Kompleksna števila

Točka T v ravnini je določena z dvema koordinatama oziroma z vektorjem, ki se začne v koordinatnem izhodišču 0 in konča v T. Ker vektor $\vec{0T}$ in točka dasta isto informacijo, ju v pogovoru ni nujno razlikovati. Tako bomo pisali kar $\vec{0T} = (x, y)$, kjer sta x in y koordinati točke T. Da nam ne bo treba pisati puščic, bomo v tem razdelku vektorje raje označevali z grški črkami. Vektorje lahko seštevamo, kot je znano že iz srednje šole:

$$\text{če je } \alpha = (a, b) \text{ in } \beta = (c, d), \text{ je } \alpha + \beta = (a + c, b + d). \tag{0.1}$$

Vektor, ki se konča v točki 1 na abscisni osi (začne pa v izhodišču, kot vsi vektorji v tem razdelku), bomo označili kar z 1. S tem smo torej izenačili v oznakah 1 in par $(1, 0)$. Vektor $(0, 1)$, ki se konča v točki 1 na ordinatni osi, pa bomo imenovali i. Vsak vektor $\alpha = (a, b)$ potem lahko razstavimo kot

$$\alpha = a + bi.$$

Ali je možno te ravninske vektorje množiti med seboj na tak način, da veljajo pri računanju z njimi običajne lastnosti? Pri tem imamo v mislih, da veljajo asociativnost, komutativnost in distributivnost ter da je mogoče deliti z vsaki vektorjem α*, različnim od* 0*. Nadalje bi želeli, da je* $i^2 = -1$*, kjer je* $i^2 = ii$*.*

Zadnjo lastnost želimo zato, ker v realnih številih enačba $x^2 = -1$ ni rešljiva, saj kvadrat realnega števila ni nikoli negativen (tudi, če je število samo negativno). Tako enačbo pa je pomembno znati rešiti, saj nastopajo koreni iz negativnih realnih števil pri reševanju enačb višjih stopenj. Npr. funkcija $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, kjer so a, b in c fiksna realnaštevila, je za zelo velike pozitivne x pozitivna (ker prevlada člen x^3, za po absolutni vrednosti velike negativne x pa je negativna. Ker je njen graf nepretrgana krivulja, mora nekje sekati abscisno os, kar pomeni, da ima enačba $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ vsaj eno rešitev $x \in \mathbb{R}$. Toda izkaže se, da v formuli za rešitev take enačbe lahko nastopajo koreni negativnih realnih števil, čeprav je končen rezultat realno število.

Od vektorja i torej pričakujemo, da bo igral vlogo $\sqrt{-1}$. Ker želimo ohraniti običajne lastnosti računskih operacij, je edina možnost za produkt dveh vektorjev $\alpha = a + bi$ in $\beta = c + di$ naslednja:

$$\alpha\beta = (a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i.$$

Lahko je preveriti, da ima množenje, definirano s tem predpisom, torej

$$\alpha\beta = ac - bd + (ad + bc)i, \tag{0.2}$$

običajne lastnosti: je komutativno (tj. $\beta\alpha = \alpha\beta$), asociativno (tj. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ in distributivno glede na seštevanje (tj. $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\beta + \alpha\gamma$). Ravninske vektorje (oziroma točke v ravnini) bomo odslej imenovali kar *kompleksna števila*, kadar bomo imeli v mislih, da jih lahko množimo po pravilu (0.2). Množico vseh kompleksnih števil bomo označevali z $\mathbb{C}$. Za kompleksno število $\alpha = a + bi$ (kjer je $a, b \in \mathbb{R}$) imenujemo a njegov *realni del* ali *realna komponenta*, b pa *imaginarna komponenta*, kar bomo zapisali kot

$$a = \operatorname{Re}\alpha, \quad b = \operatorname{Im}\alpha.$$

Oglejmo si produkt števila $\alpha = a + bi$ s *konjugiranim številom* $\overline{\alpha}$, ki je definirano kot

$$\overline{\alpha} = a - bi \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

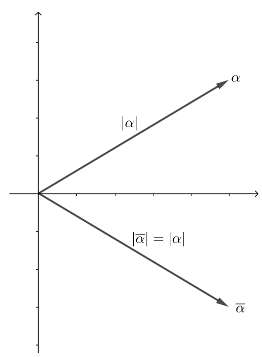
Po formuli (0.2) imamo

$$\alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2 = |\alpha|^2, \tag{0.3}$$

kjer smo označili z

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

absolutno vrednost kompleksnega števila α. Geometrijsko absolutna vrednost pomeni dolžino vektorja α, konjugirano število α pa je zrcalna slika točke α prek abscisne osi. Če je $\alpha \neq 0$, je $|\alpha| \neq 0$ in enakost (0.3) lahko napišemo kot



Slika 1. Absolutna vrednost in konjugirano število

$$\alpha \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2} = 1,$$

kar pomeni, da je

$$\alpha^{-1} = \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2},$$

inverz kompleksnega števila α. To pove, kako delimo kompleksna števila:

$$\frac{\beta}{\alpha} := \beta\alpha^{-1} = \frac{\beta\overline{\alpha}}{|\alpha|^2}.$$

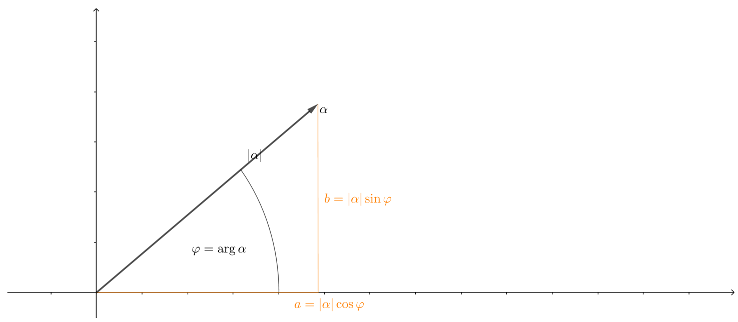
Zgled 0.1.

$$\frac{2-3i}{3+4i} = \frac{(2-3i)(3-4i)}{3^2+4^2} = \frac{-6-17i}{25}.$$

Naloga. Pokažite, da je

$$\operatorname{Re}\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \overline{\alpha}) \quad \text{in} \quad b = \frac{1}{2i}(\alpha - \overline{\alpha}).$$

Kompleksno število $\alpha = a + bi \neq 0$ je popolnoma določeno s svojo absolutno vrednostjo in kotom $\arg\alpha$, ki ga vektor α oklepa s pozitivnim poltrakom osi x. Ta



Slika 2. Argument kompleksnega števila

kot imenujemo *argument števila* α in ga bomo krajše označevali s $\varphi, \psi, \ldots$. Njegove vrednosti so v intervalu $[0, 2\pi)$. Očitno je

$$\operatorname{Re}\alpha = |\alpha|\cos\varphi \quad \text{in} \quad \operatorname{Im}\alpha = |\alpha|\sin\varphi,$$

torej

$$\alpha = |\alpha|\cos\varphi + i|\alpha|\sin\varphi = |\alpha|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Definicija 0.2. Zapis

$$\alpha = |\alpha|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{0.4}$$

imenujemo *polarni zapis* kompleksnega števila α.

Opazimo, da ima pri tem število $\cos\varphi + i\sin\varphi$ vedno absolutno vrednost 1, saj je $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$. Kompleksna števila z absolutno vrednostjo 1 ležijo v razdalji 1 od izhodišča in tako tvorijo krožnico s središčem 0 in polmerome 1, ki jo imenujemo *enotska krožnica* in označimo s $\mathbb{T}$ (ali pa z $\mathbb{S}^1$).

Iz polarnega zapisa je lažje razbrati, kaj se geometrijsko zgodi, ko pomnožimo dve kompleksni števili. Če sta namreč $\alpha = |\alpha|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ in $\beta = |\beta|(\cos\psi + i\sin\psi)$ polarna zapisa, imamo

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= |\alpha||\beta|(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi)\\ &= |\alpha||\beta|(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)),\end{aligned}$$

torej po adicijskih formulah za funkciji sinus in kosinus,

$$\alpha\beta = |\alpha||\beta|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)). \tag{0.5}$$

To je polarni zapis produkta, od koder vidimo, da je

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta| \text{ in } \quad \arg(\alpha\beta) = \arg\alpha + \arg\beta \quad \mod 2\pi.$$

Če uporabimo formulo (0.5) v primeru $\beta = \alpha$, dobimo

$$\alpha^2 = |\alpha|^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi).$$

Če jo nato uporabimo za α in $\beta = \alpha^2$, dobimo $\alpha^3 = |\alpha|^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$. Z indukcijo lahko na ta način dokažemo, da je

$$\alpha^n = |\alpha|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{0.6}$$

za vsako naravno število n. To formulo imenujemo *Moivrejeva formula*. Pokažmo, da velja tudi za -1 namesto n, če je $\alpha \neq 0$. Pokazati želimo torej, da je $\alpha^{-1} = |\alpha|^{-1}(\cos(-\varphi)+i\sin -\varphi)$, kar pomeni, da se moramo prepričati, ali je produkt števil $|\alpha|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ in $|\alpha|^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$ res enak 1. Toda to sledi takoj z uporabo formule (0.5).

Negativno celo število m lahko izrazimo kot $m = -n$, kjer je $n \in \mathbb{N}$. Potem je $\alpha^m = (\alpha^{-1})^n$ (kjer smo privzeli, da je $\alpha \neq 0$), zato po Moivrovi formuli za n in za -1

$$\begin{aligned}\alpha^m = [|\alpha|^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))]^n &= |\alpha|^{-n}(\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)) \\ &= |\alpha|^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi).\end{aligned}$$

S tem smo pokazali, da velja Moivrova formula tudi za negativna cela števila.

0.1. **Kako pa je z obstojem korenov?** Za kompleksno število $\alpha \neq 0$ in naravno število n iščemo tak $\beta \in \mathbb{C}$, da bo $\beta^n = \alpha$. Ko napišemo α in (neznani) β v polarni obliki, $\alpha = |\alpha|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ in $\beta = |\beta|(\cos\psi + i\sin\psi)$, sledi po Moivrovi formuli

$$|\beta|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = |\alpha|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Absolutni vrednosti na levi in desni strani te enakosti se morata ujemati, torej $|\beta|^n = |\alpha|$ in zato

$$|\beta| = \sqrt[n]{|\alpha|}.$$

Argumenta pa se lahko razlikujeta za celi večkratnik kota 2π saj imata dva kota isti cosinus in isti sinus natanko tedaj, ko je njuna razlika $k2\pi$ za kak $k \in \mathbb{Z}$. Torej je $n\psi = \varphi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, se pravi

$$\psi = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pri tem zadošča, da k teče le po naravnih številih od 0 do $n-1$, saj npr. kot $n\frac{2\pi}{n} = 2\pi$ da isto točko kot 0. V splošnem dva kota $\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}$ in $\frac{\varphi}{n} + \ell\frac{2\pi}{n}$ pripeljeta do istega rezultata natanko tedaj, ko je njuna razlika cel mnogokratnik od 2π, torej $\frac{k-\ell}{n}$ celo število, kar pomeni, da imata k in ℓ enak ostanek pri deljenju z n. Tako dobimo torej natanko n različnih n-tih korenov števila $\alpha \neq 0$:

$$\sqrt[n]{|\alpha|}\left(\cos(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}) + \sin(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n})\right), \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

V posebnem primeru, ko je $\alpha = 1 = \cos 0 + i\sin 0$ dobimo tako n-te korene enote:

$$\cos(k\frac{2\pi}{n}) + i\sin(k\frac{2\pi}{n}), \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

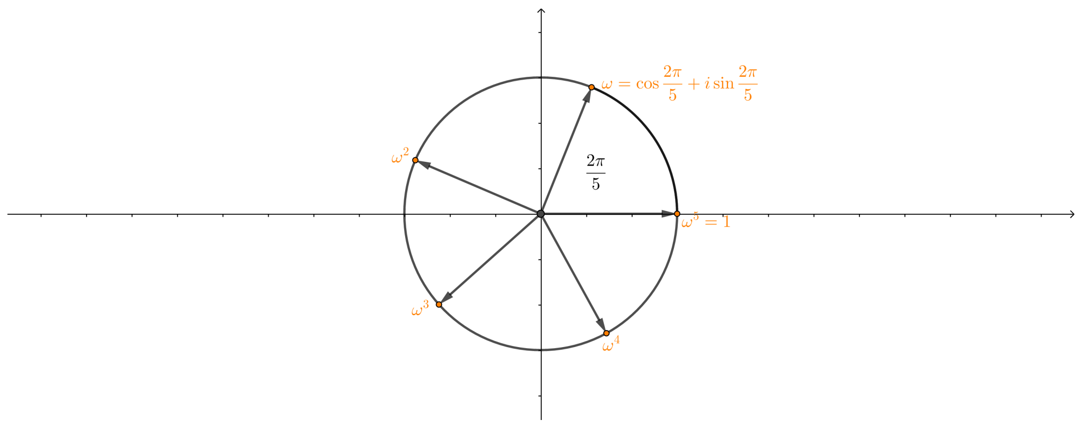
Če označimo

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

lahko po Moivrovi formuli vse n-te korene enote napišemo kot

$$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}.$$

Ker so vsi n-ti koreni enote potence števila ω, imenujemo ω *primitivni* n-ti koren enote.



SLIKA 3. Peti koreni enote

Naloga. Za katere k je ω^k tudi primitivni n-ti koren enote (se pravi, da se da vsak ω^m $(m \in \mathbb{N})$ izraziti kot $(\omega^k)^s$ za kak $s \in \mathbb{N}$)?

Zgled 0.3. Primitivni tretji koren enote je

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tretji koreni enote so torej 1, ω in $\omega^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Naloge. 1. Izračunajte četrte in pete korene enote.

2. Izračunajte $1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1}$, kjer je $\omega \neq 1$ n-ti koren enote.

3. Ker je ena stranica trikotnika manjša ali enaka vsoti drugih dveh, za normo vektorjev velja *trikotniška neenakost*:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|. \tag{0.7}$$

Dokažite to neenakost računsko. Kdaj velja enakost?

4. Sklepajte iz neenakosti (0.7), da velja

$$||\beta| - |\alpha|| \leq |\beta - \alpha|.$$

(Namig: dokazati zadošča, da je $|\beta| - |\alpha| \leq |\beta - \alpha|$, saj lahko potem zamenjamo med seboj α in β. Označimo $\gamma = \beta - \alpha$. Potem je treba dokazati le še, da velja $|\gamma + \alpha| - |\alpha| \leq |\gamma|$.)

Koreni enote so rešitve enačbe oblike $z^n - 1 = 0$. Osnovni izrek algebre pove, da ima tudi splošnejša enačba

$$z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \ldots + \alpha_1 z + \alpha_0,$$

kjer so α_j poljubna kompleksna števila, vsaj eno rešitev v $\mathbb{C}$. (Od tod potem hitro sledi, da ima n rešitev, če štejemo vsako ničlo polinoma v skladu z njeno mnogokratnostjo.) Tega izreka pa ne bomo dokazovali na tem mestu, saj je dokaz mnogo lažji, če uporabimo kompleksno analizo, ki jo bomo spoznali šele kasneje.