа в пустоту $p = 0$, $\rho = 0$, $T = 0$:

$$i^* = \frac{v_{max}^2}{2},$$

или

$$v_{max} = \sqrt{2c_p T^*}.$$

Задача об истечении газа из большого сосуда



Скорость звука

Для совершенного газа скорость звука имеет вид

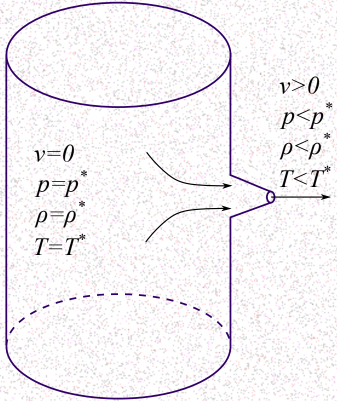
$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma R T}.$$

Интеграл Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} = \frac{v_{max}^2}{2}$$

При изменении скорости потока скорость звука вдоль линии тока меняется.

Задача об истечении газа из большого сосуда



Критическая скорость звука

Критическая скорость звука c^* достигается при $v = 0$:

$$i^* = c_p T^* = \frac{c^{*2}}{\gamma - 1} = \frac{v_{max}^2}{2}.$$

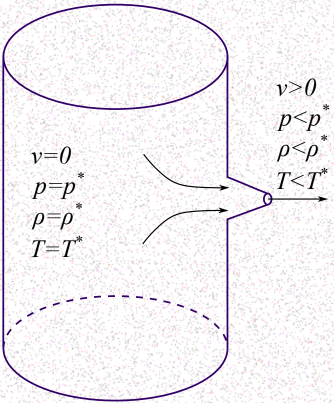
Поэтому

$$c^* = \sqrt{\gamma R T^*},$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} c^*.$$

Величина c^* зависит только от температуры торможения T^*.

Задача об истечении газа из большого сосуда



Критическая скорость

Значение скорости частицы газа, равное местной скорости звука, называется критической скоростью $v_{\text{кр}}$:

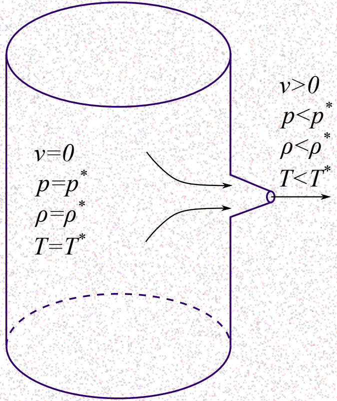
$$\frac{v_{\text{кр}}^2}{2} + \frac{v_{\text{кр}}^2}{\gamma - 1} = \frac{c^{*2}}{\gamma - 1} = \frac{v_{max}^2}{2},$$

откуда

$$v_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma + 1}}c^* = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}v_{max}.$$

Значение $v_{\text{кр}}$ зависит только от температуры торможения T^*.

Задача об истечении газа из большого сосуда



Формула для скорости истечения газа

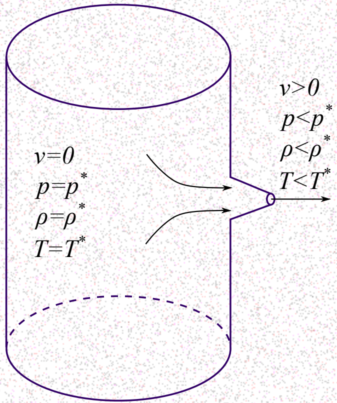
Так как

$$i^* = \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0}e^{(S-S_0)/c_p}p^{(\gamma-1)/\gamma} =$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0^{1/\gamma}}{\rho_0}e^{(S-S_0)/c_p}p^{*(\gamma-1)/\gamma} = \frac{v_{max}^2}{2},$$

то

$$\frac{v^2}{v_{max}^2} + \left(\frac{p}{p^*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} = 1.$$



Формула для скорости истечения газа

Таким образом,

$$v^2 = v_{max}^2 \left[1 - \left(\frac{p}{p^*} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right],$$

и так как

$$v_{max} = \sqrt{2c_p T^*},$$

то получается формула Сен-Венана–Ванцеля:

$$v = \sqrt{2c_p T^*} \left[1 - \left(\frac{p}{p^*} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right]^{1/2}.$$

Пример критических значений и параметров торможения

Пусть $T^* = 288$ K и $\gamma = 1{,}4$, тогда

$$c^* \approx 340 \text{ м/с}, \quad v_{max} \approx 756 \text{ м/с}, \quad v_{\text{кр}} \approx 310 \text{ м/с}.$$

Число Маха и коэффициент скорости

Определение

Отношение скорости движения частиц к местной скорости звука называется числом Маха:

$$M = \frac{v}{c}.$$

Для дозвуковых течений $M < 1$, для сверхзвуковых – $M > 1$, для трансзвуковых – $M \sim 1$.

Определение

Отношение скорости движения частиц к критической скорости называется коэффициентом скорости:

$$\lambda = \frac{v}{v_{\text{кр}}} = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\frac{v}{v_{max}}.$$

Связь параметров потока с параметрами торможения и коэффициентом скорости

Разрешая интеграл Бернулли относительно давления, плотности, температуры и скорости звука, имеем:

$$
\begin{aligned}
p &= p^* \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} &&= p^* \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \\
\rho &= \rho^* \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{1/(\gamma-1)} &&= \rho^* \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{1/(\gamma-1)}, \\
T &= T^* \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right) &&= T^* \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right), \\
c &= c^* \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{1/2} &&= c^* \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Связь коэффициента скорости и числа Маха

Разделим обе части интеграла Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} = \frac{v_{max}^2}{2}$$

на $v^2/2$, тогда получим:

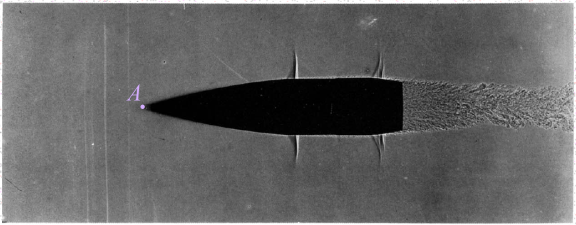
$$\frac{v^2}{v_{max}^2} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\gamma-1}\frac{1}{M^2}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\lambda^2.$$

Связь параметров потока с параметрами торможения и числом Маха

Разрешая интеграл Бернулли относительно давления, плотности, температуры и скорости звука, имеем:

$$
\begin{aligned}
p &= p^* \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)}, \\
\rho &= \rho^* \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1/(\gamma-1)}, \\
T &= T^* \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1}, \\
c &= c^* \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-1/2}.
\end{aligned}
$$

Нагревание тела в потоке газа



M = 0,900

Температура потока в точке торможения A на рисунке вычисляется по формуле

$$T^* = T\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right).$$

Для воздуха ($\gamma \approx 1{,}4$) при температуре вдали от тела $T = 250$ K:

1) при $M = 1$ $T^* \approx 290$ K;
2) при $M = 3$ $T^* \approx 700$ K;
3) при $M = 5$ $T^* \approx 1500$ K.

Влияние сжимаемости

Интегралы Бернулли для давления для несжимаемой жидкости и адиабатического движения газа:

$$p = p^* - \rho_0 \frac{v^2}{2} \quad \text{и} \quad p = p^* \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} .$$

Разложим интеграл для газа в ряд Тейлора по параметру $\dfrac{v^2}{v_{max}^2} \ll 1$:

$$p = p^* \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} =$$

$$= p^* \left[1 - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{v^2}{v_{max}^2} + \frac{\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} - 1\right)}{2!} \frac{v^4}{v_{max}^4} + \ldots\right] =$$

вспомним, что $v_{max}^2 = \dfrac{2c^{*2}}{\gamma - 1}$ и $\dfrac{\gamma p^*}{\rho^*} = c^{*2}$, тогда

Влияние сжимаемости

Интегралы Бернулли для давления для несжимаемой жидкости и адиабатического движения газа:

$$p = p^* - \rho_0 \frac{v^2}{2} \quad \text{и} \quad p = p^* \left(1 - \frac{v^2}{v_{max}^2}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Разложим интеграл для газа в ряд Тейлора по параметру $\dfrac{v^2}{v_{max}^2} \ll 1$:

$$= p^* - \frac{\rho^* v^2}{2}\left(1 - \frac{1}{2(\gamma-1)}\frac{v^2}{v_{max}^2} + \ldots\right) = p^* - \frac{\rho^* v^2}{2}\left(1 - \boxed{\frac{v^2}{4c^{*2}}} + \ldots\right).$$

Разница не будет превышать 1 %, когда

$$\boxed{v^2/(4c^{*2})} \leq 0{,}01 \quad \text{или} \quad v \leq c^*/5.$$

При $c^* = 340$ м/с получается условие для скорости $v \leq 68$ м/с.

Влияние сжимаемости

Разложение интеграла Бернулли для плотности по формуле Тейлора имеет вид

$$\frac{\rho}{\rho^*} = 1 - \frac{1}{\gamma - 1}\frac{v^2}{v_{max}^2} + \dots$$

Легко проверить, что при $v < \dfrac{c^*}{5} = 68\ \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$ будет справедливо

$$\frac{|\rho - \rho^*|}{\rho^*} \le 0{,}02.$$

Литература

1. *Ван-Дайк М.* Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986.
2. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Том 2. М.: Наука, 1970.