

Задача Коши

Задача Коши – задача о решении обыкновенного дифференциального уравнения с начальным данным.

Постановка задачи Коши

Дано:

- Область $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2\}$, является связным открытым подмножеством двумерного пространства. Параметр t характеризует время, а x - величину, которая с течением времени будет изменяться.
- Начальная точка: $(t_0, x_0) \in D$, определяет, что в момент времени t_0 величина $x = x_0$
- Функция правой части: $f : D \rightarrow \mathbb{R}, f \in C(D)$ - функция непрерывна на области D

Найти:

- Интервал: $I \subset \mathbb{R} : t_0 \in I$. Решение может быть не на всей области D , соответственно задается интервал, на котором будет искомое решение.
- Дифференцируемую функцию $x(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$, такую, что

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), t \in I$$

$$(t, x(t)) \in D, t \in I$$

$$x(t_0) = x_0$$

Доказательство существования решения

Построим замкнутый прямоугольник $R \subset D$:

$$R = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\} \quad (a, b > 0)$$

Прямоугольник построен симметрично вокруг точки (t_0, x_0) . Так как по условию функция f непрерывна на D , то $f \in C(R)$

Если функция непрерывна в R , то она в нем и ограничена:

$$M = \max_{(t, x) \in R} |f(t, x)|$$

$$\text{Определим константу } \alpha = \min \left(a, \frac{b}{M} \right).$$

Теорема существования Коши-Пeano

На интервале $|t - t_0| \leq \alpha$ существует $x(t) \in C^1$ (непрерывна и имеет непрерывную производную), удовлетворяющая всем условиям задачи Коши:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$$

$$(t, x(t)) \in R$$

$$x(t_0) = x_0$$

Построение ε -приближения решения

Функция f равномерно непрерывна на R , то есть $\forall \varepsilon$ выполняется:

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(t, x) - f(\tilde{t}, \tilde{x})| \leq \varepsilon \\ (t, x) \in R, (\tilde{t}, \tilde{x}) \in R, |t - \tilde{t}| \leq \delta_\varepsilon, |x - \tilde{x}| \leq \delta_\varepsilon$$

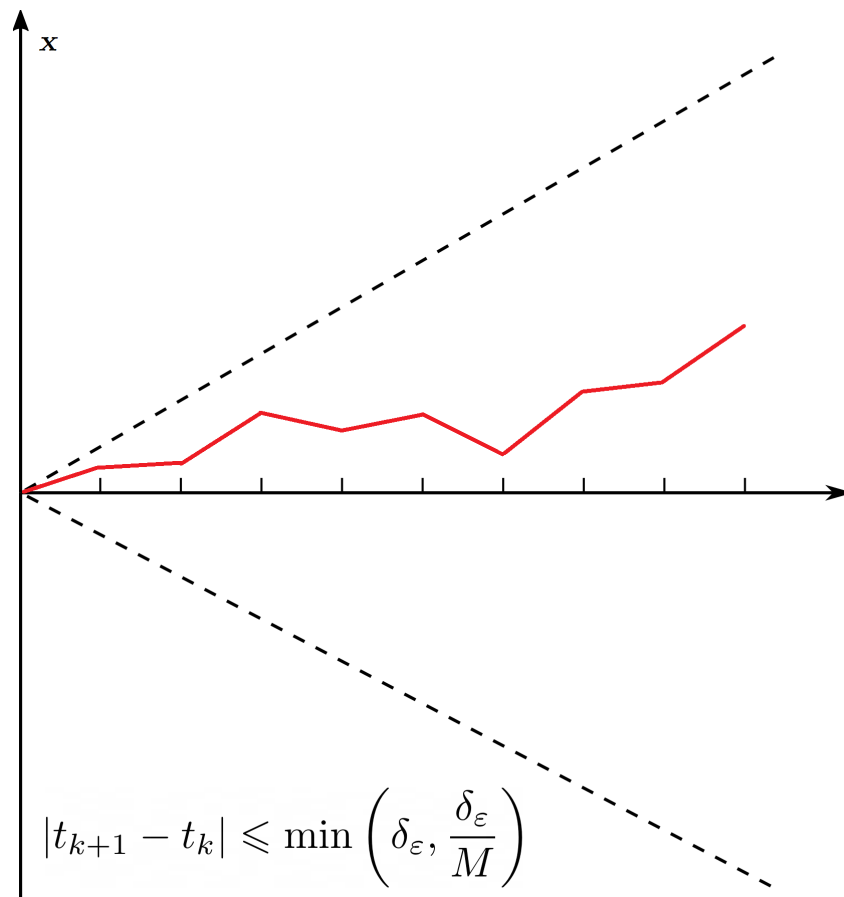
Поделим интервал $[t_0, t_0 + \alpha]$ на промежутки, которые соединяют соседние точки последовательности $t_0, \dots, t_k = t_0 + \alpha$:

$$\varphi(t_0) = x_0$$

При $t \in [t_{k-1}, t_k]$:

$$\varphi(t) = \varphi(t_{k-1}) + f(t_{k-1}, \varphi(t_{k-1}))(t - t_{k-1})$$

Так, в точке (t_0, x_0) есть некоторое значение $f(x_0, t_0)$. Это значение будет считаться производной функции φ на первом промежутке. Далее аналогично с $(t_1, x_1), \dots$, и так продолжается, пока не дойдем до $t_0 + \alpha$. Таким образом функция φ будет представлять собой ломаную (она может быть и в отрицательной части).



Заметим, что

$$|t - t_k| < \delta_\varepsilon, |\varphi(t) - \varphi(t_k)| < M \frac{\delta_\varepsilon}{M} = \delta_\varepsilon \Rightarrow |\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| \leq \varepsilon, t \in [0, \alpha] \setminus \{t_k\}$$

Вышеописанная функция φ – это ε -приближение решения задачи Коши. Она характеризуется следующими условиями:

- $\varphi \in C(I)$
- $\varphi \in C_p^1(I)$ – функция имеет непрерывную производную на всем интервале I , кроме конечного числа точек
- $|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| \leq \varepsilon, t \in [0, \alpha] \setminus \{t_k\}$

Свойства последовательности ε -приближений

Введем последовательность $\{\varepsilon_n\}$ и для каждого построим ε -приближение – получится последовательность функций $\{\varphi_n\}$

Данная последовательность имеет свойства:

- Равномерная ограниченность: $|\varphi_n(t)| \leq |x_0| + b$
- Равностепенная непрерывность:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \Delta_\epsilon > 0 : |\varphi_n(t) - \varphi_n(\tilde{t})| < \epsilon, \forall n, |t - \tilde{t}| < \Delta_\epsilon$$
$$\left(\Delta_\epsilon = \frac{\epsilon}{M}\right)$$

- Равномерная сходимости:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N : |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| < \epsilon, \forall n, m > N$$

Лемма Асколи

Равномерно ограниченная и равностепенно непрерывная на I последовательность функций содержит равномерно сходящуюся на I подпоследовательность.

$$\forall \epsilon > 0, r_k \in I \exists N_\epsilon(r_k) : |\phi_n(r_k) - \phi_m(r_k)| < \epsilon, n, m > N_\epsilon(r_k)$$

Доказательство

Возьмем последовательность рациональных чисел $\{r_k\} \subset I$

Последовательность $\{\varphi_n(r_1)\}$ ограничена. Ограниченная последовательность чисел по теореме Больцано-Вейерштрасса имеет сходящуюся подпоследовательность, поэтому:

$$\exists \{\varphi_{m_i}^{(1)}\} \subset \{\varphi_n\} : \{\varphi_{m_i}^{(1)}(r_1)\} \text{ сходится}$$

$$\text{Аналогично } \exists \{\varphi_{m_i}^{(2)}\} \subset \{\varphi_{m_i}^{(1)}\} : \{\varphi_{m_i}^{(2)}(r_2)\} \text{ сходится}$$

И так далее.

Тогда последовательность $\phi_k = \varphi_{m_k}^{(k)}$ сходится на всех $\{r_k\} \subset I$

Разобьем интервал I на подинтервалы I_k так, чтобы длина каждого из них была меньше Δ_ϵ . В каждом интервале найдется рациональная точка \tilde{r}_k . Тогда для любой точки $t \in I$ существует интервал I_k , в котором

$$\begin{aligned} |\phi_n(t) - \phi_m(t)| &\leq |\phi_n(t) - \phi_n(\tilde{r}_k)| + \\ &|\phi_n(\tilde{r}_k) - \phi_m(\tilde{r}_k)| + \\ &|\phi_m(\tilde{r}_k) - \phi_m(t)| < 3\epsilon \end{aligned}$$

$$n, m > N_\epsilon(\tilde{r}_i), \forall i$$

Доказательство теоремы Коши-Пеано

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

По лемме Асколи $\exists \{\varphi_{n_k}\} \subset \{\varphi_n\} \rightarrow \varphi$

Равномерный предел последовательности непрерывных функций непрерывен.

$$\varphi_{n_k}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (f(\tau, \varphi_{n_k}(\tau)) + \Delta_{n_k}(\tau)) d\tau$$

$$|\Delta_{n_k}(\tau)| \leq \varepsilon_{n_k}$$

$f(t, \varphi_{n_k}(t)) \rightarrow f(t, \varphi(t))$ равномерно на I

Таким образом,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau$$

Производная $\varphi(t)$ в любой точке на I будет равна $f(t, \varphi(t))$.

Таким образом построена функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая всем условиям задачи Коши. Теорема Коши-Пеано доказана.