Звуковые колебания

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики ФФ НГУ

12 марта 2019 г.

Аннотация

Основные уравнения динамики идеального газа

Уравнения сохранения для идеального газа

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)S = 0.$$

Замыкающие соотношения

$$p = p(\rho, S).$$

Звуковые волны

Определение

Колебательное движение с малыми амплитудами в сжимаемом газе называют звуковыми волнами.

Звуковые волны

Определение

Колебательное движение с малыми амплитудами в сжимаемом газе называют звуковыми волнами.

Замечание

При рассмотрении звуковых колебаний будет считать течение изоэнтропическим ($S = const$), тогда из общей системы уравнений остаются только уравнение неразрывности и уравнение Эйлера, а в замыкающем соотношении пропадает зависимость от S, как функции от координаты и времени.

Скорость звука

Уравнения сохранения для идеального газа

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \nabla \rho,$$

$$p = p(\rho).$$

Скорость звука

Уравнения сохранения для идеального газа

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \nabla \rho,$$

$$p = p(\rho).$$

Определение

Величина $c > 0$, определяемая соотношением

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S,$$

называется скоростью звука.

Как видно из определения $c = c(\rho, S)$. Для изоэнтропических течений зависимостью от S как от функции переменных пространства и времени можно пренебречь.

Линеаризация уравнений движения

Замена переменных

Рассмотрим малые колебания газа в окрестности постоянного решения $\vec{v} = 0$, $p = p_0$, $\rho = \rho_0$:

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{v}', \\
c &= c_0 + c', \\
\rho &= \rho_0 + \rho'.
\end{aligned}
$$

Линеаризация уравнений движения

Замена переменных

Рассмотрим малые колебания газа в окрестности постоянного решения $\vec{v} = 0$, $p = p_0$, $\rho = \rho_0$:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}', \\ c &= c_0 + c', \\ \rho &= \rho_0 + \rho'. \end{aligned}$$

Уравнения движения

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0 + \rho')\vec{v}' = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + (\vec{v}' \cdot \nabla)\vec{v}' = -\frac{1}{\rho_0 + \rho'}(c_0 + c')^2 \nabla(\rho_0 + \rho').$$

Уравнения звуковых колебаний

Основные уравнения

Считая колебания малыми, отбрасываем все слагаемые, имеющие порядок малости два и выше, получим

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \nabla \rho' = 0.$$

Уравнения звуковых колебаний

Основные уравнения

Считая колебания малыми, отбрасываем все слагаемые, имеющие порядок малости два и выше, получим

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}' = 0, \qquad \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \nabla \rho' = 0.$$

Потенциальное течение и волновое уравнение

Если $\vec{v}' = \nabla \varphi$, тогда

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \Delta \varphi = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi + \frac{c_0^2}{\rho_0} \nabla \rho' = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta \varphi.$$

Решение волнового уравнения для плоских волн

Одномерное плоское течение

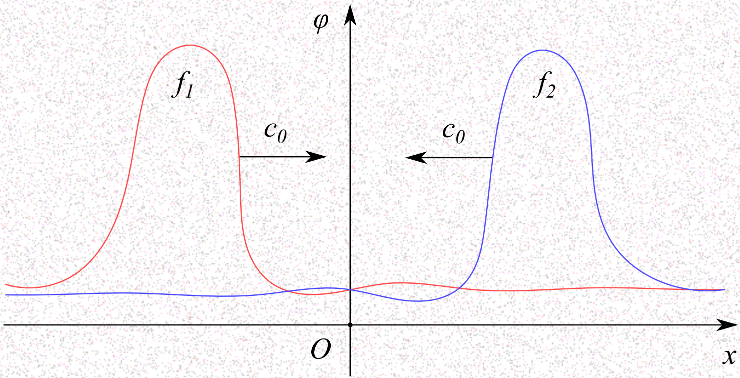
Если $\varphi = \varphi(t, x)$, тогда решением полученного волнового уравнения будет

$$\varphi(t,x) = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t) = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

где $f_1(\xi), f_2(\eta)$ – произвольные дважды дифференцируемые функции своих аргументов

$$\xi = x - c_0 t, \quad \eta = x + c_0 t.$$

Прогрессивные волны



Решение $\varphi(t,x)$ представляет собой сумму перемещающихся поступательно вправо и влево волн неизменного вида с скоростью c_0.

Иллюстрация перемещения волн

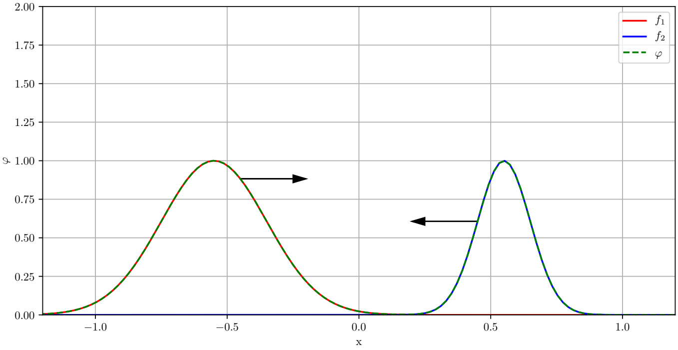


Иллюстрация перемещения волн

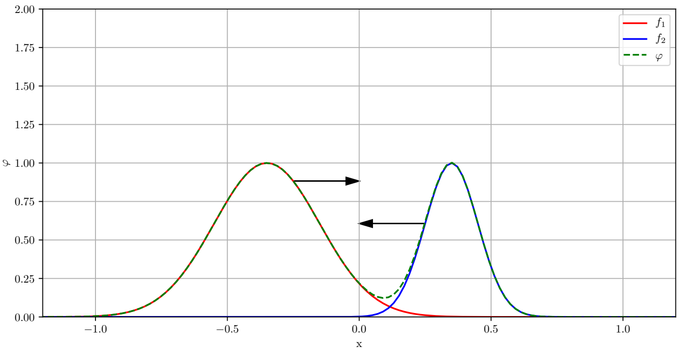


Иллюстрация перемещения волн

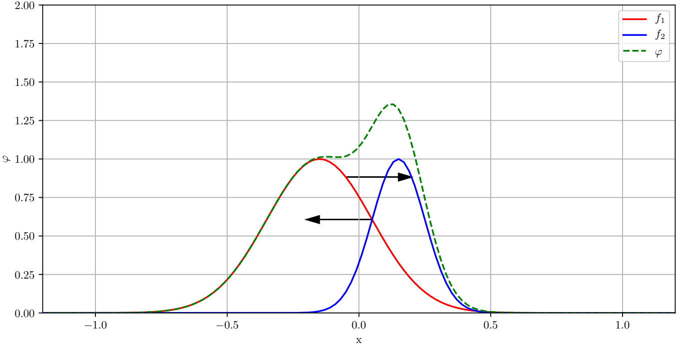


Иллюстрация перемещения волн

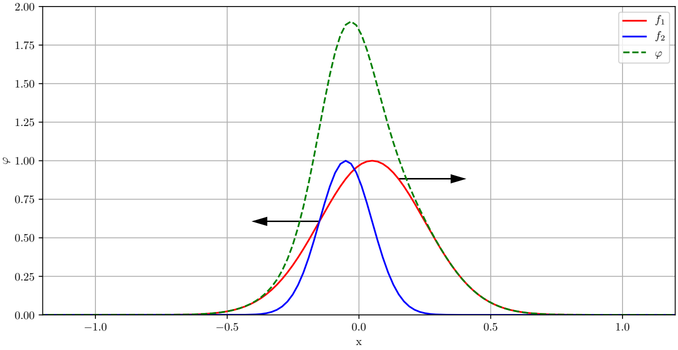


Иллюстрация перемещения волн

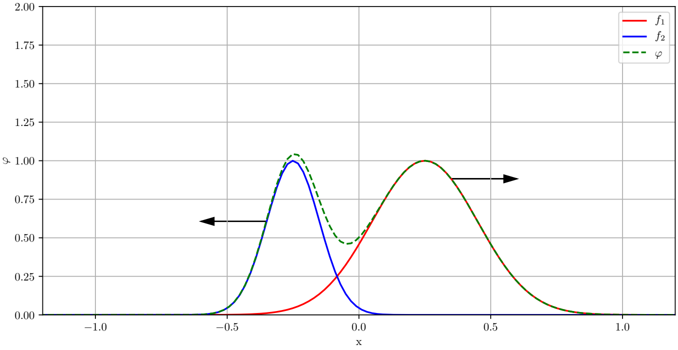


Иллюстрация перемещения волн

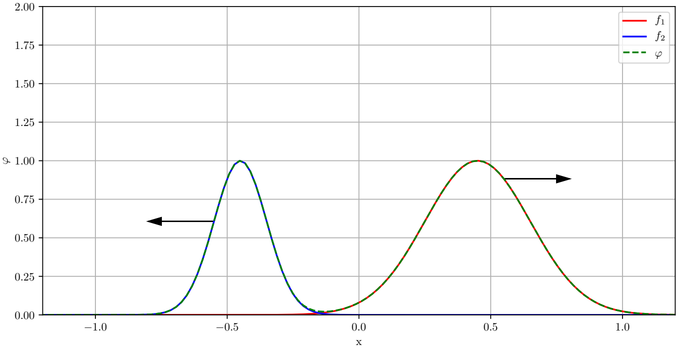
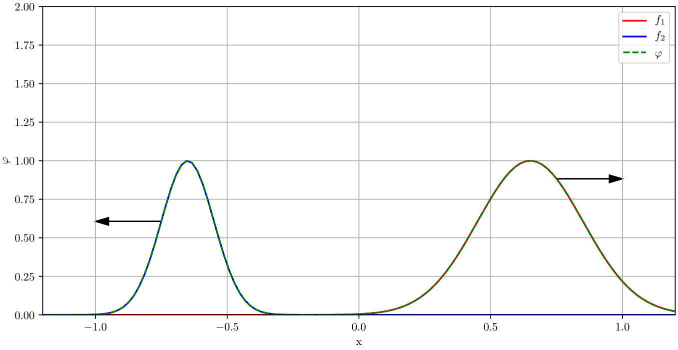


Иллюстрация перемещения волн



Решение волнового уравнения в сферической симметрии

Волновое уравнение в сферической симметрии

Если $\varphi = \varphi(t, r)$, тогда волновое уравнение имеет вид

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\varphi) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi)\,.$$

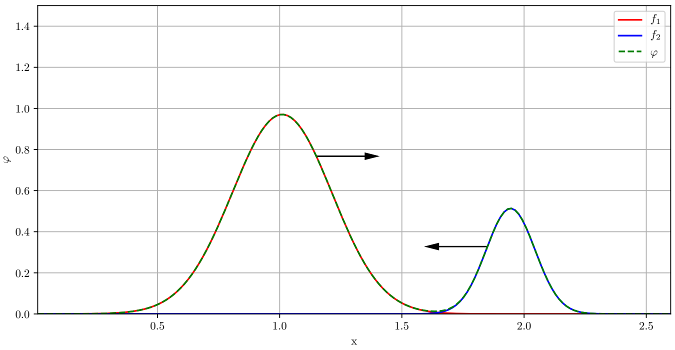
Одномерное сферическое течение

Решением полученного волнового уравнения будет

$$\varphi(t, r) = \frac{f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t)}{r} = \frac{Q_1(\xi)}{r} + \frac{Q_2(\eta)}{r},$$

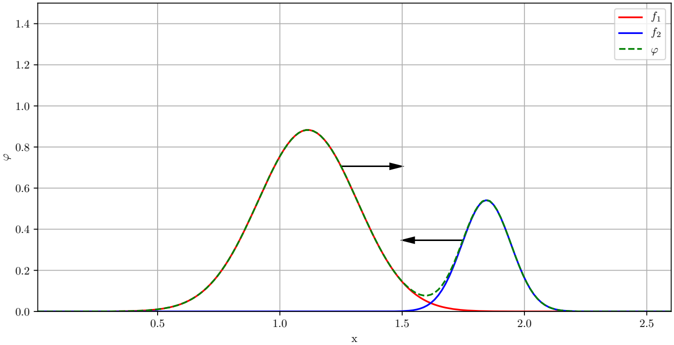
где $Q_1(\xi)$, $Q_2(\eta)$ – произвольные дважды дифференцируемые функции своих аргументов $\xi = r - c_0 t$, $\eta = r + c_0 t$.

Иллюстрация перемещения волн при сферической симметрии



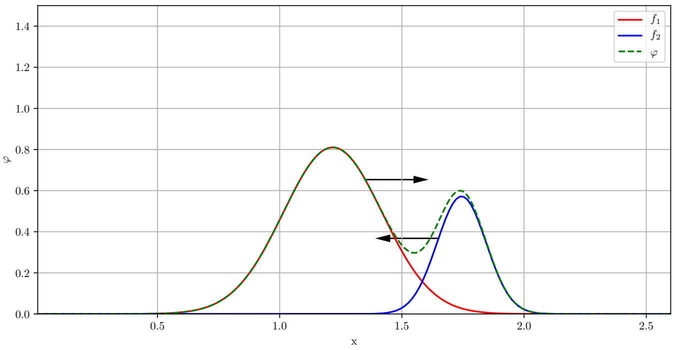
На рисунке $\varphi(t,r) = \dfrac{1}{r}\left(f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t)\right)$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация перемещения волн при сферической симметрии



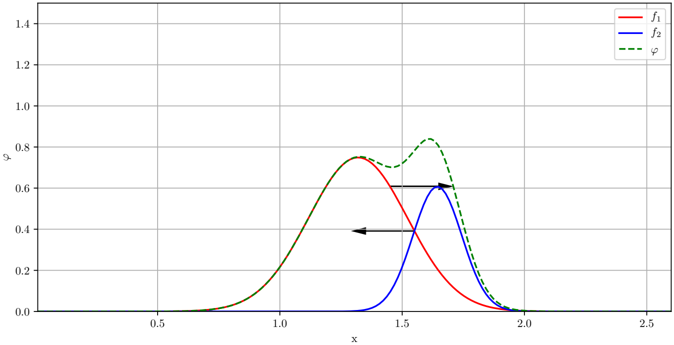
На рисунке $\varphi(t,r) = \dfrac{1}{r}\left(f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t)\right)$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация перемещения волн при сферической симметрии



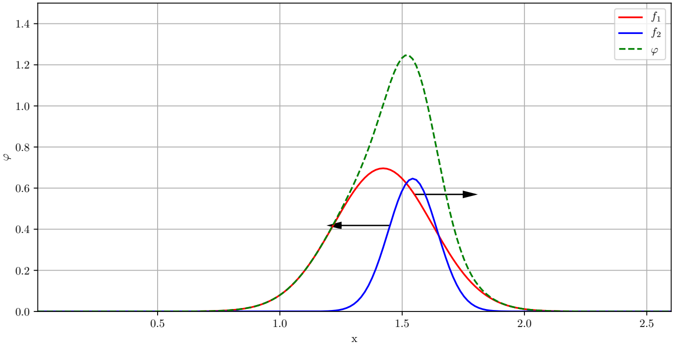
На рисунке $\varphi(t,r) = \dfrac{1}{r}\left(f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t)\right)$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация перемещения волн при сферической симметрии



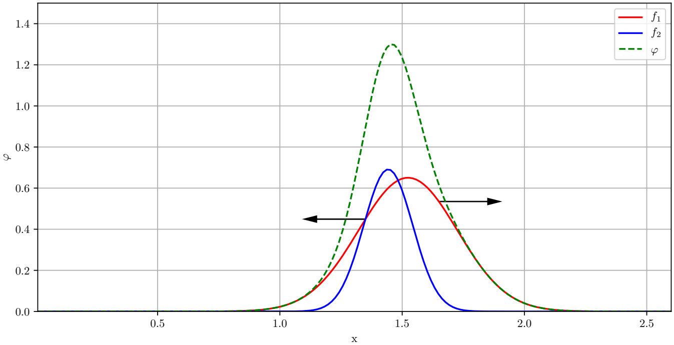
На рисунке $\varphi(t, r) = \dfrac{1}{r}\left(f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t)\right)$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация перемещения волн при сферической симметрии



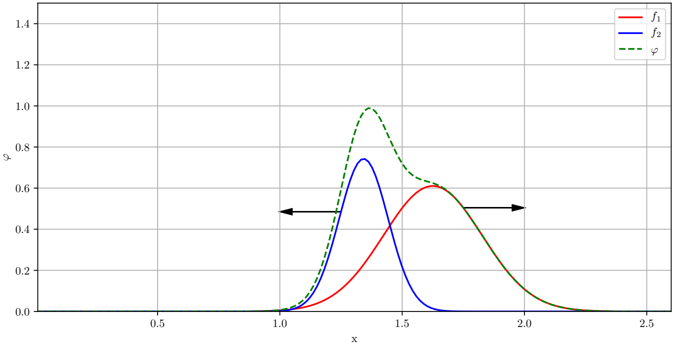
На рисунке $\varphi(t,r) = \dfrac{1}{r}\left(f_1(r-c_0t) + f_2(r+c_0t)\right)$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация перемещения волн при сферической симметрии



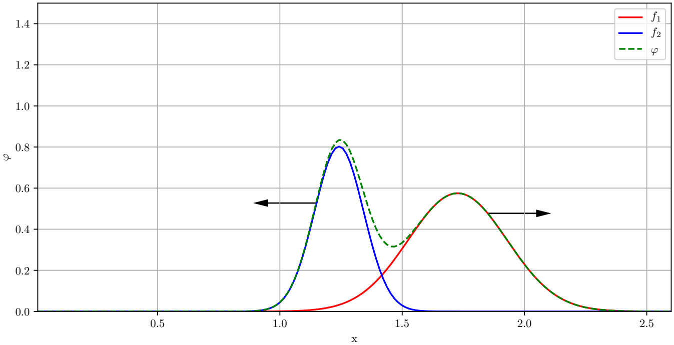
На рисунке $\varphi(t,r) = \dfrac{1}{r}\left(f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t)\right)$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация перемещения волн при сферической симметрии



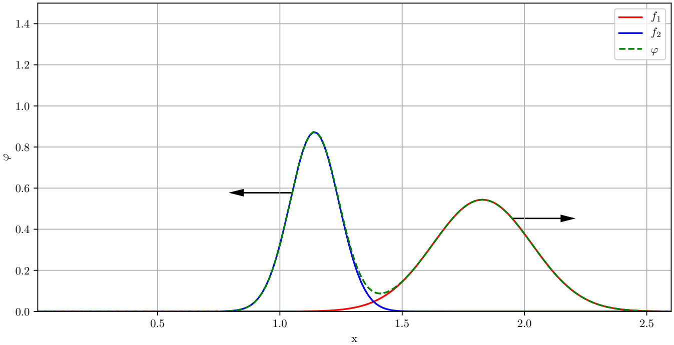
На рисунке $\varphi(t,r) = \dfrac{1}{r}\left(f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t)\right)$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация перемещения волн при сферической симметрии



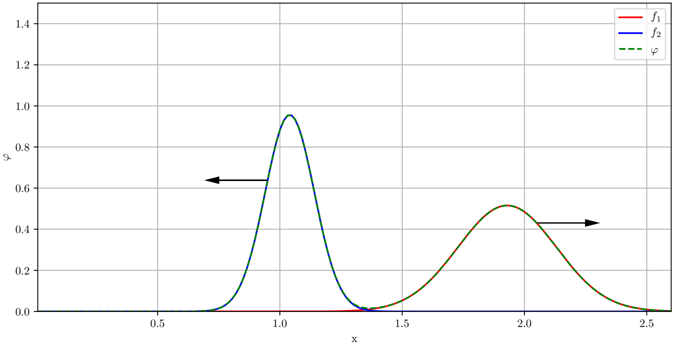
На рисунке $\varphi(t,r) = \dfrac{1}{r}\left(f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t)\right)$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация перемещения волн при сферической симметрии



На рисунке $\varphi(t,r) = \dfrac{1}{r}\left(f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t)\right)$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Иллюстрация перемещения волн при сферической симметрии



На рисунке $\varphi(t,r) = \dfrac{1}{r}\left(f_1(r - c_0 t) + f_2(r + c_0 t)\right)$ для заданных функций $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$.

Литература

•