1　集合論

1.1　1.1.6

(1)

Proof. $c \in C$ を任意にとる．g は全射であるから，$g(b) = c$ をみたす $b \in B$ が存在し，その b に対して f の全射性により，$f(a) = b$ を満たす $a \in A$ が存在する．以上の議論から，

$$c = g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$$

である，よって $g \circ f$ も全射である． □

(2)

Proof. a，$a' \in A$ とし，$(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$ を仮定する．このとき，$g(f(a)) = g(f(a'))$，$f(a)$，$f(a') \in B$ であり，このとき g の単射性から $f(a) = f(a')$ となり，さらに f の単射性から $a = a'$ となる．よって，

$$(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a') \Longrightarrow a = a'$$

となるため，$g \circ f$ も単射である． □

2　第 2 章・群の基本

2.1　2.1.1

Hint :

....

Proof. まず，単位元について調べる．G は群であると仮定すると，単位元が存在し，それを e とすると，

$$1 \circ e = 1, \quad e \circ 1 = 1$$

であることから，単位元が存在すれば $e = 1$ である．

　このもとで逆元を考察する．$0 \in G$ について，ある $b \in G$ が存在して，

$$0 \circ b = 1, \quad b \circ 0 = 1$$

となる．しかし，このような $b \in G$ は存在せず，矛盾．したがって G は群でない．　□

2.2　2.1.2

Hint :

....

Proof. 単位元の存在について調べる．いま，単位元が存在すると仮定し，それを e とおく．この演算は可換であることに留意して，

$$a \circ e = a + e + ae = a$$

とすると，

$$e(a+1) = 0$$

よって，$e = 0$ または $a = -1$ である．

　まず，$a = -1$ のとき，逆元が存在するか調べる．任意の $b \in \mathbb{R}$ について，

$$(-1) \circ b = -1 + b - b = -1 \neq 0$$

よって，この演算によって $\mathbb{R}$ は群とならない．よってただちに主張が従う． □

2.3　2.3.5

Hint :

....

Proof. $R_{>} = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ 0 < x\}$ とする．

(1)　$\mathbb{R}^{\times}$ の単位元 1 について，$1 \in \mathbb{R}_{>}$ である．

(2)　演算の定義により，$\mathbb{R}_{>}$ での加法は写像 $\mathbb{R}_{>} \times \mathbb{R}_{>} \to \mathbb{R}_{>}$ で定められるので，x，$y \in \mathbb{R}_{>}$ のとき，$xy \in \mathbb{R}_{>}$ である．

(3)　$x \in \mathbb{R}_{>}$ について，逆元は明らかに定義でき，$x^{-1} \in \mathbb{R}_{>}$ である．

(1)，(2)，(3) により，部分群の必要十分条件の 3 つが満たされ，$\mathbb{R}_{>}$ は $\mathbb{R}^{\times}$ の乗法についての部分群である．　□