集合・位相入門：解答集

2020 年 4 月 8 日

☒

1　集合と写像

☒

1.1　p11

(1)

Proof. 必要条件であることを示す．$a \in A$ を前提に、$\{a\} \subset A$ の定義が成り立つことを示す．$\{a\} \subset A$ の定義は任意の x について $x \in \{a\} \Rightarrow x \in A$.

今，$a \in A$ を前提とするので，当然 $x = a \Rightarrow x \in A$．$x \in \{a\} \Rightarrow x = a$ と合わせると $x \in \{a\} \Rightarrow x \in A$．これは任意の x について成り立つので上の定義が成り立つ.

十分条件であることを示す．$\{a\} \subset A$ を前提に $a \in A$ が成り立つことを示す.

今，$\{a\} \subset A$ を前提とするので定義より任意の x について $x \in \{a\} \Rightarrow x \in A$．また，$a \in \{a\}$ なので合わせると $a \in A$ が成り立つ. □

☒ (2)

$$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ (x-1)(x-2)(x-3) = 0\}$$

☒ (3)

☒

(a)　$x^6 - 1 = 0$ について，解を $x = r(\cos\theta + i\sin\theta)$（$r > 0$）とすると，

$$x^6 = r^6(\cos 6\theta + i\sin 6\theta) = 1 = \cos 0 + i\sin 0$$

と $r > 0$ より，$r = 1$ となる．ここで，

$$6\theta = 0 + 2k\pi\,(0 \leq \theta < 2\pi)\,(k \in \mathbb{Z})$$
$$\therefore\ \theta = \frac{k}{3}\pi$$

であり，これを満たす k は $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ である．ゆえに，

$$\{x \mid x \in \mathbb{C},\ x^6 = 1\} = \left\{1,\ -1,\ \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

(b)

$$\begin{aligned}
i(x+i)^4 &= i(x^4+4xi^3+6x^2i^2+4x^3i+i^4) \\
&= i(x^4-4xi-6x^2+4x^3i+1) \\
&= (x^4-6x^2+1)i+4x-4x^3
\end{aligned}$$

ここで，$i(x+i)^4 \in \mathbb{R}$ となるための必要十分条件は，$x^4-6x^2+1=0$ となることで，この方程式を解くと，

$$\begin{aligned}
x^2 &= \frac{6 \pm \sqrt{32}}{-2} \\
&= 3 \pm 2\sqrt{2} \\
\therefore x &= \sqrt{2}+1,\ -\sqrt{2}-1,\ 1-\sqrt{2}, \sqrt{2}-1
\end{aligned}$$

これより，

$$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ i(x+i)^4 \in \mathbb{R}\} = \left\{\sqrt{2}+1,\ -\sqrt{2}-1,\ 1-\sqrt{2}, \sqrt{2}-1\right\}$$

(c)　$y^3=2$ を $y \in \mathbb{R}$ のもとで解くと，$y=\sqrt[3]{2}$ であり，$\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ である．もし $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$ であるとすると，

$$\exists a,\ b \in \mathbb{Z} \text{ s.t } \sqrt[3]{2} = \frac{b}{a} \iff a^3+a^3=b^3$$

であり，これは Fermat の最終定理に矛盾する．

$$\therefore \{y \mid y \in \mathbb{Q},\ y^3=2\} = \varnothing$$

$z \in \mathbb{Z}$ のとき，$f(z)=2^z$ とおくと，f は増加函数である．これと，

$$2^{-4} < 0.1 < 2^{-3} < 2^6 < 100 < 2^7$$

により，

$$\{z \mid z \in \mathbb{Z},\ 0.1 < 2^z < 100\} = \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

$k \in \mathbb{N}$ として，$n=4k-3,\ 4k-2,\ 4k-1,\ 4k$ の場合を調べる．

$n=4k-3$ のとき，

$$\begin{aligned}
i^n &= (i)^{4k-3} \\
&= i^{-3} \\
&= \frac{1}{-i} = i
\end{aligned}$$

である．$n=4k-2$ のとき，

$$\begin{aligned}
i^n &= (i)^{4k-2} \\
&= i^{-2} \\
&= -1
\end{aligned}$$

である．$n=4k-1$ のとき，

$$\begin{aligned}
i^n &= (i)^{4k-1} \\
&= i^{-1} \\
&= \frac{1}{i} = -i
\end{aligned}$$

である．$n=4k$ のとき，

$$\begin{aligned}
i^n &= (i)^{4k} \\
&= 1
\end{aligned}$$

である．以上の議論により，

$$\{n \mid n \in \mathbb{N},\ i^n = -1\} = \{2,\ 6,\ 10,\ 14,\ 18,\ \cdots,\ 4n-2,\ \cdots\}$$

と表される．

(f)

$n \in \mathbb{N}$ のもとで，

$$\begin{aligned} i^{2n} &= (-1)^n \\ &= \begin{cases} 1 & (n\ \text{が偶数のとき}) \\ -1 & (n\ \text{が奇数のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

となるため，

$$\{n \mid n \in \mathbb{N},\ i^{2n} = i\} = \varnothing$$

である．

問 4 : (i)

Proof. $x = x_1 + x_2\sqrt{2}$, $y = y_1 + y_2\sqrt{2}$ (x_1, x_2, y_1, $y_2 \in \mathbb{Q}$) とおく．このとき，

$$x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)\sqrt{2}$$

となり，$x_1 + y_1$, $x_2 + y_2 \in \mathbb{Q}$ なので，$x + y \in A$ となる．また，

$$x + y = (x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)\sqrt{2}$$

となり，$x_1 - y_1$, $x_2 - y_2 \in \mathbb{Q}$ なので，$x - y \in A$ となる．また，

$$xy = (x_1y_1 + 2x_2y_2) + (x_1y_2 + x_2y_2)\sqrt{2}$$

となり，$x_1y_1 + 2x_2y_2$, $x_1y_2 + x_2y_2 \in \mathbb{Q}$ なので，$xy \in A$ となる．

以上の議論により，(i) の主張がたしかめられた． □

(ii)

Proof. $x \in A$, $x \neq 0$ であるから，a, $b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ として，

$$x = a + bi$$

とかける．このとき，

$$x^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

であるから，$x^{-1} \in A$ である．よって命題の主張が正しいことが示された． □

⊠

1.2 p39

⊠

(1) (4.2)

proof.

$$\begin{aligned}
& b \in f(P_1 \cup P_2) \\
\iff & \exists a \in P_1 \cup P_2 \text{ s.t } f(a) = b \\
\iff & \exists a \in P_1 \text{ s.t. } f(a) = b \vee \exists c \in P_2 \text{ s.t } f(c) = b \\
\iff & b \in f(P_1) \cup f(P_2)
\end{aligned}$$

....

$$\begin{aligned}
\because \quad & b \in f(P_1) \vee b \in f(P_2) \\
\iff & \exists a \text{ s.t. } a \in P_1 \vee a \in P_2,\ b = f(a)
\end{aligned}$$

⊠

(1)　(4.2)'

proof.

$$
\begin{aligned}
& a \in f^{-1}(Q_1 \cup Q_2) \\
\iff & f(a) \in Q_1 \cup Q_2 \\
\iff & f(a) \in Q_1 \vee f(a) \in Q_2 \\
\iff & a \in f^{-1}(Q_1) \cup f^{-1}(Q_2)
\end{aligned}
$$

$\boxtimes$

(2)　(4.5)

proof.

$$
\begin{aligned}
& a \in P \\
& \Longrightarrow f(a) \subset f(P) \\
& \Longrightarrow a \in f^{-1}(f(P))
\end{aligned}
$$

....

$$\because \quad f^{-1}(f(P)) = \{a \mid f(a) \in f(P)\}$$

また，$f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ は逆が成り立たない例である．

$P = [1,\ 2]$ とすると，$f(P) = [1,\ 4]$，$f^{-1}(f(P)) = [-2,\ -1] \cup [1,\ 2]$.