1. Riemannov integral

Kako bi določili ploščino ravninskega lika, omejenega z grafom nenegativne funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, abscisno osjo in premicama $x = a$, $x = b$?

Interval $[a, b]$ razdelimo na podintervale z delilnimi točkami

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots x_{n-1} < x_n = b. \tag{1.1}$$

Delitev intervala imenujemo tudi *particija* in označimo s P. Širina i-tega delilnega intervala $[x_{i-1}, x_i]$ je

$$\Delta_i x := x_i - x_{i-1}.$$

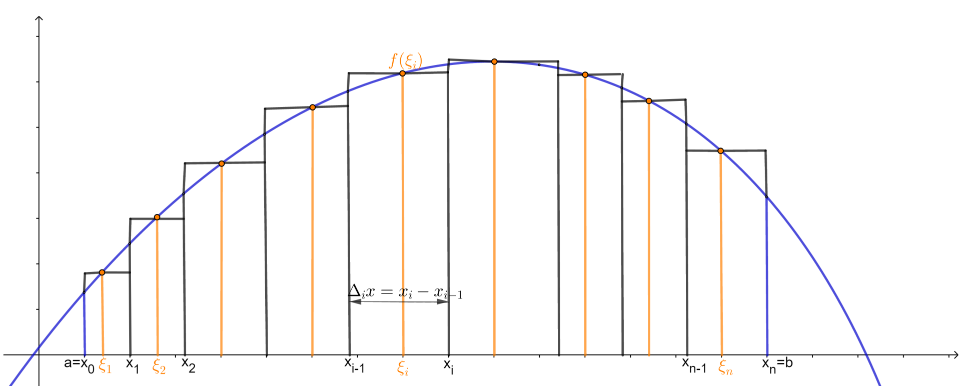
Maksimalno širino delilnih intervalov pri delitvi P bomo označili z Δ_P in imenovali *širina delitve* P, torej

$$\Delta_P = \max_{1 \le i \le n} \Delta_i x.$$

V vsakem delilnem intervalu izberimo poljubno točko, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Produkt $f(\xi_i)\Delta_i x$ pomeni ploščino pravokotnika z osnovnico $\Delta_i x$ in višino $f(\xi_i)$. Vsoto

$$S_P := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x, \tag{1.2}$$

imenujemo *Riemannova vsota* funkcije f pri delitvi P. Ta vsota je seveda odvisna tudi od izbire točk ξ_i, zato oznaka na levi strani enakosti (1.2) ni popolna. Ko jemljemo čedalje finejše particije, torej, ko gredo širine vseh delilnih intervalov proti 0, se zdi, da Riemannove vsote S_P konvergirajo proti iskani ploščini pod grafom funkcije.



Slika 1. Aproksimacija ploščine pod krivuljo v mejah od a do b z vsoto ploščin pravokotnikov, $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x$

Vendar je tukaj osnovno vprašanje, kako je ploščina definirana za splošne ravninske množice. Čeprav se nam morda zdi, da vsaki ravninski množici lahko pripišemo neko ploščino, se izkaže, da ni tako: obstajajo ravninske množice, ki nimajo nobene ploščine. Za definicijo ploščin likov pod grafi nenegativnih funkcij bomo tukaj vzeli kar limite Riemannovih vsot, vendar naslednji zgled pove, da obstoj teh limit ni očiten.

Zgled 1.1. Naj bo funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definirana takole:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{če je } x \in \mathbb{Q}; \\ 1, & \text{če je } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Če pri dani delitvi P izberemo na vseh delilnih intervalih $[x_{i-1}, x_i]$ za ξ_i racionalno točko, je $f(\xi_i) = 0$ za vse i in ustrezna Riemannova vsota je tedaj 0. Če pa na vseh delilnih intervalih izberemo ξ_i iracionalen, potem je $f(\xi_i) = 1$ za vse i, Riemannova vsota pa je tedaj

$$S_P = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = 1.$$

Ker lahko ti dve izbiri napravimo pri poljubno drobni delitvi P, ne obstaja skupna limita Riemannovih vsot.

Definicija 1.2. Delitev Q je *nadaljevanje delitve* P, če vsebuje vse delilne točke delitve P. To bomo zapisali kar kot $Q \supseteq P$.

Odslej v tem razdelku naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omejena funkcija in P delitev intervala $[a,b]$, kot zgoraj. Za vsak delilni interval $[x_{i-1}, x_i]$ označimo

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) \quad \text{in} \quad M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x).$$

Definicija 1.3. Vsoti

$$\underline{S}_P = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta_i x \quad \text{in} \quad \overline{S}_P = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta_i x$$

imenujemo *spodnja* in *zgornja Riemannova vsota.*

Očitno je vsaka Riemannova vsota funkcije f pri delitvi P med $\underline{S}_P$ in $\overline{S}_P$. Poglejmo, kaj se zgodi s spodnjo in zgornjo Riemannovo vsoto pri nadaljevanju delitve.

Lema 1.4. *Če je Q nadaljevanje delitve P, je*

$$\underline{S}_P \le \underline{S}_Q \le \overline{S}_Q \le \overline{S}_P. \tag{1.3}$$

Dokaz. Ker lahko vsako nadaljevanje delitve dobimo s postopnim dodajanjem po ene delilne točke, smemo predpostaviti, da se delitev Q razlikuje od P le v eni dodatni točki $t \in (x_{i-1}, x_i)$. Potem se spodnja Riemannova vsota $\underline{S}_Q$ razlikuje od $\underline{S}_P$ le v tem, da nastopa namesto člena $m_i \Delta_i x$ vsota dveh členov $m_{i,1}(t - x_{i-1}) + m_{i,2}(x_i - t)$, kjer smo označili

$$m_{i,1} = \inf_{x_{i-1} \le x \le t} f(x) \quad \text{in} \quad m_{i,2} = \inf_{t \le x \le x_i} f(x).$$

Ker je očitno $m_{i,1} \ge m_i$ in $m_{i,2} \ge m_i$ (saj se infimum funkcije pri prehodu na podinterval ne more zmanjšati), sledi, da velja

$$m_i \Delta_i x = m_i((t - x_{i-1}) + (x_i - t)) \le m_{i,1}(t - x_{i-1}) + m_{i,2}(x_i - t).$$

Torej je $\underline{S}_P \le \underline{S}_Q$. Dokaz neenakosti $\overline{S}_Q \le \overline{S}_P$ pa je podoben in ga prepuščamo bralcu. $\square$

Lema 1.5. *Za poljubni delitvi P in Q velja*

$$\underline{S}_P \leq \overline{S}_Q. \tag{1.4}$$

Dokaz. Naj bo R skupno nadaljevanje delitev P in Q (npr. $R = P \cup Q$). Po prejšnji lemi velja

$$\underline{S}_P \leq \underline{S}_R \leq \overline{S}_R \leq \overline{S}_Q.$$

□

Ta lema pove, da je množica vseh spodnjih Riemannovih vsot $\underline{S}_P$ (dane funkcije), ko P teče po vseh delitvah intervala $[a, b]$, navzgor omejena, zato obstaja njen supremum, ki ga bomo imenovali $\underline{S}$. Lema prav tako pove, da je množica vseh zgornjih Riemannovih vsot $\overline{S}_P$, ko teče P po vseh delitvah intervala $[a, b]$, navzdol omejena (namreč s katerokoli spodnjo Riemannovo vsoto dane funkcije), torej ima infimum, ki ga bomo označili z $\overline{S}$. Neposredna posledica leme je naslednja neenakost:

$$\underline{S}_P \leq \underline{S} \leq \overline{S} \leq \overline{S}_P, \tag{1.5}$$

ki velja za vsako delitev P.

Definicija 1.6. Omejena funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je *integrabilna* (*v Riemannovem smislu*), če za supremum spodnjih in infimum zgornjih njenih Riemannovih vsot velja enakost

$$\overline{S} = \underline{S}.$$

Tedaj to skupno vrednost imenujemo *integral funkcije f v mejah od a do b* in označimo z

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Ker so vse Riemannove vsote pri dani delitvi med spodnjo in zgornjo Riemannovo vsoto, je naslednja trditev evidentna.

Trditev 1.7. *Če je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna v Riemannovem smislu, potem njene Riemannove vsote $S_P = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i x$ konvergirajo proti $\int_a^b f(x)\, dx$, ko gre Δ_P proti 0. Natančneje: za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|S_P - \int_a^b f(x)\, dx| < \varepsilon$ za vsako Riemannovo vsoto $S_P = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i x$ pri vsaki taki delitvi P, da je $\Delta_P < \delta$.*

Izrek 1.8. *Vsaka zvezna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je integrabilna v Riemannovem smislu.*

Dokaz. Dokazati zadošča, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka delitev P intervala $[a, b]$, da je

$$\overline{S}_P - \underline{S}_P < \varepsilon, \tag{1.6}$$

saj od tod in iz (1.5) sledi, da je $\overline{S} - \underline{S} < \varepsilon$, in ker velja to za vsak $\varepsilon > 0$, mora biti $\overline{S} - \underline{S} = 0$, torej $\overline{S} = \underline{S}$.

Kot vemo, je vsaka zvezna funkcija na zaprtem intervalu enakomerno zvezna, kar pomeni, da obstaja tak $\delta > 0$, da za vsaka $x, t \in [a, b]$, ki zadoščata pogoju $|x - t|$

delta, velja $|f(x) - f(t)| < \varepsilon/(b-a)$. Če je torej delitev P tako drobna, da je širina vseh delilnih intervalov $[x_{i-1}, x_i]$ pod δ (se pravi $\Delta_P < \delta$), potem je $M_i - m_i \le \varepsilon/(b-a)$, zato

$$\overline{S}_P - \underline{S}_P = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta_i x < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

□

Ta izrek se da izboljšati, tako da natančno karakteriziramo vse funkcije, ki so integrabilne v Riemannovem smislu.

Definicija 1.9. Podmnožica $A \subseteq \mathbb{R}$ ima *mero* 0, če jo je za vsak $\varepsilon > 0$ mogoče pokriti s kakim zaporedjem odprtih intervalov I_j (se pravi, da je $A \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} I_j$), katerih vsota dolžin je pod ε. (To bomo zapisali kot $\sum_j |I_j| < \varepsilon$.)

Zgled 1.10. Vsaka končna množica $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ima mero 0, saj jo lahko pokrijemo z intervali $(x_j - \frac{\varepsilon}{4n}, x_j + \frac{\varepsilon}{4n})$.

Splošneje, tudi vsako zaporedje $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, \}$ ima mero 0. Okrog točke x_j lahko namreč vzamemo interval $(x_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+2}}, x_j + \frac{\varepsilon}{2^{j+2}})$ $(j = 1, \ldots, n)$. Vsi ti intervali skupaj očitno pokrivajo A, vsota njihovih dolžin pa je $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^{j+2}} = \frac{\varepsilon}{2}$.

Obstajajo podmnožice v $\mathbb{R}$, ki niso števne (pravzaprav imajo toliko elementov, kot je vseh realnih števil), a imajo mero 0. Tukaj ne bomo navedli nobenega takega zgleda.

Izrek 1.11. *Omejena funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je integrabilna v Riemannovem smislu natanko tedaj, ko ima množica vseh tistih točk, v katerih ni zvezna, mero* 0.

*********************** Naslednji dokaz lahko preskočite.

Zelo zgoščen oris dokaza. Naj bo N množica točk nezveznosti funkcije f.

V posebnem primeru, kadar se N da za vsak $\varepsilon > 0$ pokriti s končno mnogo odprtimi intervali I_j z vsoto dolžin pod ε, gledamo razliko med zgornjo in spodnjo Riemannovo vsoto pri vsaki taki delitvi P, ki med delilnimi točkami vsebuje tudi vsa krajišča intervalov I_j. Ta razlika je sestavljena iz členov dveh tipo: En tip predstavljajo členi, ki odgovarjajo tistim delilnim intervalom, ki so vsebovani v kakem intervalu I_j Prispevek teh členov je majhen, ker je vsota dolžin vseh intervalov I_j pod ε. (Omejen je z $C\varepsilon$, kjer je konstanta C razlika med supremumom in infimom funkcije f na intervalu $[a, b]$.) Drugi tip členov pa so tisti, katerih delilni intervali ne sekajo intervalov I_j. Prispevek le teh pa lahko ocenimo kot v dokazu prejšnjega izreka, saj je funkcija f enakomerno zvezna na množici $[a, b] \setminus \cup_j I_j$, ki je unija končno mnogo zaprtih intervalov. Pri dovolj drobni delitvi P je torej razlika $\overline{S}_P - \underline{S}_P$ tako majhna kot hočemo.

V splošnem pa moramo za vsak $x \in [a, b]$ najprej definirati funkcijo

$$\omega(x) = \inf_{\delta > 0} \left(\sup_{|t-x|<\delta} f(t) - \inf_{|t-x|<\delta} f(t) \right)$$

in opaziti, da je f zvezna v točki x natanko tedaj, ko je $\omega(x) = 0$. Nadalje je za vsak pozitiven c množica $N_c := \{x \in [a, b] : \omega(x) \ge c\}$ kompaktna (kar pomeni, da ima vsako zaporedje njenih elementov stekališče v njej): Ker je $N_c \subseteq N$, ima N_c mero 0. Ker pa je N_c kompaktna, je mogoče iz vsakega njenega pokritja z odprtimi intervali izbrati kako končno podpokritje. Zato sedaj lahko uporabimo sklepanje iz prejňjega odstavka; če izberemo dovolj majhen c, lahko (ker na komplementu množice N_c funkcija f le malo niha) dosežemo, da bo za dovolj drobno delitev P razlika med zgornjo in spodnjo Riemannovo vsoto tako majhna kot želimo.

Za dokaz v obratno smer pa opazimo, da morajo pri integrabilni funkciji f razlike $\overline{S}_P - \underline{S}_P$ konvergirati proti 0, ko gre Δ_P proti 0. To je mogoče le, če imajo vse množice N_c mero 0. Ker je množica točk nezveznosti funkcije f ravno unija $N = \cup_{j=1}^{\infty} N_{\frac{1}{j}}$, sledi (po krajšem razmisleku), da mora tudi N imeti mero 0. $\square$

Zgled 1.12. Izračunajmo po definiciji $\int_0^1 x^2\, dx$.

Zaradi lažjega računanja bomo razdelili interval $[0, 1]$ na enake dele, čeprav definicija integrala ne zahteva, da so deli enaki. Delilne točke so potem $\frac{i}{n}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, kjer je n število delilnih intervalov. Dolžina vsakega delilnega intervala je tedaj $\Delta_i x = \frac{1}{n}$. V vsakem od delilnih intervalov $[x_{i-1}, x_i] = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ izberimo za ξ_i kar desno krajišče, torej $\xi_i = \frac{i}{n}$. Riemanova vsota funkcije $f(x) = x^2$ pri tej delitvi intervala $[0, 1]$ je

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x = \sum_{i=1}^{n} (\frac{i}{n})^2 \frac{i}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3},$$

kjer smo uporabili znano srednješolsko formulo za vsoto kvadratov zaporednih naravnih števil. Da bo konvergirala dolžina $\frac{1}{n}$ delilnih intervalov proti 0, mora n konvergirati proti ∞, torej je

$$\lim_{\Delta_P \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

S tem smo izračunali, da je $\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$.

Ni jasno, kako bi iz definicije lahko računali integrale splošnejših funkcij od tiste iz prejšnjega zgleda. Zato bomo v naslednjem razdelku spoznali popolnoma drugačno metodo, ki temelji na povezavi integrala z odvodom. Še prej pa si oglejmo osnovne lastnosti integrala.

Trditev 1.13. *Bodita $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilni funkciji. Potem je integrabilna tudi funkcija $f + g$ in velja*

$$\int_a^b (f+g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx. \tag{1.7}$$

Nadalje je za vsako konstanto c funkcija cf integrabilna in velja

$$\int_a^b (cf)(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx. \tag{1.8}$$

Dokaz. Da je $f + g$ integrabilna funkcija, sledi iz izreka 1.11, mogoče pa je dokazati tudi direktno, z upoštevanjem neenakosti

$$\inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} (f+g)(x) \ge \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x) + \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i} g(x)$$

in

$$\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i}(f+g)(x)\le \sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f(x)+\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} g(x),$$

vendar bomo ta dokaz pustili za nalogo. Pokazali bomo le enakost (1.7). Po trditvi 1.7 imamo

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx=\lim_{\Delta_P\to 0}\sum_{i=1}^n (f+g)(\xi_i)\Delta_i x=\lim_{\Delta_P\to 0}[\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i x+\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta_i x]$$

$$=\lim_{\Delta_P\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta_i x+\lim_{\Delta_P\to 0}\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta_i x=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx.$$

Podobno dokažemo tudi enakost (1.8). □

Formuli (1.7) in (1.8) lahko združimo v eno:

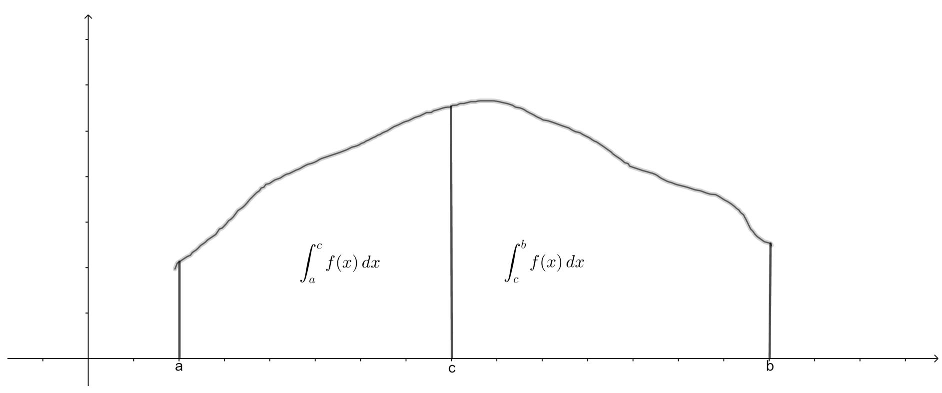
$$\int_a^b(\alpha f+\beta g)(x)\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx, \tag{1.9}$$

ki velja za poljubni konstanti α,β in integrabilni funkciji $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Trditev 1.14. *Naj bo $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ omejena funkcija in $c\in[a,b]$. Tedaj je f integrabilna na intervalu $[a,b]$ natanko tedaj, ko je integrabilna na obeh intervalih $[a,c]$ in $[c,b]$. Takrat velja*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx. \tag{1.10}$$

Dokaz. Izjava o integrabilnosti sledi hitro iz izreka 1.11, njen direktni dokaz pa bomo pustili za nalogo.



SLIKA 2. $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

Za dokaz formule (1.10) bomo spet uporabili trditev 1.7. Bodita $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ in $Q=\{x_n,x_{n+1},\ldots,x_m\}$ poljubni delitvi intervalov $[a,c]$ in $[c,b]$, kjer je $a=x_0<$

$x_1 < \ldots < x_n = c$ in $c = x_n < x_{n+1} < \ldots < x_m = b$. Potem je $P \cup Q$ delitev intervala $[a,b]$. Za poljubne $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ velja:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta_P \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x + \lim_{\Delta_Q \to 0} \sum_{i=n+1}^{m} f(\xi_i)\Delta_i x$$
$$= \lim_{\Delta_{P\cup Q} \to 0} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta_i x = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

Očitno je $\int_a^a f(x)\,dx = 0$. Če je $b < a$ definiramo

$$\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx.$$

To je v skladu s formulo (1.10), saj je po tej definiciji

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0 = \int_a^a f(x)\,dx.$$

Lahko se je prepričati, da velja formula (1.10) za poljubne $a, b, c \in \mathbb{R}$ (tudi če c ni med a in b).

Trditev 1.15. *Če sta $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ (kjer je $a < b$) taki integrabilni funkciji, da je $f(x) \leq g(x)$ za vsak $x \in [a,b]$, potem je*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx. \tag{1.11}$$

Dokaz. Za Riemannove vsote teh dveh funkcij velja

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x \leq \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta_i x.$$

Ko vzamemo na obeh straneh te neenakosti limito, ko gre Δ_P proti 0, sledi po trditvi 1.7 enakost (1.11). □

Če uporabimo to trditev na funkciji $|f|$, namesto g, dobimo $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$, kadar je $a \leq b$. Ko uporabimo to neenakost na funkciji $-f$, namesto f, dobimo še $-\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$. Torej velja:

Posledica 1.16. $|\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$, *če je $a \leq b$.*

Poseben primer trditve 1.15 dobimo, če vzamemo za funkcijo g konstanto, namreč zgornjo mejo M. Ker je $\int_a^b M\,dx = M(b-a)$, sledi, da je $\int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$. Podobno velja tudi $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx$, kjer je m spodnja meja funkcije f. Torej velja naslednja posledica:

Posledica 1.17. *Če je m spodnja, M pa zgornja meja integrabilne funkcije $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, je*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a),$$

kadar je $a \leq b$.

Iz te posledice lahko izpeljemo naslednji izrek.

Izrek 1.18. *(Izrek o povprečju) Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Obstaja tak $\xi \in [a, b]$, da je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \tag{1.12}$$

Dokaz. Če je $b = a$, je edina možnost $\xi = a$ in tedaj sta obe strani formule (1.12) enaki 0, zato smemo vzeti, da je $a < b$. Naj bo $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$ in $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$. Po posledici 1.17 velja

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M.$$

Ker zavzame zvezna funkcija f vsako vrednost med m in M, sledi od tod, da obstaja tak $\xi \in [a, b]$, da je

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}. \tag{1.13}$$

$\square$

Formula (1.13) pomeni, da funkcija f zavzame v točki ξ svojo *povprečno vrednost* na intervalu $[a, b]$.

Nalogi. 1. Dokažite neposredno (tj. brez uporabe izreka 1.11), da je vsota integrabilnih funkcij integrabila.

2. Dokažite, da je funkcija $|f|$ integrabilna, če je integrabilna f.

2. Povezava med integralom in odvodom

Za integrabilno funkcijo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si oglejmo funkcijo

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt. \tag{2.1}$$

Ker je x zgornja meja integrala v (2.1), smo morali integracijsko spremenljivko označiti drugače; imenovali smo jo t. F je torej integral od f, kot funkcija zgornje meje.

Trditev 2.1. *Če je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omejena integrabilna funkcija, je F zvezna.*

Dokaz. Pokazati moramo, da gre $F(x+h) - F(x)$ proti 0, ko gre h proti 0, in sicer za vsak $x \in [a, b]$. Po trditvi 1.14 imamo

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Naj bo $M = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|$. Z uporabo posledic 1.16 in 1.17 sledi, da je

$$|F(x+h) - F(x)| = |\int_x^{x+h} f(t)\,dt| \leq |\int_x^{x+h} |f(t)|\,dt| \leq |\int_x^{x+h} M\,dt| = M|h|.$$

Od tod je očitno, da gre $F(x+h) - F(x)$ proti 0, ko gre h proti 0. $\square$

Dospeli smo do najpomembnejšega izreka.

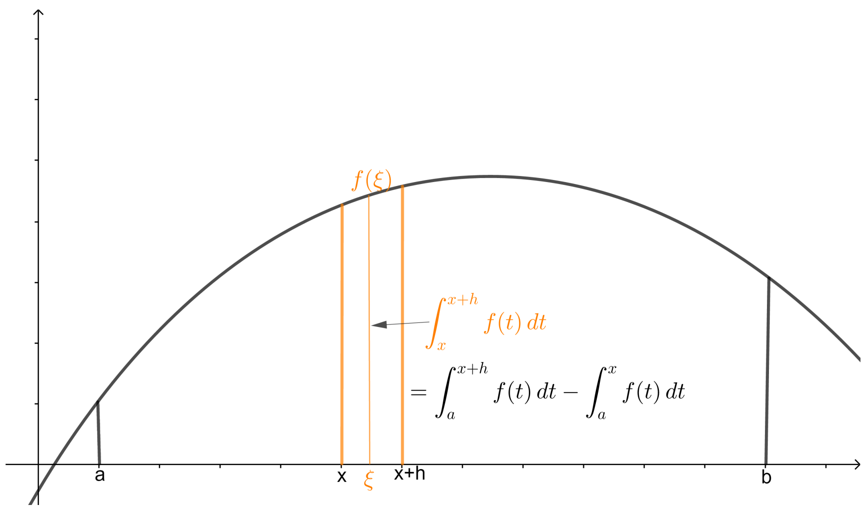
Izrek 2.2. *(Osnovni izrek integralskega računa) Za vsako zvezno funkcijo* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je funkcija* F*, ki je definirana z (2.1), odvedljiva v vsaki točki* $x \in [a,b]$ *(ko je* $x = a$ *ali pa* $x = b$*, sta tukaj mišljena odvod z desne oziroma leve) in velja*

$$F'(x) = f(x). \tag{2.2}$$

Dokaz. Kot v dokazu prejšnje trditve je

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Od tod sledi po izreku o povprečju, da obstaja tak $\xi \in [x, x+h]$, da velja:



SLIKA 3. Integral $\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ je ploščina rumeno obrobljenega "pravokotnika". Ko jo delimo z osnovnico h, dobimo povprečno "višino" $f(\xi)$, ki gre proti $f(x)$, ko gre h proti 0.

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = f(\xi). \tag{2.3}$$

Ko gre h proti 0, gre ξ proti x (saj je ξ vedno med x in $x+h$), zato gre $f(\xi)$ proti $f(x)$ (saj je f zvezna funkcija). Iz enakosti (2.3) zato sledi, da je $F'(x) = f(x)$. □

Poglejmo, zakaj nam osnovni izrek integralskega računa omogoča računanje integralov. Predpostavimo, da smo uspeli ugotoviti kako tako funkcijo G, da je njen odvod f, torej $G'(x) = f(x)$. Ker je tudi $F'(x) = f(x)$ za vse x, je $(F - G)' \equiv 0$, zato $F(x) - G(x) = C$, kjer je C konstanta. Ko vstavimo v to enakost $x = a$, dobimo $F(a) - G(a) = C$. Ker je $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$, to pomeni, da je $G(a) = -C$, in sledi

$$F(x) = G(x) - G(a).$$

Ko vstavimo v to formulo $x = b$, dobimo naslednjo zelo pomembno posledico:

Posledica 2.3. *Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, G pa taka funkcija, da je $G' = f$. Potem je*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a). \tag{2.4}$$

Definicija 2.4. Funkcijo G, ki zadošča pogoju $G' = f$, imenujemo antiodvod ali *nedoločeni integral funkcije* f in označimo kot

$$\int f(x)\,dx.$$

Dve funkciji, ki imata isti odvod, se lahko razlikujeta za konstanto, od tod ime "nedoločeni integral"; funkcija G, katere odvod je f, je namreč določena le do aditivne konstante natančno.

Enakost (2.4) ponavadi zapišemo kot

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(x)|_a^b,$$

kjer oznaka $G(x)|_a^b$ nakazuje, da moramo G izračunati najprej pri zgornji meji b nato pri spodnji meji a in odšteti.

Zgled 2.5. Ker je odvod funkcije $\frac{x^3}{3}$ enak x^2, je

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{x^3}{3}|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Računanje integralov se torej prevede na operacijo, nasprotno odvajanju. Zato si je primerno zapomniti antiodvode (tj. nedoločene integrale) najpogosteje nastopajočih elementarnih funkcij.

Zgledi (kjer je $a \neq 0$ konstanta):

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{če je } n \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C;$$

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} + C\ ; \quad \int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a} + C;$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} \quad (a \neq 0); \quad \int \operatorname{ch} ax\,dx = \frac{\operatorname{sh} ax}{a} + C, \quad \int \operatorname{sh} ax\,dx = \frac{\operatorname{ch} ax}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

Dve najosnovnejši metodi, ki pomagata pri računanju integralov, sta vpeljava nove spremenljivke in integriranje po delih.

2.1. **Vpeljava nove spremenljivke.** Iz pravila za posredno odvajanje sledi:

Trditev 2.6. *Če je $x = g(t)$, kjer je g odvedljiva funkcija, je*
$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt.$$

Dokaz. Označimo $F(x) = \int f(x)\,dx$ in $G(t) = F(g(t))$. Potem je $F'(x) = f(x)$ in (po pravilu za posredno odvajanje)
$$G'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t),$$
od koder sledi po definiciji nedoločenega integrala, da je $G(t) = \int f(g(t))g'(t)\,dt$. Sedaj imamo
$$\int f(x)\,dx = F(x) = F(g(t)) = G(t) = \int f(g(t))g'(t)\,dt.$$
□

Kako pa je z vpeljavo nove spremenljivke v določeni integral? Recimo, da spremenljivka t preteče interval $[\alpha, \beta]$ in da je $x = g(t)$, kjer je g odvedljiva funkcija na intervalu $[\alpha, \beta]$. Iz trditve 2.6 sledi, da je $\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$. Vendar pa je običajno situacija taka, da imamo podani meji a in b v integralu $\int_a^b f(x)\,dx$, ki ga hočemo izračunati in, ko vpeljemo novo spremenljivko t prek zveze $x = g(t)$, moramo ugotoviti meji α in β za spremenljivko t. Poiskati je treba torej taka α in β, da bo $g(\alpha) = a$ in $g(\beta) = b$. To je mogoče napraviti enolično, če g preslika kak interval $[\alpha, \beta]$ bijektivno na interval $[a, b]$. Tedaj je namreč $\alpha = g^{-1}(a)$ in $\beta = g^{-1}(b)$ ali pa $\alpha = g^{-1}(b)$ in $\beta = g^{-1}(a)$. Ker je g odvedljiva in s tem zvezna, je bijektivnost ekvivalentna strogi monotonosti. Če označimo $\vartheta = g^{-1}$, lahko trditev 2.6 za določene integrale formuliramo takole:

Trditev 2.7. *Naj bo $\vartheta : [a, b] \to [\vartheta(a), \vartheta(b)]$ odvedljiva monotona funkcija in $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Tedaj je*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\vartheta(a)}^{\vartheta(b)} f(\vartheta^{-1}(t))(\vartheta^{-1})'(t)\,dt.$$

Zgled 2.8. (i) V integrale oblike
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$
vpeljemo novo spremenljivko t prek zveze $t = f(x)$. Tedaj je namreč $dt = f'(x)\,dx$ in zato integral preoblikujemo v
$$\int \frac{dt}{t},$$
katerega vrednost je $\ln|t| + C$. Rezultat je torej $\ln|f(x)| + C$. Kot posebne primere imamo:
$$\int \frac{dx}{x+a}\,dx = \ln|x+a| + C,$$
$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C, \quad \int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C.$$

(ii) V integral

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

vpeljemo novo spremenljivko prek zveze $x = \sin t$, da se znebimo korena. Ker je tedaj $dx = \cos t\,dt$, dobimo tako

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C.$$

Ko se vrnemo na prvotno spremeljivko in upoštevamo, da je $\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2x\sqrt{1-x^2}$, dobimo rezultat

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

(iii) V integral

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$$

vpeljimo novo spremenljivko prek zveze $x = a\sin t$. Ker je $a\sin : [0,\frac{\pi}{2}] \to [0,a]$ monotona bijekcija, sledi

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = a^2[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4},$$

kjer smo v predzadnji enakosti uporabili prejšnji zgled.

Naloge. Izračunajte naslednje integrale:
1. $\int \cos(ax+b)\,dx$, kjer sta a in b konstanti.
2. $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$. (Namig: $1+x^2=t^2$, $t\,dt = x\,dx$.)
3. $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$. (Namig: $x = \operatorname{sh} t$.)
4. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$. (Namig: $x=\sin t$.)

2.2. **Integriranje po delih.** Iz odvoda produkta

$$(fg)' = f'g + fg'$$

sledi $f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$ oziroma:

Trditev 2.9. $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$.

.

Če označimo $u = f(x)$ in $v = g(x)$, je $du = f'(x)\,dx$, $dv = g'(x)\,dx$ in formulo iz prejšnje trditve lahko zapišemo kot

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{2.5}$$

Imenujemo jo formula za *integriranje po delih* ali *per partes*.

Zgled 2.10. (i) V integralu

$$I = \int (x^2+2)e^x\,dx$$

bomo vzeli $u = x^2 + 2$ in $dv = e^x\,dx$. Z integriranjem per partes dobimo

$$\int (x^2+2)e^x\,dx = (x^2+2)e^x - \int e^x 2x\,dx.$$

Sedaj moramo ponovno integrirati per partes in sicer naj bo tokrat $u = 2x$ in $dv = e^x\,dx$, da dobimo

$$I = (x^2+2)e^x - 2xe^x + 2\int e^x\,dx = (x^2-2x+2)e^x + C.$$

Na enak način bi izračunali vsak integral tipa $\int p(x)e^x\,dx$. Per partes bi morali integrirati tolikokrat, kolikor je stopnja polinoma p; na vsakem koraku bi se stopnja polinoma zmanjšala za 1.

(ii)V integralu

$$I = \int x^n \ln x\,dx$$

vzemimo $u = \ln x$ in $dv = x^n\,dx$. Potem je $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, če je $n \neq -1$, in $v = \ln|x|$, če je $n = -1$. Nadalje je $du = \frac{dx}{x}$ in integriranje po delih da

$$I = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{dx}{x}, & \text{če je } n \neq -1; \\ \ln|x|\ln x - \int \ln|x|\frac{dx}{x}, & \text{če je } n = -1. \end{cases}$$

Ker je funkcija ln definirana le za pozitivne x, je tukaj $\ln|x| = \ln x$ in, ko v integral $\int \ln x \frac{dx}{x}$ vpeljemo novo spremenljivko $t = \ln x$ ter ga izračunamo, sledi

$$I = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C, & \text{če je } n \neq -1; \\ \frac{\ln^2 x}{2} + C, & \text{če je } n = -1. \end{cases}$$

Na enak način bi lahko izračunali vsak integral tipa $\int p(x)\ln x\,dx$, kjer je p polinom.

(iii) Za izračun integrala

$$I = \int_0^1 \arcsin x\,dx$$

naj bo $u = \arcsin x$ in $dv = dx$. Torej je $v = x$ in

$$I = x\arcsin x|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

V zadnji integral vpeljemo novo spremenljivko $t = \sqrt{1-x^2}$, ki je monotona funkcija na intervalu $[0,1]$. Potem je $t^2 = 1 - x^2$, od koder dobimo z diferenciranjem $x\,dx = -t\,dt$ in sledi

$$I = \frac{\pi}{2} + \int_1^0 dt = \frac{\pi}{2} - 1.$$

(iv) V integral

$$I = \int e^{ax}\sin bx\,dx,$$

kjer sta a in $b \neq 0$ konstanti, vpeljimo $u = e^{ax}$ in $dv = \sin bx\,dx$. Potem je $v = -\frac{\cos bx}{b}$ in

$$I = -e^{ax}\frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

V zadnji integral vpeljimo $u = e^{ax}$ in $dv = \cos bx$, da dobimo

$$I = -\frac{e^{ax}}{b}\cos bx + \frac{a}{b}[e^{ax}\frac{\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx] = \frac{e^{ax}}{b^2}(a\sin bx - b\cos bx) - \frac{a^2}{b^2}I.$$

To je linearna enačba za neznanko I, iz katere izračunamo

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

Nalogi. 1. Izračunajte $\int_0^{\pi/4} e^x \cos x\,dx$.

2. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Integral

$$I_n = \int \cos^n x\,dx$$

integrirajte po delih tako, da vzamete $u = \cos^{n-1} x$ in $dv = \cos x\,dx$ ter nato v dobljenem integralu upoštevate zvezo $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Izpeljite na ta način rekurzivno formulo

$$I_n = \frac{1}{n}[(n-1)I_{n-2} + \cos^{n-1} x \sin x].$$

Izračunajte npr. I_5.

3. Integriranje nekaterih funkcij

Najlažji način integriranja je z uporabo računalniških programov za simbolno računanje, zato nam dandanes ni treba posvetiti toliko pozornosti tehnikam integriranja kot nekoč. Kljub temu pa je primerno poznati nekaj najosnovnejših metod.

3.1. **Integriranje racionalnih funkcij.** Racionalna funkcija je kvocient $\frac{p}{q}$ dveh polinomov, kjer smemo brez izgube splošnosti privzeti, da je vodilni koeficient polinoma q enak 1 (sicer delimo števec in imenovalec z vodilnim koeficientom polinoma q). Če je stopnja polinoma p večja ali enaka od stopnje polinoma q, najprej delimo: $\frac{p}{q} = k + \frac{r}{q}$. Tukaj je k polinom, r pa polinom, stopnje manjše od stopnje polinoma q. Ker polinoma k ni težko integrirati, se lahko posvetimo integralu $\int \frac{r}{q}\,dx$. To je spet integral racionalne funkcije, le da je tokrat stopnja števca manjša od stopnje imenovalca. Vprašanje je torej, kako izračunati integral oblike

$$\int \frac{p(x)}{q(x)},$$

kjer je stopnja polinoma p manjša od stopnje polinoma q in ima q vodilni koeficient 1. Oba polinoma naj imata realne koeficiente. Znano je, da tak polinom q lahko razstavimo kot

$$q(x) = (x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_k)^{m_k}(x^2+a_1x+b_1)^{n_1}\cdots(x^2+a_lx+b_l)^{n_l},$$

kjer so $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ vse realne ničle polinoma q, $m_1,\ldots,m_k$ njihove mnogokratnosti, kvadratni faktorji $x^2+a_1x+b_1,\ldots,x^2+a_lx+b_l$ pa nerazcepni (njihove diskriminante torej negativne) in njihove mnogokratnosti $n_1,\ldots,n_l$ naravna števila. Da se dokazati (vendar tega ne bomo storili tukaj, ker je to stvar algebre), da potem p/q lahko izrazimo kot

$$
\begin{aligned}
(3.1)\qquad \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_{1,1}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1,m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}} + \ldots \\
+ \frac{A_{k,1}}{x-\alpha_k} + \frac{A_{k,2}}{(x-\alpha_k)^2} + \ldots + \frac{A_{k,m_k}}{(x-\alpha_k)^{m_k}} + \ldots \\
+ \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2+a_1x+b_1} + \ldots + \frac{B_{1,n_1}x + C_{1,n_1}}{(x^2+a_1x+b_1)^{n_1}} + \ldots \\
+ \frac{B_{l,1}x + C_{l,1}}{x^2+a_lx+b_l} + \ldots + \frac{B_{l,n_l}x + C_{l,n_l}}{(x^2+a_lx+b_l)^{n_l}},
\end{aligned}
$$

kjer so konstante $A_{1,1}, \ldots, C_{l,n_l}$ neznane. Te konstante izračunamo tako, da obe strani enakosti (3.1) pomnožimo s q in izenačimo koeficiente dobljenih dveh polinomov, kar privede do sistema linearnih enačb z neznankami $A_{1,1}, \ldots, C_{l,n_l}$. Tak zapis racionalne funkcije imenujemo *razcep na parcialne ulomke*.

Zgled 3.1. (i) Racionalno funkcijo $\frac{x}{(x+2)^2(x-1)}$ bomo razstavili kot

$$\frac{x}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-1}.$$

Ko pomnožimo to enačbo z $(x+2)^2(x-1)$, dobimo

$$x = A(x+2)(x-1) + B(x-1) + C(x+2)^2. \tag{3.2}$$

Ko vstavimo v to enakost $x = 1$, dobimo $1 = C3^2$, torej je $C = \frac{1}{9}$. Ko pa vstavimo $x = -2$, dobimo $-2 = -3B$, torej $B = \frac{2}{3}$. Za izračun neznanke A bi sedaj lahko vstavili $x = 0$.

Drugi, nekoliko daljši, način je, da izenačimo koeficiente pred istimi potencami v polinomih na levi in desni strani enakosti (3.2). Koeficient pred x^2 na desni strani enakosti (3.2) je $A+C$, na levi pa 0, torej je $A+C = 0$. Ko izenačimo še koeficiente pred x in pred 1, dobimo na ta način sistem enačb

$$
\begin{aligned}
A + C &= 0 \\
A + B + 4C &= 1 \\
-2A - B + 4C &= 0.
\end{aligned}
$$

Njegova rešitev je $A = -\frac{1}{9}$, $B = \frac{2}{3}$, $C = \frac{1}{9}$. Torej imamo

$$\frac{x}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{-1}{9(x+2)} + \frac{2}{3(x+2)^2} + \frac{1}{9(x-1)}. \tag{3.3}$$

(ii) Racionalno funkcijo $\frac{x^4-x^3+5x^2+x+3}{(x+1)(x^2-x+1)^2}$, kjer je stopnja števca manjša od stopnje imenovalca in je kvadratni faktor x^2-x+1 nerazcepen (saj je njegova diskriminanta -3), poskusimo napisati kot

$$\frac{x^4-x^3+5x^2+x+3}{(x+1)(x^2-x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} + \frac{Dx+E}{(x^2-x+1)^2}. \tag{3.4}$$

Ko pomnožimo z $(x+1)(x^2-x+1)$, dobimo
(3.5)
$$x^4-x^3+5x^2+x+3 = A(x^2-x+1)^2+(Bx+C)(x+1)(x^2-x+1)+(Dx+E)(x+1).$$

Če vstavimo v to enakost $x=-1$, takoj dobimo, da je $9=3^2A$, torej $A=1$. Za izračun drugih konstant pa bomo izenačili koeficiente pred istimi potencami v polinomih na desni in levi strani enakosti (3.5). Koeficient pred x^4 na desni strani enakosti (3.5) je $A+B$, na levi strani pa 1, torej $A+B=1$. Ko izenačimo koeficiente še pred x^3, x^2, x in 1, dobimo naslednji sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned} A+B&=1\\ -2A+C&=-1\\ 3A+D&=5\\ -2A+B+D+E&=1\\ A+C+E&=3. \end{aligned}$$

Ker že vemo, da je $A=1$, lahko iz prvih štirih enačb takoj izračunamo $B=0$, $C=1$, $D=2$ in $E=1$, zadnja enačba pa lahko služi za kontrolo. Razcep (3.4) se sedaj glasi

$$.\frac{x^4-x^3+5x^2+x+3}{(x+1)(x^2-x+1)^2} = \frac{1}{x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{2x+1}{(x^2-x+1)^2} \tag{3.6}$$

Naloga. Razcepite na parcialne ulomke funkcijo

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)^3(x^2+x+1)^2}.$$

Ko smo racionalno funkcijo zapisali v obliki (3.1), moramo povedati le še, kako integriramo vse člene na desni strani formule (3.1). Za člene oblike $\frac{1}{x-\alpha}$ in $\frac{1}{(x-\alpha)^m}$ to že vemo: taka dva integrala izračunamo s vpeljavo nove spremenljivke $t=x-\alpha$ in dobimo

$$\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha|+C \text{ in } \int \frac{dx}{(x-\alpha)^m} = -\frac{1}{(m-1)(x-\alpha)^{m-1}}, \text{če je } m=2,3,\ldots.$$

Oglejmo si sedaj še člene oblike $\frac{Bx+C}{(x^2+ax+b)^n}$. Integral

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+ax+b)^n}\,dx$$

bomo najprej poenostavili tako, da bomo izločili del, v katerem bo števec odvod kvadratne funkcije v imenovalcu:

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+ax+b)^n}\,dx = \frac{B}{2}\int \frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^n}\,dx + \int \frac{C-a\frac{B}{2}}{(x^2+ax+b)^n}\,dx.$$

Prvi integral na desni lahko izračunamo z novo spremenljivko $t=x^2+ax+b$, saj ga to preoblikuje v $\int \frac{dt}{t^n}$. Tako moramo sedaj obravnavati le še integral

$$\int \frac{dx}{(x^2+ax+b)^n}.$$

Zapišemo ga lahko kot

$$\int \frac{dx}{[(x+\frac{a}{2})^2 + b - \frac{a^2}{4}]^n}, \tag{3.7}$$

pri čemer je $b - \frac{a^2}{4} > 0$, saj je diskriminanta $a^2 - 4b$ kvadratne funkcije $x^2 + ax + b$ po predpostavki negativna. Torej lahko zapišemo $b - \frac{a^2}{4} = c^2$ za kak pozitiven $c \in \mathbb{R}$ in potem preoblikujemo integral (3.7) v

$$\frac{1}{c^{2n}} \int \frac{dx}{[(\frac{x+\frac{a}{2}}{c})^2 + 1]^n}. \tag{3.8}$$

V ta integral vpeljemo spremenljivko $t = \frac{x+\frac{a}{2}}{c}$, kar ga preoblikuje v konstanten večkratnik integrala

$$I_n := \int \frac{dt}{[t^2+1]^n}. \tag{3.9}$$

Če je $n = 1$, je integral v (3.9) enak $I_1 = \operatorname{arctg} t + C$. Za $n = 2, 3, \ldots$ pa ravnamo takole:

$$I_n = \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^n}\, dt - \int \frac{t^2}{(t^2+1)^n}\, dt = I_{n-1} - \int t \frac{t}{(t^2+1)^n}\, dt.$$

Zadnji integral bomo izračunali per partes in sicer naj bo $u = t$ in $dv = \frac{t\,dt}{(t^2+1)^n}$. Potem je $v = \int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^n} = -\frac{1}{2(n-1)} \frac{1}{(t^2+1)^{n-1}}$ in sledi

$$\begin{aligned} I_n &= I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dt}{(t^2+1)^{n-1}} \\ &= I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}. \end{aligned}$$

Tako smo izpeljali rekurzivno formulo

$$I_n = [1 - \frac{1}{2(n-1)}] I_{n-1} + \frac{t}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} \tag{3.10}$$

iz katere lahko postopoma izračunamo vse I_n. Npr.

$$I_2 = [1 - \frac{1}{2}] I_1 + \frac{t}{2(t^2+1)} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)}. \tag{3.11}$$

Zgled 3.2. Izračunajmo integral iz zgleda 3.1(ii), tj. (glejte (3.6))

$$\int \frac{x^4 - x^3 + 5x^2 + x + 3}{(x+1)(x^2-x+1)^2}\, dx = \int \frac{1}{x+1}\, dx + \int \frac{1}{x^2-x+1}\, dx + \int \frac{2x+1}{(x^2-x+1)^2}\, dx.$$

Prvi integral na desni je $\ln|x+1|$, drugi pa je

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{[(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]} &= \frac{4}{3} \int \frac{dx}{(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}})^2 + 1} \\ &= \frac{4}{3} \int \frac{dx}{(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2 + 1}, \quad (t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}},\ dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\, dt) \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} t = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Izračunati moramo le še

$$\int \frac{2x+1}{(x^2-x+1)^2}\, dx,$$

kar po gornjih napotkih napišemo kot

$$\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}\, dx + 2 \int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2},$$

saj substitucija $t = x^2 - x + 1$ preoblikuje prvega od teh dveh integralov v $\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x^2-x+1}$. Preostane še

$$2 \int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2} = 2 \int \frac{dx}{[(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]^2} = \frac{32}{9} \int \frac{dx}{[\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + 1]^2}$$

$$= \frac{32}{9} \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} \quad (t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}})$$

$$= \frac{16\sqrt{3}}{9} I_2,$$

kjer je I_2 podan s (3.11), torej

$$I_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\frac{2x-1}{\sqrt{3}}}{2\frac{4x^2-4x+1}{3} + 2}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{8} \frac{2x-1}{(x^2-x+1)}.$$

Tako dobimo

$$2 \int \frac{dx}{(x^2-x+1)^2} = \frac{8\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} \frac{2x-1}{x^2-x+1}.$$

Ko združimo vse te delne rezultate, dobimo končno

$$\int \frac{x^4 - x^3 + 5x^2 + x + 3}{(x+1)(x^2-x+1)^2}\, dx$$

$$= \ln|x+1| + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{8\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{2x-1}{x^2-x+1} + C$$

$$= \ln|x+1| + \frac{14\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{4x-5}{3(x^2-x+1)} + C.$$

Naloge. Izračunajte naslednje integrale:
1. $\int \frac{x\, dx}{(x+2)^2(x-1)}$.
2. $\int \frac{x^3+5x^2+9x+5}{x^2+3x+1}\, dx$.
3. $\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}\, dx$.
4. $\int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}\, dx$.

3.2. **Integrali trigonometrijskih funkcij.** (i) Integrale tipa $\int \sin ax \cos bx\, dx$ izračunamo z uporabo formule $\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x]$. Če je $b \neq \pm a$, sledi od tod

$$\int \sin ax \cos bx\, dx = -\frac{1}{2}[\frac{\cos(a-b)x}{a-b} + \frac{\cos(a+b)x}{a+b}].$$

Če pa je $b = \pm a$, imamo

$$\int \sin ax \cos ax\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2ax\, dx = -\frac{\cos 2ax}{4a} + C, \text{ kadar je } a \neq 0.$$

Podobno izračunamo integrale

$$\int \sin ax \sin bx\, dx \quad \text{in} \quad \int \cos ax \cos bx\, dx$$

z uporabo formul $\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$, $\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]$.

(ii) Pri integralih tipa $\int \cos^m x \sin^n x\, dx$, kjer sta m in n naravni števili, moramo ločiti dve možnosti. (1) Vsaj eno od števil m in n je liho; recimo, da je m liho, $m = 2k+1$. Tedaj v integral

$$\int \cos^{2k+1} x \sin^n x\, dx = \int \sin^n x (\cos^2 x)^k \cos x\, dx$$

vpeljemo novo spremenljivko $t = \sin x$, da dobimo

$$\int t^n (1-t^2)^k\, dt,$$

kar je integral polinoma, ki ga je lahko izračunati.

(2) Obe števili m in n sta sodi, torej $m = 2k$, $n = 2l$. Tedaj je

$$\int \cos^{2k} x \sin^{2l} x\, dx = \int (\frac{1+\cos 2x}{2})^k (\frac{1-\cos 2x}{2})^l\, dx.$$

Ko razvijemo $(1+\cos 2x)^k$ in $(1-\cos 2x)^l$ po binomski formuli in zmnožimo, dobimo vsoto integralov oblike $\int \cos^p 2x\, dx$. Za lihe $p = 2q+1$ lahko take integrale izračunamo kot v točki (1): $\int \cos^{2q+1} 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \cos^{2q} 2x\, d(\sin 2x) = \frac{1}{2}\int (1-t^2)^q\, dt$. Za sode $p = 2q$ pa je

$$\int \cos^p 2x\, dx = \int (\cos^2 2x)^q\, dx = \int (\frac{1+\cos 4x}{2})^q\, dx.$$

Ko razvijemo $(1+\cos 4x)^q$ po binomski formuli, dobimo kombinacijo integralov oblike $\int \cos^j 4x\, dx$, kjer je $j \leq q < p$. Le te potem obravnavamo na enak način. Ker se v tem postopku eksponenti zmanjšujejo, prej ali slej prispemo do cilja.

Zgled 3.3. (i) V integral $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx$ vpeljemo $t = \sin x$, da dobimo $\int t^3(1-t^2)\, dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6}{6} + C$.

(ii) $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int (\frac{\sin 2x}{2})^2\, dx = \frac{1}{8}(1-\cos 4x)\, dx = \frac{1}{8}(x - \frac{\sin 4x}{4}) + C$.

Naloga. Izračunajte $\int \cos^4 x\, dx$ in $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\, dx$.

Integral tipa

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx, \tag{3.12}$$

kjer je R racionalna funkcija dveh spremenljivk, je vedno mogoče prevesti na integral navadne racionalne funkcije s substitucijo

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Tedaj je namreč

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

in podobno

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Nadalje je $x = 2\operatorname{arctg} t$ in od tod $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Ko vse to upoštevamo v integralu (3.12), dobimo

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx = \int R\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\frac{2dt}{1+t^2},$$

kar je integral racionalne funkcije. Vendar pa je ta postopek precej zamuden, zato ga raje prepustimo računalnikom. Za zgled lahko bralec na ta način izračuna npr. integral

$$\int \frac{\cos x\, dx}{1+\sin x},$$

ki ga je seveda mogoče mnogo lažje izračunati s substitucijo $t = \sin x$.

3.3. **Integrali oblike $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx$.** Ker je

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{|a|}\sqrt{\pm x^2 \pm bx \pm c},$$

lahko take integrale prevedemo na enega od tipov

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+b_1x+c_1}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b_1x+c_1}}. \tag{3.13}$$

Kvadratno funkcijo pod korenom prvega od teh integralov lahko zapišemo kot $-(x-\frac{b_1}{2})^2 + \frac{b_1^2}{4} + c_1$. Če je $c_1 + \frac{b_1^2}{4} \leq 0$, je pod korenom v integralu negativna funkcija, zato koren ni realen in nam tega integrala tukaj ni treba obravnavati. Če pa je število $\frac{b_1^2}{4} + c_1$ pozitivno, ga lahko zapišemo kot d^2 za kak pozitiven d in tedaj je $-x^2 + b_1x + c_1 = d^2[-(\frac{x-\frac{b_1}{2}}{d})^2 + 1]$. Tedaj substitucija $t = \frac{x-\frac{b_1}{2}}{d}$ reducira prvi integral v (3.13) na $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t$.

Zgled 3.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4[\frac{41}{64}-(x+\frac{3}{8})^2]}}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{\frac{41}{64}-u^2}} \quad (u = x + \frac{3}{8})$$

$$= \frac{1}{2}\frac{8}{\sqrt{41}}\int \frac{du}{\sqrt{1-(\frac{8u}{\sqrt{41}})^2}} = \frac{4}{\sqrt{41}}\frac{\sqrt{41}}{8}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad (t = \frac{8u}{\sqrt{41}},\ du = \frac{\sqrt{41}}{8}\,dt)$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin t + C = \frac{1}{2}\arcsin\frac{8x+3}{\sqrt{41}} + C.$$

Kvadratno funkcijo pod korenom drugega od integralov v (3.13) lahko zapišemo kot $(x+\frac{b_1}{2})^2+c_1-\frac{b_1^2}{4}$. Kadar je $c_1-\frac{b_1^2}{4}>0$ (kar pomeni, da ta kvadratna funkcija nima realnih ničel), lahko zapišemo $c_1-\frac{b_1^2}{4}=d^2$ za kak $d>0$ in tedaj je

$$x^2+b_1x+c_1 = (x+\frac{b_1}{2})^2+d^2 = d^2[1+(\frac{x+\frac{b_1}{2}}{d})^2].$$

Zato lahko tedaj s substitucijo $t=\frac{x+\frac{b_1}{2}}{d}$ reduciramo prvi integral v (3.13) na integral $\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \operatorname{arsh} t + C = \ln(t+\sqrt{1+t^2})+C$.

Zgled 3.5. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}}$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(\frac{x+1}{2})^2+1}} = \int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \quad (t=\frac{x+1}{2})$$

$$= \ln(t+\sqrt{t^2+1})+C = \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})+C_1,$$

kjer je $C_1 = C-\ln 2$.

Preostala je še možnost, da za koeficiente kvadaratne funkcije pod korenom drugega integrala v (3.13) velja $c_1-\frac{b_1^2}{4}\le 0$, kar pomeni, da ima realni ničli, imenujmo ju x_1, x_2. Tedaj lahko zapišemo

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+b_1x+c_1}} = \int\frac{dx}{\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}}.$$

Če je $x_2=x_1$, se lahko znebimo korena in integral je tedaj kar $\ln|x-x_1|$. Zato vzemimo sedaj, da je $x_2\ne x_1$. Tedaj substitucija $t=\frac{x-x_2}{x-x_1}$ poenostavi integral.

Zgled 3.6. Vpeljimo v integral

$$I = \int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}\,dx$$

novo spremenljivko $t=\frac{x-2}{x-1}$, torej $x=\frac{t-2}{t-1}$ in $dx=\frac{dt}{(t-1)^2}$. Nadalje je $\sqrt{(x-1)(x-2)} = \sqrt{t(x-1)^2} = \sqrt{t}|x-1| = \frac{\sqrt{t}}{|t-1|}$. Za $t\ge 1$ dobimo tako

$$I = \int\frac{dt}{\sqrt{t}(t-1)}.$$

V ta integral vpeljemo $t=s^2$, da dobimo

$$I = 2\int\frac{ds}{(s-1)(s+1)} = \int[\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}]\,ds = \ln|\frac{s-1}{s+1}|+C$$

$$= \ln|\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1}| + C = \ln|\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}}| + C$$
$$= \ln|2x-3-2\sqrt{x^2-3x+2}| + C.$$

Na koncu omenimo, da ni mogoče integrala vsake elementarne funkcije izraziti z elementarnimi funkcijami. Npr. $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ je nova funkcija, imenovana *integralski sinus*. Prav tako integrala $\int \frac{e^x}{x}\, dx$ ni mogoče izraziti z elementarnimi funkcijami.

4. Izlimitirani integrali

4.1. Integrali oblike $\int_a^\infty f(x)\, dx$.

Definicija 4.1. Naj bo $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ funkcija, ki je integrabilna na vsakem končnem intervalu $[a, b]$, kjer je $a < b$. Če obstaja limita

$$\int_a^\infty f(x)\, dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx \tag{4.1}$$

in je končna, pravimo, da je integral $\int_a^\infty f(x)\, dx$ *konvergenten*, v nasprotnem primeru pa, da je *divergenten*. Podobno definiramo tudi $\int_{-\infty}^b f(x)\, dx$ za funkcijo $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$, ki je integrabilna na vsakem intervalu $[a, b]$ za $a < b$.

Zgled 4.2. (i) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^r} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^r} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{(1-r)x^{r-1}}|_1^b$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{(1-r)b^{r-1}} - \frac{1}{1-r} = \begin{cases} \frac{1}{r-1}, & \text{če je } r > 1, \\ \infty, & \text{če je } r < 1. \end{cases}$$

Ker je tudi

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty,$$

je integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^r}$ konvergenten natanko tedaj, ko je $r > 1$, in takrat je njegova vrednost $\frac{1}{r-1}$.

(ii) Za katere $c \in \mathbb{R}$ konvergira integral

$$I = \int_0^\infty e^{-cx}\, dx?$$

Za $c \neq 0$ imamo

$$I = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-cx}\, dx = -\frac{1}{c} \lim_{b\to\infty} e^{-cx}|_0^b = \frac{1}{c} \lim_{b\to\infty} (1 - e^{cb}) = \begin{cases} \frac{1}{c}, & \text{če je } c > 0; \\ \infty, & \text{ce je } c < 0. \end{cases}$$

Za $c = 0$ pa je $I = \int_0^\infty dx = \infty$. Torej integral konvergira natanko tedaj, ko je $c > 0$, in tedaj je njegova vrednost $I = \frac{1}{c}$.

(iii)$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} x|_0^b = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}$.

Naslednji izrek je analogen Cauchyevemu kriteriju za konvergenco vrst. V njem in njegovih posledicah bomo molče predpostavili, da je funkcija f integrabilna na vsakem končnem intervalu $[a, b]$, kjer bo a fiksen in $b > a$, $b \in \mathbb{R}$.

Izrek 4.3. *Integral*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \tag{4.2}$$

je konvergenten natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ *obstaja tak* $M \in \mathbb{R}$*, da je*

$$|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx| < \varepsilon \quad \textit{za vsaka } b_2 > b_1 \geq M. \tag{4.3}$$

Dokaz. Predpostavimo, da je integral konvergenten in naj bo $I = \int_a^\infty f(x)\,dx$. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da je

$$|\int_a^b f(x)\,dx - I| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall b \geq M.$$

Če sta torej $b_2 > b_1 \geq M$, potem je

$$|\int_a^{b_1} f(x)\,dx - I| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{in} \quad |\int_a^{b_2} f(x)\,dx - I| < \frac{\varepsilon}{2},$$

od koder sledi

$$|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx| = |\int_a^{b_2} f(x)\,dx - \int_a^{b_1} f(x)\,dx| = |(\int_a^{b_2} f(x)\,dx - I) + (I - \int_a^{b_1} f(x)\,dx)|$$

$$\leq |\int_a^{b_2} f(x)\,dx - I| + |\int_a^{b_1} f(x)\,dx - I| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Predpostavimo sedaj še obratno, da je izpolnjen pogoj (4.3). Potem je zaporedje števil

$$I_n := \int_a^{a+n} f(x)\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Cauchyevo, saj za $n > m \geq M - a$ velja

$$|I_n - I_m| = |\int_a^{a+n} f(x)\,dx - \int_a^{a+m} f(x)\,dx| = |\int_{a+m}^{a+n} f(x)\,dx| < \varepsilon.$$

Zato je zaporedje (I_n) konvergentno, označimo z I njegovo limito. Pokazali bomo, da je $\lim_{b\to\infty} f(x)\,dx = I$, torej, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $A \in \mathbb{R}$, da velja $|\int_a^b f(x)\,dx - I| < \varepsilon$ za vse $b \geq A$. Ker zaporedje (I_n) konvergira k I, obstaja tak $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, da je

$$|I_n - I| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{če je } n \geq n_\varepsilon. \tag{4.4}$$

Po pogoju (4.3) (uporabljenem za $\frac{\varepsilon}{2}$ namesto ε) obstaja tak $N \in \mathbb{R}$, da je

$$|\int_n^b f(x)\,dx| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{kakor hitro je } b > n \geq N. \tag{4.5}$$

Izberimo poljuben $A \geq \max\{n_\varepsilon, N\}$. Potem za $b \geq A$ veljata obe relaciji (4.4) in (4.5), torej tudi

$$|\int_a^b f(x)\,dx - I| = |(\int_a^n f(x)\,dx - I) + \int_n^b f(x)\,dx| \leq |I_n - I| + |\int_n^b f(x)\,dx| < \varepsilon.$$

$\square$

Definicija 4.4. Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ imenujemo *absolutno konvergenten*, če konvergira integral

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx.$$

Konvergenten integral, ki ni absolutno konvergenten, imenujemo pogojno konvergeneten.

Trditev 4.5. *Absolutno konvergenten integral je konvergenten.*

Dokaz. Če je integral $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ konvergenten, po izreku 4.3 za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da za vsaka $b_2 > b_1 \geq M$ velja $\int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx < \varepsilon$. Tedaj velja tudi

$$|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx| \leq \int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx < \varepsilon,$$

zato je po izreku 4.3 integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergenten. □

Zgled 4.6. Pokazali bomo, da je integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \tag{4.6}$$

pogojno konvergenten. Najprej pokažimo, da ni absolutno konvergenten. Za poljubna naravna $n > m$ je

$$\begin{aligned}\int_{m\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx &= \sum_{k=m}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \\ \geq \sum_{k=m}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}\,dx &= \sum_{k=m}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi},\end{aligned}$$

kjer smo uporabili, da je $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{(k+1)\pi}$ za vse $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$ in $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,dx = \int_0^\pi \sin x\,dx = 2$. Ker harmonična vrsta divergira, so vsote $\sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k+1}$ poljubno velike, če je n ($n > m$) dovolj velik, pri še tako velikem m, zato gornja ocena pove, da ne more biti izpolnjen pogoj (4.3) iz izreka 4.3, torej integral (4.6) ni absolutno konvergenten.

Po drugi strani pa je

$$\int_{m\pi}^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{k=m}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx, \tag{4.7}$$

kjer je zadnja vsota del alternirajoče vrste

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

katere členi padajo po absolutni vrednosti proti 0, kot bomo pokazali. Ker je taka vrsta konvergentna, gre izraz (4.7) proti 0, ko gre m proti ∞ (in je $n > m$), zato sedaj ni težko videti, da integral (4.6) zadošča pogoju (4.4) in je torej konvergenten. Pokazati moramo torej le še, da je $|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx| \geq |\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx|$ in, da ti integrali konvergirajo proti 0. Na intervalu $(k\pi, (k+1)\pi)$ ima funkcija sin konstanten predznak; recimo, da je pozitiven (kar pomeni, da je k sodo število in je na intervalu $((k+1)\pi, (k+2)\pi)$ funkcija sin negativna). Potem je

$$|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx \geq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{(k+1)\pi}\, dx = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

$$= \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \frac{-\sin x}{(k+1)\pi}\, dx \geq \int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = |\int_{(k+1)\pi}^{(k+2)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx|.$$

Podobno bi dokazali tudi za lihe k. Da gredo členi $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx$ proti 0, pa sledi iz ocene

$$|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx| \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \leq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{k\pi}\, dx = \frac{2}{k\pi}.$$

Trditev 4.7. *Če je $|f(x)| \leq g(x)$ za vsak $x \in [a, \infty)$ (kjer sta funkciji f in g integrabilni na intervalu $[a, b]$ za vsak končen $b > a$) in je integral $\int_a^\infty g(x)\, dx$ konvergenten, potem je integral $\int_a^\infty f(x)\, dx$ absolutno konvergenten.*

Dokaz. Iz ocene $\int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\, dx \leq \int_{b_1}^{b_2} g(x)\, dx$, ki velja za poljubna $b_2 > b_1$, in konvergentnosti integrala $\int_a^\infty g(x)\, dx$ sledi po izreku 4.3, da je tudi integral $\int_a^\infty |f(x)|\, dx$ konvergenten. □

4.2. **Integrali $\int_a^b f(x)\, dx$, kje funkcija f ni omejena.**

Definicija 4.8. Če je funkcija f integrabilna na vsakem podintervalu $[a, c]$ intervala $[a, b)$ $(c \in [a, b))$, in f v točki b morda niti ni definirana, lahko definiramo

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx,$$

kadar ta limita obstaja. Takrat, kadar ta limita obstaja in je končna, pravimo, da je integral $\int_a^b f(x)\, dx$ *konvergenten*, v nasprotnem primeru pa *divergenten*. (Tukaj pomeni oznaka $c \to b^-$, da gre c proti b z leve strani, torej $c < b$)

Podobno lahko definiramo

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\, dx$$

za funkcijo $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, ki je integrabilna na vsakem podintervalu $[c, b]$ intervala $(a, b]$. Tudi pojem absolutno konvergentnega integrala lahko vpeljemo v tem kontekstu na očiten način in dokažemo trditve, analogne tistim iz prejšnjega podrazdelka za integrale tipa $\int_a^\infty f(x)\, dx$. Vendar bomo to prepustili bralcem. Oglejmo si le zgleda.

Zgled 4.9. (i) $\int_0^1 \frac{1}{x^r}\, dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{x^r}\, dx = \lim_{c \to 0^+} \frac{1}{(1-r)x^{r-1}}|_c^1$

$$= \lim_{c \to 0^+} [\frac{1}{1-r} - \frac{1}{(1-r)c^{r-1}}] = \begin{cases} \frac{1}{1-r}, & \text{če je } r < 1; \\ \infty, & \text{če je } r > 1. \end{cases}$$

Ker je tudi $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \ln x|_0^1 = \infty$, je integral $\int_0^1 \frac{1}{x^r}\,dx$ konvergenten natanko tedaj, ko je $r < 1$. Takrat je njegova vrednost $\frac{1}{1-r}$.

(ii) $\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 [x\ln x - x]_c^1 = \lim_{-c\to 0^+}(c\ln c - 1) = -1$. Tukaj smo uporabili dejstvo, da je $\lim_{c\to 0^+} c\ln c = 0$, ki sledi npr. z vpeljavo nove spremenljivke $t = -\ln c$:

$$\lim_{c\to 0^+} c\ln c = \lim_{t\to\infty} e^{-t}t = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{1+t+\frac{t^2}{2}+\ldots} = 0.$$

Pri tem zadnja enakost sledi iz ocene $|\frac{t}{1+t+\frac{t^2}{2}+\ldots}| \leq |\frac{t}{\frac{t^2}{2}}| = \frac{2}{|t|}$.

Naloge. 1. Izračunajte $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,dx$.

2. Naj bo $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ omejena zvezna funkcija. Dokažite, da je integral $\int_0^\infty \frac{g(x)}{1+x^3}\,dx$ absolutno konvergenten.

3. Ali je integral $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$ konvergenten?

4. Naj polinom q nima nobene ničle na poltraku $[0,\infty)$ polinom p pa naj ima vsaj za 2 nižjo stopnjo od polinoma q. Dokažite, da je tedaj integral $\int_0^\infty \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ konvergenten.

5. Kako je s konvergentnostjo integrala $\int_0^1 \ln^r x\,dx$?

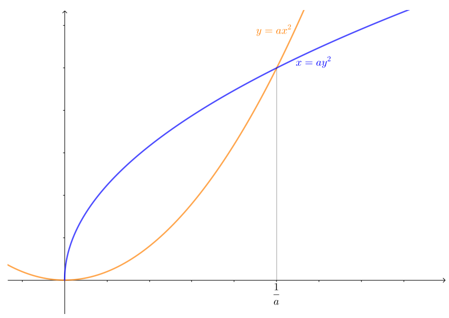
6. Za katere a je konvergenten integral $\int_{-\infty}^0 2^{ax}\,dx$?

7. Ali je integral $\int_1^\infty \frac{dx}{\ln x}$ konvergenten?

5. Uporaba integrala

5.1. **Ploščine.** Integral lahko uporabimo za izračun ploščin ravninskih likov, ki niso nujno omejeni z grafom ene same funkcije in tremi daljicami.

Zgled 5.1. Izračunajmo ploščino lika, omejenega s parabolama $y = ax^2$ in $x = ay^2$, kjer je $a > 0$ konstanta.



Slika 4. Območje med parabolama

Paraboli se očitno sekata v točki $(0,0)$ in v še enem presečišču, ki ga dobimo kot drugo rešitev sistema enačb

$$y = ax^2, \quad x = ay^2.$$

Ko vstavimo y iz prve enačbe v drugo, dobimo $x = a^3x^4$. Poleg rešitve $x = 0$, je rešitetev te enačbe tudi $x = \frac{1}{a}$. Za $x \in [0, \frac{1}{a}]$ je $\sqrt{\frac{x}{a}} \geq ax^2$ (saj je $x \geq a^3x^4$), druga parabola torej nad prvo. Zato je ploščina lika med parabolama

$$p = \int_0^{\frac{1}{a}} \sqrt{\frac{x}{a}}\, dx - \int_0^{\frac{1}{a}} ax^2\, dx = [\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{2}{3}x^{3/2} - a\frac{x^3}{3}]_0^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{3a^2}$$

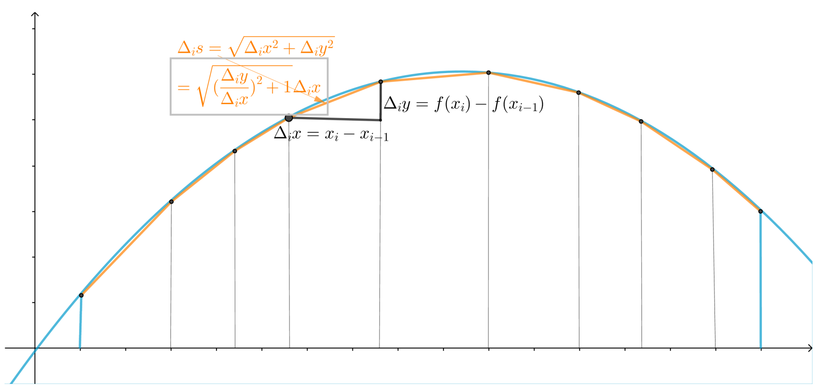
Naloga. Izračunajte ploščino elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

5.2. **Dolžina funkcijskega grafa.** Kako dolg je graf odvedljive funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$?

Da bi to ugotovili, razdelimo interval $[a, b]$ na dele z delilnimi točkami

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$$

ter vsaki dve točki $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ in $(x_i, f(x_i))$ povežimo z daljico. Vsota dolžin vseh teh daljic je dober približek dolžine grafa, če je delitev P intervala $[a, b]$ dovolj drobna (tj. Δ_P dovolj majhen). Dolžina i-te daljice, imenujmo jo $\Delta_i s$, je



Slika 5. Aproksimacija dolžine grafa z lomljeno črto

$$\Delta_i s = \sqrt{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 + (x_i - x_{i-1})^2} = \sqrt{\left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2 + 1}\Delta_i x,$$

kjer smo označili $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$. Po Lagrangeovem izreku je $\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}} = f'(\xi_i)$ za kak $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, torej je

$$\Delta_i s = \sqrt{f'(\xi_i)^2 + 1}\Delta_i x$$

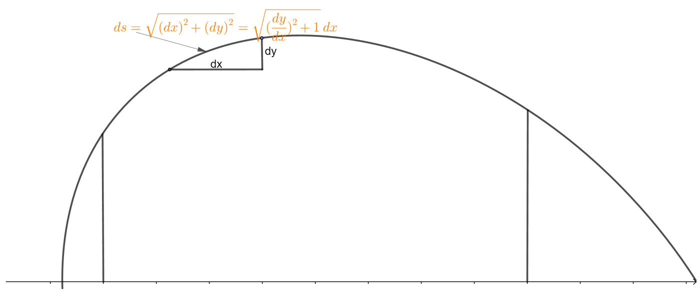
. Vsota

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'(\xi_i)^2 + 1}\Delta_i x$$

je približek dolžine grafa. Toda taka vsota je Riemannova vsota za funkcijo $g(x) := \sqrt{f'(x)^2 + 1}$ na intervalu $[a, b]$. Ko gre Δ_P proti 0, take vsote konvergirajo torej proti $\int_a^b g(x)\, dx = \int_a^b \sqrt{f'(x)^2 + 1}\, dx$, če je funkcija g integrabilna. Ta pogoj je izpolnjen npr., če ima odvod f' le končno mnogo točk nezveznosti. S tem smo "izpeljali" naslednjo formulo za dolžino s grafa funkcije f, ki ima odsekoma zvezen odvod:

$$s = \int_a^b \sqrt{f'(x)^2 + 1}\, dx. \tag{5.1}$$

Besedo "izpeljali" smo postavili med narekovaja, ker bi stroga izpeljava zahtevala, da najprej strogo definiramo pojem dolžine grafa, kar pa bi bilo nekoliko zamudno. Namesto tega, lahko vzamemo formulo (5.1) kar za definicijo dolžine grafa, sklepanje, ki smo ga zabeležili pred njo, pa pove, da se ta definicija sklada z našim intuitivnim pojmom dolžine. Na kratko lahko izpeljavo formule za dolžino krivulje



Slika 6. Diferencial dolžine ravninske krivulje

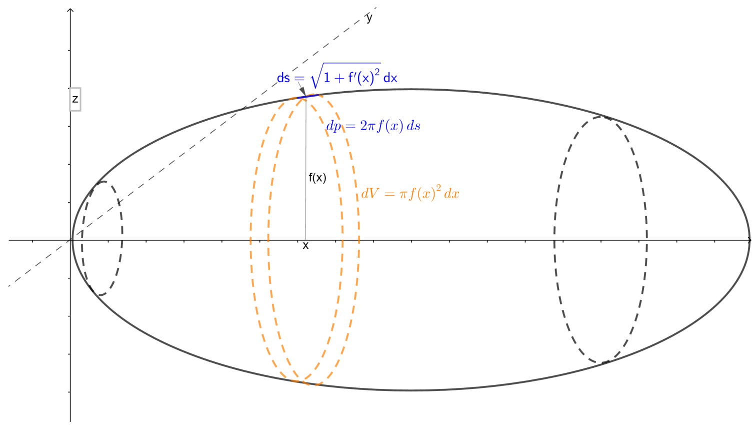
povzamemo takole: dolžina zelo majhnega dela krivulje je $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\, dx$, dolžino celotne krivulje dobimo kot vsoto dolžin takih delov, ko limitiramo njihovo velikost proti 0. V limiti preide vsota v integral, zato velja (5.1).

Zgled 5.2. Izračunajmo dolžino verižnice $f(x) = \operatorname{ch} x$ med točkama $a = 0$ in $b = 1$. Po (5.1) je

$$s = \int_0^1 \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}\, dx = \int_0^1 \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x|_0^1 = \operatorname{sh} 1 = \frac{1}{2}(e - \frac{1}{e}).$$

5.3. **Prostornina in površina vrtenine.** Ko se graf zvezne funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zavrti okrog abscisne osi za $360°$ opiše ploskev. Določili bomo površino te ploskve in prostornino telesa, ki ga omejuje (tj. prostornino telesa, ki ga opiše ravninski lik pod grafom funkcije). Telo razrežemo na zelo tanke plasti z ravninami, pravokotnimi na abscisno os. Vsaka taka plast je približno valj z zelo majhno višino dx in polmerom osnovne ploskve $f(x)$. Ploščina te osnovne ploskve je torej $\pi f(x)^2$, prostornina tega valja pa $\pi f(x)^2\, dx$. Prostornino celotnega telesa dobimo kot vsoto prostornin teh valjev, ko limitiramo njihove višine dx proti 0, s čimer vsota preide v integral $\int_a^b \pi f(x)^2\, dx$. S tem dobimo naslednjo formulo za prostornino vrtenine:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx. \tag{5.2}$$



Slika 7. Diferenciala prostornine in površine vrtenine

Ko plašč tega "valja" prerežemo po tvorilki in razvijemo v ravnino, dobimo pravokotnik z osnovnico $2\pi f(x)$ in višino ds. (Da njegova višina ni dx temveč ds, spoznamo, če opazujemo funkcijo f z zelo strmim grafom.) Ploščina tega dela ploskve je torej $2\pi f(x)\, ds = 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$, površina celotne ploskve pa

$$p = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx. \tag{5.3}$$

Zgled 5.3. Koliko je prostornina in površina vrtenine, ki nastane, ko se del parabole $y = 1 + x^2$, $1 \le x \le 2$, zavrti okrog abscisne osi?

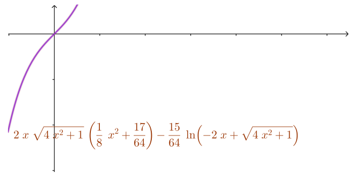
$$V = \pi \int_1^2 (1 + x^2)^2\, dx = \frac{178}{15}\pi.$$
$$p = 2\pi \int_1^2 (1 + x^2)\sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

Zadnji integral lahko izračunamo z vpeljavo nove spremenljivke t prek zveze $2x = \operatorname{sh} t$, s čimer sledi

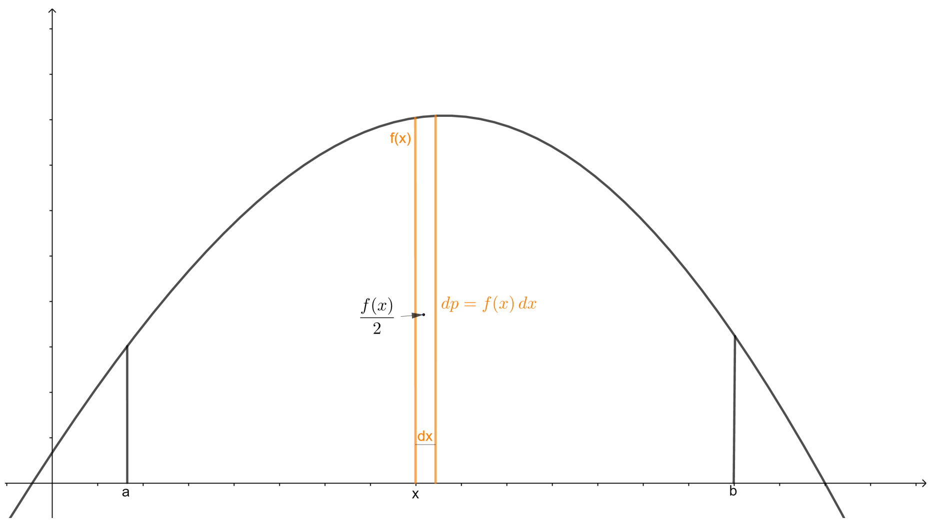
$$p = 2\pi \int_{\operatorname{arsh} 2}^{\operatorname{arsh} 4} (1 + \frac{\operatorname{sh}^2 t}{4}) \operatorname{ch} t \frac{1}{2} \operatorname{ch} t\, dt = \pi \int_{\operatorname{arsh} 2}^{\operatorname{arsh} 4} (1 + \frac{\operatorname{sh}^2 t}{4}) \operatorname{ch}^2 t\, dt.$$

Sedaj bi lahko izrazili funkciji sh in ch z eksponentno funkcijo, nakar ne bi bilo težko integrirati, vendar pa bi to zahtevalo precej dela, ki nam ga lahko olajša računalnik. Povejmo le, da je približni rezultat 69.3.

5.4. **Težišča ravninskih likov in krivulj.** Kako bi določili ordinato težišča ravninskega lika pod grafom funkcije $y = f(x)$, $a \le x \le b$? Predpostavili bomo, da je ploskovna gostota $\frac{dm}{dp}$ konstantna, tako da bomo pri računanju navora namesto teže upoštevali kar ploščino. Lik razdelimo na ozke vertikalne pasove s premicami $x =$konst., ki so približno pravokotniki. Ordinata težišča tipičnega takega pravokotnika je $\frac{f(x)}{2}$, njegov prispevek k navoru okrog osi x je torej produkt ploščine



SLIKA 8. Integral $\int (1+x^2)\sqrt{1+4x^2}\,dx$, izračunan z geogebro



SLIKA 9. Določitev težišča lika pod grafom funkcije $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$

$dp = f(x)\,dx$ in ročice $\frac{f(x)}{2}$, se pravi

$$dM_x = \frac{f(x)^2}{2}\,dx.$$

Celotni navor okrog osi x je zato

$$M_x = \int_a^b \frac{f(x)^2}{2}\,dx.$$

Po definiciji je težišče v taki točki (x_T, y_T), da je celotni navor okrog katerekoli osi enak produktu ploščine p in razdalje težišča do te osi. Torej velja

$$y_T p = M_x = \int_a^b \frac{f(x)^2}{2}\,dx,$$

od koder dobimo

$$y_T = \frac{\int_a^b f(x)^2\,dx}{2p}, \tag{5.4}$$

kjer je p ploščina lika, $p = \int_a^b f(x)\,dx$. Ker je $V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$ prostornina vrtenine, ki nastane, ko se lik zavrti okrog osi x, lahko formulo (5.4) zapišemo kot $y_T = \frac{V}{2\pi p}$ oziroma:

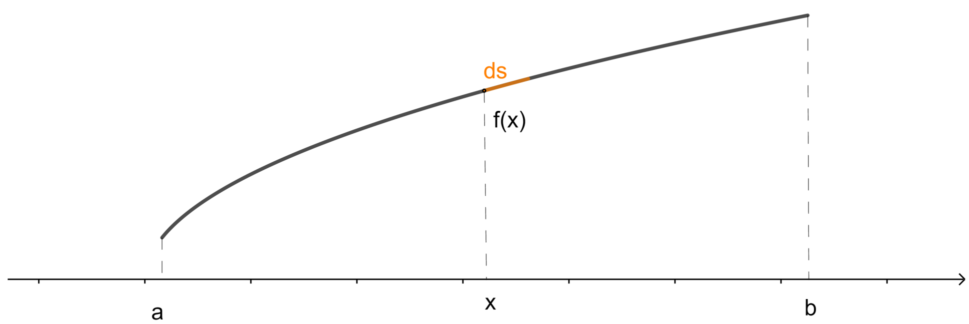
$$V = 2\pi y_T p. \tag{5.5}$$

V tej formuli pomeni izraz $2\pi y_T$ pot, ki jo pri zasuku za $360°$ opiše težišče. Da se dokazati, da velja ta formula za splošne ravninske like:

Trditev 5.4. *(Guldinovo pravilo) Prostornina vrtenine, ki nastane, ko se ravninski lik zavrti za polni kot okrog osi, ki ne seka lika, je enaka produktu ploščine lika in dolžine poti, ki jo pri vrtenju opiše težišče lika.*

Naloga. Izpeljite formulo za absciso težišča ravninskega lika pod grafom funkcije $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$.

Kako pa bi določili težišče krivulje $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$? Predpostavili bomo, da



Slika 10. Navor krivulje okrog osi x je $M_x = \int_a^b f(x)\,ds$.

je dolžinska gostota $\frac{dm}{ds}$ konstantna, tako da bomo pri računanju navora namesto teže uporabili kar dolžino. Krivuljo razdelimo na majhne dele. Dolžina tipičnega dela je ds, njegov navor okrog osi x pa $dM_x = f(x)\,ds = f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$. Celotni navor krivulje okrog osi x je zato

$$M_x = \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

Po definiciji težišča mor biti ta navor enak sy_T, kjer je y_T oordinata težišča, s pa dolžina krivulje, $s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$. Od tod sledi

$$y_T = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}{s}. \tag{5.6}$$

Ker je površina vrtenine, ki nastane, ko se krivulja zavrti za polni kot okrog osi x, enaka $p = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$, lahko formulo (5.6) zapišemo kot

$$p = 2\pi y_T s. \tag{5.7}$$

Tudi ta formula velja za splošnejše ravninske krivulje:

Trditev 5.5. *(Guldinovo pravilo) Površina vrtenine, ki nastane, ko se ravninska krivulja zavrti za polni kot okrog osi, ki ne seka krivulje, je enaka produktu dolžine krivulje in poti, ki jo pri zasuku opiše težišče krivulje.*

Zgled 5.6. Krog s polmerom a se zavrti za polni kot okrog osi, ki je oddaljena od središča kroga za b, kjer je $b > a$. Določite prostornino in površino tako nastalega svitka.

Ker je težišče kroga očitno v njegovem središču, je dolžina poti, ki jo opiše težišče, enaka $2\pi b$. Po Guldinovem pravilu je zato

$$V = p2\pi b = 2\pi^2 a^2 b.$$

Ker je tudi težišče krožnice v središču kroga, je po drugem Guldinovem pravilu površina svitka

$$p = s2\pi b = 2\pi a 2\pi b = 4\pi^2 ab.$$

5.5. **Vztrajnostni moment.**

Zgled 5.7. Določimo vztrajnostni moment stožca okrog njegove osi.