0.1. Odvod preslikave

0.1.1. Odvod kot linearna preslikava. Odvod funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ v točki a je v bistvu linearni približek za funkcijo: $f'(a)$ je tako število $L\in\mathbb{R}$, da je razlika $|f(a+h)-f(a)-Lh|$ majhna v primerjavi s $|h|$, če je $|h|$ dovolj majhen. Natančneje,

$$\lim_{h\to 0}|h|^{-1}|f(a+h)-f(a)-Lh|=0.$$

Odvod preslikave $f:\mathbb{R}.\to\mathbb{R}^m$ je definiran enako, le da bo vlogo števila L prevzela linearna preslikava.

V celotnem poglavju sta $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$ evklidska prostora (torej $\mathcal{U}=\mathbb{R}^n$ in $\mathcal{V}=\mathbb{R}^m$ za kaka $m,n\in\mathbb{N}$) in G odprta podmnožica v $\mathcal{U}$.

Definicija 0.1.1. Preslikava $f:G\to\mathcal{V}$ je *odvedljiva v točki* $x\in G$, če obstaja taka linearna preslikava $L:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$, da je

$$\lim_{h\to 0}\|h\|^{-1}\|f(x+h)-f(x)-Lh\|=0.$$

Tedaj imenujemo preslikavo L *odvod preslikave f v točki x* in jo označimo kot $f'(x)$ ali pa kot $(Df)(x)$. Preslikava f je *odvedljiva*, če je odvedljiva v vsaki točki $x\in G$.

V tej definiciji zahteva, da gre h proti 0, pomeni, da gre $\|h\|$ proti 0. Da je G odprta množica, smo privzeli zato, da je $x+h$ v domeni G funkcije f za vse dovolj majhne h; pomembno je le, da je x notranja točka domene funkcije. Pokažimo, da je preslikava L ena sama, če obstaja.

Lema 0.1.2. *Preslikava L, ki zadošča definiciji odvoda $f'(a)$, je kvečjemu ena.*

Dokaz. Če preslikavi T in L zadoščata pogoju iz definicije odvoda v točki x, je (z uporabo trikotniške neenakosti)

$$\lim_{h\to 0}\|h\|^{-1}\|(L-T)h\|=\lim_{h\to 0}\|h\|^{-1}\|(f(x+h)-f(x)-Th)-(f(x+h)-f(x)-Lh)\|$$
$$\leq\lim_{h\to 0}\|h\|^{-1}\|f(x+h)-f(x)-Th\|+\lim_{h\to 0}\|h\|^{-1}\|f(x+h)-f(x)-Lh\|=0.$$

Za vsak $\varepsilon>0$ obstaja torej tak $\delta>0$, da je $\|h\|^{-1}\|(L-T)h\|\leq\varepsilon$ za vse $\|h\|<\delta$. Ker je $L-T$ (omejen) linearen operator, sledi od tod, da je

$$\|L-T\|\leq\varepsilon.$$

Ker velja to za vsak $\varepsilon>0$, mora biti $\|L-T\|=0$, torej $L=T$. □

Če pri fiksnem $x\in G$ označimo

$$o(h)=\|h\|^{-1}\left(f(x+h)-f(x)-Lh\right),$$

je

$$f(x+h) = f(x) + Lh + \|h\|o(h) \quad \text{in} \quad \lim_{h\to 0} o(h) = 0. \tag{0.1.1}$$

Dejstvo, da je $\lim_{h\to 0} o(h) = 0$, pomeni, da je za dovolj majhne h vektor $\|h\|o(h)$ zanemarljivo majhen v primerjavi s h in tedaj je po (0.1.1) sprememba vrednosti preslikave f, torej $f(x+h) - f(x)$, približno enaka Lh. Obstoj linearne preslikave L, za katero velja (0.1.1), je ekvivalenten z odvedljivostjo preslikave f v točki x. Iz (0.1.1) takoj sledi tudi:

TRDITEV 0.1.3. *Vsaka odvedljiva preslikava je zvezna.*

Odvod $f'(x)$ je torej linearna preslikava iz $\mathcal{U}$ v $\mathcal{V}$, se pravi element prostora $\operatorname{Hom}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ vseh linearnih preslikav iz $\mathcal{U}$ v $\mathcal{V}$, ki ga bomo označevali tudi kot $B(\mathcal{U}, \mathcal{V})$.

Če je $G \subseteq \mathcal{U} := \mathbb{R}$, je preslikava $f : G \to \mathcal{V}$ vektorska funkcija ene realne spremenljivke. Vsak linearen operator L iz $\mathbb{R} \to \mathcal{V}$ je določen z vektorjem $v := L(1)$, in sicer je $L(t) = tv$ za vsak $t \in \mathbb{R}$. Predpis $L \mapsto L(1)$ je naravni izomorfizem prostora $B(\mathbb{R}, \mathcal{V})$ na prostor $\mathcal{V}$. Zato imamo lahko tedaj odvod preslikave f v točki x kar za vektor iz $\mathcal{V}$ in sicer tak vektor v, da je

$$\lim_{h\to 0} |h|^{-1} \|f(x+h) - f(x) - hv\| = 0,$$

se pravi

$$v = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)).$$

Če pa je $\mathcal{V} = \mathbb{R}$ in G odprta podmnožica splošnega evklidskega prostora $\mathcal{U}$, je preslikava $f : G \to \mathcal{V}$ običajna skalarna funkcija več spremenljivk. Prostor $B(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = B(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ je tedaj prostor vseh linearnih funkcionalov na $\mathcal{U}$. Ker je vsak linearen funkcional na $\mathcal{U}$ skalarno množenje z natanko določenim vektorjem (drugače rečeno, $(\mathcal{U})'$ in $\mathcal{U}$ sta naravno izomorfna prostora, je tudi v tem primeru odvod $f'(x)$ v bistvu vektor iz $\mathcal{U}$. To je tak vektor $u \in \mathcal{U}$, da je

$$f(x+h) - f(x) - \langle h, u \rangle = \|h\|o(h), \quad \text{kjer je} \quad \lim_{h\to 0} o(h) = 0.$$

Tak vektor u imenujemo tudi *gradient* funkcije f v točki x in ga označimo

$$(\nabla f)(x) \quad \text{ali pa} \quad (\mathit{grad}\, f)(x).$$

DEFINICIJA 0.1.4. Preslikava $f : G \to \mathcal{V}$ je *zvezno odvedljiva*, če je odvedljiva in je preslikava $f' : G \to B(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, $x \mapsto f'(x)$, zvezna.

Najpreprostejši zgledi odvedljivih preslikav so konstantne preslikave; odvod take preslikave v vsaki točki x je očitno ničelna linearna preslikava. Naslednji enostaven zgled so linearne preslikave. Ker bomo ta zgled potrebovali še kasneje, ga bomo raje imenovali lema.

LEMA 0.1.5. *Za vsako linearno preslikavo $L : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ in vsak $x \in \mathcal{U}$ je $L'(x) = L$.*

DOKAZ. Ker je za vsak $h \in \mathcal{U}$

$$L(x+h) - L(x) - Lh = 0,$$

je pogoj (0.1.1) za odvedljivost očitno izpolnjen in $f'(x) = L$ za vsak $x \in \mathcal{U}$. $\square$

0.1.2. Koordinatni opis. Naj bo $f : G \to \mathbb{R}^m$ poljubna preslikava. Za vsak $x \in G$ označimo s $f_i(x)$ komponente vektorja $f(x)$, torej je

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)).$$

Pri tem so f_i funkcije iz G v $\mathbb{R}$, s katerimi je preslikava f popolnoma določena. Te funkcije f_i bomo imenovali *komponente funkcije* f. Komponente linearne preslikave $L : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ so linearni funkcionali $L_i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$; za vsak $h \in \mathcal{U}$ je $Lh = (L_1 h, \ldots, L_m h)$, zato lahko L zapišemo kot stolpec $(L_1, \ldots, L_m)$ funkcionalov.

LEMA 0.1.6. *Preslikava $f : G \to \mathbb{R}^m$ je odvedljiva v točki $x \in G$ natanko tedaj, ko so v točki x odvedljive vse njene komponente f_i. Tedaj je*

$$f'(x) = (f_1'(x), \ldots, f_m'(x)).$$

Lema sledi takoj iz definicije odvoda, ko uporabimo neenakosti

$$|y_i| \le \|y\| \le \sqrt{m} \max_{1 \le j \le m} |y_j|,$$

ki velja za vsak vektor $y = (y_1, \ldots, y_m)$ iz $\mathbb{R}^m$. Po tej lemi moramo ugotoviti še, kaj konkretno pomeni odvod za skalarno funkcijo $f : G \to \mathbb{R}$.

DEFINICIJA 0.1.7. Naj bo G odprta podmnožica evklidskega prostora $\mathcal{U}$. *Odvod funkcije $f : G \to \mathbb{R}$ v točki $x \in G$ glede na vektor $u \in \mathbb{R}^n$* je vektor

$$(D_u f)(x) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x+tu) - f(x)),$$

če ta limita obstaja. Ta odvod označimo tudi kot $(\nabla_u f)(x)$. Če je u enotski vektor, imenujemo odvod $(D_u f)(x)$ tudi *odvod funkcije f v smeri vektorja u v točki x*. Če je $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ in $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ standardni bazni vektor, imenujemo odvod $(D_{e_j} f)(x)$ *parcialni odvod funkcije f na spremenljivko x_j v točki x* in ga označimo tudi kot $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ ali pa kar $(D_j f)(x)$.

Opazimo, da je parcialni odvod $(D_j f)(x)$ pravzaprav le navadni odvod funkcije $x_j \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$, torej odvod funkcije f kot funkcije spremenljivke x_j, pri čemer so preostale spremenljivke x_i za $i \ne j$ konstantne.

Lema 0.1.8. *Naj bo G odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$. Če je funkcija $f : G \to \mathbb{R}$ odvedljiva v točki $x \in G$, je v tej točki odvedljiva tudi glede na vsak vektor $u \in \mathcal{U}$ in velja*

$$(D_u f)(x) = \langle (\nabla f)(x), u \rangle.$$

Tedaj torej obstajajo vsi parcialni odvodi $(D_j f)(x)$.

Obratno, če obstajajo vsi parcialni odvodi $(D_j f)(x)$ v vsaki točki $x \in G$ in so funkcije $x \mapsto (D_j f)(x)$ zvezne na G, je f odvedljiva in njen odvod f' je zvezna preslikava na G.

Dokaz. Predpostavimo, da je f odvedljiva v točki x. Kot smo videli v prejšnjem podrazdelku, to pomeni, da obstaja tak vektor $(\nabla f)(x) \in \mathcal{U}$, da je

$$f(x+h) - f(x) = \langle (\nabla f)(x), h \rangle + \|h\| o(h) \quad (h \in \mathcal{U}),$$

kjer je o taka funkcija, da je $\lim_{h \to 0} o(h) = 0$. Ko vstavimo v to enakost $h = tu$ ($t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{U}$), dobimo

$$f(x+tu) - f(x) = t \langle (\nabla f)(x), u \rangle + |t| \|u\| o(tu).$$

Od tod sledi, da je

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (f(x+tu) - f(x)) = \langle (\nabla f)(x), u \rangle,$$

torej je $(D_u f)(x) = \langle (\nabla f)(x), u \rangle$. Kot poseben primer, če vzamemo za u standardni bazni vektor $u = e_j$, dobimo $(D_j f)(x) = \langle (\nabla f)(x), e_j \rangle$. To pomeni, da je $(D_j f)(x)$ ravno j-ta komponenta vektorja $(\nabla f)(x)$, torej je

$$(\nabla f)(x) = ((D_1 f)(x), \ldots, (D_n f)(x)).$$

Predpostavimo sedaj, da obstajajo vsi parcialni odvodi $D_j f$ in da so zvezni. Pokazali bomo, da je tedaj funkcija f odvedljiva v vsaki točki $x \in G$. Zaradi enostavnejšega zapisa se bomo omejili na primer $n = 2$; ideja dokaza za splošen n je enaka. Naj bo torej $x = (x_1, x_2)$ in $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ tako majhen, da je $x + h \in G$. Potem je

(0.1.2)
$$f(x+h) - f(x) = (f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2+h_2)) + (f(x_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2)).$$

V prvem oklepaju na desni strani gornje formule se je spremenila le prva spremenljivka, zato lahko ta izraz zapišemo po Lagrangeevem izreku (uporabljenem na funkciji $x_1 \mapsto f(x_1, x_2 + h_2)$ pri fiksnih x_2 in h_2) kot

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2+h_2) = (D_1 f)(\xi_1, x_2+h_2) h_1,$$

kjer je $\xi_1 \in (x_1, x_1 + h_1)$. Podobno je

$$f(x_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2) = (D_2 f)(x_1, \xi_2) h_2$$

za kak $\xi_2 \in (x_2, x_2 + h_2)$. Enakost (0.1.2) lahko sedaj napišemo kot

$$f(x+h) - f(x) = h_1 (D_1 f)(\xi_1, x_2+h_2) + h_2 (D_2 f)(x_1, \xi_2).$$

Od tod sledi

$$\|f(x+h)-f(x)-\langle(\nabla f)(x),h\rangle\| = \|h\|[\frac{h_1}{\|h\|}((D_1f)(\xi_1,x_2+h_2)-(D_1f)(x_1,x_2)) + \frac{h_2}{\|h_2\|}((D_2f)(x_1,\xi_2)-(D_2f)(x_1,x_2))]. \tag{0.1.3}$$

Ko gre h proti 0, gre ξ_1 proti x_1, ξ_2 pa proti x_2. Ker sta parcialna odvoda D_jf po predpostavki zvezna, kvocienta $\frac{|h_j|}{\|h\|}$ pa omejena z 1, gre izraz v oglatem oklepaju na desni strani enakosti (0.1.3) proti 0, ko gre h proti 0. Od tod sledi, da je funkcija f odvedljiva v točki x in da je $f'(x)$ skalarno množenje z vektorjem $(\nabla f)(x)$. Preslikava $x \mapsto (\nabla f)(x)$ je zvezna, zato je f zvezno odvedljiva funkcija. □

Zadnji dve lemi lahko združimo v naslednji izrek:

Izrek 0.1.9. *Naj bo G odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$ in $x \in G$. Če je preslikava $f : G \to \mathbb{R}^m$ odvedljiva v točki x, potem obstajajo vsi parcialni odvodi $(D_jf_i)(x)$, kjer so $f_i : G \to \mathbb{R}$ komponente funkcije f. Tedaj je odvod $f'(x)$ linearna preslikava iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$, ki vsak stolpec $h \in \mathbb{R}^n$ pomnoži z matriko*

$$J_f(x) := \begin{bmatrix} (D_1f_1)(x) & \dots & (D_nf_1)(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ (D_1f_m)(x) & \dots & (D_nf_m)(x) \end{bmatrix}. \tag{0.1.4}$$

Torej $f'(x)h = J_f(x)h$.

Obratno, če obstajajo vsi parcialni odvodi D_jf_i in so zvezni na G, je f odvedljiva.

Matriko (0.1.4) imenujemo *Jacobijeva matrika* preslikave f v točki x. V skladu s prakso, da ne razlikujemo linearne preslikave iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$ od njene matrike v standardnih bazah, bomo matriko $J_f(x)$ ponavadi označili kar s $f'(x)$ ali pa z $(Df)(x)$.

Zgled 0.1.10. Izračunajmo odvod preslikave $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y) = (xe^{xy}, x^2-y^2, y\sin x).$$

Parcialna odvoda prve komponente $f_1(x,y) = xe^{xy}$ sta

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = (1+xy)e^{xy} \quad \text{in} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = x^2e^{xy}.$$

Ta dva odvoda sta v prvi vrstici Jacobijeve matrike preslikave f. Ko izračunamo še parcialne odvode preostalih dveh komponent, dobimo

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} (1+xy)e^{xy} & x^2e^{xy} \\ 2x & -2y \\ y\cos x & \sin x \end{bmatrix}.$$

Odvod v točki $(0,0)$, na primer, je enak

$$f'(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

TRDITEV 0.1.11. *Linearna kombinacija odvedljivih preslikav $f, g : G \to \mathcal{V}$ je odvedljiva in velja*

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

za vsak $x \in G$ in $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Če je $\mathcal{V} = \mathbb{R}^m$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ in so parcialni odvodi $D_j f_i$ in $D_j g_i$ zvezni, sledi trditev 0.1.11 iz izreka 0.1.9, saj so parcialna odvajanja linearne preslikave na funkcijah (ker to velja za običajno odvajanje skalarnih funkcij in je parcialni odvod le običajni odvod na eno od spremeljivk). V splošnem se da trditev 0.1.11 hitro dokazati iz definicije odvoda (na primer z uporabo zveze (0.1.1), kar pa bomo pustili za vajo.

0.1.3. Posredno odvajanje.

IZREK 0.1.12. *Naj bodo $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ in $\mathcal{W}$ evklidski (ali pa splošni normirani) prostori, G odprta množica v $\mathcal{U}$, H odprta množica v $\mathcal{V}$, $f : G \to H$ in $g : H \to \mathcal{W}$ pa odvedljivi preslikavi. Potem je odvedljiv tudi kompozitum gf in za vsak $x \in G$ velja*

$$(gf)'(x) = g'(f(x))f'(x). \tag{0.1.5}$$

Na desni strani formule (0.1.5) nastopa kompozitum dveh linearnih preslikav: $g'(f(x))$ in $f'(x)$, ki ga imamo lahko (ko gre za evklidske prostore) tudi za produkt Jacobijevih matrik.

DOKAZ IZREKA. Izberimo $x \in G$ ter označimo $y := f(x)$ in $k := f(x+h) - f(x)$. Potem je $f(x+h) = y + k$ in (ker je g odvedljiva)

$$g(f(x+h)) - g(f(x)) = g(y+k) - g(y) = g'(y)k + \|k\| o_1(k), \tag{0.1.6}$$

kjer je o_1 taka funkcija, da je $\lim_{k\to 0} o_1(k) = 0$. Ker je tudi f odvedljiva, je

$$k = f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \|h\| o_2(h),$$

kjer je $\lim_{h\to 0} o_2(h) = 0$. Ko vstavimo ta izraz za k v skrajno desno stran enakosti (0.1.6), dobimo

$$g(f(x+h)) - g(f(x)) = g'(y)f'(x)h + \|h\| g'(y) o_2(h) + \|f'(x)h + \|h\| o_2(h)\| o_1(k).$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} &\|g(f(x+h)) - g(f(x)) - g'(f(x))f'(x)h\| \le \\ &\qquad \|h\| \left[\|g'(y)\| \|o_2(h)\| + \|f'(x)\| \|o_1(k)\| + \|o_2(h)\| \|o_1(k)\| \right]. \end{aligned}$$

Ko gre h proti 0, gresta proti 0 tudi k in celotni izraz v oglatem oklepaju na desni strani gornje neenakosti, zato lahko sklenemo, da je preslikava gf odvedljiva v točki x in da je $(gf)'(x) = g'(f(x))f'(x)$. $\square$

V posebnem primeru, ko je $\mathcal{W} = \mathbb{R}$, je v izreku 0.1.12 g skalarna funkcija. Naj bo $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{V} = \mathbb{R}^m$ in označimo z $y_i = f_i(x)$ komponente funkcije f ter pišimo $z = g(y)$. Potem je

$$z = g(y_1, \ldots, y_m) = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

posredna funkcija spremenljivk x_j. Ker sta g in gf skalarni funkciji, sta odvoda $g'(y)$ in $(gf)'(x)$ vrstici

$$g'(y) = [\frac{\partial z}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial y_m}] \text{ in } (gf)'(x) = [\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}].$$

Ko napišemo še odvod $f'(x)$ kot Jacobijevo matriko $[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}]$, se enakost (0.1.5), napisana po komponentah, glasi:

$$\frac{\partial z}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial z}{\partial y_i}(f(x)) \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x).$$

To je *verižno pravilo*, ki ga je bralec najbrž spoznal že prej.

Naloge

1. Izračunaj odvod v točki $(1, 1, 1)$ preslikave $f(x, y, z) = (xyz, x^3 + y^3 + z^3, \sqrt{x^6 + y^6})$ na prostoru $\mathbb{R}^3$.

2. Pokaži: če obstaja $\nabla_u f(a)$, obstaja tudi $\nabla_{-u} f(a)$, kjer je $f : G \to \mathbb{R}$ funkcija na odprti množici $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in G$ in $u \in \mathbb{R}^n$.

3. Kakšno smer mora imeti enotski vektor $u \in \mathbb{R}^n$, da bo odvod $\nabla_u f(a)$ največji, kjer je f odvedljiva funkcija na $G \subseteq \mathbb{R}^n$ in a notranja točka iz G?

4. Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x, y) = g(\frac{x-y}{x+y})$, kjer je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija. Pokaži, da je tedaj

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

v vseh točkah zunaj premice $y = -x$.

5. Kako je z odvedljivostjo in obstojem parcialnih odvodov za funkcijo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = |xy|$?

6.**(Ta naloga presega okvir predpisane snovi.) Izračunaj normo odvoda preslikave

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y) = r(\sin x \cos y, \sin x \sin y, \cos x),$$

kjer je r konstanta.

7. (*Izrek o povprečni vrednosti odvoda*) Naj bo $G \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta podmnožica, $x, y \in G$ taki točki, da je celotna daljica $[x, y] := \{(1-t)x + ty :$

$0 \le t \le 1\}$ vsebovana v G, $f : G \to \mathbb{R}$ pa odvedljiva funkcija. Potem obstaja taka točka $z \in [a, b]$, da je

$$f(y) - f(x) = \langle \nabla f(z), y - x \rangle.$$

(Navodilo: uporabi klasični Lagrangeev izrek na skalarni funkciji $g(t) := f((1-t)x + ty) = f(x + t(y - x))$ $(t \in [0, 1])$.)

8. Pokaži, da izreka o povprečju iz prejšnje naloge ni mogoče posplošiti na vektorske funkcije: obstaja taka (neskončnokrat) odvedljiva funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ in taki točki $x, y \in \mathbb{R}$, da je $f(y) - f(x) \neq f'(\xi)(y - x)$ za vsak $\xi \in \mathbb{R}$. (Poskusi npr. funkcijo $f(t) = (t^2, t^3)$ in točki $x = 0$, $y = 1$.)

9. Če je G odprta podmnožica v $\mathbb{R}$ in sta $f, g : G \to \mathbb{R}^n$ odvedljivi preslikavi, je odvedljiva tudi funkcija $\phi(t) := \langle f(t), g(t) \rangle$ in velja

$$\phi'(t) = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle.$$

10.* Dokaži: če sta $f, g : G \to \mathbb{R}^n$ odvedljivi preslikavi, potem je odvedljiva tudi funkcija $\phi : G \to \mathbb{R}$, $\phi(x) := \langle f(x), g(x) \rangle$ in velja

$$\phi'(x) = (f'(x))^* g(x) + (g'(x))^* f(x),$$

kjer označuje * adjungirano preslikavo. To posplošuje rezultat prejšnje naloge.

11.** Bodita $L : G \to B(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ in $f : G \to \mathcal{V}$ odvedljivi preslikavi, kjer je G odprta podmnožica v $\mathcal{U}$. Dokaži, da je tedaj odvedljiva tudi preslikava $\phi : x \mapsto L(x)f(x)$ $(x \in G)$ in da za vsak $h \in \mathcal{U}$ velja

$$\phi'(x)h = (L'(x)h)f(x) + L(x)(f'(x)h).$$

12. Če je $f : G \to \mathbb{R}^n$ odvedljiva preslikava in $f(x) \neq 0$ za vsak $x \in G$, je odvedljiva tudi funkcija $x \mapsto \|f(x)\|$. Kako se izraža njen odvod?

13.* Izračunaj odvod preslikave $t \mapsto e^{tA}Be^{-tA}$ v točki $t = 0$, kjer sta A in B realni $n \times n$ matriki in $t \in \mathbb{R}$.

14. Določi odvod preslikave $T \mapsto T^2$ na prostoru $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Kaj pa je odvod preslikave $T \mapsto T^k$ za poljuben eksponent $k \in \mathbb{N}$?

15. Funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je *homogena stopnje* r, če je $f(tx) = t^r f(x)$ za vsaka $x \in \mathbb{R}^n$ in $t \in (0, \infty)$. Za odvedljivo homogeno funkcijo f stopnje r dokaži, da so njeni parcialni odvodi $D_j f$ homogene funkcije stopnje $r - 1$ in da je $f'(x)x = rf(x)$.

16.* Za odvedljivi preslikavi $f, g : G \to \mathbb{R}^3$ določi odvod preslikave $x \mapsto f(x) \times g(x)$, kjer označuje $\times$ vektorski produkt. (Navodilo: upoštevaj, da vektorsko množenje pomeni množenje z ustrezno antisimetrično matriko in antikomutativnost vektorskega produkta.)

17. Bodita $G \subseteq \mathcal{U}$ in $H \subseteq \mathcal{V}$ odprti podmnožici evklidskih prostorov $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$, $f : G \to H$ pa taka odvedljiva bijekcija, da je tudi inverzna preslikava f^{-1} odvedljiva. Pokaži, da je tedaj operator $f'(x)$ obrnljiv za vsak $x \in G$.