Številske vrste

Zapis *vrste*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{0.1}$$

kjer so njeni *členi* a_n (realna) števila, namiguje na namero, da bi sešteli vse člene. Toda, kaj naj pomeni taka vsota neskončno mnogo členov?

Definicija 0.1. *Delne vsote* vrste (0.1) so

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots.$$

Vrsta (0.1) je *konvergentna*, če je konvergentno zaporedje (s_n) njenih delnih vsot. Vsota konvergentne vrste je tedaj

$$s := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Vrsto, ki ni konvergentna, imenujemo *divergentna*.

Zgled 0.2. Najpopularnejša je *geometrijska vrsta*

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots. \tag{0.2}$$

Če je $q = 1$, je n-ta delna vsota te vrste $s_n = n$, zaporedje delnih vsot je tedaj divergentno. Če je $q \neq 1$, lahko

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} \tag{0.3}$$

izračunamo tako, da enakost (0.3) pomnožimo s q, s čimer dobimo

$$qs_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n,$$

in nato to enakost odštejemo od (0.3), da dobimo

$$(1-q)s_n = 1 - q^n.$$

Torej je

$$s_n = \frac{1-q^n}{1-q},$$

kadar je $q \neq 1$. To zaporedje konvergira natanko tedaj, ko konvergira zaporedje (q^n), kar je natanko tedaj, ko je $|q| < 1$ (ker je tukaj $q \neq 1$). S tem smo dokazali:

Geometrijska vrsta (0.2) konvergira natanko tedaj, ko je $|q| < 1$. Tedaj je njena vsota

$$s = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

Iz dejstva, da so konvergentna zaporedja ista kot Cauchyeva, sledi naslednji Cauchyev kriterij za konvergenco vrst:

Izrek 0.3. *Vrsta (0.1) je konvergentna natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, da za vsaka $n > m \geq n_\varepsilon$ velja*

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| < \varepsilon. \tag{0.4}$$

Dokaz. Zaporedje delnih vsot s_n je konvergentno natanko tedaj, ko je Cauchyevo, se pravi, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, da za vsaka naravna $m, n \geq n_\varepsilon$ velja $|s_n - s_m| < \varepsilon$. Pri tem smemo vzeti, da je $n > m$. Delni vsoti s_m in s_n sta tedaj

$$s_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m,$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n.$$

Absolutna vrednost njune razlike pa je

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n|.$$

Pogoj za konvergenco zaporedja delnih vsot (s_n) se torej glasi, kot je zapisano v izreku. □

Ko uporabimo izrek 0.3 v primeru $n = m + 1$, spoznamo, da velja:

Posledica 0.4. *Členi konvergentne vrste konvergirajo proti* 0*. Drugače rečeno, če je vrsta (0.1) konvergentna, je* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Vrsta

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

ne more biti konvergentna, saj njeni členi ne konvergirajo proti 0. Pogoj, da konvergirajo njeni členi proti 0, je potreben za konvergentnost vrste, kot pove naslednji zgled, pa ni zadosten.

Zgled 0.5. Vrsto

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

imenujemo *harmonična vrsta.* Njeni členi $\frac{1}{n}$ konvergirajo proti 0, kljub temu pa je, kot bomo pokazali, ta vrsta divergentna. V ta namen združimo člene vrste na naslednji način:

$$1 + (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}) + \ldots.$$

V n-tem oklepaju je 2^{n-1} členov, najmanjši med njimi je zadnji, ki je $\frac{1}{2^n}$. Zato je vsota vseh členov v n-tem oklepaju večja ali enaka $2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$. Ko seštejemo m izrazov v oklepajih, vidimo, da je ustrezna delna vsota harmonične vrste večja od $1 + m \cdot \frac{1}{2}$, kar gre proti ∞, ko gre m proti ∞. Delne vsote harmonične vrste torej niso omejene navzgor, zato ne morejo konvergirati.

Definicija 0.6. Vrsta (0.1) *absolutno konvergira*, če konvergira vrsta

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots. \tag{0.5}$$

Trditev 0.7. *Absolutno konvergentna vrsta je konvergentna.*

Dokaz. Uporabili bomo Cauchyev kriterij. Naj bo $\varepsilon > 0$. Če je vrsta (0.1) absolutno konvergentna, to pomeni, da je vrsta (0.5) konvergentna, torej obstaja tak $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, da za vsaka naravna $n > m \geq n_\varepsilon$ velja

$$|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon.$$

Po trikotniški neenakosti je potem

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| \leq |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon,$$

od koder po Cauchyevem kriteriju sledi, da je vrsta (0.1) konvergentna. □

Konvergentno vrsto, ki ne konvergira absolutno, imenujemo *pogojno konvergentna.* Zglede takih vrst bomo spoznali nekoliko kasneje.

Trditev 0.8. *(Primerjalni kriterij) Predpostavimo, da je*

$$|a_n| \leq b_n \tag{0.6}$$

za vsak n. *Če konvergira vrsta* $b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots$, *potem vrsta* $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ *absolutno konvergira.*

Dokaz. Ker za poljubna naravna $m < n$ velja

$$|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots + |a_n| \leq b_{m+1} + b_{m+2} + \ldots + b_n,$$

zato trditev sledi takoj iz Cauchyevega kriterija. □

Če za člene a_n in b_n dveh vrst velja neenakost (0.6), pravimo, da je vrsta $b_1 + b_2 + \ldots$ *majoranta* za vrsto $a_1 + a_2 + \ldots$; pravimo tudi, da je druga vrsta *minoranta* prve. Če konvergira njena majoranta, potem vrsta absolutno konvergira.

Zgled 0.9. Vrsta

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \tag{0.7}$$

ima majoranto

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \ldots. \tag{0.8}$$

Pokazali bomo, da vrsta (0.7) konvergira, zato konvergira tudi vrsta (0.7). Vrsto (0.8) lahko napišemo kot

$$1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + \ldots.$$

Njena n-ta delna vsota je

$$s_n = 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 1 + 1 - \frac{1}{n}.$$

Limita zaporedja delnih vsot pa je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (2 - \frac{1}{n}) = 2.$$

Za vsak $r > 2$ je vrsta (0.7) majoranta za vrsto

$$1 + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \ldots + \frac{1}{n^r} + \ldots. \tag{0.9}$$

Ker vrsta (0.7) konvergira, konvergira tudi njena minoranta (0.9). S pomočjo integralskega kriterija (ki ga bomo spoznali kasneje) se da dokazati, da vrsta (0.9) konvergira za vsak $r > 1$. Drugo vprašanje pa je, kaj je njena vsota. Da se pokazati, da je npr. vsota vrste (0.7) enaka $\frac{\pi^2}{6}$, vendar je za to potrebno novo orodje, ki ga boste spoznali kasneje.

Izrek 0.10. *(Korenski kriterij za konvergenco vrst) Naj bo*

$$R = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Če je $R < 1$, vrsta (0.1) absolutno konvergira. Če pa je $R > 1$, vrsta (0.1) divergira.

Dokaz. Predpostavimo najprej, da je $R > 1$ in izberimo poljuben $c \in (1, R)$. Ker je $R = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, je neskonňo mnogo členov $\sqrt[n]{|a_n|}$ večjih od c, torej $|a_n| > c^n$ za neskončno mnogo n-jev. Ker je $c > 1$, gre c^n proti ∞, ko gre n proti ∞. Sledi, da zaporedje (a_n) ni niti omejeno, torej ne konvergira proti 0, zato vrsta (0.1) tedaj ne more konvergirati.

Predpostavimo sedaj še, da je $R < 1$ in izberimo $c \in (R, 1)$. Ker je $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = R < c$, je večjih od c le končno mnogo členov zaporedja $(\sqrt[n]{|a_n|})$, torej velja

$$|a_n| \leq c^n \tag{0.10}$$

za vse, razen morda za končno mnogo indeksov n. Tedaj (0.10) velja za vse n od nekega n_0 naprej, kar pomeni, da je geometrijska vrsta

$$c^{n_0} + c^{n_0+1} + c^{n_0+2} + \ldots \tag{0.11}$$

majoranta za vrsto

$$|a_{n_0}| + |a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + \ldots. \tag{0.12}$$

Ker je $c \in (0, 1)$, geometrijska vrsta (0.11) konvergira, zato konvergira tudi njena minoranta (0.12). Vrsta (0.5) se razlikuje od vrste (0.12) le v končno mnogo členih (namreč vrsti (0.12) je prištetih prvih $n_0 - 1$ členov), zato je konvergentna tudi vrsta (0.5), kar pomeni, da je vrsta (0.1) absolutno konvergentna. $\square$

Opomba 0.11. Kadar je $R = 1$, korenski kriterij molči.

Zgled 0.12. Za katere $x \in \mathbb{R}$ konvergira vrsta

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n + \ldots?$$

Ker je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = |x|,$$

po korenskem kriteriju vrsta absolutno konvergira, če je $|x| < 1$, in divergira, če je $|x| > 1$. Če pa je $|x| = 1$, sta dve možnosti: $x = 1$ in $x = -1$. V obeh primerih členi vrste $n(\pm 1)^n$ ne konvergirajo proti 0, zato je tedaj vrsta divergentna.

Trditev 0.13. *(Kvocientni kriterij) Predpostavimo, da je $a_n \neq 0$ za vse n. Če je*

$$R := \limsup |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1,$$

vrsta (0.1) absolutno konvergira. Če pa je

$$r := \liminf |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1,$$

vrsta (0.1) divergira.

Dokaz. Privzemimo, da je $R < 1$ in izberimo $c \in (R, 1)$. Ker je $R = \limsup |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < c$, je večjih od c le končno mnogo členov $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, torej obstaja tak $m \in \mathbb{N}$, da velja

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq c \quad \forall n \geq m.$$

Od tod sledi $|a_{m+1}| \leq c|a_m|$, $|a_{m+2}| \leq c|a_{m+1}| \leq c^2|a_m|$, itd. z indukcijo

$$|a_{m+k}| \leq c^k |a_m| \quad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{0.13}$$

To pomeni, da je geometrijska vrsta

$$|a_m|(1 + c + c^2 + \ldots + c^k + \ldots) \tag{0.14}$$

majoranta za vrsto

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k} + \ldots. \tag{0.15}$$

Ker je $c \in (0, 1)$, vrsta (0.14) konvergira, zato absolutno konvergira tudi vrsta (0.15). Ker se vrsta (0.1) razlikuje od vrste (0.15) le v dodatnih prvih $m-1$ členih, mora konvergirati absolutno.

Predpostavimo sedaj, da je $r > 1$ in izberimo $c \in (1, r)$. Potem je manjših od c le končno mnogo členov $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$, torej obstaja tak $m \in \mathbb{N}$, da velja

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq c \quad \forall n \geq m. \tag{0.16}$$

Od tod sledi $|a_{n+k}| \geq c^k |a_m|$, kar pove, da zaporedje (a_n) sploh ni omejeno (saj gre c^k proti ∞, ko gre k proti ∞), torej ne konvergira proti 0, zato vrsta (0.1) ne more konvergirati. □

Zgled 0.14. Za katere $x \in \mathbb{R}$ konvergira vrsta

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots?$$

Ker je

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^n}{n!}}{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n} = 0,$$

po kvocientnem kriteriju vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Definicija 0.15. Vrsto

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots, \tag{0.17}$$

v kateri so bodisi vsi a_n pozitivni bodisi vsi negativni, imenujemo *alternirajoča vrsta.*

Trditev 0.16. *Če v alternirajoči vrsti členi padajo po absolutni vrednosti proti* 0 *(torej* $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ *in* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*), potem vrsta konvergira.*

Dokaz. Predpostaviti smemo, da so v vrsti (0.17) vsi a_n pozitivni (sicer bi jo pomnožili z -1). Uporabili bomo Cauchyev kriterij za konvergenco vrst. Naj bo $\varepsilon > 0$. Pokazati moramo, da je

$$|a_m - a_{m+1} + a_{m+2} - \ldots \pm a_n| < \varepsilon, \tag{0.18}$$

če je m dovolj velik. V vsoti (0.18) je $n-m+1$ členov. Če je to število sodo, jo lahko zapišemo kot $(a_m - a_{m+1}) + \ldots + (a_{n-1} - a_n)$; ker je po predpostavki $a_k \geq a_{k+1}$ za vse k, je ta vsota nenegativna. Če pa je število $n-m+1$ liho, lahko vsoto v (0.18) napišemo kot $(a_m - a_{m+1}) + \ldots + (a_{n-2} - a_{n+1}) + a_n$, od koder vidimo, da je tudi v tem primeru vsota nenegativna. Absolutna vrednost v izrazu (0.18) je torej odveč. Kadar je število $n-m+1$ liho, napišimo sedaj izraz v (0.18) kot $a_m - [(a_{m+1} - a_{m+2}) + \ldots + (a_{n-1} - a_n)]$, od koder vidimo, da je manjši ali enak a_m. Ker zaporedje (a_m) konvergira proti 0, je torej ta vsota pod ε, če je m dovolj velik. Kadar pa je število $n-m+1$ sodo, napišemo vsoto (0.18) kot $a_m - [(a_{m+1} - a_{m+2}) + \ldots + (a_{n-2} - a_{n-1}) + a_n]$, kar je spet manjše ali enako a_m. □

Zgled 0.17. V alternirajoči vrsti

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

členi po absolutni vrednosti padajo proti 0, zato je ta vrsta konvergentna.

Naloge. 1. Pokažite, da vrsta

$$1 + \frac{1}{2\log 2} + \frac{1}{3\log 3} + \ldots + \frac{1}{n\log n} + \ldots$$

konvergira absolutno.

2. Naj bo $a > 1$. Pokažite, da vrsta $(a-1) - (\sqrt{a}-1) + (\sqrt[3]{a}-1) - (\sqrt[4]{a}-1) + \ldots$ konvergira. *Ali konvergira absolutno?

3. Za katere x konvergira vrsta $x + \frac{(2x)^2}{2!} + \ldots + \frac{(nx)^n}{n!} + \ldots$?

4.** Pokažite, da je vrsta s členi $\frac{(-1)^n}{n}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n})$ pogojno konvergentna.

1. Še o vrstah

Oglejmo si najprej posplošitev kriterija o konvergenci, ki smo ga v prejšnjem razdelku spoznali za alternirajoče vrste.

Izrek 1.1. *(Dirichletov kriterij) bo (a_n) monotono zaporedje z limito 0, (b_n) pa tako zaporedje, da je zaporedje delnih vsot $s_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ omejeno, se pravi $|s_n| \leq M$ za kak $M \in \mathbb{R}$ in vse n. Potem je vrsta*

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + \ldots \tag{1.1}$$

konvergentna.

Dokaz. Predpostaviti smemo, da je zaporedje (a_n) padajoče (in ima zato pozitivne člene, ker konvergira proti 0), sicer bi obravnavali zaporedje $(-a_n)$. Po Cauchyevem kriteriju za konvergenco vrst zadošča pokazati, da za vsak $\varepsilon > 0$ velja $|\sum_{j=m}^{n} a_j b_j| < \varepsilon$ za vsaka dovolj velika $m < n$. Opazimo, da je

$$|\sum_{j=m}^{n} a_j b_j| = |\sum_{j=m}^{n} a_j (s_j - s_{j-1})| = |-a_m s_{m-1} + \sum_{j=m}^{n-1} (a_j - a_{j+1}) s_j + a_n s_n|$$

$$\leq a_m|s_{m-1}|+\sum_{j=m}^{n-1}(a_j-a_{j+1})|s_j|+a_n|s_n| \leq M(a_m+\sum_{j=m}^{n-1}(a_j-a_{j+1})+a_n) = 2Ma_m.$$

Ker zaporedje (a_n) konvergira k 0, je $2Ma_m < \varepsilon$ za vse dovolj velike m. $\square$

Zgled 1.2. Pokažimo, da za vsak $x \neq 2m\pi$ $(m \in \mathbb{Z})$ konvergira vrsta

$$\cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n} + \ldots.$$

Po Dirichletovem kriteriju zadošča dokazati, da so vsote

$$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx \tag{1.2}$$

omejene z isto konstanto, saj zaporedje $(\frac{1}{n})$ pada proti 0. Vsoto (1.2) lahko izračunamo, tako da jo najprej pomnožimo s $\sin\frac{x}{2}$ in nato vsak člen $\cos kx \sin\frac{x}{2}$ zapišemo z uporabo formule $\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$. Po krajšem računu dobimo, da je vsota (1.2) enaka

$$\frac{\sin{(n+\frac{1}{2})x} - \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

torej omejena z $\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$.

Če v vrsti zamenjamo vrstni red le končno mnogo členov, to ne more vplivati na konvergenco niti na vsoto vrste. Drugače pa je lahko, če zamenjamo vrstni red neskončno mnogo členov.

Imejmo vrsto

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1.3}$$

in zamenjajmo v njej vrstni red členov, tako da dobimo novo vrsto

$$a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + \ldots + a_{\sigma(n)} + \ldots. \tag{1.4}$$

Tukaj smo s σ označili zamenjavo (ali permutacijo; tj. bijektivno preslikavo množice $\mathbb{N}_0 := \{1, 2, 3, \ldots\}$ nase). S tem hočemo povedati le, da je množica novih indeksov $\{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \ldots\}$ enaka množici $\mathbb{N}_0$ in da je $\sigma(k) \neq \sigma(l)$, če je $k \neq l$ (tj. vsak indeks nastopa natanko enkrat).

Izrek 1.3. *Če je vrsta (1.3) absolutno konvergentna, je taka tudi vrsta (1.4) in obe imata isto vsoto.*

Dokaz. Po Cauchyevem kriteriju za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, da je

$$|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon,$$

če je $n > m \geq n_\varepsilon$. Ko pošljemo n proti ∞, sledi od tod

$$|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots \leq \varepsilon \quad \forall m \geq n_\varepsilon. \tag{1.5}$$

Izberimo $k \in \mathbb{N}$ tako velik, da so med členi $a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \ldots, a_{\sigma(k-1)}$ tudi vsi členi $a_1, a_2, \ldots, a_{n_\varepsilon - 1}$. Potem v vsoti

$$|a_{\sigma(k)}| + |a_{\sigma(k+1)}| + |a_{\sigma(k+2)}| + \ldots \tag{1.6}$$

nastopajo le členi z indeksi, večjimi od $n_\varepsilon - 1$, zato iz (1.5) sledi, da je vsota (1.6) manjša ali enaka ε. Od tod sedaj iz Cauchyevega kriterija sledi, da je vrsta (1.4) absolutno konvergentna.

Iz (1.5) sledi tudi, da je razlika med vsoto s vrste (1.3) in njeno n-to delno vsoto s_n pod ε, če je $n \geq n_\varepsilon$, torej

$$|s - s_{n_\varepsilon}| \leq \varepsilon. \tag{1.7}$$

Po drugi strani, če označimo z z vsoto vrste (1.4), v razliki $z - s_{n_\varepsilon}$ nastopajo le členi a_l z indeksi $l \geq n_\varepsilon$, zato iz (1.5) sledi tudi, da je

$$|z - s_{n_\varepsilon}| \leq \varepsilon. \tag{1.8}$$

Iz (1.7) in (1.8) sklepamo, da velja

$$|z - s| \leq 2\varepsilon.$$

Ker velja to za vsak $\varepsilon > 0$, mora biti $|z - s| = 0$, se pravi $z = s$. □

Izrek 1.4. *Če je vrsta*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1.9}$$

pogojno konvergentna, potem za vsak $s \in \mathbb{R}$ obstaja taka permutacija σ množice $\mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, \ldots\}$, da je

$$s = a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + \ldots + a_{\sigma(n)} + \ldots.$$

Dokaz. Naj bodo $b_1, b_2, \ldots$ vsi pozitivni, $-c_1, -c_2, \ldots$ pa vsi negativni členi vrste (1.9). Trdimo, da nobena od vrst

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots, \tag{1.10}$$

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots \tag{1.11}$$

ni konvergentna. Če bi bili obe vrsti (1.10) in (1.11) konvergentni, bi namreč iz Cauchyevega kriterija (z uporabo trikotniške neenakosti) hitro sledilo, da je vrsta (1.9) absolutno konvergentna, čeprav je po predpostavki le pogojno konvergentna. Torej je vsaj ena od vrst (1.10), (1.11) divergentna. Predpostavimo, da je npr. prva divergentna, druga pa konvergentna. Potem, ker je vrsta (1.10) divergentna, obstaja tak $\varepsilon > 0$, da za vsak $\ell \in \mathbb{N}$ obstajata taka $n_\ell, m_\ell \in \mathbb{N}$, da je $n_\ell > m_\ell \geq \ell$ in

$$b_{m_\ell+1} + \ldots + b_{n_\ell} \geq 2\varepsilon. \tag{1.12}$$

Ker pa vrsta (1.11) konvergira, obstaja tak $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, da je

$$c_{m+1} + \ldots + c_n < \varepsilon \quad \forall n > m \geq n_\varepsilon. \tag{1.13}$$

Izberimo sedaj $\ell \in \mathbb{N}$ tako velik, da so vsi členi $-c_1, \ldots, -c_{n_\varepsilon}$ našteti med prvimi ℓ členi vrste (1.9). Ker je $n_\ell > m_\ell \geq \ell$, nobeden od členov $b_{m_\ell+1}, \ldots, b_{n_\ell}$ ni med prvimi ℓ členi vrste (1.9). Za vsaka $n > m \geq \ell$ potem velja

$$\begin{aligned}|a_{m+1} + \ldots + a_n| &= |(b_{m_\ell+1} + \ldots + b_{n_\ell} + \text{vsota še nekaterih } b_i) \\ &\quad -(c_{m+1} + \ldots c_n + \text{vsota še nekaterih } c_j \text{ z indeksi } j > n_\varepsilon)| \\ &\geq (b_{m_\ell+1} + \ldots + b_{n_\ell} + \text{vsota še nekaterih } b_i)\end{aligned}$$

$$-(c_{m+1} + \ldots c_n + \text{vsota še nekaterih } c_j \text{ z indeksi } j > n_\varepsilon)$$

$$\geq (b_{m_\ell+1} + \ldots + b_{n_\ell}) - (c_{m+1} + \ldots + c_n + \ldots) \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon,$$

kjer smo uporabili, da velja (1.13) za vse p (namesto n), večje od m. Po Cauchyevem kriteriju ta ocena pove, da vrsta (1.9) ni konvergentna, kar je protislovje. Tako smo dokazali, da morata biti obe vrsti (1.10) in (1.11) divergentni, kadar je (1.9) pogojno konvergentna.

Spremenimo sedaj vrstni red členov vrste (1.9) tako, da na začetek napišemo ravno toliko členov vrste (1.10), da je njihova vsota večja ali enaka s. To je mogoče, ker je vrsta (1.10) divergentna, njena vsota torej ∞. Recimo torej, da smo za to potrebovali prvih n_1 členov vrste (1.10), tako da je

$$b_1 + \ldots + b_{n_1} \leq s < b_1 + \ldots + b_{n_1} + b_{n_1+1}.$$

Opazimo, da je $s - (b_1 + \ldots + b_{n_1}) < b_{n_1+1}$. Sedaj odštejmo od vsote $b_1 + \ldots + b_{n_1}$ ravno toliko členov vrste (1.11) da je rezultat manjši od s, torej

$$b_1 + \ldots + b_{n_1} - c_1 - \ldots c_{n_2} < s, \quad b_1 + \ldots + b_{n_1} - c_1 - \ldots - c_{n_2-1} \geq s.$$

Opazimo, da se ta delna vsota razlikuje od s za manj kot c_{n_2}; če bi pa odšteli manj c-jev, bi se delna vsota razlikovala od s še vedno za manj kot b_{n_1+1}. V naslednjem koraku dodamo vsoti $b_1 + \ldots + b_{n_1} - c_1 - \ldots c_{n_2}$ ravno toliko členov $b_{n_1+1}, b_{n_1+2}, \ldots$, da je vsota večja ali enaka s. Potem spet odštejemo ravno dovolj členov $c_{n_2+1}, c_{n_2+2}, \ldots$, da pade rezultat pod s. (Vse to je mogoče, ker sta obe vrsti (1.10) in (1.11) divergentni, s pozitivnimi členi, in je zato npr. $\sum_{j=k}^\infty c_k = \infty$.) Ko tako nadaljujemo, dobimo novo vrsto, v kateri so zapisani vsi členi prvotne vrste (1.9), in sicer vsak natanko enkrat. Razlike med delnimi vsotami nove vrste in s so omejene z b_{n_k+1} oziroma c_{n_k}. Ker je prvotna vrsta (1.9) konvergentna, konvergirajo njeni členi proti 0, torej gredo b_n in c_n proti 0, zato delne vsote preurejene vrste, ki smo jo dobili na ta način iz (1.9), konvergirajo proti s □

Trditev 1.5. *(Integralski kriterij) Naj bo funkcija $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ zvezna (tj. njen graf je nepretrgan) in padajoča. Vrsta*

$$f(1) + f(2) + \ldots f(n) + \ldots \tag{1.14}$$

je konvergentna natanko tedaj, ko je $\int_1^\infty f(x)\,dx < \infty$.

Dokaz. Ker je funkcija f padajoča, je

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq f(n+1) \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{1.15}$$

Od tod sledi

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots \geq \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geq f(2) + f(3) + \ldots + f(n) + \ldots.$$

Ker je $\sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^\infty f(x)\,dx$ in $f(n) \geq 0$ za vse n, trditev zlahka sledi iz gornje ocene. □

Zgled 1.6. Vrsta

$$1 + \frac{1}{2^r} + \ldots + \frac{1}{n^r} + \ldots$$

je konvergentna natanko tedaj, ko je $\int_1^\infty \frac{1}{x^r}\, dx < \infty$. Če je $r \neq 1$, je vrednost tega integrala, $[\frac{x^{-r+1}}{-r+1}]_1^\infty$, končna natanko tedaj, ko je $r > 1$. Če pa je $r = 1$, je vrednost integrala $\ln x|_1^\infty = \infty$. Torej je gornja vrsta konvergentna natanko tedaj, ko je $r > 1$.

Naloge. 1. (Abelov kriterij) Naj bo vrsta $a_1 + a_2 + \ldots$ konvergentna, (b_n) pa monotono omejeno zaporedje. Dokažite, da je vrsta $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n + \ldots$ konvergentna. (Naj bo $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Uporabite Dirichletov kriterij za dano vrsto in zaporedje $(b_n - b)$.)

2. Za katere r konvergira vrsta

$$\frac{\log 2}{2^r} + \frac{\log 3}{3^r} + \ldots + \frac{\log n}{n^r} + \ldots ?$$

3. Ali je vrsta $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin n}{n}$ konvergentna? Ali je absolutno konvergentna?