

集合・位相入門：解答集

2021 年 2 月 11 日

1 集合と写像

1.1 p11

(1)

Proof. 必要条件であることを示す. $a \in A$ を前提に、 $\{a\} \subset A$ の定義が成り立つことを示す. $\{a\} \subset A$ の定義は任意の x について $x \in \{a\} \Rightarrow x \in A$.

今、 $a \in A$ を前提とするので、当然 $x = a \Rightarrow x \in A$. $x \in \{a\} \Rightarrow x = a$ と合わせると $x \in \{a\} \Rightarrow x \in A$. これは任意の x について成り立つので上の定義が成り立つ.

十分条件であることを示す. $\{a\} \subset A$ を前提に $a \in A$ が成り立つことを示す.

今、 $\{a\} \subset A$ を前提とするので定義より任意の x について $x \in \{a\} \Rightarrow x \in A$. また、 $a \in \{a\}$ なので合わせると $a \in A$ が成り立つ. \square

(2)

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, (x-1)(x-2)(x-3) = 0\}$$

(3)

(a) $x^6 - 1 = 0$ について、解を $x = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r > 0$) とすると、

$$x^6 = r^6(\cos 6\theta + i \sin 6\theta) = 1 = \cos 0 + i \sin 0$$

と $r > 0$ より、 $r = 1$ となる. ここで、

$$6\theta = 0 + 2k\pi \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\therefore \theta = \frac{k}{3}\pi$$

であり、これを満たす k は $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ である. ゆえに、

$$\{x \mid x \in \mathbb{C}, x^6 = 1\} = \left\{1, -1, \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

(b)

$$\begin{aligned} i(x+i)^4 &= i(x^4 + 4xi^3 + 6x^2i^2 + 4x^3i + i^4) \\ &= i(x^4 - 4xi - 6x^2 + 4x^3i + 1) \\ &= (x^4 - 6x^2 + 1)i + 4x - 4x^3 \end{aligned}$$

ここで、 $i(x+i)^4 \in \mathbb{R}$ となるための必要十分条件は、 $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ となることで、この方程式を解くと、

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{6 \pm \sqrt{32}}{-2} \\ &= 3 \pm 2\sqrt{2} \\ \therefore x &= \sqrt{2} + 1, -\sqrt{2} - 1, 1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

これより、

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, i(x+i)^4 \in \mathbb{R}\} = \{\sqrt{2} + 1, -\sqrt{2} - 1, 1 - \sqrt{2}, \sqrt{2} - 1\}$$

(c) $y^3 = 2$ を $y \in \mathbb{R}$ のもとで解くと、 $y = \sqrt[3]{2}$ であり、 $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ である。もし $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$ であるとする、

$$\exists a, b \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } \sqrt[3]{2} = \frac{b}{a} \iff a^3 + a^3 = b^3$$

であり、これは Fermat の最終定理に矛盾する。

$$\therefore \{y \mid y \in \mathbb{Q}, y^3 = 2\} = \emptyset$$

$z \in \mathbb{Z}$ のとき、 $f(z) = 2^z$ とおくと、 f は増加関数である。これと、

$$2^{-4} < 0.1 < 2^{-3} < 2^6 < 100 < 2^7$$

により、

$$\{z \mid z \in \mathbb{Z}, 0.1 < 2^z < 100\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$k \in \mathbb{N}$ として、 $n = 4k - 3, 4k - 2, 4k - 1, 4k$ の場合を調べる。

$n = 4k - 3$ のとき、

$$\begin{aligned} i^n &= (i)^{4k-3} \\ &= i^{-3} \\ &= \frac{1}{-i} = i \end{aligned}$$

である。 $n = 4k - 2$ のとき、

$$\begin{aligned} i^n &= (i)^{4k-2} \\ &= i^{-2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

である。 $n = 4k - 1$ のとき、

$$\begin{aligned} i^n &= (i)^{4k-1} \\ &= i^{-1} \\ &= \frac{1}{i} = -i \end{aligned}$$

である。 $n = 4k$ のとき、

$$\begin{aligned} i^n &= (i)^{4k} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。以上の議論により、

$$\{n \mid n \in \mathbb{N}, i^n = -1\} = \{2, 6, 10, 14, 18, \dots, 4n - 2, \dots\}$$

と表される。

(f)

$n \in \mathbb{N}$ のもとで,

$$\begin{aligned} i^{2n} &= (-1)^n \\ &= \begin{cases} 1 & (n \text{ が偶数のとき}) \\ -1 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

となるため,

$$\{n \mid n \in \mathbb{N}, i^{2n} = i\} = \emptyset$$

である.

問4：(i)

Proof. $x = x_1 + x_2\sqrt{2}$, $y = y_1 + y_2\sqrt{2}$ ($x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Q}$) とおく. このとき,

$$x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)\sqrt{2}$$

となり, $x_1 + y_1, x_2 + y_2 \in \mathbb{Q}$ なので, $x + y \in A$ となる. また,

$$x - y = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)\sqrt{2}$$

となり, $x_1 - y_1, x_2 - y_2 \in \mathbb{Q}$ なので, $x - y \in A$ となる. また,

$$xy = (x_1y_1 + 2x_2y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{2}$$

となり, $x_1y_1 + 2x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1 \in \mathbb{Q}$ なので, $xy \in A$ となる.

以上の議論により, (i) の主張がたしかめられた. □

(ii)

Proof. $x \in A$, $x \neq 0$ であるから, $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ として,

$$x = a + bi$$

とかける. このとき,

$$x^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

であるから, $x^{-1} \in A$ である. よって命題の主張が正しいことが示された. □

1.2 p39

(1) (4.2)

Proof.

$$b \in f(P_1 \cup P_2)$$

$$\iff \exists a \in P_1 \cup P_2 \text{ s.t. } f(a) = b$$

$$\iff \exists a \in P_1 \text{ s.t. } f(a) = b \vee \exists c \in P_2 \text{ s.t. } f(c) = b$$

$$\iff b \in f(P_1) \cup f(P_2)$$

.....

$$\therefore b \in f(P_1) \vee b \in f(P_2)$$

$$\iff \exists a \text{ s.t. } a \in P_1 \vee a \in P_2, b = f(a)$$

(1) (4.2)'

Proof.

$$\begin{aligned} a &\in f^{-1}(Q_1 \cup Q_2) \\ \iff f(a) &\in Q_1 \cup Q_2 \\ \iff f(a) &\in Q_1 \vee f(a) \in Q_2 \\ \iff a &\in f^{-1}(Q_1) \cup f^{-1}(Q_2) \end{aligned}$$

(2) (4.5)

Proof.

$$\begin{aligned} a &\in P \\ \implies f(a) &\in f(P) \\ \implies a &\in f^{-1}(f(P)) \end{aligned}$$

.....

$$\therefore f^{-1}(f(P)) = \{a \mid f(a) \in f(P)\}$$

また, $f: \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ は逆が成り立たない例である.

$P = [1, 2]$ とすると, $f(P) = [1, 4]$, $f^{-1}(f(P)) = [-2, -1] \cup [1, 2]$.

1.3 p151

1.

Proof. A に関する条件により, $k \in \mathbb{N}$ を用いて,

$$A = \{a_1, \dots, a_k\}$$

とかける.

ここで,

$$A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$$

の点 a を任意にとる. このとき, ある $\varepsilon > 0$ を

$$(0 <) \varepsilon < \min\{d(a, a_1), \dots, d(a, a_k)\}$$

を満たすようにとると,

$$\begin{aligned} B(a; \varepsilon) \cap A &= \emptyset \\ \iff B(a; \varepsilon) &\subset A^c \end{aligned}$$

となるため, A^c は \mathbb{R}^n の開集合である. よって, A は閉集合であることがただちに従う.

□

2.

Proof. a, b は \mathbb{R}^n の相異なる 2 点だから, $d(a, b) > 0$ となることはよい.

ここで, $0 < \varepsilon < \frac{d(a, b)}{2}$ なる ε をとり,

$$U := B(a, \varepsilon), \quad V := B(b, \varepsilon)$$

とする. このとき, U, V は開集合である.

また, $x \in U \cap V$ なる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在すると仮定すると,

$$d(x, a) < \varepsilon, \quad d(x, b) < \varepsilon$$

となる. このとき, 三角不等式により,

$$d(a, b) \leq d(x, a) + d(x, b) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(a, b)$$

となり, これは矛盾. ゆえに

$$U \cap V = \emptyset$$

となり, ただちに主張が従う. □

Proof. まず, 前半の主張について示す.

$x = (x_1, \dots, x_n) \in (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ とする. このとき,

$$\varepsilon := \min\{|x_1 - a|, \dots, |x_n - a|, |x_1 - b|, \dots, |x_n - b|\}$$

なる ε を任意にとる. このとき,

$$B(x; \varepsilon) \subset (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

であるから, $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ は開集合である.

後半の主張について示す.

$y = (y_1, \dots, y_n) \notin [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ とする.

このとき, ある $j \in \{1, \dots, n\}$ について, $y_j \notin [a_j, b_j]$ であることはよい. さらに,

$$\delta := \min\{|y_j - a|, |y_j - b|\}$$

とすると, $B(y, \delta) \subset [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]^c$ である. したがって, $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ は閉集合である. \square