0.1. Inverzne in implicitne preslikave

0.1.1. Integral vektorske funkcije. Integral funkcije z vrednostmi v $\mathbb{R}^n$, definirane na kakem intervalu, lahko definiramo kar po komponentah.

DEFINICIJA 0.1.1. Naj bo $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ zvezna funkcija, definirana na kakem intervalu $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, in naj bodo f_j njene komponente. Tedaj definiramo

$$\int_a^b f(t)\,dt := (\int_a^b f_1(t)\,dt, \ldots, \int_a^b f_n(t)\,dt).$$

Integral $u := \int_a^b f(t)\,dt$ je torej vektor iz $\mathbb{R}^n$. Za vsak vektor $v \in \mathbb{R}^n$ lahko izračunamo skalarni produkt $\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^n u_j v_j$.

LEMA 0.1.2. *Za vsako (zvezno) funkcijo $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ in vsak vektor $v \in \mathbb{R}^n$ je*

$$\langle \int_a^b f(t)\,dt, v\rangle = \int_a^b \langle f(t), v\rangle\,dt.$$

DOKAZ. Po definiciji integrala vektorske funkcije in običajnih lastnostih integrala skalarnih funkcij imamo

$$\langle \int_a^b f(t)\,dt, v\rangle = \sum_{j=1}^n v_j \int_a^b f_j(t)\,dt = \int_a^b \sum_{j=1}^n v_j f_j(t)\,dt = \int_a^b \langle f(t), v\rangle\,dt.$$

□

POSLEDICA 0.1.3. $\| \int_a^b f(t)\,dt\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt$*, če je* $a \leq b$.

DOKAZ. Uporabili bomo dejstvo, da je $| \int_a^b g(t)\,dt| \leq \int_a^b |g(t)|\,dt$ za vsako skalarno funkcijo g, in Cauchy-Schwarzevo neenakost za skalarni produkt. Za vsak $v \in \mathbb{R}^n$ velja po prejšnji lemi

$$\begin{aligned} |\langle \int_a^b f(t)\,dt, v\rangle| = | \int_a^b \langle f(t), v\rangle\,dt| &\leq \int_a^b |\langle f(t), v\rangle|\,dt \\ &\leq \int_a^b \|f(t)\|\|v\|\,dt = \|v\| \int_a^b \|f(t)\|\,dt. \end{aligned}$$

Ko vstavimo v to nenenakost $v = \int_a^b f(t)\,dt$ in nato krajšamo $\|v\|$, dobimo želeno enakost. □

Naslednjo trditev bomo potrebovali kasneje, še v tem razdelku.

TRDITEV 0.1.4. *Naj bo G odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$, $x, y \in G$ taki točki, da je daljica $[x,y] := \{(1-t)x + ty : 0 \leq t \leq 1\}$ vsebovana v G, $f : G \to \mathbb{R}^m$ pa zvezno odvedljiva funkcija. Potem je*

$$\|f(y) - f(x)\| \leq M\|y - x\|,$$

kjer je $M := max\{\|f'(z)\| : z \in [x,y]\}$.

Dokaz. Ker je po predpostavki f zvezno odvedljiva, je funkcija $\phi : z \mapsto \|f'(z)\|$ zvezna na G. Ker je daljica $[x,y]$ kompaktna množica, je njena slika s preslikavo ϕ tudi kompaktna (torej zaprta in omejena), zato maksimum M obstaja. Po pravilu za posredno odvajanje je odvod skalarne funkcije $g(t) := f(x+t(y-x))$ $(t \in [0,1])$ enak $\frac{d}{dt}g(t) = f'(x+t(y-x))(y-x)$. Ker je $f(y)-f(x) = g(1)-g(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}g(t)\,dt$, sledi z uporabo posledice 0.1.3, da je

$$\begin{aligned}\|f(y)-f(x)\| &= \|\int_0^1 f'(x+t(y-x))(y-x)\,dt\| \\ &\leq \int_0^1 \|f'(x+t(y-x))(y-x)\|\,dt \leq \int_0^1 M\|y-x\|\,dt = M\|y-x\|.\end{aligned}$$

□

0.1.2. Inverz odvedljive preslikave. Naj bo $f : G \to H$ bijektivna zvezna preslikava med odprtima podmnožicama evklidskega prostora $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$. (Namesto evklidskega bi bil $\mathcal{U}$ lahko v tem podrazdelku poljuben Banachov prostor; to dokazov ne bi bistveno spremenilo.) Inverzna preslikava f^{-1} je zvezna natanko tedaj, ko je $f(G_0)$ odprta množica za vsako odprto podmnožico $G_0 \subseteq G$; to sledi iz dejstva, da je $(f^{-1})^{-1}(G_0) = f(G_0)$ po eni od karakterizacij zveznih preslikav. Če je f zvezno odvedljiva in odvod $f'(a)$ obrnljiv operator na $\mathcal{U}$ za kak $a \in G$, je preslikava $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ na $\mathcal{U}$ obrnljiva. Ta preslikava je v okolici točke a dober približek preslikave f; pokazali bomo, da tako dober, da je tudi preslikava f obrnljiva, če jo opazujemo na dovolj majhni okolici točke a.

Izrek 0.1.5. *(Izrek o inverzni preslikavi) Naj bo G odprta podmnožica v $\mathcal{U} := \mathbb{R}^n$, $a \in G$ poljubna točka, $f : G \to \mathcal{U}$ pa taka r-krat zvezno odvedljiva preslikava ($r \geq 1$), da je $f'(a)$ obrnljiv operator na prostoru $\mathcal{U}$. Potem obstajata taki odprti podmnožici $M \subseteq G$ in $N \subseteq \mathcal{U}$, da je $a \in M$, $f(a) \in N$, f preslika M bijektivno na N in inverzna preslikava $(f|M)^{-1} : N \to M$ je r-krat zvezno odvedljiva. Za odvod inverzne preslikave velja*

$$((f|M)^{-1})'(y) = (f'(f^{-1}(y)))^{-1} \tag{0.1.1}$$

za vsak $y \in N$. (Na desni strani formule nastopa inverz linearnega operatorja $f'(f^{-1}(y))$.)

Dokaz. Označimo $b = f(a)$ in $L = f'(a)$. Preslikava $\phi(x) := L^{-1}(x-b)$ na $\mathcal{U}$ je obrnljiva (njen inverz se izraža kot $\phi^{-1}(x) = Lx + b$) in prav tako je obrnljiva tudi translacija $T_a(x) := x + a$. Kompozitum $F := \phi f T_a$ je definiran na odprti množici $G - a := \{x - a : x \in G\}$, ki vsebuje točko 0, in zadošča pogojema

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = I.$$

Dovolj je, da dokažemo izrek za preslikavo F (namesto f), ker sta ϕ in T_a neskončnokrat odvedljivi povsod definirani preslikavi in isto velja za njuna inverza. Privzeti smemo torej, da je $a = 0 = b$ in $f'(0) = I$.

Pri določanju inverzne funkcije je treba za dani y poiskati tak x, da je $f(x) = y$. To je ekvivalentno z zahtevo, da je $x - f(x) + y = x$, kar nas privede do iskanja negibnih točk preslikave $x \mapsto x - f(x) + y$, pri čemer si bomo pomagali z Banachovim izrekom o skrčitvah. Definirajmo preslikavo $g : G \to \mathcal{U}$ s predpisom

$$g(x) = x - f(x).$$

Potem je $g(0) = 0$ in $g'(0) = 0$. Ker je po hipotezi odvod g' zvezna funkcija, obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$\|g'(x)\| \leq \frac{1}{2} \quad \text{za vse } x \in \overline{B(0,\delta)}, \tag{0.1.2}$$

kjer označuje $\overline{B(0,\delta)}$ zaprto kroglo s središčem 0 in polmerom δ. Za vsak $y \in \overline{B(0,\frac{\delta}{2})}$ naj bo $g_y : \overline{B(0,\delta)} \to \mathcal{U}$ preslikava, definirana s predpisom

$$g_y(x) = y + g(x).$$

Po (0.1.2) in trditvi 0.1.4 je $\|g(x)\| = \|g(x) - g(0)\| \leq \frac{1}{2}\delta$, torej je

$$\|g_y(x)\| = \|y + g(x)\| \leq \|y\| + \|g(x)\| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \text{ za vse } x \in \overline{B(0,\delta)} \text{ in } y \in \overline{B(0,\frac{\delta}{2})}.$$

To pomeni, da g_y preslikuje kroglo $\overline{B(0,\delta)}$ samo vase. Ta preslikava je skrčitev polnega metričnega prostora $\overline{B(0,\delta)}$, saj za poljubna $x, z \in \overline{B(0,\delta)}$ velja

$$\|g_y(z) - g_y(x)\| = \|g(z) - g(x)\| \leq \frac{1}{2}\|z - x\| \tag{0.1.3}$$

po (0.1.2) in trditvi 0.1.4. Po Banachovem skrčitvenem izreku **??** obstaja natanko ena negibna točka $x_y \in \overline{B(0,\delta)}$ preslikave g_y. Za to točko x_y torej velja $g_y(x_y) = x_y$ oziroma $y + x_y - f(x_y) = x_y$, torej $f(x_y) = y$. Če je pri tem $\|y\| < \frac{\delta}{2}$, je $\|x_y\| < \delta$, saj je $\|x_y\| = \|g_y(x_y)\| = \|y + g(x_y)\| \leq \|y\| + \|g(x_y)\| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$. Od tod sledi, da za vsak $y \in B(0,\frac{\delta}{2})$ obstaja natanko en tak $x \in B(0,\delta)$, da je $f(x) = y$, saj je enakost $f(x) = y$ ekvivalentna z enakostjo $g_y(x) = x$, ki ima natanko eno rešitev v $\overline{B(0,\delta)}$, če je $\|y\| \leq \frac{\delta}{2}$. Ker je $f^{-1}(B(0,\frac{\delta}{2}))$ odprta množica (po trditvi **??**), je odprta tudi množica

$$M := B(0,\delta) \cap f^{-1}(B(0,\frac{\delta}{2}))$$

in po pravkar povedanem f preslika M bijektivno na kroglo $N := B(0, \frac{\delta}{2})$.

Pokažimo sedaj, da je inverzna preslikava $(f|M)^{-1} : N \to M$ zvezna. V ta namen najprej opazimo, da za vsaka $x, z \in B(0, \delta)$ velja po (0.1.3)

$$\|f(z)-f(x)\| = \|z-x-(g(z)-g(x))\| \geq \|z-x\|-\|g(z)-g(x)\| \geq \|z-x\|-\frac{1}{2}\|z-x\|,$$

torej

$$\|f(z) - f(x)\| \geq \frac{1}{2}\|z - x\| \quad (x, z \in B(0, \delta)). \tag{0.1.4}$$

Bodita sedaj $y, v \in N$ poljubna in naj bosta x in y (enolično določena) taka elementa iz M, da je $f(x) = y$ in $f(z) = v$. Neenakost (0.1.4) lahko potem napišemo kot

$$\|f^{-1}(v) - f^{-1}(y)\| \leq 2\|v - y\| \quad (y, v \in N), \tag{0.1.5}$$

kar pove, da je preslikava $(f|M)^{-1} : N \to M$ (enakomerno) zvezna.

Dokažimo še, da je preslikava $(f|M)^{-1}$ odvedljiva v vsaki točki $y \in N$. Naj bo vektor k tako majhen, da je krogla $\overline{B(y, \|k\|)}$ vsebovana v N, označimo $v := y + k$ in bodita $x, z \in M$ taka, da je $f(x) = y$ in $f(z) = v$. Z upoštevanjem ocene (0.1.5) imamo

$$\frac{\|f^{-1}(v) - f^{-1}(y) - f'(f^{-1}(y))^{-1}(v - y)\|}{\|v - y\|} \leq 2\frac{\|z - x - f'(x)^{-1}(f(z) - f(x))\|}{\|z - x\|}. \tag{0.1.6}$$

Ker je f odvedljiva v točki x, je $f(z)-f(x) = f'(x)(z-x)+o(z-x)\|z-x\|$, kjer gre $o(z - x)$ proti 0, ko gre z proti x. Ko vstavimo ta izraz v desno stran ocene (0.1.6), se le-ta poenostavi v $2\|f'(x)^{-1}o(z - x)\|$, kar je manjše ali enako $2\|f'(x)^{-1}\|\|o(z - x)\|$ in gre zato proti 0, ko gre z proti x. Ocena (0.1.6) torej pove, da je funkcija $(f|M)^{-1}$ odvedljiva v točki y in da je njen odvod enak $f'(f^{-1}(y))^{-1}$. Ta formula za odvod pove tudi, da je $(f^{-1})'$ zvezna preslikava na N.

Dokazati moramo le še, da je za $r > 1$ funkcija $(f|M)^{-1}$ r-krat zvezno odvedljiva, če je f r-krat zvezno odvedljiva. Po formuli (0.1.1) se to reducira na dokaz dejstva, da so elementi matrike $(f'(f^{-1}(y))^{-1}$ $(r - 1)$-krat zvezno odvedljive funkcije koordinat y_j vektorja y. Iz formule za inverz matrike (s pomočjo poddeterminant) sledi, da so elementi matrike $(f'(f^{-1}(y))^{-1}$ tolikokrat zvezno odvedljive funkcije spremenljivk y_j kot elementi matrike $f'(f^{-1}(y))$. Če je na primer f dvakrat zvezno odvedljiva, je f' zvezno odvedljiva in zato lahko funkcijo $y \mapsto f'(f^{-1}(y))$ posredno odvajamo (ker že vemo, da je preslikava $y \mapsto f^{-1}(y)$ zvezno odvedljiva). Zato mora biti tedaj preslikava $y \mapsto f'(f^{-1}(y))$ zvezno odvedljiva, $(f|M)^{-1}$ pa dvakrat zvezno odvedljiva po formuli (0.1.1). Ko vemo, da je f^{-1} dvakrat zvezno odvedljiva, lahko (pri predpostavki, da je f trikrat zvezno odvedljiva, torej f' dvakrat zvezno odvedljiva) sklepamo, da je tudi kompozitum $y \mapsto f'(f^{-1}(y))$

dvakrat zvezno odvedljiv. Nato spet sledi po (0.1.1), da je $(f|M)^{-1}$ trikrat zvezno odvedljiva preslikava (ker je njen odvod dvakrat zvezno odvedljiv). Tako lahko induktivno dokažemo za vsak $r = 1, 2, \ldots$, da je $(f|M)^{-1}$ r-krat zvezno odvedljiva, če je preslikava f r-krat zvezno odvedljiva. $\square$

Zgled 0.1.6. Izračunajmo odvod preslikave $f : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $f(X) := X^2$. Ker je

$$f(X + H) - f(X) = XH + HX + H^2$$

in $\|H^2\| \leq \|H\|^2$, je $f'(X) : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ linearna preslikava, ki vsaki matriki H priredi matriko $XH + HX$. Torej je $f'(I)H = 2H$ za vsak $H \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. To pomeni, da je $f'(I)$ dvakratnik identičnega operatorja na prostoru $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, se pravi obrnljiv operator. Po izreku o inverzni preslikavi zato f preslika kako dovolj majhno odprto množico M, ki vsebuje I, na neko odprto množico N, ki vsebuje $f(I) = I$. Pri tem pa je inverzna preslikava $(f|M)^{-1}$ neskončnokrat odvedljiva. Za vsako matriko $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, ki je dovolj blizu identitete I, obstaja torej $\sqrt{X}$, in sicer tako, da je funkcija $X \mapsto \sqrt{X}$ zvezno odvedljiva in $\sqrt{I} = I$. Seveda pa bi obstoj takega kvadratnega korena lahko dokazali tudi s pomočjo razvoja funkcije $f(t) = \sqrt{1+t}$ v potenčno vrsto in z uporabo razdelka 4.7.

0.1.3. Implicitne funkcije. Naj bo G podmnožica v $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $f : G \to \mathbb{R}^m$ pa preslikava. Vsako točko iz G lahko podamo s parom vektorjev (x, y), kjer je $x \in \mathbb{R}^n$ in $y \in \mathbb{R}^m$. Zanimajo nas rešitve enačbe $f(x, y) = 0$. Zapisana po komponentah je ta enačba pravzaprav sistem m enačb

$$\begin{array}{rcl} f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) & = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) & = & 0. \end{array}$$

Ker je enačb m, domnevamo, da se dajo morda neznanke $y_1, \ldots, y_m$ izraziti iz sistema kot funkcije spremenljivk $x_1, \ldots, x_n$. Z drugimi besedami, iz enačbe $f(x, y) = 0$ bi radi izrazili y kot vektorsko funkcijo vektorske spremenljivke x. Seveda to v splošnem ni vedno mogoče niti pri linearnih sistemih oblike $Ax + By = 0$; je pa mogoče, če je matrika B obrnljiva. Izrek o implicitni funkciji posplošuje to na nelinearne enačbe.

Naj bo $f : G \to \mathbb{R}^m$ odvedljiva preslikava, kjer je G odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, in $(x, y) \in G$. Označimo z $(D_2 f)(x, y)$ odvod preslikave $v \mapsto f(x, v)$, izračunan v točki y. Njegova matrika v standardni bazi je

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x, y) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x, y) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x, y) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x, y) \end{bmatrix}.$$

Klasična oznaka za determinanto te matrike pa je

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}.$$

Podobno definiramo tudi $(D_1 f)(x, y)$ kot odvod preslikave $u \mapsto f(u, y)$, izračunan v točki x.

Izrek 0.1.7. *(Izrek o implicitni funkciji) Naj bo $G \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ odprta podmnožica, $(a, b) \in G$ (kjer je $a \in \mathbb{R}^n$ in $b \in \mathbb{R}^m$), $f : G \to \mathbb{R}^m$ pa taka zvezno odvedljiva preslikava, da je $f(a, b) = 0$ in operator $(D_2 f)(a, b)$ obrnljiv. Potem obstajata taki odprti množici $D \subseteq \mathbb{R}^n$ in $H \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, da je $a \in D$, $(a, b) \in H$ in da za vsak $x \in D$ obstaja natanko en $y_x \in \mathbb{R}^m$, ki zadošča pogojema $(x, y_x) \in H$ in $f(x, y_x) = 0$. Še več, s predpisom $g(x) := y_x$ je definirana taka zvezno odvedljiva preslikava $g : D \to \mathbb{R}^m$, da je $g(a) = b$ in $f(x, g(x)) = 0$ za vsak $\in D$. Odvod te preslikave je enak*

$$g'(x) = -[(D_2 f)(x, g(x))]^{-1}(D_1 f)(x).$$

Dokaz. Definirajmo preslikavo $F : G \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ s predpisom

$$F(x, y) := (x, f(x, y)) \quad ((x, y) \in G).$$

Matrika odvoda preslikave F v točki (a, b) ima obliko

$$(DF)(a, b) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ (D_1 f)(a, b) & (D_2 f)(a, b) \end{bmatrix}.$$

Ker je po predpostavki $(D_2 f)(a, b)$ obrnljiva matrika (torej je njena determinanta različna od 0), je obrnljiva tudi matrika $(DF)(a, b)$. Po izreku o inverzni funkciji obstaja taka odprta okolica H točke (a, b) v $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, da je odvod $(DF)(x, y)$ obrnljiv za $(x, y) \in H$ in da F preslika H bijektivno na odprto množico $N := F(H)$ v $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, ki vsebuje točko $F(a, b) = (a, 0)$, in je $(F|H)^{-1}$ zvezno odvedljiva preslikava. Ker je $F(x, y)$ oblike $(x, f(x, y))$ (prva komponenta x se ohranja), je inverzna preslikava $E := (F|H)^{-1}$ oblike

$$E(x, y) = (x, \phi(x, y)), \quad ((x, y) \in N))$$

za neko zvezno odvedljivo preslikavo $\phi : N \to \mathbb{R}^m$. Naj bo $D := \{x \in \mathbb{R}^n : (x, 0) \in N\}$; to je odprta množica v $\mathbb{R}^n$ in $a \in D$ (ker je $(a, 0) = F(a, b) \in N$). Definirajmo preslikavo $g : D \to \mathbb{R}^m$ s predpisom

$$g(x) := \phi(x, 0).$$

Za vsak $x \in D$ velja

$$(x, f(x, g(x))) = F(x, g(x)) = F(x, \phi(x, 0)) = F(E(x, 0)) = (x, 0),$$

torej mora biti $f(x, g(x)) = 0$. Nadalje je $(a, g(a)) = (a, \phi(a, 0)) = E((a, 0)) = (a, b)$, zato $g(a) = b$. S tem smo dokazali obstoj rešitve g. Formula za njen odvod takoj sledi z odvajanjem enakosti $f(x, g(x)) = 0$. Tako namreč dobimo $(D_1 f)(x, g(x)) + (D_2 f)(x, g(x))g'(x) = 0$, od koder lahko izrazimo $g'(x)$, ker je operator $(D_2 f)(x, g(x))$ obrnljiv za $x \in D$ (saj je tedaj $(x, g(x)) \in H$ in operator $(DF)(x, y)$ obrnljiv za $(x, y) \in H$).

Dokazati moramo še enoličnost točke y_x za vsak $x \in D$. Predpostavimo, da sta (x, y_1) in (x, y_2) taki točki iz H, da je $f(x, y_1) = 0 = f(x, y_2)$. Potem je $F(x, y_1) = (x, f(x, y_1)) = (x, f(x, y_2)) = F(x, y_2)$, torej (ker je $F|H$ injektivna preslikava) $y_1 = y_2$.

$\square$

ZGLED 0.1.8. Oglejmo si preslikavo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Naj bo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ poljubna taka točka, da je $f(a, b) = 0$. Funkcija g, ki v tem primeru zadošča pogojema $f(x, g(x)) = 0$ in $g(a) = b$, je: $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, če je $b \geq 0$, in $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$, če je $b \leq 0$. V primeru $b \neq 0$ (torej ko je $a \neq \pm 1$), je $(D_2 f)(a, b) \neq 0$ in je taka funkcija g (lokalno) ena sama in je odvedljiva v okolici točke a. Če pa je $a = \pm 1$, sta funkciji dve: $\sqrt{1 - x^2}$ in $-\sqrt{1 - x^2}$. Ti dve funkciji pa nista odvedljivi v točkah $a = \pm 1$.

Naloge

1. V katerih točkah $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ odvod funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (\cos x - \cos y, \sin x - \sin y)$, ni obrnljiv? Katere točke pa so vsebovane v kaki taki odprti množici G, da ima $f|G$ zvezno odvedljiv inverz?

2. V katerih točkah $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ je odvod funkcije $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (xyz, xy + xz + yz, x + y + z)$ obrnljiv? V taki točki izračunaj odvod inverzne funkcije, ki obstaja v okolici take točke po izreku o inverzni funkciji.

3. Poišči kako realno rešitev sistema enačb $x_1 = -e^{x_3} \cos x_4$, $x_4 = e^{x_2} \sin x_1$. Dokaži, da v okolici vsake rešitve (a, b, c, d) tega sistema obstaja taka odvedljiva funkcija g, da je $(x_3, x_4) = g(x_1, x_2)$ in $g(a, b) = (c, d)$. Izrazi tudi odvod funkcije g.

4.* Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

realna $n \times n$ matrika, ki ima enke tik nad glavno diagonalo in na mestu $(n, 1)$, povsod drugod pa ničle. Pokaži, da obstaja taka odprta množica $G \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, ki vsebuje identično matriko I, in taka zvezno odvedljiva funkcija $f : G \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, da je $f(I) = A$ in $f(X)^n = X$ za vsak $X \in G$.

5. Izračunaj odvod preslikave $X \mapsto e^X$ na prostoru $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ v točki 0. Pokaži, da ta preslikava preslika kako odprto okolico točke 0 na odprto okolico točke I. Kaj je zaloga vrednosti te preslikave?

6. Določi odvod produkta $\pi : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\pi(X,Y) = XY$ v splošni točki $(X,Y) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. V katerih točkah je operator $(D_2\pi)(X,Y)$ obrnljiv?

7.* Funkcije $f_j : G \to \mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, m)$, kjer je G odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$, imenujemo *funkcijsko odvisne*, če obstaja kaka taka funkcija $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, da je $\phi(f_1(x), \ldots, f_m(x)) = 0$ za vsak $x \in G$ in da ϕ ni identično enaka 0 na nobeni odprti podmnožici v $\mathbb{R}^m$. Pokaži, da sta funkciji $f_1(x,y) = \cos(x-y)$ in $f_2(x,y) = \sin(x-y)$ funkcijsko odvisni na $\mathbb{R}^2$.

8.* Dokaži: če je preslikava $f := (f_1, \ldots, f_n) : G \to \mathbb{R}^m$ zvezno odvedljiva in $\det f'$ ni identično enaka 0 na $G \subseteq \mathbb{R}^n$, potem so funkcije $f_1, \ldots, f_m$ funkcijsko neodvisne. (Glej prejšnjo nalogo za definicijo funkcijske odvisnosti.)

9.* Dokaži, da so funkcije $f_j : G \to \mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, m)$ funkcijsko odvisne natanko tedaj, ko ima množica $f(G)$ prazno notranjost, kjer je $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

10.* Pokaži, da so funkcije $f_1(x,y,z) = x\cos y$, $f_2(x,y,z) = x\sin y$, $f_3(x,y,z) = z$ funkcijsko neodvisne na $\mathbb{R}^3$. Isto pokaži tudi za funkcije $g_1(x,y,z) = x\cos y\cos z$, $g_2(x,y,z) = x\cos y\sin z$, $g_3(x,y,z) = x\sin y$.