解析入門：解答集

編集者：

最終更新日：2019 年 12 月 11 日

目次

1　実数と連続

1.1　p16,17

問 2：

Hint：$(n!x)$ が整数となる条件を丁寧に調べていく．

. . . .

$n = 1, 2, \ldots$ に対して，

$$f_n(x) = \lim_{m\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2m}$$

とおく．ここで，$n!x \in \mathbb{Z}$ のとき，

$$\cos(n!\pi x) = \pm 1$$

$n!x \notin \mathbb{Z}$ のときは，

$$|\cos(n!\pi x)| < 1$$

であるから，

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Z}) \\ 0 & (x \notin \mathbb{Z}) \end{cases}$$

となる．さて，$x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ であるならば，どんな $n \in \mathbb{N}$ に対しても，$n!x$ が整数とならない．
$x \in \mathbb{Q}$ のとき，$x = \dfrac{p}{q}(p, q \in \mathbb{Z}, q > 0)$ とすれば，n が q より十分大きく，$n \geq q$ のとき，$n!x$ は偶数．
よって，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^{2m}\right) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \end{cases}$$

問 3：

Hint：$a=0$ のときを考えればよいので，そのように式変形をしてみる．そのあとは ε を用いて，評価していく。

…………………………………………………………………………………………

証明. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ は，$\lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0$
と書き直せる．$b_n = a_n - a$ とおくと，証明すべきことは，

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0,\text{ ならば } \lim_{n\to\infty} \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} = 0$$

である．

ここで，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在し，$n \geq n_1$ のとき

$$|b_n| < \varepsilon$$

であり，また，絶対値の性質により，

$$\left|\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right| < \frac{|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n|}{n}$$

をがいえる．このとき，$n \geq n_1$ をみたす $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の項を ε でおきかえると，

$$\left|\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right| < \frac{|b_1| + \cdots + |b_{n_1}|}{n} + \varepsilon$$

という不等式を得る．

そこで，$n_2 \in \mathbb{N}$ をとると，$n \geq n_2$ のとき，

$$\frac{|b_1| + \cdots + |b_{n_1}|}{n} < \varepsilon$$

であるとすると，$n \geq \max\{n_1, n_2\}$ のとき，

$$\frac{|b_1| + \cdots + |b_{n_1}|}{n} < \varepsilon$$

となる．ゆえに，このとき，

$$\left|\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

よって示された． □

1.2　p16

問 5：

Hint：

....

証明. $\mathbb{N} \ni m \geq 1$ とする．$A \subset \mathbb{N}$ が，与えられた条件を満たすとする．

イ) より，

$$A \subset \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\}$$

は明らか．

$H = \{0,\ 1,\ \cdots,\ m-1\} \cup A$ とおく．

$$0 \in H \tag{1.1}$$

$$n \in H \tag{1.2}$$

とする．

$$n < m-1 \text{ であれば，} n+1 \in \{0,\ 1,\ \cdots,\ m-1\} \text{ より，} n+1 \in H$$

$$n = m-1 \text{ であれば，} n+1 = m \in A \text{ より，} n+1 \in H$$

$$n \geq m \text{ であれば，ロ) より，} n+1 \in A \subset H$$

よって，

$$n+1 \in H$$

したがって，H は継承的であり，$\mathbb{N} \subset H$

つまり，

$$\{0,\ 1,\ \cdots,\ m-1\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\} \subset \{0,\ 1,\ \cdots,\ m-1\} \cup A$$

よって，

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\} \subset A$$

以上より，

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq m\}$$

□

問 7：

Hint：

証明. n が自然数ならば，$n < k < n+1$ となる自然数 k は存在しないことを示す.
$n < k < n+1$ となる自然数 k が存在するとすると，辺々 n を引いて，

$$0 < k - n < 1$$

問 6 より，$k - n$ は自然数である．よって，$0 < a < 1$ となる自然数 a が存在しないことを示せばよい.

$$H = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1\}$$

とおくと，

$$0 \in H \tag{1.3}$$

$$0 + 1 \in H \tag{1.4}$$

である.
また，$k \geq 1$ となる $k \in \mathbb{N}$ に対しては，$k + 1 \geq 1$ であり，$k + 1 \in \{\ n \in \mathbb{N} \mid n \geq 1\}$ となるため，$k + 1 \in H$
よって H は継承的である．したがって，$\mathbb{N} \in H$
H の定め方より，$a \notin H$ なので，$a \notin \mathbb{N}$ となり，$0 < a < 1$ となる自然数 a は存在しない. □

1.3　p31

問 2：

Hint：

.... ☒

証明. 二項定理を用いて $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の一般項を展開すると，

$$\begin{aligned}a_n &= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}\cdot\frac{1}{n^r} + \cdots\frac{n!}{n!}\cdot + \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{r!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\end{aligned}$$

同様にして，a_{n+1} の展開式を得たとき，$\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ より，$r \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して，

$$\frac{1}{r!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right) < \frac{1}{r!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n+1}\right) \tag{1.1}$$

が成立する．これと，a_{n+1} の展開式のほうが，正の項を一つ多く含むことから，

$$a_n < a_{n+1} \quad (\forall n \geq 1) \tag{1.2}$$

が成立し，$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加．また，(1.1) より，

$$\begin{aligned}a_n &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} &(1.3)\\ &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} &(1.4)\\ &< 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1-2^{1-n}}{1-\frac{1}{2}}\right) &(1.5)\\ &= 2 + \frac{2^{1-n}-1}{2} &(1.6)\\ &< 3 &(1.7)\end{aligned}$$

であるから，$a_n < 3$ であり，また，

$$a_n > 1 + \frac{1}{1!} = 2 \tag{1.8}$$

であるから，(1.7)，(1.8) より，$2 < e < 3$

また，(1.3) より，

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq e \tag{1.9}$$

であり，また，(1.1) より，

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq a_n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{r!} \tag{1.10}$$

(1.10) より，$r \to \infty$ として，

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq e \tag{1.11}$$

となり，(1.9)，(1.11) より，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e$ を得る． □

☒

1.4 p72,73,74

⊠問 4

2　微分法

3　初等函数

4 積分法

5　級数