集合・位相入門：解答集

2020 年 4 月 2 日

⊠

1　集合と写像

⊠

1.1　p11

(1)

Proof. 必要条件であることを示す．$a \in A$ を前提に、$\{a\} \subset A$ の定義が成り立つことを示す．$\{a\} \subset A$ の定義は任意の x について $x \in \{a\} \Rightarrow x \in A$.

今，$a \in A$ を前提とするので，当然 $x = a \Rightarrow x \in A$．$x \in \{a\} \Rightarrow x = a$ と合わせると $x \in \{a\} \Rightarrow x \in A$．これは任意の x について成り立つので上の定義が成り立つ．

十分条件であることを示す．$\{a\} \subset A$ を前提に $a \in A$ が成り立つことを示す．

今，$\{a\} \subset A$ を前提とするので定義より任意の x について $x \in \{a\} \Rightarrow x \in A$．また，$a \in \{a\}$ なので合わせると $a \in A$ が成り立つ． □

⊠ (2)

$$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ (x-1)(x-2)(x-3) = 0\}$$

⊠ (3)

⊠

(a)　$x^6 - 1 = 0$ について，解を $x = r(\cos\theta + i\sin\theta)$（$r > 0$）とすると，

$$x^6 = r^6(\cos 6\theta + i\sin 6\theta) = 1 = \cos 0 + i\sin 0$$

と $r > 0$ より，$r = 1$ となる．ここで，

$$6\theta = 0 + 2k\pi\,(0 \leq \theta < 2\pi)\,(k \in \mathbb{Z})$$

$$\therefore\ \theta = \frac{k}{3}\pi$$

であり，これを満たす k は $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ である．ゆえに，

$$\{x \mid x \in \mathbb{C},\ x^6 = 1\} = \left\{1,\ -1,\ \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

(b)

$$\begin{aligned} i(x+i)^4 &= i(x^4+4xi^3+6x^2i^2+4x^3i+i^4) \\ &= i(x^4-4xi-6x^2+4x^3i+1) \\ &= (x^4-6x^2+1)i+4x-4x^3 \end{aligned}$$

ここで，$i(x+i)^4 \in \mathbb{R}$ となるための必要十分条件は，$x^4-6x^2+1=0$ となることで，この方程式を解くと，

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{6\pm\sqrt{32}}{-2} \\ &= 3\pm 2\sqrt{2} \\ \therefore x &= \sqrt{2}+1,\ -\sqrt{2}-1,\ 1-\sqrt{2}, \sqrt{2}-1 \end{aligned}$$

これより，

$$\{x \mid x\in\mathbb{R},\ i(x+i)^4\in\mathbb{R}\} = \left\{\sqrt{2}+1,\ -\sqrt{2}-1,\ 1-\sqrt{2}, \sqrt{2}-1\right\}$$

(c)　$y^3=2$ を $y\in\mathbb{R}$ のもとで解くと，$y=\sqrt[3]{2}$ であり，$\sqrt[3]{2}\notin\mathbb{Q}$ である．もし $\sqrt[3]{2}\in\mathbb{Q}$ であるとすると，

$$\exists a,\ b\in\mathbb{Z}\ \text{s.t}\ \sqrt[3]{2}=\frac{b}{a} \iff a^3+a^3=b^3$$

であり，これは Fermat の最終定理に矛盾する．

$$\therefore \{y \mid y\in\mathbb{Q},\ y^3=2\}=\varnothing$$

$z\in\mathbb{Z}$ のとき，$f(z)=2^z$ とおくと，f は増加函数である．これと，

$$2^{-4}<0.1<2^{-3}<2^6<100<2^7$$

により，

$$\{z \mid z\in\mathbb{Z},\ 0.1<2^z<100\}=\{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

$k \in \mathbb{N}$ として，$n = 4k-3$，$4k-2$，$4k-1$，$4k$ の場合を調べる．
$n = 4k-3$ のとき，

$$\begin{aligned} i^n &= (i)^{4k-3} \\ &= 1^{-3} \\ &= \frac{1}{-i} = i \end{aligned}$$

である．$n = 4k-2$ のとき，

$$\begin{aligned} i^n &= (i)^{4k-2} \\ &= i^{-2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

である．$n = 4k-1$ のとき，

$$\begin{aligned} i^n &= (i)^{4k-1} \\ &= i^{-1} \\ &= \frac{1}{i} = -i \end{aligned}$$

である．$n = 4k$ のとき，

$$\begin{aligned} i^n &= (i)^{4k} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である．以上の議論により，

$$\{n \mid n \in \mathbb{N},\ i^n = -1\} = \{2,\ 6,\ 10,\ 14,\ 18,\ \cdots,\ 4n-2,\ \cdots\}$$

と表される．

⊠

1.2 p39

⊠

(1) (4.2)
proof.

$$\begin{aligned} & b \in f(P_1 \cup P_2) \\ \Longleftrightarrow\ & \exists a \in P_1 \cup P_2 \text{ s.t } f(a) = b \\ \Longleftrightarrow\ & \exists a \in P_1 \text{ s.t. } f(a) = b \vee \exists c \in P_2 \text{ s.t } f(c) = b \\ \Longleftrightarrow\ & b \in f(P_1) \cup f(P_2) \end{aligned}$$

....

$$\begin{aligned} \because\quad & b \in f(P_1) \vee b \in f(P_2) \\ \Longleftrightarrow\ & \exists a \text{ s.t. } a \in P_1 \vee a \in P_2,\ b = f(a) \end{aligned}$$

⊠

(1)　(4.2)'

proof.

$$
\begin{aligned}
& a \in f^{-1}(Q_1 \cup Q_2) \\
\iff & f(a) \in Q_1 \cup Q_2 \\
\iff & f(a) \in Q_1 \vee f(a) \in Q_2 \\
\iff & a \in f^{-1}(Q_1) \cup f^{-1}(Q_2)
\end{aligned}
$$

⊠

(2)　(4.5)

proof.

$$
\begin{aligned}
& a \in P \\
& \Longrightarrow f(a) \subset f(P) \\
& \Longrightarrow a \in f^{-1}(f(P))
\end{aligned}
$$

$$\because \quad f^{-1}(f(P)) = \{a \mid f(a) \in f(P)\}$$

また，$f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ は逆が成り立たない例である．

$P = [1,\ 2]$ とすると，$f(P) = [1,\ 4]$，$f^{-1}(f(P)) = [-2,\ -1] \cup [1,\ 2]$.