集合・位相入門：解答集

2020 年 3 月 23 日

⊠

1　集合と写像

⊠

1.1　p11

(1)

Proof. 必要条件であることを示す．$a \in A$ を前提に、$\{a\} \subset A$ の定義が成り立つことを示す．$\{a\} \subset A$ の定義は任意の x について $x \in \{a\} \Rightarrow x \in A$.

今，$a \in A$ を前提とするので，当然 $x = a \Rightarrow x \in A$．$x \in \{a\} \Rightarrow x = a$ と合わせると $x \in \{a\} \Rightarrow x \in A$．これは任意の x について成り立つので上の定義が成り立つ．

十分条件であることを示す．$\{a\} \subset A$ を前提に $a \in A$ が成り立つことを示す．

今，$\{a\} \subset A$ を前提とするので定義より任意の x について $x \in \{a\} \Rightarrow x \in A$．また，$a \in \{a\}$ なので合わせると $a \in A$ が成り立つ．□

⊠ (2)

$$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ (x-1)(x-2)(x-3) = 0\}$$

⊠ (3)

⊠

(a)　$x^6 - 1 = 0$ について，解を $x = r(\cos\theta + i\sin\theta)$（$r > 0$）とすると，

$$x^6 = r^6(\cos 6\theta + i\sin 6\theta) = 1 = \cos 0 + i\sin 0$$

と $r > 0$ より，$r = 1$ となる．ここで，

$$6\theta = 0 + 2k\pi\,(0 \leq \theta < 2\pi)\,(k \in \mathbb{Z})$$
$$\therefore\ \theta = \frac{k}{3}\pi$$

であり，これを満たす k は $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ である．ゆえに，

$$\{x \mid x \in \mathbb{C},\ x^6 = 1\} = \left\{1,\ -1,\ \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
i(x+i)^4 &= i(x^4+4xi^3+6x^2i^2+4x^3i+i^4) \\
&= i(x^4-4xi-6x^2+4x^3i+1) \\
&= (x^4-6x^2+1)i+4x-4x^3
\end{aligned}
$$

ここで，$i(x+i)^4 \in \mathbb{R}$ となるための必要十分条件は，$x^4-6x^2+1=0$ となることで，この方程式を解くと，

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \frac{6\pm\sqrt{32}}{-2} \\
&= 3\pm 2\sqrt{2} \\
\therefore x &= \sqrt{2}+1,\ -\sqrt{2}-1,\ 1-\sqrt{2}, \sqrt{2}-1
\end{aligned}
$$

これより，

$$
\{x \mid x\in\mathbb{R},\ i(x+i)^4\in\mathbb{R}\} = \left\{\sqrt{2}+1,\ -\sqrt{2}-1,\ 1-\sqrt{2}, \sqrt{2}-1\right\}
$$

(c)　$y^3=2$ を $y\in\mathbb{R}$ のもとで解くと，$y=\sqrt[3]{2}$ であり，$\sqrt[3]{2}\notin\mathbb{Q}$ である．もし $\sqrt[3]{2}\in\mathbb{Q}$ であるとすると，

$$
\exists a,\ b\in\mathbb{Z}\ \text{s.t}\ \sqrt[3]{2}=\frac{b}{a} \iff a^3+a^3=b^3
$$

であり，これは Fermat の最終定理に矛盾する．

$$
\therefore \{y \mid y\in\mathbb{Q},\ y^3=2\} = \varnothing
$$

⊠

1.2　p39

⊠

(1)　(4.2)

proof.

$$
\begin{aligned}
& b\in f(P_1\cup P_2) \\
\iff & \exists a\in P_1\cup P_2\ \text{s.t}\ f(a)=b \\
\iff & \exists a\in P_1\ \text{s.t.}\ f(a)=b \vee \exists c\in P_2\ \text{s.t}\ f(c)=b \\
\iff & b\in f(P_1)\cup f(P_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\because\quad & b\in f(P_1)\vee b\in f(P_2) \\
\iff & \exists a\ \text{s.t.}\ a\in P_1\vee a\in P_2,\ b=f(a)
\end{aligned}
$$

⊠

(1)　(4.2)'

proof.

$$\begin{aligned} & a \in f^{-1}(Q_1 \cup Q_2) \\ \iff & f(a) \in Q_1 \cup Q_2 \\ \iff & f(a) \in Q_1 \vee f(a) \in Q_2 \\ \iff & a \in f^{-1}(Q_1) \cup f^{-1}(Q_2) \end{aligned}$$

⊠

(2)　(4.5)

proof.

$$\begin{aligned} & a \in P \\ \implies & f(a) \subset f(P) \\ \implies & a \in f^{-1}(f(P)) \end{aligned}$$

....

$$\because \quad f^{-1}(f(P)) = \{a \mid f(a) \in f(P)\}$$

また，$f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ は逆が成り立たない例である．

$P = [1,\ 2]$ とすると，$f(P) = [1,\ 4]$，$f^{-1}(f(P)) = [-2,\ -1] \cup [1,\ 2]$.