



ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Η/Υ

ΤΗΛ302: ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ

Εργαστήριο: Ψηφιακής Επεξεργασίας Σήματος & Εικόνας

Καθηγητής: Μιχάλης Ζερβάκης

3η ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

ΣΧΕΔΙΑΣΗ IIR & FIR ΦΙΛΤΡΩΝ

Ένα χαμηλοπερατό φίλτρο Butterworth είναι ένα φίλτρο όπου το τετράγωνο του πλάτους της απόκρισης συχνότητάς του δίνεται από τη σχέση:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (j\Omega / j\Omega_c)^{2N}}$$

Η παράμετρος N αντιστοιχεί στην τάξη του φίλτρου (είναι ο αριθμός των πόλων της συνάρτησης μεταφοράς) και Ω_c είναι η συχνότητα αποκοπής των 3dB. Η απόκριση συχνότητας του φίλτρου Butterworth φθίνει μονότονα καθώς αυξάνεται η συχνότητα Ω και, όσο αυξάνεται η τάξη του φίλτρου τόσο πιο στενή γίνεται η ζώνη μετάβασης.

Ένα φίλτρο Chebyshev τύπου I είναι ένα φίλτρο με πλάτος της απόκρισης συχνότητας:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2(\Omega / \Omega_p)}$$

Η παράμετρος N αντιστοιχεί στην τάξη του φίλτρου, Ω_p είναι η συχνότητα αποκοπής στη ζώνη διέλευσης και ε είναι μια παράμετρος η οποία ελέγχει το πλάτος της κυμάτωσης στη ζώνη διέλευσης. Όσο αυξάνεται η τάξη του φίλτρου αυξάνεται και ο αριθμός των ταλαντώσεων στη ζώνη διέλευσης, ενώ το εύρος της ζώνης μετάβασης γίνεται στενότερο.

Για την σχεδίαση ενός IIR φίλτρου στο Matlab η διαδικασία είναι να σχεδιάσουμε πρώτα ένα αναλογικό φίλτρο το οποίο θα ικανοποιεί

τα κριτήρια που εμείς θέλουμε για το φιλτράρισμα και στη συνέχεια να αποτυπώσουμε το αναλογικό φίλτρο σε ένα διακριτού χρόνου ψηφιακό φίλτρο με τη χρήση του διγραμμικού μετασχηματισμού (bilinear).

Windowing

Η απλούστερη μέθοδος σχεδίασης FIR φίλτρων είναι η σχεδίαση με χρήση παραθύρων.

Έστω ότι έχουμε ένα φίλτρο με κρουστική απόκριση $\mathbf{h_d(n)}$. Τότε η απόκριση συχνότητας είναι:

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-j\omega n}$$

Ισχύει για την κρουστική απόκριση:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Ένα τέτοιο σύστημα είναι μη αιτιατό (no causal) και επεκτείνεται από το $+\infty$ ως το $-\infty$. Για να κατασκευάσουμε ένα **αιτιατό** (causal) πρέπει να "κόψουμε" κάποιο κομμάτι του $h_d(n)$. Η πιο απλή μέθοδος είναι η εξής:

$$h(n) = \begin{cases} h_d(n), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$$

Για να κατασκευάσουμε το $h(n)$ είναι σαν να χρησιμοποιήσαμε ένα "παράθυρο" $w(n)$:

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases}$$

και

$$h(n) = w(n) \cdot h_d(n)$$

Για τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς στο πεδίο της συχνότητας ισχύει:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) w(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

Φαινόμενο Gibbs

Γενικά, η ύπαρξη πλευρικών λοβών στην απόκριση συχνότητας του παράθυρου δημιουργεί διακυμάνσεις (ripples) στην απόκριση συχνότητας του φίλτρου.

Μόλις πριν και μόλις μετά τη ζώνη μετάβασης του φίλτρου εμφανίζεται η μέγιστη διακύμανση που το πλάτος της είναι ανεξάρτητο του μεγέθους του παραθύρου.

Αυτό είναι γνωστό σαν φαινόμενο Gibbs και είναι χαρακτηριστικό του rectangular παραθύρου.

Άλλα παράθυρα

Για να αποφύγουμε το φαινόμενο Gibbs χρησιμοποιούμε συχνά άλλα παράθυρα μερικά από τα πιο γνωστά είναι τα εξής:

Ορθογώνιο (Rectangular):

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Hamming:

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

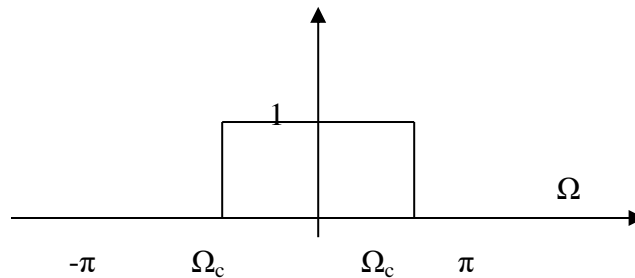
Hanning:

$$w(n) = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

Blackman: $w(n) = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.8 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right), \quad 0 \leq n \leq N-1$

Μια μέθοδος για την κατασκευή των FIR φίλτρων είναι από ένα δοσμένο IIR φίλτρο να κατασκευάσουμε το επιθυμητό ψηφιακό FIR φίλτρο. Η μέθοδος αυτή συνίσταται στον περιορισμό της απόκρισης του IIR φίλτρου έτσι ώστε η απόκριση για $n > N$ να είναι μηδέν. Ο περιορισμός της απόκρισης θα γίνεται πάντα με την βοήθεια κάποιου παραθύρου.

Έστω το ιδεατό βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής Ω_c που φαίνεται στην παρακάτω γραφική παράσταση:



Για να κάνουμε το φίλτρο causal εισάγουμε ένα phase shift $e^{-j\Omega m}$. Η απόκριση συχνότητας $H(\Omega)$ του φίλτρου που προκύπτει θα δίδεται από $H(\Omega) = H_i(\Omega) e^{-j\Omega m}$. Η $H(\Omega)$ μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$H(\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega m} \dots \alpha \nu & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0 \dots \dots \alpha \nu & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$

Η impulse response $h[n]$ αυτού του φίλτρου μπορεί να υπολογιστεί παίρνοντας τον αντίστροφο DTFT της σχέσης αυτής ο οποίος είναι :

$$h[n] = \frac{\sin(\Omega_c(n-m))}{\pi(n-m)} = \frac{\Omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left[\frac{\Omega_c(n-m)}{\pi}\right]$$

Το FIR φίλτρο πραγματοποιείται περιορίζοντας την απόκριση $h[n]$ για $n < 0$ και για $n > N-1=2m$ το οποίο δίνει:

$$h_d[n] = \begin{cases} \frac{\Omega_c}{\pi} \sin c\left[\frac{\Omega_c(n-m)}{\pi}\right] & \text{για } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να σχεδιάσετε ένα lowpass **Butterworth** φίλτρο με **συχνότητα δειγματοληψίας** $f_s = 10\text{KHz}$, **ζώνη passband:** 0-3 KHz (ripple 3db) και **ζώνη stopband:** 4-5KHz (εξασθένιση / attenuation 30 db). Ξεκινήστε βρίσκοντας την τάξη του φίλτρου με χρήση της συνάρτησης **buttord**. Να χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση **butter** για το σχεδιασμό του φίλτρου.

Σχεδιάστε το πλάτος (σε dB) της απόκρισης συχνότητας του ψηφιακού φίλτρου που σχεδιάσατε με χρήση της συνάρτησης **freqz** και παρατηρήστε τα χαρακτηριστικά του φίλτρου στο γράφημα πλάτους (ζώνες φίλτρου, κλπ).

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να σχεδιάσετε ένα **Chebyshev** highpass φίλτρο:

α) με τάξη 2

β) με τάξη 16

Και στις 2 παραπάνω περιπτώσεις τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά του φίλτρου είναι: αναλογική **cutoff συχνότητα** $\omega_c = 2\text{rad/sec}$, **περίοδο δειγματοληψίας** $T_s = 0.2\text{s}$ και **passband ripple** 3db. Να χρησιμοποιήσετε τη συνάρτηση **cheby1** για το σχεδιασμό των φίλτρων.

Δώστε το πλάτος (σε dB) των αποκρίσεων συχνότητας, 256 δειγμάτων, των δύο φίλτρων που σχεδιάσατε στο ίδιο γράφημα (οι δύο αποκρίσεις να έχουν διαφορετικό τύπο και χρώμα γραμμής). Ο οριζόντιος άξονας του γραφήματος να παρουσιάζει δείγματα της συχνότητας w (σε radians/sample) στο εύρος [0 1] (γιατί;).

Εξηγείστε τις διαφορές των δύο αποκρίσεων συχνότητας.

ΑΣΚΗΣΗ 3

α) Έχουμε το σήμα $x(t)=1+\cos(1000t)+\cos(16000t)+\cos(30000t)$. Κάντε δειγματοληψία 500 δειγμάτων στη συχνότητα δειγματοληψίας της άσκησης 1. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το ψηφιακό lowpass φίλτρο που σχεδιάσατε στην άσκηση 1, να **φιλτράρετε το σήμα**. Να χρησιμοποιήσετε τα διανύσματα που υπάρχουν από το φίλτρο αυτό και να γίνουν εισαγωγή στη συνάρτηση **filter**. Παρουσιάζετε το φαινόμενο aliasing με την περίοδο $T_s = 1/f_s$;

Δώστε τις γραφικές παραστάσεις στο σήμα (μετά τη δειγματοληψία) και στο φάσμα του **πριν και μετά την εφαρμογή του lowpass φίλτρου** κι εξηγήστε τα αποτελέσματα (ως προς τις επιπτώσεις του κάθε φίλτρου στις συχνότητες του σήματος).

β) Έχουμε το σήμα $x(t)=1+\cos(1.5t)+\cos(5t)$. Κάντε δειγματοληψία 500 δειγμάτων στη συχνότητα δειγματοληψίας της άσκησης 2. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το 2ο φίλτρο που σχεδιάσατε στην άσκηση 2, να **αφαιρέσετε τις χαμηλές συχνότητες** του σήματος $x(t)=1+\cos(1.5t)+\cos(5t)$.

Δώστε τις γραφικές παραστάσεις στο σήμα (μετά τη δειγματοληψία) και στο φάσμα του **πριν και μετά την εφαρμογή του highpass φίλτρου** κι εξηγήστε τα αποτελέσματα (ως προς τις επιπτώσεις του κάθε φίλτρου στις συχνότητες του σήματος).

ΑΣΚΗΣΗ 4

- Να σχεδιάσετε ένα FIR φίλτρο με $\Omega_c=0.5\pi$, $F_s = 0.1\text{KHz}$ και με χαρακτηριστικά παραθύρου:

α) $N=21$ και παράθυρο Hamming (Γράφημα 1 – αριστερό τμήμα)

β) $N=41$ και παράθυρο Hamming (Γράφημα 1 – δεξί τμήμα)

γ) $N=21$ και παράθυρο Hanning (Γράφημα 2 – αριστερό τμήμα)

δ) $N=41$ και παράθυρο Hanning (Γράφημα 2 – δεξί τμήμα)

Να δείξετε το πλάτος της **απόκρισης συχνότητας** των παραπάνω φίλτρων, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση **fir1**.

Τι παρατηρείτε; Τι διαφορές έχουν τα δύο παράθυρα μεταξύ τους και πως αυτές εξηγούνται βάσει της αντίστοιχης θεωρίας;

- Βρείτε την έξοδο ενός συστήματος όταν η είσοδος του συστήματος είναι το σήμα $x = \sin(15t) + 0.25\sin(200t)$ με $F_s=100\text{Hz}$, εφαρμόζοντας τα 4 παραπάνω φίλτρα (ένα κάθε φορά). Δηλαδή, φιλτράρετε το σήμα $x(t)$ με το κάθε ένα από τα παραπάνω φίλτρα. Για την έξοδο του συστήματος δείξτε ΜΟΝΟ το **φάσμα του σήματος** πριν και μετά την εφαρμογή του κάθε φίλτρου. Εξηγείστε το σήμα εξόδου κάθε φίλτρου. Επηρεάζει το διαφορετικό παράθυρο την έξοδο του συστήματος και, αν ναι, πως και γιατί;
- Επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία φιλτραρίσματος με τα 4 φίλτρα του σήματος που δίνετε παραπάνω με τη διαφορά ότι η συχνότητα δειγματοληψίας φίλτρων και σήματος να είναι $F_s=50\text{Hz}$. Τι αλλάζει στο αποτέλεσμα του κάθε φιλτραρίσματος και γιατί;

Κατά την παράδοση της παρούσας εργαστηριακής άσκησης παραδίδετε και αναφορά, η οποία να περιέχει:

- Σύντομη περιγραφή της υλοποίησης σε κάθε ερώτημα, συμπεράσματα ή παρατηρήσεις όπου προκύπτουν.
- Σημαντικό είναι (και θα αξιολογηθείτε σε αυτό) να μπορέσετε να κάνετε μία σύντομη περιγραφή του τι κάνατε σε κάθε ερώτημα, πως υπολογίσατε ό,τι χρειάστηκε να υπολογίσετε και που βασίστηκε η σκέψη σας για να υλοποιήσετε την άσκηση (μην αναφέρεστε π.χ. απευθείας σε αποτελέσματα, αλλά δείξτε π.χ. ποιο τύπο ή σχέση της θεωρίας χρειαστήκατε).
- Παρουσιάστε τόσο τα σημαντικά και άξια παρουσίασης σημεία του κώδικά σας όσο και τις θεωρητικές γνώσεις που χρειάστηκε να έχετε ώστε να υλοποιήσετε το εργαστήριο και να επιβεβαιώσετε τα αποτελέσματα που πήρατε.
- Τις γραφικές παραστάσεις - σχήματα που προέκυψαν σε κάθε ερώτημα.
- Τα γραφήματα να περιλαμβάνουν, απαραίτητως, κεντρικό τίτλο και τίτλους στους άξονες, ενώ φροντίστε να παρουσιάζετε όλο το 'χρήσιμο' εύρος των σημάτων σας (όπου ζητείται γραφική

παράσταση) ώστε να μπορούμε να εξάγουμε τις χρήσιμες πληροφορίες.

- Να ΜΗΝ περιέχει κώδικες.
- Προσοχή στην εμφάνιση του κειμένου της αναφοράς: εξώφυλλο με στοιχεία αναφοράς και στοιχεία μελών ομάδας, χωρίς ορθογραφικά ή συντακτικά λάθη, με τίτλους ή σχετική αναφορά στις εικόνες (γραφήματα) που θα παρουσιάσετε, max font size 12, max line spacing 1.5, justified text (αφορά στο κύριο μέρος του κειμένου κι όχι τους τίτλους).
- Η αναφορά παραδίδεται σε ηλεκτρονική μορφή μαζί με τα script(s) που ετοιμάσατε.