Zaporedja realnih števil

Ko govorimo o zaporedjih realnih števil, mislimo na neskočna *zaporedja*

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \tag{0.1}$$

kjer so vsi *členi* a_n realna števila. Pri tem je pomemben vrstni red členov, zato zaporedje (0.1) ni isto kot množica $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ Pač pa imamo zaporedje lahko za funkcijo $a : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, saj bi lahko člene označili kot $a(n)$ namesto a_n. Na kratko bomo zaporedje (0.1) zapisali kar kot (a_n).

Definicija 0.1. Zaporedje (a_n) je *naraščajoče*, če je $a_n \leq a_{n+1}$ za vse $n = 1, 2, \ldots$. Če velja pri tem stroga neenakost (torej $a_n < a_{n+1}$ za vse n), pravimo, da je zaporedje *strogo naraščajoče.*

Zaporedje (a_n) je *padajoče*, če je $a_n \geq a_{n+1}$ za vse $n = 1, 2, \ldots$. Če pri tem velja stroga neenakost $>$, imenujemo zaporedje *strogo padajoče.* Zaporedje je *(strogo) monotono*, če je (strogo) naraščajoče ali pa (strogo) padajoče.

Zaporedje (a_n) je (navzgor, navzdol) omejeno, če je taka množica $\{a_1, a_2, \ldots\}$. Najmanjšo med zgornjimi mejami navzgor omejenega zaporedja (a_n) (imenovano *supremum*), bomo označili kot

$$\sup(a_n).$$

Največjo med spodnjimi mejami navzdol omejenega zaporedja (a_n) (*infimum*) pa kot

$$\inf(a_n).$$

Zgled 0.2. (i) Zaporedje $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ je omejeno navzdol, ne pa navzgor, njegova natančna spodnja meja je 1. To zaporedje je strogo naraščajoče.

(ii) Zaporedje $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ je padajoče in omejeno. Njegova natančna zgornja meja 1 je člen zaporedja, njegova natančna spodja meja je 0 in ni člen zaporedja.

(iii) Zaporedje $c, c, c \ldots, c, \ldots$, ki ima vse člene enake, imenujemo *konstantno zaporedje.* To zaporedje je hkrati padajoče in naraščajoče, a ni strogo monotono. Seveda je omejeno.

(iv) Primer omejenega zaporedja, ki ni niti naraščajoče niti padajoče je

$$1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \ldots.$$

Posebna vrsta zaporedij so konvergentna zaporedja, to je taka, ki se približujejo kakemu številu, imenovanemu limita.

Definicija 0.3. Zaporedje (a_n) *konvergira proti limiti* a, če je za vsak $\varepsilon > 0$ zunaj intervala $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ le končno mnogo členov a_n. Dejstvo, da je a limita zaporedja (a_n) bomo napisali kot

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Zaporedje, ki konvergira proti limiti, imenujemo *konvergentno.* Zaporedje, ki ni konvergentno, imenujemo *divergentno.*

Zaporedje ima lahko največ eno limito. Če sta namreč a in b različni števili, recimo $a < b$, lahko najdemo tak $\varepsilon > 0$, da sta intervala $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ in $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ disjunktna (to bo res, če izberemo ε manjši ali enak $\frac{1}{2}(b-a)$). Potem gotovo ne more biti zunaj obeh intervalov le končno mnogo členov neskončnega zaporedja, saj so vsi tisti členi, ki so zunaj prvega intervala, vsebovani v drugem intervalu in obratno.

Pogoj, da je zunaj intervala $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ le končno mnogo členov, pomeni, da so od nekega člena dalje, vsi členi vsebovani v intervalu (namreč od tistega člena dalje, ki je naslednji za zadnjim členom zunaj intervala). To, da je kak člen a_n v intervalu $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ pa pomeni, da je $|a_n - a| < \varepsilon$. Zato lahko definicijo limite povemo tudi takole:

Zaporedje (a_n) *konvergira proti* a *natanko tedaj, ko za vsak* $\varepsilon > 0$ *obstaja tako naravno število* $n(\varepsilon)$*, da velja*

$$n \geq n(\varepsilon) \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon. \tag{0.2}$$

Pri tem smo z zapisom $n(\varepsilon)$ naznačili, da je naravno število, za katero je izpolnjen pogoj (0.2), odvisno od ε. Če namreč izberemo manjši ε, se bodo v spločnem le kasnejši členi zaporedja razlikovali od a po absolutni vrednosti za manj kot ε.

Zgled 0.4. Členi zaporedja

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

se približujejo k 1, zato je $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Poglejmo, kaj je v tem primeru $n(\varepsilon)$ za dani $\varepsilon > 0$. Pogoj $|a_n - a| < \varepsilon$ se tukaj glasi

$$|\frac{n}{n+1} - 1| < \varepsilon,$$

kar lahko poenostavimo v

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Ta neenakost je ekvivalentna z $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Torej lahko vzamemo za $n(\varepsilon)$ katerokoli naravno število, ki je večje od $\frac{1}{\varepsilon} - 1$.

Trditev 0.5. *Vsako konvergentno zaporedje je omejeno.*

Dokaz. Naj bo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Ker je zunaj intervala $(a-1, a+1)$ le končno mnogo členov a_n, obstaja med njimi največji. Če je ta člen večji ali enak $a+1$, je zgornja meja zaporedja, sicer pa je zgornja meja $a+1$. S tem smo pokazali, da je zaporedje navzgor omejeno. Na enak način pokažemo, da je omejeno tudi navzdol. $\square$

Obrat prejšnje trditve ne velja, ni namreč vsako omejeno zaporedje konvergentno.

Zgled 0.6. Zaporedje $1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ je očitno omejeno, a ni konvergentno.

Vsota, razlika, produkt in kvocient zaporedij so definirani kot

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n),\ (a_n) - (b_n) = (a_n - b_n),\ (a_n)(b_n) = (a_n b_n),\ \frac{(a_n)}{(b_n)} = (\frac{a_n}{b_n}),$$

kjer moramo pri definiciji kvocienta privzeti, da je $b_n \neq 0$ za vsak n. Če se členi zaporedij a_n in b_n približujejo številoma a in b, potem se seveda $a_n \pm b_n$ bližajo k $a \pm b$, $a_n b_n$ pa k ab. Kot vajo iz uporabe kriterija (0.2) za limito, bomo to sedaj dokazali naslednjo trditev.

Trditev 0.7. *Bodita (a_n) in (b_n) konvergentni zaporedji z limitama a in b. Potem konvergirajo tudi zaporedja $(a_n \pm b_n)$ in $(a_n b_n)$ in velja*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b \quad \textit{in} \quad \lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

Če je pri tem $b \neq 0$ (in seveda $b_n \neq 0$), konvergira tudi zaporedje $(\frac{a_n}{b_n})$ in velja

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Dokaz. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Obravnavajmo najprej vsoto zaporedij. Po kriteriju (0.2) moramo dokazati, da za vse dovolj velike n velja $|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$. V ta namen bomo zapisali

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|. \tag{0.3}$$

Ker zaporedje (a_n) konvergira proti a, zaporedje (b_n) pa proti b, za vse dovolj pozne člene velja

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \;\text{ in }\; |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Recimo, da prva od teh neenakosti velja za vse $n \geq n_1$, druga pa za $n \geq n_2$. Potem obe veljata za $n \geq m := \max\{n_1, n_2\}$ in za $n \geq m$ sledi iz (0.3), da je

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Po kriteriju (0.2) od tod sledi, da je $a + b = \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$. Dokaz, da zaporedje $(a_n - b_n)$ konvergira proti $a - b$, je tako podoben pravkar navedenemu dokazu za vsoto, da ga bomo pustili za vajo.

Lotimo se sedaj produkta. Pokazati moramo, da je za vse dovolj velike n razlika $|a_n b_n - ab|$ pod ε. V ta namen jo najprej ocenimo kot

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b|. \tag{0.4}$$

Ker zaporedje (b_n) konvergira proti b, za dovolj velike n, recimo za $n \geq n_2$, velja

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a| + 1}. \tag{0.5}$$

(V imenovalcu na desni smo dodali 1 le zaradi možnosti, da je $a = 0$.) Ker je zaporedje (b_n) omejeno (saj je konvergentno), obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da je $|b_n| < M$ za vse n. Tedaj je $|a_n - a||b_n| \leq |a_n - a|M$. Ker zaporedje (a_n) konvergira proti a, je za vse dovolj velike n, recimo za $n \geq n_1$, $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$, torej

$$|a_n - a||b_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{0.6}$$

Iz (0.4), (0.5) in (0.6) sedaj sledi za vse $n \geq \max\{n_1, n_2\}$

$$|a_n b_n - ab| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon|a|}{2|a| + 1} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Po kriteriju (0.2) to pomeni, da zaporedje $(a_n b_n)$ konvergira proti ab.

Končno obravnavajmo še kvocient:

$$|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}| = |\frac{a_n b - a b_n}{b_n b}| = \frac{|(a_n - a)b + a(b - b_n)|}{|b_n||b|} \leq \frac{|a_n - a|}{|b_n|} + \frac{|a|}{|b_n||b|}|b_n - b|. \tag{0.7}$$

Po predpostavki je $b \neq 0$. Ker zaporedje (b_n) konvergira k b, je za vse dovolj velike n, recimo za $n \geq n_2$,

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{4|a|+1}|b|^2 \tag{0.8}$$

in hkrati b_n tako blizu b, da je $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ (kar je res, če je $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$). Tedaj je $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$ in iz (0.7) in (0.8) sledi

$$|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}| \leq 2\frac{|a_n - a|}{|b|} + 2\frac{|a|}{|b|^2}|b_n - b| \leq 2\frac{|a_n - a|}{|b|} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{0.9}$$

Ker zaporedje (a_n) konvergira k a, je za vse dovolj velike n, recimo za $n \geq n_1$,

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{4}|b|. \tag{0.10}$$

Za $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ sledi sedaj iz (0.9) in (0.10)

$$|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Zgled 0.8. Če zaporedje (b_n) konvergira proti 0, potem zaporedje $(\frac{a_n}{b_n})$ ni nujno konvergentno niti v primeru, ko je (a_n) konstantno zaporedje $1, 1, 1, \ldots$. Za zgled lahko vzamemo npr. $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. Zaporedje $\frac{1}{b_n}$ ima v tem primeru člene $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$, ki ni omejeno, in ne bi konvergiralo niti, če bi dopuščali tudi neskončne vrednosti limit.

Zgled 0.9. (i) Izračunajmo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)(n+4)(n-2)}{n^3+1}.$$

Ko števec in imenovalec ulomka delimo z najvišjo potenco od n, ki nastopa v izrazu, tj. z n^3, dobimo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2-\frac{1}{n})(1+\frac{4}{n})(1-\frac{2}{n})}{1+\frac{1}{n^3}} = 2.$$

(ii) Tudi v izrazu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+5^{n+1}}{3^n - 5^n}$$

najprej delimo števec in imenovalec z največjim členom 5^{n+1}, nakar dobimo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{3}{5})^{n+1}+1}{\frac{1}{5}(\frac{3}{5})^n - \frac{1}{5}} = \frac{1}{\frac{-1}{5}} = -5.$$

(iii) V izrazu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$$

je z večanjem n-ja v števcu čedalje več členov, zato tukaj ne moremo uporabiti pravila za limito vsote zaporedij. Pač pa se moramo spomniti na srednješolsko formulo $1+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Tako dobimo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})=\frac{1}{3}.$$

(iv) V izrazu

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$$

gresta oba člena, $\sqrt{n^2+n}$ in n, proti ∞, ko gre n proti ∞. Za izračun te limite pomnožimo izraz z $\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n}$, da dobimo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n})^2-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}.$$

Trditev 0.10. *Vsako monotono omejeno zaporedje je konvergentno. Njegova limita je enaka natančni zgornji meji, kadar je zaporedje naraščajoče, in natančni spodnji meji, kadar je padajoče.*

Slika 1. Limita narščajočega omejenega zaporedja

Dokaz. Trditev bomo dokazali za naraščajoča, navzgor omejena zaporedja, saj je dokaz za padajoča zaporedja podoben. Naj bo torej (a_n) navzgor omejeno, naraščajoče zaporedje (seveda je omejeno tudi navzdol, s prvim členom, ker je naračajoče). Po aksiomu o kontinumu obstaja

$$M = \sup a_n.$$

Trdimo, da je M limita zaporedja (a_n). Ker je M najmanjša med zgornjimi mejami, za vsak $\varepsilon > 0$ število $M - \varepsilon$ ni zgornja meja zaporedja, zato obstaja kak člen a_m, ki je večji od $M - \varepsilon$. Ker je zaporedje naraščajoče, so potem vsi nadaljnji členi tudi večji od $M - \varepsilon$, torej velja

$$n \geq m \Longrightarrow a_n > M - \varepsilon.$$

Ker je M zgornja meja zaporedja, so vsi ti členi v intervalu $(M - \varepsilon, M]$ in s tem tudi v intervalu $[M - \varepsilon, M + \varepsilon)$. Zunaj tega intervala je zato lahko le končno mnogo členov, namreč kvečjemu prvih $m - 1$ členov. $\square$

Zgled 0.11. *Geometrijsko zaporedje* (q^n), kjer je q konstanta.

Če je $q > 1$, lahko izrazimo $q = 1 + a$, kjer je $a > 0$, in potem

$$q^n = (1 + a)^n = 1 + na + \binom{n}{2} a^2 + \ldots > na.$$

Od tod sledi, da je tedaj zaporedje (q^n) navzgor neomejeno, ker to velja za zaporedje (na).

Če je $q = 1$ ali pa $q = 0$, je zaporedje (q^n) konstantno.

Če pa je $q \in (0, 1)$, označimo $p = 1/q$, tako da je $q^n = 1/p^n$. Ker je $p > 1$, gre p^n proti ∞, ko gre n proti ∞, zato gre $1/p^n$ proti 0. Torej je tedaj zaporedje (q^n) konvergentno proti 0.

Če je $q \in (-1, 0)$, potem je $|q| \in (0, 1)$. Iz dejstva, da zaporedje $(|q|^n)$ konvergira proti 0 in ker je $q^n = \pm|q|^n$, sledi, da mora tudi zaporedje (q^n) konvergirati proti 0.

Če je $q = -1$, se zaporedje (q^n) glasi $-1, 1, -1, 1, \ldots$. Torej je tedaj omejeno, a ni konvergentno.

Če je $q < -1$, pa je $|q| > 1$, zato zaporedje $(|q|^n)$ neomejeno navzgor. Ker je $q^n = \pm|q|^n$, je tedaj tudi zaporedje (q^n) neomejeno (navzgor in navzdol).

Zaključek je torej naslednji:

Geometrijsko zaporedje (q^n) *je konvergentno natanko tedaj, ko je* $q \in (-1, 1]$. *Tedaj je njegova limita enaka* 0*, kadar je* $q \in (-1, 1)$*; in enaka* 1*, kadar je* $q = 1$.

Zgled 0.12. Oglejmo si zaporedje $(\sqrt[n]{a})$, kjer je a fiksno pozitivno realno število, različno od 1.

Če je $a > 1$ je to zaporedje strogo padajoče. Za dokaz, moramo pokazati, da je $\sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a}$ oziroma, ekvivalentno, $a^n < a^{n+1}$, kar takoj sledi iz $a > 1$. Ker je to zaporedje tudi navzdol omejeno (namreč z 1), mora biti konvergentno po prejšnji trditvi. Pokažimo, da je $\inf \sqrt[n]{a} = 1$ in zato tudi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Predpostavimo nasprotno, da bi obstajala kaka spodnja meja $m > 1$ tega zaporedja. Potem bi bilo $\sqrt[n]{a} \geq m$ za vse n, torej $a \geq m^n$ za vse n. Toda, ker je zaporedje (m^n) navzgor neomejeno po prejšnjem zgledu (saj je $m > 1$), bi bilo to protislovje.

Če je $a \in (0,1)$, lahko izrazimo $a = 1/b$, kjer je $b > 1$. Ker je zaporedje $(\sqrt[n]{b})$ padajoče proti 1 (kot smo ugotovili v prejšnjem odstavku) in $\sqrt[n]{a} = 1/\sqrt[n]{b}$, je zaporedje $(\sqrt[n]{a})$ naraščajoče proti 1.

Tako smo ugotovili, da je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ za vsak $a > 0$.

Zgled 0.13. Eulerjevo število e**.** Trdimo, da je zaporedje, s splošnim členom

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n,$$

strogo naraščajoče in navzgor omejeno. Za dokaz bomo najprej razvili splošni člen po binomski formuli:

$$a_n = 1 + n\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n} + \ldots + \frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-n+1}{n}$$

(0.11)

$$= 2+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\ldots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})+\ldots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}).$$

Ko n povečamo na $n+1$, se tudi število členov poveča za 1, tako da je

$$a_{n+1} =$$

$$2+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\ldots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{k-1}{n+1})+\ldots+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})$$

Ko primerjajmo splošni člen

$$\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})$$

v vsoti za a_n s tistim v vsoti za a_{n+1}, vidimo, da se poveča, saj je $1 - \frac{j}{n+1} > 1 - \frac{j}{n}$ za vse $j = 1, \ldots, k-1$. Poleg tega je v vsoti za a_{n+1} en pozitiven člen (namreč zadnji) več, zato je očitno res $a_{n+1} > a_n$. S tem smo dokazali, da je zaporedje (a_n) naraščajoče.

Ker so vsi faktorji $1 - \frac{j}{n}$ v gornji formuli (0.11) za a_n pod 1, lahko ocenimo

$$a_n < 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{k!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Ker je $k! = 2\cdot 3\cdots k \geq 2\cdot 2\cdots 2 = 2^{k-1}$, sledi od tod

$$a_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Vsota na desni je pod 3 (ker je $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1$), torej smo dokazali, da je zaporedje (a_n) navzgor omejeno s 3. Po aksiomu o kontinuumu obstaja supremum tega zaporedja, ki je po trditvi 0.10 enaka limiti zaporedja. To limito imenujemo *Eulerjevo število* in označimo z e. Torej

$$e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n. \tag{0.12}$$

Zgled 0.14. S številom e so povezane še mnoge druge popularne limite. Če npr. v izrazu $(1+\frac{1}{n})^n$ nadomestimo n z $-n$, dobimo

$$(1-\frac{1}{n})^{-n} = (\frac{n-1}{n})^{-n} = (\frac{n}{n-1})^n = (\frac{n-1+1}{n-1})^n = (1+\frac{1}{n-1})^{n-1}(1+\frac{1}{n-1}).$$

Pri tem je zaporedje s členi $(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}$ v bistvu zaporedje iz prejšnjega zgleda (označite npr. $n-1$ z m), torej konvergira proti e. Ker $(1+\frac{1}{n-1})$ konvergira proti 1, ko gre n proti ∞, sledi, da je

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{-n} = e.$$

Z upoštevanjem prejšnjega zgleda lahko torej napišemo, da je

$$\lim_{n\to\pm\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e.$$

Naloge. 1. Izračunajte $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{n+1}{n^2+1})^{3n+1}$. (Navodilo: Napišite splošni člen kot

$$[(1+\frac{n+1}{n^2+1})^{\frac{n^2+1}{n+1}}]^{\frac{n+1}{n^2+1}(3n+1)}.)$$

2. Če zaporedje a_n konvergira proti a, dokažite, da tudi zaporedje (b_n), kjer je $b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$, konvergira proti a.

3. Izračunajte $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.