1. Limite in zveznost funkcij

Če je $D \subseteq \mathbb{R}$, je *funkcija* iz D v R, kar označimo kot

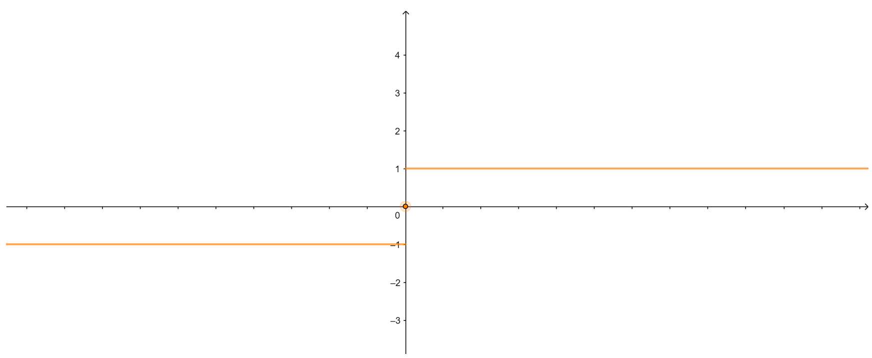
$$f : D \to \mathbb{R},$$

predpis, ki vsakemu $x \in D$ priredi natanko določeno število, ki ga označimo kot $f(x)$. Množico D imenujemo *domena* ali *definicijsko območje* funkcije f, množico $f(D) := \{f(x) : x \in D\}$ pa imenujemo *zaloga vrednosti* funkcije f in jo pogosto označimo z R. Funkcija ni nujno podana z eno samo formulo.

Zgled 1.1. Funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definirano z

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{če je } x > 0; \\ 0, & \text{če je } x = 0; \\ -1, & \text{če je } x < 0, \end{cases}$$

imenujemo *funkcija predznak* ali *signum* in njeno vrednost v točki x običajno označimo kot $\operatorname{sgn}(x)$. Graf te funkcije je v točki $x = 0$ pretrgan. Ko se x bliža k 0 z leve



Slika 1. Graf funkcije signum

strani, ostajajo vrednosti te funkcije -1, njihova limita je zato -1. To bomo izrazili kot: leva limita funkcije $\operatorname{sgn}(x)$, ko gre x proti 0, je -1. S simboli to povemo kot

$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1.$$

Podobno je

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1.$$

Seveda moramo definirati pojma leve in desne limite za splošno funkcijo. (Mimogrede, kaj je zaloga vrednosti funkcije signum?)

Število A bomo imenovali limita funkcije f, ko se x bliža k a, če se vrednosti $f(x)$ bližajo k A, ko gre x proti a. To pomeni, da je razlika $|f(x) - A|$ tako majhna kot hočemo, če je le razlika $|x - a|$ dovolj majhna. Pri tem bomo gledali le $x \neq a$. Natančneje to definicijo povemo takole:

Definicija 1.2. Število $A \in \mathbb{R}$ je *limita funkcije* $f : D \to \mathbb{R}$, ko gre x proti a, kar simbolično zapišemo kot

$$A = \lim_{x \to a} f(x),$$

če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in D$ iz $0 < |x - a| < \delta$ sledi, da je $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Podobno definiramo levo in desno limito. Zapišimo le definicijo leve limite:

$$L = \lim_{x \to a^-} f(x) \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x \in D \text{ in } 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Funkcija f je *zvezna v točki* $a \in D$, če obstaja $\lim_{x \to a} f(x)$ in je enaka $f(a)$. Simbolično lahko definicijo zveznosti v točki a zapišemo takole:

(1.1)

$$f \text{ je zvezna v } a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x \in D \text{ in } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Funkcijo f imenujemo *zvezna*, če je zvezna v vsaki točki svojega definicijskega območja.

Zgled 1.3. (i) Najenostavnejša funkcija je konstantna, ki ima enako vrednost, recimo c, za vse $x \in \mathbb{R}$, torej $f(x) = c$. Ta funkcija je očitno zvezna v vsaki točki a, saj $|f(x) - f(a)| = |c - c| = 0$ za vse $x \in \mathbb{R}$. Tukaj bi lahko za δ, ki nastopa v definiciji zveznosti, vzeli katerokoli pozitivno število.

(ii) Tudi identična funkcija, $\iota(x) = x \; \forall x \in \mathbb{R}$, je povsod zvezna, saj velja $|\iota(x) - \iota(a)| = |x - a| < \varepsilon$, če je $|x - a| < \delta$, kjer za δ lahko vzamemo katerokoli pozitivno število, manjše ali enako ε.

(iii) Nekoliko manj trivialen zgled je funkcija $f(x) = x^2$. Tukaj je $|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |x - a||x + a|$. Da bo to pod ε, če je $|x - a| < \delta$ (torej $|x| < |a| + \delta$ in $|x + a| < 2|a| + \delta$), izberimo $\delta > 0$ tako majhen, da je

$$\delta(2|a| + \delta) \le \varepsilon.$$

To je mogoče, saj lahko izberemo $\delta < 1$ in δ manjši tudi od $\frac{\varepsilon}{2|a|+1}$. (Ni pa mogoče izbrati takega pozitivnega δ, ki bil ustrezen istočasno za vse $a \in \mathbb{R}$, vendar to tukaj ni pomembno.)

Zgled 1.4. Za funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x \neq 0; \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

je $\lim_{x \to 0} = 1$ in $f(0) = 2$, ta funkcija torej ni zvezna v točki 0.

Zgled 1.5. Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definirana z

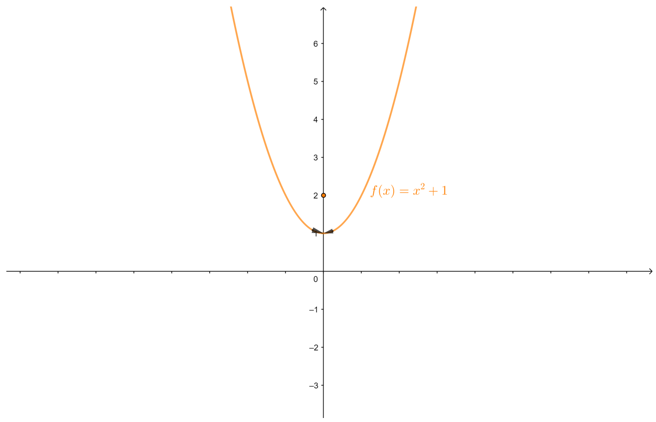
$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}.$$

Kako moramo definirati $f(1)$, če naj bo f zvezna v točki 1?

Ker je

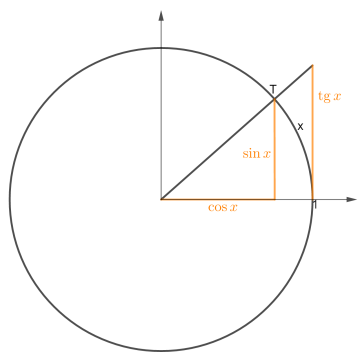
$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2},$$

mora biti $f(1) = \frac{1}{2}$, če naj bo f zvezna v točki 1.



SLIKA 2. $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$

Zgled 1.6. Izračunajmo
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$
Ker je $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, se smemo omejiti na pozitivne x. Iz slike vidimo, da je

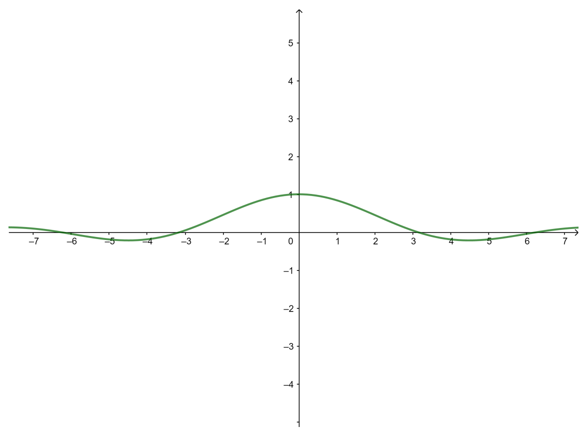


SLIKA 3. $\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$. Tukaj je x lok med 1 in T.

tedaj $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. (Zadnja neenakost morda ni očitna, sledi pa iz dejstva, da je ploščina krožnega izseka (ki jo lahko dobimo tako, da razdelimo izsek na zelo ozke trikotnike z višinami pribliňo 1 in osnovnicami Δx, seštejemo njihove ploščine ter limitiramo Δx proti 0) enaka $\frac{x}{2}$, in je očitno manjša od ploščine trikotnika z osnovnico 1 (tj. daljico med 0 in 1) ter višino $\operatorname{tg} x$.) Ker je $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, lahko ti oceni napišemo kot
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Ker gre očitno $\cos x$ proti 1, ko gre x proti 0, sledi iz gornje ocene, da mora biti

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$



Slika 4. Graf funkcije $\frac{\sin x}{x}$

Imenujmo funkcijo $f : D \to \mathbb{R}$ *po zaporedjih zvezno* v točki $a \in D$, če za vsako zaporedje $(x_n) \subseteq D$, ki konvergira proti a, konvergira zaporedje $(f(x_n))$ proti $f(a)$.

Trditev 1.7. *Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je v točki a zvezna natanko tedaj, ko je po zaporedjih zvezna v tej točki.*

Dokaz. Predpostavimo najprej, da je f zvezna v točki a in naj bo $(x_n) \subseteq D$ zaporedje, ki konvergira proti a. Naj bo $\varepsilon > 0$. Pokazati moramo, da zaporedje $(f(x_n))$ konvergira proti $f(a)$, torej, da je $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ za vse dovolj velike n. Ker je f zvezna v točki a, obstaja tak $\delta > 0$, da velja $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, kakor hitro je $|x - a| < \delta$. Ker zaporedje (x_n) konvergira proti a, obstaja tak $n(\delta) \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n(\delta)$ velja $|x_n - a| < \delta$. Za vse $n \geq n(\delta)$ torej velja $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$, kar pove, da zaporedje $(f(x_n))$ konvergira proti $f(a)$. S tem smo pokazali, da je f po zaporedjih zvezna v točki a.

Za dokaz v obratno smer, privzemimo, da f ni zvezna v točki $a \in D$. Potem obstaja tak $\varepsilon > 0$, da za vsak $\delta > 0$ obstaja kak tak $x \in D$, da je $|x - a| < \delta$ in kljub temu $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$. Pri fiksnem takem ε potem lahko izberemo za δ zaporedoma števila $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$. Za $\delta = \frac{1}{n}$ obstaja tak x, ki ga bomo imenovali x_n, da je

$$|x_n - a| < \frac{1}{n}, \tag{1.2}$$

a kljub temu

$$|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon. \tag{1.3}$$

Neenakost (1.2) pove, da zaporedje (x_n) konvergira proti a. Neenakost (1.3) pa pove, da zaporedje $(f(x_n))$ ne konvergira proti $f(a)$. Torej funkcija f ni po zaporedjih zvezna v točki a. $\square$

Prejšnja trditev nam omogoča enostaven dokaz dejstva, da so vsota, razlika, produkt in kvocient zveznih funkcij zvezne funkcije. *Vsota*, *razlika*, *produkt* in *kvocient* funkcij $f, g :\to \mathbb{R}$ so funkcije, definirane z

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x),\ \ (f-g)(x) = f(x)-g(x),\ \ (fg)(x) = f(x)g(x),\ \ (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Definicijsko območje prvih treh je kar D, definicijsko območje funkcije $\frac{f}{g}$ pa je $\{x \in D :\ g(x) \neq 0\}$.

Trditev 1.8. *Vsota, razlika, produkt in kvocient zveznih funkcij so zvezne funkcije.*

Dokaz. Trditev bomo dokazali za kvocent $\frac{f}{g}$, saj so dokazi za vsoto, razliko in produkt podobni. Pokazati moramo, da je funkcija $\frac{f}{g}$ po zaporedjih zvezna v vsaki točki a svojega definicijskega območja, torej v vsaki točki skupnega definicijskega območja D funkcij f in g, v kateri je $g(a) \neq 0$. Naj bo torej $(x_n) \subset D \setminus \{x \in D : g(x) = 0\}$ zaporedje, ki konvergira proti a. Ker sta funkciji f in g zvezni v točki a, konvergirata zaporedji $(f(x_n))$ in $(g(x_n))$ proti $f(a)$ in $g(a)$. Ker je $g(a) \neq 0$, konvergira zaporedje $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ proti $\frac{f(a)}{g(a)}$, kar smo hoteli dokazati. $\square$

Iz prejšnje trditve sledi npr., da je za vsako konstanto $k \in \mathbb{R}$ funkcija $x \mapsto kx$ zvezna, saj je enaka produktu konstantne funkcije z identično funkcijo $\iota(x) = x$. Potem pa je za vsako konstanto n zvezna tudi vsota $f(x) = kx+n$, skratka linearne funkcije so zvezne.

Tudi funkcija $f_2(x) := x^2$ je (kot produkt $f = \iota\iota$) zvezna. Produkt te funkcije s funkcijo ι je funkcija $f_3(x) = x^3$, ki mora biti tudi zvezna. Na ta način z indukcijo ugotovimo, da so vse potence $f_n(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ zvezne funkcije. Če te potence pomnožimo s konstantami in nato dobljene funkcije zaporedoma seštevamo, ugotovimo, da so vsi polinomi

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \quad (a_n \in \mathbb{R})$$

zvezne funkcije. Tudi vsaka racionalna funkcija, tj. kvocient $\frac{p}{q}$ dveh polinomov, je zvezna na svojem definicijskem območju.

Definicija 1.9. Za dve taki funkciji f in g, da je zaloga vrednosti $f(D_f)$ vsebovana v domeni D_g je njun *kompozitum* funkcija $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$, definirana z

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (x \in D_f).$$

Zgled 1.10. Za funkciji $f(x) = x^2$ in $g(x) = \sin x$ je

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sin x)^2 \ \text{ in } \ (g \circ f)(x) = \sin(x^2).$$

Tudi v primeru, ko sta oba kompozituma $f \circ g$ in $g \circ f$ definirana, ni nujno $f \circ g = g \circ f$, torej komponiranje funkcij ni komutativno.

Trditev 1.11. *Komponiranje funkcij je asociativno:*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

za poljubne take funkcije z definicijskimi območji D_f, D_g *in* D_h, *da je* $f(D_f) \subseteq D_g$ *in* $g(D_g) \subseteq D_h$.

Naloga. Dokažite prejšnjo trditev.

Trditev 1.12. *Kompozitum zveznih funkcij je zvezna funkcija.*

Dokaz. Pokazati moramo, da je funkcija $g \circ f$ po zaporedjih zvezna v vsaki točki $a \in D_f$ njenega definicijskega območja. Naj bo torej $(x_n) \subseteq D_f$ zaporedje, ki konvergira proti a. Ker je f zvezna, konvergira zaporedje $(f(x_n))$ proti $f(a)$. Ker je g zvezna v točki $f(a)$, konvergira zaporedje $(g(f(x_n))$ proti $g(f(a))$. Ker je $g(f(x_n)) = (g \circ f)(x_n)$, to dokazuje trditev. $\square$

Eksponentna funkcija $x \mapsto a^x$ $(a > 0)$ in trigonometrijske funkcije

$$x \mapsto \sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x$$

so zvezne; to bo sledilo kasneje, ko bomo dokazali, da so vse te funkcije odvedljive. Iz prejšnje trditve potem sledi, da so zvezni npr. tudi naslednje funkcije:

$$f(x) = \sin(x^2 + 1),\ g(x) = e^{\sin x},\ h(x) = \cos(2^x), \ldots.$$

Vse te funkcije se namreč dajo na očiten način izraziti kot kompozitumi zveznih funkcij.

2. Asimptote

Definicija 2.1. Premico $y = c$ imenujemo *vodoravna asimptota* funkcije f, če se vrednosti $f(x)$ približujejo konstanti c, ko gre x proti ∞ ali pa proti $-\infty$, torej, ko je

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = c \quad \text{ali} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = c.$$

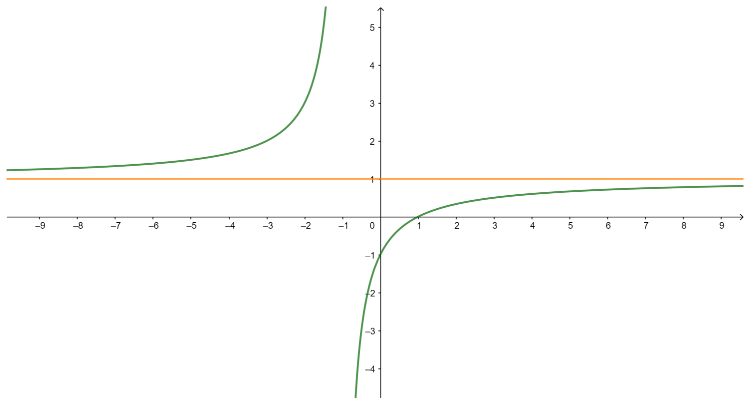
Pri tem npr. pogoj $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$ pomeni, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $A \in \mathbb{R}$, da je $|f(x) - c| < \varepsilon$, kakor hitro je $x \geq A$.

Zgled 2.2. Pri funkciji $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ je

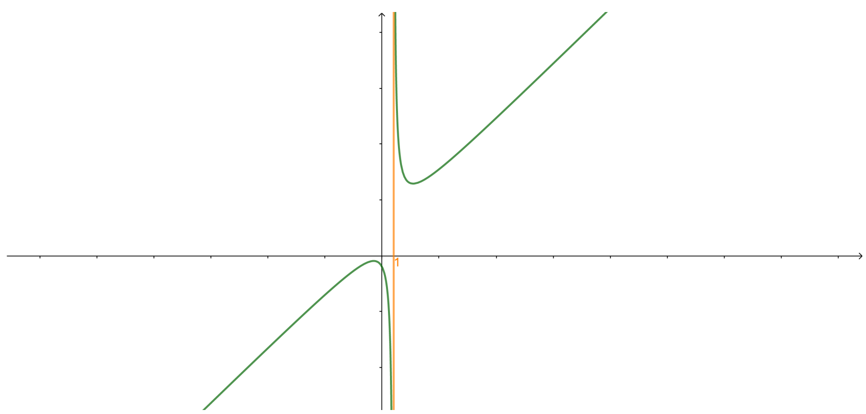
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1,$$

zato je premica $y = 1$ vodoravna asimptota te funkcije.

Definicija 2.3. Ko se x iz definicijskega območja D funkcije f približuje kaki vrednosti $a \notin D$ z leve ali pa desne strani, se lahko zgodi, da gredo vrednosti $f(x)$ proti $\pm\infty$. Tedaj pravimo, da ima funkcija f v točki a *navpično asimpoto*. Pri tem pogoj $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ pomeni, da za vsak $A \in \mathbb{R}$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x) \geq A$, kakor hitro je $0 < a - x < \delta$. Podobno so definirane tudi limite $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ in $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.



SLIKA 5. Graf funkcije $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ in njegova vodoravna asimptota



SLIKA 6. Graf funkcije $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$ in njegova navpična asimptota

Zgled 2.4. Racionalna funkcija $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$ ima za navpično asimptoto premico $x = 1$. V splošnem ima racionalna funkcija $f = \frac{p}{q}$, kjer sta p in q tuja si polinoma, navpično asimptoto v realnih polih, tj. v realnih ničlah polinoma q.

Definicija 2.5. Premica $y = kx + n$ $(k \neq 0)$ je *poševna asimptota* funkcije f, če je izpolnjen vsaj eden od pogojev

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx + n)] = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (kx + n)] = 0.$$

Pri tem npr. prvi pogoj pomeni, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $A \in \mathbb{R}$, da za vse $x \geq A$, ki so v domeni funkcije, velja $|f(x) - (kx + n)| < \varepsilon$.

Kako izračunamo k in n? Iz pogoja $\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+n)]=0$ sledi, da je tudi $\lim_{x\to\infty}\frac{[f(x)-(kx+n)]}{x}=0$, se pravi

$$\lim_{x\to\infty}[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{n}{x}]=0.$$

Od tod dobimo, da je

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Nato iz $\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx-n]=0$ izračunamo še

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

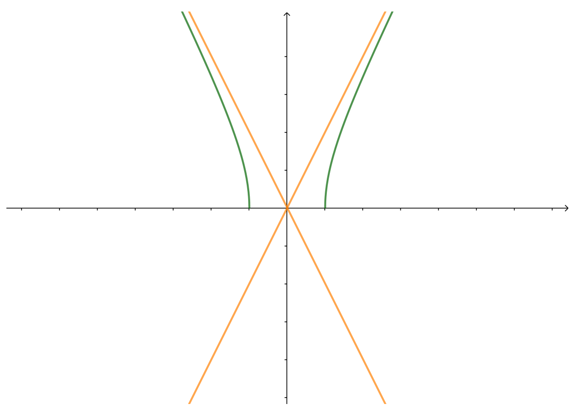
Podobni formuli veljata tudi, ko gre x proti $-\infty$.

Zgled 2.6. Za funkcijo $f(x)=2\sqrt{x^2-1}$ je

$$k_1=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x}=2\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=2$$

in

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x}=-2\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=-2.$$



Slika 7. Graf funkcije $f(x)=2\sqrt{x^2-1}$ in njegovi poševni asimptoti

Nadalje je

$$n_1=\lim_{x\to\infty}[2\sqrt{x^2-1}-2x]=2\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$$

in podobno $n_2=0$. Asimptoti sta tako $y=2x$ in $y=-2x$.

Naloge1. Pokažite, da ima racionalna funkcija $f = \frac{p}{q}$ vodoravno asimptoto natanko tedaj, ko je stopnja polinoma q večja ali enaka stopnji polinoma p. Kdaj je asimptota kar abscisna os?

2. Pokažite, da ima racionalna funkcija $f = \frac{p}{q}$ poševno asimptoto natanko tedaj, ko je stopnja polinoma p za 1 večja od stopnje polinoma q. Tedaj je $f(x) = kx + n + \frac{c(x)}{q(x)}$, kjer sta k in n konstanti, c polinom nižje stopnje kot q, asimptota pa je kar premica $y = kx + n$.

3. Določite vse asimptote za funkcijo $f(x) = \frac{x^2+2}{x+1}$.

3. Lastnosti zveznih funkcij

Graf zvezne funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je nepretrgana krivulja. Če je $f(a) < 0$ in $f(b) > 0$ (ali pa obratno), mora ta krivulja sekati abscisno os, torej ima funkcija f vsaj eno realno ničlo. To dejstvo bomo dokazali brez sklicevanja na predstavo, ki temelji na sliki, ki jo lahko narišemo na papir. Krivulja na sliki je namreč sestavljena iz pik, ki so sestavljene iz molekul in ni zanesljiv model tistega, kar si zamišljamo kot neprekinjeno krivuljo.

Trditev 3.1. *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in $f(a)f(b) \leq 0$. Potem obstaja taka točka $s \in [a, b]$, da je $f(s) = 0$.*

Dokaz. Predpostaviti smemo, da je $f(a) \leq 0$, sicer bi obravnavali funkcijo $-f$. Potem množica $S = \{x \in [a, b] : f(t) \leq 0 \ \forall t \in [a, x]\}$ vsebuje a, in ker je navzgor omejena, obstaja $s := \sup S$. Trdimo, da je $f(s) = 0$.

Ker je s natančna zgornja meja za S, vsak interval $(s - \frac{1}{n}, s]$ vsebuje kak element $s_n \in S$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Zaporedje (s_n) konvergira proti s, zato zaporedje $(f(s_n))$ konvergira proti $f(s)$, saj je f zvezna. Ker je $s_n \in S$, je $f(s_n) \leq 0$ in sledi $f(s) \leq 0$ Če bi bilo $f(s) < 0$, najprej opazimo, da je $s \neq b$, saj je $f(b) \geq 0$. Če bi bilo $f(s) < 0$, bi zaradi zveznosti obstajal tak $\delta > 0$, da bi bilo $f(x) < 0$ za vse $x \in (s - \delta, s + \delta) \cap [a, b]$. (To spoznamo, če v definiciji zveznosti vzamemo $\varepsilon = |f(s)|$.) Če izberemo δ dovolj majhen, je $[s, s + \delta) \subseteq [a, b]$ in sledi, da je $[s, s + \delta) \subseteq S$. Toda potem s ni zgornja meja množice s (saj je npr. $s + \delta/2 \in S$). To je protislovje, torej mora biti $f(s) = 0$. $\square$

V praksi lahko ničlo funkcije f določimo do poljubne natančnosti npr. z metodo *bisekcije*. Če je npr. $f(a) < 0$ in $f(b) > 0$, pogledamo vrednost funkcije v razpolovišču $c = \frac{a+b}{2}$ intervala $[a, b]$. Če je $f(c) > 0$, mora biti kaka ničla na intervalu $[a, c]$, če pa je $f(c) < 0$, mora biti ničla na intervalu $[c, b]$. Ta postopek razpolavljanja intervala, na katerem je vsaj ena ničla, lahko nadaljujemo, dokler ne dobimo tako kratkega intervala, kot zahteva željena natančnost določitve ničle.

Definicija 3.2. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je *omejena* (navzgor, navzdol), če je taka njena zaloga vrednosti $f(D)$. Navzgor je omejena torej takrat, kadar obstaja kak tak $M \in \mathbb{R}$, da velja $f(x) \leq M$ za vse $x \in D$. Vsak tak M imenujemo *zgornja meja funkcije* in najmanjšo med zgornjimi mejami imenujemo *supremum* ter označimo z $\sup f$. Podobno je definirana največja med spodnjimi mejami ali *infimum*, ki ga označimo z $\inf f$.

Nemogoče si je zamisliti neomejeno zvezno funkcijo, definirano na zaprtem intervalu.

Trditev 3.3. *Vsaka zvezna funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je omejena (navzgor in navzdol).*

Dokaz. Privzemimo nasprotno, da f npr.ni navzgor omejena. Potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja kak tak $x_n \in [a,b]$, da je $f(x_n) > n$. Zaporedje (x_n) je omejeno (navzdol z a, navzgor pa z b) in ima zato vsaj eno stekališče $s \in [a,b]$. Ker je f zvezna, obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - f(s)| < 1$, če je $|x - s| < \delta$. Toda, ker je s stekališče zaporedja (x_n), je v intervalu $(s-\delta, s+\delta)$ neskončno mnogo členov x_n, zanje torej velja $|f(x_n) - f(s)| < 1$. To ima za posledico $|f(x_n)| < |f(s)| + 1$, in ker je $f(x_n) > n$, bi sledilo, da je $n < |f(s)| + 1$ za neskončno mnogo indeksov n, kar je očitno nemogoče. Podoben argument pove, da je funkcija omejena tudi navzdol. $\square$

Naj pripomnimo, da gornja trditev ne velja za funkcije, definirane na odprtih ali polzaprtih intervalih. Npr. funkcija $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, definirana z $f(x) = \frac{1}{x}$, je zvezna, vendar ni navzgor omejena. Ni pa mogoče te funkcije razširiti do zvezne funkcije na celotnem zaprtem intervalu $[0,1]$.

Izrek 3.4. *Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, $m = \inf_{a \le x \le b} f(x)$ in $M = \sup_{a \le x \le b} f(x)$. Funkcija f zavzame vsako vrednost med m in M, drugače rečeno, za vsak $c \in [m,M]$ obstaja tak $x_c \in [a,b]$, da je $f(x_c) = c$.*

Dokaz. Najprej bomo dokazali, da f zavzame vrednost M. Predpostavimo nasprotno, da je $f(x) \neq M$ (se pravi $f(x) < M$, ker je M zgornnja meja za f) za vsak $x \in [a,b]$. Potem je funkcija $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, definirana z

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)},$$

zvezna, zato omejena. Naj bo A kaka njena zgornja meja, torej

$$\frac{1}{M - f(x)} = g(x) \le A \ \forall x \in [a,b].$$

Od tod sledi, da je $f(x) \le M - \frac{1}{A}$, kar pomeni, da je $M - \frac{1}{A}$ zgornja meja za f. Toda to je nemogoče, saj je M najmanjša zgornja meja za f. Podobno dokažemo, da je f omejena navzdol (ali pa uporabimo pravkar dokazano na funkciji $-f$).

Naj bo sedaj $c \in (m,M)$ in $x_m, x_M \in [a,b]$ taka, da je $f(x_m) = m$ in $f(x_M) = M$. Funkcija $h : [x_m, x_M] \to \mathbb{R}$, definirana s $h(x) = f(x) - c$, je na krajiščih x_m in x_M nasprotno predznačena, saj je

$$h(x_m) = m - c < 0 \quad \text{in} \quad h(x_M) = M - c > 0.$$

Torej mora imeti na intervalu $[x_m, x_M]$ vsaj eno ničlo, ki jo imenujmo x_c, torej je $h(x_c) = 0$. Tedaj je $f(x_c) - c = h(x_c) = 0$, kar pomeni $f(x_c) = c$. Ker je interval $[x_m, x_M]$ vsebovan v intervalu $[a,b]$, je $x_c \in [a,b]$. $\square$

Ker zvezna funkcija f na zaprtem intervalu zavzame svoj supremum, ga bomo imenovali *maksimum* in označevali tudi z $\max f$. Podobno bomo infimum funkcije, ki ga zavzame, imenovali *minimum* in označili kot $\min f$.

Definicija 3.5. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je *injektivna*, če za poljubna $x_1 \neq x_2$ iz D velja $f(x_1) \neq f(x_2)$. Funkcijo $f : D \to E$ imenujemo *surjektivna*, če je vsak $y \in E$ slika kakega $x \in D$. Surjektivno in injektivno funkcijo $f : D \to E$ imenujemo *bijektivna funkcija* ali *bijekcija*.

Naloga. Premislite, da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ injektivna natanko tedaj, ko njen graf seka vsako vzporednico z abscisno osjo kvečjemu enkrat. Nadalje premislite, da je $f : D \to \mathbb{R}$ surjektivna natanko tedaj, ko njen graf seka vsako vzporednico z abscisno osjo vsaj enkrat.

Definicija 3.6. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je *naraščajoča*, če za vsaka $x_1, x_2 \in D$ iz $x_1 < x_2$ sledi, da je $f(x_1) \leq f(x_2)$. Če velja pri tem stroga neenakost, pravimo, da je f *strogo naraščajoča*.

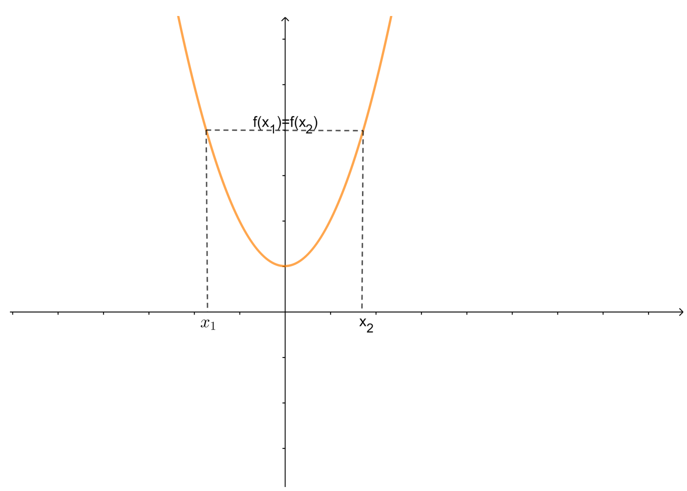
Podobno pravimo, da je f padajoča, če je $f(x_2) \leq f(x_1)$, kakor hitro je $x_1 < x_2$. Skupno ime za naraščajoče in padajoče funkcije je *monotone funkcije*.

Očitno je vsaka strogo monotona funkcija injektivna. Obratno pa ni vedno res. Npr. funkcija $f : [a,b] \to [a,b]$, definirana z

$$f(x) = \begin{cases} b, & x = a; \\ x, & x \in (a,b); \\ a, & x = b \end{cases}$$

je injektivna in ni monotona, če je $a < b$.

Izrek 3.7. *Vsaka zvezna injektivna funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je strogo monotona.*



SLIKA 8. Zvezna nemonotona funkcija ne more biti injektivna.

Dokaz. Predpostaviti smemo, da je $a < b$ in $f(a) < f(b)$ (sicer bi nadomestili f z $-f$). Naj bo $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$ in $x_M \in [a,b]$ taka točka, da je $f(x_M) = M$. Če bi bila x_M notranja točka intervala, se pravi $x_M \in (a,b)$, potem bi funkcija

f na intervalu $[a, x_M]$ zavzela vse vrednosti med $f(a)$ in $f(x_M) = M$ (in morda še kake druge), na intervalu $[x_M, b]$ pa vsaj vse vrednosti med $f(x_M)$ in $f(b)$. Ker je $f(a) < f(b)$, bi torej f na intervalu $[a, b]$ zavzela vsako vrednost iz intervala $(f(b), f(x_M))$ vsaj dvakrat (enkrat na intervalu (a, x_M) in enkrat na intervalu (x_M, b)). To bi nasprotovalo injektivnosti funkcije f, razen v primeru, ko je eden od delnih intervalov (a, x_M), (x_M, b) prazna množica, se pravi $x_M = a$ ali pa $x_M = b$. Ker je M maksimum funkcije f in $f(a) < f(b)$, pride v poťev le $x_M = b$. Torej zavzame f svoj maksimum v desnem, svoj minimum pa (s podobnim dokazom) v levem krajišču. To pomeni, da je $f(a) < f(x) < f(b)$ za vsak $x \in (a, b)$.

Naj bo sedaj $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in (a, b))$. Po tistem, kar smo dokazali v prejšnjem odstavku, velja $f(a) < f(x_1) < f(b)$ in $f(a) < f(x_2) < f(b)$. Toda, če uporabimo sklepanje iz prejšnjega odstavka na interval $[a, x_2]$ (namesto intervala $[a, b]$), spoznamo, da je $f(a) < f(x_1) < f(x_2)$. To pa pove, da je f strogo naraščajoča na $[a, b)$ in, ker je injektivna na $[a, b]$ in ima v b maksimum, tudi strogo naraščajoča na $[a, b]$. $\square$

Definicija 3.8. Naj bo $f : D \to R$ bijekcija, kar pomeni, da za vsak $y \in R$ obstaja natanko en tak $x \in D$, da je $f(x) = y$. Tedaj lahko definiramo funkcijo $f^{-1} : R \to D$ takole:

$$f^{-1}(y) := x \Longleftrightarrow y = f(x).$$

To funkcijo imenujemo *inverzna funkcija funkcije* f.

Opazimo, da je domena funkcije f^{-1} enako zalogi vrednosti funkcije f, zaloga vrednosti funkcije f^{-1} pa enaka domeni funkcije f.

Naloge. 1. Bodita ι_D in ι_R identični funkciji na množicah D in R (torej $\iota_D(x) = x$ za vsak $x \in D$ in $\iota_R(y) = y$ za vsak $y \in R$). Pokažite, da je

$$\iota_R \circ f = f \quad \text{in} \quad f \circ \iota_D = f$$

za vsako funkcijo $f : D \to R$.

2. Pokažite, da je

$$f^{-1} \circ f = \iota_D \quad \text{in} \quad f \circ f^{-1} = \iota_R$$

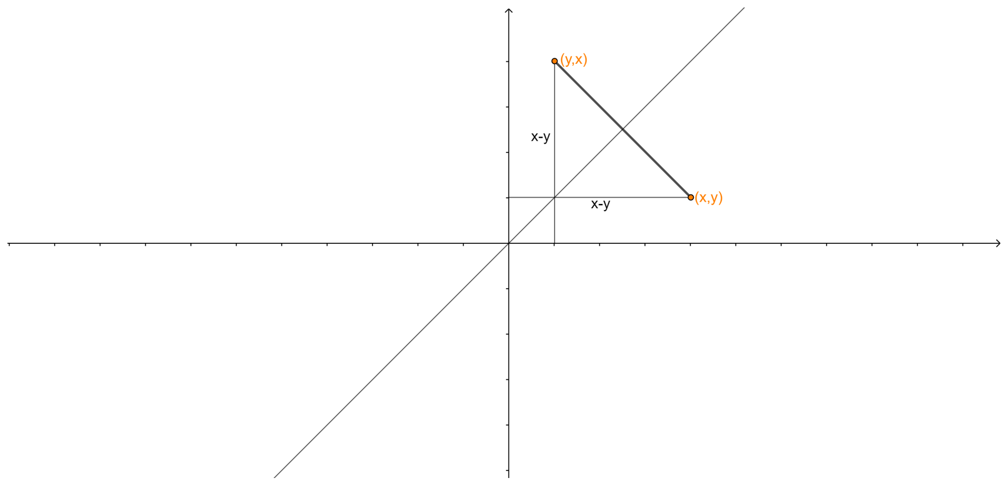
za vsako bijekcijo $f : D \to R$.

3. Pokažite, da je inverzna funkcija strogo naraščajoče funkcije tudi strogo naraščajoča, strogo padajoče pa strogo padajoča.

4. Pokažite, da je vsaka zvezna injektivna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona.

Za vsako točko $(x, f(x))$ na grafu G_f funkcije f, je točka $(f(x), x)$ na grafu $G_{f^{-1}}$ funkcije f^{-1} (saj je $f^{-1}(f(x)) = x$) in obratno. To pomeni, da lahko graf funkcije f^{-1} dobimo iz grafa funkcije f, tako, da vsaki točki (x, y) zamenjamo koordinati. Točki (y, x) in (x, y) sta si simetrični glede na premico $y = x$, zato lahko dobimo $G_{f^{-1}}$ kar tako, da G_f prezrcalimo prek te premice.

Zgled 3.9. Inverz exponentne funkcije $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ imenujemo logaritem z onsovo a, $f^{-1}(x) = \log_a x$. Tukaj je domena funkcije f enaka $\mathbb{R}$, zaloga vrednosti pa $(0, \infty)$. Logaritem je zato definiran le na poltraku $(0, \infty)$, njegova zaloga vrednosti pa je $\mathbb{R}$.



Slika 9. Zrcaljenje prek premice $y = x$

Naloge. 1. Kaj je inverzna funkcija potence, $f(x) = x^n$?

2. Pokažite, da je linearna funkcija $f(x) = kx + n$ bijekcija iz $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$ natanko tedaj, ko je $k \neq 0$, in da je tedaj f^{-1} tudi linearna funkcija.

3. Izračunajte inverzno funkcijo funkcije $f(x) = x^3 + 1$.

Izrek 3.10. *Naj bo $f : [a, b] \to [c, d]$ zvezna bijekcija. Potem je tudi inverzna funkcija f^{-1} zvezna.*

Dokaz. Pokazali bomo, da je f^{-1} zvezna v vsaki notranji točki t intervala $[c, d]$, dokaz v robnih točkah je podoben. Po eni prejšnjih trditev je f bodisi strogo naraščajoča bodisi strogo padajoča; obravnavali bomo le primer, ko je f strogo naraščajoča, saj primer padajoče funkcije sledi potem z zamenjavo f v $-f$. Naj bo $s = f^{-1}(t)$, torej $t = f(s)$. Naj bo $\varepsilon > 0$ tako majhen, da je interval $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ vsebovan v $[a, b]$. (To je možno, saj je f^{-1} strogo monotona, zato preslika c v a in d v b, torej mora (zaradi injektivnosti) preslikati t v notranjo točko intervala $[a, b]$.) Funkcija f preslika interval $(s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ na interval $(f(s - \varepsilon), f(s + \varepsilon))$, ki vsebuje točko $t = f(s)$, ker je f monotona. Naj bo

$$\delta = \min\{t - f(s - \varepsilon), f(s + \varepsilon) - t\}.$$

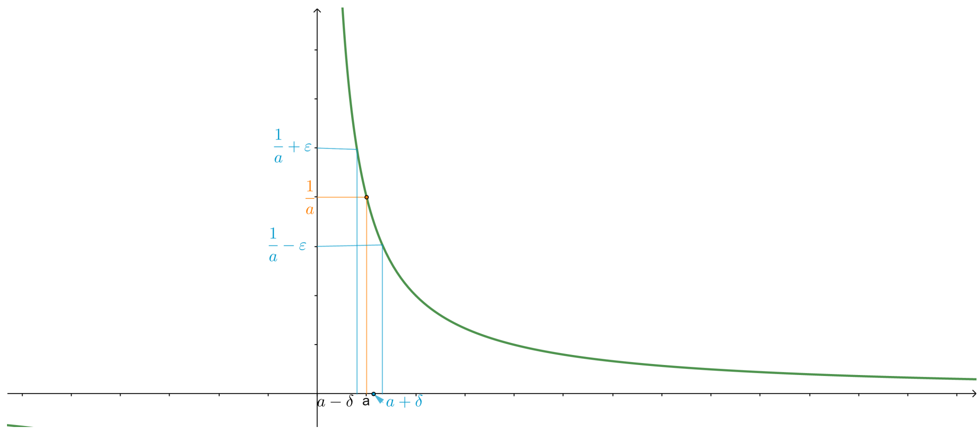
Potem je interval $(t - \delta, t + \delta)$ vsebovan v intervalu $(f(s - \varepsilon), f(s + \varepsilon))$, zato ga f^{-1} preslika v interval $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$. Drugače rečeno, iz $|y-t| < \delta$ sledi $|f^{-1}(y) - f^{-1}(t)| < \varepsilon$, kar pove, da je f^{-1} zvezna v točki t. $\square$

Naloga. Dokažite, da je inverzna preslikava vsake zvezne bijekcije $f : I \to J$ tudi zvezna, kjer sta I in J bodisi odprta intervala ali poltraka ali pa cela realna os.

4. Enakomerna zveznost

Po definiciji je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ zvezna v točki $a \in D$ natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in D$ iz $|x-a| < \delta$ sledi $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Pri tem je δ očitno odvisen od ε; čim manjši je ε, tem manjši mora biti v splošnem δ, da bo pogoj izpolnjen. Je pa δ v splošnem odvisen tudi od a, kot pove naslednji zgled.

Zgled 4.1. Funkcija $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definirana z $f(x) = \frac{1}{x}$, je zvezna v vsaki točki $a \in (0, \infty)$. Iz slike lahko opazimo, da je δ odvisen od a in da ne obstaja δ, ki bi bil (pri fiksnem ε) ustrezen v vseh točkah $a \in (0, \infty)$. Pokažimo to tudi računsko.



Slika 10. Neenakomerna zveznost

Pri danem a in $\varepsilon > 0$, poglejmo, kakšen sme biti $\delta > 0$, da bo iz $|x - a| < \delta$ sledilo $|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}| < \varepsilon$, se pravi $\frac{1}{x} \in (\frac{1}{a} - \varepsilon, \frac{1}{a} + \varepsilon)$, tj.

$$x \in (\frac{a}{1 + a\varepsilon}, \frac{a}{1 - a\varepsilon}).$$

Interval $(a - \delta, a + \delta)$ mora torej biti vsebovan v intervalu $(\frac{a}{1+a\varepsilon}, \frac{a}{1-a\varepsilon})$, torej za dolžini teh dveh intervalov velja

$$2\delta \leq \frac{a}{1 - a\varepsilon} - \frac{a}{1 + a\varepsilon} = \frac{2a^2\varepsilon}{1 - a^2\varepsilon^2} \leq 2a^2\varepsilon \text{ (če je } \varepsilon < \frac{1}{a^2}).$$

Ko gre a proti 0, gre tudi δ proti 0, saj je $\delta < a^2\varepsilon$, zato noben $\delta > 0$ ni ustrezen v vseh točkah $a > 0$.

Definicija 4.2. Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je *enakomerno zvezna*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vse $t, x \in D$ iz $|x - t| < \delta$ sledi $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$.

Poanta v tej definiciji je v tem, da je isti δ ustrezen v vseh točkah $t \in D$. Očitno je vsaka enakomerno zvezna funkcija tudi zvezna, presenetljivo pa je, da na zaprtih intervalih velja tudi obratno:

Izrek 4.3. *Vsaka zvezna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je enakomerno zvezna.*

Dokaz. Predpostavimo nasprotno, da f ni enakomerno zvezna. Potem obstaja tak $\varepsilon > 0$, da za vsak $\delta > 0$ obstajata taka $t, x \in [a,b]$, da je $|x - t| < \delta$, a kljub temu $|f(x) - f(t)| \geq \varepsilon$. Ko za δ izbiramo zaporedoma $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, vidimo, da obstajajo taki $t_n, x_n \in [a,b]$, da je $|x_n - t_n| < \frac{1}{n}$, a kljub temu $|f(x_n) - f(t_n)| \geq \varepsilon$. Naj bo s stekališče zaporedja (t_n). Ker je f zvezna, obstaja tak $\delta > 0$, da velja $|f(x) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$, kakor hitro je $|x - s| < \delta$. Ker je s stekališče zaporedja (t_n), velja neenakost $|t_n - s| < \frac{\delta}{2}$ za neskončno mnogo indeksov n. Ker je $|x_n - t_n| < \frac{1}{n}$, velja za vse dovolj velike take indekse tudi neenakost $|x_n - s| < \delta$. Za take n potem hkrati velja

$$|f(t_n) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{in} \quad |f(x_n) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Toda od tod sledi, da je

$$|f(x_n) - f(t_n)| = |(f(x_n) - f(s)) + (f(s) - f(t_n))| \leq |f(x_n) - f(s)| + |f(t_n) - f(s)| < \varepsilon,$$

kar je v protislovju z začetno neenakostjo $|f(x_n) - f(t_n)| \geq \varepsilon$. $\square$