Движение твердого тела в идеальной жидкости

Верещагин Антон Сергеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент

Кафедра аэрофизики и газовой динамики

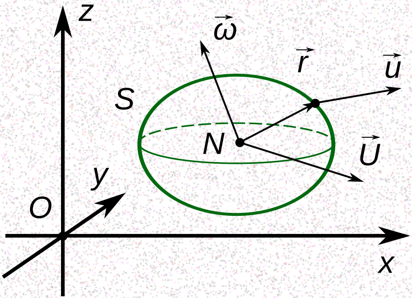
30 декабря 2020 г.

Аннотация

Постановка задачи о движении тела в бесконечной идеальной жидкости, покоящейся на бесконечности. Степень убывания потенциала на бесконечности. Условие на поверхности тела и разложение Кирхгофа для потенциала. Гидродинамические реакции при движении тела. Импульсивная сила, импульсивная пара. Коэффициенты присоединенной массы и их свойства.

Основная задача

Исследовать влияние бесконечной идеальной жидкости, покоящейся на бесконечности, на движение тела, ограниченного поверхностью S и имеющего поступательную $\vec{U}(t)$ и вращательную $\vec{\omega}(t)$ $(t \geq 0)$ скорость. Тело начинает движение из состояния покоя.



Скорость движения точки тела

$$\vec{u} = \vec{U} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Математическая постановка для жидкости

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

или по теореме Лагранжа для потенциальных течений

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Условие на границе с телом

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = u_n$$

Условие на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \lim_{r\to\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \lim_{r\to\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \text{где } r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Распределение давления по пространству

Интеграл Коши

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\nabla\varphi^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t)^1$$

Интеграл Коши позволяет найти распределение давления по заданному потенциалу, известному из уравнения неразрывности ($\rho = const$).

Для бесконечно удаленной точки

$$p = p_0 - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\rho v^2}{2},$$

т.к. на бесконечности скорость жидкости равна 0, а давление p_0.

---

[1] Считаем, что поле внешних сил отсутствует.

Степень убывания потенциала на бесконечности

Разложение потенциала по сферическим функциям

$$\varphi(r,\theta,\lambda) = \frac{A}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n(\theta,\lambda)}{r^{(n+1)}},$$

где $Y_n(\theta,\lambda)$ – сферические функции. Сферические функции и потенциал заданы в сферической системе координат.

Степень убывания потенциала на бесконечности

Разложение потенциала по сферическим функциям

$$\varphi(r,\theta,\lambda) = \frac{A}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n(\theta,\lambda)}{r^{(n+1)}},$$

где $Y_n(\theta,\lambda)$ – сферические функции. Сферические функции и потенциал заданы в сферической системе координат.

Уравнение неразрывности

Пусть Σ – сфера большого радиуса R с центром в точке O, тогда

$$\int_V \operatorname{div} \vec{v}\, dV = \int_\Sigma \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial r} dS = 0,$$

или

$$-4\pi A - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{R^{(n+2)}} \int_\Sigma Y_n(\theta,\lambda) dS = 0 \quad \stackrel{R\to\infty}{\Rightarrow} \quad A = 0.$$

Степень убывания потенциала на бесконечности

Общий вид потенциала

$$\varphi(r,\theta,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n(\theta,\lambda)}{r^{n+1}}$$

Вывод

Можно считать, что $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$ стремятся к 0 при $r \to \infty$, как величины порядка $1/r^3$, а φ – как $1/r^2$.

Условие на поверхности тела

Скорость точек тела

$$u_x = U_x + \omega_y z - \omega_z y, \quad u_y = U_y + \omega_z x - \omega_x z, \quad u_z = U_z + \omega_x y - \omega_y z$$

Скорость точек на поверхности тела вдоль нормали

Обозначим

$$\cos(\widehat{n,x}) = \alpha, \quad \cos(\widehat{n,y}) = \beta, \quad \cos(\widehat{n,z}) = \gamma$$

для косинусов углов, составляемых нормалью к поверхности S с осями координат.

Нормальная составляющая скорости к поверхности S:

$$u_n = u_x\alpha + u_y\beta + u_z\gamma = (U_x + \omega_y z - \omega_z y)\alpha + (U_y + \omega_z x - \omega_x z)\beta +$$

$$+(U_z + \omega_x y - \omega_y z)\gamma.$$

Условие на поверхности тела

Соотношение для потенциала

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = U_x\alpha + U_y\beta + U_z\gamma + \omega_x(y\gamma - z\beta) + \omega_y(z\alpha - x\gamma) + \omega_z(x\beta - y\alpha)$$

Величины U_x, U_y, U_z, ω_x, ω_y, ω_z являются функциями времени t, а выражения справа от них – функциями точек пространства на поверхности S, т.е. координат.

Условие на поверхности тела

Вид потенциала в форме Кирхгофа

$$\varphi = U_x\varphi_1 + U_y\varphi_2 + U_z\varphi_3 + \omega_x\varphi_4 + \omega_y\varphi_5 + \omega_z\varphi_6,$$

причем

$$\Delta\varphi_i = 0, \quad \lim_{r\to\infty}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x} = \lim_{r\to\infty}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y} = \lim_{r\to\infty}\frac{\partial\varphi_i}{\partial z} = 0$$

$$(i = \overline{1,6}).$$

На поверхности S:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \alpha, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \beta, \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial n} = \gamma,$$

$$\frac{\partial\varphi_4}{\partial n} = y\gamma - z\beta, \quad \frac{\partial\varphi_5}{\partial n} = z\alpha - x\gamma, \quad \frac{\partial\varphi_6}{\partial n} = x\beta - y\alpha.$$

Смысл введенных потенциалов φ_1, φ_2, φ_3

Потенциал φ_1 соответствует случаю движения тела, когда

$$U_x = 1, \quad U_y = 0, \quad U_z = 0, \quad \omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = 0,$$

т.е. описывает течение при движении тела вдоль оси Ox с единичной скоростью. Аналогичное значение имеют потенциалы φ_2, φ_3.

Условие на поверхности тела

Смысл введенных потенциалов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$

Потенциал φ_1 соответствует случаю движения тела, когда

$$U_x = 1, \quad U_y = 0, \quad U_z = 0, \quad \omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = 0,$$

т.е. описывает течение при движении тела вдоль оси Ox с единичной скоростью. Аналогичное значение имеют потенциалы φ_2, φ_3.

Смысл введенных потенциалов $\varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$

Потенциал φ_4 соответствует случаю движения тела, когда

$$U_x = 0, \quad U_y = 0, \quad U_z = 0, \quad \omega_x = 1, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = 0,$$

т.е. описывает течение при вращательном движении тела относительно оси Ox с единичной скоростью. Аналогичное значение имеют потенциалы φ_5, φ_6.

Гидродинамические реакции при движении тела

Сила и момент сил давления, действующие на тело

$$\vec{R} = -\int\limits_S p\vec{n}dS, \quad \vec{L} = -\int\limits_S p(\vec{r} \times \vec{n})dS,$$

где p – давление в жидкости; $\vec{n}$ – вектор внешней единичной нормали, направленный из тела в жидкость; $\vec{r}$ – радиус-вектор точек поверхности тела относительно начала координат.

Гидродинамические реакции при движении тела

Сила и момент сил давления, действующие на тело

$$\vec{R} = -\int\limits_S p\vec{n}dS, \quad \vec{L} = -\int\limits_S p(\vec{r}\times\vec{n})dS,$$

где p – давление в жидкости; $\vec{n}$ – вектор внешней единичной нормали, направленный из тела в жидкость; $\vec{r}$ – радиус-вектор точек поверхности тела относительно начала координат.

Интеграл Коши для связи давления и потенциала

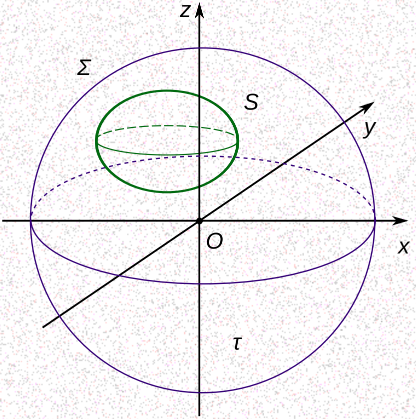
При отсутствии массовых сил, действующих на среду,

$$p = p_0 - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\rho v^2}{2},$$

т.к. на бесконечности скорость жидкости равна 0 и давление равно p_0.

Соображения для связи реакции и потенциала

Рассмотрим сферу большого радиуса с поверхностью Σ с центром в начале координат, содержащую исследуемое тело с поверхностью S. Обозначим объем, заключенный между S и Σ, через τ.



Соображения для связи реакции и потенциала

Закон сохранения импульса для объема τ

Изменение импульса объема τ равно работе сил давления на границах S, Σ и потери импульса через границу Σ в результате конвекции:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\tau}\rho\vec{v}dV = -\int\limits_{S\cup\Sigma} p\vec{n}dS + \int\limits_{\Sigma}\rho\vec{v}v_n dS.$$

Соображения для связи реакции и потенциала

Обозначения

Обозначим искомую силу, действующую на тело:

$$\vec{R} = -\int\limits_S p\vec{n}dS.$$

Тогда

$$\vec{R} = \frac{d}{dt}\int\limits_\tau \rho\vec{v}dV + \int\limits_\Sigma p\vec{n}dS - \int\limits_\Sigma \rho\vec{v}v_n dS =$$

$$= \rho\frac{d}{dt}\int\limits_\tau \nabla\varphi dV + \int\limits_\Sigma \left(p\vec{n} - \rho\vec{v}v_n\right) dS =$$

Соображения для связи реакции и потенциала

По теореме Гаусса первый интеграл преобразуем в сумму интегралов по Σ и S, а во второй подставим значение для p из интеграла Коши:

$$= \frac{d}{dt}\int\limits_{\Sigma} \rho\varphi\vec{n}dS + \frac{d}{dt}\int\limits_{S} \rho\varphi\vec{n}dS + \int\limits_{\Sigma} \left((p_0 - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\rho v^2}{2}) \cdot \vec{n} - \rho\vec{v}v_n \right) dS =$$

Соображения для связи реакции и потенциала

По теореме Гаусса первый интеграл преобразуем в сумму интегралов по Σ и S, а во второй подставим значение для p из интеграла Коши:

$$= \frac{d}{dt}\int\limits_{\Sigma} \rho\varphi\vec{n}dS + \frac{d}{dt}\int\limits_{S} \rho\varphi\vec{n}dS + \int\limits_{\Sigma} \left((p_0 - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\rho v^2}{2}) \cdot \vec{n} - \rho\vec{v}v_n \right) dS =$$

Так как поверхность Σ не зависит от времени t, то

$$\frac{d}{dt}\int_{\Sigma} \rho\varphi\vec{n}dS = \int_{\Sigma} \rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\vec{n}dS.$$

Продолжим цепочку:

$$= \frac{d}{dt}\int_{S} \rho\varphi\vec{n}dS + \int_{\Sigma} \left((p_0 - \frac{\rho v^2}{2}) \cdot \vec{n} - \rho\vec{v}v_n \right) dS =$$

Соображения для связи реакции и потенциала

Используя, что

$$\int_{\Sigma} p_0 \vec{n} dS = p_0 \int_{\Sigma} \vec{n} dS = 0,$$

получим продолжение цепочки:

$$= \frac{d}{dt} \int_S \rho \varphi \vec{n} dS - \rho \int_{\Sigma} \left(\frac{v^2}{2} \vec{n} + \vec{v} v_n \right) dS.$$

Соображения для связи реакции и потенциала

Используя, что

$$\int_\Sigma p_0 \vec{n} dS = p_0 \int_\Sigma \vec{n} dS = 0,$$

получим продолжение цепочки:

$$= \frac{d}{dt} \int_S \rho\varphi\vec{n} dS - \rho \int_\Sigma \left(\frac{v^2}{2}\vec{n} + \vec{v} v_n \right) dS.$$

Если положить, что Σ – поверхность сферы радиуса a, и вспомнить, что скорость v стремится к 0 на бесконечности, как $1/a^3$, тогда второе слагаемое в последнем равенстве будет иметь порядок:

$$a^2/(a^3 \cdot a^3) = 1/a^4 \overset{a\to\infty}{\to} 0.$$

Связь силы и потенциала

Выражение для силы

Сила давлений, действующая на тело в безграничной идеальной жидкости, покоящейся на бесконечности, имеет вид

$$\vec{R} = \frac{d}{dt} \int\limits_S \rho \varphi \vec{n} dS.$$

Связь момента сил и потенциала

Выражение для момента импульса

Аналогично, записав уравнение сохранения момента импульса для объема τ, можно получить момент сил давления $\vec{L}$, действующий на тело в безграничной идеальной жидкости, покоящейся на бесконечности:

$$\vec{L} = \frac{d}{dt}\int\limits_S \rho\varphi(\vec{r}\times\vec{n})dS.$$

Уравнения движения тела в потоке идеальной жидкости

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_S \rho\varphi\vec{n}dS + \vec{F}, \quad \frac{d\vec{Q}}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_S \rho\varphi(\vec{r}\times\vec{n})dS + \vec{M}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{G} - \int\limits_S \rho\varphi\vec{n}dS\right) = \vec{F}, \quad \frac{d}{dt}\left(\vec{Q} - \int\limits_S \rho\varphi(\vec{r}\times\vec{n})dS\right) = \vec{M}$$

Здесь $\vec{G}$, $\vec{Q}$ – собственный импульс и момент импульса тела; $\vec{F}$, $\vec{M}$ – внешняя сила и момент внешних сил, не связанных движением жидкости.

Уравнения движения тела в потоке идеальной жидкости

Пусть

$$\vec{B} = -\rho \int\limits_S \varphi \vec{n} dS, \quad \vec{I} = -\int\limits_S \rho\varphi(\vec{r} \times \vec{n}) dS,$$

тогда уравнения движения принимают вид:

$$\frac{d(\vec{G} + \vec{B})}{dt} = \vec{F}, \quad \frac{d(\vec{Q} + \vec{I})}{dt} = \vec{M},$$

где $\vec{G} + \vec{B}$ называется импульсивной силой, а $\vec{Q} + \vec{I}$ – импульсивной парой.

Коэффициенты U_i

Новые обозначения

$$U_x = U_1, \quad U_y = U_2, \quad U_z = U_3,$$

$$\omega_x = U_4, \quad \omega_y = U_5, \quad \omega_z = U_6.$$

Вид потенциала

$$\varphi = \sum_{k=1}^{6} U_k \varphi_k$$

Коэффициенты B_i

Новые обозначения

$$B_x = B_1, \quad B_y = B_2, \quad B_z = B_3, \quad I_x = B_4, \quad I_y = B_5, \quad I_z = B_6.$$

Выражения для B_i

$$B_1 = -\rho \int\limits_S \varphi\alpha dS = -\rho \int\limits_S \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS,$$

$$B_2 = -\rho \int\limits_S \varphi\beta dS = -\rho \int\limits_S \varphi \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} dS,$$

$$B_3 = -\rho \int\limits_S \varphi\gamma dS = -\rho \int\limits_S \varphi \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} dS,$$

Коэффициенты B_i

Новые обозначения

$$B_x = B_1, \quad B_y = B_2, \quad B_z = B_3, \quad I_x = B_4, \quad I_y = B_5, \quad I_z = B_6.$$

Выражения для B_i

$$B_4 = -\rho \int\limits_S \varphi(y\gamma - z\beta)dS = -\rho \int\limits_S \varphi \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} dS,$$

$$B_5 = -\rho \int\limits_S \varphi(z\alpha - x\gamma)dS = -\rho \int\limits_S \varphi \frac{\partial \varphi_5}{\partial n} dS,$$

$$B_6 = -\rho \int\limits_S \varphi(x\beta - y\alpha)dS = -\rho \int\limits_S \varphi \frac{\partial \varphi_6}{\partial n} dS.$$

Коэффициенты B_i

Новые обозначения

$$B_x = B_1, \quad B_y = B_2, \quad B_z = B_3, \quad I_x = B_4, \quad I_y = B_5, \quad I_z = B_6.$$

Выражения для B_i

Или в общем виде:

$$B_i = -\rho \int\limits_S \varphi \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS \quad (i = \overline{1,6}).$$

Коэффициенты присоединенной массы

Определение

Подставим выражение для потенциала через переменные U_i в полученное выражение для коэффициентов B_i:

$$B_i = -\sum_{k=1}^{6} \rho U_k \int\limits_S \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS = \sum_{k=1}^{6} \lambda_{ik} U_k,$$

где

$$\lambda_{ik} = -\rho \int\limits_S \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS \quad (i,k = \overline{1,6}).$$

Коэффициенты присоединенной массы

Определение

Подставим выражение для потенциала через переменные U_i в полученное выражение для коэффициентов B_i:

$$B_i = -\sum_{k=1}^{6} \rho U_k \int\limits_S \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS = \sum_{k=1}^{6} \lambda_{ik} U_k,$$

где

$$\lambda_{ik} = -\rho \int\limits_S \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS \quad (i,k = \overline{1,6}).$$

Коэффициенты λ_{ik} определяются только геометрией тела и называются коэффициентами присоединенной массы.

Формула Грина

Для введенного объема жидкости τ, заключенного между поверхностью сферы большого радиуса Σ и поверхностью тела S, справедливо равенство:

$$\int\limits_{\tau}(\varphi_i\Delta\varphi_k-\varphi_k\Delta\varphi_i)dV=\int\limits_{\Sigma}\left(\varphi_i\frac{\partial\varphi_k}{\partial n}-\varphi_k\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\right)dS+\int\limits_{S}\left(\varphi_k\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}-\varphi_i\frac{\partial\varphi_k}{\partial n}\right)dS.$$

Формула Грина

Для введенного объема жидкости τ, заключенного между поверхностью сферы большого радиуса Σ и поверхностью тела S, справедливо равенство:

$$\int\limits_{\tau} (\varphi_i \Delta\varphi_k - \varphi_k \Delta\varphi_i) dV = \int\limits_{\Sigma} \left(\varphi_i \frac{\partial\varphi_k}{\partial n} - \varphi_k \frac{\partial\varphi_i}{\partial n} \right) dS + \int\limits_{S} \left(\varphi_k \frac{\partial\varphi_i}{\partial n} - \varphi_i \frac{\partial\varphi_k}{\partial n} \right) dS.$$

Вследствие гармоничности φ_i

$$\Delta\varphi_i = 0 \quad (i = \overline{1{,}6}),$$

левая часть равенства равна 0.

Формула Грина

Для введенного объема жидкости τ, заключенного между поверхностью сферы большого радиуса Σ и поверхностью тела S, справедливо равенство:

$$\int\limits_{\tau} (\varphi_i \Delta\varphi_k - \varphi_k \Delta\varphi_i) dV = \int\limits_{\Sigma} \left(\varphi_i \frac{\partial\varphi_k}{\partial n} - \varphi_k \frac{\partial\varphi_i}{\partial n} \right) dS + \int\limits_{S} \left(\varphi_k \frac{\partial\varphi_i}{\partial n} - \varphi_i \frac{\partial\varphi_k}{\partial n} \right) dS.$$

Интеграл по Σ стремится к 0 при возрастании радиуса сферы с одноименной поверхностью, т.к. площадь сферы имеет порядок $4\pi a^2$, а функции φ_i и $\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial n}$ – $1/a^2$ и $1/a^3$, где a – радиус сферы.

Формула Грина

Для введенного объема жидкости τ, заключенного между поверхностью сферы большого радиуса Σ и поверхностью тела S, справедливо равенство:

$$\int\limits_{\tau}(\varphi_i\Delta\varphi_k-\varphi_k\Delta\varphi_i)dV=\int\limits_{\Sigma}\left(\varphi_i\frac{\partial\varphi_k}{\partial n}-\varphi_k\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\right)dS+\int\limits_{S}\left(\varphi_k\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}-\varphi_i\frac{\partial\varphi_k}{\partial n}\right)dS.$$

Таким образом, в нашем случае получим:

$$\int\limits_{S}\varphi_k\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}dS=\int\limits_{S}\varphi_i\frac{\partial\varphi_k}{\partial n}dS\quad\Rightarrow\quad\lambda_{ik}=\lambda_{ki}\quad(i,k=\overline{1,6}).$$

Симметричность

Всего существует 36 коэффициентов присоединенных масс, но в силу симметрии

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ki} \quad (i,k = \overline{1,6},\ i \neq k)$$

различных всего 21.

Определение

Кинетическая энергия объема τ, ограниченного сферой большого радиуса a с поверхностью Σ и поверхностью тела S равна:

$$T_\tau = \frac{\rho}{2}\int\limits_\tau v^2 dV = \frac{\rho}{2}\int\limits_\tau \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] dV =$$

Кинетическая энергия жидкости

Определение

Кинетическая энергия объема τ, ограниченного сферой большого радиуса a с поверхностью Σ и поверхностью тела S равна:

$$T_\tau = \frac{\rho}{2}\int\limits_\tau v^2 dV = \frac{\rho}{2}\int\limits_\tau \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] dV =$$

По формуле Грина получим:

$$= \frac{\rho}{2}\int\limits_\Sigma \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS - \frac{\rho}{2}\int\limits_S \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS \overset{a\to\infty}{\to} -\frac{\rho}{2}\int\limits_S \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS,$$

т.к. площадь сферы имеет порядок $4\pi a^2$, а функции φ и $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ – $1/a^2$ и $1/a^3$.

Кинетическая энергия жидкости

Определение

Кинетическая энергия всей жидкости равна:

$$T = -\frac{\rho}{2} \int\limits_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS.$$

Подставим выражение для разложения Кирхгофа потенциала φ:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{6} \lambda_{ik} U_k U_i.$$

Литература

1. *Валландер С. В.* Лекции по аэрогидромеханике. Учеб. пособие. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1978.
2. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Гос. издат. физ.-мат. лит., 1963.