Stekališča in Cauchyev kriterij

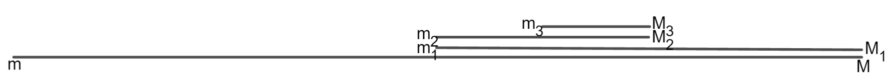
Definicija 0.1. Točka $s \in \mathbb{R}$ je *stekališče zaporedja* (a_n), če je za vsak $\varepsilon > 0$ v intervalu $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ neskončno mnogočlenov a_n.

Ker je zahteva, da je zunaj intervala le končno mnogo členov ostrejša od zahteve, da jih je v intervalu neskončno mnogo, je limita zaporedja obenem stekališče. Obratno pa ni vedno res: zaporedje $1, -1, 1, -1, \ldots$ ima dve stekališči, namreč 1 in -1, nobeno od njiju ne more biti limita.

Naloge. 1. Napišite primere zaporedij, ki imajo natanko 3, 4, 5,... stekališč.
2. Napišite kak zgled zaporedja, ki ima neskončno mnogo stekališč. Kaj pa primer zaporedja, katerega stekališča so vsa realna števila?
3. Napišite kak zgled neomejenega zaporedja, ki ima eno stekališče.

Nima vsako zaporedje stekališča. Npr. zaporedje $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ nima stekališč.

Izrek 0.2. *(Bolzano-Weierstrass)Vsako omejeno zaporedje realnih števil ima vsaj eno stekališče.*



Slika 1. Zaporedje vloženih intervalov

Dokaz. Ker je zaporedje omejeno, so vsi njegovi členi vsebovani v intervalu $[m, M]$, kjer je m spodnja, M pa zgornja meja zaporedja (a_n). Razpolovimo interval $[m, M]$. Izberimo tisto polovico, na kateri je neskončno mnogo členov zaporedja (a_n). (Če je neskončno mnogo členov na obeh polovicah, lahko izberemo katerokoli od njiju.) Če smo izbrali levo polovico, označimo razpolovišče z M_1 in pišimo $m_1 = m$; če pa smo izbrali desno polovico, označimo razpolovišče z m_1 in pišimo $M_1 = M$. V vsakem primeru dobimo interval $[m_1, M_1]$, ki vsebuje neskončno mnogo členov zaporedja, je vsebovan v intervalu $[m, M]$ in ima polovično dolžino začetnega intervala.

Sedaj postopek ponovimo na intervalu $[m_1, M_1]$. Razdelimo ga torej na dve polovici in izberemo eno, na kateri je neskončno mnogo členov zaporedja. Če smo izbrali levo polovico, označimo razpolovišče z M_2 in pišimo $m_2 = m_1$; če pa smo izbrali desno polovico, označimo razpolovišče z m_2 in pišimo $M_2 = M_1$. Tako spet dobimo interval $[m_2, M_2]$, ki vsebuje neskončno mnogo členov zaporedja, je vsebovan v prejšnjem intervalu $[m_1, M_1]$ in imal le pol njegove dolžine.

Ko ta postopek nadaljujemo, dobimo zaporedje zaprtih intervalov

$$[m, M] \supset [m_1, M_1] \supset [m_2, M_2] \supset \ldots \supset [m_k, M_k] \supset \ldots,$$

ki vsi vsebujejo neskončno mnogo členov zaporedja (a_n), njihove dolžine pa so $M_k - m_k = \frac{M-m}{2^k}$ in gredo proti 0. Ker je

$$[m_k, M_k] \supset [m_{k+1}, M_{k+1}],$$

mora veljati $m_{k+1} \geq m_k$ in $M_{k+1} \leq M_k$. Torej je zaporedje levih krajišč (m_k) naraščajoše, in ker je omejeno (npr. z M), je konvergentno proti $s := \sup m_k$. Podobno je zaporedje desnih krajišč (M_k) padajoče in navzdol omejeno (npr.z m), zato konvergira proti $z := \inf M_k$. Opazimo, da za $l < k$ velja $m_l \leq m_k < M_k$ in $m_k < M_k \leq M_l$, kar pove, da so vsa leva krajišča manjša od vseh desnih. Od tod sledi, da je $s \leq z$, se pravi, da imamo

$$m_k \leq s \leq z \leq M_k$$

za vsak k. Od tod sledi $z - s \leq M_k - m_k$, in ker gre $M_k - m_k$ proti 0, mora biti $z - s = 0$, torej $z = s$.

Trdimo, da je s stekališče zaporedja (a_n). Za vsak $\varepsilon > 0$ so namreč v intervalu $(s - \varepsilon, s]$ vsi dovolj pozni členi zaporedja (m_k), saj je s njihov supremum. Prav tako so v intervalu $[z, z + \varepsilon)$ vsi dovolj pozni členi zaporedja (M_k), saj je z njihov infimum. Ker je $z = s$, sledi od tod, da so v intervalu $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ vsi dovolj pozni členi obeh zaporedij, (m_k) in (M_k), torej je $[m_k, M_k] \subseteq (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ za kak k. Ker je v intervalu $[m_k, M_k]$ neskončno mnogo členov a_n, jih je neskončno tudi v intervalu $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$. S tem smo pokazali, da je s stekališče zaporedja (a_n). $\square$

Naloga. Dokažite, da je s stekališče zaporedja (a_n) natanko tedaj, ko kako podzaporedje konvergira proti s. (Rešitev. Če je s stekališče, je v vsakem intervalu $(s - \frac{1}{k}, s + \frac{1}{k})$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ neskončno mnogo členov a_n, torej lahko izberemo enega, $a_{n_k} \in (s - \frac{1}{k}, s + \frac{1}{k})$. Ker gredo tedaj razlike $|a_{n_k} - s|$ proti 0, zaporedje (a_{n_k}) (ki je podzaporedje od (a_n)), konvergira proti s.

Za dokaz v obratno smer, naj bo s limita kakega podzaporedja (a_{n_k}) zaporedja (a_n). Potem je v vsakem intervalu $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ (kjer je $\varepsilon > 0$) neskončno mnogo členov zaporedja (a_{n_k}) (saj jih je zunaj intervala le končno). Ker so vsi ti členi tudi členi celotnega zaporedja (a_n), je s tem dokazano, da je s stekališče zaporedja (a_n).

Pri konvergentnem zaporedju (a_n) z limito a gredo razlike $a_n - a_m$ proti $a - a = 0$, ko gresta m in n proti ∞. Taka zaporedja imenujemo Cauchyeva. Natančneje:

Definicija 0.3. Zaporedje (a_n) je Cauchyevo, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, da za vsaka naravna m, n iz $m \geq n_\varepsilon$ in $n \geq n_\varepsilon$ sledi

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Kako v splošnem ugotoviti, ali je dano zaporedje konvergentno, kadar je njegova limita kako iracionalno število, ki ga še nismo srečali? Odgovor podaje naslednji izrek, ki pravi, da zadošča ugotoviti, ali je Cauchyevo.

Izrek 0.4. *Zaporedje realnih števil je konvergentno natanko tedaj, ko je Cauchyevo.*

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$. Če je zaporedje (a_n) konvergentno, z limito a, potem obstaja tak $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n(\varepsilon)$ velja

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Če je torej tudi $m \geq n(\varepsilon)$, velja tudi $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, in sledi

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

S tem smo pokazali, da je vsako konvergentno zaporedje (a_n) Cauchyevo.

Za dokaz v obratno smer, moramo najprej ugotoviti, da je vsako Cauchyevo zaporedje (a_n) omejeno. Ker je namreč zaporedje Cauchyevo, je $|a_n - a_m| < 1$ za vse dovolj velike m in n, recimo za vse $m, n \geq n_1$. Kot poseben primer je torej $|a_n - a_{n_1}| < 1$ za vse $n \geq n_1$, kar pomeni, da je $a_n \in (a_{n_1} - 1, a_{n_1} + 1)$, se pravi, da je izven tega intervala le končno mnogo členov. Zaporedje (a_n) je zato omejeno.

Naj bo sedaj (a_n) poljubno Cauchyevo zaporedje in $M \in \mathbb{R}$ tak, da je $|a_n| \leq M$. (Tukaj smo uporabili ugotovitev prejšnjega odstavka, da so Cauchyeva zaporedja omejena.) Naj bo s stekališče zaporedja (a_n). Pokazali bomo, da je s dejansko limita tega zaporedja. Ker je zaporedje Cauchyevo, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_{\varepsilon/2} \in \mathbb{N}$, da za vsaka $m, n \in \mathbb{N}$, ki sta večja ali enaka $n_{\varepsilon/2}$, velja

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{0.1}$$

Ker je s stekališče zaporedja (a_n), je v intervalu $(s - \frac{\varepsilon}{2}, s + \frac{\varepsilon}{2})$ neskončno mnogo členov a_n, torej tudi kak člen a_m z indeksom $m \geq n_{\varepsilon/2}$. Zanj velja $|a_m - s| < \frac{\varepsilon}{2}$, za vsak $n \geq n_{\varepsilon/2}$ pa velja tudi (0.1). Torej za vse $n \geq n_{\varepsilon/2}$ velja

$$|a_n - s| = |(a_n - a_m) + (a_m - s) \leq |a_n - a_m| + |a_m - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

To dokazuje, da je $s = \lim_{n\to\infty} a_n$. ☐

Kot uporabo zadnjega izreka si oglejmo potence z realnim eksponentom. Naj bo $a > 0$. Kaj je a^r, kadar je r iracionalno število? Za racionalno število p/q (kjer je $p \in \mathbb{Z}$ in $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), vemo, da $a^{\frac{p}{q}}$ pomeni $\sqrt[q]{a^p}$. Za iracionalno število r pa lahko izberemo zaporedje racionalnih števil r_n, ki konvergirajo proti r (npr. zaporedje decimalnih približkov števila r). Potem lahko definiramo

$$a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}, \tag{0.2}$$

če pokažemo, da ta limita obstaja. V ta namen zadošča po prejšnjem izreku dokazati naslednjo lemo:

Lema 0.5. *Zaporedje (a^{r_n}) je Cauchyevo.*

Dokaz. Pokazati moramo, da za vsak $\varepsilon > 0$ velja

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| < \varepsilon \tag{0.3}$$

za vse dovolj velike $m, n \in \mathbb{N}$. Privzeli bomo, da je $a > 1$, saj je dokaz v primeru $a < 1$ podoben (ali pa si pomagamo z zvezo $a^r = (\frac{1}{a})^{-r}$). Ker zaporedje (r_n) konvergira proti r, je omejeno, torej obstaja tak $M \in \mathbb{Q}$, da je $a^{r_n} \leq M$ za vse n. Zato velja

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m}|a^{r_n - r_m} - 1| \leq a^M(a^{|r_n - r_m|} - 1). \tag{0.4}$$

Ker je $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a} = 1$, lahko izberimo $k \in \mathbb{N}$ tako, da je

$$|a^{\frac{1}{k}} - 1| < \varepsilon a^{-M}. \tag{0.5}$$

Ker je zaporedje (r_n) konvergentno (proti r), je Cauchyevo, torej je $|r_n - r_m| < \frac{1}{k}$ za vse dovolj velike m, n in zato po (0.5)

$$0 < a^{|r_n - r_m|} - 1 < a^{1/k} - 1 < \varepsilon a^{-M}.$$

Od tod in iz (0.4) sedaj sledi

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| < a^M \varepsilon a^{-M} = \varepsilon.$$

Torej je zaporedje (a^{r_n}) res Cauchyevo. □

Ali je tako definirana potenca a^r odvisna od izbire zaporedja (r_n), konvergirajočega proti r?

Če je (s_n) kako drugo, proti r konvergirajoče, zaporedje racionalnih števil, potem tudi zaporedje

$$r_1, s_1, r_2, s_2, \ldots, r_n, s_n, \ldots$$

konvergira proti r. Po že dokazanem je zaporedje

$$a^{r_1}, a^{s_1}, a^{r_2}, a^{s_2}, \ldots, a^{r_n}, a^{s_n}, \ldots$$

konvergentno. Zaporedji (a^{r_n}) in (a^{s_n}) sta njegovi podzaporedji, zato imata isto limito. S tem smo pokazali, da je definicija potence a^r neodvisna od izbire zaporedja racionalnih števil r_n, konvergirajočih proti r.

Zgornja in spodnja limita

Malo verjetno je, da bi bilo naključno izbrano zaporedje konvergentno, zato bomo posplošili pojem limite.

Definicija 0.6. *Zgornja limita* (ali *limes superior*) zaporedja (a_n) je definirana kot

$$\limsup a_n = \begin{cases} \infty, & \text{če je zaporedje navzgor neomejeno;} \\ \text{največje stekališče}, & \text{če je zaporedje navzgor omejeno in ima kako stekališče;} \\ -\infty, & \text{če je zaporedje navzgor omejeno in nima stekališč.} \end{cases}$$

Slika 2. Supremum stekališč

Opomba 0.7. Ta definicija zahteva pojasnili. (i) Če je zaporedje (a_n) navzgor omejeno in ima kako stekališče, potem je tudi množica S vseh njegovih stekališč navzgor omejena in neprazna, torej obstaja $M := \sup S$. Trdimo, da je M stekališče zaporedja (a_n); očitno je potem M največje stekališče zaporedja (a_n). Ker je M najmanjša med zgornjimi mejami množice S, za vsak $\varepsilon > 0$ število $M - \frac{\varepsilon}{2}$ ni zornja meja za S, zato obstaja $s \in S \cap (M - \frac{\varepsilon}{2}, M]$. Ker je s stekališče zaporedja (a_n) (saj je $s \in S$), je v intervalu $(s - \frac{\varepsilon}{2}, s + \frac{\varepsilon}{2})$ neskončno mnogo členov a_n. Ker je $(s - \frac{\varepsilon}{2}, s + \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq (M - \varepsilon, M + \varepsilon)$, jih je neskončno mnogo tudi v intervalu $(M - \varepsilon, M + \varepsilon)$. Torej je M res stekališče zaporedja (a_n).

(ii) Kadar je zaporedje (a_n) navzgor omejeno, a nima stekališč, potem ne more biti navzdol omejeno (saj že vemo, da ima vsako omejeno zaporedje vsaj eno stekališče). Prav tako, sme biti na vsakem končnem intervalu $[c, d]$ le končno mnogo členov, sicer bi zaporedje imelo vsaj eno stekališče. Od tod sledi, da je za vsak $c \in \mathbb{R}$ lahko večjih od c le končno mnogo členov a_n. V tem smislu tedaj zaporedje (a_n) konvergira proti $-\infty$.

Trditev 0.8. *Naj bo zaporedje (a_n) navzgor omejeno in naj ima kako stekališče ter označimo $M = \limsup a_n$. Potem je M najmanjše tako število $c \in \mathbb{R}$, da je za vsak $\varepsilon > 0$ le končno mnogo členov a_n večjih od $a + \varepsilon$.*

Dokaz. Naj bo Z zgornja meja zaporedja (a_n). Ker je M največje stekališče zaporedja (a_n), je na intervalu $(M + \varepsilon, Z]$ lahko le končno mnogo členov a_n, sicer bi imelo zaporedje kako stekališče v intervalu $[M + \varepsilon, Z]$, kar bi nasprotovalo dejstvu, da je M največje stekališče. Torej je večjih od $M + \varepsilon$ le končno mnogo členov a_n (Z je namreč njihova zgornja meja).

Naj bo sedaj $c \in \mathbb{R}$ tak, da je za vsak $\varepsilon > 0$ večjih od $c + \varepsilon$ le končno mnogo členov a_n. Potem so vsa stekališča zaporedja (a_n) manjša ali enaka c. Če bi bilo namreč kako stekališče s večje od c, bi izbrali pozitiven $\varepsilon < \frac{s-c}{2}$, kar bi zagotovilo, da je $c + \varepsilon < s - \varepsilon$. Toda v intervalu $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ je neskončno mnogo členov zaporedja (a_n) (saj je s njegovo stekališče) in vsi ti členi so večji od $c + \varepsilon$. $\square$

Trditev 0.9. *Za dano zaporedje (a_n) in vsak $n = 1, 2, 3, \ldots$ označimo*

$$b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}.$$

Potem je (b_n) padajoče zaporedje in

$$\inf b_n = \limsup a_n.$$

Pri tem definiramo, da je supremum navzgor neomejenega zaporedja enak ∞, infimum navzdol neomejenega zaporedja pa $-\infty$.

Dokaz. Če je zaporedje (a_n) navzgor neomejeno, potem je $b_n = \infty$ za vsak n, zato tudi $\inf b_n = \infty$. Po definiciji je tedaj tudi $\limsup a_n = \infty$, tako da je v tem primeru trditev dokazana.

Naj bo sedaj zaporedje (a_n) navzgor omejeno in naj nima nobenega stekališča. Tedaj je po drugi zgornji opombi za vsak $c \in \mathbb{R}$ večjih od c le končno mnogo členov a_n, torej so od nekje naprej vsi členi manjši ali enaki c, recimo

$$a_n \leq c \quad \text{za } n \geq m.$$

Toda potem je tudi

$$b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} \leq c \quad \text{za vsak } n \geq m,$$

se pravi, da je le končno mnogo členov b_n večjih od c. Ko uporabimo to ugotovitev na številih $c = -1, -2, -3, \ldots$, opazimo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja kak člen b_{k_n}, ki je manjši od $-n$, zato je $\inf b_k = -\infty$. Ker je tukaj po definiciji tudi $\limsup a_n = -\infty$, spet velja enakost $\inf b_n = \limsup a_n$.

Preostane še možnost, ko je zaporedje (a_n) navzgor omejeno in ima kako stekališče, tako da je po definiciji $\limsup a_n$ največje stekališče; imenujmo ga M. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je v intervalu $(M - \varepsilon, M + \varepsilon)$ neskončno mnogo členov a_n, je $\sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots,\} > M - \varepsilon$. Torej je $b_n > M - \varepsilon$ za vsak n in zato $\inf b_n \geq M - \varepsilon$. Ker velja to za vsak $\varepsilon > 0$, sledi

$$\inf b_n \geq M.$$

Privzemimo, da bi bilo $c := \inf b_n > M$. (Videli bomo, da to vodi do protislovja.) Potem je $b_n \geq c$ za vsak n, se pravi

$$\sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots\} \geq c > d,$$

kjer je d neko fiksno (poljubno izbrano)število med M in c. Od tod sledi, da je $a_{k_n} > d$ za kak $k_n \in \{n, n+1, n+2, n+3, \ldots\}$. Torej je na intervalu $[d, Z]$, kjer je Z zgornja meja zaporedja (a_n), neskončno mnogo členov tega zaporedja. Toda potem je na tem intervalu vsaj eno stekališče tega zaporedja. To stekališče je večje od M (ker je $d > M$), kar nasprotuje dejstvu, da je M največje stekališče. $\square$

Spodnja limita ali *limes inferior* zaporedja (a_n) je definirana podobno kot zgornja in jo označimo kot $\liminf a_n$. Ker je tukaj ne bomo pogosto uporabljali, se bomo zadovoljili s pripombo, da je

$$\liminf a_n = -\limsup(-a_n).$$

Dokaz naslednje trditve bomo pustili za nalogo.

Trditev 0.10. *Če je zaporedje* (a_n) *konvergentno, je* $\limsup a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \liminf a_n$. *Natančneje: zaporedje* (a_n) *je konvergentno natanko tedaj, ko je* $\limsup a_n = \liminf a_n \in \mathbb{R}$.

Naloge. 1. Določite zgornjo in spodnjo limito zaporedij: (i) $(n[1-(-1)^n])$;
(ii) $(-n^2)$;
(iii) $\sin n\pi + \cos n\pi$.
2. Za zaporedji (a_n) in (b_n) pokaite, da iz $a_n \leq b_n$ $(\forall n)$ sledi $\limsup a_n \leq \limsup b_n$ in $\liminf a_n \leq \liminf b_n$.
3. Dokažite, da velja

$$\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$$

za vsaki omejeni zaporedji (a_n) in (b_n).