Обтекание тел плоскими потенциальными течениями идеальной жидкости

Верещагин Антон Сергеевич
д-р. физ.-мат. наук, доцент

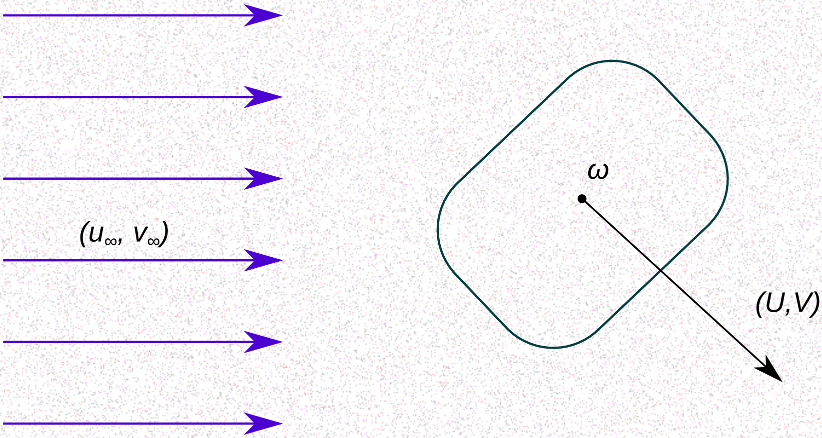
Кафедра аэрофизики и газовой динамики

21 февраля 2024 г.

Аннотация

Обтекание абсолютно твердого тела. Задание граничных условий. Формулы Блазиуса – Чаплыгина. Формулы Кутты – Жуковского.

Задача обтекания абсолютно твердого тела



Математическая постановка задачи обтекания тела потенциальным потоком идеальной жидкости

Требуется найти аналитический комплексный потенциал

$$w(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y), \quad z = x + iy,$$

определенный в рассматриваемой бесконечной области, связанный соответствующими условиями на бесконечности и границе с телом и такой, что

$$\Delta\psi(x,y) = 0.$$

Замечание

Так как потенциал φ связан с функцией тока ψ соотношениями Коши – Римана, то функция тока находится автоматически. Можно, наоборот, искать потенциал φ, а ψ выражать через соотношения Коши – Римана.

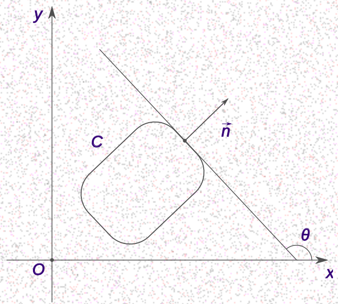
Плоское покоящееся течение на бесконечности

Условия на бесконечности

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$$

для бесконечно удаленных точек пространства, т.к. скорость на бесконечности равна 0.

Условие «непротекания» на границе с телом



Условие на границе с телом

Нормальная составляющая (относительно границы тела) скорость течения должна совпадать с нормальной составляющей скорости тела.

$$v_n = v_x \cos(\vec{n},x) + v_y \cos(\vec{n},y) = v_x \sin\theta - v_y \cos\theta =$$

$$= v_x \frac{dy}{ds} - v_y \frac{dx}{ds} = \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{ds} = \frac{\partial\psi}{\partial s},$$

где $x(s), y(s)$ – параметризованная граница тела в окрестности рассматриваемой точки.

Условие для движения абсолютно твердого тела

Пусть тело совершает поступательное движение со скоростью (U,V) и вращательное движение с угловой скоростью ω, тогда скорости точек тела будут иметь вид:

$$u_x = U - \omega y, \quad u_y = V + \omega x,$$

где (x,y) – координаты точек тела во вращающейся системе координат, жестко связанной с телом.

Условие для движения абсолютно твердого тела

Пусть тело совершает поступательное движение со скоростью (U,V) и вращательное движение с угловой скоростью ω, тогда скорости точек тела будут иметь вид:

$$u_x = U - \omega y, \quad u_y = V + \omega x,$$

где (x,y) – координаты точек тела во вращающейся системе координат, жестко связанной с телом.

Условие на границе с телом

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = u_x \cos(\vec{n},x) + u_y \cos(\vec{n},y) = u_x \frac{dy}{ds} - u_y \frac{dx}{ds} =$$

$$= (U - \omega y)\frac{dy}{ds} - (V + \omega x)\frac{dx}{ds}$$

Отсюда,

$$\psi = Uy - Vx - \frac{1}{2}\omega(x^2 + y^2) + c.$$

Частный случай набегающего потока на покоящееся тело

Условие на границе тела

В случае покоящегося тела $U = V = 0$, $\omega = 0$ условие на границе тела будет:

$$\psi(x,y) = const.$$

Условие на бесконечности

В случае набегающего потока с параметрами на бесконечности

$$v_x = v_\infty, \quad v_y = 0,$$

условие для бесконечно удаленных точек будет:

$$\psi(x,y) = v_\infty y + const.$$

Задача обтекание тела

Таким образом, задача обтекания тела плоским потенциальным потоком идеальной жидкости сводится к решению задачи Дирихле для функции тока ψ:

1) внутри исследуемой области решается уравнение Лапласа:

$$\Delta\psi = 0;$$

2) а на бесконечности и границе обтекаемого тела заданы значения функции ψ в зависимости от условий обтекания.

Сила при безотрывном обтекании

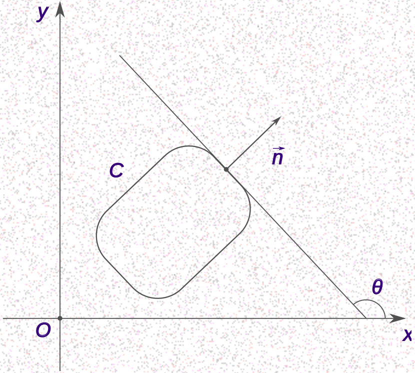
Определение

По аналогии с комплексными скоростью и потенциалом определим комплексную силу R, действующую на контур C в области течения по формуле

$$R = X + iY,$$

где X, Y – вещественные проекции силы на оси координат.

Формула для силы через давление при безотрывном обтекании



Комплексно-сопряженная сила R^* вдоль контура тела C при безотрывном обтекании:

$$R^* = X - iY =$$

$$= -\oint_C p(\cos(\vec{n},x) - i\cos(\vec{n},y))ds =$$

$$= -\oint_C p(\sin\theta + i\cos\theta)ds =$$

$$= -i\oint_C pe^{-\theta i}ds.$$

Предварительные выкладки

Выражение для комплексного дифференциала

$$dz = dx + idy = ds(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{i\theta}ds,$$

$$dz^* = dx - idy = ds(\cos\theta - i\sin\theta) = e^{-i\theta}ds.$$

Отсюда

$$dz^* = e^{-2\theta i}dz.$$

Предварительные выкладки

Выражение для комплексного дифференциала

$$dz = dx + idy = ds(\cos\theta + i\sin\theta) = e^{i\theta}ds,$$

$$dz^* = dx - idy = ds(\cos\theta - i\sin\theta) = e^{-i\theta}ds.$$

Отсюда

$$dz^* = e^{-2\theta i}dz.$$

Интеграл Бернулли

Связь давления и скорости через интеграл Бернулли

$$p = c - \frac{1}{2}\rho v^2$$

справедлива вдоль контура тела при безотрывном обтекании, т.к. он является линией тока. При потенциальном течении эта связь справедлива во всей области течения.

Сила

$$R^* = -ic\oint\limits_C dz^* + \frac{i\rho}{2}\oint\limits_C v^2 dz^* = \frac{i\rho}{2}\oint\limits_C v^2 dz^* = \frac{i\rho}{2}\oint\limits_C (ve^{-i\theta})^2 dz$$

Сила

$$R^* = -ic\oint\limits_C dz^* + \frac{i\rho}{2}\oint\limits_C v^2 dz^* = \frac{i\rho}{2}\oint\limits_C v^2 dz^* = \frac{i\rho}{2}\oint\limits_C (ve^{-i\theta})^2 dz$$

Используя, что

$$ve^{-i\theta} = v\cos\theta - iv\sin\theta = v_x - iv_y = v^*,$$

получим:

$$R^* = X - iY = \frac{i\rho}{2}\oint\limits_C (v^*)^2 dz.$$

Момент главных сил

$$L = -\oint_C p(x\cos(\vec{n},y) - y\cos(\vec{n},x))ds = -\oint_C p(x\cos\theta + y\sin\theta)ds =$$

$$= -\oint_C p(xdx + ydy) = -\oint_C \left(c + \frac{\rho v^2}{2}\right)(xdx + ydy) =$$

$$= -\oint_C c\, d(x^2 + y^2) - \frac{\rho}{2}\oint_C v^2(xdx + ydy) = \mathrm{Re}\left(-\frac{\rho}{2}\oint_C v^2 z dz^*\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(-\frac{\rho}{2}\oint_C (v^*)^2 z dz,\right),$$

т.к. $v^2 dz^* = (v^*)^2 dz$.

Формулы Блазиуса – Чаплыгина для потенциального течения

Если течение потенциально, тогда существует комплексный потенциал:

$$w(z) = \varphi(z) + i\psi(z) \quad \text{и} \quad \frac{dw}{dz} = v^*.$$

Формулы Блазиуса – Чаплыгина

$$R^* = X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint\limits_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz,$$

$$L = \mathrm{Re}\left[-\frac{\rho}{2} \oint\limits_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 z dz\right].$$

Формула Кутты – Жуковского

Предположения

Поток потенциален вне тела, которое можно заменить на конечное число источников, вихрей и диполей, лежащих внутри границы тела – контура C.

Формула для силы и реакции

$$R^* = X - iY = i\rho\Gamma v_\infty^*,$$

$$L = \mathrm{Re}\left[-\rho v_\infty^* \sum_{k=1}^{m} \Gamma_k b_k - i\rho M v_\infty^*\right],$$

где Γ_i – циркуляции вихрей, находящихся в точках b_i $(i = 1, \ldots, m)$; M – суммарный момент источников и диполей; Γ – суммарная циркуляция вихрей, находящихся внутри тела.

Метод конформных отображений

Основная идея

Использование *метода конформных отображений* и *теоремы Римана о конформном отображении односвязных областей.*

Дано

1) комформное отображение $z = f(\zeta)$;
2) потенциал течения на вспомогательной плоскости $\psi(\zeta)$.

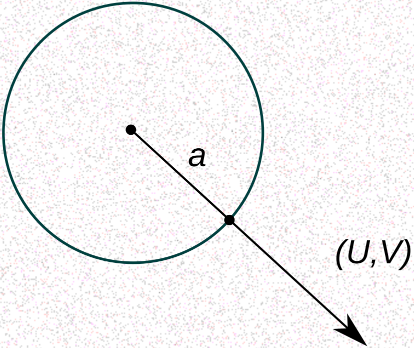
Решение

$$\begin{cases} \chi = \chi(f(\zeta)) = \psi(\zeta), \\ z = f(\zeta). \end{cases}$$

$$v^* = \frac{d\chi}{dz} = \frac{d\psi}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz},$$

где $\chi(z)$ — потенциал течения в физической плоскости.

Задача обтекания кругового цилиндра



Найти комплексный потенциал обтекания кругового цилиндра радиуса a, движущегося в бесконечной покоящейся жидкости со скоростью (U, V).

Постановка задачи

В системе координат цилиндра найти потенциал

$$w(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$$

такой, что его мнимая часть на окружности $|z| = a$ удовлетворяет условию

$$\psi(x + iy) = Uy - Vx + \mathrm{const}.$$

Постановка задачи

Решение ищется в виде ряда:

$$\frac{dw}{dz} = v^*(z) = c_0 + \frac{c}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \ldots,$$

т.к. $v^*(z)$ – однозначна, определена вне $|z| > a$, ограничена и на бесконечности стремится к 0.

Сразу следует, что

$$c_0 = 0$$

и

$$w(z) = c\ln(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}.$$

Постановка задачи

Для обеспечения выполнения граничных условий необходимо

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right|_{r=a} = U\cos\theta + V\sin\theta.$$

При $c = A + iB$, $c_n = A_n + iB_n$, $z = re^{i\theta}$

$$w(z) = \varphi + i\psi = (A + iB)(\ln r + i\theta) + (A_1 + iB_1)\frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty}(A_n + iB_n)\frac{1}{r^n}(\cos n\theta - i\sin n\theta).$$

Задача обтекания кругового цилиндра

Постановка задачи

Таким образом,

$$\varphi(r) = Re(w(z)) = A \ln r - B\theta + (A_1 \cos\theta + B_1 \sin\theta)\frac{1}{r} +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^n}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{A}{r} - (A_1 \cos\theta + B_1 \sin\theta)\frac{1}{r^2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{r^{n+1}}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta).$$

Постановка задачи

Полагая $r = a$,

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a} = \frac{A}{a} - (A_1\cos\theta + B_1\sin\theta)\frac{1}{a^2} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{a^{n+1}}(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta) =$$

$$= U\cos\theta + V\sin\theta.$$

Следовательно,

$$A = 0, \quad A_1 = -Ua^2, \quad B_1 = -Va^2, \quad A_n = B_n = 0.$$

Коэффициент B остался не определён. Положим $B = -\dfrac{\Gamma}{2\pi}$, тогда

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z - \frac{Ua^2 + iVa^2}{z}.$$

Решение

$$\begin{aligned}
w(z) &= \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z - (U + iV)\frac{a^2}{z}, \\
\varphi(z) &= \frac{\Gamma}{2\pi\theta} - (U\cos\theta + V\sin\theta)\frac{a^2}{r}, \\
\psi(z) &= -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r + (U\sin\theta - V\cos\theta)\frac{a^2}{r},
\end{aligned}$$

где $z = re^{i\theta}$.

Задача обтекания кругового цилиндра жидкостью, *движущейся на бесконечности*

Решение

Потенциал для задачи обтекания круга поступательным потоком, имеющим на бесконечности скорость $v_\infty = v_{\infty,x} + iv_{\infty,y}$, имеет вид:

$$w(z) = v_\infty^* z + (v_\infty - U - iV)\frac{a^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z.$$

Интересный случай — обтекание неподвижного цилиндра $U = V = 0$.

Литература

1. *Валландер С. В.* Лекции по гидрофэромеханике. Учеб. пособие. Л. Изд-во Ленингр. ун-та, 1978.
2. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Гос. издат. физ.-мат. лит., 1963.