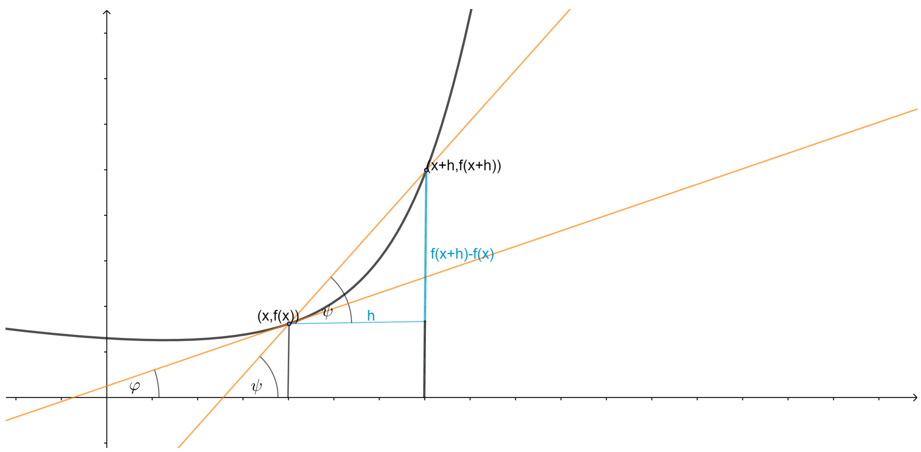
1. Odvod in diferencial

Sekanta skozi točki $(x, f(x))$ in $(x+h, f(x+h))$ grafa funkcije $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ima smerni koeficient

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ko gre h proti 0, se ta smerni koeficient približuje smernemu koeficientu tangente na graf v točki $(x, f(x))$. Limita teh smernih koeficientov je tako pomembna, da ima posebno ime in nastopa vsebovsod v matematiki in njeni uporabi.



Slika 1. $\operatorname{tg}\psi = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $\operatorname{tg}\varphi = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Definicija 1.1. *Odvod funkcije* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *v točki* $x \in (a,b)$ je

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{1.1}$$

Če ta limita obstaja, pravimo, da je funkcija f *odvedljiva v točki* x. Funkcijo imenujemo *odvedljiva*, če je odvedljiva va vsaki točki svojega definicijskega območja (a,b). (Pri tem dopučamo možnost, da je $a = -\infty$ ali $b = \infty$.)

Zgled 1.2. Oglejmo si nekaj zgledov odvedljivih funkcij.

(i) Pri funkciji $f(x) = x^n$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, imamo

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$
$$= \frac{1}{h}[x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - x^n]$$
$$= nx^{n-1} + h[\binom{n}{2}x^{n-2} + \ldots + h^{n-1}].$$

Torej je

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1} + h[\binom{n}{2}x^{n-2} + \ldots + h^{n-1}]\right] = nx^{n-1}.$$

To bomo na kratko zapisali kar kot

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

(ii) Pri funkciji $f(x) = \sin x$, je

$$f(x+h) - f(x) = \sin(x+h) - \sin x = \sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x,$$

zato

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \cos x \frac{\sin h}{h} - \sin x \frac{1-\cos h}{h} = \cos x \frac{\sin h}{h} - 2\sin x \frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{h}.$$

Ker že vemo, da je $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ in zato

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin^2 \frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2 \frac{h}{4} = 0,$$

sledi, da je $f'(x) = \cos x$. Torej je

$$\sin' x = \cos x.$$

Podobno bi ugotovili, da je

$$\cos' x = -\sin x.$$

(iii) Pri eksponentni funkciji $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ imamo

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a^x \frac{a^h - 1}{h}.$$

Da bi izračunali $\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$, vpeljimo $m = \frac{1}{a^h-1}$. Ko gre h proti 0, gre a^h proti 1. (Če je namreč $h = \frac{1}{n}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, je $a^h = \sqrt[n]{a}$, kar gre, kot že vemo, proti 1 ko gre n proti ∞. V splošnem pa je za majhne pozitivne h, $h \leq \frac{1}{n}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$ velik, in, če je $a > 1$, je $0 < a^h - 1 \leq a^{\frac{1}{n}} - 1$, kar gre proti 0, ker gre n proti ∞. Če pa je $h < 0$ in $a > 1$, je $0 < 1 - a^h < a^{|h|} - 1$ (saj je $2 < a^h + a^{-h}$, ker je $2 < t + \frac{1}{t}$ za vsak $t \neq 0$). Kadar je $a \in (0,1)$ pa si pomagamo z zvezo $a^h = (\frac{1}{a})^{-h}$).) Torej gre m proti ∞ in, ko iz zveze $a^h - 1 = \frac{1}{m}$ izrazimo h kot $h = \frac{\ln(1+\frac{1}{m})}{\ln a}$, dobimo

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{m\to\infty} \frac{\ln a}{m \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)} = \lim_{m\to\infty} \frac{\ln a}{\ln(1+\frac{1}{m})^m} = \frac{\ln a}{\ln e} = \ln a.$$

Pri tem smo molče uporabili dejstvo, daje logaritem zvezna funkcija (kar sledi iz zveznosti eksponentne funkcije, katere inverz je, zveznost le te pa se reducira na zvetnost v točki 0, kjer uporabimo zvezo $\lim_{h\to 0} a^h = 1$). Uporabili smo tudi dejstvo, da je $\lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^m = e$, čeprav smo ga doslej dokazali le v primeru, ko m teče po celih številih, tukaj pa števila m niso nujno cela. Odpravo te pomanjkljivosti bomo opisali v navodilu k naslednji nalogi. Potem bo dokazano, da je

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Kot poseben primer te formule imamo

$$(e^x)' = e^x.$$

Naloga. Za vsak $m \in \mathbb{R}$ naj bo $[m]$ njegov celi del. Pokažite, da je $\lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^m = \lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^{[m]}$ in da gre razlika $(1+\frac{1}{[m]})^{[m]} - (1+\frac{1}{m})^{[m]}$ proti 0, ko gre m proti ∞, od koder sledi, da je

$$\lim_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^m = \lim_{[m]\to\infty}(1+\frac{1}{[m]})^{[m]} = e.$$

(Navodilo. Za dani $m > 0$ označimo $n = [m]$, $a = 1+\frac{1}{n}$ in $b = 1+\frac{1}{m}$. Potem je

$$0 < a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$
$$\leq n(a-b)a^{n-1} = \frac{m-n}{m}(1+\frac{1}{n})^{n-1}.$$

Ker je $m - n \in [0, 1)$, gre $\frac{m-n}{m}$ proti 0, ko gre m proti ∞ in iz zadnje ocene sledi, da gre $a^n - b^n$ proti 0.)

1.1. **Lastnosti, ki olajšajo računanje odvodov.** Vsakokratno računanje odvodov po definiciji bi bilo zamudno, zato bomo spoznali nekaj pravil, ki olajšajo to delo.

Trditev 1.3. *Vsota, razlika, produkt in kvocient odvedljivih funkcij so odvedljive funkcije in velja*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x),\ (f-g)'(x) = f'(x) - g'(x),$$
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),\ (\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Dokaz. Po definiciji odvoda in seštevanja funkcij imamo

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}] = f'(x) + g'(x) = (f+g)'(x).$$

Dokaz za odvod razlike funkcij je podoben in ga bomo opustili.

Oglejmo si sedaj odvod produkta:

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Pri tem smo molče uporabili dejstvo, da gre $g(x+h)$ proti $g(x)$, ko gre h proti 0, ki pomeni, da je g zvezna. Za dokaz tega dejstva, upoštevajmo, da gre kvocient $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ proti $g'(x)$, ko gre h proti 0. Ker gre v tem ulomku imenovalec h proti 0, mora konvergirati proti 0 tudi števec $g(x+h) - g(x)$, sicer ulomek ne bi mogel konvergirati proti končnemu številu.

Končno obravnavajmo še odvod kvocienta:

$$(\frac{f}{g})'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x) - f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}]\frac{1}{g(x)g(x+h)}\right]$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

□

Pravilo za odvod produkta, $(fg)' = f'g + fg'$ imenujemo *Leibnizova formula.* V njenem dokazu smo spoznali pomembno dejstvo, ki ga je potrebno navesti posebej:

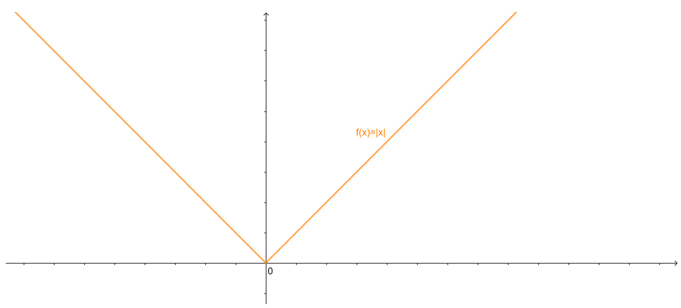
Trditev 1.4. *Vsaka odvedljiva funkcija je zvezna.*

Naslednji zgled pove, da obrat te trditve ne velja, ni namreč vsaka zvezna funkcija odvedljiva.

Zgled 1.5. Funkcija $f(x) = |x|$ je zvezna. Ni pa odvedljiva v točki 0, saj je

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & h > 0; \\ -1, & h < 0 \end{cases}$$

in zato limita teh kvocientov, ko gre h proti 0, ne obstaja. To je razvidno tudi iz



Slika 2. Funkcija $f(x) = |x|$ v točki $x = 0$ nima enolične tangente, zato tam ni odvedljiva.

slike, saj graf funkcije $x \mapsto |x|$ v točki $x = 0$ nima enolične tangente.

Zgled 1.6. (i) Poseben primer Leibnizove formule dobimo, ko je ena od funkcij, recimo g, konstantna, torej $g(x) = c$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Tedaj je $g'(x) = 0$ za vse x in pravilo se glasi

$$(cf)'(x) = cf'(x).$$

(ii) S pomočjo pravkar navedenega, pravila za odvod vsote in odvod potence ($(x^n)' = nx^{n-1}$), lahko odvajamo poljuben polinom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$:

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + ma_mx^{m-1}.$$

(iii) Pravilo za odvod kvocientov omogoča npr. odvajanje racionalnih funkcij. Za zgled izračunajmo

$$(\frac{x^2-1}{x^2+1})' = \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

(iv) Pravilo za odvod kvocienta omogoča tudi izračun odvodov trigonometrijskih funkcij tg in ctg:

$$\operatorname{tg}' x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Torej je

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{in podobno} \quad \operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Oglejmo si sedaj še, kako se odvaja kompozitum dveh funkcij.

Trditev 1.7. *Odvod kompozituma $g \circ f$ dveh odvedljivih funkcij se izraža kot*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Dokaz. Označimo $u = f(x)$ in $k = f(x+h) - f(x)$. Potem je $f(x+h) = f(x) + k = u + k$ in lahko zapišemo, kadar je $k \neq 0$,

$$\frac{(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(h)}{h}$$
$$= \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \frac{g(u+k) - g(u)}{k} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ta enakost velja tudi v primeru $k = 0$, če interpretiramo kvocient $\frac{g(u+k)-g(u)}{k}$ kot 0. Ko gre h proti 0, gre tudi k proti 0 (ker so odvedljive funkcije zvezne), zato gre izraz na skrajni desni strani gornje formule proti $g'(u)f'(x)$, kar je bilo treba dokazati. $\square$

Formulo za odvod kompozituma izgleda naravno, če jo zapišemo z *Leibnizovimi oznakami za odvode*. Spremembo h neodvisne spremenljivke x je v navadi označiti tudi z Δx in z dx; spremembo funkcijske vrednosti $y = f(x)$ pa z Δy, torej $\Delta y = f(x+h) - f(x)$. *Diferenčni kvocient* $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ lahko potem zapišemo kot

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Odvod f' označimo kot $\frac{dy}{dx}$, torej je

$$\frac{dy}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}(x).$$

Pri tem si predstavljamo $\frac{dy}{dx}$ kot kvocient dveh "infinitezimalno majhnih" količin.

Pri kompozitumu $g \circ f$ dveh funkcij, označimo $u = f(x)$ in $y = g(f(x)) = g(u)$, tako, da je y posredna funkcija spremenljivke x, namreč prek spremenljivke u. Pravilo za odvod posredne funkcije lahko sedaj na kratko zapišemo kot

$$\frac{dy}{dx}(x) = \frac{dy}{du}(u)\frac{du}{dx}(x)$$

oziroma, če opustimo pisanje spremenljivk, kar kot

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Če bi tukaj oznake pomenile ulomke, bi bilo pravilo očitno, saj bi se du pokrajšal, vendar pa ne gre za kvociente, temveč za limite kvocientov.

Zgled 1.8. Funkcijo $y = e^{\sin x}$ imamo lahko za posredno funkcijo in sicer kot $y = e^u$, kjer je $u = \sin x$. Po pravilu za posredno odvajanje je $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{du} e^u \frac{du}{dx} = e^u \cos x = e^{\sin x} \cos x$.

Podobno lahko izračunate, da je $(\cos(x^3 - 2x))' = -(3x^2 - 2)\sin(x^3 - 2x)$.

1.2. **Diferencial.** Označimo

$$\eta(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x). \tag{1.2}$$

Po definiciji odvoda, je

$$\lim_{h\to 0} \eta(x,h) = 0.$$

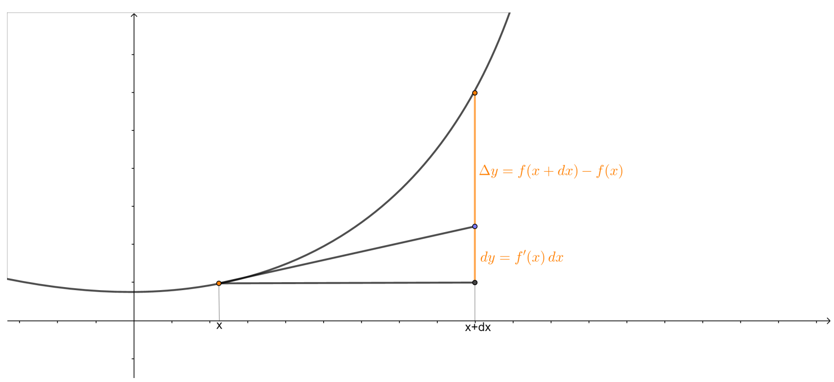
Iz (1.2) lahko izrazimo

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \eta(x,h)h. \tag{1.3}$$

Ker gre pri tem (pri fiksnem x) izraz $\eta(x,h)$ proti 0, ko gre h proti 0, je za majhne h produkt $\eta(x,h)h$ majhen v primerjavi s h in tako tudi v primerjavi z $f'(x)h$, če je $f'(x) \neq 0$. Tedaj je $f'(x)h$ dober približek za spremembo $f(x+h) - f(x)$ vrednosti funkcije f. Pri fiksnem x je funkcija $h \mapsto f'(x)h$ linearna, imenujemo jo diferencial funkcije f v točki x.

Definicija 1.9. *Diferencial* odvedljive funkcije f v točki x je funkcija iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$, definirana z

$$h \mapsto f'(x)h.$$



SLIKA 3. Diferencial in sprememba funkcijske vrednosti

V navadi je pisati $dx = h$, $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ in $dy = f'(x)\,dx$. Potem lahko enakost (1.3) zapišemo kot

$$\Delta y = f'(x)\,dx + o(x,dx) = dy + o(x,dx), \tag{1.4}$$

kjer smo označili $o(x,dx) = \eta(x,dx)\,dx$. Za majhne dx je "ostanek" $o(x,dx)$ majhen v primerjavi z dx in diferencial dy je tedaj dober približek za spremembo Δy vrednosti funkcije v smislu, da je razlika $\Delta y - dy$ majhna v primerjavi z dx. Natančneje, $\lim_{dx\to 0} \frac{\Delta y - dy}{dx} = 0$. To dejstvo lahko izkoristimo za računanje približnih vrednosti funkcij.

Zgled 1.10. Za koliko se spremeni prostornina krogle, če povečamo njen polmer za $\frac{1}{1000}$?

Prostornina krogle s polmerom r je $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Če polmer povečamo za dr, je sprememba prostornine $\Delta V = \frac{4}{3}\pi[(r+dr)^3 - r^3]$. Relativna sprememba prostornine je

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{(r+dr)^3 - r^3}{r^3} = (1 + \frac{dr}{r})^3 - 1 = (1 + \frac{1}{1000})^3 - 1 = 0.003003001.$$

Diferencial pa je $dV = V'(r)\,dr = 4\pi r^2\,dr$, zato je z diferencialom ocenjena relativna sprememba prostornine

$$\frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\frac{dr}{r} = 3 \cdot 0.001 = 0.003.$$

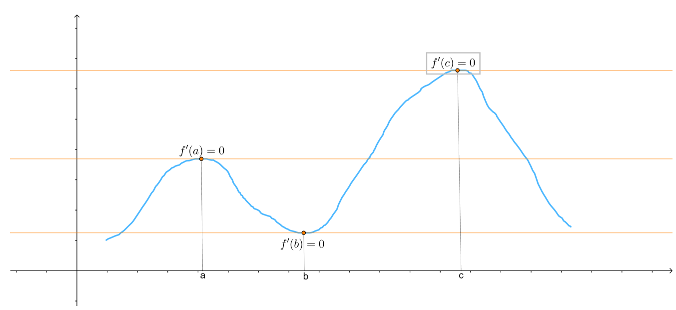
Naloga. Izračunajte, brez uporabe naprav, približno vrednost za $\sin 46°$. (Navodilo: $\sin(x+h) \approx \sin x + \cos x\, h$, kjer je $x = 45° = \frac{\pi}{4}$ in $h = 1° = \frac{\pi}{180}$.)

Nalogi. 1. Za funkcijo, definirano na zaprtem intervalu $[a, b]$, smiselno definirajte pojem *odvoda z desne* v točki a in *odvoda z leve* v točki b.

2. Pot delca po premici naj se s časom t spreminja kot $s = t^3 - t^2 + t$. Izračunajte povprečno hitrost delca med trenutkoma $t = 0$ in $t = 1$ ter njegovo trenutno hitrost v času $t = \frac{1}{2}$.

2. Funkcija in njen odvod

Iz slike je razvidno, da je tam, kjer zavzame odvedljiva funkcija f svoj maksimum ali pa minimu, tangenta na graf vodoravna, torej odvod enak 0. Skupno ime za minimum in maksimum je *ekstrem*. V mislih imamo *lokalne ekstreme*: Funkcija f ima v točki a lokalni ekstrem, če obstaja tak $\delta > 0$, da je bodisi $f(a) \leq f(x)$ za vse $x \in (a - \delta, a + \delta)$ (tedaj je v a *lokalni minimum*) bodisi $f(a) \geq f(x)$ za vse $x \in (a - \delta, a + \delta)$ (tedaj je v a lokalni maksimum).



Slika 4. V točkah, kjer je lokalni ekstrem, je tangenta vzporedna z abscisno osjo.

Velja torej naslednja lema:

Lema 2.1. *Če ima odvedljiva funkcija f v točki a lokalni ekstrem, je $f'(a) = 0$.*

Dokaz. Če je v a lokalni minimum, je za dovolj majhne $|h|$ izraz $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ nenegativen za pozitivne h in nepozitiven za negativne h (saj je števec nenegativen), zato je edina mogoča limita, ko gre h proti 0, enaka 0. Podoben je dokaz v primeru, ko je v a lokalni maksimum. $\square$

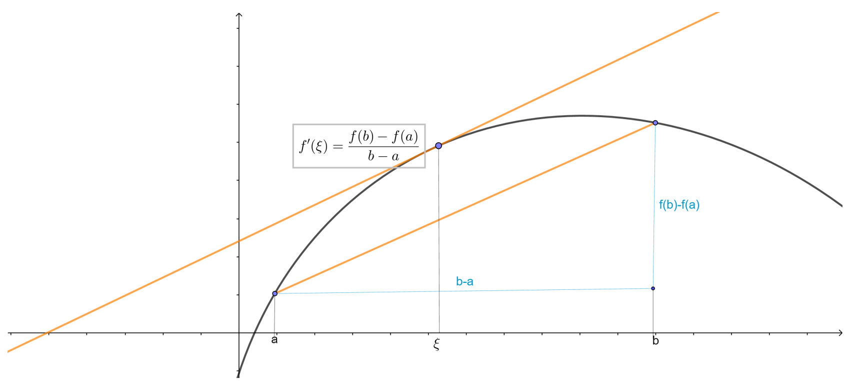
Izrek 2.2. *(Rollejev izrek) Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki naj bo odvedljiva na odprtem intervalu (a,b). Če je $f(b) = f(a)$, potem obstaja taka točka $\xi \in (a,b)$, da je $f'(\xi) = 0$.*

Dokaz. Ker je f zvezna, obstajata taki točki $x_m, x_M \in [a,b]$, da je

$$f(x_m) = m := \min_{a \le x \le b} f(x) \quad \text{in} \quad f(x_M) = M := \max_{a \le x \le b} f(x).$$

Če je katera od točk x_m, x_M vsebovana v odprtem intervalu (a,b), je po prejšnji lemi tam odvod funkcije f enak 0, in tedaj lahko vzamemo $\xi = x_m$ ali pa $\xi = x_M$. Preostane še možnost, da sta obe točki x_m in x_M v krajiščih a, b intervala. Ker je po predpostavki $f(a) = f(b)$, je tedaj $M = m$, kar pomeni, da je funkcija f konstantna. Tedaj je njen odvod identično enak 0 in za ξ lahko vzamemo katerokoli točko intervala (a,b). $\square$

Če v Rollejevem izreku opustimo predpostavko, da je $f(b) = f(a)$, zaključek izreka ne velja več. Pač pa se zdi, ko opazujemo tangento v različnih točkah grafa, da je v neki točki vzporedna sekanti skozi krajišči grafa. To trdi Lagrangeov izrek:



SLIKA 5. Tangenta je vzporedna sekanti skozi krajišči grafa.

Izrek 2.3. *(Lagrangeov izrek) Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki naj bo odvedljiva na odprtem intervalu (a,b), kjer naj bo $a < b$. Obstaja taka točka $\xi \in (a,b)$, da je*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{2.1}$$

Dokaz. Izrek bomo reducirali na Rollejev izrek tako, da bomo obravnavali novo funkcijo

$$g(x) = f(x) - kx,$$

kjer bomo izbrali konstanto k tako, da bo funkcija g zadoščala pogoju Rollejevega izreka, tj. $g(b) = g(a)$. Veljati mora torej

$$f(b) - kb = f(a) - ka,$$

od koder sledi

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{2.2}$$

Po Rollejevem izreku obstaja tak $\xi \in (a, b)$, da je $g'(\xi) = 0$, se pravi $f'(\xi) - k = 0$. Od tod sledi $k = f'(\xi)$ in nato po (2.2) še (2.1). □

Lagrangov izrek smo izpeljali iz Rollejevega, a je Rollejev le poseben primer Lagrangeovega, saj je $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, če je $f(b) = f(a)$.

Posledica 2.4. *Edine funkcije na intervalu* (a, b)*, ki imajo odvod identično enak* 0*, so konstante.*

Dokaz. Vzemimo poljubna $x_1 < x_2$ iz intervala (a, b) in uporabimo Lagrangeov izrek na intervalu $[x_1, x_2]$: obstaja tak $\xi \in (x_1, x_2)$, da je

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = 0.$$

Od tod sledi, da je $f(x_2) = f(x_1)$. Ker velja to za vsaki dve točki intervala (a, b), je f na njem konstanta. □

Posledica 2.5. *Če je na kakem intervalu* (a, b) *odvod funkcije* f *nenegativen (pozitiven), je funkcija na tem intervalu naraščajoča (strogo naraščajoča). Če pa je odvod nepozitiven (negativen), je funkcija padajoča (strogo padajoča).*

Dokaz. Za poljubna $x_1 < x_2$ iz intervala (a, b) uporabimo Lagrangeov izrek na intervalu $[x_1, x_2]$: obstaja tak $\xi \in (x_1, x_2)$, da je

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Če je odvod f' pozitiven na intervalu (a, b), je $f'(\xi) > 0$ in sledi, da je $f(x_2) > f(x_1)$, kar pomeni, da je funkcija f strogo naraščajoča. Podobno dokažemo tudi druge trditve posledice. □

Točke, v katerih je odvod enak 0, imenujemo *kritične* ali *stacionarne* točke funkcije. Lokalni ekstremi so med njimi, ni pa vsaka kritična točka lokalni ekstrem. Npr. za funkcijo $f(x) = x^3$ je 0 stacionarna točka, a ni lokalni ekstrem, saj je ta funkcija povsod strogo naraščajoča.

Če pa je kritična točka c funkcije f taka, da v njej odvod f' spremeni predznak, potem je v c lokalni ekstrem:

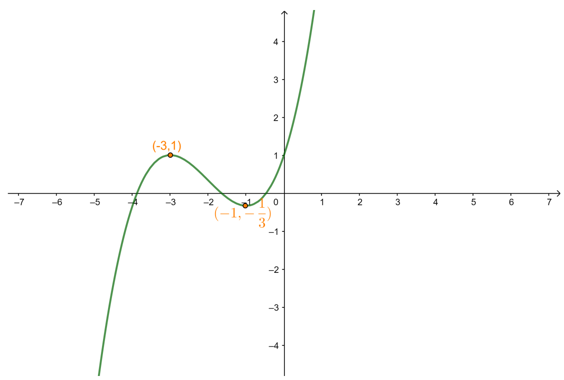
Trditev 2.6. *Predpostavimo, da je* $f'(c) = 0$*. Če je za kak* $\delta > 0$ *odvod* f' *negativen na intervalu* $(c - \delta, c)$*, na intervalu* $(c, c + \delta)$ *pa pozitiven, potem ima* f *v točki* c *lokalni minimum. Če pa je* f' *pozitiven na intervalu* $(c - \delta, c)$*, na intervalu* $(c, c + \delta)$ *pa negativen, potem ima* f *v* c *lokalni maksimum.*

Dokaz. Če je odvod f' negativen na intervalu $(c-\delta, c)$, je funkcija f na tem intervalu strogo padajoča. Če je še f' pozitiven na intervalu $(c, c+\delta)$, je funkcija f tam strogo naraščajoča. Kadar sta izpolnjena oba pogoja, ima torej v c lokalni minimum. Dokaz za lokalni maksimum je podoben. □

Zgled 2.7. Določimo ekstreme funkcije $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 1$. Ničli odvoda

$$f'(x) = x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$$

sta -3 in -1. Za $x < -3$ je $f'(x) > 0$, za $x \in (-3, -1)$ pa je $f'(x) < 0$, zato je v -3 lokalni maksimum, ki znaša $f(-3) = 1$. Za $x > -1$ je $f'(x) > 0$ in, ker je nekoliko levo od -1 odvod negativen, je v v -1 lokalni minimum, ki znaša $f(-1) = -\frac{1}{3}$.



Slika 6. Graf polinoma $p(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 1$

Naloge. 1. Določite ničle in ekstreme polinoma $p(x) = 2(x+1)(x-1)^2$ ter narišite njegov graf.

2. Dokažite s pomočjo Lagrangeovega izreka, da velja

$$|\sin\beta - \sin\alpha| \leq |\beta - \alpha$$

za poljubna $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3. Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka funkcija, da je $|f'(x)| < 1$ za vsak $x \in \mathbb{R}$. Dokažite, da sta potem sliki $f(x)$ in $f(t)$ poljubnih dveh točk x in t med seboj manj oddaljeni, kot sta med seboj oddaljena originala x in t.

2.1. **L'Hospitalovo pravilo.** Imamo odvedljivi funkciji f in g, ki imata skupno ničlo a. Izračunati želimo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}. \tag{2.3}$$

Z uporabo Lagrangeovega izreka za funkcijo f na intervalu $[a, x]$ lahko zapišemo

$$f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a) = f'(\xi)), \text{ kjer je } \xi \in (a, x).$$

Podobno je

$$g(x) = g'(\eta)(x-a), \text{ kjer je } \eta \in (a, x).$$

Ko gre x proti a, morata tudi ξ in η konvergirati proti a, saj sta vedno med a in x, zato sledi, da je

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}, \tag{2.4}$$

če sta odvoda f' in g' zvezna v točki a. Če izraz $f(a)/g(a)$ ni nedoločen, smo s tem izračunali limito (2.3). Da se dokazati splošnejše *L'Hospitalovo pravilo*:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ki velja tudi v primeru, ko je izraz $f'(a)/g'(a)$ nedoločen (npr. $0/0$).

Naloga. Dokažite, da velja (2.4) tudi v primeru, ko gresta $f(x)$ in $g(x)$ oba proti ∞, ko gre x proti a. (Namig: $\frac{f}{g}=\frac{\frac{1}{g}}{\frac{1}{f}}$.)

Zgled 2.8. Za poljubni konstanti a in b imamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{bx}-e^{ax}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{be^{bx}-ae^{ax}}{1}=b-a.$$

Naloga. Izračunajte:
(i) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}$;
(ii) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$.

2.2. **Odvod inverzne funkcije.** Predpostavimo, da je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ zvezna funkcija, katere odvod na intervalu (a,b) je tudi zvezen in povsod različen od 0. Potem je odvod f' bodisi povsod pozitiven bodisi povsod negativen na (a,b). Če bi namreč bil v dveh točkah x_1,x_2 nasprotno predznačen, bi imel na intervalu (x_1,x_2) ničlo, predpostavili pa smo, da je povsod različen od 0. Privzemimo, da je f' povsod na (a,b) pozitiven (če je negativen, lahko namesto f obravnavamo $-f$). Potem je f strogo naraščajoča funkcija in preslika interval $[a,b]$ bijektivno na interval $[c,d]$, kjer je $c=f(a)$ in $d=f(b)$. Vemo že, da je inverzna funkcija $f^{-1}:[c,d]\to[a,b]$ zvezna, sedaj pa bi radi dokazali, da je odvedljiva na intervalu (c,d).

Za poljuben $y\in(c,d)$ torej želimo ugotoviti, ali obstaja

$$\lim_{k\to 0}\frac{f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)}{k}. \tag{2.5}$$

Označimo $x=f^{-1}(y)$ in $h=f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)$; potem je $y=f(x)$ in $y+k=f(x+h)$, torej $k=f(x+h)-y=f(x+h)-f(x)$. Ker je f^{-1} zvezna funkcija, gre h proti 0, ko gre k proti 0. Limito (2.5) lahko zato napišemo kot

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{f(x+h)-f(x)}=\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)^{-1}=\frac{1}{f'(x)}.$$

S tem spo pokazali, da je f^{-1} odvedljiva funkcija in velja

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

V navadi je tudi argument funkcije f^{-1} označiti kar z x, tako, da smo skoraj v celoti dokazali naslednji izrek:

Izrek 2.9. *Naj bo $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ (kjer dopuščamo možnost, da je $a=-\infty$ ali $b=\infty$) funkcija z zveznim odvodom f', ki naj nima nobene ničle. Potem obstaja inverzna funkcija $f^{-1}: f(a,b)\to(a,b)$, ki ima tudi zvezen odvod, in sicer je*

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{2.6}$$

Dokaz. Gornji razmislek lahko uporabimo na vsakem zaprtem intervalu $[A,B]\subseteq(a,b)$. Ker je f strogo monotona, je bijekcija na svojo zalogo vrednosti $f(a,b)$ in je zato inverzna funkcija f^{-1} definirana povsod na $f(a,b)$. □

Zgled 2.10. Inverzna funkcija od funkcije $f(x)=a^x$ $(a>0)$ je $f^{-1}(x)=\log_a x$. Po formuli (2.6) je

$$\log_a' x=(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{a^{\log_a x}\ln a}=\frac{1}{x\ln a}.$$

V posebej pomembnem primeru, ko je $a=e$, se ta formula glasi

$$\ln' x=\frac{1}{x}.$$

Zgled 2.11. Odvod potence x^r, ko je $r\in\mathbb{N}$, že poznamo, sedaj pa lahko določimo odvod za splošen $r\in\mathbb{R}$. Funkcijo $f(x)=x^r$ namreč lahko izrazimo kot posredno funkcijo

$$x^r=(e^{\ln x})^r=e^{r\ln x}=e^{ru},\quad \text{kjer je } u=\ln x.$$

Po pravilu za posredno odvajanje imamo

$$(x^r)'=re^{ru}u'=re^{\ln x}\frac{1}{x}=rx^r\frac{1}{x}=rx^{r-1}.$$

2.3. **Ciklometrične funkcije.**

Zgled 2.12. (i) Funkcija $\sin:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$ je naraščajoča bijekcija, njej inverzno funkcijo

$$\arcsin:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$

imenujemo *arkus sinus.* Po formuli za odvod inverzne funkcije je

$$\arcsin' x=\frac{1}{\cos\arcsin x}=\frac{1}{\sqrt{1-(\sin\arcsin x)^2}}.$$

Ker je $\sin\arcsin x=x$, dobimo

$$\arcsin' x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{2.7}$$

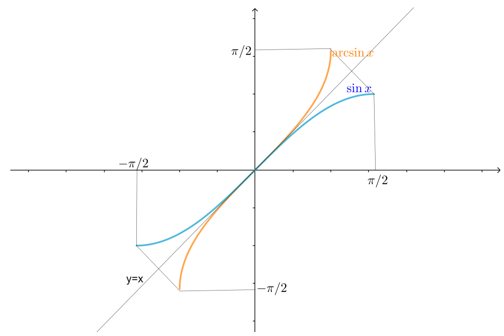
(ii) Funkcija $\cos:[0,\pi]\to[-1,1]$ je padajoča bijekcija. Njej inverzna funkcija

$$\arccos:[-1,1]\to[0,\pi],$$

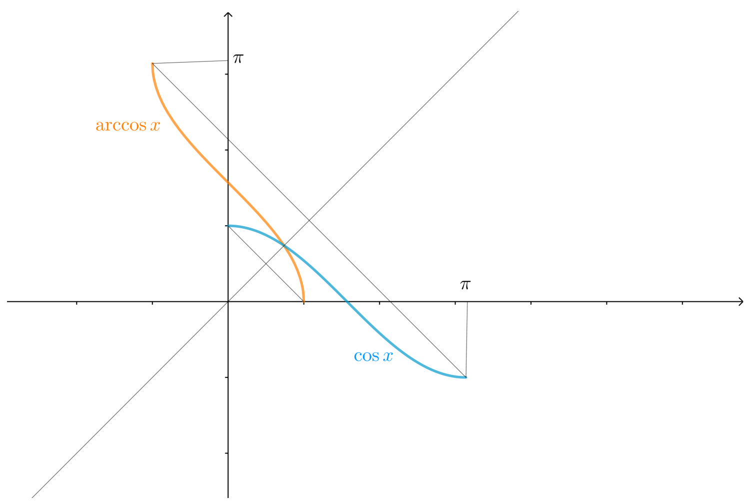
arkus kosinus ima odvod

$$\arccos' x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{2.8}$$

kar pove podoben razmislek kot zoraj pri arkus sinusu. Ko seštejemo formuli (2.7)



Slika 7. Grafa funkcij arkus sinus in sinus sta si simetrična glede na premico $y = x$.



Slika 8. Grafa funkcij arkus kosinus in kosinus sta si simetrična glede na premico $y = x$.

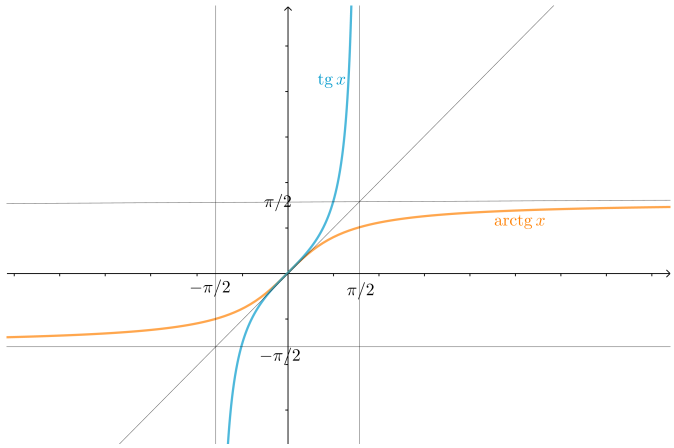
in (2.8), dobimo $[\arcsin x + \arccos x]' = 0$. To ni presenetljivo, saj je

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}. \tag{2.9}$$

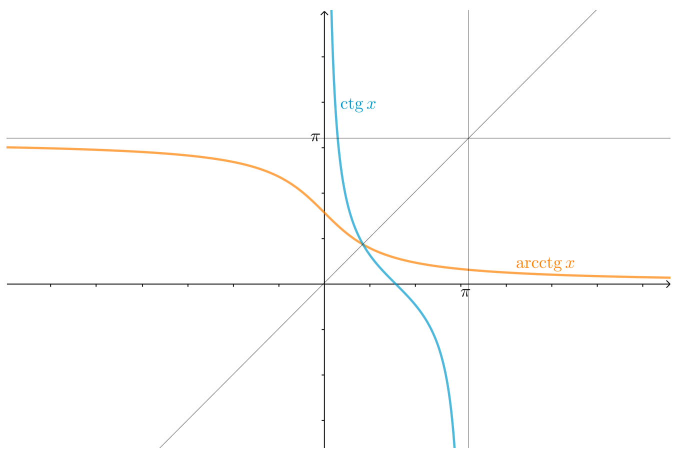
Če namreč označimo $\alpha = \arcsin x$ in $\beta = \arccos x$, je $x = \sin\alpha$ in $x = \cos\beta = \sin(\frac{\pi}{2} - \beta)$. Ker je pri tem $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ in $\beta \in [0, \pi]$ (torej $\frac{\pi}{2} - \beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$), sledi, da je $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, kar je nekoliko drugače zapisana identiteta (2.9).

(iii) Inverzna funkcija od $\mathrm{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ je *arkus tangens*, $\mathrm{arctg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Njen odvod je (spet bomo uporabili parvilo za odvod inverzne funkcije in dejstvo, da je $\mathrm{tg}\,' x = \frac{1}{\cos^2 x}$)

$$\mathrm{arctg}\,' x = \cos^2 \mathrm{arctg}\, x = \frac{1}{1 + (\mathrm{tg}\,(\mathrm{arctg}\, x))^2}.$$



Slika 9. Grafa funkcij arkus tangens in tangens.



Slika 10. Grafa funkcij arkus kotangens in kotangens.

Torej

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}.$$

(iv) *Arkus kotangens*, inverzna funkcija kotangensa, ctg $: (0,\pi) \to \mathbb{R}$, preslika realno os $\mathbb{R}$ na interval $(0,\pi)$. Izračun njenega odvoda,

$$\operatorname{arcctg}' x = -\frac{1}{1+x^2},$$

pa bomo pustili za vajo.

3. Višji odvodi in konveksnost

Odvod f' funkcije f je funkcija. Če je odvedljiva, jo lahko odvajamo itd.

Definicija 3.1. *Drugi odvod* funkcije f je definiran kot

$$f'' = (f')'.$$

Tretji odvod je definiran kot

$$f^{(3)} = (f'')'.$$

Z indukcijo lahko definiramo

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})' \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dodatno definiramo $f^{(0)} = f$. Druga oznaka za n-ti odvod, kadar označimo $y = f(x)$, je $\frac{d^n y}{dx^n}$, torej

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}.$$

Zgled 3.2. (i) Za funkcijo $f(x) = \sin 2x$ je

$$f'(x) = 2\cos 2x,\ f''(x) = -2^2 \sin 2x,\ f^{(3)}(x) = -2^3 \cos 2x,\ f^{(4)}(x) = 2^4 \sin 2x, \ldots.$$

(ii) Za funkcijo $f(x) = \ln x$ pa je

$$f'(x) = \frac{1}{x},\ f'' = -\frac{1}{x^2},\ f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3},\ f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}, \ldots.$$

V splošnem je $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$.

Drugi odvod lahko pomaga pri določanju ekstremov.

Trditev 3.3. *Predpostavimo, da je f dvakrat zvezno odvedljiva funkcija (se pravi, da je f'' zvezna funkcija) in da je $f'(a) = 0$. Če je $f''(a) > 0$, je v a lokalni minimum; če pa je $f''(a) < 0$, je v a lokalni maksimum funkcije f.*

Dokaz. Če je $f''(a) > 0$, je zaradi zveznosti $f''(x) > 0$ za vse x na kakem dovolj majhnem intervalu okrog a, zato je tam f' strogo naraščajoča funkcija. Ker je $f'(a) = 0$, mora biti potem $f'(x) < 0$ za $x < a$ in $f'(x) > 0$ za $x > a$ (obakrat gledamo le x na dovolj majhnem intervalu okrog a). Po trditvi 2.6 ima tedaj f v točki a lokalni minimum. Dokaz za lokalni maksimum je podoben. □

Zgled 3.4. Določimo ekstreme polinoma $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$. Prvi odvod je

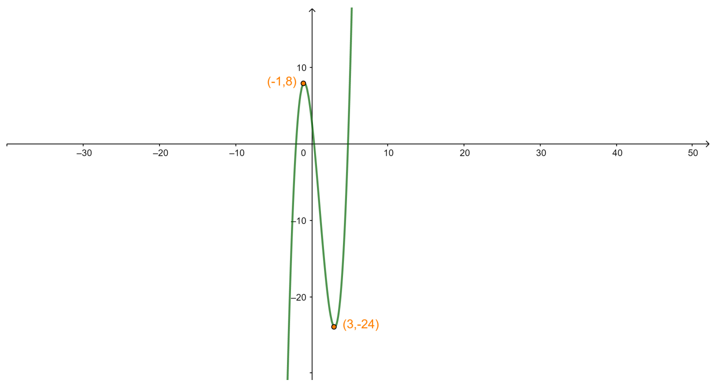
$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1),$$

njegovi ničli sta -1 in 3. Drugi odvod je

$$f''(x) = 6x - 6.$$

Ker je $f''(-1) = -12 < 0$, je v -1 lokalni maksimum, ki znaša $f(-1) = 8$. Ker je $f''(3) = 12 > 0$, je v 3 lokalni minimum, in sicer je $f(3) = -24$.

Ko gre x proti ∞, prevlada člen x^3 nad drugimi členi, zato gre $f(x)$ proti ∞. Podobno gre $f(x)$ proti $-\infty$, ko gre x proti $-\infty$. Grafa te funkcije ni težko narisati.



Slika 11. Graf polinoma $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$

Zgled 3.5. (*Princip najmanjših kvadratov*) Ko n-krat izmerimo neko količino, dobimo (zaradi napak pri merjenju) n rezultatov $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ki se nekoliko razlikujejo med seboj. Kaj je najbolj smiselno vzeti za vrednost količine?

Vrednost x bi radi določili tako, da bi se kar najbolj prilegala rezultatom vseh n meritev. Možen kriterij bi bil, da je vsota vseh odstopnanj, tj. $|x-a_1|+\ldots+|x-a_n|$, minimalna. Pri tem smo morali vzeti absolutno vrednost, saj moramo na enak način upoštevati odstopanja navzgor in navzdol. Ker pa funkcija $x \to |x|$ ni odvedljiva, bi bilo z vsoto vseh odstopanj nerodno računati, zato jo bomo raje nadomestili z

$$f(x) = (x - a_1)^2 + \ldots + (x - a_n)^2.$$

Določiti torej želimo x tako, da bo ta funkcija f imela minimum. Iz pogoja

$$f'(x) = 2(x - a_1) + \ldots + 2(x - a_n) = 0$$

dobimi

$$x_m = \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n),$$

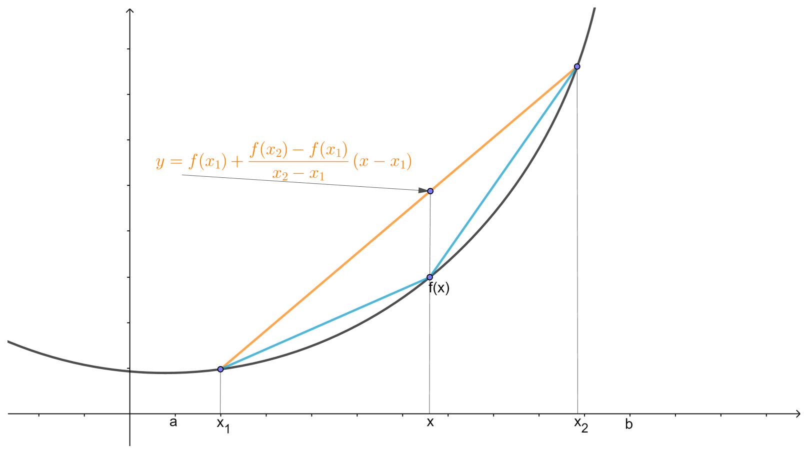
kar je povprečje vseh izmerjenih vrednosti $a_1, \ldots, a_n$. Ker je $f'' = 2n > 0$, je v točki x_m lokalni minimum funkcije f. Ta minimum je dejansko globalni, saj je f kvadratna funkcija, katere graf je navzgor obrnjena parabola, in ima najmanjšo vrednost v temenu.

3.1. **Konveksnost, konkavnost in prevoji.**

Definicija 3.6. Funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je *konveksna*, če je za poljubna $x_1 < x_2$ iz intervala (a, b) graf funkcije f na intervalu (x_1, x_2) pod sekanto skozi točki $(x_1, f(x_1))$ in $(x_2, f(x_2))$. Iz enačbe premice skozi ti dve točki sledi, da lahko definicijo konveksnosti zapišemo kot

$$f(x) \le f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \text{ če je } x_1 < x < x_2 \quad (x_1, x_2 \in (a, b)). \tag{3.1}$$

Če velja pri tem v (3.1) stroga neenakost, pravimo, da je f *strogo konveksna*. Funkcija f je *konkavna*, če je $-f$ konveksna; drugače povedano, v (3.1) je treba pri definiciji konkavnosti znak $\le$ spremeniti v $\ge$.



SLIKA 12. Konveksna funkcija

Pogoj konveksnosti (3.1) lahko napišemo kot

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \text{ če je } x_1 < x < x_2. \tag{3.2}$$

To pomeni, da je sekanta skozi $(x_1, f(x_1))$ in $(x, f(x))$ manj strma kot sekanta skozi $(x_1, f(x_1))$ in $(x_2, f(x_2))$. Iz slike vidimo, da je potem sekanta skozi $(x, f(x))$ in $(x_2, f(x_2))$ bolj strma od tiste skozi $(x_1, f(x_1))$ in $(x, f(x))$, torej

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \text{ če je } x_1 < x < x_2. \tag{3.3}$$

Lema 3.7. *Pogoja (3.2) in (3.3) sta ekvivalentna.*

Dokaz. Pogoj (3.2) lahko zapišemo kot $f(x) \leq f(x_2) + \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}(x - x_2)$ oziroma

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \text{ če je } x_1 < x < x_2. \tag{3.4}$$

Iz (3.2) in (3.4) pa očitno sledi (3.3).

Za dokaz v obratno smer, zapišemo (3.3) najprej kot $(x_2 - x_1)f(x) \leq f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)$, kar lahko preoblikujemo v $(x_2 - x_1)f(x) \leq f(x_1)(x_2 - x_1) - f(x_1)(x - x_1) + f(x_2)(x - x_1)$, torej tudi v $f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1)$, kar je ravno pogoj (3.1), za katerega že vemo, da je ekvivalenten z (3.2). $\square$

Če uporabimo neenakost (3.2) za $x < x_2 < x_3$ namesto $x_1 < x < x_2$, dobimo

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \leq \frac{f(x_3) - f(x)}{x_3 - x},$$

kar pomeni, da diferenčni kvocienti

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

pri fiksnem x padajo (kot funkcije spremenljivke t). Iz ocene (3.3) (kamor vstavimo t namesto x_2) pa sledi, da so ti diferenčni kvocienti navzdol omejeni z $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$, torej mora obstajati

$$(D^+f)(x) := \lim_{t\to x^+} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

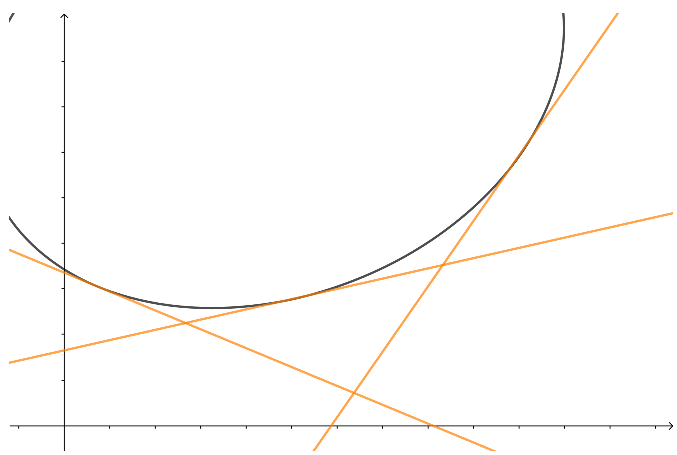
To pomeni, da je f odvedljiva z desne strani. Podoben argument pokaže, da je odvedljiva tudi z leve in sicer velja

$$(D^-f)(x) := \lim_{t\to x^-} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} \le (D^+f)(x),$$

kot sledi iz (3.3). Ker je f v točki x odvedljiva z leve in desne, je zvezna z leve in desne, torej zvezna. Tako smo dokazali naslednjo lemo:

Lema 3.8. *Vsaka konveksna funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je v vsaki točki $x \in (a,b)$ odvedljiva z leve in z desne strani ter zvezna.*

Kot pove primer funkcije $x \mapsto |x|$, pa konveksna funkcija ni nujno odvedljiva (čeprav je odvedljiva z leve in desne).



Slika 13. Konveksna funkcija je povsod nad svojimi tangentami

Označimo sedaj

$$M(x) := (D^+f)(x) = \inf_{t>x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

Potem za $t > x$ velja

$$f(t) \ge M(x)(t-x) + f(x). \tag{3.5}$$

Kot smo že omenili, iz (3.3) sledi, da za $t < x$ velja $\frac{f(x)-f(t)}{x-t} \le M(x)$, od koder sledi, da neenakost (3.5) velja tudi za $t < x$. S tem smo v eno smer dokazali naslednjo trditev:

Trditev 3.9. *Funkcija $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je konveksna natanko tedaj, ko za vsak $x \in (a,b)$ obstaja tak $M(x) \in \mathbb{R}$, da velja (3.5), kar pomeni, da je za vsak $x \in (a,b)$ graf funkcije f nad premico $y(t) = M(x)(t-x) + f(x)$. (Če je f odvedljiva v x, je $M(x) = f'(x)$ in ta premica je tedaj kar tangenta na graf v točki x.)*

Dokaz. Dokazati moramo le še, da iz pogoja (3.5) sledi konveksnost funkcije f, tj., da velja pogoj (3.1) za poljubne tri točke $x_1 < x < x_2$ iz intervala (a,b). Najprej bomo x izrazili kot *konveksno kombinacijo* točk x_1 in x_2, to je kot

$$x = sx_1 + (1-s)x_2,$$

kjer je $s \in [0,1]$. To velja za $s = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$; tedaj je $1 - s = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Pogoj konveksnosti (3.1) lahko sedaj napišemo kot

$$f(sx_1 + (1-s)x_2) \leq sf(x_1) + (1-s)f(x_2). \tag{3.6}$$

Označimo sedaj $M(x)$ kar z M (ker bo x fiksen) in napišimo pogoj (3.5) za $t = x_1$ in $t = x_2$:

$$f(x_1) \geq M(x_1 - x) + f(x), \quad f(x_2) \geq M(x_2 - x) + f(x).$$

Ko prvo od teh neenakosti pomnožimo z s, drugo pa z $1-s$ in ju nato seštejemo, dobimo

$$sf(x_1) + (1-s)f(x_2) \geq M(sx_1 + (1-s)x_2) - Mx + f(x) = f(x),$$

kar je ravno pogoj (3.6) konveksnosti. □

Izrek 3.10. *Če je $f''(x) \geq 0$ za vsak $x \in (a,b)$, je f na intervalu (a,b) konveksna; če velja pri tem stroga neenakost $>$, je f strogo konveksna. Če pa je $f''(x) \leq 0$, je f konkavna (strogo konkavna, kadar velja $<$).*

Dokaz. Omejili se bomo na konveksnost, saj so dokazi ostalih izjav podobni. Po trditvi (3.9) zadošča dokazati, da za poljubna $x \neq t$ iz intervala (a,b) velja

$$f(t) \geq f'(x)(t-x) + f(x). \tag{3.7}$$

Po Lagrangeovem izreku obstaja tak $\xi \in (x,t)$, da je

$$f(t) = f'(\xi)(t-x) + f(x).$$

Ker je $f'' \geq 0$, je f' naraščajoča funkcija, torej je $f'(\xi) \geq f'(x)$, kadar je $t > x$ (saj je tedaj $\xi > x$). Tedaj je $f(t) = f'(\xi)(t-x) + f(x) \geq f'(x)(t-x) + f(x)$. Za $t < x$ pa je $f'(\xi) \leq f'(x)$, vendar je tedaj $t - x < 0$, zato velja neenakost (3.7) tudi v tem primeru. □

Definicija 3.11. Če obstaja kak tak $\delta > 0$, da je na intervalu $(c-\delta, c)$ funkcija f strogo konveksna, na intervalu $(c, c+\delta)$ pa strogo konkavna, ali pa obratno, pravimo, da je v točki c *prevoj* funkcije f.

Trditev 3.12. *Če je v točki c prevoj dvakrat zvezno odvedljive funkcije f, je $f''(c) = 0$.*

Dokaz. Predpostavimo, da je $f'' \neq 0$, npr. $f'' > 0$. Zaradi zveznosti obstaja potem tak $\delta > 0$, da je na intervalu $(c - \delta, c + \delta)$ funkcija pozitivna. Po prejšnji trditvi je zato tedaj f na celotnem intervalu $(c - \delta, c + \delta)$ strogo konveksna, kar nasprotuje dejstvu, da je v c prevoj. $\square$

Zgled 3.13. (i) Eksponentna funkcija $f(x) = a^x$ $(a > 0,\, a \neq 1)$ je strogo konveksna, saj je $f''(x) = a^x (\ln a)^2 > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

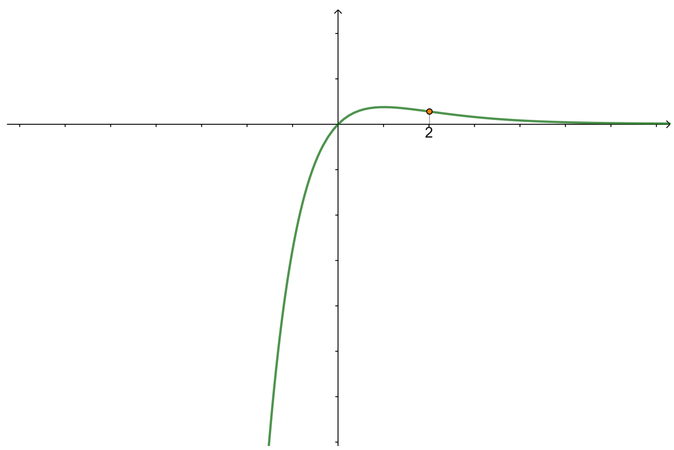
(ii) Za $a > 1$ je funkcija $f(x) = \log_a x$ konkavna, sa je $f''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln a} < 0$ za vse $x \in (0, \infty)$.

(iii) Poiščimo prevoje funkcije $f(x) = xe^{-x}$.

Prvi odvod je $f'(x) = (1 - x)e^{-x}$, drugi odvod pa

$$f''(x) = (x - 2)e^{-x}.$$

Edina ničla drugega odvoda je 2. Ker v točki 2 f'' spremeni predznak, je tam res prevoj.



Slika 14. Graf funkcije $f(x) = xe^{-x}$

Naloge. 1. Določite ekstreme in prevoje ter območja konveksnosti in konkavnosti za funkcijo $f(x) = e^{-\frac{1}{2}(x-a)^2}$, kjer je a konstanta. Nato narišite še njen graf.

2. Dokažite, da sta odvod z leve in odvod z desne konveksne funkcije naraščajoči funkciji.

3. Ali je vsaka konveksna funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna?

4. Hiperbolične in njim inverzne funkcije

Definicija 4.1. Funkcije *hiperbolični sinus, kosinus, tangens in kotangens* so definirane takole:

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

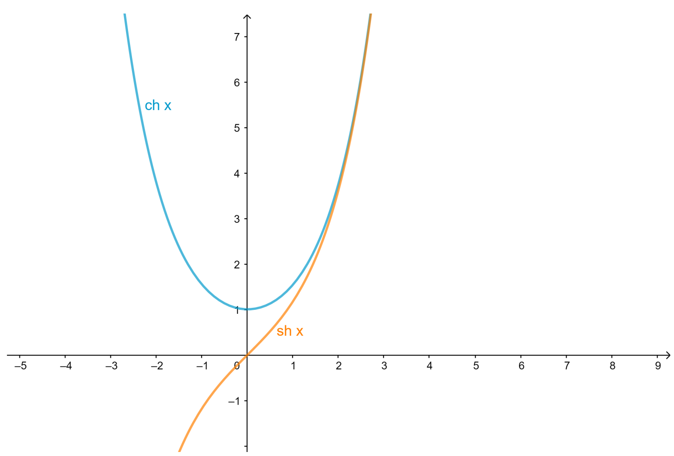
$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Zakaj imajo te funkcije imena, ki spominjajo na trigonometrijo? Zato, ker imajo v hiperbolični geometriji podobno vlogo kot navadne trigonometrijske funkcije v evklidki geometriji, vendar tega tukaj ne bomo podrobneje pojasnevali. Očitne pa bodo nekatere podobnosti z lastnostmi navadnih trigonometrijskih funkcij. Npr.

$$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x, \quad \text{in} \quad \operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x.$$

Ker je $\operatorname{ch} x$ očitno vedno pozitivna funkcija, to pove, da je sh strogo naraščajoča funkcija. Nadalje je 0 edina ničla funkcije sh, torej rešitev enačbe $e^x = e^{-x}$, se pravi enačbe $e^{2x} = 1$. Zato je edini možni ekstrem funkcije ch v 0. Ker je $\operatorname{ch}'' x = \operatorname{ch} x > 0$ za vsak x, je v 0 minimum funkcije ch in funkcija ch je povsod konveksna. Ko gre x proti $\pm\infty$, gresta tako $\operatorname{ch} x$ kot $\operatorname{sh} x$ proti ∞. Podobno kot navaden, je tudi hiperbolični kosinus soda funkcija, tj. $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}(x)$. Hiperbolični sinus pa je liha funkcija, tj. $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$. Na podlagi vseh teh podatkov ni težko skicirati njuna grafa.



Slika 15. Grafa hiperboličnih sinusa in kosinusa

Vemo, da je $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Kaj pa je $\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$? Imamo

$$\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2e^x e^{-x}}{4} + \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x e^{-x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}.$$

Torej velja

$$\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x,$$

kar je analogija znane trigonometrijske formule $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$. Izračunajmo še

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2e^x e^{-x}}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x e^{-x}}{4} = \frac{4}{4}.$$

Torej je

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

kar je analogija trigonometrijske formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

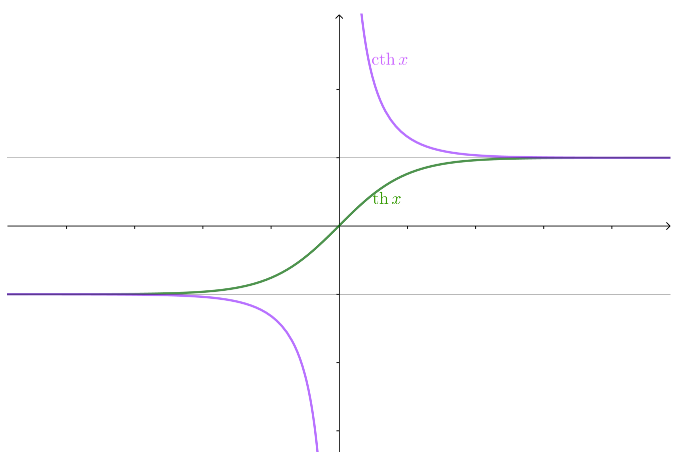
Za funkcijo th opazimo, da je liha in da velja

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{th} x = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{2x}} = 1,$$

torej ima vodoravno asimptoti $y = 1$ in (ker je liha) $y = -1$. Nadalje je th strogo naraščajoča funkcija, saj je njen odvod

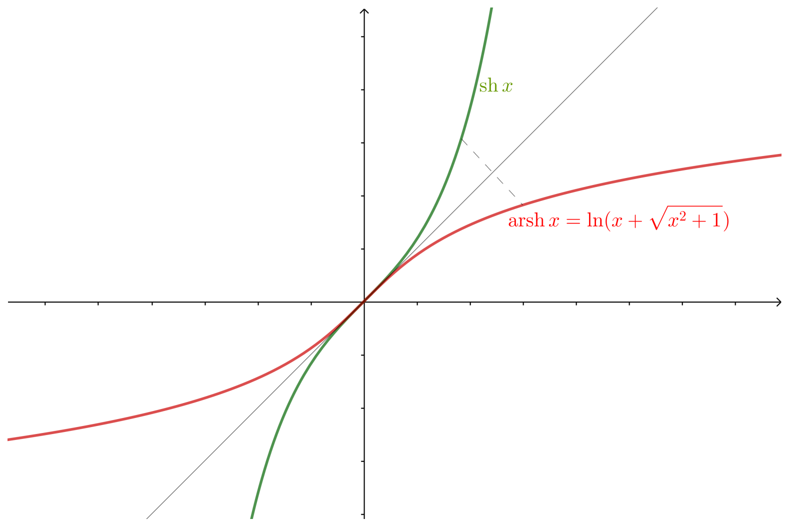
$$\operatorname{th}' x = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

vedno pozitiven. V točki 0 ima (kot vsaka liha funkcija) vrednost 0. Sedaj že lahko narišemo njen graf in na njegovi podlagi tudi graf funkcije $\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x}$.



Slika 16. Graf hiperboličnega tangensa in hiperboličnega kotangensa

Funkciji sh in th sta strogo naraščajoči, zato bomo poiskali njuni inverzni funkciji. Inverzno funkcijo hiperboličnega sinusa imenujemo *hiperbolični arkus sinus* in označimo z arsh. Ker je sh na celi realni osi definirana funkcija in zavzame vse realne vrednosti, velja isto za njej inverno funkcijo arsh. Graf funkcije arsh je kar zrcalna slika grafa funkcije sh prek premice $y = x$. Funkcija sh se izraža z eksponentno funkcijo, zato lahko pričakujemo, da se da njena inverzna funkcija arsh



SLIKA 17. Grafa hiperboličnega sinusa in hiperboličnega arkus sinusa

izraziti s pomočjo logaritma. V ta namen moramo iz zveze $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ izraziti x. Označimo $u = e^x$, tako da je $\frac{u - u^{-1}}{2} = y$ oziroma

$$u^2 - 2yu - 1 = 0.$$

To je kvadratna enačba za u, katere rešitvi sta $u_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$. Ker je $u = e^x > 0$, pride v poštev le rešitev $u = y + \sqrt{y^2+1}$, od koder potem dobimo $x = \ln u = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$. Torej je $\operatorname{arsh} y = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$, se pravi

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

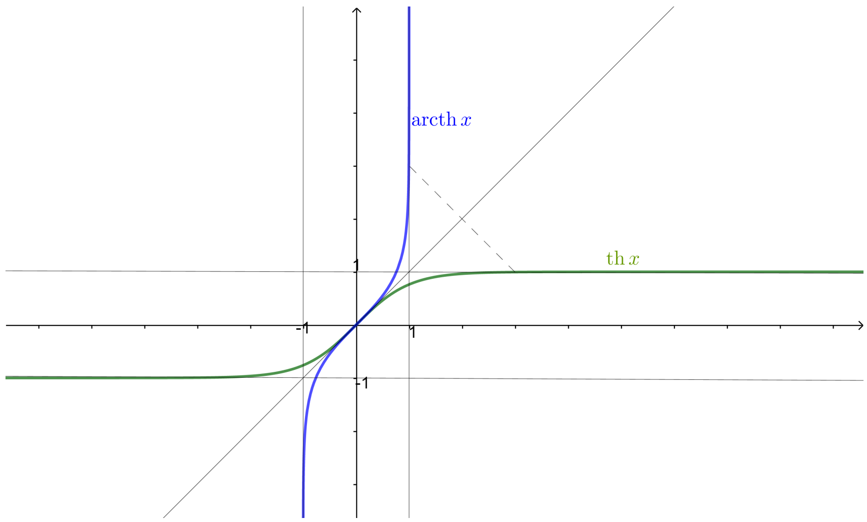
Od tod takoj sledi zelo pomembna formula za odvod funkcije arsh :

$$\operatorname{arsh}' x = (\ln(x + \sqrt{x^2+1}))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ta formula je zelo podobna že znani formuli za odvod navadnega arkus sinusa, namreč $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Inverzno funkcijo hiperboličnega tangensa imenujemo *hiperbolični arkus tangens* in označimo z arcth . Ker je zaloga vrednosti funkcije th interval $(-1, 1)$, je funkcija arcth definirana le na tem intervalu. Na podoben način, kot smo s pomočjo logaritma izrazili funkcijo arsh , lahko sedaj izrazimo arcth . Po kratkem računu, ki ga bomo pustili za vajo, dobimo

$$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad -1 < x < 1.$$



Slika 18. Grafa hiperboličnega tangensa in hiperboličnega arkus tangensa

5. Taylorjeva vrsta

Najenostavnejše funkcije se zdijo polinomi. Zanima nas, katere funkcije se dajo izraziti v obliki "posplošenih polinomov", tj. neskončnih vrst

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \tag{5.1}$$

kjer so *koeficienti* $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ fiksni (za dano funkcijo f) in je f definirana le za tiste x, za katere vrsta (5.1) konvergira. Najpreprostejši zgled za to je geometrijska vrsta $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$, ki predstavlja funkcijo $\frac{1}{1-x}$, vendar le na intervalu $(-1, 1)$, kjer geometrijska vrsta konvergira.

Kaj morajo biti za dano funkcijo f koeficienti a_n v vrsti (5.1), da bo veljala enakost (5.1)? Očitno mora biti

$$a_0 = f(0).$$

Za izračun koeficienta a_1 pa odvajajmo formulo (5.1), da dobimo $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$, in nato vstavimo $x = 0$. Na ta način dobimo

$$a_1 = f'(0).$$

Seveda je ta postopek nekoliko vprašljiv, saj ne vemo, če smemo vrsto (5.1) odvajati kar po členih. (Pravilo, da je odvod vsote funkcij enak vsoti odvodov, smo namreč doslej pokazali le za vsote končno mnogo funkcij.) Vendar bomo o tem premišljevali kasneje, v tem trenutku smo osredotočeni le na cilj, kako izračunati vse koeficiente a_n. Pri tem bomo privzeli, da je funkcija f neskončnokrat odvedljiva. Če formulo (5.1) n-krat odvajamo, dobimo

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)n\cdots 2x + (n+2)(n+1)\cdots 3x^2 + \ldots.$$

Ko vstavimo v to formulo $x = 0$, sledi

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \tag{5.2}$$

Odločilno vprašanje sedaj je, ali pri tako določenih koeficientih vrsta (5.1) konvergira proti $f(x)$? Drugače rečeno, *ali gre razlika*

$$R_n(x) := f(x) - f(0) - \frac{f'(0)}{1!}x - \frac{f''(0)}{2!}x^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{5.3}$$

proti 0*, ko gre* n *proti* ∞*?*

Za obravnavo tega vprašanja si oglejmo, pri fiksnem $x \neq 0$, funkcijo

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Njena vrednost v točki 0 je $F(0) = R_n(x)$, kjer je $R_n(x)$ določen z (5.3). Njena vrednost v točki x pa je $F(x) = 0$. Po Lagrangeovem izreku obstaja tak $\xi_n \in (0, x)$, da je $F'(\xi_n) = \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = -\frac{R_n(x)}{x}$, torej je

$$R_n(x) = -xF'(\xi_n). \tag{5.4}$$

Izračunajmo sedaj $F'(t)$:

$$\begin{aligned} F'(t) = -f'(t) &+ \left(\frac{f'(t)}{1!} - \frac{f''(t)}{1!}(x-t)\right) + \left(\frac{2}{2!}f''(t)(x-t) - \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2\right) + \ldots \\ &+ \left(\frac{n-1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(t)(x-t)^{n-2} - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\right) \\ &+ \left(\frac{n}{n!}f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right). \end{aligned}$$

V tej vsoti se drugi člen vsakega oklepaja uniči s prvim členom naslednjega oklepaja, tako da ostane

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Od tod in iz (5.4) dobimo sedaj

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{n!}(x-\xi_n)^n x.$$

Ker je $\xi_n \in (0, x)$, lahko izrazimo $\xi_n = \theta_n x$ za kak $\theta_n \in (0, 1)$ in potem je

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_n x)}{n!}(1-\theta_n)^n x^{n+1}, \quad 0 < \theta_n < 1. \tag{5.5}$$

S tem smo dokazali naslednji izrek:

Izrek 5.1. *Naj bo* f *vsaj* $(n+1)$*-krat odvedljiva funkcija na kakem odprtem intervalu* I *okrog* 0*. Za vsak* $x \in I$ *velja naslednja Taylorjeva formula:*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \tag{5.6}$$

kjer je ostanek $R_n(x)$ *podan z (5.5). Kadar je*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

je torej vrednost $f(x)$ podana s potenčno vrsto

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots. \tag{5.7}$$

Opomba 5.2. (i) Včasih je potrebno uporabiti nekoliko splošnejšo Taylorjevo formulo, kjer funkcijo razvijemo po potencah od $x - \alpha$ za kako konstanto α (namesto zgolj $\alpha = 0$). Ta formula se glasi:

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + R_n(x),$$

kjer je

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\alpha + \theta_n(x-\alpha))}{n!}(1-\theta_n)^n(x-\alpha)^{n+1}, \quad 0 < \theta_n < 1.$$

Ta formula sledi takoj iz (5.6) z vpeljavo nove spremenljivke $X = x - \alpha$. Za vsak n je funkcija

$$T_n(x) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

polinom, imenovan *Taylorjev polinom*.

(ii) Ostanek $R_n(x)$, podan s formulo (5.5), imenujemo *Cauchyeva oblika ostanka*. Nekoliko enostavnejša je *Lagrangeova oblika ostanka*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \xi_n < x, \tag{5.8}$$

ki pa ne zadošča za obravnavo vseh elementarnih funkcij, kot so $\ln(1+x)$ in $(1+x)^r$. V naslednji nalogi bomo nakazali, kako hitro izpeljati Lagrangeovo obliko ostanka.

Naloga. Pri fiksnih $x \neq 0$ in n naj bo k taka konstanta, da ima funkcija

$$G(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{k}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$$

v točki $t = 0$ vrednost 0, tako da je potem $G(0) = 0 = G(x)$. Po Rollejevem izreku obstaja tak $\xi_n \in (0, x)$, da je $G'(\xi_n) = 0$. Pokažite, da od tod sledi $k = f^{(n+1)}(\xi_n)$ in sklepajte, da velja Taylorjeva formula (5.6) z ostankom Lagrangeove oblike.

5.1. **Vrsta za e^x.** Za vsak n je $(e^x)^{(n)} = e^x$, zato se Taylorjeva formula (5.6) glasi

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x), \tag{5.9}$$

kjer se ostanek $R_n(x)$, podan s (5.5), v tem konkretnem primeru glasi

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta_n x}}{n!}(1-\theta_n)^n x^{n+1}, \quad 0 < \theta_n < 1. \tag{5.10}$$

Ta ostanek lahko ocenimo kot

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{n!}|x|^{n+1} = |x|e^{|x|}\frac{|x|}{1}\frac{|x|}{2}\cdots\frac{|x|}{k-1}\frac{|x|}{k}\cdots\frac{|x|}{n} = C(|x|)\frac{|x|}{k}\cdots\frac{|x|}{n}, \tag{5.11}$$

kjer smo s $C(|x|)$ označili produkt začetnih $k+1$ faktorjev. Naj bo k tak, da je $k-1 \leq |x| < k$. Potem so vsi faktorji $\frac{|x|}{k}$, $\frac{|x|}{k+1}$,..., $\frac{|x|}{n-1}$ pod 1, zato iz (5.11) sledi

$$|R_n(x)| \leq C(|x|)\frac{|x|}{n},$$

kar gre očitno proti 0, ko gre n proti ∞. Tako smo izpeljali Taylorjevo vrsto za e^x:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots. \tag{5.12}$$

Kot poseben primer imamo

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots. \tag{5.13}$$

Zgled 5.3. Koliko členov moramo vzeti v vrsti (5.13), da izračunamo e npr. na štiri decimalke natančno? Nekoliko natančneje lahko zastavimo to vprašanje tudi takole: Kako velik mora biti n, da bo $|R_n(1)| < 10^{-5}$?.

Po (5.11) je $|R_n(1)| \leq \frac{e^1}{n!} < \frac{3}{n!}$. Če torej izberemo n, tako, da bo $\frac{3}{n!} < 10^{-5}$, bomo imeli zahtevano natančnost. Torej $n! > 3 \cdot 10^5$, kar je izpolnjeno za $n \geq 9$. (Če bi uporabili Lagrangeovo obliko ostanka, bi ugotovili, da zadošča že $n \geq 8$.)

5.2. **Vrsti za sinus in kosinus.** Odvodi funkcije sin so sin, cos, $-\sin$, $-\cos$, sin,...(kar lahko napišemo s skupno formulo $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$). Njihove vrednosti v točki 0 so $0, 1, 0, -1, 0, -1, \ldots$, zato se Taylorjeva formula (5.6) v tem primeru glasi

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+2}(x), \tag{5.14}$$

kjer smo vzeli za n liho število, $n = 2k+1$, in upoštevali, da je naslednji člen v vrsti enak 0, tako da smo lahko zapisali ostanek $R_{2k+2}(x)$, namesto $R_{2k+1}(x)$. Ker je $|\sin^{(n+1)} x|$ bodisi $|\pm \sin x|$ bodisi $|\pm \cos x|$ za vse x, kar je oboje pod 1, lahko po (5.5) ostanek $R_n(x)$ ocenimo kot

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n!} = |x|\frac{|x|}{1}\frac{|x|}{2}\cdots\frac{|x|}{k-1}\frac{|x|}{k}\cdots\frac{|x|}{n}. \tag{5.15}$$

Kot v primeru eksponentne funkcije naj bo sedaj k tak, da je $k-1 \leq x < k$; potem sledi, da je

$$|R_n(x)| \leq C(|x|)\frac{|x|}{n},$$

kar gre očitno proti 0, ko gre x proti ∞. Zato velja

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots. \tag{5.16}$$

Podobno izpeljemo, da je

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots. \tag{5.17}$$

Zgled 5.4. Fiziki pogosto uporabljajo približek $\sin x \approx x$ za majhne kote x. Za katere x je $|\sin x - x| < 10^{-3}$?

Vprašanje je torej, za katere x je razvoj $x + \frac{0}{2!}x^2$ dovolj dober približek za $\sin x$ oziroma, natančneje: za katere x je $|R_2(x)| < 10^{-3}$. Po oceni (5.15) je ta pogoj izpolnjen, če je $\frac{|x|^{2+1}}{2!} < 10^{-3}$. Če bi uporabili Lagrangeovo obliko ostanka, bi tudi tukaj dobili boljšo oceno, namreč $\frac{|x|^3}{3!} < 10^{-3}$, kar rezultira v $|x| < 0.1817... \approx 10°$.

Konvergenco vrst je mogoče obravnavati, na enak način kot za realna, tudi za kompleksna števila. Če vstavimo ix (namesto x) v vrsto (5.12) za e^x, dobimo

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \ldots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + i[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots]. \end{aligned}$$

Ko to primerjamo z vrstama (5.16) in (5.17) za sinus in kosinus, spoznamo, da velja naslednja *Eulerjeva formula*:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{5.18}$$

Ko vsatvimo v to formulo $-x$ namesto x, dobimo

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Ko to formulo kombiniramo s prejšnjo, dobimo naslednji Eulerjevi formuli:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{in} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \tag{5.19}$$

Ti dve formuli spominjata na definicijo funkcij ch in sh; iz njiju sledi, da je $\cos x = \mathrm{ch}\,(ix)$ in $\sin x = -i\mathrm{sh}\,(ix)$. Sedaj lahko definiramo eksponentno funkcijo tudi v kompleksnem in sicer

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos x + i \sin x) \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Naloge. 1. Izračunajte $e^{1+3\frac{\pi}{2}i}$.
2. Iz vrste za e^x izpeljite vrsti za $\mathrm{sh}\,x$ in $\mathrm{ch}\,x$.
3. Izračunajte prve tri člene vrste za $\mathrm{tg}\,x$.

5.3. **Vrsta za** $\ln(1+x)$**.** Funkcija ln v točki 0 ni definirana, zato ne moremo obravnavati njene Taylorjeve formule okrog 0, temveč bomo raje obravnavali funkcijo $f(x) = \ln(1 + x)$. Njeni odvodi so

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

njihove vrednosti v 0 so $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Taylorjeva formula (5.6) se zato tukaj glasi

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}x^n + R_n(x) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x), \end{aligned}$$

kjer je po (5.5)

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n n!}{n!(1+\theta_n x)^{n+1}}(1-\theta_n)^n x^{n+1}, \quad (0 < \theta_n < 1),$$

torej

$$|R_n(x)| = \frac{|x|}{|1+\theta_n x|}\left(\frac{(1-\theta_n)}{|1+\theta_n x|}\right)^n |x|^n, \quad (0 < \theta_n < 1). \tag{5.20}$$

Kadar je $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, lahko napišemo

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots. \tag{5.21}$$

Kvocientni kriterij pokaže, da vrsta v (5.21) konvergira absolutno za $x \in (-1,1)$, za $|x| > 1$ pa divergira. Za $x = -1$ je vrsta v (5.21) harmonična, torej divergentna. Za $x = 1$ pa je alternirajoča in konvergentna. Zato je smiselno ocenjevati ostanek le za $x \in (-1,1]$, saj sicer vrsta ne konvergira nikamor, kaj šele proti $\ln(1+x)$. Če je $x \in (-1,1)$, lahko ostanek (5.20) ocenimo navzgor kot

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{1-|x|}|x|^n,$$

saj je tedaj $1 - \theta_n < 1 + \theta_n x$. Ker gre $|x^n|$ proti 0, ko gre n proti ∞, velja enako za $R_n(x)$. Za $x = 1$ pa iz (5.20) ne moremo z gotovostjo sklepati, da gre ostanek proti 0, pač pa si tedaj pomagamo z Lagrangeovo obliko ostanka (5.8):

$$R_n(1) = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!(1+\xi_n)^{n+1}}1^{n+1}, \quad \xi_n \in (0,1).$$

Od tod sledi

$$|R_n(1)| < \frac{1}{n+1}.$$

S tem smo dokazali, da velja razvoj (5.21) za vse $x \in (-1,1]$.

S pomočjo vrste (5.21) lahko računalnik izračuna naravne logaritme vseh števil iz intervala $(0,2]$, saj lahko vsako tako število izrazimo kot $1+x$, kjer je $x \in (-1,1]$. Kako pa izračuna $\ln b$, če je $b > 2$? Ker je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1$, je za dovolj velik n število $\sqrt[n]{b}$ v intervalu $(0,2]$, zato pozna $c := \ln \sqrt[n]{b}$; nato lahko izračuna $\ln b$ kot $\ln b = \ln(\sqrt[n]{b})^n = nc$.

Naloga. Razvijte v Taylorjevo vrsto okrog točke 0 funkcijo $f(x) = \ln \frac{2-x}{4+2x}$. Kje vrsta konvergira?

5.4. **Binomska vrsta.** Poiskati želimo Taylorjevo vrsto za funkcijo $f(x) = (1+x)^r$, kjer je $r \in \mathbb{R}$. Odvodi te funkcije so

$$f^{(n)}(x) = r(r-1)\cdots(r-n+1)(1+x)^{r-n} \quad (n = 0,1,2,\ldots),$$

zato je njena Taylorjeva vrsta (5.7)

$$1 + \frac{r}{1!}x + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \ldots.$$

S kvocientnim kriterijem ugotovimo, da ta vrsta absolutno konvergira, če je $|x| < 1$, za $|x| > 1$ pa divergira. Vendar pa to še ne zagotavlja, da za $|x| < 1$ konvergira ravno proti $(1+x)^r$. Da bi to pokazali, moramo dokazati, da gre ostanek $R_n(x)$ proti 0, ko gre n proti ∞. Uporabili bomo Cauchyevo obliko (5.5) ostanka, ki se v tem primeru glasi

$$R_n(x) = \frac{r(r-1)\cdots(r-n)}{n!}(1+\theta_n x)^{r-n-1}(1-\theta_n)^n x^{n+1} \quad 0<\theta_n<1.$$

Od tod je

$$|R_n(x)| = |r||r-1||\frac{r}{2}-1|\cdots|\frac{r}{n}-1||1+\theta_n x|^{r-1}\left(\frac{1-\theta_n}{1+\theta_n x}\right)^n |x|^{n+1}.$$

Za $x \in (-1,1)$ je $|1+\theta_n x| < 2$ in $\frac{1-\theta_n}{1+\theta_n x} < 1$, zato

$$|R_n(x)| < |r||1-r||1-\frac{r}{2}|\cdots|1-\frac{r}{n}||x|^{n+1}.$$

Naj bo $k \in \mathbb{N}$ tako velik, da je $0 \le 1-\frac{r}{k} < 1$. Potem lahko $R_n(x)$ še nadalje ocenimo kot

$$|R_n(x)| < |r||1-r|\cdots|1-\frac{k-1}{r}||x|^{n+1},$$

kar gre proti 0, ko gre n proti ∞. S tem smo dokazali, da za $x \in (-1,1)$ velja

$$(5.22)\quad (1+x)^r = 1+\frac{r}{1!}x+\frac{r(r-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n+\ldots.$$

Zaradi lažjega zapisa vrste v (5.22) vpeljimo *binomski simbol*

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!}.$$

Potem se (5.22) glasi

$$(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}x^n, \quad -1<x<1.$$

Kadar je $r \in \mathbb{N}$, zgoraj vpeljani binomski simbol sovpada s tistim, ki ga poznate iz srednje šole, saj je

$$\frac{r!}{(r-n)!n!} = \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)(r-n)\cdots 2\cdot 1}{((r-n)\cdots 2\cdot 1)n!} = \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1}{n!}.$$

Nadalje tedaj za vse $n > r$ binomski simbol $\binom{r}{n}$ vsebuje faktor $(r-r)$ in je zato enak 0. Tedaj je vrsta v (5.22) končna, reducira se na znano formulo za potenco binoma oblike $(1+x)^r$ $(r \in \mathbb{N})$.

Splošni binom $(a+b)^r$ tudi lahko ravijemo v vrsto, kadar je $|a| \neq |b|$. Če je npr. $|b| < |a|$, lahko zapišemo

$$(a+b)^r = a^r(1+x)^r, \quad \text{kjer je } x = \frac{b}{a},$$

in nato razvijemo $(1+x)^r$ v vrsto.

Opomba 5.5. Opazimo, da je $\binom{r}{0} = 1$ in $\binom{r}{1} = r$ za vsak $r \in \mathbb{R}$.

Zgled 5.6. Razvijmo v binomsko vrsto $\sqrt{1+x}$.

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \dots$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}x^n + \dots$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \dots.$$

Naloge. 1. Razvijte v binomsko vrsto $(1+x)^{-1}$ in spoznajte, da se ta razvoj ujema z geometrijsko vrsto.

2. Razvijte v Taylorjevo vrsto funkcijo $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$. Kje natančno ta vrsta konvergira?

3. Razvijte v Taylorjevo vrsto okrog točke 0 funkcijo

$$\frac{2x+3}{(x-1)(2-x)}.$$

(Navodilo: Najprej poskusite funkcijo napisati v obliki $\frac{A}{1-x} + \frac{B}{2-x}$, kjer je treba določiti konstanti A in B. Nato $\frac{1}{2-x}$ izrazite kot $\frac{1}{2}(1-\frac{x}{2})^{-1}$).)

5.5. **Določanje ekstremov s pomočjo višjih odvodov.** Predpostavimo, da je funkcija f vsaj m-krat zvezno odvedljiva in da je $f'(a) = 0, \dots, f^{(m-1)}(a) = 0$ ter $f^{(m)}(a) \neq 0$. Ali ima tedaj f v točki a ekstrem?

Ker je po predpostavki $f^{(m)}$ zvezna funkcija, je na kakem dovolj majhnem intervalu $(a-\delta, a+\delta)$ $(\delta > 0)$ povsod istega predznaka kot v točki a. Če je npr. $f^{(m)}(a) > 0$, je $f^{(m)}(x) > 0$ za vse $x \in (a-\delta, a+\delta)$. Po Taylorjevi formuli (z Lagrangeovo obliko ostanka) je

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(x-a)^m, \quad (\xi \in (a,x)). \tag{5.23}$$

Če je m liho število, je $(x-a)^m > 0$, v ce je $x > a$; in $(x-a)^m < 0$, če je $x < a$. Zato tedaj izraz $\frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(x-a)^m$ pri prehodu skozi točko a spremeni predznak (tj., levo od a je pozitiven, desno negativen, ali pa obratno). Iz enakosti (5.23) sledi, da velja isto za $f(x) - f(a)$, zato tedaj funkcija f v točki a nima ekstrema. Če pa je m sodo število, je $(x-a)^m \geq 0$, zato je po (5.23) $f(x) - f(a)$ enakega predznaka kot $f^{(m)}(\xi)$, ki je enakega predznaka kot $f^{(m)}(a)$. Torej, če je $f^{(m)}(a) > 0$, je tudi $f(x) - f(a) > 0$ za vse $x \in (a-\delta, a+\delta)$, zato ima tedaj f v točki a lokalni minimum. Tako smo dokazali:

Izrek 5.7. *Če je $f^{(m)}$ zvezna funkcija in a taka točka, da je*

$$f'(a) = 0, \dots, f^{(m-1)}(a) = 0 \quad \textit{in} \quad f^{(m)}(a) \neq 0,$$

potem ima f v točki a lokalni ekstrem natanko tedaj, ko je m sodo število. V tem primeru je v a lokalni minimum za f, kadar je $f^{(m)}(a) > 0$; lokalni maksimum pa, kadar je $f^{(m)}(a) < 0$.

5.6. **L'Hospitalovo pravilo. Naloga.** Bodita f in g taki funkciji, da je $f(a) = f'(a) = \dots f^{(m-1)}(a) = 0$, $g(a) = g'(a) = \dots g^{(m-1)}(a) = 0$, $f^{(m)}(a) \neq 0$ in $g^{(m)}(a) \neq 0$. Dokažite, da je

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(m)}(a)}{g^{(m)}(a)}.$$