

Неявные методы Рунге-Кутты

Неявные методы Рунге-Кутты применяются для так называемых «жестких» систем ОДУ – системы, в которых применение явных методов Рунге-Кутты приводит к проблемам с устойчивостью.

Общий вид неявных методов Рунге-Кутты

При вычислении правых частей \mathbf{k}_i могут использоваться все $\mathbf{k}_j, j = 1..s$:

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{f} \left(\mathbf{x}(t) + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{k}_j \right), \quad i = 1..s$$

Значение вектора состояния на следующем шаге:

$$\mathbf{x}(t + h) = \mathbf{x}(t) + h \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{k}_i \quad [+ \varepsilon]$$

Данное выражение является аппроксимацией с некоторой ошибкой ε .

В связи с тем, что \mathbf{k}_i нельзя найти по явным формулам, для их нахождения рекомендуются методы нахождения корней уравнений: метод простой итерации, метод Ньютона.

Для краткой записи неявных методов Рунге-Кутты, как и для явных, используются таблицы Бутчера. Общий вид таблицы:

a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1s}
a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2s}
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
a_{s1}	a_{s2}	\dots	a_{ss}
b_1	b_2	\dots	b_s

Неявный метод Эйлера

Неявный метод Эйлера также называют обратным, а явный - прямым.

Таблица Бутчера для метода:

1
1

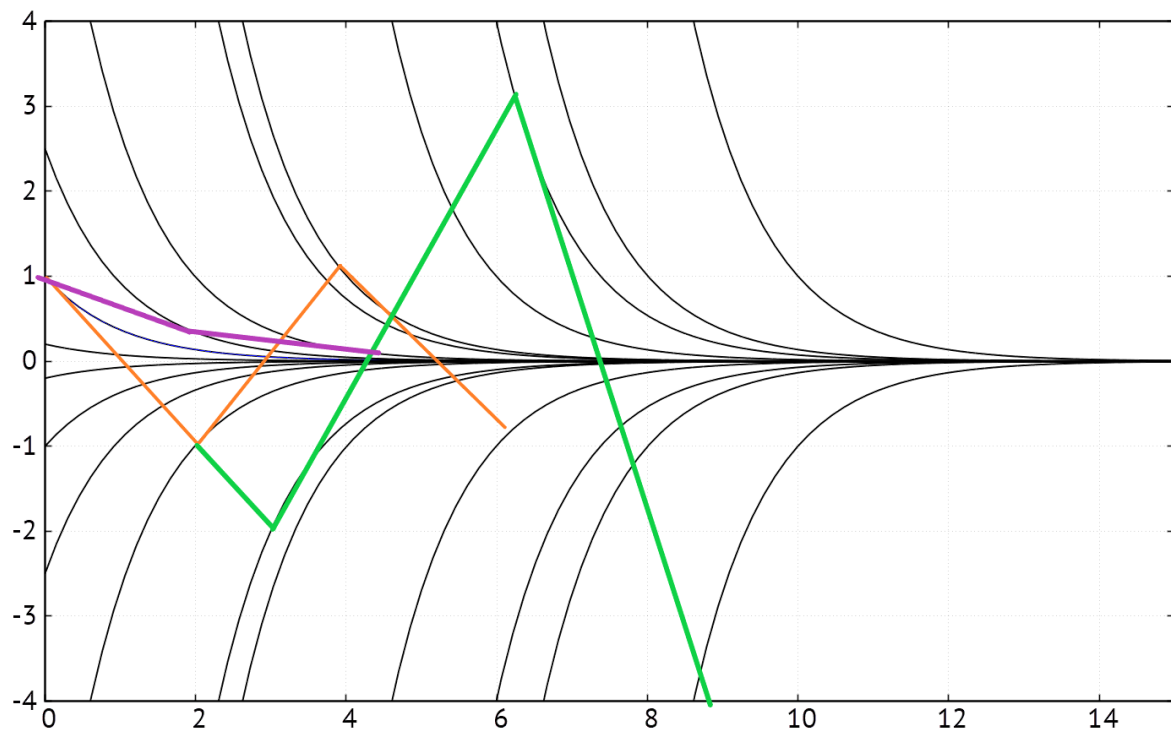
Формула для $\mathbf{x}(t + h)$:

$$\mathbf{x}(t + h) = \mathbf{x}(t) + h\mathbf{f}(\mathbf{x}(t + h)) + O(h^2)$$

Несложно увидеть, что если рассмотреть уравнение как разложение в ряд Тейлора функции \mathbf{x} в окрестности точки $t + h$, то значение в точке t именно так и будет выражаться с ошибкой $O(h^2)$ или $o(h)$. Метод имеет порядок 1.

Пример

Рассмотрим динамическую систему с уравнением $f(x) = -kx$. Задача Коши данной системы имеет тривиальное математическое решение вида $x(t) = x_0 e^{-k/t}$. Отобразим картину траектории данной системы:



По оси абсцисс – время t , по оси ординат – x . Здесь отображены кривые математического решения при разном значении x_0 .

Обратим внимание, что это уравнение имеет решение и в отрицательной области. Смены знака x не должно происходить, но в численном методе это случается.

Например, в явном методе Эйлера при выборе большого шага, например $h = 2$, $x_0 = 1$. Производная при $t = 0$ равна -1, соответственно, после первого шага метод окажется в точке $(2, -1)$. В дальнейшем метод будет «прыгать» между разными по знаку и одинаковыми по значению x -ами и никогда не придет к $x = 0$. На графике поведение метода при данном шаге изображено оранжевой ломаной.

Если выбрать шаг $h = 3$, то метод после первого шага окажется в точке $(2, -2)$, и далее значения x_i будут не только постоянно менять знак, но еще и становиться больше по модулю, то есть метод разойдется, траектория получится осциллирующей. Так и проявляется неустойчивость прямого метода Эйлера на этой задаче. Задача является жесткой и в ней стоит использовать неявный метод Эйлера. На графике поведение метода при данном шаге изображено зеленой ломаной.

В случае, если при том же $x_0 = 1$ брать шаг $h < 2$, то явный метод сойдется:

$$x(t + h) \approx x(t)(1 - kh)$$

$$x(t) \approx x(0)(1 - kh)^{t/h}$$

Таким образом, метод сходится при $|1 - kh| < 1$.

Неявный метод Эйлера вне зависимости от выбора шага не уйдет в отрицательную область и на каждом шаге будет получаться значение меньше значению на предыдущем.

$$x(t + h) \approx x(t)/(1 + kh)$$

$$x(t) \approx x(0)(1 + kh)^{-t/h}$$

Метод сходится при $k > 0, h > 0$

На графике поведение метода при данном шаге изображено фиолетовой ломаной.

Неявный метод средней точки

Таблица Бутчера для метода:

$$\begin{array}{c|c} & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Уравнение для коэффициента \mathbf{k}_1 :

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f} \left(\mathbf{x}(t) + \frac{h}{2} \mathbf{k}_1 \right)$$

Формула для $x(t + h)$:

$$\mathbf{x}(t + h) = \mathbf{x}(t) + h\mathbf{k}_1 + o(h^2)$$

Разложим в ряд Тейлора выражение для \mathbf{k}_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{h}{2} \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \mathbf{k}_1 + O(h^2) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{h}{2} \mathbf{f}'(\mathbf{x}) (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + O(h)) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{h}{2} \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) + O(h^2) \end{aligned}$$

Сопоставим с разложением $\mathbf{x}(t + h)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $t + h$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t + h) &= \mathbf{x}(t) + h\dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{h^2}{2} \ddot{\mathbf{x}}(t) + o(h^2) \\ &= \mathbf{x}(t) + h\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \frac{h^2}{2} \mathbf{f}'(\mathbf{x}(t)) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + o(h^2) \\ &= \mathbf{x}(t) + h\mathbf{k}_1 + o(h^2) \end{aligned}$$

Это доказывает, что метод имеет порядок 2.

Метод неявных трапеций

Таблица Бутчера для метода:

$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 0 \\ & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Уравнения для коэффициентов:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t) + \frac{h}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)) \end{aligned}$$

Формула для $x(t + h)$:

$$\mathbf{x}(t + h) = \mathbf{x}(t) + \frac{h}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$$

Покажем, что метод имеет порядок 2, используя разложение в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \frac{h}{4}\mathbf{f}'(\mathbf{x}(t))(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) + O(h^2) \\
&= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \frac{h}{4}\mathbf{f}'(\mathbf{x}(t))(2\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + O(h)) + O(h^2) \\
&= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \frac{h}{2}\mathbf{f}'(\mathbf{x}(t))\mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + O(h^2)
\end{aligned}$$

Далее доказательство аналогично доказательству порядка неявного метода средней точки.

Другие неявные одношаговые методы

Большая часть более интересных методов основана на аппроксимации функции правой части некоторым многочленом, построенным по значениям f на некоторой сетке точек, и дальнейшем интегрировании этого многочлена с целью получения следующего вектора состояния системы. В зависимости от вида сетки точек более продвинутые методы распадаются на три вида:

- Методы Лобатто (порядки 2, 4, 6)
- Методы Радо (RADAU)
 - Метод Эверхарта до 15-го порядка (изначально создан для интегрирования систем небесной механики)
- Методы Гаусса-Лежандра
 - Метод Гаусса-Эверхарта (GAUSS15) до 15-го порядка

Применение того или иного метода сильно зависит от задачи и от того, как данный метод хорошо или плохо на данной задаче аппроксимирует решение, насколько хорошо сходится.

Немаловажным является то, насколько требователен метод к вычислительным ресурсам.

Неявные методы в целом намного более требовательны к ним, чем явные, так как на каждом шаге необходимо решать некоторую систему уравнений.