集合・位相入門：解答集

2021 年 2 月 26 日

1　集合と写像

1.1　p11

(1)

Proof. 必要条件であることを示す．$a \in A$ を前提に、$\{a\} \subset A$ の定義が成り立つことを示す．$\{a\} \subset A$ の定義は任意の x について $x \in \{a\} \Rightarrow x \in A$.

今，$a \in A$ を前提とするので，当然 $x = a \Rightarrow x \in A$．$x \in \{a\} \Rightarrow x = a$ と合わせると $x \in \{a\} \Rightarrow x \in A$．これは任意の x について成り立つので上の定義が成り立つ.

十分条件であることを示す．$\{a\} \subset A$ を前提に $a \in A$ が成り立つことを示す.

今，$\{a\} \subset A$ を前提とするので定義より任意の x について $x \in \{a\} \Rightarrow x \in A$．また，$a \in \{a\}$ なので合わせると $a \in A$ が成り立つ. □

(2)

$$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ (x-1)(x-2)(x-3) = 0\}$$

(3)

(a)　$x^6 - 1 = 0$ について，解を $x = r(\cos\theta + i\sin\theta)$（$r > 0$）とすると，

$$x^6 = r^6(\cos 6\theta + i\sin 6\theta) = 1 = \cos 0 + i\sin 0$$

と $r > 0$ より，$r = 1$ となる．ここで，

$$6\theta = 0 + 2k\pi\,(0 \leq \theta < 2\pi)\,(k \in \mathbb{Z})$$
$$\therefore\ \theta = \frac{k}{3}\pi$$

であり，これを満たす k は $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ である．ゆえに，

$$\{x \mid x \in \mathbb{C},\ x^6 = 1\} = \left\{1,\ -1,\ \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

(b)

$$\begin{aligned} i(x+i)^4 &= i(x^4 + 4xi^3 + 6x^2i^2 + 4x^3i + i^4) \\ &= i(x^4 - 4xi - 6x^2 + 4x^3i + 1) \\ &= (x^4 - 6x^2 + 1)i + 4x - 4x^3 \end{aligned}$$

ここで，$i(x+i)^4 \in \mathbb{R}$ となるための必要十分条件は，$x^4-6x^2+1=0$ となることで，この方程式を解くと，

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{6 \pm \sqrt{32}}{-2} \\ &= 3 \pm 2\sqrt{2} \\ \therefore x &= \sqrt{2}+1,\ -\sqrt{2}-1,\ 1-\sqrt{2}, \sqrt{2}-1 \end{aligned}$$

これより，

$$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ i(x+i)^4 \in \mathbb{R}\} = \left\{\sqrt{2}+1,\ -\sqrt{2}-1,\ 1-\sqrt{2}, \sqrt{2}-1\right\}$$

(c)　$y^3=2$ を $y \in \mathbb{R}$ のもとで解くと，$y=\sqrt[3]{2}$ であり，$\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ である．もし $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$ であるとすると，

$$\exists a,\ b \in \mathbb{Z} \text{ s.t } \sqrt[3]{2} = \frac{b}{a} \iff a^3+a^3=b^3$$

であり，これは Fermat の最終定理に矛盾する．

$$\therefore \{y \mid y \in \mathbb{Q},\ y^3=2\} = \varnothing$$

$z \in \mathbb{Z}$ のとき，$f(z)=2^z$ とおくと，f は増加函数である．これと，

$$2^{-4} < 0.1 < 2^{-3} < 2^6 < 100 < 2^7$$

により，

$$\{z \mid z \in \mathbb{Z},\ 0.1 < 2^z < 100\} = \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

$k \in \mathbb{N}$ として，$n=4k-3,\ 4k-2,\ 4k-1,\ 4k$ の場合を調べる．
$n=4k-3$ のとき，

$$\begin{aligned} i^n &= (i)^{4k-3} \\ &= i^{-3} \\ &= \frac{1}{-i} = i \end{aligned}$$

である．$n=4k-2$ のとき，

$$\begin{aligned} i^n &= (i)^{4k-2} \\ &= i^{-2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

である．$n=4k-1$ のとき，

$$\begin{aligned} i^n &= (i)^{4k-1} \\ &= i^{-1} \\ &= \frac{1}{i} = -i \end{aligned}$$

である．$n=4k$ のとき，

$$\begin{aligned} i^n &= (i)^{4k} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である．以上の議論により，

$$\{n \mid n \in \mathbb{N},\ i^n=-1\} = \{2,\ 6,\ 10,\ 14,\ 18,\ \cdots,\ 4n-2,\ \cdots\}$$

と表される．

(f)

$n \in \mathbb{N}$ のもとで,

$$\begin{aligned} i^{2n} &= (-1)^n \\ &= \begin{cases} 1 & (n\text{ が偶数のとき}) \\ -1 & (n\text{ が奇数のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

となるため,

$$\{n \mid n \in \mathbb{N},\ i^{2n} = i\} = \varnothing$$

である.

問 4：(i)

Proof. $x = x_1 + x_2\sqrt{2}$，$y = y_1 + y_2\sqrt{2}$ (x_1，x_2，y_1，$y_2 \in \mathbb{Q}$) とおく．このとき，

$$x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)\sqrt{2}$$

となり，$x_1 + y_1$，$x_2 + y_2 \in \mathbb{Q}$ なので，$x + y \in A$ となる．また，

$$x + y = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)\sqrt{2}$$

となり，$x_1 - y_1$，$x_2 - y_2 \in \mathbb{Q}$ なので，$x - y \in A$ となる．また，

$$xy = (x_1y_1 + 2x_2y_2) + (x_1y_2 + x_2y_2)\sqrt{2}$$

となり，$x_1y_1 + 2x_2y_2$，$x_1y_2 + x_2y_2 \in \mathbb{Q}$ なので，$xy \in A$ となる．
以上の議論により，(i) の主張がたしかめられた． □

(ii)

Proof. $x \in A$，$x \neq 0$ であるから，a，$b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ として，

$$x = a + bi$$

とかける．このとき，

$$x^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

であるから，$x^{-1} \in A$ である．よって命題の主張が正しいことが示された． □

1.2　p39

(1)　(4.2)

Proof.

$$\begin{aligned}
&b \in f(P_1 \cup P_2) \\
\iff &\exists a \in P_1 \cup P_2 \text{ s.t } f(a) = b \\
\iff &\exists a \in P_1 \text{ s.t. } f(a) = b \vee \exists c \in P_2 \text{ s.t } f(c) = b \\
\iff &b \in f(P_1) \cup f(P_2)
\end{aligned}$$

....

$$\begin{aligned}
\because \quad &b \in f(P_1) \vee b \in f(P_2) \\
\iff &\exists a \text{ s.t. } a \in P_1 \vee a \in P_2,\ b = f(a)
\end{aligned}$$

(1)　(4.2)'

Proof.

$$\begin{aligned}
&a \in f^{-1}(Q_1 \cup Q_2) \\
\iff &f(a) \in Q_1 \cup Q_2 \\
\iff &f(a) \in Q_1 \vee f(a) \in Q_2 \\
\iff &a \in f^{-1}(Q_1) \cup f^{-1}(Q_2)
\end{aligned}$$

(2)　(4.5)

Proof.

$$\begin{aligned}
&a \in P \\
\implies &f(a) \subset f(P) \\
\implies &a \in f^{-1}(f(P))
\end{aligned}$$

$$\because \quad f^{-1}(f(P)) = \{a \mid f(a) \in f(P)\}$$

また，$f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ は逆が成り立たない例である．

$P = [1,\ 2]$ とすると，$f(P) = [1,\ 4]$，$f^{-1}(f(P)) = [-2,\ -1] \cup [1,\ 2]$.

1.3　p151

1.

Proof. A に関する条件により，$k \in \mathbb{N}$ を用いて，

$$A = \{a_1, \ldots, a_k\}$$

とかける．

ここで，

$$A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$$

の点 a を任意にとる．このとき，ある $\varepsilon > 0$ を

$$\Big(0 < \Big)\ \varepsilon < \min\{d(a, a_1), \ldots, d(a, a_k)\}$$

を満たすようにとると，

$$\begin{aligned}
&B(a; \varepsilon) \cap A = \varnothing \\
\iff &B(a; \varepsilon) \subset A^c
\end{aligned}$$

となるため，A^c は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．よって，A は閉集合であることがただちに従う．　□

2.

Proof. a, b は $\mathbb{R}^n$ の相異なる 2 点だから，$d(a,b) > 0$ となることはよい．

ここで，$0 < \varepsilon < \dfrac{d(a,b)}{2}$ なる ε をとり，

$$U \coloneqq B(a,\varepsilon), \quad V \coloneqq B(b,\varepsilon)$$

とする．このとき，U, V は開集合である．

また，$x \in U \cap V$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在すると仮定すると，

$$d(x,a) < \varepsilon, \quad d(x,b) < \varepsilon$$

となる．このとき，三角不等式により，

$$d(a,b) \leq d(x,a) + d(x,b) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(a,b)$$

となり，これは矛盾．ゆえに

$$U \cap V = \varnothing$$

となり，ただちに主張が従う． □

Proof. まず，前半の主張について示す．

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \quad (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ とする．このとき，

$$\varepsilon \coloneqq \min\{|x_1 - a|, \ldots, |x_n - a|, |x_1 - b|, \ldots, |x_n - b|\}$$

なる ε を任意にとる．このとき，

$$B(x; \varepsilon) \subset (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

であるから，$(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ は開集合である．

後半の主張について示す．

$y = (y_1, \cdots + y_n) \notin [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ とする．

このとき，ある $j \in \{1, \ldots n\}$ について，$y_j \notin [a_j, b_j]$ であることはよい．さらに，

$$\delta \coloneqq \min\{|y_j - a|, |y_j - b|\}$$

とすると，$B(y, \delta) \subset [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]^c$ である．したがって，$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ は閉集合である． □

1.4 p206

1.

Proof. ある S 及び $\varnothing$ 以外の S のある部分集合 M に対して，$M^f = \varnothing$ と仮定すると，$\mathring{M} \subset M, M \subset \overline{M}$（すなわち，$\mathring{M} \subset \overline{M}$) かつ $M^f = \overline{M} \setminus \mathring{M} = \varnothing$ なので，$M = \mathring{M} = \overline{M}$ である．ここで，M は S でも $\varnothing$ でもない開かつ閉の S の部分集合となるので，S の連結性に矛盾する．従って，S でも $\varnothing$ でもない任意の S の部分集合 M について，$M^f = \varnothing$ となる． □