

# 集合・位相入門：解答集

2020 年 4 月 6 日

☒

## 1 集合と写像

☒

### 1.1 p11

(1)

*Proof.* 必要条件であることを示す.  $a \in A$  を前提に,  $\{a\} \subset A$  の定義が成り立つことを示す.  $\{a\} \subset A$  の定義は任意の  $x$  について  $x \in \{a\} \Rightarrow x \in A$ .

今,  $a \in A$  を前提とするので, 当然  $x = a \Rightarrow x \in A$ .  $x \in \{a\} \Rightarrow x = a$  と合わせると  $x \in \{a\} \Rightarrow x \in A$ . これは任意の  $x$  について成り立つので上の定義が成り立つ.

十分条件であることを示す.  $\{a\} \subset A$  を前提に  $a \in A$  が成り立つことを示す.

今,  $\{a\} \subset A$  を前提とするので定義より任意の  $x$  について  $x \in \{a\} \Rightarrow x \in A$ . また,  $a \in \{a\}$  なので合わせると  $a \in A$  が成り立つ. □

☒ (2)

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, (x-1)(x-2)(x-3) = 0\}$$

☒ (3)

☒

(a)  $x^6 - 1 = 0$  について, 解を  $x = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  ( $r > 0$ ) とすると,

$$x^6 = r^6(\cos 6\theta + i \sin 6\theta) = 1 = \cos 0 + i \sin 0$$

と  $r > 0$  より,  $r = 1$  となる. ここで,

$$6\theta = 0 + 2k\pi \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\therefore \theta = \frac{k}{3}\pi$$

であり, これを満たす  $k$  は  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  である. ゆえに,

$$\{x \mid x \in \mathbb{C}, x^6 = 1\} = \left\{1, -1, \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

(b)

$$\begin{aligned}i(x+i)^4 &= i(x^4 + 4xi^3 + 6x^2i^2 + 4x^3i + i^4) \\&= i(x^4 - 4xi - 6x^2 + 4x^3i + 1) \\&= (x^4 - 6x^2 + 1)i + 4x - 4x^3\end{aligned}$$

ここで,  $i(x+i)^4 \in \mathbb{R}$  となるための必要十分条件は,  $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$  となることで, この方程式を解くと,

$$\begin{aligned}x^2 &= \frac{6 \pm \sqrt{32}}{-2} \\&= 3 \pm 2\sqrt{2} \\\therefore x &= \sqrt{2} + 1, -\sqrt{2} - 1, 1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1\end{aligned}$$

これより,

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, i(x+i)^4 \in \mathbb{R}\} = \{\sqrt{2} + 1, -\sqrt{2} - 1, 1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1\}$$

(c)  $y^3 = 2$  を  $y \in \mathbb{R}$  のもとで解くと,  $y = \sqrt[3]{2}$  であり,  $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$  である. もし  $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$  であるとする,

$$\exists a, b \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } \sqrt[3]{2} = \frac{b}{a} \iff a^3 + a^3 = b^3$$

であり, これは Fermat の最終定理に矛盾する.

$$\therefore \{y \mid y \in \mathbb{Q}, y^3 = 2\} = \emptyset$$

$z \in \mathbb{Z}$  のとき,  $f(z) = 2^z$  とおくと,  $f$  は増加関数である. これと,

$$2^{-4} < 0.1 < 2^{-3} < 2^6 < 100 < 2^7$$

により,

$$\{z \mid z \in \mathbb{Z}, 0.1 < 2^z < 100\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$k \in \mathbb{N}$  として,  $n = 4k - 3, 4k - 2, 4k - 1, 4k$  の場合を調べる.

$n = 4k - 3$  のとき,

$$\begin{aligned}i^n &= (i)^{4k-3} \\&= i^{-3} \\&= \frac{1}{-i} = i\end{aligned}$$

である.  $n = 4k - 2$  のとき,

$$\begin{aligned}i^n &= (i)^{4k-2} \\&= i^{-2} \\&= -1\end{aligned}$$

である.  $n = 4k - 1$  のとき,

$$\begin{aligned}i^n &= (i)^{4k-1} \\&= i^{-1} \\&= \frac{1}{i} = -i\end{aligned}$$

である.  $n = 4k$  のとき,

$$\begin{aligned}i^n &= (i)^{4k} \\&= 1\end{aligned}$$

である。以上の議論により,

$$\{n \mid n \in \mathbb{N}, i^n = -1\} = \{2, 6, 10, 14, 18, \dots, 4n-2, \dots\}$$

と表される。

(f)

$n \in \mathbb{N}$  のもとで,

$$\begin{aligned} i^{2n} &= (-1)^n \\ &= \begin{cases} 1 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ -1 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

となるため,

$$\{n \mid n \in \mathbb{N}, i^{2n} = i\} = \emptyset$$

である。

問 4 : (i)

*Proof.*  $x = x_1 + x_2\sqrt{2}$ ,  $y = y_1 + y_2\sqrt{2}$  ( $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Q}$ ) とおく. このとき,

$$x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)\sqrt{2}$$

となり,  $x_1 + y_1, x_2 + y_2 \in \mathbb{Q}$  なので,  $x + y \in A$  となる. また,

$$x - y = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)\sqrt{2}$$

となり,  $x_1 - y_1, x_2 - y_2 \in \mathbb{Q}$  なので,  $x - y \in A$  となる. また,

$$xy = (x_1y_1 + 2x_2y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{2}$$

となり,  $x_1y_1 + 2x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1 \in \mathbb{Q}$  なので,  $xy \in A$  となる.

以上の議論により, (i) の主張がたしかめられた.

□

⊠

## 1.2 p39

⊠

(1) (4.2)

*proof.*

$$\begin{aligned} & b \in f(P_1 \cup P_2) \\ \iff & \exists a \in P_1 \cup P_2 \text{ s.t. } f(a) = b \\ \iff & \exists a \in P_1 \text{ s.t. } f(a) = b \vee \exists c \in P_2 \text{ s.t. } f(c) = b \\ \iff & b \in f(P_1) \cup f(P_2) \end{aligned}$$

.....

$$\therefore b \in f(P_1) \vee b \in f(P_2)$$

$$\iff \exists a \text{ s.t. } a \in P_1 \vee a \in P_2, b = f(a)$$

⊠

(1) (4.2)'

*proof.*

$$\begin{aligned} & a \in f^{-1}(Q_1 \cup Q_2) \\ \iff & f(a) \in Q_1 \cup Q_2 \\ \iff & f(a) \in Q_1 \vee f(a) \in Q_2 \\ \iff & a \in f^{-1}(Q_1) \cup f^{-1}(Q_2) \end{aligned}$$

⊠

(2) (4.5)

*proof.*

$$\begin{aligned} a &\in P \\ \implies f(a) &\in f(P) \\ \implies a &\in f^{-1}(f(P)) \end{aligned}$$

---

$$\therefore f^{-1}(f(P)) = \{a \mid f(a) \in f(P)\}$$

また,  $f: \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$  は逆が成り立たない例である.

$P = [1, 2]$  とすると,  $f(P) = [1, 4]$ ,  $f^{-1}(f(P)) = [-2, -1] \cup [1, 2]$ .