

Evaluación Económico Financiera de Proyectos de Inversión

Especialidad en Ingeniería y Gestión de Proyectos
Posgrados de Ingeniería

Relación del dinero en el tiempo

Temas y Subtemas

Mtro. Rodrigo Navarro Guerrero

I. RELACIÓN DINERO EN EL TIEMPO

I. Antecedentes

II. Interés Simple

III. Interés Compuesto

i. Valor Futuro

ii. Valor Presente

IV. Efectos del Plazo y la Tasa de Interés


V. Tasa de Interés Real y Nominal

VI. Tablas de Amortización

i. Valor Presente de una Anualidad Vecindad



Libros de Texto

- 
- Apuntes de Evaluación de Proyectos elaborados por Mtro. Rodrigo Navarro Guerreo.
 - Matemáticas Financieras; José Luis Villalobos; Segunda Edición; Prentice Hall.

Relación de dinero en el tiempo

Relación de dinero en el tiempo:

¿El dinero de hoy vale más que el de mañana?

El problema de decisión de un ganador de la lotería:

- Pago anual de ganancias de una lotería de \$32'600,000 durante 9 años.
- Por un pago único de \$140'000,000.

¿Qué decisión elegirías?

Relación de dinero en el tiempo:

- Si hoy me pagan \$500,000:
 - Compro materia prima para mi negocio.
 - Invierto en la bolsa, fondo mutuo, etc.
 - Meto el dinero al banco.
 - ... dentro de 1 año habré generado más dinero.
- Si me pagan dentro de 1 año \$500,000:
 - No me alcanzará para la misma cantidad de materia prima.
 - No gané dinero en la bolsa.
 - No gané los intereses del banco.
 - ... dejé de ganar dinero.

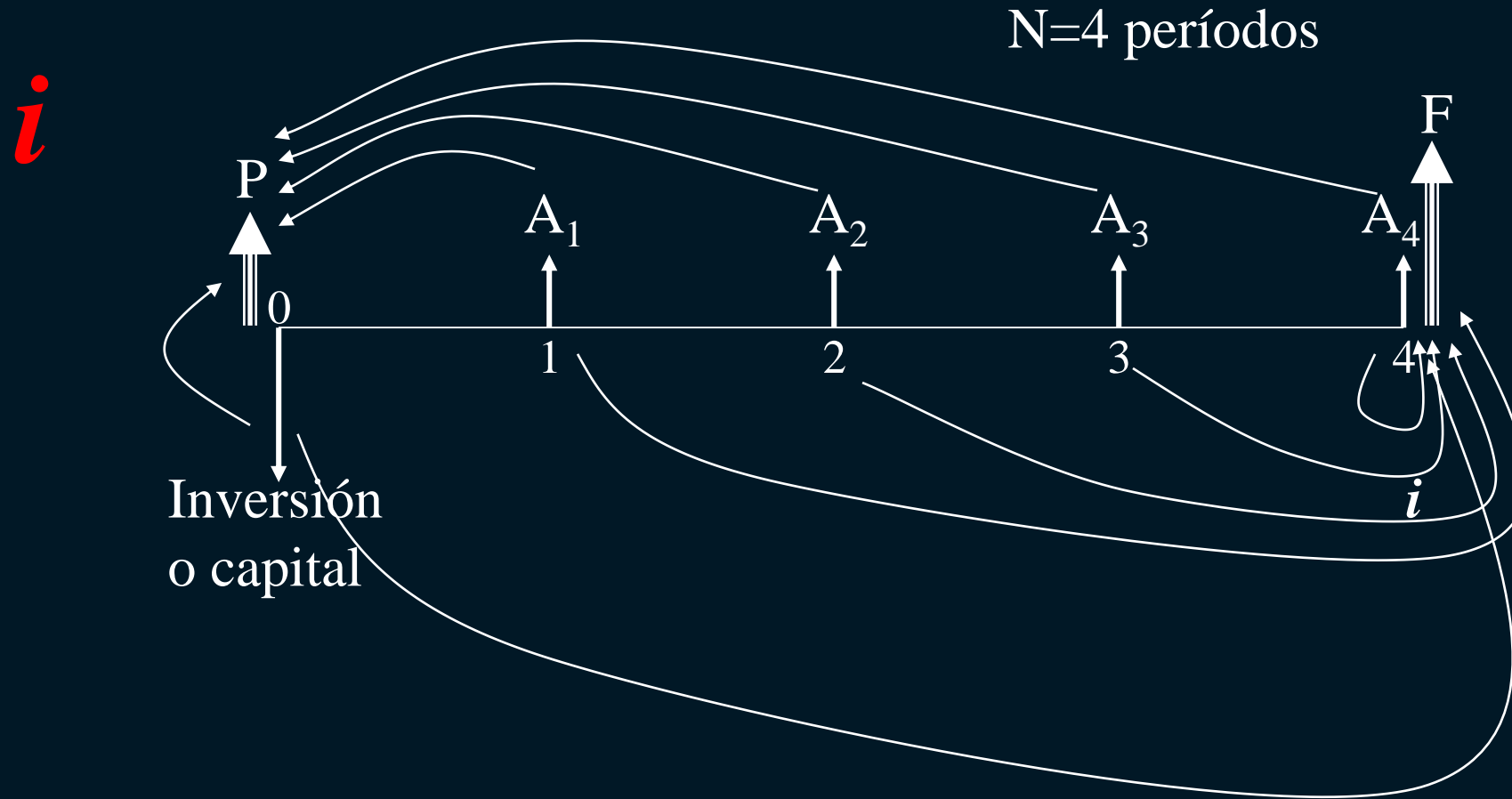
El escenario cambia únicamente por la disposición del dinero en diferentes tiempos.

Relación de dinero en el tiempo:

El dinero tiene dos coordenadas (cantidad y tiempo):

Utilizando una misma tasa o costo de oportunidad, se obtiene el valor futuro de una cantidad presente o cuando obtenemos el valor presente de una cantidad futura, en realidad estamos hablando de la misma cantidad pero ubicada en tiempos diferentes.

Relación de dinero en el tiempo:



Relación de dinero en el tiempo:

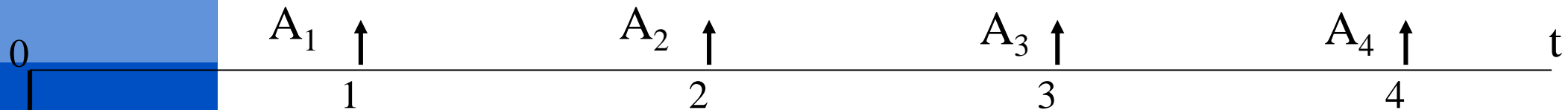
Se pueden realizar múltiples combinaciones con estos diagramas.

Todo análisis de inversión implica entradas y salidas de dinero a lo largo del tiempo.

- **Entrada de dinero:** los beneficios de un período exceden a los costos del mismo período. Se representan gráficamente con una flecha hacia arriba.
- **Salida de dinero:** los costos de un período exceden a los beneficios del mismo período. Se representan gráficamente con una flecha hacia abajo.

Ejemplos:

Inversión convencional:



Préstamo:



Relación de dinero en el tiempo

Tipo de Flujos

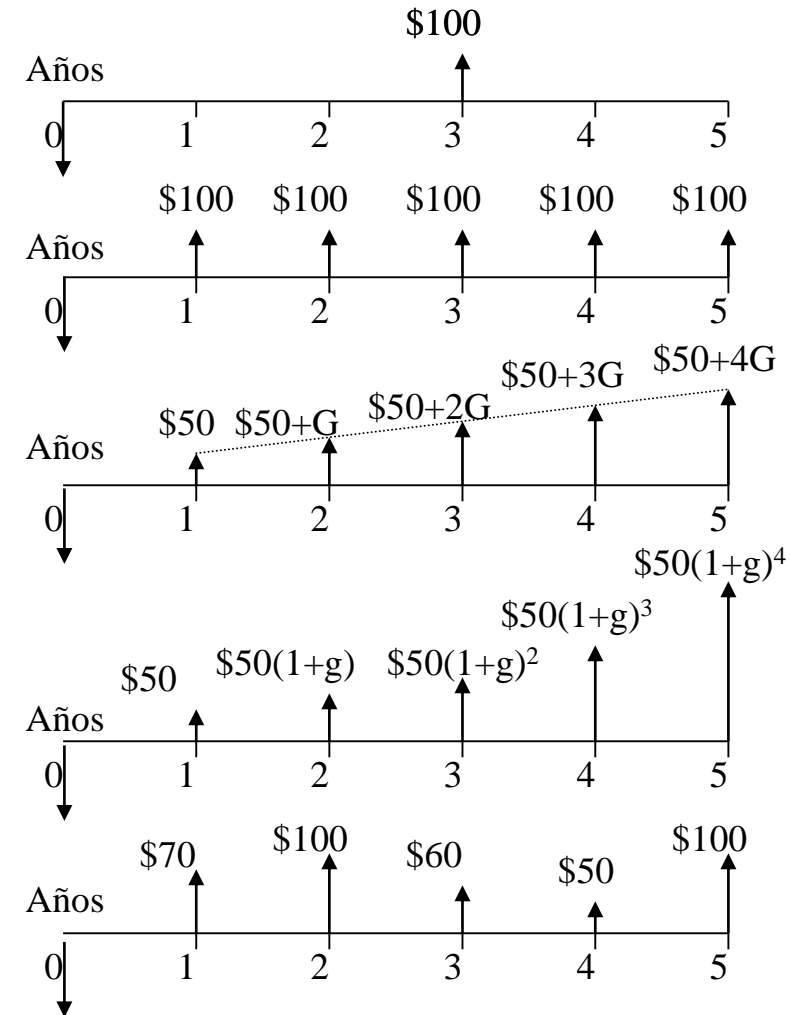
(a) Flujo de caja único

(b) Serie de pagos iguales (uniforme)

(c) Series de gradiente lineal

(d) Series de gradiente geométrica

(e) Series de pagos irregulares



Relación de dinero en el tiempo

Interés Simple

Para una inversión en la que sólo el capital genera intereses durante el tiempo de la transacción, la ganancia al final del período se conoce como interés simple. El cálculo de los intereses se efectúa de la siguiente manera:

Si C = Capital

r = Tasa de Interés Anual (%)

n = Número de Años

I = Intereses Generados (\$)

S = Monto o Valor Futuro al final del periodo ($S_{al\ do}$)

$$I = C r n \quad (2.1)$$

El monto "S" al final del período correspondería al capital inicial más los intereses generados.

$$S = C + I \quad (2.2)$$

Relación de dinero en el tiempo

Interés Simple

Substituyendo (2.1) en (2.2), el pago al final del período es igual al capital inicial más los intereses generados, esto es:

$$S = C + Crn$$

Factorizando la expresión anterior:

$$S = C(1 + rn) \quad (2.3)$$

En la práctica se requiere la determinación de los intereses para períodos menores de un año. En las operaciones bancarias se utiliza lo que se conoce como base mixta, a través de la cual los intereses se calculan considerando años de 365 días, así como los días efectivamente transcurridos.

$$I = Crn/365 \quad (2.4)$$

Relación de dinero en el tiempo

Interés Simple

→ Banco de México

Ejemplo: Se otorga un crédito a TR + 2.5%. Si la Tasa de Referencia (TR) es 17.25% y el saldo del crédito \$ 12,500, obtener los intereses para 30 días.

$$I = (12,500 \times (0.1725 + 0.025) \times 30) = 202.9$$

365

$$I = C r n$$

$$I = 12500 \times 0.1975 \times \frac{30}{365} = \boxed{202.9}$$

Cuál es el Saldo de la deuda al banco que otorgó el crédito al cabo de 30 días?

$$S = C (1 + r n) = 12500 \times \left(1 + 0.1975 \times \frac{30}{365}\right) = \boxed{12702.9}$$

Relación de dinero en el tiempo

Interés Compuesto / Valor Futuro (VF)

Una inversión en la cual los interés que se generan se continúan reinvertiendo, se efectúa a interés compuesto.

se capitalizan/reinvierten cada cierto periodo

Si VP = Valor Inicial o valor presente

r = Tasa anual de interés del periodo "i"

n = Número de Periodos

VF = Valor Futuro \rightarrow Cap + Interés compuesto

Utilizando la ecuación 2.3, es posible conocer el valor de una inversión al final de un período:

$$VF_1 = VP(1 + r_1) \quad S = C(1 + rn) = C(1 + r)$$

Si se reinvierten los recursos a la tasa del segundo período, al finalizar éste se tendrá:

$$VF_2 = VF_1 + VF_1 r_2 = VP(1 + r_1) + VP(1 + r_1)r_2 = VP(1 + r_1)(1 + r_2)$$

Si se continúa reinvertiendo a la tasa correspondiente para cada periodo:

$$VF_n = VP(1 + r_1)(1 + r_2) \cdots (1 + r_n) \quad (2.5)$$

Relación de dinero en el tiempo

Interés Compuesto / Valor Futuro (VF)

Para el caso particular en que la tasa a la que se reinvierten los recursos sea igual para todos los períodos se tiene:

$$VF_n = VP (1 + r)^n \quad (2.6)$$

Para un valor unitario la expresión $(1 + r)^n$ se conoce como factor de acumulación.

Es importante destacar que la formula 2.6 sólo es válida cuando la tasa de reinversión es igual, en el caso contrario se requiere utilizar la tasa correspondiente a cada año:

Si se continúa reinvirtiendo a la tasa correspondiente para cada periodo:

$$VF_n = VP(1 + r_1)(1 + r_2) \cdots (1 + r_n) \quad (2.5)$$

Relación de dinero en el tiempo

Interés Compuesto / Valor Futuro (VF)

Ejemplo: Un inversionista cuenta con excedentes de \$1,000, los cuales no requerirá durante los próximos tres años.

Una casa de bolsa le asegura una tasa del 22% capitalizable anualmente. Por otra parte, tiene la opción de depositar sus recursos en un banco, el cual le pagará la tasa de interés que al inicio de cada año esté vigente en el mercado.

capitalizable

Si la tasa para el primer año es del 25%, para el segundo del 22% y para el tercero del 20% anual, determinar en qué institución le conviene efectuar su depósito.

Casa de Bolsa:

$$VF_3 = 1,000(1 + 0.22)^3 = \$ 1,816$$

Banco:

$$VF_3 = 1,000 (1 + 0.25)(1 + 0.22)(1 + 0.20) = \$ 1,830$$

Relación de dinero en el tiempo

Ejercicios Interés simple y Compuesto

Ejercicios 1 / 2

✓ Si se depositan \$100 en el Banco el día de hoy y se invierten en una tasa de 8% compuesta anualmente, ¿Cuánto dinero se tendrá en dicha cuenta dentro de 50 años?

$$VF = 100(1+0.08)^{50} = 4690.2$$

✓ El 1 de enero de 1994 recibes como herencia de tu tía recientemente fallecida una cuenta bancaria que se abrió el 1 de enero de 1944 con \$1,000. Diez años después tu tía hizo otro depósito por \$1,000. ¿Cuánto dinero recibes en herencia si la cuenta se invertía a una tasa de 5% compuesta anualmente?

✓ Una barra de pan cuesta \$0.80 el día de hoy. Si el precio del pan se incrementa a razón de 6% anual, ¿Cuánto costará el pan dentro de 20 años?

$$VF = 0.80(1+0.06)^{20}$$

✓ Cuanto dinero deberá depositarse el día de hoy en una cuenta de ahorros para tener \$20,000 dentro de 20 años si la tasa de interés se compone anualmente a razón de 8%?

$$20,000 = VP(1+0.08)^{20}$$

$$20,000 = VP(1.08)^{20}$$

$$VP = \frac{20000}{1.08^{20}} = 4290.9$$

Relación de dinero en el tiempo

Ejercicios Interés simple y Compuesto

Ejercicios 2 / 2

$$VP = \frac{20000}{(1.15)^{10}} \quad \text{o} \quad VP = \frac{20000}{(1.15)^{30}} ?$$

- ✓ Hallar la cantidad que es necesario colocar en una cuenta que paga el 15% con capitalización ~~trimestral~~, para disponer de 20.000 al cabo de 10 años.
- ✓ Hallar el valor futuro de \$20.000 depositados al 8%, capitalizable ^{anual} durante 10 años.
$$VF = (20000)(1.08)^{10} = 43,178$$
- ✓ Carlos abre una cuenta de ahorro y deposita un monto de \$2400. El banco paga una tasa de interés del 5% nominal anual. Calcule el saldo de su cuenta después de 4 años. a) Con interés simple. b) Con interés compuesto capitalizando anualmente.

$$a) \quad S = 2400(1 + 0.05(4)) = 2880$$

$$b) \quad VF = 2400(1 + 0.05)^4 = 2917.2$$

Relación de dinero en el tiempo

Interés Compuesto / Valor Presente (VP)

De la misma manera que el Valor Futuro (VF) representa el valor del dinero al final en un determinado período, el Valor Presente (VP), indica el valor "el día de hoy" que tendrían futuras cantidades de dinero. Despejando el VP de la ecuación 2.5:

$$VP = \frac{VF_n}{(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_n)} \quad (2.15)$$

En caso de que las tasas de interés sean iguales:

$$VP = \frac{VF_n}{(1+r)^n} \quad (2.16)$$

La expresión $1/(1+r)^n$ se conoce como **Factor de Descuento**.

Relación de dinero en el tiempo

Interés Compuesto / Valor Presente (VP)

Ejemplo: Un inversionista retira \$250,500 a principios de 2017. Si la tasa de interés anual de los tres últimos años fue de 9.9%, 8.7% y 10.7%, ¿A cuánto ascendió su inversión al inicio de 2014?

$$VP = \frac{250,500}{(1 + 0.099)(1 + 0.087)(1 + 0.107)} = 189,423$$

Ejemplo: Un pagaré estipula el pago de 975,000 dentro de 10 años. Si la tasa de interés que se podría obtener en una inversión alternativa es del 15% anual ¿Cuál es el valor actual de dicho pagaré?

Utilizando la fórmula:

$$VP = \frac{975,000}{(1 + 0.15)^{10}} = 241,005$$

Relación de dinero en el tiempo

Interés Compuesto / Valor Futuro (VF)

Con esto podemos calcular **VF** si sabemos **VP** (también nombrada **Valor Actual (VA)**), la tasa de interés **r** y el número de periodos **n**. Aquí están las cuatro fórmulas:

$$VF = VA (1+r)^n$$

Calcula el **valor futuro** si sabemos el valor actual, la tasa de interés y el número de periodos.

$$VA = VF / (1+r)^n$$

Calcula el **valor actual** si sabemos el valor futuro, la tasa de interés y el número de periodos.

$$r = (VF / VA)^{1/n} - 1$$

Calcula la **tasa de interés** si sabemos el valor actual, el valor futuro y el número de periodos.

$$n = \frac{\ln(VF / VA)}{\ln(1 + r)}$$

Calcula el **número de periodos** si sabemos el valor actual, el valor futuro y la tasa de interés.

Relación de dinero en el tiempo

Reglas de la Adición de los Valor Presente

El Valor Presente de cualquier secuencia de flujos de efectivo, es igual a la suma de los valores presentes de cada uno de los flujos en la secuencia. En términos algebraicos la regla de la adición se puede expresar de la siguiente manera:

↖ \$ en el periodo 2

$$VP = \frac{FE_1}{(1+r_1)} + \frac{FE_2}{(1+r_1)(1+r_2)} + \dots + \frac{FE_n}{(1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_n)}$$

} sólo puedes sumar cada flujo si están en el mismo momento
Formula General

$$VP = \sum_{t=0}^{t=n} \frac{FE_t}{(1+r)^t}$$

↓ flujo en el periodo n (2.17)

Donde:

FE_t = Flujo de efectivo por período

Σ = Suma de los flujos descontados

t = Índice de tiempo

$1/(1+r)$ = Factor de descuento

Es importante destacar que la expresión 2.17, sólo es válida cuando las tasas de interés por período son iguales, en caso contrario, deberá utilizarse la fórmula general.

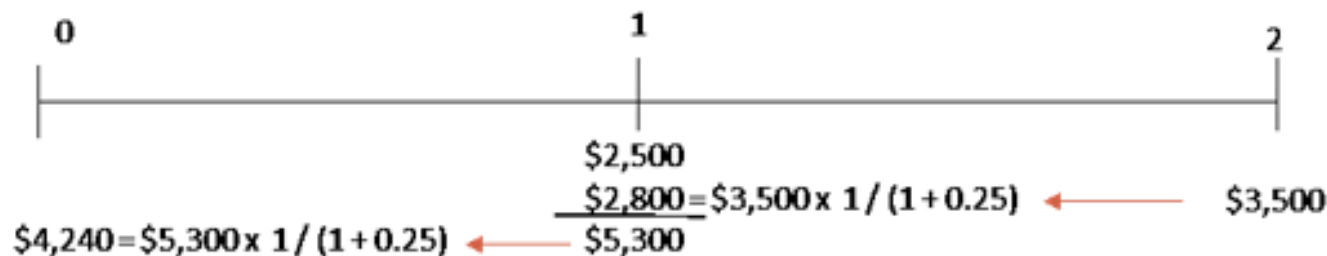
Relación de dinero en el tiempo

Reglas de la Adición de los Valor Presente

Cuando se utiliza como tasa de descuento el costo de oportunidad de los recursos, un inversionista sería indiferente entre un determinado monto de recursos en el futuro o su valor presente el día de hoy. Por ejemplo, un inversionista sería indiferente entre tener \$100 el día de hoy o \$125 en un año, si el costo de oportunidad de sus recursos es el 25%.

Por lo anterior, el **Valor Presente de un flujo**, es el máximo valor que un inversionista estaría dispuesto a pagar por una inversión que produjese dichos flujos.

Ejemplo: Se tiene una inversión que producirá \$ 2,500 el primer año y \$3,500 el segundo. Obtener el valor presente de la inversión, asumiendo un costo del dinero del 25%.



Los valores presentes de una secuencia de flujos de efectivo pueden ser agrupados en un determinado período, mediante el cálculo del valor presente de los flujos de efectivo que preceden a dicho período.

Relación de dinero en el tiempo

Efectos de Plazo y la Tasa de Interés

A medida que el *tiempo se incrementa*, el valor de los flujos en el presente disminuye.

- Esta observación que intuitivamente es aceptable, se comprueba por inspección del factor de descuento $1/(1 + r)^t$, en donde a mayores valores de "t", corresponde un incremento exponencial del denominador y, por lo mismo, una disminución del valor presente.

Ejemplo: Obtener el factor de valor presente de una tasa del 10%, para 5, 10 y 15 años.

	5 años	10 años	15 años
$1/(1 + 0.10)^t$	0.621	0.386	0.239

- De manera similar, cuando la tasa aumenta el denominador del factor de descuento se incrementa y el valor presente disminuye.

Ejemplo: Obtener el factor de valor presente para un período de 10 años y tasas de descuento del 5, 10 y 15%.

	r=5%	r=10%	r=15%
$1/(1 + r)^{10}$	0.614	0.386	0.247

Relación de dinero en el tiempo

Tasa de Interés Real y Nominal

La ganancia que se obtiene por una inversión en términos monetarios está dada por la tasa de interés nominal; cuando dicha ganancia se da en relación al poder de compra, el rendimiento es la tasa de interés real. Si "In" es la tasa de la inflación, "TR" la tasa real de interés y "TN" la tasa nominal, para una inversión unitaria se tiene que $TN=1$, por lo que la tasa de interés real será:

$$(1 + TN) = (1 + TR)(1 + In)$$

$$TN = (1 + TR)(1 + In) - 1 \quad (2.13)$$

$$TR = \frac{(1 + TN)}{(1 + In)} - 1 \quad (2.14)$$

Relación de dinero en el tiempo

Tasa de Interés Real y Nominal

Ejemplo:

Una inversión produjo un rendimiento anual del 35%, si la inflación fue del 28%, aplicando la fórmula 2.14 se tiene que la tasa real que obtuvo el inversionista fue del 5.47%.

$$TN = 35\% \quad Inf = 28\% \quad TR = 5.47\%$$

$$TR = \frac{1 - 0.35}{1 - 0.28} - 1 = 0.0547$$

Es importante resaltar que este resultado es distinto a la diferencia entre la tasa nominal y la inflación, práctica que aunque errónea, es frecuente de observar.

Relación de dinero en el tiempo

Ejercicios Valor Futuro y Presente

Ejercicios 1 / 1

- ✓ Cuánto dinero voy a tener ahorrado en al año 21 si deposito \$700 hoy, \$900 en el año 2, \$1,000 anuales del 5 al 13 y \$1,000 anuales del 15 al 19. La tasa de interés es 6% anual.
- ✓ Cuánto dinero tengo que depositar en el periodo 3 para poder retirar \$300 en el periodo 6, \$500 anuales del periodo 8 al periodo 10 y \$800 anuales del periodo 12 al periodo 20. La tasa de interés es 5% anual.
- ✓ Cuánto dinero voy a tener ahorrado en el periodo 25 si deposito \$5,000 anuales del periodo 3 al 15; \$1,500 en el periodo 16 y \$2,000 anuales del periodo 17 al 22. La tasa de interés es 8% anual.

Relación de dinero el e tiempo

Tablas de Amortización

- Una tabla de amortización es una descripción analítica que muestra la forma en que se extingue una deuda. Las condiciones financieras de los créditos son:
 - El monto;
 - La tasa;
 - El plazo; y
 - El esquema de amortización de la deuda.
- La amortización de una deuda (pago del capital prestado) puede realizarse en cualquier plazo (mensual, trimestral, anual e inclusive algunos bonos se amortizan a través de un solo pago al final del periodo).
- El principio fundamental es que al estar representado el costo del dinero por la tasa de interés, es necesario calcular los intereses devengados sobre el capital vigente o saldo insoluto del crédito; sin embargo, podemos encontrar diferentes modalidades de tablas de amortización:

Relación de dinero el e tiempo

Tablas de Amortización

Cuando sólo se pagan intereses se dice que se cuenta con un plazo de gracia de capital.

Ejemplo: prestan \$100,000 con una tasa de interés del 20% anual, solo se pagarán intereses en los primeros 4 años del préstamo y en el año 5 se pagará el monto del préstamo e intereses.

Periodo	Saldo Inicial	Intereses Generados	Pago Interés	Pago Principal	Pago Total	Saldo Final
0	100,000	-	-	-	-	100,000
1	100,000	20,000	20,000	-	20,000	100,000
2	100,000	20,000	20,000	-	20,000	100,000
3	100,000	20,000	20,000	-	20,000	100,000
4	100,000	20,000	20,000	-	20,000	100,000
5	100,000	20,000	20,000	100,000	120,000	-
Suma			100,000	100,000	200,000	

Relación de dinero el e tiempo

Tablas de Amortización

Cuando los intereses no se pagan, estos se deben añadir al capital vigente, esta operación se conoce como capitalización de intereses.

Ejemplo: prestan \$100,000.00, con un plazo de 5 años, una tasa de interés del 20% anual, sin embargo, no se pagan intereses hasta el último periodo y hago un solo pago de capital al final.

Periodo	Saldo Inicial	Intereses Generados	Pago Interés	Pago Principal	Pago Total	Saldo Final
0	100,000	-	-	-	-	100,000
1	100,000	20,000	-	-	-	120,000
2	120,000	24,000	-	-	-	144,000
3	144,000	28,800	-	-	-	172,800
4	172,800	34,560	-	-	-	207,360
5	207,360	41,472	41,472	207,360	248,832	-
Suma			41,472	207,360	248,832	

Relación de dinero el e tiempo

Tablas de Amortización

Cuando los intereses no se pagan, estos se deben añadir al capital vigente, esta operación se conoce como capitalización de intereses.

Ejemplo: prestan \$100,000.00, con un plazo de 5 años, una tasa de interés del 20% anual, sin embargo, no se pagan intereses hasta el último periodo y hago un solo pago de capital al final.

Periodo	Saldo Inicial	Intereses Generados	Pago Interés	Pago Principal	Pago Total	Saldo Final
0	100,000	-	-	-	-	100,000
1	100,000	20,000	-	-	-	120,000
2	120,000	24,000	-	-	-	144,000
3	144,000	28,800	-	-	-	172,800
4	172,800	34,560	-	-	-	207,360
5	207,360	41,472	41,472	207,360	248,832	-
Suma			41,472	207,360	248,832	

Relación de dinero el e tiempo

Tablas de Amortización

En aquellos casos en que la amortización del financiamiento se estructura de acuerdo a las necesidades específicas de las empresas se dice que se cuenta con un traje a la medida.

Ejemplo: prestan \$100,000.00, con un plazo de 5 años, una tasa de interés del 20% anual, sin embargo, no se pagan intereses hasta el último periodo y hago un solo pago de capital al final; pero se puede pagar principal en cualquier periodo.

Periodo	Saldo Inicial	Intereses Generados	Pago Interés	Pago Principal	Pago Total	Saldo Final
0	100,000	-	-	-	-	100,000
1	100,000	20,000	-	-	-	120,000
2	120,000	24,000	-	50,000	50,000	94,000
3	94,000	18,800	-	-	-	112,800
4	112,800	22,560	-	-	-	135,360
5	135,360	27,072	27,072	135,360	162,432	-
Suma			27,072	185,360	212,432	

Relación de dinero el e tiempo

Tablas de Amortización (Pago Nivelados / Pagos Iguales)

Este esquema de amortización ha sido frecuentemente utilizado cuando existe estabilidad en las tasas de interés, la mecánica para su cálculo se presenta a continuación:

Ejemplo: Se otorga un crédito por \$100,000 a cinco años y al 20% anual. Si se pactan pagos nivelados (pagos iguales de capital e intereses), obtener la tabla de amortización correspondiente.

Debido a que los pagos son iguales, éstos corresponden a una anualidad, cuyo valor es:

$$A = 100,000 \frac{0.20}{1 - (1 + 0.20)^{-5}} = 33,438$$

$$A = \text{VP} \frac{r}{1 - (1+r)^{-n}} \quad (2.19)$$

Para obtener la tabla de amortización, los intereses se calculan sobre el saldo insoluto del crédito, por lo que el pago a capital será el resultado de substrair de la anualidad los intereses devengados.

Relación de dinero el e tiempo

Tablas de Amortización (Pago Nivelados / Pagos Iguales)

Para el ejemplo, si al inicio del primer año de amortización la deuda es de \$100,000, los intereses al 20% importarían \$20,000; como el pago es por \$33,438, si a este monto se restan los intereses se obtiene el abono a capital (\$13,468) mismo que reduce el saldo del crédito.

Tabla de Amortización: Pagos Iguales de Capital:

Periodo	Saldo Inicial	Intereses Generados	Pago Interés	Pago Principal	Pago Total	Saldo Final
0	\$ 100,000	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ 100,000
1	\$ 100,000	\$ 20,000	\$ 20,000	\$ 13,438	\$ 33,438	\$ 86,562
2	\$ 86,562	\$ 17,312	\$ 17,312	\$ 16,126	\$ 33,438	\$ 70,436
3	\$ 70,436	\$ 14,087	\$ 14,087	\$ 19,351	\$ 33,438	\$ 51,086
4	\$ 51,086	\$ 10,217	\$ 10,217	\$ 23,221	\$ 33,438	\$ 27,865
5	\$ 27,865	\$ 5,573	\$ 5,573	\$ 27,865	\$ 33,438	-\$ 0
Pago Total de Capital				\$ 100,000		

Relación de dinero el e tiempo

Tablas de Amortización (Pagos Iguales de Capital)

Este método es el más usual y permite con gran sencillez el cálculo de los intereses cuando las tasas son variables.

Ejemplo: Si se conviene que el crédito se amortice a través de pagos iguales de capital, la amortización anual de capital sería de \$ 20,000, esto es $(100,000/5)$, por lo que la tabla de amortización sería la siguiente:

Periodo	Saldo Inicial	Intereses Generados	Pago Interés	Pago Principal	Pago Total	Saldo Final
0	\$ 100,000	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -	\$ 100,000
1	\$ 100,000	\$ 20,000	\$ 20,000	\$ 20,000	\$ 40,000	\$ 80,000
2	\$ 80,000	\$ 16,000	\$ 16,000	\$ 20,000	\$ 36,000	\$ 60,000
3	\$ 60,000	\$ 12,000	\$ 12,000	\$ 20,000	\$ 32,000	\$ 40,000
4	\$ 40,000	\$ 8,000	\$ 8,000	\$ 20,000	\$ 28,000	\$ 20,000
5	\$ 20,000	\$ 4,000	\$ 4,000	\$ 20,000	\$ 24,000	\$ -
Pago Total de Capital				\$ 100,000		