Задача Коши

Задача Коши — задача о решении обыкновенного дифференциального уравнения с начальным данным.

Постановка задачи Коши

Дано:

- Область $D = \{(t, x\} \subset \mathbb{R}^2\}$, является связным открытым подмножеством двумерного пространства. Параметр t характеризует время, а x — величину, которая с течением времени будет изменяться.
- Начальная точка: $(t_0, x_0) \in D$, определяет, что в момент времени t_0 величина $x = x_0$.
- Функция правой части: $f : D \to \mathbb{R}, f \in C(D)$. Функция непрерывна на области D.

Найти:

- Интервал: $I \subset \mathbb{R} : t_0 \in I$. Решение может быть не на всей области D, соответственно задается интервал, на котором будет искаться решение.
- Дифференцируемую функцию $x(t) : I \to \mathbb{R}$, такую, что

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), t \in I$$

$$(t, x(t)) \in D, t \in I$$

$$x(t_0) = x_0$$

Доказательство существования решения

Построим замкнутый прямоугольник $R \subset D$:

$$R = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\} \ \ (a, b > 0)$$

Прямоугольник построен симметрично вокруг точки (t_0, x_0). Так как по условию функция f непрерывна на D, то $f \in C(R).

Если функция непрерывна в R, то она в нем и ограничена:

$$M = \max_{(t, x \in R)} |f(t, x)|$$

Определим константу $\alpha = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$.

Теорема существования Коши-Пеано

На интервале $|t - t_0| \leq \alpha$ существует $x(t) \in C^1$ (непрерывна и имеет непрерывную производную), удовлетворяющая всем условиям задачи Коши:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$$

$$(t, x(t)) \in R$$

$$x(t_0 = x_0)$$

Построение ε-приближения решения

Функция f равномерно непрерывна на R, то есть $\forall \varepsilon$ выполняется:

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(t,x) - f(\tilde{t},\tilde{x})| \leqslant \varepsilon$$
$$(t,x) \in R,\ (\tilde{t},\tilde{x}) \in R,\ |t - \tilde{t}| \leqslant \delta_\epsilon,\ |t - \tilde{t}| \leqslant \delta_\epsilon$$

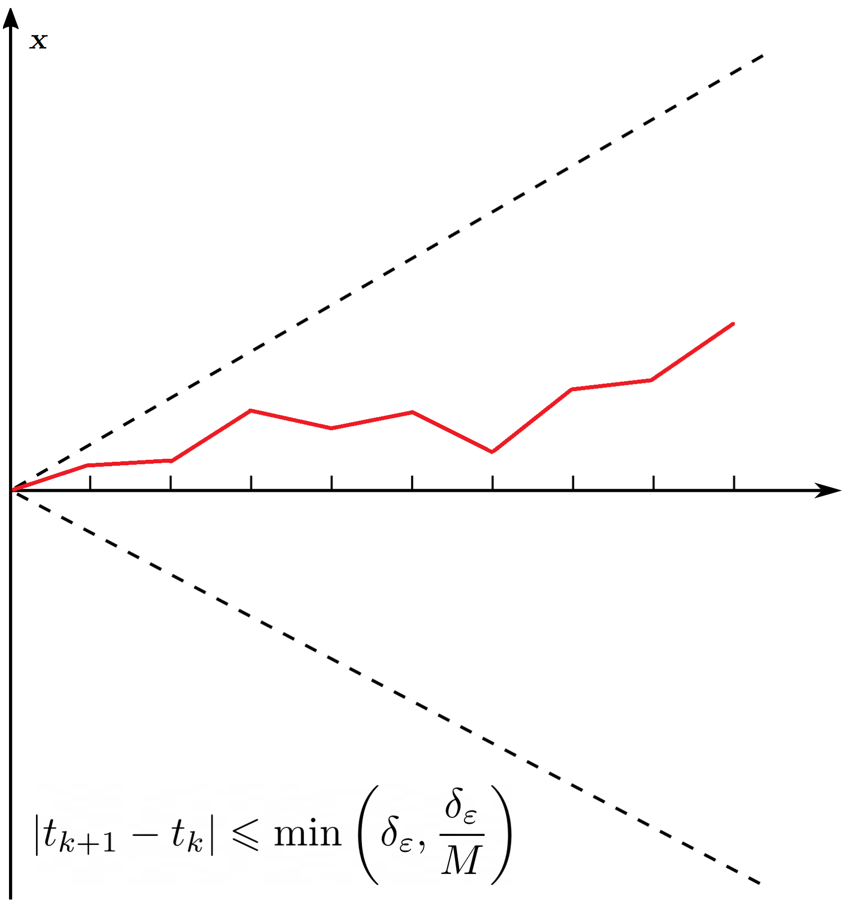
Поделим интервал $[t_0, t_0 + \alpha]$ на промежутки, которые соединяют соседние точки последовательности $t_0, \ldots, t_k = t_0 + \alpha$:

$$\varphi(t_0) = x_0$$

При $t \in [t_{k-1}, t_k]$:

$$\varphi(t) = \varphi(t_{k-1}) + f(t_{k-1}, \varphi(t_{k-1}))(t - t_{k-1})$$

Так, в точке (t_0, x_0) есть некоторое значение $f(x_0, t_0)$. Это значение будет считаться производной функции φ на первом промежутке. Далее аналогично с $(t_1, x_1), \ldots$, и так продолжается, пока не дойдем до $t_0 + \alpha$. Таким образом функция φ будет представлять собой ломаную (она может быть и в отрицательной части).



Заметим, что

$$|t - t_k| < \delta_\varepsilon, |\varphi(t) - \varphi(t_k)| < M\frac{\delta_\varepsilon}{M} = \delta_\varepsilon \Rightarrow |\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| \leq \varepsilon, t \in [0, \alpha] \setminus \{t_k\}$$

Вышеописанная функция φ — это *ε-приближение решения задачи Коши.* Она характеризуется следующими условиями:

- $\varphi \in C(I)$
- $\varphi \in C^1_p(I)$ – функция имеет непрерывную производную на всем интервале I, кроме конечного числа точек
- $|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| \leq \varepsilon, t \in [0, \alpha] \setminus \{t_k\}$

Свойства последовательности ε-приближений

Введем последовательность $\{\varepsilon_n\}$ и для каждого построим ε-приближение — получится последовательность функций $\{\varphi_n\}$.

Данная последовательность имеет свойства:

- Равномерная ограниченность: $|\varphi_n(t)| \le |x_0| + b$
- Равностепенная непрерывность:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \Delta_\epsilon > 0 : |\varphi_n(t) - \varphi_n(\tilde{t})| < \epsilon, \; \forall n, \; |t - \tilde{t}| < \Delta \quad \left(\Delta_\epsilon = \frac{\epsilon}{M}\right)$$

- Равномерная сходимость:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N : |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| < \epsilon, \; \forall n, m > N$$

Лемма Асколи

Равномерно ограниченная и равностепенно непрерывная на I последовательность функций содержит равномерно сходящуюся на I подпоследовательность.

$$\forall \epsilon > 0, \; r_k \in I \;\; \exists N_\epsilon(r_k) : |\phi_n(r_k) - \phi_m(r_k)| < \varepsilon, \; n, m > N_\epsilon(r_k)$$

Доказательство

Возьмем последовательность рациональных чисел $\{r_k\} \subset I$

Последовательность $\{\varphi_n(r_1)\}$ ограничена. Ограниченная последовательность чисел по теореме Больцано-Вейерштрасса имеет сходящуюся подпоследовательность, поэтому:

$\exists \{\varphi^{(1)}_{m_i}\} \subset \{\varphi_n\} : \{\varphi^{(1)}_{m_i}(r_1)\}$ сходится

Аналогично $\exists \{\varphi^{(2)}_{m_i}\} \subset \{\varphi^{(1)}_{m_i}\} : \{\varphi^{(2)}_{m_i}(r_2)\}$ сходится

И так далее.

Тогда последовательность $\phi_k = \varphi^{(k)}_{m_k}$, сходится на всех $\{r_k\} \subset I$

Разобьем интервал I на подинтервалы I_k так, чтобы длина каждого из них была меньше Δ_ϵ. В каждом интервале найдется рациональная точка $\tilde{r}_k$. Тогда для любой точки $t \in I$ существует интервал I_k, в котором

$$\begin{aligned} |\phi_n(t) - \phi_m(t)| \quad &\leqslant \quad |\phi_n(t) - \phi_n(\widetilde{r_k})| + \\ &\quad\;\;\; |\phi_n(\widetilde{r_k}) - \phi_m(\widetilde{r_k})| + \\ &\quad\;\;\; |\phi_m(\widetilde{r_k}) - \phi_n(t)| = 3\epsilon \end{aligned}$$

$$n, m > N_\epsilon(\tilde{r}_i), \forall i$$

Доказательство теоремы Коши-Пеано

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$$

По лемме Асколи $\exists \{\varphi_{n_k}\} \subset \{\varphi_n\} : \{\varphi_{n_k}\} \to \varphi$

Равномерный предел последовательности непрерывных функций непрерывен.

$$\varphi_{n_k}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (f(\tau, \varphi_{n_k}(\tau)) + \Delta_{n_k}(\tau)) d\tau$$

$|\Delta_{n_k}(\tau)| \le \varepsilon_{n_k}$

$f(t, \varphi_{n_k}(t)) \to f(t, \varphi(t))$ равномерно на I

Таким образом,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} (f(\tau, \varphi(\tau))d\tau$$

Производная $\varphi(t)$ в любой точке на I будет равна $f(t, \varphi(t))$.

Таким образом построена функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая всем условиям задачи Коши. Теорема Коши-Пеано доказана.