

# Обобщения методов Рунге-Кутты

Ранее были рассмотрены методы Рунге-Кутты и доказаны некоторые их свойства в том случае, если метод работает с одним дифференциальным уравнением одной переменной.

Обобщим эти доказательства на случай многомерных систем дифференциальных уравнений от нескольких переменных и неавтономных систем, в которых явно участвует переменная времени.

## Метод Рунге-Кутты для функции многих переменных

### Повторение одномерного случая

Рассмотрим метод Рунге-Кутты порядка 2 в общем виде с разложением промежуточных значений функции в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(\mathbf{x} + h\alpha\mathbf{k}_1) = \mathbf{f} + h\alpha\mathbf{f}'\mathbf{f} + \frac{h^2\alpha^2}{2}\mathbf{f}''\mathbf{f}\mathbf{f} + O(h^3) \end{aligned}$$

Взвешенно суммируем разложения из  $\mathbf{k}_i$  в ряд Тейлора и сравниваем с разложением в ряд Тейлора самой функции  $\mathbf{x}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+h) &= \mathbf{x} + h\dot{\mathbf{x}} + \frac{h^2}{2}\ddot{\mathbf{x}} + \frac{h^3}{6}\dddot{\mathbf{x}} + O(h^4) \\ &= \mathbf{x} + h\mathbf{f} + \frac{h^2}{2}\mathbf{f}'\mathbf{f} + \frac{h^3}{6}(\mathbf{f}''\mathbf{f}\mathbf{f} + \mathbf{f}'\mathbf{f}'\mathbf{f}) + O(h^4) \end{aligned}$$

Если они совпали с точностью до некоторого порядка разложения в ряд Тейлора, то считается, что этот порядок и есть порядок метода. Все это не вызывает сомнений, если правая часть — это функция одной переменной.

### Многомерный случай

Рассмотрим ситуацию, когда  $\mathbf{x}$  —  $m$ -мерный вектор, а  $\mathbf{f}$ , соответственно, является  $m$ -мерной функцией от  $m$ -мерных векторов.

Разложение в ряд Тейлора функции многих переменных:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left( u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + u_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^k \mathbf{f} + o(\|\mathbf{u}\|^n)$$

Здесь  $\mathbf{u}$  — тоже  $m$ -мерный вектор малого приращения.

#### Примеры:

$$\begin{aligned} k=1 : \quad & \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} u_i = \nabla \mathbf{f} \mathbf{u} \equiv \mathbf{f}' \mathbf{u} \\ k=2 : \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i \partial x_j} u_i u_j \equiv \mathbf{f}'' \mathbf{u} \mathbf{u} \\ k=3 : \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^3 \mathbf{f}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} u_i u_j u_k \equiv \mathbf{f}''' \mathbf{u} \mathbf{u} \mathbf{u} \end{aligned}$$

В случае  $k=1$  получается матрица. При  $k=2$  — квадратичная форма. В общем, возникающие объекты можно описать как тензоры возрастающих порядков. В конце для каждого  $k$  приписана компактная запись суммы.

Общая формула для  $\mathbf{f}^{(p)}$ :

$$\mathbf{f}^{(p)} \equiv \sum_{|\alpha|=m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} \mathbf{f}}{\partial x^\alpha}$$

Таким образом, получено обобщение разложения в ряд Тейлора функции многих переменных. Далее это обобщение нужно связать с разложением функции  $\mathbf{x}$  в ряд Тейлора.

## Дифференцирование по времени

Производная по времени  $\frac{d}{dt} \mathbf{f}^{(p)}$ :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{f}^{(p)} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \frac{d}{dt} \frac{\partial^{|\alpha|} \mathbf{f}}{\partial x^\alpha} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \sum_{i=1}^m \frac{\partial^{|\alpha|+1} \mathbf{f}}{\partial x^\alpha \partial x_i} f_i \equiv \mathbf{f}^{(p+1)} \mathbf{f}$$

### Пример

Порядок 1, первая производная по времени

$$\dot{\mathbf{f}} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} f_i \equiv \mathbf{f}' \mathbf{f}$$

Порядок 2, вторая производная по времени

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{f}} &= (\mathbf{f}' \mathbf{f})' = \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} \dot{f}_i + \frac{\partial \dot{\mathbf{f}}}{\partial x_i} f_i \right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} f_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_i \partial x_j} f_i f_j = \\ &= \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{f_j \partial f_i}{\partial x_i \partial x_j} \right) \mathbf{f} + \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{f_i f_j \partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) \mathbf{f} \equiv \mathbf{f}' \mathbf{f}' \mathbf{f} + \mathbf{f}'' \mathbf{f} \mathbf{f} \end{aligned}$$

Здесь применяется правило дифференцирования произведения.

Если рассмотреть суммы как оператор, который применяется к функции  $\mathbf{f}$ , то внутри суммирования имеет место симметрия: есть возможность менять местами суммы и/или индексы. Поэтому можно использовать не зависящую от порядка суммирования запись (после  $\equiv$ ).

Взятие второй производной по времени функции  $\mathbf{f}$  подчиняется обычным законам дифференцирования, как если бы она была функцией от одной переменной. Аналогично получается и с производными высших порядков.

Таким образом, все доказательства в методах Рунге-Кутты, которые работали для одномерных функций, будут работать и для  $m$ -мерных.

## Неавтономные уравнения

В неавтономных системах на функцию правой части влияет некоторый глобальный и изменчивый во времени процесс, не зависящий от самой системы.

Модификация методов заключается в изменении вычисления  $\mathbf{k}_i$  с учетом зависимостей правой части:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{k}_i &= \mathbf{f}\left(t + hc_i, \mathbf{x}(t) + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{k}_j\right) \end{aligned}$$

Коэффициенты  $c_i$  указываются в таблице Бутчера, они располагаются в крайнем левом столбце. В литературе, как правило, таблицы Бутчера записываются с данной колонкой.

|          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| $c_1$    | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\dots$  | $a_{1s}$ |
| $c_2$    | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\dots$  | $a_{2s}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $c_s$    | $a_{s1}$ | $a_{s2}$ | $\dots$  | $a_{ss}$ |
|          | $b_1$    | $b_2$    | $\dots$  | $b_s$    |

В связи с модификацией возникает вопрос о порядке локальной ошибки в методе.

Введем вектор  $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{pmatrix}$ . Также введем функцию  $\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ 1 \end{pmatrix}$ .

В такой измененной нотации имеем:

$$\tilde{\mathbf{k}}_i = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}(t)) + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \tilde{\mathbf{k}}_j$$

Таким образом, неавтономная система была преобразована в автономную на одну размерность больше, для которой порядок локальной ошибки уже был доказан ранее.

Здесь стоит отметить, что указание в таблице Бутчера  $c_i$  несколько избыточно, потому что эти коэффициенты выражаются через другие (являются суммой элементов справа в соответствующей строке):

$$c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}$$