

Тензор скоростей деформаций

Верецагин Антон Сергеевич

д-р. физ.-мат. наук, доцент

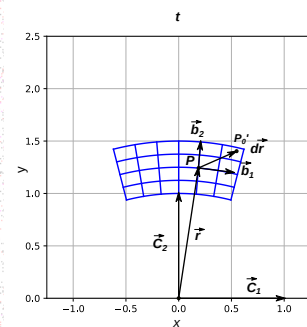
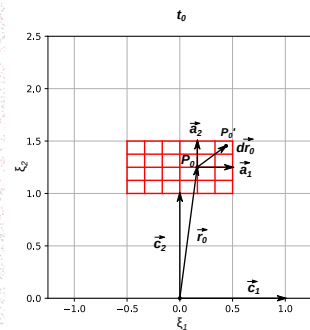
Кафедра аэрофизики и газовой динамики



25 сентября 2024 г.

Вектор перемещений. Связь вектора перемещений, метрического тензора и тензора деформаций. Тензор скоростей деформаций. Распределение скоростей в бесконечно малой частице. Теорема Коши – Гельмгольца. Свойства компонентов, главные значения и собственные векторы тензора скоростей деформаций.

Тензоры деформаций



Определение

Тензор деформаций в представлении Грина

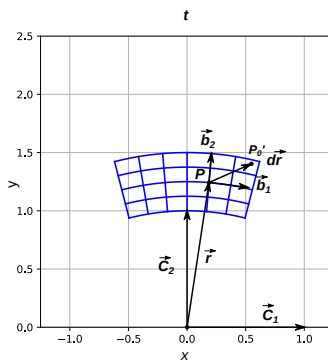
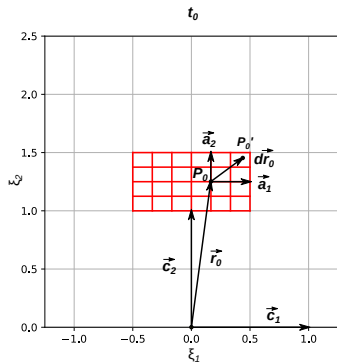
$$E_0 = \varepsilon_{ij} \vec{a}^i \vec{a}^j$$

Тензор деформаций в представлении Альманси

$$E = \varepsilon_{ij} \vec{b}^i \vec{b}^j$$

$$\text{Здесь } 2\varepsilon_{ij} = g_{ij} - h_{ij} = \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j - \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j.$$

Перемещение



Определение

Введем вектор перемещения жидкой частицы \vec{w} по следующей формуле:

$$\vec{w} = \vec{r} - \vec{r}_0.$$

Связь метрического тензора и вектора перемещения

Соглашение

Пусть в базисе \vec{a}_j разложение \vec{w} будет обозначаться через w^j , а в базисе \vec{b}_i – через w_i :

$$\vec{w} = w^j \vec{a}_j = w_i \vec{b}_i.$$

Связь метрического тензора и вектора перемещения

Соглашение

Пусть в базисе \vec{a}_j разложение \vec{w} будет обозначаться через w^j , а в базисе \vec{b}_i – через w^i :

$$\vec{w} = w^j \vec{a}_j = w^i \vec{b}_i.$$

Используя определение вектора перемещения, получаем:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \xi^i} = \vec{b}_i - \vec{a}_i \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_i = \vec{b}_i - \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i}, \\ \vec{b}_i = \vec{a}_i + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i}. \end{cases}$$

Связь метрического тензора и вектора перемещения

Соглашение

Пусть в базисе \vec{a}_j разложение \vec{w} будет обозначаться через w^j , а в базисе \vec{b}_i – через w^i :

$$\vec{w} = w^j \vec{a}_j = w^i \vec{b}_i.$$

Используя определение вектора перемещения, получаем:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \xi^i} = \vec{b}_i - \vec{a}_i \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}_i = \vec{b}_i - \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i}, \\ \vec{b}_i = \vec{a}_i + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j + \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j}, \\ h_{ij} &= \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j - \vec{b}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} - \vec{b}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j}. \end{aligned}$$

Производная от координатных линий

Рассмотрим выражения:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial}{\partial \xi^i} (u^j \vec{a}_j) = \frac{\partial u^j}{\partial \xi^i} \vec{a}_j + u^j \frac{\partial \vec{a}_j}{\partial \xi^i} = \left(\frac{\partial u^k}{\partial \xi^i} + u^j \Gamma_{ji}^{0k} \right) \vec{a}_k,$$

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial}{\partial \xi^i} (w^j \vec{b}_j) = \frac{\partial w^j}{\partial \xi^i} \vec{b}_j + w^j \frac{\partial \vec{b}_j}{\partial \xi^i} = \left(\frac{\partial w^k}{\partial \xi^i} + w^j \Gamma_{ji}^k \right) \vec{b}_k.$$

Определение

Символы Γ_{ji}^k и Γ_{ji}^{0k} , имеющие следующие определения:

$$\frac{\partial \vec{a}_k}{\partial \xi^i} = \Gamma_{ki}^{0j} \vec{a}_j, \quad \frac{\partial \vec{b}_k}{\partial \xi^i} = \Gamma_{ki}^j \vec{b}_j$$

— называются **символами Кристоффеля** и характеризуют искривление пространства. Они **не являются** тензорами и тождественно равны 0 для абсолютной декартовой системы координат \vec{c}_l .

Выражение тензора деформаций через вектор перемещения

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\vec{b}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \vec{b}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} \right).\end{aligned}$$

Выражение тензора деформаций через вектор перемещения

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\vec{b}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \vec{b}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} \right).\end{aligned}$$

Для бесконечно малых деформаций пренебрегают членами второго порядка, и тогда

$$\varepsilon_{ij} \approx \frac{1}{2} \left(\vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \right) \text{ или } \varepsilon_{ij} \approx \frac{1}{2} \left(\vec{b}_i \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^j} + \vec{b}_j \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \xi^i} \right).$$

В этом случае ε_{ij} называют **тензором малых деформаций**.

Тензор скоростей деформаций

Определение

Рассмотрим тензоры деформаций ε_{ij} и ε'_{ij} в два близких момента времени $t \geq t_0$ и $t' = t + \Delta t$:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - h_{ij}), \quad \varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2}(g'_{ij} - h_{ij}),$$

где g_{ij} , g'_{ij} , h_{ij} – метрические тензоры в моменты времени t , t' и t_0 . Назовем **тензором скоростей деформации** величины:

$$e_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon'_{ij} - \varepsilon_{ij}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g'_{ij} - g_{ij}}{\Delta t}.$$

Свойство

Величины e_{ij} образуют симметричный ковариантный тензор 2-го ранга.

Связь между вектором скорости и тензором скоростей деформаций

Введем вектор $\Delta\vec{w}$ как перемещение жидкой частицы между временем t и $t' = t + \Delta t$:

$$\Delta\vec{w} = \vec{r} - \vec{r}'.$$

Используя преобразования, полученные ранее, для вектора перемещений имеем:

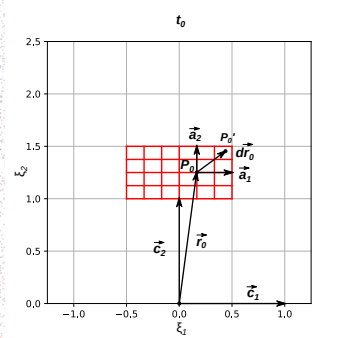
$$\Delta\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} - \varepsilon_{ij} = \frac{g'_{ij} - g_{ij}}{2} = \frac{1}{2} \left(\vec{a}_i \cdot \frac{\partial \Delta\vec{w}}{\partial \xi^j} + \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \Delta\vec{w}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \Delta\vec{w}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \Delta\vec{w}}{\partial \xi^j} \right),$$

где \vec{a}_i – **сопутствующий базис** в момент времени t . Тогда

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varepsilon_{ij}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left(\vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi^j} + \vec{a}_j \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi^i} \right),$$

где $\vec{v} = v^k \vec{a}_k = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\vec{w}/\Delta t$ – вектор скорости жидкой частицы.

Компоненты тензора скоростей деформаций в абсолютной системе координат



$$\bar{e}_{ij} = e_{kl} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \frac{\partial \xi^l}{\partial x^j},$$

где \bar{e}_{kl} , e_{kl} – компоненты в абсолютной декартовой \vec{c}_i и сопутствующей криволинейной системах координат тензора скоростей деформаций; $\xi_i = \xi_i(t, x_1, x_2, x_3)$ – обратное преобразование.

Компоненты тензора скоростей деформаций в абсолютной системе координат

Пусть разложение сопутствующего базиса и вектора скорости в абсолютной системе координат имеют вид

$$\vec{a}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_i} = \frac{\partial x^k}{\partial \xi_i} \vec{c}_k, \quad \vec{v} = v^r \vec{c}_r.$$

Компоненты тензора скоростей деформаций в абсолютной системе координат

Пусть разложение сопутствующего базиса и вектора скорости в абсолютной системе координат имеют вид

$$\vec{a}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_i} = \frac{\partial x^k}{\partial \xi_i} \vec{c}_k, \quad \vec{v} = v^r \vec{c}_r.$$

Рассмотрим, как преобразуется при переходе к абсолютной декартовой системе координат слагаемое вида $\vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi_j}$:

$$\begin{aligned} \left(\vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi_j} \right) \frac{\partial \xi^i}{\partial x^p} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^q} &= \left(\frac{\partial x^k}{\partial \xi_i} \vec{c}_k \right) \cdot \left(\frac{\partial v^r}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^j} \vec{c}_r \right) \frac{\partial \xi^i}{\partial x^p} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^q} = \\ &= \left(\frac{\partial x^k}{\partial \xi_i} \frac{\partial v^r}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^j} \delta_r^k \right) \frac{\partial \xi^i}{\partial x^p} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^q} = \frac{\partial x^k}{\partial \xi_i} \frac{\partial x^l}{\partial \xi^j} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^p} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^q} \frac{\partial v^k}{\partial x^l} = \delta_k^p \delta_q^l \frac{\partial v^k}{\partial x^l} = \frac{\partial v^p}{\partial x^q}. \end{aligned}$$

Компоненты тензора скоростей деформаций в абсолютной системе координат

Результат

Получаем, что компоненты тензора скоростей деформаций в абсолютной декартовой системе координат имеют вид

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right).$$

Компоненты тензора скоростей деформаций в абсолютной системе координат

Результат

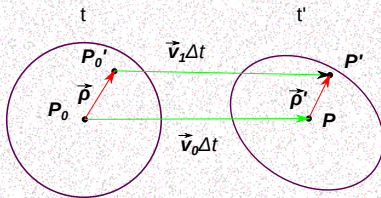
Получаем, что компоненты тензора скоростей деформаций в абсолютной декартовой системе координат имеют вид

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right).$$

Свойства:

- 1) симметричность $e_{ij} = e_{ji}$;
- 2) характеризует состояние среды в данный момент времени в отличие от тензора деформаций;
- 3) $e_{ij}\Delta t = \varepsilon_{ij}$ – компоненты тензора малых деформаций.

Распределение скоростей в бесконечно малой частице

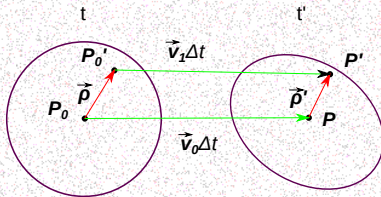


Постановка задачи

Рассмотрим окрестность точки P_0 с лагранжевыми координатами ξ_i и точку из окрестности P'_0 с лагранжевыми координатами $\xi_i + d\xi_i$. За время Δt точки P_0 и P'_0 , образующие вектор $\vec{\rho}$, перейдут в точки P и P' , образующие вектор $\vec{\rho}'$.

Требуется связать изменения вектора $\vec{\rho}$ с компонентами тензора скоростей деформаций. Рассмотрение ведется в абсолютной декартовой системе координат.

Соотношения для изменения вектора направления в окрестности выбранной точки

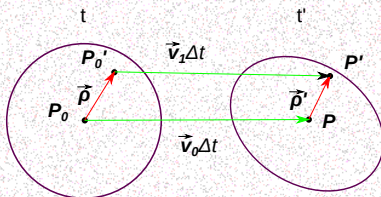


Из рисунка видно, что с точностью до первого порядка по Δt

$$\vec{\rho}' = \vec{\rho} + (\vec{v}_1 - \vec{v}_0) \Delta t,$$

где \vec{v}_1, \vec{v}_2 – скорости движения точки P_0 в P и P'_0 в P' за малое время Δt .

Соотношения для изменения вектора направления в окрестности выбранной точки



При разложении Тейлора для вектора скорости в окрестности точки P_0 имеем:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi^i} \right) \bigg|_{P_0} \rho^i + \vec{\rho} O(\rho). \quad (1)$$

Соотношения для изменения вектора направления в окрестности выбранной точки

Подставляя соотношение для скорости в соотношение для изменения длины, получим:

$$\vec{\rho}' = \vec{\rho} + \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi^i} \right) \bigg|_{P_0} \rho^i \Delta t + \vec{\rho} O(\rho \Delta t).$$

Из этого соотношения видно, что бесконечно малая жидкая частица за время Δt претерпевает бесконечно малое аффинное преобразование с точностью до $\vec{\rho} O(\rho \Delta t)$.

Разложение скорости в окрестности выбранной точки

Разложение

Используя теорему о разложении тензора на симметричный и антисимметричный тензор, представим \vec{v}_1 в виде:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \vec{v}_0 + \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \xi^i} \right) \bigg|_{P_0} \rho^i + \vec{\rho} O(\rho) = \\ &= \vec{v}_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^i}{\partial \xi^k} + \frac{\partial v^k}{\partial \xi^i} \right) \rho^i \vec{c}_k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^k}{\partial \xi^i} - \frac{\partial v^i}{\partial \xi^k} \right) \rho^i \vec{c}_k + \vec{\rho} O(\rho) = \\ &= \vec{v}_0 + e_{ik} \rho^i \vec{c}_k + \omega_{ki} \rho^i \vec{c}_k + \vec{\rho} O(\rho),\end{aligned}$$

где e_{ik} – компоненты симметричного тензора скоростей деформаций, а

$$\omega_{ki} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^k}{\partial \xi^i} - \frac{\partial v^i}{\partial \xi^k} \right)$$

являются компонентами антисимметричного тензора.

Разложение скорости на составляющие

Теорема Коши – Гельмгольца

Рассмотрим декартову систему координат так, что

$$\vec{\rho} = x^1 \vec{c}_1 + x^2 \vec{c}_2 + x^3 \vec{c}_3,$$

тогда

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \text{grad } \Phi + \vec{\rho} O(\rho),$$

$$\Phi = \frac{1}{2} e_{pq} x^p x^q, \quad \vec{\omega} = \omega^i \vec{c}_i = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \vec{c}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}.$$

Сравнивая это выражение с формулой для скорости движения абсолютно твердого тела, получаем, что скорость жидкой частицы складывается из **скорости поступательного и вращательного движения и скорости чистой деформации**.

Скорость относительного удлинения

Рассмотрим относительное удлинение e_ρ вектора $\vec{\rho}$:

$$e_\rho = \frac{1}{|\vec{\rho}|} \frac{d|\vec{\rho}|}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho^2}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho^2} \frac{d(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho})}{dt} = \frac{1}{\rho^2} \left(\vec{\rho} \cdot \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right).$$

Скорость относительного удлинения

Рассмотрим относительное удлинение e_ρ вектора $\vec{\rho}$:

$$e_\rho = \frac{1}{|\vec{\rho}|} \frac{d|\vec{\rho}|}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho^2}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho^2} \frac{d(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho})}{dt} = \frac{1}{\rho^2} \left(\vec{\rho} \cdot \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right).$$

Используя разложение из теоремы Коши – Гельмгольца, соотношение (1) при $\Delta t \rightarrow 0$ и $\vec{\rho} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = 0$, получим:

$$\begin{aligned} e_\rho &= \frac{1}{\rho^2} \left(\vec{\rho} \cdot \frac{d\vec{\rho}}{dt} \right) = \frac{1}{\rho^2} (\vec{\rho} \cdot \text{grad } \Phi) = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^1} x^1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} x^3 \right) = \\ &= \frac{2\Phi}{\rho^2} = e_{ij} \frac{x^i}{\rho} \frac{x^j}{\rho} = e_{ij} \alpha^i \alpha^j, \end{aligned}$$

$$\text{где } \alpha^i = \frac{x^i}{\rho} = \cos(\rho, x^i).$$

Вывод

Скорость относительного удлинения задается квадратичной формой

$$e_\rho = e_{ij}\alpha^i\alpha^j,$$

где $\alpha^i = \frac{x^i}{\rho} = \cos(\rho, x^i)$, e_{ij} – компоненты тензора скоростей деформаций.

Компоненты тензора скоростей деформаций с одноименными индексами являются скоростями относительных удлинений отрезков среды, первоначально направленных параллельно соответствующим координатным осям.

Вывод

Вспомнив, что

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij}\Delta t,$$

где ε_{ij} – тензор малых деформаций, получим свойство недиагональных элементов тензора скоростей деформаций. Так как

$$\sin \alpha_{ij} = 2\varepsilon_{ij},$$

где α_{ij} – угол скашивания изначально прямого угла, то недиагональные компоненты тензора e_{ij} $i \neq j$ равны половине скорости скашивания первоначально прямых углов, образованных отрезками среды, в данный момент времени параллельными соответствующим координатным осям.

Главные оси и главные значения тензора скоростей деформаций

Квадратичная форма

$$e_\rho = e_{ij}\alpha^i\alpha^j,$$

где $\alpha^i = \cos(\rho, x^i)$, аналогично, как в случае с тензором деформаций, анализируется на экстремальные значения на единичной сфере.

Главные оси и главные значения тензора скоростей деформаций

Квадратичная форма

$$e_\rho = e_{ij}\alpha^i\alpha^j,$$

где $\alpha^i = \cos(\rho, x^i)$, аналогично, как в случае с тензором деформаций, анализируется на экстремальные значения на единичной сфере.

Вывод

Максимальные скорости относительного удлинения совпадают с главными значениями тензора скоростей деформаций e_1, e_2, e_3 , а направления, в которых они реализуются, совпадают с собственными векторами тензора скоростей деформаций. Очевидно, что если $e_i > 0$, то имеет место растяжение, а если $e_i < 0$, то – сжатие.

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Том 1. М.:Наука, 1970.
2. *Сокольников И. С.* Тензорный анализ (теория и применение в геометрии и в механике сплошных сред). Перевод с англ. Главная редакция физ.-мат. лит. Изд. М.: Наука, 1971.