PARAMETRIČNO PODANE KRIVULJE

Zamislimo si gibajočo se točko v prostoru $\mathbb{R}^3$. Njen krajevni vektor $\vec{r} = (x, y, z)$ je funkcija časa t, kar zapišemo kot

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{0.1}$$

oziroma po koordinatah

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t). \tag{0.2}$$

Točka pri gibanju opiše krivuljo, zato enačba oblike (0.1) ali (0.2) običajno predstavlja krivuljo; pravimo da je krivulja podana *parametrično.* Pri tem parameter t ni nujno čas in lahko teče po celi realni osi $\mathbb{R}$ ali kakem njenem delu (npr. intervalu ali poltraku).

Zgled 0.1. (i) Že iz linearne algebre poznamo enačbo premice s smernim vektorjem $\vec{s}$ skozi točko $\vec{r}_0$:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

(ii) Enačba

$$\vec{r} = a(\cos(\omega t), \sin(\omega t)) \quad (t \in \mathbb{R})$$

oziroma $x = a\cos(\omega t)$, $y = a\sin(\omega t)$, predstavlja krožnico s središčem v $(0, 0)$ in polmerom a, če je $a > 0$ konstanta (in sicer za vsako konstanto $\omega \neq 0$). Vsako točko na taki krožnici lahko namreč v polarnih koordinatah izrazimo kot $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$. Če vzamemo, da točka potuje enakomerno po krožnici s kotno hitrostjo ω, se kot φ spreminja s časom t kot $\varphi = \omega t$, če privzamemo, da je v času $t = 0$ kot φ enak 0. Ker smo dopustili, da t teče po celi realni osi $\mathbb{R}$, točka prepotuje krožnico neskončno krat. Vidimo, da se da isto krivuljo podati parametrično na različne načine.

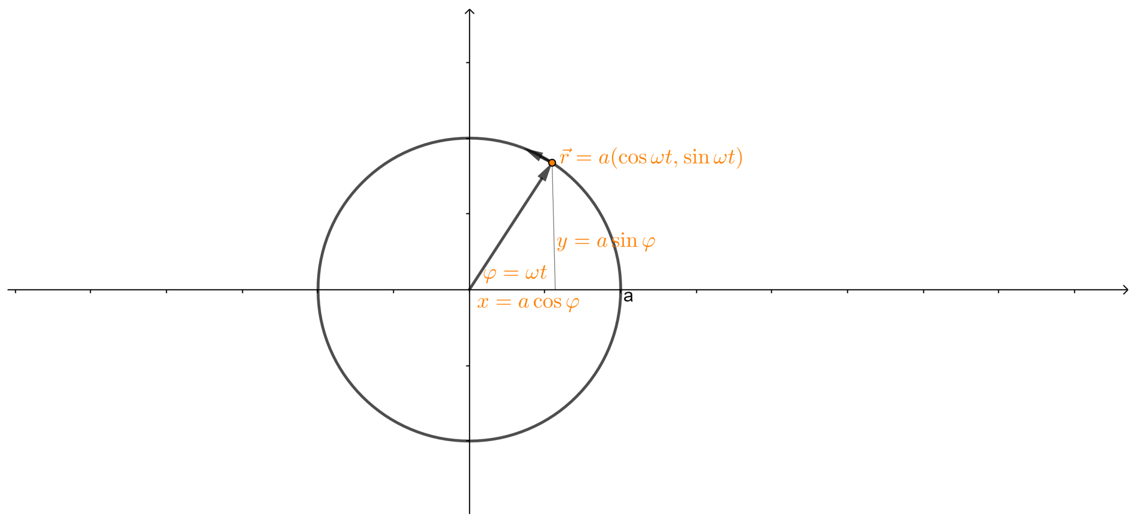
Naloga. Kaj pove o smeri kroženja točke predznak od ω?

(iii) Enačba

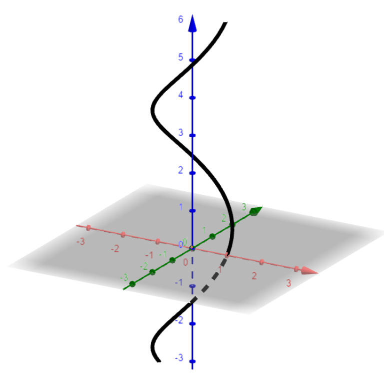
$$\vec{r} = (a\cos t, a\sin t, bt) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

kjer sta a in b (recimo pozitivni) konstanti, predstavlja vijačnico.

Če namreč katerokoli točko na tej krivulji projiciramo na ravnino x, y, dobimo točko $(a\cos t, a\sin t, 0)$, za katero vemo iz prejšnjega zgleda, da leži na krožnici s polmerom a okrog izhodišča v ravnini x, y. Ko t teče, se torej projekcija točke iz naše krivulje na ravnino x, y giblje po krožnici, a hkrati se koordinata z točke na krivulji enakomerno spreminja kot $z = bt$. Ta vijačnica leži na plašču valja $x^2 + y^2 = a^2$. (V ravnini x, y predstavlja zadnja enačba krožnico, toda v prostoru imamo v vsaki vodoravni ravnini $z =$ konst. eno tako krožnico in vse take krožnice skupaj sestavljajo plašč neskončnega valja, katerega os je os z.)



Slika 1. Krožnicaa

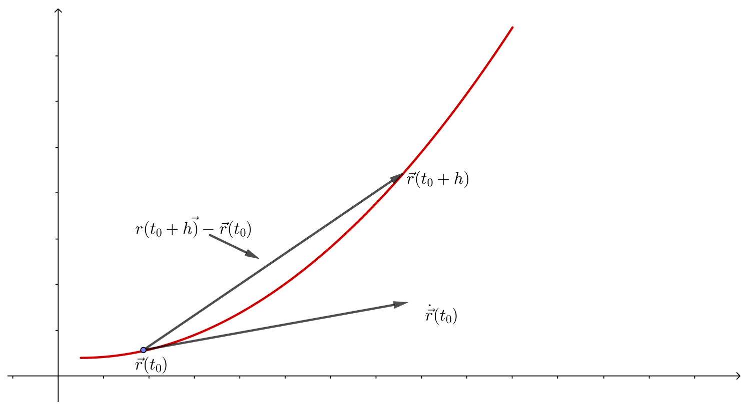


Slika 2. Vijačnica

Kako bi poiskali tangentni vektor na krivuljo z enačbo $\vec{r} = \vec{r}(t)$ v točki $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$? Za dve točki $\vec{r}(t_0)$ in $\vec{r}(t)$ na krivulji, je vektor $\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$ na sekanti, vendar gre proti 0, ko gre t proti t_0 (kadar je funcija $t \mapsto \vec{r}(t)$ zvezna). Toda tudi vektor

$$\frac{1}{t - t_0}(\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0))$$

leži na sekanti, in ko se t bliža k t_0, se njegova smer približuje smeri tangente. Torej



SLIKA 3. Tangentni vektor kot limita sekantnih

bomo za tangentni vektor v točki $\vec{r}(t_0)$ lahko vzeli kar

$$\dot{\vec{r}}(t_0) := \lim_{t\to t_0} \frac{1}{t-t_0}(\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)),$$

če je le $\dot{\vec{r}}(t_0) \neq 0$. Opazimo, da lahko tukaj *odvod vektorske funkcije* $\vec{r}$ računamo kar po komponentah. Če namreč označimo $h = t - t_0$, imamo

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(x(t_0+h) - x(t_0), y(t_0+h) - y(t_0), z(t_0+h) - z(t_0)) \\ &= \lim_{h\to 0}\Big(\frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h}, \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h}, \frac{z(t_0+h) - z(t_0)}{h}\Big),\end{aligned}$$

torej velja:

Trditev 0.2. *Če je $\vec{r}$ odvedljiva vektorska funkcija (kar po definiciji pomeni, da so njene komponente x, y in z odvedljive funkcije spremenljivke t), potem je*

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = (\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0))$$

tangentni vektor na krivuljo $t \mapsto \vec{r}(t)$ v točki $\vec{r}(t_0)$ (če je različen od 0).

Zgled 0.3. Tangentni vektor na vijačnico $\vec{r} = (a\cos t, a\sin t, bt)$ v poljubni točki $\vec{r}(t)$ je

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-a\sin t, a\cos t, b).$$

Tangentni vektor v točki $\vec{r}_0 = (a, 0, 0)$ je torej $\dot{\vec{r}}(0) = (0, a, b)$.

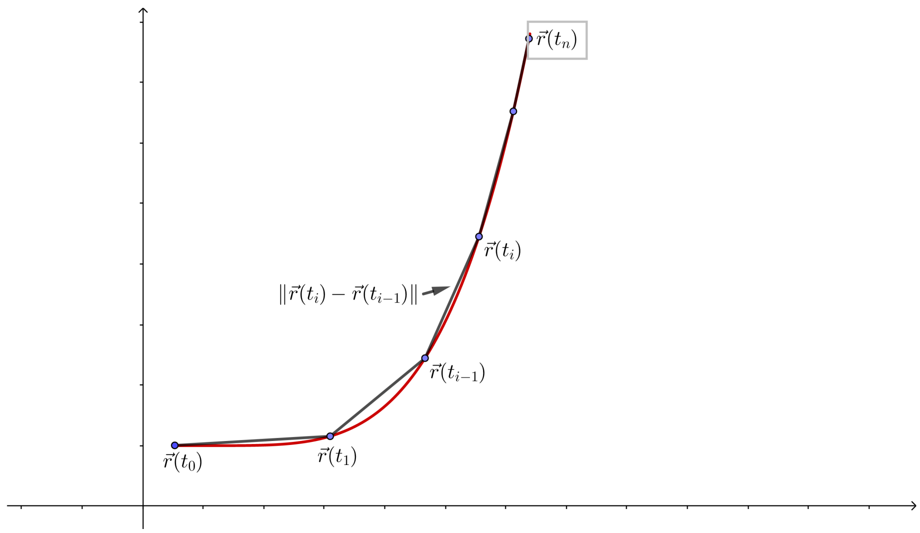
Oglejmo si še, kako izračunamo dolžino krivulje z enačbo

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad (t \in [a,b]), \tag{0.3}$$

kjer bomo privzeli, da je $\vec{r}$ zvezno odvedljiva funkcija parametra t. (Pri tem odvedljivost v krajiščih a in b pomeni, da tam obstajata desni in levi odvod, zaporedoma.) Interval $[a,b]$ razdelimo na recimo n majhnih podintervalov $[t_{i-1}, t_i]$ z delilnimi točkami

$$a = t_0 < t_1 \ldots < t_{i-1} < t_i \ldots < t_n = b.$$

Ko povežemo vsaki dve sosednji točki $\vec{r}(t_{i-1})$ in $\vec{r}(t_{)}$ z daljico, dobimo lomljeno črto L, ki se dobro prilega krivulje, če so delilni intervali $[t_{i-1}, t_i]$ dovolj kratki. Dolžina



Slika 4. Aproksimacija krivulje z lomljeno črto

daljice med $\vec{r}(t_{i-1})$ in $\vec{r}(t_i)$ je

$$\|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\| = \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (z(t_i) - z(t_{i-1}))^2}.$$

Po Lagrangeovem izreku lahko izrazimo $x(t_i) - x(t_{i-1}) = \dot{x}(\xi_i))(t_i - t_{i-1})$, kjer je $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Ko na podoben način izrazimo tudi razliki $y(t_i) - y(t_{i-1})$ in $z(t_i) - z(t_{i-1})$ in označimo $\Delta_i t = t_i - t_{i-1}$, dobimo

$$\|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\| = \sqrt{\dot{x}(\xi_i)^2 + \dot{y}(\eta_i)^2 + \dot{z}(\zeta_i)^2}\Delta_i t,$$

kjer je $\xi_i, \eta_i, \zeta_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Dolžina celotne lomeljene črte L je torej

$$s(L) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\dot{x}(\xi_i)^2 + \dot{y}(\eta_i)^2 + \dot{z}(\zeta_i)^2}\Delta_i t. \tag{0.4}$$

Če bi bilo v tej formuli $\zeta_i = \eta_i = \xi_i$, bi bila vsota v (0.4) ravno ena od Riemannovih vsot funkcije $t \mapsto \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} = \|\dot{\vec{r}}(t)\|$ na intervalu $[a, b]$. *Dolžino krivulje*, ki je po definiciji limita dolžin lomljenih črt L, ko gredo širine $\Delta_i t$ proti 0, bi potem lahko dobili kot Riemannov integral $\int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\|\, dt$. Pokažimo sedaj, da ta formula velja, čeprav so ξ_i, η_i in ζ_i v splošnem različni. Po predpostavki so namreč funkcije $\dot{x}$, $\dot{y}$ in $\dot{z}$ zvezne, torej enakomerno zvezne na $[a, b]$, zato pri danem $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|\sqrt{\dot{x}(\xi_i)^2 + \dot{y}(\eta_i)^2 + \dot{z}(\zeta_i)^2} - \sqrt{\dot{x}(\xi_i)^2 + \dot{y}(\xi_i)^2 + \dot{z}(\xi_i)^2}| < \varepsilon$, če so le vse dolžine $\Delta_i t$ pod δ (saj so ξ_i, η_i in ζ_i iz istega intervala $[t_{i-1}, t_i]$). Tedaj je razlika med vsoto (0.4) in Riemannovo vsoto $\sum_{i=1}^n \sqrt{\dot{x}(\xi_i)^2 + \dot{y}(\xi_i)^2 + \dot{z}(\xi)^2}\Delta_i t$

po absolutni vrednosti pod

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon \Delta_i t = \varepsilon (b-a).$$

Ker je pri tem ε lahko poljubno majhno pozitivno število, sledi, da konvergirajo vsote (0.4) proti istemu številu kot ustrezne Rieamannove vsote (namreč proti $\int_a^b \|\dot{r}(t)\|\, dt$), ko gredo širine delilnih intervalov proti 0. S tem smo dokazali:

Trditev 0.4. *Če je $\vec{r}$ zvezno odvedljiva vektorska funkcija na intervalu $[a, b]$ (kjer je $a < b$), potem je dolžina krivulje, ki jo določa, enaka*

$$s = \int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\|\, dt.$$

Gornji razmislek je zlahka mogoče dopolniti do spoznanja, da trditev velja tudi za funkcije, ki so le odsekoma zvezno odvedljive. Opazimo, da je po gornji formuli dolžina neodvisna od parametrizacije krivulje, saj po izreku o uvedbi nove spremenljivke v določeni integral velja naslednje:

Trditev 0.5. *Naj bo $\vec{r}$ zvezno odvedljiva vektorska funkcija, definirana na intervalu $[a, b]$ $(a < b)$ in naj bo $\psi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ zvezno odvedljiva bijekcija, tako da $t = \psi(\tau)$ preteče interval $[a, b]$, ko τ preteče interval $[\alpha, \beta]$ (kjer je $\alpha < \beta$). Potem je*

$$\int_a^b \|\dot{\vec{r}}(t)\|\, dt = \int_\alpha^\beta \|\frac{d}{d\tau}\vec{r}(\psi(\tau))\|\, d\tau.$$

Zgled 0.6. Izračunajmo dolžino enega navoja vijačnice $\vec{r} = (a \cos t, a \sin t, bt)$, kjer sta a in b pozitivni konstanti.

En navoj vijačnice dobimo, ko kot t preteče interval dolžine 2π. (Tedaj namreč projekcija točke na ravnino x, y enkrat preteče celotno krožnico.) Torej je dolžina enega navoja enaka

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \|\dot{\vec{r}}(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2}\, dt \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Naloga. Izračunajte dolžino navoja vijačnice brez uporabe integralov. (Navodilo: prerežite valj, okrog katerega se ovija vijačnica, vzdolž tvorilke in ga razvijte v ravnino, tako da se vijačnica razvije v premico.)

Izberimo na krivulji K z enačbo $\vec{r} = \vec{r}(t)$ začetno točko $\vec{r}(t_0)$. Lega poljubne točke $\vec{r}(t)$ na tej krivulji je določena z razdaljo po krivulji med $\vec{r}(t_0)$ in $\vec{r}(t)$, se pravi z dolžino tistega dela krivulje, ki leži med tema dvema točkama. Ta dolžina je enaka

$$s(t) := \int_{t_0}^{t} \|\dot{\vec{r}}(u)\|\, du,$$

kjer smo integracijsko spremenljivko označili z u, saj označuje tukaj t že zgornjo mejo. Če je krivulja na začetku parametrizirana tako, da je vedno $\dot{\vec{r}}(u) \neq 0$, bo po tej formuli s strogo naraščajoča funkcija spremenljivke t (saj je njen odvod $\frac{ds}{dt} = \|\dot{\vec{r}}(t)\| > 0$). Tedaj lahko s vzamemo za nov parameter na krivulji; imenujemo ga *naravni parameter*. Ker je namreč funkcija $t \mapsto s(t)$ strogo naraščajoča, lahko t izrazimo kot funkcijo spremenljivke s, torej $t = t(s)$, in namesto enačbe $\vec{r} = \vec{r}(t)$, imamo potem enačbo $\vec{r} = \vec{r}(t(s))$, ki podaja krajevni vektor točke na krivulji kot funkcijo parametra s. Seveda je naravni parameter odvisen tudi od izbire začetne točke $\vec{r}(t_0)$, vendar pa je določen do aditivne konstante natančno. Če je krivulja parametrizirana z naravnim parametrom $t = s$, velja

$$\|\dot{\vec{r}}(s)\| = \frac{ds}{ds} = 1.$$

Ta enakost je značilna za naravni parameter in pomeni, da točka potuje po krivulji, ki je parametrizirana z naravnim parametrom, s hitrostjo, ki je po velikosti vedno 1.

1. Krivulje v polarnih koordinatah

Namesto v kartezičnih, lahko ravninsko krivuljo podamo v polarnih koordinatah, tako da povemo, kakšna funkcija kota φ je razdalja r od izhodišča, torej

$$r = r(\varphi), \quad (\alpha < \varphi < \beta),$$

kjer sta α in β konstanti (lahko tudi $-\infty$ in ∞). Tako podano krivuljo lahko takoj podamo tudi parametrično:

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi.$$

Zgled 1.1. (i) Še najlažje je v polarnih koordinatah podati krožnico s središčem v $(0,0)$, saj je njena enačba kar

$$r = a,$$

kjer je a pozitivna konstanta (namreč polmer).

Naloga. Kako se glasi v polarnih koordinatah krožnica s središčem (x_0, y_0) in polmerom a?

(ii) Pri krivulji

$$r = a\varphi,$$

kjer je a pozitivna konstanta, razdalja r od izhodišča narašča s kotom φ. Ta krivulja je *spirala* in je definirana za vse $\varphi \geq 0$.

(iii) Tudi krivulja

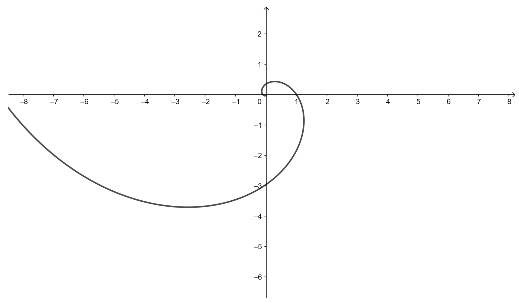
$$r = ae^{-\varphi},$$

kjer je a pozitivna konstanta, je spirala, vendar pa pri njej r eksponentno pada proti 0, ko gre φ proti ∞. Imenujemo jo *logaritemska spirala*.

Naloga. Kako se glasi enačba premice, ki naj ne gre skozi izhodišče, v polarnih koordinatah? (Navodilo: v enačbo premice $ax + by = c$ vstavite $x = r\cos\varphi$ in $y = r\sin\varphi$ ter nato izrazite r.)

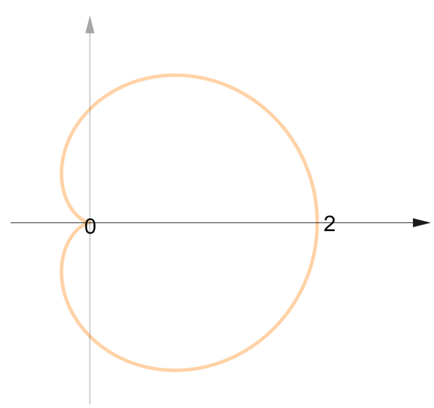
(iv) Krivuljo

$$r = a(1 + \cos\varphi), \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$



Slika 5. Logaritemska spirala $r = 2^{-\varphi}$

lahko poskusimo narisati tako, da najprej izračunamo, koliko je r pri kotih $\varphi = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4, 2\pi$. To krivuljo imenujemo *srčnica* ali *kardioida*.



Slika 6. Srčnica ali kardioida

Koliko so koordinate najvišje točke na kardioidi? Da bi to ugotovili, bomo določili ekstreme funkcije

$$y = r\sin\varphi = a(1+\cos\varphi)\sin\varphi = a(\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin(2\varphi)).$$

Odvod the funkcije je

$$\frac{dy}{d\varphi} = a(\cos\varphi + \cos(2\varphi)) = a(\cos\varphi + 2\cos^2\varphi - 1). \tag{1.1}$$

Njegove ničle izračunamo lahko tako, da vpeljemo novo neznanko $u = \cos\varphi$, za katero dobimo kvadratno enačbo

$$2u^2 + u - 1 = 0.$$

Njeni rešitvi sta $u_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} = -1, \frac{1}{2}$. Torej je $\cos\varphi = -1$ in tedaj $\varphi = \pm\pi$ ali pa $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ in tedaj $\varphi = \pm\frac{\pi}{3}$. Najvišja točka ima očitno $\varphi = \frac{\pi}{3}$, najnižja pa $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. Polarni kordinati najvišje točke sta torej $\varphi = \frac{\pi}{3}$ in $r = a(1+\cos(\pi/3)) = \frac{3}{2}a$, kartezični pa $x = \frac{3}{2}a\frac{1}{2} = \frac{3}{4}a$ in $y = \frac{3}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a$.

Pokažimo še, da se kardioida dotakne absicne osi v izhodišču, natančneje, da je

$$\lim_{\varphi\to\pm\pi} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Imamo $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}$, pri čemer smo $\frac{dy}{d\varphi}$ že izračunali v (1.1), za $\frac{dx}{d\varphi}$ pa iz $x = a(1+\cos\varphi)\cos\varphi) = a(\cos\varphi + \cos^2\varphi)$ sledi

$$\frac{dx}{d\varphi} = a(-\sin\varphi - 2\cos\varphi\sin\varphi) = -a(\sin\varphi + \sin(2\varphi)).$$

Torej je

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos\varphi + \cos(2\varphi)}{\sin\varphi + \sin(2\varphi)}.$$

Če vstavimo v to formulo $\varphi = \pm\pi$, dobimo nedoločeni izraz $-\frac{0}{0}$, zato bomo limito računali po L'Hospitalovem pravilu:

$$\lim_{\varphi\to\pm\pi} = \lim_{\varphi\to\pm\pi} \frac{\sin\varphi + 2\sin(2\varphi)}{\cos\varphi + 2\cos(2\varphi)} = 0.$$

Naloga. Določite najbolj levi točki na grafu kardioide. Pokažite tudi, da je graf simetričen glede na abscisno os.

Kako bi izračunali dolžino krivulje, podane v polarnih koordinatah? Kot smo že omenili, lahko tako krivuljo takoj podamo parametrično kot

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi \quad (\alpha \le \varphi \le \beta,$$

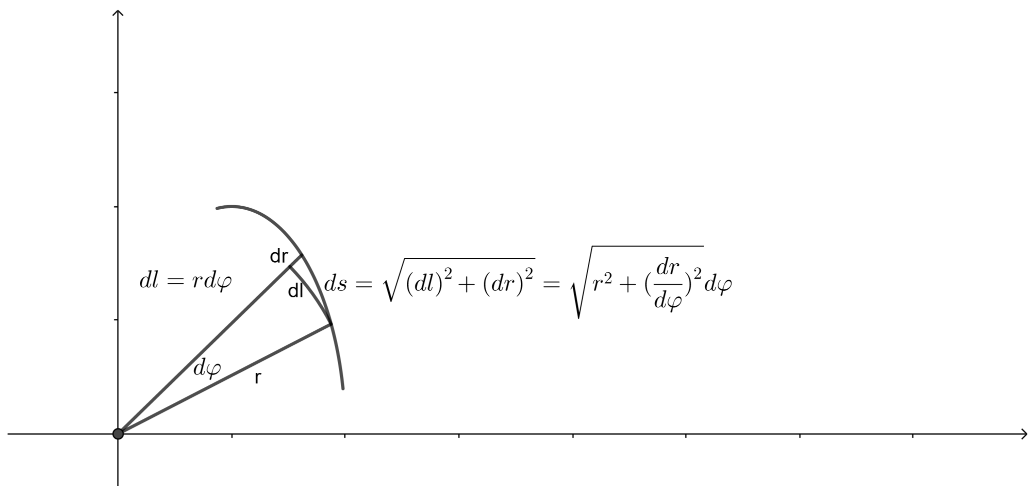
nakar lahko uporabimo formulo za računanje dolžine parametrično podane krivulje, torej

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\frac{dx}{d\varphi})^2 + (\frac{dy}{d\varphi})^2}.$$

Po krajšem računu bi to formulo lahko preoblikovali v

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\varphi})^2}\, d\varphi. \tag{1.2}$$

To formulo pa lahko izpeljemo hitreje tako, da krivuljo razdelimo na zelo majhne dele, ki so skoraj ravni, tako da je (glejte sliko)



Slika 7. Ločni element v polarnih koordinatah

$$ds = \sqrt{(rd\varphi)^2 + (dr)^2} = \sqrt{r^2 + (\frac{dr}{d\varphi})^2}\, d\varphi.$$

S seštevanjem dolžin teh majhnih delov in upoštevanjem, da v limiti preide vsota v integral, dobimo formulo (1.2).

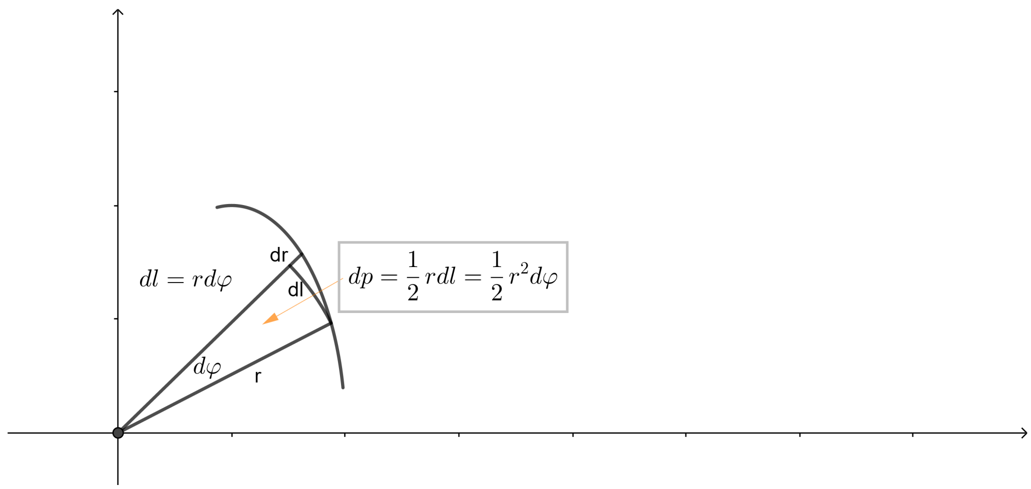
Naloga. Izpeljite formulo

$$p = \int_\alpha^\beta \frac{r(\varphi)^2}{2}\, d\varphi \tag{1.3}$$

za ploščino lika, omejenega s krivuljo $r = r(\varphi)$ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$ ter poltrakoma $\varphi = \alpha$ in $\varphi = \beta$.

Zgled 1.2. Izračunajmo dolžino kardioide $r = a(1 + \cos\varphi)$ $(-\pi \leq \varphi \leq \pi)$. Ker je graf kardioide simetričen glede na abscisno os, imamo po formuli (1.2)

$$\begin{aligned} s &= 2\int_0^\pi \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2(-\sin\varphi)^2}\, d\varphi = 2a\int_0^\pi \sqrt{2(1+\cos\varphi)}\, d\varphi \\ &= 2a\int_0^\pi \sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 4a\int_0^\pi \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a. \end{aligned}$$



Slika 8. Ploščinski element v polarnih koordinatah

Za ploščino lika, omejenega s kardioido, pa dobimo po (1.3)

$$\begin{aligned} p &= 2\frac{1}{2}\int_0^\pi a^2(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = a^2\int_0^\pi (1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi \\ &= a^2\left(\pi + \int_0^\pi \frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\,d\varphi\right) = \frac{3}{2}\pi a^2. \end{aligned}$$

Naloga. Narišite *štiriperesno deteljico* z enačbo $r = |\sin(2\varphi)|$ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$ ter določite ploščino lika, ki ga ograja, in njen obseg.