Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

Докажем, что классический метод Рунге-Кутты имеет порядок 4.

Выпишем общую форму явного метода Рунге-Кутты 4-го порядка. На одном шаге метода производится 4 вызова правой части:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(\mathbf{x} + ha_{21}\mathbf{k}_1) \\
\mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}(\mathbf{x} + ha_{31}\mathbf{k}_1 + ha_{32}\mathbf{k}_2) \\
\mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}(\mathbf{x} + ha_{41}\mathbf{k}_1 + ha_{42}\mathbf{k}_2 + ha_{43}\mathbf{k}_3)
\end{aligned}$$

Состояние системы на следующем шаге аппроксимируется следующим образом:

$$\mathbf{x}(t+h) = \mathbf{x}(t) + h(b_1\mathbf{k}_1 + b_2\mathbf{k}_2 + b_3\mathbf{k}_3 + b_4\mathbf{k}_4) + O(h^5)$$

Таблица Бутчера метода имеет следующий вид:

$$\begin{array}{|cccc}
0 & & & \\
a_{21} & 0 & & \\
a_{31} & a_{32} & 0 & \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \\
\hline
b_1 & b_2 & b_3 & b_4
\end{array}$$

Мы будем рассматривать частный случай, в котором при вычислении каждого $\mathbf{k}$, кроме первого, используется лишь одно предыдущее $\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t) + ha_{21}\mathbf{k}_1) \\
\mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t) + ha_{32}\mathbf{k}_2) \\
\mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t) + ha_{43}\mathbf{k}_3)
\end{aligned}$$

Таблица Бутчера в этом случае приобретает следующий вид:

$$\begin{array}{|cccc}
0 & & & \\
a_{21} & 0 & & \\
0 & a_{32} & 0 & \\
0 & 0 & a_{43} & 0 \\
\hline
b_1 & b_2 & b_3 & b_4
\end{array}$$

Нам нужно подобрать коэффициенты a_{ij} и b_i так, чтобы аппроксимация действительно имела порядок 4, т. е. чтобы остаточный член аппроксимации $\mathbf{x}(t+h)$ был равен $O(h^5)$.

Разложим правые части в ряд Тейлора в окрестности $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$, отбрасывая члены порядка $O(h^5)$ и выше:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f} \\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t) + ha_{21}\mathbf{k}_1) &&= \mathbf{f} + ha_{21}\mathbf{f}'\mathbf{f} + \tfrac{h^2}{2}a_{21}^2\mathbf{f}''\mathbf{f}\,\mathbf{f} + \tfrac{h^3}{6}a_{21}^3\mathbf{f}'''\mathbf{f}\,\mathbf{f}\,\mathbf{f} + O(h^4) \\
\mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t) + ha_{32}\mathbf{k}_2) &&= \mathbf{f} + ha_{32}\mathbf{f}'\left(\mathbf{f} + ha_{21}\mathbf{f}'\mathbf{f} + \tfrac{h^2}{2}a_{21}^2\mathbf{f}''\mathbf{f}\,\mathbf{f}\right) \\
& && \quad + \tfrac{h^2}{2}a_{32}^2\mathbf{f}''(\mathbf{f}\,\mathbf{f} + 2ha_{21}\mathbf{f}'\mathbf{f}\,\mathbf{f}) + \tfrac{h^3}{6}a_{32}^3\mathbf{f}'''\mathbf{f}\,\mathbf{f}\,\mathbf{f} + O(h^4) \\
\mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t) + ha_{43}\mathbf{k}_3) &&= \mathbf{f} + ha_{43}\mathbf{f}'\left(\mathbf{f} + ha_{32}\mathbf{f}'\mathbf{f} + h^2a_{21}a_{32}\mathbf{f}'\mathbf{f}'\mathbf{f} + \tfrac{h^2}{2}a_{32}^2\mathbf{f}''\mathbf{f}\,\mathbf{f}\right) \\
& && \quad + \tfrac{h^2}{2}a_{43}^2\mathbf{f}''(\mathbf{f}\,\mathbf{f} + 2ha_{32}\mathbf{f}'\mathbf{f}\,\mathbf{f}) + \tfrac{h^3}{6}a_{43}^3\mathbf{f}'''\mathbf{f}\,\mathbf{f}\,\mathbf{f} + O(h^4)
\end{aligned}$$

Разложим теперь в ряд Тейлора саму $\mathbf{x}(t+h)$ в окрестности $\mathbf{x}(t)$ и выразим производные по времени через $\mathbf{f}$ и производные $\mathbf{f}$ по $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t+h) &= \mathbf{x}(t) + h\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} + \frac{h^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{h^3}{6}\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^3} + \frac{h^4}{24}\frac{\mathrm{d}^4\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^4} + O(h^5) \\
&= \mathbf{x}(t) + h\mathbf{f} + \frac{h^2}{2}\mathbf{f}'\mathbf{f} + \frac{h^3}{6}(\mathbf{f}'\mathbf{f}'\mathbf{f} + \mathbf{f}''\mathbf{f}\,\mathbf{f}) + \frac{h^4}{24}(\mathbf{f}'''\mathbf{f}\,\mathbf{f}\,\mathbf{f} + 4\mathbf{f}''\mathbf{f}'\mathbf{f}\,\mathbf{f} + \mathbf{f}'\mathbf{f}'\mathbf{f}'\mathbf{f}) + O(h^5)
\end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при членах, представляющих собой произведения $\mathbf{f}$ и её производных:

$$\begin{cases}
\mathbf{f}: & b_1 + b_2 + b_3 + b_4 & = & 1 \\
\mathbf{f}'\mathbf{f}: & b_2 a_{21} + b_3 a_{32} + b_4 a_{43} & = & \frac{1}{2} \\
\mathbf{f}'\mathbf{f}'\mathbf{f}: & b_3 a_{21} a_{32} + b_4 a_{32} a_{43} & = & \frac{1}{6} \\
\mathbf{f}''\mathbf{f}\,\mathbf{f}: & \frac{1}{2}(b_2 a_{21}^2 + b_3 a_{32}^2 + b_4 a_{43}^2) & = & \frac{1}{6} \\
\mathbf{f}'\mathbf{f}'\mathbf{f}'\mathbf{f}: & b_4 a_{21} a_{32} a_{43} & = & \frac{1}{24} \\
\mathbf{f}''\mathbf{f}'\mathbf{f}\,\mathbf{f}: & \frac{1}{2}b_3(a_{21}^2 a_{32} + 2a_{21}a_{32}^2) + \frac{1}{2}b_4(a_{32}^2 a_{43} + 2a_{32}a_{43}^2) & = & \frac{1}{6} \\
\mathbf{f}'''\mathbf{f}\,\mathbf{f}\,\mathbf{f}: & \frac{1}{6}(b_2 a_{21}^3 + b_3 a_{32}^3 + b_4 a_{43}^3) & = & \frac{1}{24}
\end{cases}$$

Получилась система 7 уравнений с 7 неизвестными. Процесс решения этой системы не будем приводить. Следующее решение подходит, в чём нетрудно убедиться подстановкой:

$$\begin{aligned}
b_1 &= 1/6 \\
b_2 &= 1/3 \\
b_3 &= 1/3 \\
b_4 &= 1/6 \\
a_{21} &= 1/2 \\
a_{32} &= 1/2 \\
a_{43} &= 1
\end{aligned}$$

Итоговая таблица Бутчера метода Рунге-Кутты 4-го порядка:

$$\begin{array}{|cccc}
0 & & & \\
1/2 & 0 & & \\
0 & 1/2 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6
\end{array}$$