Плоские потенциальные течения идеальной жидкости

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрофизики и газовой динамики

17 декабря 2020 г.

Аннотация

Определение плоского течения. Функция тока и ее свойства. Связь потенциала и функции тока. Комплексный потенциал и его свойства. Простейшие течения.

Уравнения плоского течения идеальной жидкости

Если можно ввести систему координат так, что течение идеальной жидкости ($\rho = const$) будет описываться уравнениями:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

где $v_x = v_x(t,x,y)$, $v_y = v_y(t,x,y)$, $p = p(t,x,y)$, то говорят, что движение идеальной жидкости плоскопараллельное.

Функция тока

Определение

Функция $\psi = \psi(x, y)$ такая, что

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad -v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

называется функцией тока. Если течение нестационарное, то t – дополнительный параметр.

Функция тока: уравнение неразрывности

Уравнение неразрывности

Уравнение

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0$$

выполняется тождественно.

Функция тока: линии тока

Рассмотрим уравнения линий тока:

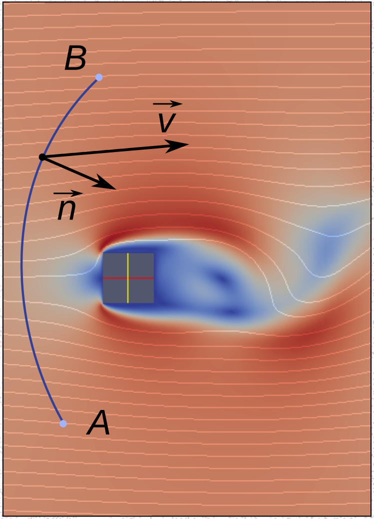
$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y},$$

тогда

$$0 = -v_y dx + v_x dy = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi.$$

Таким образом, $\psi = \psi(x, y)$ сохраняет одно и то же значение на линиях тока.

Функция тока: поток жидкости



$$\int_B^A \vec{v}\cdot\vec{n}ds = \int_B^A \left(v_x n_1 + v_y n_2\right) ds =$$

$$= \int_0^{s_0} \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}\right) ds =$$

$$= \int_0^{s_0} \frac{d}{ds}\psi(x(s),y(s))ds = \psi(A) - \psi(B),$$

$$x = x(s), \quad y = y(s),$$

$$(x,y)|_{s=0} = B, \quad (x,y)|_{s=s_0} = A.$$

Функция тока: вектор вихря

Вектор вихря $\vec{\Omega} = \operatorname{rot}\vec{v}$ задается формулами:

$$\Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \quad \Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0,$$

$$\Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}.$$

Функция тока: вектор вихря

Вектор вихря $\vec{\Omega} = \operatorname{rot}\vec{v}$ задается формулами:

$$\Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \quad \Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0,$$

$$\Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}.$$

В случае безвихревого течения:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Связь потенциала и функции тока

Если плоское течение идеальной жидкости потенциально, тогда существует функция $\varphi(x, y)$ такая, что

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

при этом

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Связь потенциала и функции тока

Если плоское течение идеальной жидкости потенциально, тогда существует функция $\varphi(x, y)$ такая, что

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

при этом

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Иначе,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Отсюда следует, что линии $\varphi = const$ и $\psi = const$ ортогональны. Такие φ и ψ называются сопряженными.

Комплексная плоскость и комплексный потенциал

Комплексный потенциал

Функции φ и ψ связаны между собой условием Коши-Римана, поэтому функция комплексного переменного $w = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ является аналитической функцией комплексного аргумента $z = x + iy$:

$$w = f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Функция $w(z)$ называется комплексным потенциалом.

Комплексная скорость

Свойство

Так как $w(z)$ – аналитическая функция, то существует dw/dz:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}i = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}i.$$

Свойство

Так как $w(z)$ – аналитическая функция, то существует dw/dz:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}i = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}i.$$

Следовательно,

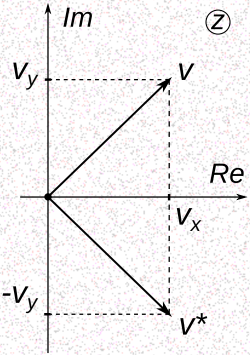
$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y.$$

Если ввести комплексную скорость как

$$v(z) = v_x(x,y) + iv_y(x,y),$$

то

$$\frac{dw}{dz} = v^* = v_x - iv_y.$$



Связь плоской гидродинамической задачи с ТФКП

Соотношение

$$w = f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

связывает аналитическую функцию $w(z)$ с определенной кинематической картиной течения и полем (v_x, v_y) с помощью аппарата теории функций комплексного переменного.

Рассмотрим простейшие примеры.

Однородное поступательное течение

Комплексный потенциал

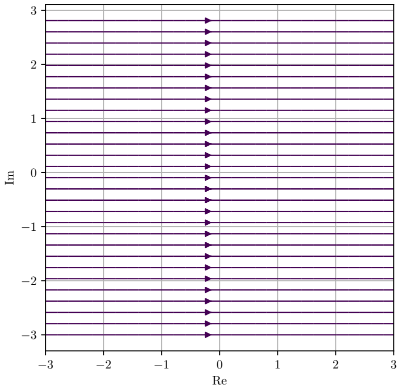
$$w(z) = az, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Комплексная скорость

$$\frac{dw}{dz} = a = v_x - iv_y \Rightarrow v_x = a, \quad v_y = 0.$$

Однородное поступательное течение: картина течения

$$a > 0$$



Источник и сток

Комплексный потенциал

$$w(z) = \frac{q}{2\pi}\ln(z - z_0), \quad q \in \mathbb{R}, z_0 \in \mathbb{C}.$$

Комплексная скорость (при $z_0 = 0$)

Пусть $z = x + iy = re^{i\theta}$, тогда

$$\frac{dw}{dz} = \frac{q}{2\pi}\frac{1}{z} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \dfrac{q}{2\pi r}\dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{q}{2\pi r}\cos\theta, \\ v_y = \dfrac{q}{2\pi r}\dfrac{y}{x^2+y^2} = \dfrac{q}{2\pi r}\sin\theta. \end{cases}$$

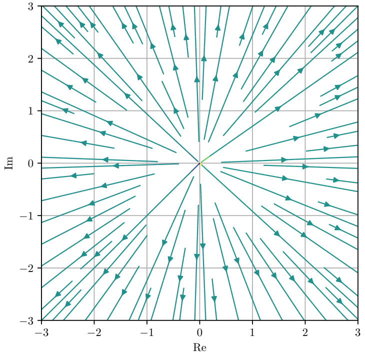
Картина течения

Нарисовать картину течения при $q > 0$ (источник) и $q < 0$ (сток).

Источник и сток: картина течения

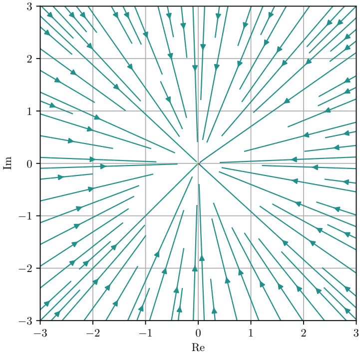
Источник

$q > 0$



Сток

$q < 0$



Вихрь

Комплексный потенциал

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln(z - z_0), \quad \Gamma \in \mathbb{R}, z_0 \in \mathbb{C}.$$

Комплексная скорость (при $z_0 = 0$)

Пусть $z = x + iy = re^{i\theta}$, тогда

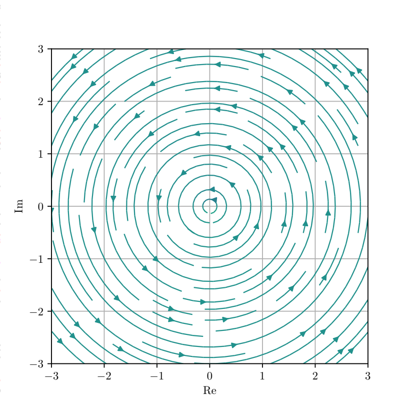
$$\frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z} \Rightarrow \begin{cases} v_x = -\dfrac{\Gamma}{2\pi r}\dfrac{y}{x^2+y^2} = -\dfrac{\Gamma}{2\pi r}\sin\theta, \\ v_y = \dfrac{\Gamma}{2\pi r}\dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{\Gamma}{2\pi r}\cos\theta. \end{cases}$$

Картина течения

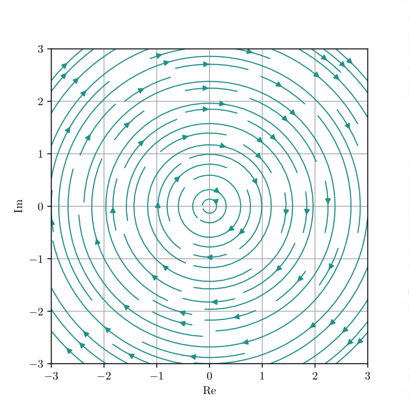
Нарисовать картину течения при $\Gamma > 0$ и $\Gamma < 0$.

Вихрь: картина течения

$\Gamma > 0$



$\Gamma < 0$



Принцип суперпозиций

Утверждение

Вследствие линейности уравнения неразрывности относительно потенциала, если в области имеется несколько течений с потенциалами $w_1(z)$, $w_2(z)$, …, $w_n(z)$, то общий потенциал всего течения в заданной точке равен сумме потенциалов всех течений, присутствующих в области:

$$w(z) = w_1(z) + w_2(z) + \ldots + w_n(z).$$

Диполь

Комплексный потенциал

$$w(z) = \frac{De^{i\alpha}}{2\pi z}, \quad D, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Комплексная скорость (при $\alpha = 0$)

Пусть $z = x + iy = re^{i\theta}$, тогда

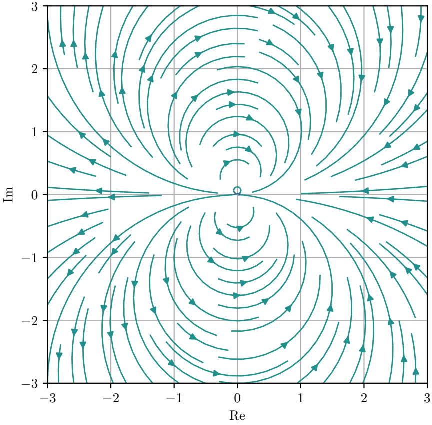
$$\frac{dw}{dz} = -\frac{D}{2\pi}\frac{1}{z^2} \Rightarrow \begin{cases} v_x = -\dfrac{D}{2\pi r^2}\cos 2\theta, \\ v_y = -\dfrac{D}{2\pi r^2}\sin 2\theta. \end{cases}$$

Картина течения

Нарисовать картину течения.

Диполь: картина течения

$$D > 0$$



Литература

Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М.:Гос. издат. физ.-мат. лит., 1963.