Степаненко Денис (1384)

Лабораторная работа №1 "Исследование двумерного нормального распределения"

Цель работы

Исследовать свойства двумерного случайного вектора имеющего нормальное распределение, овладеть навыками преобразования нормального вектора в стандартный и в вектор с независимыми компонентами.

Выполнение работы

Плотность двумерного нормального разпределениея имеет вид: $\rho_{\xi,\eta}(x, y) = C \cdot (exp(-\frac{1}{2}(3x^2 + 3xy + 7y^2 - 9x + 8y + 13)))$

1. Вычисление числовых характеристик СВ и построение графига его плотности распределения.

$3x^2 + 3xy + 7y^2 - 9x + 8y + 13 = 3(x^2 + xy - 3x) + 7y^2 + 8y + 13 = 3(x^2+2x(0.5y-1.5)+(0.5y-1.5)^2-(0.5y-1.5)^2)+7y^2+8y+13 = 3(x+0.5y-1.5)^2+7y^2+8y+13-\frac{3y^2}{4}+\frac{9y}{2}+\frac{27}{4} = 3(x+0.5y-1.5)^2+\frac{25y^2+(32+18)y+(13\cdot14-27)}{4} = 3(x+0.5y-1.5)^2+\frac{25y^2+50y+25}{4} = 3(x+0.5y-1.5)^2+\frac{25}{4}(y+1)^2 = 3(x+\frac{1}{2}(y+1)-2)^2+\frac{25}{4}(y+1)^2 = 3[(x-2)^2+\frac{2}{2}(y+1)(x-2)+\frac{1}{4}(y+1)^2]+\frac{25}{4}(y+1)^2 = 3(x-2)^2+3(x-2)(y+1)+7(y+1)$

$\mathbb{E}_{\xi,\eta} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Sigma^{-1}_{\xi,\eta} = \begin{pmatrix} 3 & 1.5 \\ 1,5 & 7 \end{pmatrix}$

$\Sigma_{\xi,\eta} = \frac{4}{75}\begin{pmatrix} 7 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$

$\mathbb{D}_\xi = 7$

$\mathbb{D}_\eta = 3$

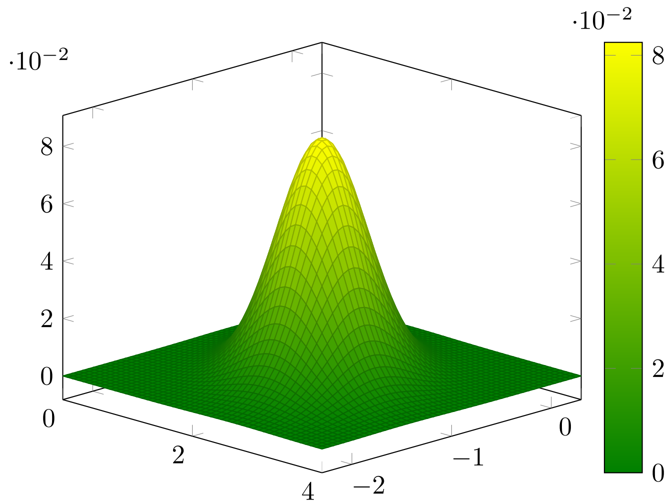
$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = -1.5$

$\rho_{\xi,\eta} = \frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathbb{D}_\xi \cdot \mathbb{D}_\eta}} = \frac{-1.5}{\sqrt{3\cdot7}} = -\frac{3}{2\sqrt{21}}$

$C = \frac{1}{(2\pi)^{\left(\frac{n}{2}\right)}\sqrt{\det\Sigma}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{21+2.25}}$

$p_{\xi,\eta}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{23.25}} exp\left(-\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right]^\top \begin{pmatrix} 3 & 1.5 \\ 1,5 & 7 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right]\right)$

График плотности распределения случайного вектора:


·10^−2
8
6
4
2
0
0
2
4
−2
−1
0
·10^−2
8
6
4
2
0

2. Нахождение афинного преобразования, приводящее исходный СВ в стандартный нормальный.

Афинное преобразование - математическая операция, которая сопоставляет одно координатное пространство с другим. Формула афинного преобразования:

$$\vec{\xi_{st}} = A\vec{\xi} + B$$

$3x^2+3xy+7y^2-9x+8y+13 = 3(x^2+xy-3x)+7y^2+8y+13 = 3(x^2+2x(0.5y-1.5)+(0.5y-1.5)^2-(0.5y-1.5)^2)+7y^2+8y+13 = 3(x+0.5y-1.5)^2+7y^2+8y+13-\frac{3y^2}{4}+\frac{9y}{2}+\frac{27}{4} = 3(x+0.5y-1.5)^2+\frac{25y^2+(32+18)y+(13\cdot14-27)}{4} = 3(x+0.5y-1.5)^2+\frac{25y^2+50y+25}{4} = 3(x+0.5y-1.5)^2+\frac{25}{4}(y+1)^2 = (\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{3\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{5}{2}y+\frac{5}{2})^2$

Таким образом, получается: $\begin{pmatrix} \xi_{st} \\ \eta_{st} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

Чтобы показать, что вектор нормальный, необходимо убедиться в равенствах:

$$\mathbb{E}_{\xi_{st},\eta_{st}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{\xi_{st},\eta_{st}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Итак, поехали:

$\mathbb{E}_{\xi_{st},\eta_{st}} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Sigma_{\xi_{st},\eta_{st}} = \frac{4}{75\cdot4} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{15}{2} & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{75} \begin{pmatrix} 75 & 0 \\ 0 & 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Таким образом, полученный вектор через афинно преоразование является стандарнтым нормальным СВ.

3. Нахождение ортогонального преобразования, приводящего соответствующий центрированный СВ в вектор с независимыми компонентами. Построение графика плотности полученного распределения.

Найдем определитель матрицы коварианций и прировняем его к 0.

$\det(\Sigma^{-1} - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1.5 \\ 1.5 & 7-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)\cdot(7-\lambda) - 1.5^2 = \lambda^2 - 10\lambda + 18.75 = 0$

Решая квадратное уравнение получаем собственные значения: $\lambda_1 = \frac{15}{2}$ $\lambda_2 = \frac{5}{2}$

Теперь найдем собственные векторы:

1)Для собственного ветора $\lambda_1 = 7.5$:

$$\begin{pmatrix} -4.5 & 1.5 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда следует отношение: $v_{1y} = 3v_{1x}$.

Выберем значения собственного вектора: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

2)Для собственного ветора $\lambda_2 = 2.5$:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 1.5 \\ 1.5 & 4.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что: $v_{2x} = -3v_{2y}$.

Выберем значения собственного вектора: $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Рассчитаем норму векторов: $\|v_1\| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} = \|v_2\|$

Далее составим матрицу из собственных линейно независимых векторов и величины, обратной норме:

$$Q^\top = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдем значение СВ в ортогональной системе координат:

$$\begin{pmatrix} \xi_{ort} \\ \eta_{ort} \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi + 3\eta \\ 3\eta - \xi \end{pmatrix}$$

А также некоторые числовые характеристики:

1)Учитывая, что $\mu = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ найдем математическое ожидание СВ в ортогональной СК путем домножение на матрицу Q слева:

$$\mathbb{E}_{\xi_{ort},\eta_{ort}} = Q\mu = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2)Маттрица ковариаций:

$\Sigma_{ort} = Q\Sigma Q^\top = \frac{4}{750} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{4}{750} \begin{pmatrix} 2.5 & 7.5 \\ 22.5 & -7.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{4}{750} \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{15} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

3) Обратная (для построения уравнения плотности распределения):

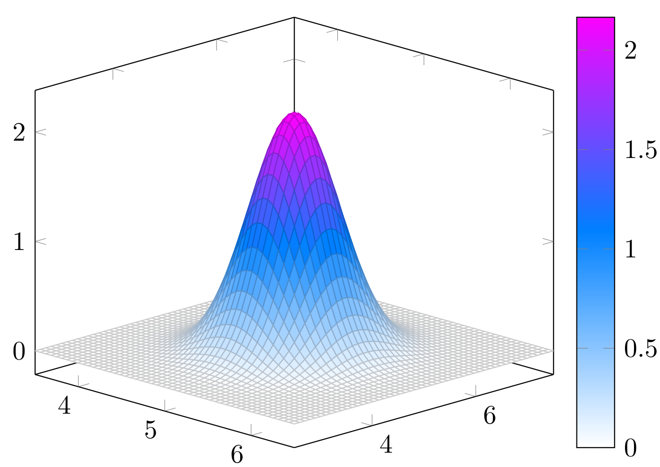
$\Sigma_{ort}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.5 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{pmatrix}$

Составим уравнение плотности распределения, используя полученные величины:

$p_{\xi,\eta} = \frac{\sqrt{750}}{4\pi} exp \left(-\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right]^\top \begin{pmatrix} 7.5 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \right) =$

$\frac{\sqrt{750}}{4\pi} exp \left(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7.5(x-5) & 2.5(y-5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-5 \\ y-5 \end{pmatrix} \right) = \frac{\sqrt{750}}{4\pi} exp \left(-\frac{1}{2}(7.5x^2 - 75x + 2.5y^2 - 25y + 250) \right)$

График плотности распредления:



4. Вычисление характеристик распределения случайного вектора $(-5\xi+5\eta, -5\xi+4\eta)^\top$. Нахождение формулы и построение графика плотности распределения полученного СВ.

$$\begin{pmatrix} \xi_4 \\ \eta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\xi+4\eta \\ -5\xi+4\eta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$\det A = 0$, заменим ее на другую матрицу: $\begin{pmatrix} \xi_4 \\ \eta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\xi-4\eta \\ -5\xi+4\eta \end{pmatrix}$

Продолжим:

$$\mathbb{E}_{\xi_4,\eta_4} = A \cdot \mathbb{E}_{\xi,\eta} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -14 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{\xi_4,\eta_4} = A \cdot \Sigma \cdot A^\top = \tfrac{4}{75} \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \tfrac{4}{75} \begin{pmatrix} -29 & -4.5 \\ -41 & 19.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \tfrac{4}{75} \begin{pmatrix} 163 & 127 \\ 127 & 283 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma^{-1}_{\xi_4,\eta_4} = \tfrac{1}{1600} \begin{pmatrix} 283 & -127 \\ -127 & 163 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{D}_{\xi_4} = \tfrac{163 \cdot 4}{75} = \tfrac{652}{75}$$

$$\mathbb{D}_{\eta_4} = \tfrac{283 \cdot 4}{75} = \tfrac{1132}{75}$$

$$\operatorname{cov}(\xi_4, \eta_4) = \tfrac{127 \cdot 4}{75} = \tfrac{508}{75}$$

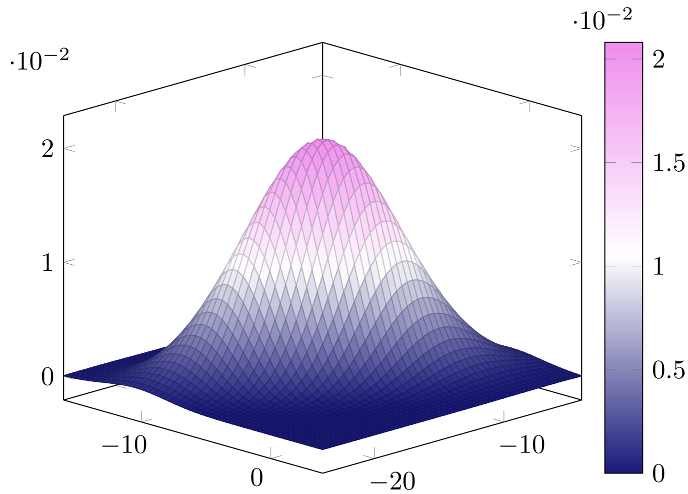
$$\rho_{\xi_4,\eta_4} = \tfrac{\operatorname{cov}(\xi_4,\eta_4)}{\sqrt{\mathbb{D}_{\xi_4} \cdot \mathbb{D}_{\eta_4}}} = \tfrac{508}{\sqrt{652 \cdot 1132}} = \tfrac{508}{\sqrt{738064}}$$

$$C = \tfrac{1}{(2\pi)^{\left(\frac{n}{2}\right)} \sqrt{\det \Sigma}} = \tfrac{1}{2\pi\sqrt{1600}} = \tfrac{1}{800\pi}$$

$$\rho_{\xi_4,\eta_4}(x,y) = \tfrac{1}{800\pi} exp\left(-\tfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ -14 \end{pmatrix}\right]^\top \tfrac{1}{1600} \begin{pmatrix} 283 & -127 \\ -127 & 163 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ -14 \end{pmatrix}\right]\right) = \tfrac{1}{800\pi} exp\left(-\tfrac{1}{3200} \begin{pmatrix} 283x - 127y + 1698 - 1778 \\ 163y - 127x + 2282 - 762 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} x+6 \\ y+14 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\tfrac{1}{800\pi} exp\left(-\tfrac{1}{3200}(283x^2 - 254xy - 160x + 163y^2 + 3040y + 20800)\right)$$

График плотности распределения:


$\cdot 10^{-2}$
2
1
0
−10
0
−20
−10
$\cdot 10^{-2}$
2
1.5
1
0.5
0

5. Нахождение условного распределения ξ при условии η. Вычисление математического ожидания и дисперсии.

Для нахождения условного распределения воспользуемся формулой:

$$\rho_{\xi|\eta=y}(x) = \frac{\rho_{\xi,\eta}(x,y)}{\rho_\eta(y)},$$

где $\rho_\eta(y)$ можно найти по формуле:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_{\xi,\eta}(x,y)dy$$

Давайте вычислим интеграл:

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{23.25}} exp(-\frac{1}{2}(3x^2+3xy+7y^2-9x+8y+13))dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 7\cdot 23.25}} exp(-\frac{75}{56}(x-2)^2)$

Получили распределение случайной величины η. Теперь найдем условное распределение

$\rho_{\xi|\eta=y}(x) = \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{23.25}} exp(-\frac{1}{2}(3x^2+3xy+7y^2-9x+8y+13))}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 7\cdot 23.25}} exp(-\frac{75}{56}(x-2)^2)} = \sqrt{\frac{7}{2\pi}} exp(-\frac{1}{56}(9x^2+84x+48x+196y^2+224y+64))$

Далее вычислим дисперсию и математисеское ожидание для полученного условного распределения:

$\mathbb{E}_{\xi|\eta=y} = \int_{\mathbb{R}} x\cdot\rho_{\xi|\eta=y}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\sqrt{\frac{7}{2\pi}} exp(-\frac{1}{56}(9x^2+84x+48x+196y^2+224y+64)) = -\frac{44}{9}\sqrt{14\pi} exp(-\frac{1}{2}(y-1)(7y+15))$

$\mathbb{D}_{\xi|\eta=y} = \int_{\mathbb{R}} x^2\cdot\rho_{\xi|\eta=y}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot\sqrt{\frac{7}{2\pi}} exp(-\frac{1}{56}(9x^2+84x+48x+196y^2+224y+64)) = \frac{1024}{27}\sqrt{14\pi} exp(-\frac{1}{2}(y-1)(7y+15))$

Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы было изучено многомерное нормальное распределение, уравнение его плотности распределения, основные числовые характеристики, свойтсва. Также были закреплены навыки вычисления числовых характеристик многомерного СВ и построение графиков его распределения. Таким образом, мы провели афинное преобразование, нашли ортогональное преобразование, описали два новых случайных распределения, одним из которых было условное.