Трёхмерные осесимметричные потенциальные течения идеальной жидкости

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель

Кафедра аэрофизики и газовой динамики ФФ НГУ

30 января 2019 г.

Аннотация

Основные определения

Определение

Течение называется осесимметричным, если существует такая прямая l, что во всех плоскостях, проходящих через l картина течения одинакова и траектория жидкой частицы лежит в полуплоскостях, проходящих через l.

Определение

Течение называется потенциальным, если в некоторой области пространства можно определить потенциал $\varphi(t, x, y, z)$, такой что

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \varphi.$$

Основные уравнения

Для трёхмерных потенциальных течений идеальной жидкости определённых в некоторой области пространства справедливы следующие уравнения.

Уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \vec{v} = \Delta\varphi = 0, \quad \vec{v} = \nabla\varphi$$

Интеграл Коши

$$\frac{\nabla\varphi^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t)^1$$

Интеграл Коши позволяет найти распределение давления по заданному потенциалу, определённому из уравнения неразрывности ($\rho = const$).

[1] Считаем, что поле внешних сил отстутствует

Уравнение неразрывности в различных системах координат

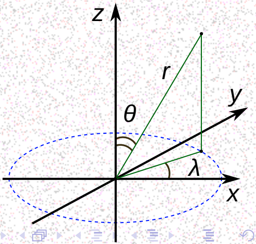
Сферическая система координат r, θ, λ

$$\frac{1}{r^2 \sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right)\right\} = 0,$$

где

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}, \quad v_\lambda = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}.$$

В случае осесимметричного течения можно пренебречь зависимостью φ от λ.



Уравнение неразрывности в различных системах координат

Цилиндрическая система координат r, θ, z

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)+\frac{\partial}{\partial \theta}v_\theta+\frac{\partial}{\partial \lambda}(rv_z)\right\}=0,$$

где

$$v_r=\frac{\partial \varphi}{\partial r},\quad v_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta},\quad v_z=\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

В случае осесимметричного течения можно пренебречь зависимостью φ от θ.