Аффинный ортогональный тензор

к.ф.-м.н. *Верещагин Антон Сергеевич*

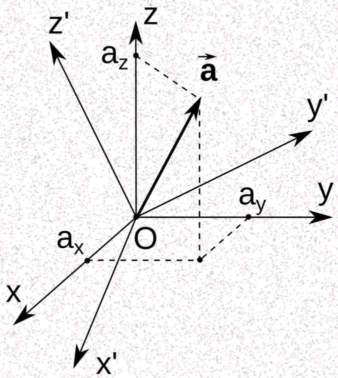
Лекция 2

7 сентября 2018 г.

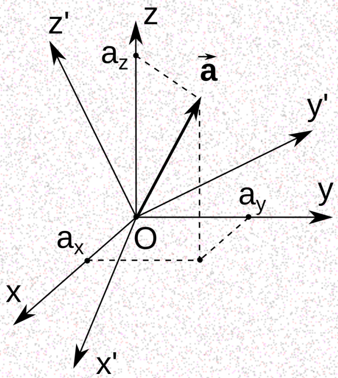
Аннотация

Аффинный ортогональный тензор второго ранга. Диада. Сопряженный тензор. Симметричные и антисимметричные тензоры. Теоремы о разложении тензора. Скалярное и векторное умножение тензора на вектор. Скалярное произведение тензоров.

Аффинный ортогональный вектор



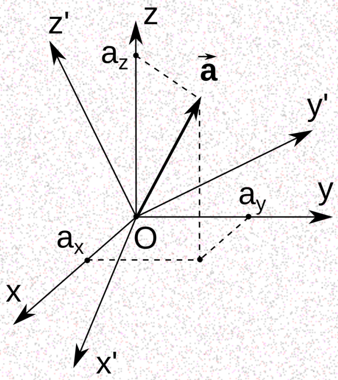
Аффинный ортогональный вектор



Пусть в некоторой ортогональной прямолинейной системе координат $Oxyz$

$$\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}a_x + \vec{\mathbf{j}}a_y + \vec{\mathbf{k}}a_z.$$

Аффинный ортогональный вектор



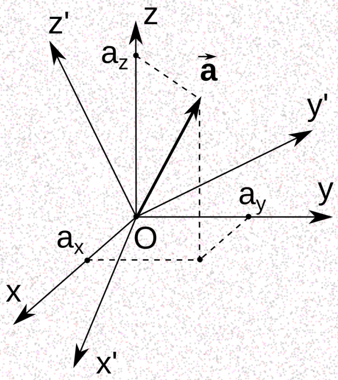
Пусть в некоторой ортогональной прямолинейной системе координат $Oxyz$

$$\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}a_x + \vec{\mathbf{j}}a_y + \vec{\mathbf{k}}a_z.$$

Тогда в другой ортогональной прямолинейной системе координат $Ox'y'z'$ вектор будет иметь координаты:

$$a_{x'} \quad = \quad a_x \cos(x, x') + a_y \cos(y, x') + a_z \cos(z, x'),$$

Аффинный ортогональный вектор



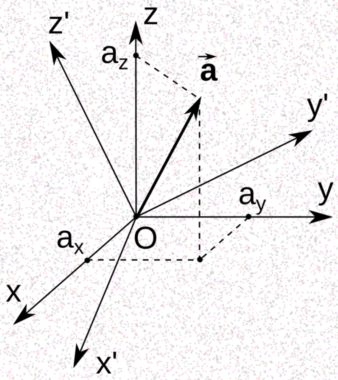
Пусть в некоторой ортогональной прямолинейной системе координат $Oxyz$

$$\vec{a} = \vec{\mathbf{i}} a_x + \vec{\mathbf{j}} a_y + \vec{\mathbf{k}} a_z.$$

Тогда в другой ортогональной прямолинейной системе координат $Ox'y'z'$ вектор будет иметь координаты:

$$\begin{aligned} a_{x'} &= a_x \cos(x, x') + a_y \cos(y, x') + a_z \cos(z, x'), \\ a_{y'} &= a_x \cos(x, y') + a_y \cos(y, y') + a_z \cos(z, y'), \end{aligned}$$

Аффинный ортогональный вектор



Пусть в некоторой ортогональной прямолинейной системе координат $Oxyz$

$$\vec{a} = \vec{\mathbf{i}} a_x + \vec{\mathbf{j}} a_y + \vec{\mathbf{k}} a_z .$$

Тогда в другой ортогональной прямолинейной системе координат $Ox'y'z'$ вектор будет иметь координаты:

$$\begin{aligned}
a_{x'} &= a_x \cos(x, x') + a_y \cos(y, x') + a_z \cos(z, x'), \\
a_{y'} &= a_x \cos(x, y') + a_y \cos(y, y') + a_z \cos(z, y'), \\
a_{z'} &= a_x \cos(x, z') + a_y \cos(y, z') + a_z \cos(z, z').
\end{aligned}$$

Аффинный ортогональный вектор

Определение

Если для прямолинейной ортогональной системы координат $Oxyz$ *имеется совокупность трех величин* a_x, a_y, a_z, *преобразующихся по вышеуказанным формулам в величины* $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$, *в другой ортогональной прямолинейной системе координат* $Ox'y'z'$,

Аффинный ортогональный вектор

Определение

Если для прямолинейной ортогональной системы координат $Oxyz$ имеется совокупность трех величин a_x, a_y, a_z, преобразующихся по вышеуказанным формулам в величины $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$, в другой ортогональной прямолинейной системе координат $Ox'y'z'$, то совокупность этих величин определяет аффинный ортогональный вектор $\vec{a}$. Скалярные величины a_x, a_y, a_z называются составляющими (компонентами) вектора $\vec{a}$ по осям Ox, Oy, Oz.

Аффинный ортогональный тензор второго ранга

Определение

Если для прямолинейной ортогональной системы координат $Oxyz$ имеется совокупность трех векторов $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$, $\vec{p}_z$, преобразующихся по формулам в величины $\vec{p}_{x'}$, $\vec{p}_{y'}$, $\vec{p}_{z'}$, в другой системе координат $Ox'y'z'$:

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{x'} &= \vec{p}_x \cos(x, x') + \vec{p}_y \cos(y, x') + \vec{p}_z \cos(z, x'),\\
\vec{p}_{y'} &= \vec{p}_x \cos(x, y') + \vec{p}_y \cos(y, y') + \vec{p}_z \cos(z, y'),\\
\vec{p}_{z'} &= \vec{p}_x \cos(x, z') + \vec{p}_y \cos(y, z') + \vec{p}_z \cos(z, z'),
\end{aligned}$$

Аффинный ортогональный тензор второго ранга

Определение

Если для прямолинейной ортогональной системы координат $Oxyz$ имеется совокупность трех векторов $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$, $\vec{p}_z$, преобразующихся по формулам в величины $\vec{p}_{x'}$, $\vec{p}_{y'}$, $\vec{p}_{z'}$, в другой системе координат $Ox'y'z'$:

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{x'} &= \vec{p}_x \cos(x, x') + \vec{p}_y \cos(y, x') + \vec{p}_z \cos(z, x'),\\
\vec{p}_{y'} &= \vec{p}_x \cos(x, y') + \vec{p}_y \cos(y, y') + \vec{p}_z \cos(z, y'),\\
\vec{p}_{z'} &= \vec{p}_x \cos(x, z') + \vec{p}_y \cos(y, z') + \vec{p}_z \cos(z, z'),
\end{aligned}$$

то совокупность этих величин определяет аффинный ортогональный тензор второго ранга. Векторы $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$, $\vec{p}_z$ называются составляющими (компонентами) тензора Π по осям Ox, Oy, Oz.

Матричное представление тензора

Будем обозначать

$$\mathbf{\Pi} = \vec{\mathbf{i}}\vec{p}_x + \vec{\mathbf{j}}\vec{p}_y + \vec{\mathbf{k}}\vec{p}_z.$$

Матричное представление тензора

Будем обозначать

$$\mathbf{\Pi} = \vec{\mathbf{i}}\vec{p}_x + \vec{\mathbf{j}}\vec{p}_y + \vec{\mathbf{k}}\vec{p}_z.$$

Таким образом, тензор представляет собой набор из 9 компонент:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix}$$

Матричное представление тензора

Будем обозначать

$$\mathbf{\Pi} = \vec{\mathbf{i}}\vec{p}_x + \vec{\mathbf{j}}\vec{p}_y + \vec{\mathbf{k}}\vec{p}_z.$$

Таким образом, тензор представляет собой набор из 9 компонент:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} \leftarrow & \vec{p}_x = p_{xx}\vec{\mathbf{i}} + p_{xy}\vec{\mathbf{j}} + p_{xz}\vec{\mathbf{k}} \\ \leftarrow & \vec{p}_y = p_{yx}\vec{\mathbf{i}} + p_{yy}\vec{\mathbf{j}} + p_{yz}\vec{\mathbf{k}} \\ \leftarrow & \vec{p}_z = p_{zx}\vec{\mathbf{i}} + p_{zy}\vec{\mathbf{j}} + p_{zz}\vec{\mathbf{k}} \end{array}$$

Матричное представление тензора

Будем обозначать

$$\mathbf{\Pi} = \vec{\mathbf{i}}\vec{p}_x + \vec{\mathbf{j}}\vec{p}_y + \vec{\mathbf{k}}\vec{p}_z.$$

Таким образом, тензор представляет собой набор из 9 компонент:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} \leftarrow & \vec{p}_x = & p_{xx}\vec{\mathbf{i}} + p_{xy}\vec{\mathbf{j}} + p_{xz}\vec{\mathbf{k}} \\ \leftarrow & \vec{p}_y = & p_{yx}\vec{\mathbf{i}} + p_{yy}\vec{\mathbf{j}} + p_{yz}\vec{\mathbf{k}} \\ \leftarrow & \vec{p}_z = & p_{zx}\vec{\mathbf{i}} + p_{zy}\vec{\mathbf{j}} + p_{zz}\vec{\mathbf{k}} \end{array}$$

В дальнейшем:

- вместо координат x, y,z будем писать x_1, x_2, x_3;
- базисные векторы будем обозначать $\vec{\mathbf{i}}_1$, $\vec{\mathbf{i}}_2$, $\vec{\mathbf{i}}_3$;
- компоненты тензора будем нумеровать, т.е. p_{ij} $(i, j = \overline{1, 3})$.

Преобразование ортогональных систем координат

Пусть задано некоторое преобразование одной ортогональной прямолинейной системы координат в другую с помощью матрицы преобразования, т.е. заданы направляющие косинусы единичных векторов новых базисных векторов $\alpha_{ik} = \cos(x_i, x'_k)$:

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

Преобразование ортогональных систем координат

Пусть задано некоторое преобразование одной ортогональной прямолинейной системы координат в другую с помощью матрицы преобразования, т.е. заданы направляющие косинусы единичных векторов новых базисных векторов $\alpha_{ik} = \cos(x_i, x'_k)$:

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_{is}^2 = 1 & (s = \overline{1,3}), \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_{is}\alpha_{ik} = 0 & (s, k = \overline{1,3}; s \neq k). \end{cases}$$

Преобразование ортогональных систем координат

Пусть задано некоторое преобразование одной ортогональной прямолинейной системы координат в другую с помощью матрицы преобразования, т.е. заданы направляющие косинусы единичных векторов новых базисных векторов $\alpha_{ik} = \cos(x_i, x'_k)$:

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_{is}^2 = 1 & (s = \overline{1,3}), \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_{is}\alpha_{ik} = 0 & (s, k = \overline{1,3}; s \neq k). \end{cases}$$

Таким образом, Q – ортогональная матрица, т.к.

$$Q^{-1} = Q^{\mathrm{t}}.$$

Компоненты тензора в штрихованной системе координат

Компоненты вектора $\vec{a}$ и тензора $\mathbf{\Pi}$ в новой штрихованной системе координат a'_1, a'_2, a'_3 и $\vec{p'}_1$, $\vec{p'}_2$, $\vec{p'}_3$ имеют вид:

$$a'_k = a_{x'_k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} a_{x_i}, \quad \vec{p'}_k = \vec{p}_{x'_k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} \vec{p}_{x_i} \quad (k = \overline{1,3}).$$

Компоненты тензора в штрихованной системе координат

Компоненты вектора $\vec{a}$ и тензора $\mathbf{\Pi}$ в новой штрихованной системе координат a'_1, a'_2, a'_3 и $\vec{p'}_1$, $\vec{p'}_2$, $\vec{p'}_3$ имеют вид:

$$a'_k = a_{x'_k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} a_{x_i}, \quad \vec{p'}_k = \vec{p}_{x'_k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} \vec{p}_{x_i} \quad (k = \overline{1,3}).$$

Проекция вектора $\vec{p}_{x'_k}$ на ось x'_l: $(\vec{p}_{x'_k})_{x'_l} = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr} (\vec{p}_{x_r})_{x'_l}$.

Компоненты тензора в штрихованной системе координат

Компоненты вектора $\vec{a}$ и тензора $\mathbf{\Pi}$ в новой штрихованной системе координат a'_1, a'_2, a'_3 и $\vec{p'}_1$, $\vec{p'}_2$, $\vec{p'}_3$ имеют вид:

$$a'_k = a_{x'_k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} a_{x_i}, \quad \vec{p'}_k = \vec{p}_{x'_k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} \vec{p}_{x_i} \quad (k = \overline{1,3}).$$

Проекция вектора $\vec{p}_{x'_k}$ на ось x'_l: $(\vec{p}_{x'_k})_{x'_l} = \sum\limits_{r=1}^{3} \alpha_{kr} (\vec{p}_{x_r})_{x'_l}$.

Из определения аффинного вектора: $(\vec{p}_{x_r})_{x'_l} = \sum\limits_{s=1}^{3} \alpha_{ls} \vec{p}_{x_r x_s}$.

Компоненты тензора в штрихованной системе координат

Компоненты вектора $\vec{a}$ и тензора $\mathbf{\Pi}$ в новой штрихованной системе координат a'_1, a'_2, a'_3 и $\vec{p'}_1$, $\vec{p'}_2$, $\vec{p'}_3$ имеют вид:

$$a'_k = a_{x'_k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} a_{x_i}, \quad \vec{p'}_k = \vec{p}_{x'_k} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{ki} \vec{p}_{x_i} \quad (k = \overline{1,3}).$$

Проекция вектора $\vec{p}_{x'_k}$ на ось x'_l: $(\vec{p}_{x'_k})_{x'_l} = \sum\limits_{r=1}^{3} \alpha_{kr} (\vec{p}_{x_r})_{x'_l}$.

Из определения аффинного вектора: $(\vec{p}_{x_r})_{x'_l} = \sum\limits_{s=1}^{3} \alpha_{ls} \vec{p}_{x_r x_s}$.

Подставим последнее равенство в предпоследнее:

$$p_{x'_k x'_l} = \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} \alpha_{kr} \alpha_{ls} p_{x_r x_s} \text{ или } p'_{kl} = \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} \alpha_{kr} \alpha_{ls} p_{rs}.$$

Определение тензора (альтернативное)

Определение (альтернативное)

Если для каждой прямолинейной прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$ имеется совокупность девяти величин p_{kl}, преобразующихся в величины p'_{kl} в новой системе координат $Ox'_1x'_2x'_3$ по формуле:

$$p'_{kl} = \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \alpha_{kr}\alpha_{ls}p_{rs},$$

то совокупность этих величин определяет аффинный ортогональный тензор второго ранга $\mathbf{\Pi}$ *в пространстве трех измерений.*

Альтернативная запись тензора

Записанную в новых обозначения формулу для разложения векторов

$$\vec{p}_k = \sum_{l=1}^{3} \vec{i}_l p_{kl}, \quad (k = 1, 2, 3)$$

Альтернативная запись тензора

Записанную в новых обозначения формулу для разложения векторов

$$\vec{p}_k = \sum_{l=1}^{3} \vec{i}_l p_{kl}, \quad (k = 1, 2, 3)$$

подставим в равенство, определяющее тензор, и получим условную запись

$$\mathbf{\Pi} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \vec{i}_k \vec{i}_l p_{kl}.$$

Единичный тензор

Пусть

$$\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Тензор $\boldsymbol{I}$ называется единичным тензором.

Единичный тензор

Пусть

$$\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Тензор $\boldsymbol{I}$ называется единичным тензором.

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Единичный тензор

Пусть

$$\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Тензор $\boldsymbol{I}$ называется единичным тензором.

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \quad \vec{p}_1 = \vec{\mathbf{i}}_1 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_2 = \vec{\mathbf{i}}_2 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_3 = \vec{\mathbf{i}}_3 \end{array}$$

Единичный тензор

Пусть

$$\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Тензор $\boldsymbol{I}$ называется единичным тензором.

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \quad \vec{p}_1 = \vec{\mathbf{i}}_1 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_2 = \vec{\mathbf{i}}_2 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_3 = \vec{\mathbf{i}}_3 \end{array} \qquad p_{rs} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s, \\ 0, r \neq s. \end{cases}$$

Единичный тензор

Пусть

$$\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Тензор $\boldsymbol{I}$ называется единичным тензором.

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & \vec{p}_1 = \vec{\mathbf{i}}_1 \\ \leftarrow & \vec{p}_2 = \vec{\mathbf{i}}_2 \\ \leftarrow & \vec{p}_3 = \vec{\mathbf{i}}_3 \end{matrix} \qquad p_{rs} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s, \\ 0, r \neq s. \end{cases}$$

В альтернативной системе координат

$$p'_{kl} =$$

Единичный тензор

Пусть

$$\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Тензор $\boldsymbol{I}$ называется единичным тензором.

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow & \vec{p}_1 = \vec{\mathbf{i}}_1 \\ \leftarrow & \vec{p}_2 = \vec{\mathbf{i}}_2 \\ \leftarrow & \vec{p}_3 = \vec{\mathbf{i}}_3 \end{matrix} \qquad p_{rs} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s, \\ 0, r \neq s. \end{cases}$$

В альтернативной системе координат

$$p'_{kl} = \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \alpha_{kr}\alpha_{ls}p_{rs} =$$

Единичный тензор

Пусть

$$\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Тензор $\boldsymbol{I}$ называется единичным тензором.

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \quad \vec{p}_1 = \vec{\mathbf{i}}_1 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_2 = \vec{\mathbf{i}}_2 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_3 = \vec{\mathbf{i}}_3 \end{array} \qquad p_{rs} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s, \\ 0, r \neq s. \end{cases}$$

В альтернативной системе координат

$$p'_{kl} = \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \alpha_{kr}\alpha_{ls}p_{rs} = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr}\alpha_{lr} =$$

Единичный тензор

Пусть

$$\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Тензор $\boldsymbol{I}$ называется единичным тензором.

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \quad \vec{p}_1 = \vec{\mathbf{i}}_1 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_2 = \vec{\mathbf{i}}_2 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_3 = \vec{\mathbf{i}}_3 \end{array} \qquad p_{rs} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s, \\ 0, r \neq s. \end{cases}$$

В альтернативной системе координат

$$p'_{kl} = \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \alpha_{kr}\alpha_{ls}p_{rs} = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr}\alpha_{lr} = \delta_{kl}.$$

Единичный тензор

Пусть

$$\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Тензор $\boldsymbol{I}$ называется единичным тензором.

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \quad \vec{p}_1 = \vec{\mathbf{i}}_1 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_2 = \vec{\mathbf{i}}_2 \\ \leftarrow \quad \vec{p}_3 = \vec{\mathbf{i}}_3 \end{array} \qquad p_{rs} = \delta_{rs} = \begin{cases} 1, r = s, \\ 0, r \neq s. \end{cases}$$

В альтернативной системе координат

$$p'_{kl} = \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \alpha_{kr}\alpha_{ls}p_{rs} = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr}\alpha_{lr} = \delta_{kl}.$$

Тензор $\boldsymbol{I}$ имеет одни и те же компоненты в любой ортогональной системе координат.

Диада

Определение

Пусть $\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 a_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 a_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 a_3$ *и* $\vec{b} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3$,

Диада

Определение

Пусть $\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 a_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 a_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 a_3$ *и* $\vec{b} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3$*, тогда* ***диадным*** *или* ***тензорными произведением*** *векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется тензор, определяемый следующим соотношением:*

Диада

Определение

Пусть $\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 a_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 a_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 a_3$ *и* $\vec{b} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3$, *тогда диадным или тензорными произведением векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется тензор, определяемый следующим соотношением:*

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a}\vec{b} =$$

Диада

Определение

Пусть $\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 a_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 a_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 a_3$ *и* $\vec{b} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3$, *тогда диадным или тензорными произведением векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется тензор, определяемый следующим соотношением:*

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a}\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}$$

Корректность определения диады

При переходе к новой системе координат $Ox_1'x_2'x_3'$ компоненты этих векторов преобразуются по формулам:

$$a_k' = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr} a_r, \quad b_l' = \sum_{s=1}^{3} \alpha_{ls} b_s \quad (k, l = 1, 2, 3).$$

Корректность определения диады

При переходе к новой системе координат $Ox_1'x_2'x_3'$ компоненты этих векторов преобразуются по формулам:

$$a_k' = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr} a_r, \quad b_l' = \sum_{s=1}^{3} \alpha_{ls} b_s \quad (k, l = 1, 2, 3).$$

Перемножив оба эти равенства, получим

$$a_k' b_l' = \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} \alpha_{ks} \alpha_{ls} a_r b_s.$$

следовательно приведенное выражение является тензором по определению (альтернативному).

Сопряженный тензор

Определение

Тензор $\mathbf{\Pi}_c$ *называется* *сопряженным* *к тензору* $\mathbf{\Pi}$*, если компоненты его получены транспонированием компонент тензора* $\mathbf{\Pi}$.

Сопряженный тензор

Определение

Тензор $\mathbf{\Pi}_c$ *называется* *сопряженным* *к тензору* $\mathbf{\Pi}$, *если компоненты его получены транспонированием компонент тензора* $\mathbf{\Pi}$.

Сопряжение диады

$$(\vec{a}\vec{b})_c =$$

Сопряженный тензор

Определение

Тензор $\mathbf{\Pi}_c$ *называется* ***сопряженным*** *к тензору* $\mathbf{\Pi}$, *если компоненты его получены транспонированием компонент тензора* $\mathbf{\Pi}$.

Сопряжение диады

$$(\vec{a}\vec{b})_c = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}_c =$$

Сопряженный тензор

Определение

Тензор $\mathbf{\Pi}_c$ *называется* *сопряженным* *к тензору* $\mathbf{\Pi}$, *если компоненты его получены транспонированием компонент тензора* $\mathbf{\Pi}$.

Сопряжение диады

$$(\vec{a}\vec{b})_c = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}_c = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 \end{pmatrix} =$$

Сопряженный тензор

Определение

Тензор $\mathbf{\Pi}_c$ *называется* *сопряженным* *к тензору* $\mathbf{\Pi}$*, если компоненты его получены транспонированием компонент тензора* $\mathbf{\Pi}$.

Сопряжение диады

$$(\vec{a}\vec{b})_c = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}_c = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 \end{pmatrix} = \vec{b}\vec{a}.$$

Сопряженный тензор

Определение

Тензор $\mathbf{\Pi}_c$ *называется* *сопряженным* *к тензору* $\mathbf{\Pi}$, *если компоненты его получены транспонированием компонент тензора* $\mathbf{\Pi}$.

Сопряжение диады

$$(\vec{a}\vec{b})_c = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}_c = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 \end{pmatrix} = \vec{b}\vec{a}.$$

Таким образом, $(\vec{a}\vec{b})_c = \vec{b}\vec{a}$.

Сумма тензоров

Определение

Суммой тензоров $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется тензор $\boldsymbol{C}$, компоненты которого равны сумме компонент тензоров $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Пишут $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$.

Сумма тензоров

Определение

Суммой тензоров $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется тензор $\boldsymbol{C}$, компоненты которого равны сумме компонент тензоров $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Пишут $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$.

Используя альтернативное определение легко показать, что определение суммы корректно, т.е. $\boldsymbol{C}$ является тензором.

Симметричный тензор

Определение

Тензор $\boldsymbol{S}$ *называется* **симметричным**, *если* $\boldsymbol{S}_c = \boldsymbol{S}$.

Симметричный тензор

Определение

*Тензор $\boldsymbol{S}$ называется **симметричным**, если $\boldsymbol{S}_c = \boldsymbol{S}$.*

Покомпонентная запись симметричного тензора

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix}$$

Симметричный тензор

Определение

Тензор $\boldsymbol{S}$ *называется* *симметричным*, *если* $\boldsymbol{S}_c = \boldsymbol{S}$.

Покомпонентная запись симметричного тензора

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{pmatrix}$$

Симметричный тензор определяется 6 компонентами.

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор $\boldsymbol{A}$ *называется* антисимметричным, *если* $\boldsymbol{A}_c = -\boldsymbol{A}$.

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор $\boldsymbol{A}$ *называется антисимметричным, если* $\boldsymbol{A}_c = -\boldsymbol{A}$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$.

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор $\boldsymbol{A}$ *называется* *антисимметричным*, *если* $\boldsymbol{A}_c = -\boldsymbol{A}$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$A = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{p}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{p}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{p}_3 =$$

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор $\boldsymbol{A}$ *называется антисимметричным, если* $\boldsymbol{A}_c = -\boldsymbol{A}$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$A = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{p}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{p}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

Определение

Тензор $\boldsymbol{A}$ *называется антисимметричным, если* $\boldsymbol{A}_c = -\boldsymbol{A}$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$A = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{p}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{p}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\vec{p}_1 \;=\; -\omega_3\vec{\mathbf{i}}_2 + \omega_2\vec{\mathbf{i}}_3 \;=\; \vec{\mathbf{i}}_1 \times \vec{\omega}$,

Определение

Тензор $\boldsymbol{A}$ *называется антисимметричным, если* $\boldsymbol{A}_c = -\boldsymbol{A}$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$A = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{p}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{p}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\vec{p}_1 = -\omega_3\vec{\mathbf{i}}_2 + \omega_2\vec{\mathbf{i}}_3 = \vec{\mathbf{i}}_1 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_2 = \omega_3\vec{\mathbf{i}}_1 - \omega_1\vec{\mathbf{i}}_3 = \vec{\mathbf{i}}_2 \times \vec{\omega}$,

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор $\boldsymbol{A}$ *называется* *антисимметричным*, *если* $\boldsymbol{A}_c = -\boldsymbol{A}$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$A = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{p}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{p}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\vec{p}_1 = -\omega_3\vec{\mathbf{i}}_2 + \omega_2\vec{\mathbf{i}}_3 = \vec{\mathbf{i}}_1 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_2 = \omega_3\vec{\mathbf{i}}_1 - \omega_1\vec{\mathbf{i}}_3 = \vec{\mathbf{i}}_2 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_3 = -\omega_2\vec{\mathbf{i}}_1 + \omega_1\vec{\mathbf{i}}_2 = \vec{\mathbf{i}}_3 \times \vec{\omega}$.

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор $\boldsymbol{A}$ *называется антисимметричным, если* $\boldsymbol{A}_c = -\boldsymbol{A}$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$A = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{p}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{p}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\vec{p}_1 = -\omega_3\vec{\mathbf{i}}_2 + \omega_2\vec{\mathbf{i}}_3 = \vec{\mathbf{i}}_1 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_2 = \omega_3\vec{\mathbf{i}}_1 - \omega_1\vec{\mathbf{i}}_3 = \vec{\mathbf{i}}_2 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_3 = -\omega_2\vec{\mathbf{i}}_1 + \omega_1\vec{\mathbf{i}}_2 = \vec{\mathbf{i}}_3 \times \vec{\omega}$.

Таким образом, $A = \vec{\mathbf{i}}_1(\vec{\mathbf{i}}_1 \times \vec{\omega}) + \vec{\mathbf{i}}_2(\vec{\mathbf{i}}_2 \times \vec{\omega}) + \vec{\mathbf{i}}_3(\vec{\mathbf{i}}_3 \times \vec{\omega})$.

Антисимметричный тензор

Определение

Тензор $\boldsymbol{A}$ *называется* *антисимметричным*, *если* $\boldsymbol{A}_c = -\boldsymbol{A}$.

Покомпонентная запись антисимметричного тензора

Введем вектор $\vec{\omega} = \vec{i}_1\omega_1 + \vec{i}_2\omega_2 + \vec{i}_3\omega_3$. Тогда

$$A = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{p}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{p}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\vec{p}_1 = -\omega_3\vec{\mathbf{i}}_2 + \omega_2\vec{\mathbf{i}}_3 = \vec{\mathbf{i}}_1 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_2 = \omega_3\vec{\mathbf{i}}_1 - \omega_1\vec{\mathbf{i}}_3 = \vec{\mathbf{i}}_2 \times \vec{\omega}$, $\vec{p}_3 = -\omega_2\vec{\mathbf{i}}_1 + \omega_1\vec{\mathbf{i}}_2 = \vec{\mathbf{i}}_3 \times \vec{\omega}$.

Таким образом, $A = \vec{\mathbf{i}}_1(\vec{\mathbf{i}}_1 \times \vec{\omega}) + \vec{\mathbf{i}}_2(\vec{\mathbf{i}}_2 \times \vec{\omega}) + \vec{\mathbf{i}}_3(\vec{\mathbf{i}}_3 \times \vec{\omega})$.

Антисимметричный тензор задается 3 компонентами.

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор $\mathbf{\Pi}$.

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор $\mathbf{\Pi}$. Легко убедиться, что

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A},$$

где $\boldsymbol{S} = \dfrac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – симметричный, а $\boldsymbol{A} = \dfrac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\boldsymbol{S}_c =$$

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор $\mathbf{\Pi}$. Легко убедиться, что

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A},$$

где $\boldsymbol{S} = \dfrac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – симметричный, а $\boldsymbol{A} = \dfrac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\boldsymbol{S}_c = \left(\frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}\right)_c =$$

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор $\mathbf{\Pi}$. Легко убедиться, что

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A},$$

где $\boldsymbol{S} = \dfrac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – симметричный, а $\boldsymbol{A} = \dfrac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\boldsymbol{S}_c = \left(\frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}\right)_c = \frac{\mathbf{\Pi}_c + (\mathbf{\Pi}_c)_c}{2} =$$

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор $\mathbf{\Pi}$. Легко убедиться, что

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A},$$

где $\boldsymbol{S} = \dfrac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – симметричный, а $\boldsymbol{A} = \dfrac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\boldsymbol{S}_c = \left(\frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}\right)_c = \frac{\mathbf{\Pi}_c + (\mathbf{\Pi}_c)_c}{2} = \frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2} =$$

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор $\mathbf{\Pi}$. Легко убедиться, что

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A},$$

где $\boldsymbol{S} = \dfrac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – симметричный, а $\boldsymbol{A} = \dfrac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\boldsymbol{S}_c = \left(\frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}\right)_c = \frac{\mathbf{\Pi}_c + (\mathbf{\Pi}_c)_c}{2} = \frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2} = \boldsymbol{S},$$

$$\boldsymbol{A}_c =$$

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор $\boldsymbol{\Pi}$. Легко убедиться, что

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A},$$

где $\boldsymbol{S} = \dfrac{\boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{\Pi}_c}{2}$ – симметричный, а $\boldsymbol{A} = \dfrac{\boldsymbol{\Pi} - \boldsymbol{\Pi}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\boldsymbol{S}_c = \left(\frac{\boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{\Pi}_c}{2}\right)_c = \frac{\boldsymbol{\Pi}_c + (\boldsymbol{\Pi}_c)_c}{2} = \frac{\boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{\Pi}_c}{2} = \boldsymbol{S},$$

$$\boldsymbol{A}_c = \left(\frac{\boldsymbol{\Pi} - \boldsymbol{\Pi}_c}{2}\right)_c =$$

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор $\mathbf{\Pi}$. Легко убедиться, что

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A},$$

где $\boldsymbol{S} = \dfrac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – симметричный, а $\boldsymbol{A} = \dfrac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\boldsymbol{S}_c = \left(\frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}\right)_c = \frac{\mathbf{\Pi}_c + (\mathbf{\Pi}_c)_c}{2} = \frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2} = \boldsymbol{S},$$

$$\boldsymbol{A}_c = \left(\frac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2}\right)_c = \frac{\mathbf{\Pi}_c - (\mathbf{\Pi}_c)_c}{2} =$$

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор $\mathbf{\Pi}$. Легко убедиться, что

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A},$$

где $\boldsymbol{S} = \dfrac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – симметричный, а $\boldsymbol{A} = \dfrac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\boldsymbol{S}_c = \left(\frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}\right)_c = \frac{\mathbf{\Pi}_c + (\mathbf{\Pi}_c)_c}{2} = \frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2} = \boldsymbol{S},$$

$$\boldsymbol{A}_c = \left(\frac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2}\right)_c = \frac{\mathbf{\Pi}_c - (\mathbf{\Pi}_c)_c}{2} = -\frac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2} =$$

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензора.

Доказательство.

Пусть задан тензор $\mathbf{\Pi}$. Легко убедиться, что

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A},$$

где $\boldsymbol{S} = \dfrac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – симметричный, а $\boldsymbol{A} = \dfrac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2}$ – антисимметричный тензоры. Действительно,

$$\boldsymbol{S}_c = \left(\frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2}\right)_c = \frac{\mathbf{\Pi}_c + (\mathbf{\Pi}_c)_c}{2} = \frac{\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}_c}{2} = \boldsymbol{S},$$

$$\boldsymbol{A}_c = \left(\frac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2}\right)_c = \frac{\mathbf{\Pi}_c - (\mathbf{\Pi}_c)_c}{2} = -\frac{\mathbf{\Pi} - \mathbf{\Pi}_c}{2} = -\boldsymbol{A}.$$

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить в сумму трёх диад, такое разложение не единственно.

Теорема о разложении тензора

Теорема

Всякий тензор можно разложить в сумму трёх диад, такое разложение не единственно.

Доказательство.

Пусть задан тензор $\mathbf{\Pi}$. Легко убедиться, что

$$\mathbf{\Pi} = \vec{\mathbf{i}}\vec{p}_x + \vec{\mathbf{j}}\vec{p}_y + \vec{\mathbf{k}}\vec{p}_z,$$

где $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$ – базисные векторы пространства R^3; $\vec{p}_x$, $\vec{p}_y$, $\vec{p}_z$ – компоненты тензора в указанном базисе.

$\square$

Скалярное и векторное умножение тензора на вектор

Определение

Под скалярным произведением тензора $\mathbf{\Pi} = \vec{i}_1 \vec{p}_1 + \vec{i}_2 \vec{p}_2 + \vec{i}_3 \vec{p}_3$ *на вектор* $\vec{a} = \vec{i}_1 a_1 + \vec{i}_2 a_2 + \vec{i}_3 a_3$ *справа будем понимать вектор* $\vec{a}'$ *:*

$$\vec{a}' = \mathbf{\Pi} \cdot \vec{a} = \vec{i}_1(\vec{p}_1 \cdot \vec{a}) + \vec{i}_2(\vec{p}_2 \cdot \vec{a}) + \vec{i}_3(\vec{p}_3 \cdot \vec{a}).$$

Скалярное и векторное умножение тензора на вектор

Определение

Под *скалярным произведением тензора* $\mathbf{\Pi} = \vec{i}_1\vec{p}_1 + \vec{i}_2\vec{p}_2 + \vec{i}_3\vec{p}_3$ *на вектор* $\vec{a} = \vec{i}_1 a_1 + \vec{i}_2 a_2 + \vec{i}_3 a_3$ *справа* *будем понимать вектор* $\vec{a'}'$:

$$\vec{a'} = \mathbf{\Pi} \cdot \vec{a} = \vec{i}_1(\vec{p}_1 \cdot \vec{a}) + \vec{i}_2(\vec{p}_2 \cdot \vec{a}) + \vec{i}_3(\vec{p}_3 \cdot \vec{a}).$$

Определение

Под *скалярным произведением вектора* $\vec{a}$ *на тензор* $\mathbf{\Pi}$ *слева* *понимается вектор* $\vec{a''}$:

$$\vec{a''} = \vec{a} \cdot \mathbf{\Pi} = (\vec{a} \cdot \vec{i}_1)\vec{p}_1 + (\vec{a} \cdot \vec{i}_2)\vec{p}_2 + (\vec{a} \cdot \vec{i}_3)\vec{p}_3 =$$

$$= a_1\vec{p}_1 + a_2\vec{p}_2 + a_3\vec{p}_3.$$

Диада (повтор)

Определение

Пусть $\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 a_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 a_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 a_3$ *и* $\vec{b} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3$, *тогда диадным или тензорными произведением векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется тензор, определяемый следующим соотношением:*

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a}\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{i}}_1 (a_1 \vec{b}) + \vec{\mathbf{i}}_2 (a_2 \vec{b}) + \vec{\mathbf{i}}_3 (a_3 \vec{b}).$$

Диада (повтор)

Определение

Пусть $\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 a_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 a_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 a_3$ *и* $\vec{b} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3$, *тогда диадным или тензорными произведением векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется тензор, определяемый следующим соотношением:*

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a}\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{i}}_1 (a_1 \vec{b}) + \vec{\mathbf{i}}_2 (a_2 \vec{b}) + \vec{\mathbf{i}}_3 (a_3 \vec{b}).$$

Линейность диады по каждому аргументу

$$(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}.$$

$$\vec{c}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c}\vec{a} + \vec{c}\vec{b}.$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c})\cdot\vec{a} =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1\vec{c}+\vec{\mathbf{i}}_2 b_2\vec{c}+\vec{\mathbf{i}}_3 b_3\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1(\vec{c}\cdot\vec{a})+\vec{\mathbf{i}}_2 b_2(\vec{c}\cdot\vec{a})+\vec{\mathbf{i}}_3 b_3(\vec{c}\cdot\vec{a}) =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 (\vec{c}\cdot\vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 (\vec{c}\cdot\vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 (\vec{c}\cdot\vec{a}) =$$

$$= (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)(\vec{c}\cdot\vec{a}) =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1(\vec{c}\cdot\vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2(\vec{c}\cdot\vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3(\vec{c}\cdot\vec{a}) =$$

$$= (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)(\vec{c}\cdot\vec{a}) = \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}).$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\vec{c}) =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 (\vec{c}\cdot\vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 (\vec{c}\cdot\vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 (\vec{c}\cdot\vec{a}) =$$

$$= (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)(\vec{c}\cdot\vec{a}) = \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}).$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1\vec{c}+\vec{\mathbf{i}}_2 b_2\vec{c}+\vec{\mathbf{i}}_3 b_3\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1(\vec{c}\cdot\vec{a})+\vec{\mathbf{i}}_2 b_2(\vec{c}\cdot\vec{a})+\vec{\mathbf{i}}_3 b_3(\vec{c}\cdot\vec{a}) =$$

$$= (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)(\vec{c}\cdot\vec{a}) = \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}).$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{\mathbf{i}}_1 b_1\vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2\vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3\vec{c}) = a_1 b_1\vec{c} + a_2 b_2\vec{c} + a_3 b_3\vec{c} =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1\vec{c}+\vec{\mathbf{i}}_2 b_2\vec{c}+\vec{\mathbf{i}}_3 b_3\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1(\vec{c}\cdot\vec{a})+\vec{\mathbf{i}}_2 b_2(\vec{c}\cdot\vec{a})+\vec{\mathbf{i}}_3 b_3(\vec{c}\cdot\vec{a}) =$$

$$= (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)(\vec{c}\cdot\vec{a}) = \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}).$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{\mathbf{i}}_1 b_1\vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2\vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3\vec{c}) = a_1 b_1\vec{c} + a_2 b_2\vec{c} + a_3 b_3\vec{c} =$$

$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)\vec{c} =$$

Скалярное произведение диады на вектор

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – вектора.

$$(\vec{b}\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1\vec{c}+\vec{\mathbf{i}}_2 b_2\vec{c}+\vec{\mathbf{i}}_3 b_3\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{\mathbf{i}}_1 b_1(\vec{c}\cdot\vec{a})+\vec{\mathbf{i}}_2 b_2(\vec{c}\cdot\vec{a})+\vec{\mathbf{i}}_3 b_3(\vec{c}\cdot\vec{a}) =$$

$$= (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)(\vec{c}\cdot\vec{a}) = \vec{b}(\vec{c}\cdot\vec{a}).$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{\mathbf{i}}_1 b_1\vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2\vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3\vec{c}) = a_1 b_1\vec{c} + a_2 b_2\vec{c} + a_3 b_3\vec{c} =$$

$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}.$$

Векторное произведение тензора на вектор

Определение

Под ***векторным произведением тензора*** $\mathbf{\Pi}$ ***на вектор*** $\vec{a}$ ***справа*** *понимается новый тензор* $\mathbf{\Pi}'$, *вычисленный по формуле:*

$$\mathbf{\Pi}' = \mathbf{\Pi} \times \vec{a} = \vec{i}_1(\vec{p}_1 \times \vec{a}) + \vec{i}_2(\vec{p}_2 \times \vec{a}) + \vec{i}_3(\vec{p}_3 \times \vec{a}).$$

Векторное произведение тензора на вектор

Определение

*Под **векторным произведением тензора** $\mathbf{\Pi}$ **на вектор** $\vec{a}$ **справа** понимается новый тензор $\mathbf{\Pi}'$, вычисленный по формуле:*

$$\mathbf{\Pi}' = \mathbf{\Pi} \times \vec{a} = \vec{i}_1(\vec{p}_1 \times \vec{a}) + \vec{i}_2(\vec{p}_2 \times \vec{a}) + \vec{i}_3(\vec{p}_3 \times \vec{a}).$$

Определение

*Под **векторным произведением вектора** $\vec{a}$ **на тензор** $\mathbf{\Pi}$ **слева** понимается новый тензор $\mathbf{\Pi}''$, вычисленный по формуле:*

$$\mathbf{\Pi}'' = \vec{a} \times \Pi = (\vec{a} \times \vec{i}_1)\vec{p}_1 + (\vec{a} \times \vec{i}_2)\vec{p}_2 + (\vec{a} \times \vec{i}_3)\vec{p}_3.$$

Векторное произведение тензора на вектор

Определение

Под ***векторным произведением тензора*** $\mathbf{\Pi}$ ***на вектор*** $\vec{a}$ ***справа*** *понимается новый тензор* $\mathbf{\Pi}'$*, вычисленный по формуле:*

$$\mathbf{\Pi}' = \mathbf{\Pi} \times \vec{a} = \vec{i}_1(\vec{p}_1 \times \vec{a}) + \vec{i}_2(\vec{p}_2 \times \vec{a}) + \vec{i}_3(\vec{p}_3 \times \vec{a}).$$

Определение

Под ***векторным произведением вектора*** $\vec{a}$ ***на тензор*** $\mathbf{\Pi}$ ***слева*** *понимается новый тензор* $\mathbf{\Pi}''$*, вычисленный по формуле:*

$$\mathbf{\Pi}'' = \vec{a} \times \Pi = (\vec{a} \times \vec{i}_1)\vec{p}_1 + (\vec{a} \times \vec{i}_2)\vec{p}_2 + (\vec{a} \times \vec{i}_3)\vec{p}_3.$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

$$\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

$$\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \times (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

$$\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \times (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times \vec{\mathbf{i}}_1)(b_1 \vec{c}) + (a \times \vec{\mathbf{i}}_2)(b_2 \vec{c}) + (a \times \vec{\mathbf{i}}_3)(b_3 \vec{c}) =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

$$\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \times (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times \vec{\mathbf{i}}_1)(b_1 \vec{c}) + (a \times \vec{\mathbf{i}}_2)(b_2 \vec{c}) + (a \times \vec{\mathbf{i}}_3)(b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times \vec{\mathbf{i}}_1 b_1)\vec{c} + (a \times \vec{\mathbf{i}}_2 b_2)\vec{c} + (a \times \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)\vec{c} =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

$$\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \times (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times \vec{\mathbf{i}}_1)(b_1 \vec{c}) + (a \times \vec{\mathbf{i}}_2)(b_2 \vec{c}) + (a \times \vec{\mathbf{i}}_3)(b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times \vec{\mathbf{i}}_1 b_1)\vec{c} + (a \times \vec{\mathbf{i}}_2 b_2)\vec{c} + (a \times \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)\vec{c} =$$

$$= (a \times \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + a \times \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + a \times \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)\vec{c} =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

$$\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \times (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times \vec{\mathbf{i}}_1)(b_1 \vec{c}) + (a \times \vec{\mathbf{i}}_2)(b_2 \vec{c}) + (a \times \vec{\mathbf{i}}_3)(b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times \vec{\mathbf{i}}_1 b_1)\vec{c} + (a \times \vec{\mathbf{i}}_2 b_2)\vec{c} + (a \times \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)\vec{c} =$$

$$= (a \times \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + a \times \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + a \times \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)\vec{c} = (a \times (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3))\vec{c} =$$

Векторное произведение диады на вектор

$$(\vec{b}\vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) \times \vec{a} =$$

$$= \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}).$$

$$\vec{a} \times (\vec{b}\vec{c}) = \vec{a} \times (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 \vec{c} + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times \vec{\mathbf{i}}_1)(b_1 \vec{c}) + (a \times \vec{\mathbf{i}}_2)(b_2 \vec{c}) + (a \times \vec{\mathbf{i}}_3)(b_3 \vec{c}) =$$

$$= (a \times \vec{\mathbf{i}}_1 b_1)\vec{c} + (a \times \vec{\mathbf{i}}_2 b_2)\vec{c} + (a \times \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)\vec{c} =$$

$$= (a \times \vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + a \times \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + a \times \vec{\mathbf{i}}_3 b_3)\vec{c} = (a \times (\vec{\mathbf{i}}_1 b_1 + \vec{\mathbf{i}}_2 b_2 + \vec{\mathbf{i}}_3 b_3))\vec{c} =$$

[redacted] $\times \vec{b})\vec{c}.$

Пример

Рассмотрим единичный тензор $\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3$.

Пример

Рассмотрим единичный тензор $\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3$. Построим тензор $\boldsymbol{\Psi}$

$$\boldsymbol{\Psi} = \vec{\omega} \times \boldsymbol{I} = (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)\vec{\mathbf{i}}_1 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)\vec{\mathbf{i}}_2 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Пример

Рассмотрим единичный тензор $\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3$. Построим тензор $\boldsymbol{\Psi}$

$$\boldsymbol{\Psi} = \vec{\omega} \times \boldsymbol{I} = (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)\vec{\mathbf{i}}_1 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)\vec{\mathbf{i}}_2 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Умножим тензор $\boldsymbol{\Psi}$ на произвольный вектор $\vec{a}$ справа

$$\boldsymbol{\Psi} \cdot \vec{a} =$$

Пример

Рассмотрим единичный тензор $\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3$. Построим тензор $\boldsymbol{\Psi}$

$$\boldsymbol{\Psi} = \vec{\omega} \times \boldsymbol{I} = (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)\vec{\mathbf{i}}_1 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)\vec{\mathbf{i}}_2 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Умножим тензор $\boldsymbol{\Psi}$ на произвольный вектор $\vec{a}$ справа

$$\boldsymbol{\Psi} \cdot \vec{a} = (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)(\vec{\mathbf{i}}_1 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)(\vec{\mathbf{i}}_2 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)(\vec{\mathbf{i}}_3 \cdot \vec{a}) =$$

Пример

Рассмотрим единичный тензор $\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3$. Построим тензор $\boldsymbol{\Psi}$

$$\boldsymbol{\Psi} = \vec{\omega} \times \boldsymbol{I} = (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)\vec{\mathbf{i}}_1 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)\vec{\mathbf{i}}_2 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Умножим тензор $\boldsymbol{\Psi}$ на произвольный вектор $\vec{a}$ справа

$$\boldsymbol{\Psi} \cdot \vec{a} = (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)(\vec{\mathbf{i}}_1 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)(\vec{\mathbf{i}}_2 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)(\vec{\mathbf{i}}_3 \cdot \vec{a}) =$$

$$= (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)a_1 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)a_2 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)a_3 =$$

Пример

Рассмотрим единичный тензор $\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3$. Построим тензор $\boldsymbol{\Psi}$

$$\boldsymbol{\Psi} = \vec{\omega} \times \boldsymbol{I} = (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)\vec{\mathbf{i}}_1 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)\vec{\mathbf{i}}_2 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Умножим тензор $\boldsymbol{\Psi}$ на произвольный вектор $\vec{a}$ справа

$$\boldsymbol{\Psi} \cdot \vec{a} = (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)(\vec{\mathbf{i}}_1 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)(\vec{\mathbf{i}}_2 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)(\vec{\mathbf{i}}_3 \cdot \vec{a}) =$$

$$= (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)a_1 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)a_2 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)a_3 =$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{a}.$$

Пример

Рассмотрим единичный тензор $\boldsymbol{I} = \vec{\mathbf{i}}_1\vec{\mathbf{i}}_1 + \vec{\mathbf{i}}_2\vec{\mathbf{i}}_2 + \vec{\mathbf{i}}_3\vec{\mathbf{i}}_3$. Построим тензор $\boldsymbol{\Psi}$

$$\boldsymbol{\Psi} = \vec{\omega} \times \boldsymbol{I} = (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)\vec{\mathbf{i}}_1 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)\vec{\mathbf{i}}_2 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)\vec{\mathbf{i}}_3.$$

Умножим тензор $\boldsymbol{\Psi}$ на произвольный вектор $\vec{a}$ справа

$$\boldsymbol{\Psi} \cdot \vec{a} = (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)(\vec{\mathbf{i}}_1 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)(\vec{\mathbf{i}}_2 \cdot \vec{a}) + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)(\vec{\mathbf{i}}_3 \cdot \vec{a}) =$$

$$= (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_1)a_1 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_2)a_2 + (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{i}}_3)a_3 =$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{a}.$$

Таким образом, любой антисимметричный тензор может быть представлен в виде

$$\vec{\omega} \times \boldsymbol{I}.$$

Произведение тензоров

Рассмотрим два тензора $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ и вектор $\vec{c}$. Тогда пусть

$$\vec{c'} = \boldsymbol{B} \cdot \vec{c}.$$

и

$$\vec{c''} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{c'} = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \vec{c}).$$

Произведение тензоров

Рассмотрим два тензора $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ и вектор $\vec{c}$. Тогда пусть

$$\vec{c'} = \boldsymbol{B} \cdot \vec{c}.$$

и

$$\vec{c''} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{c'} = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \vec{c}).$$

Определение

Если переход от вектора $\vec{c}$ к вектору $\vec{c''}$ осуществляется с помощью одного тензора $\boldsymbol{\Pi}$ со скалярными элементами p_{kl}:

$$\vec{c''} = \boldsymbol{\Pi} \cdot \vec{c},$$

то тензор $\boldsymbol{\Pi}$ называется скалярным произведением тензоров $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}.$$

Покомпонентные формулы для скалярного произведения тензоров

Определитель тензора

Определение

Определителем тензора **П** *называется определитель матрицы его компонент:*

$$D(\Pi) = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}.$$

Определитель тензора

Определение

Определителем тензора **П** *называется определитель матрицы его компонент:*

$$D(\Pi) = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}.$$

Определитель произведения тензоров

Т.к. тензоры перемножаются как матрицы, то

$$D(\Pi) = D(A)D(B).$$

Скалярное произведение диад

Теорема

Пусть $\boldsymbol{A} = \vec{p}\vec{q}$ и $\boldsymbol{B} = \vec{r}\vec{s}$, тогда

$$\mathbf{\Pi} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}\vec{s}) = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

Скалярное произведение диад

Теорема

Пусть $\boldsymbol{A} = \vec{p}\vec{q}$ и $\boldsymbol{B} = \vec{r}\vec{s}$, тогда

$$\mathbf{\Pi} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}\vec{s}) = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

Доказательство.

Для произвольного вектора $\vec{x}$ рассмотрим

$$\mathbf{\Pi} \cdot \vec{x} =$$

Скалярное произведение диад

Теорема

Пусть $\boldsymbol{A} = \vec{p}\vec{q}$ и $\boldsymbol{B} = \vec{r}\vec{s}$, тогда

$$\mathbf{\Pi} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}\vec{s}) = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

Доказательство.

Для произвольного вектора $\vec{x}$ рассмотрим

$$\mathbf{\Pi} \cdot \vec{x} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot ((\vec{r}\vec{s}) \cdot \vec{x}) = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}(\vec{s} \cdot \vec{x})) =$$

Скалярное произведение диад

Теорема
Пусть $\boldsymbol{A} = \vec{p}\vec{q}$ и $\boldsymbol{B} = \vec{r}\vec{s}$, тогда

$$\boldsymbol{\Pi} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}\vec{s}) = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

Доказательство.
Для произвольного вектора $\vec{x}$ рассмотрим

$$\boldsymbol{\Pi} \cdot \vec{x} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot ((\vec{r}\vec{s}) \cdot \vec{x}) = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}(\vec{s} \cdot \vec{x})) = \vec{p}(\vec{q} \cdot \vec{r})(\vec{s} \cdot \vec{x}) =$$

Скалярное произведение диад

Теорема

Пусть $\boldsymbol{A} = \vec{p}\vec{q}$ и $\boldsymbol{B} = \vec{r}\vec{s}$, тогда

$$\boldsymbol{\Pi} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}\vec{s}) = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

Доказательство.

Для произвольного вектора $\vec{x}$ рассмотрим

$$\boldsymbol{\Pi} \cdot \vec{x} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot ((\vec{r}\vec{s}) \cdot \vec{x}) = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}(\vec{s} \cdot \vec{x})) = \vec{p}(\vec{q} \cdot \vec{r})(\vec{s} \cdot \vec{x}) =$$

$$= ((\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}) \cdot \vec{x}.$$

Скалярное произведение диад

Теорема

Пусть $\boldsymbol{A} = \vec{p}\vec{q}$ и $\boldsymbol{B} = \vec{r}\vec{s}$, тогда

$$\boldsymbol{\Pi} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}\vec{s}) = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

Доказательство.

Для произвольного вектора $\vec{x}$ рассмотрим

$$\boldsymbol{\Pi} \cdot \vec{x} = (\vec{p}\vec{q}) \cdot ((\vec{r}\vec{s}) \cdot \vec{x}) = (\vec{p}\vec{q}) \cdot (\vec{r}(\vec{s} \cdot \vec{x})) = \vec{p}(\vec{q} \cdot \vec{r})(\vec{s} \cdot \vec{x}) =$$

$$= ((\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}) \cdot \vec{x}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{\Pi} = (\vec{q} \cdot \vec{r})\vec{p}\vec{s}.$$

$\square$

Литература

- Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Изд. 9-е. М.: Наука, 1965.