METRIČNI PROSTOR

BOJAN MAGAJNA

Kazalo

1. Metrika, krogle, odprte in zaprte množice

Množico vseh nenegativnih realnih števil bomo označili z $[0, \infty)$.

1.1. Metrika.

Definicija 1.1. *Metrični prostor* je neprazna množica M, opremljena s preslikavo

$$d : M \times M \to [0, \infty),$$

ki ima naslednje lastnosti za vse $x, y, z \in M$:

(i) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*trikotniška neenakost*);

(ii) $d(y, x) = d(x, y)$;

(iii) $d(x, y) = 0$ natanko tedaj, ko je $x = y$.

Preslikavi d pravimo *razdalja* ali *metrika*, elemente množice M pa imenujemo tudi *točke*. Pogosto bomo rekli, da je metrični prostor kar par (M, d), namesto daljšega načina izražanja 'metrični prostor M, opremljen z razdaljo d'.

Zgled 1.2. V vsakem normiranem prostoru $\mathcal{U}$ lahko definiramo razdaljo kot

$$d(x, y) =: \|y - x\|.$$

Prepričajte se, da ima funkcija d res vse tri lastnosti iz prejšnje definicije.

Očitno je vsaka podmnožica S metričnega prostora M tudi metrični prostor za zožitev metrike na $S \times S$. Vse podmnožice v normiranih prostorih (npr. v $\mathbb{R}^n$) so torej metrični prostori. Obstajajo pa še številni drugi zgledi metričnih prostorov.

Zgled 1.3. Naj bo M poljubna neprazna množica. Definirajmo

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{če je } x \neq y, \\ 0, & \text{če je } x = y. \end{cases}$$

Očitno je d metrika. Take metrične prostore imenujemo *diskretni metrični prostori.*

Definicija 1.4. Naj bo M metrični prostor z metriko d. Za vsak $a \in M$ in vsak $r \in [0, \infty)$ imenujemo množico

$$B(a,r) = \{x \in M : d(x,a) < r\}$$

odprta krogla s središčem a in polmerom r. Množico

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in M : d(x,a) \leq r\}$$

pa imenujemo *zaprta krogla* s središčem a in polmerom r.

Očitno je $B(a,r) \subseteq \overline{B}(a,r) \subseteq B(a,s)$ za vsak $s > r$.

1.2. **Odprte in zaprte množice.**

Definicija 1.5. Podmnožica G metričnega prostora M je *odprta*, če za vsak $a \in G$ obstaja kako tako realno število $r > 0$, da je $B(a,r) \subseteq G$. Podmnožica F je *zaprta* v M, če je njen komplement F^c odprta množica.

Intuitivno gledano, so v običajni ravnini (ali pa v $\mathbb{R}^3$) odprte tiste podmnožice, ki ne vsebujejo svojega 'roba', zaprte pa tiste, ki rob vsebujejo. (Pojem 'roba' bomo natančno definirali kasneje.)

Prostor M je očitno odprta množica. Prav tako štejemo za odprto prazno množico, saj je tedaj pogoj, da se okrog vsake točke iz $\emptyset$ da opisati odprta krogla, vsebovana v $\emptyset$, izpolnjen 'na prazno', ker $\emptyset$ ne vsebuje nobene točke. Ker je torej prazna množica odprta, je njen komplement M zaprt. Torej je M (in tudi $\emptyset$) hkrati odprta in zaprta množica. V splošnem pa obstajajo tudi podmnožice v M, ki niso niti odprte niti zaprte. V $\mathbb{R}^2$ je na primer kvadrat, h kateremu štejemo le eno od stranic (preostale tri pa h komplementu), množica, ki ni niti odprta niti zaprta.

Trditev 1.6. *Odprta krogla je odprta množica, zaprta krogla pa zaprta množica v vsakem metričnem prostoru M.*

Dokaz. Dokazali bomo le trditev o odprtih kroglah, podoben dokaz trditve o zaprtih kroglah pa pustili za samostojno vajo. Naj bo torej $B(a,r)$ poljubna odprta krogla v metričnem prostoru M. Če je $r = 0$, je $B(a,r) = \emptyset$, kar je odprta množica. Vzemimo sedaj, da je $r > 0$ in naj bo $b \in B(a,r)$. Pokazati moramo, da obstaja tak $s > 0$, da je $B(b,s) \subseteq B(a,r)$. Ker je $b \in B(a,r)$, je $d(b,a) < r$. Naj bo s poljubno pozitivno število, manjše od $r - d(b,a)$. Za vsak $x \in B(b,s)$ je $d(x,b) < s$, zato po trikotniški neenakosti sledi

$$d(x,a) \leq d(x,b) + d(b,a) < s + d(b,a) < r.$$

To pove, da je $x \in B(a,r)$ in zato $B(b,s) \subseteq B(a,r)$. □

Trditev 1.7. *(i) Unija poljubne družine odprtih podmnožic metričnega prostora je odprta podmnožica.*

(ii) Presek končno mnogo odprtih podmnožic metričnega prostora je odprta podmnožica.

Dokaz. (i) Naj bo $\{G_i : i \in \mathbb{I}\}$ poljubna družina odprtih podmnožic v metričnem prostoru M in naj bo G unija te družine. Vsak $a \in G$ je element vsaj ene od množic G_i. Ker je G_i odprta, obstaja tak $r > 0$, da je $B(a, r) \subseteq G_i$. Ker je $G_i \subseteq G$, je krogla $B(a, r)$ vsebovana tudi v G, zato je G odprta.

(ii) Dokazati zadošča, da je presek $G_1 \cap G_2$ dveh odprtih podmnožic odprta podmnožica, saj sledi potem trditev za presek končno mnogo odprtih množic z indukcijo. Naj bo $a \in G_1 \cap G_2$. Ker sta G_1 in G_2 odprti, obstajata taki pozitivni realni števili r_1, r_2, da je $B(a, r_1) \subseteq G_1$ in $B(a, r_2) \subseteq G_2$. Naj bo $r = \min\{r_1, r_2\}$. Potem je $B(a, r) \subseteq G_1 \cap G_2$. □

Po de Morganovih zakonih je komplement unije množic enak preseku komplementov teh množic, komplement preseka pa je enak uniji komplementov. Zato ima prejšnja trditev naslednjo posledico:

Posledica 1.8. *(i) Presek poljubne družine zaprtih podmnožic metričnega prostora je zaprta podmnožica.*

(ii) Unija končno mnogo zaprtih podmnožic je zaprta podmnožica.

Zgled 1.9. Presek neskončne družine odprtih množic ponavadi ni odprta množica. Za vsak $n = 1, 2, \dots$ naj bo $G_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ odprta krogla v $\mathbb{R}$ s središčem 0 in polmerom $\frac{1}{n}$. Očitno je

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\},$$

kar pa ni odprta množica v $\mathbb{R}$ (za običajno metriko).

Posledica 1.10. *Podmnožica v metričnem prostoru je odprta natanko tedaj, ko se da izraziti kot unija odprtih krogel.*

Dokaz. Ker so odprte krogle odprte množice, je unija vsake družine odprtih krogel odprta množica po prejšnji trditvi. Obratno, če je G odprta množica, za vsak $a \in G$ obstaja tak $r_a > 0$, da je $B(a, r_a) \subseteq G$. Unija vseh teh krogel, ko a teče po G, je vsebovana v G. Ker pa je vsak $a \in G$ element vsaj ene teh krogel (namreč $B(a, r_a)$), unija tudi vsebuje G. □

1.3. **Rob, notranjost in zaprtje.**

Definicija 1.11. Naj bo S podmnožica metričnega prostora M.

(i) Točka $a \in S$ je *notranja točka* množice S, če je $B(a, r) \subseteq S$ za kak $r > 0$. Množico $\overset{\circ}{S}$ vseh notranjih točk množice S imenujemo *notranjost* množice S.

(ii) Točka $a \in M$ je *robna točka* za S, če vsaka odprta krogla $B(a, r)$ seka takò množico S kot njen komplement: $B(a, r) \cap S \neq \emptyset$ in $B(a, r) \cap S^c \neq \emptyset$ za vsak $r > 0$. Množico ∂S vseh robnih točk imenujemo *rob* množice S.

(iii) Točka $a \in M$ je *zunanja* za S, če je $B(a, r) \subseteq S^c$ za kak $r > 0$.

(iv) *Zaprtje* $\overline{S}$ množice S je $S \cup \partial S$.

Takoj iz definicij sledi, da je množica odprta natanko tedaj, ko so vse njene točke notranje. Notranjost vsake množice je odprta množica. Prav tako je očitno, da je točka $a \in M$ v zaprtju podmnožice S natanko tedaj, ko je $B(a, r) \cap S \neq \emptyset$ za vsak $r > 0$. Vsaka točka iz M je bodisi notranja bodisi robna bodisi zunanja za podmnožico S. Nadalje je

$$\overline{S} = \overset{\circ}{S} \cup \partial S. \tag{1.1}$$

Trditev 1.12. *Zaprtje podmnožice S v metričnem prostoru M je enako preseku vseh zaprtih podmnožic v M, ki vsebujejo S. Torej je podmnožica S zaprta natanko tedaj, ko je $\overline{S} = S$.*

Dokaz. Naj bo $a \in \overline{S}$ in F poljubna zaprta podmnožica v M, ki vsebuje S. Pokazali bomo, da je $a \in F$. Če $a \notin F$, potem je $a \in F^c$. Ker je F^c odprta množica, obstaja tak $r > 0$, da je $B(a, r) \subseteq F^c$. Krogla $B(a, r)$ tedaj ne more sekati množice S (ker je $S \subseteq F$), kar pa je v protislovju s privzetkom, da je $a \in \overline{S}$. S tem smo dokazali, da je $\overline{S} \subseteq F$ za vsako zaprto množico $F \supseteq S$, torej je $\overline{S}$ vsebovana tudi v preseku P vseh zaprtih podmnožic, ki vsebujejo S.

Sedaj zadošča pokazati le še, da je $\overline{S}$ zaprta množica, saj je potem $P \subseteq \overline{S}$ (ker je $\overline{S}$ ena od množic pri tvorbi preseka). V komplementu $(\overline{S})^c$ množice $\overline{S}$ so natanko tiste točke $a \in M$, za katere obstaja tak $r > 0$, da je $B(a, r) \cap S = \emptyset$, torej $B(a, r) \subseteq S^c$. To pomeni, da je

$$(\overline{S})^c = \overset{\circ}{S^c}\ . \tag{1.2}$$

Ker je notranjost vsake množice odprta množica, je $\overline{S}$ res zaprta. □

Definicija 1.13. Podmnožico S v metričnem prostoru M imenujemo *povsod gosta podmnožica*, če je $\overline{S} = M$.

Na primer množica racionalnih števil je povsod gosta v $\mathbb{R}$. Dokaz puščamo za vajo.

Definicija 1.14. *Okolica* točke a v metričnem prostoru M je podmnožica $G \subseteq M$, ki vsebuje kako odprto kroglo $B(a, r)$ s pozitivnim polmerom r.

Naloge

1. Pokaži, da je v diskretnem metričnem prostoru iz zgleda 1.3 vsaka podmnožica odprta in zaprta.

2. Naj bosta M_1 in M_2 metrična prostora z metrikama d_1 in d_2. Dokaži, da je s predpisom
$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$
definirana razdalja na $M_1 \times M_2$.

3. Če je d metrika na množici M, je tudi s predpisom
$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$
določena metrika na M.

4.* Za vsak $n = 1, 2, \ldots$ naj bo M_j metrični prostor z metriko d_j. Dokaži, da predpis

$$d((x_1, x_2, \ldots), (y_1, y_2, \ldots)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$$

definira metriko na kartezičnem produktu $M_1 \times M_2 \times \ldots$

5. Pokaži, da vsaka neprazna odprta podmnožica v $\mathbb{R}$ (z običajno metriko $d(x, y) = |y - x|$) vsebuje kako racionalno število, zato je vsaka družina disjunktnih odprtih podmnožic v $\mathbb{R}$ števna.

6. Dokaži, da je notranjost množice S v metričnem prostoru enaka uniji vseh odprtih množic, ki so vsebovane v S.

7. Kaj je notranjost daljice v $\mathbb{R}^2$?

8. Ali je notranjost vsake množice v metričnem prostoru enaka notranjosti njenega zaprtja?

9. Dokaži, da je množica S zaprta natanko tedaj, ko je $\overline{S} = S$, in da je vedno $\overline{(\overline{S})} = \overline{S}$.

10. Dokaži, da je $\overline{\cup_{i \in \mathbb{I}} S_i} \supseteq \cup_{i \in \mathbb{I}} \overline{S_i}$ za poljubno družino podmnožic S_i metričnega prostora in da velja pri tem enakost, če je družina končna. Pokaži tudi z zgledom (v $\mathbb{R}$), da za neskončne družine enakost ne velja vedno.

11. Poišči kako tako podmnožico v $\mathbb{R}^2$, da bo njeno zaprtje različno od zaprtja njene notranjosti.

12. Dokaži, da je množica v metričnem prostoru povsod gosta natanko tedaj, ko ima njen komplement prazno notranjost.

13. Naj bo N podprostor metričnega prostora M. Dokaži, da je podmnožica $S \subseteq N$ odprta natanko tedaj, ko obstaja taka odprta podmnožica $G \subseteq M$, da je $S = G \cap N$. Dokaži tudi podobno trditev za zaprte podmnožice.

14. Dve metriki d in d' na množici M imenujemo *ekvivalentni*, če obstajata taki pozitivni konstanti a, b, da je $ad(x, y) \leq d'(x, y) \leq bd(x, y)$ za vse $x, y \in M$. Dokaži, da določata ekvivalentni metriki iste odprte množice v M.

15. Dokaži, da so končne podmnožice metričnega prostora zaprte.

16. Ali je v vsakem metričnem prostoru $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$ za vsako odprto kroglo $B(x, r)$? (Namig: opazuj diskretni prostor.)

17. Za vsako podmnožico S metričnega prostora (M, d) in točko $x \in M$ definirajmo *razdaljo* $d(x, S)$ *točke od podmnožice* s predpisom

$$d(x, S) = \inf\{d(x, y) : y \in S\}.$$

Dokaži, da je $\overline{S} = \{x \in M : d(x, S) = 0\}$.

18. Dokaži, da je odprta podmnožica G v metričnem prostoru disjunktna z dano podmnožico S natanko tedaj, ko je disjunktna z njenim zaprtjem $\overline{S}$.

19. Naj bo (M, d) metrični prostor. Dokaži naslednje:

(i) Za vsaki dve različni točki $x, y \in M$ obstajata taki pozitivni števili r_1 in r_2, da je $B(x, r_1) \cap B(y, r_2) = \emptyset$.

(ii)* Za vsako zaprto podmnožico $F \subseteq M$ in vsako točko $x \in M \setminus F$ obstajata taki disjunktni odprti množici G_1 in G_2, da je $F \subseteq G_1$ in $x \in G_2$.

(iii)* Za vsaki dve disjunktni zaprti podmnožici F_1 in F_2 obstajata taki disjunktni odprti podmnožici G_1 in G_2, da je $F_1 \subseteq G_1$ in $F_2 \subseteq G_2$. (Drugače rečeno, za vsako zaprto podmnožico F_1 odprte množice $G := F_2^c$ pokaži, da obstaja taka odprta množica G_1, da je $F_1 \subseteq G_1 \subseteq \overline{G_1} \subseteq G$; potem lahko postavimo $G_2 = (\overline{G_1})^c$.)

20. Določi rob, notranjost in zaprtje za množico vseh iracionalnih števil v $\mathbb{R}$.
21. Dokaži, da za poljubne točke $a_1, \ldots, a_n$ v metričnem prostoru (M, d) velja

$$d(a_1, a_n) \leq d(a_1, a_2) + d(a_2, a_3) + \ldots + d(a_{n-1}, a_n).$$

22. Ali je s predpisom $d(x, y) = |x^3 - y^3|$ definirana metrika na $\mathbb{R}$?

2. Polnost

Pojem konvergentnega zaporedja lahko definiramo v vsakem metričnem prostoru na podoben način kot v $\mathbb{R}$. Ponovimo nekaj definicij, ki smo jih v normiranem prostoru že spoznali.

Definicija 2.1. Zaporedje (a_n) v metričnem prostoru (M, d) je *konvergentno*, če obstaja taka točka $a \in M$, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je

$$d(a_n, a) < \varepsilon \quad \text{za vse } n \geq n_0.$$

Tedaj imenujemo točko a *limita zaporedja* (a_n) in zapišemo $a = \lim a_n$. Zaporedje, ki ni konvergentno, imenujemo *divergentno.*

Definicija 2.2. Zaporedje (a_n) v metričnem prostoru (M, d) je *Cauchyjevo*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je

$$d(a_n, a_m) < \varepsilon \quad \text{za vse } n, m \geq n_0.$$

Enak dokaz kot za zaporedja realnih števil pove, da je vsako konvergentno zaporedje v metričnem prostoru Cauchyjevo. Obratno pa seveda ni res: v prostoru racionalnih števil $\mathbb{Q}$, opremljenem z običajno metriko $d(x, y) = |y - x|$, je vsako zaporedje, ki konvergira v $\mathbb{R}$ proti $\sqrt{2}$, Cauchyjevo, vendar v $\mathbb{Q}$ ni konvergentno, ker $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Definicija 2.3. Metrični prostor (M, d) je *poln*, če je vsako Cauchyjevo zaporedje v njem konvergentno (z limito v M).

Trditev 2.4. *Neprazna podmnožica F polnega metričnega prostora (M, d) je poln metrični prostor (za razdaljo d) natanko tedaj, ko je zaprta.*

Dokaz. Naj bo (a_n) Cauchyjevo zaporedje v F. Ker je M poln prostor, ima to zaporedje limito, imenujmo jo a, v M. Po definiciji limite je v vsaki krogli $B(a, \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ kak člen (dejansko neskončno členov) zaporedja (a_n). Torej je $B(a, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$, zato je a v zaprtju množice F. Če je F zaprta, je potemtakem $a \in F$. S tem smo pokazali, da je limita vsakega Cauchyevega zaporedja iz F v F, torej je F poln prostor.

Predpostavimo sedaj še obratno, da je F poln prostor za razdaljo d. Pokazali bomo, da je vsak $a \in \overline{F}$ že v F, kar pomeni, da je $\overline{F} = F$, torej je množica F zaprta. Ker je $a \in \overline{F}$, je $B(a, r) \cap F \neq \emptyset$ za vsak $r > 0$. Za vsak $n = 1, 2, \ldots$ obstaja torej element $a_n \in B(a, 1/n) \cap F$. Zaporedje (a_n) je Cauchyjevo (ker je v M konvergentno proti a). Ker je F poln prostor, mora imeti limito v F. Ker ima zaporedje v M lahko kvečjemu eno limito, mora biti $a \in F$. $\square$

Dobro je znano, da je $\mathbb{R}$ poln metrični prostor. Na tej podlagi bomo sedaj dokazali isto za $\mathbb{R}^n$.

Izrek 2.5. *Za vsak $m = 1, 2, \ldots$ je $\mathbb{R}^m$ (z običajno evklidsko normo) poln prostor. Prav tako je poln tudi prostor $\mathbb{C}^m$.*

Dokaz. Naj bo (a_k) poljubno Cauchyjevo zaporedje v $\mathbb{R}^m$, torej za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $k_0 \in \mathbb{N}$, da je

$$\|a_k - a_n\| < \varepsilon \quad \text{za vse } k, n \geq k_0. \tag{2.1}$$

Označimo z $a_{k,j}$ komponente vektorja a_k ($j = 1, \ldots, m$). Ker za vsak vektor $x = (x_1, \ldots, x_m)$ velja

$$|x_j| \leq \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_m|^2} = \|x\|, \quad j = 1, \ldots, m,$$

sledi iz (2.1), da je

$$|a_{k,j} - a_{n,j}| < \varepsilon \quad \text{za vse } k, n \geq k_0, \; j = 1, \ldots, m.$$

To pomeni, da je za vsak j zaporedje realnih števil $a_{k,j}$ Cauchyjevo, torej ima limito, imenujmo jo b_j. Naj bo $b = (b_1, \ldots, b_m)$. Pokazali bomo, da zaporedje (a_k) konvergira proti b. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je $b_j = \lim_{k\to\infty} a_{k,j}$, obstaja tak $k_j \in \mathbb{N}$, da je

$$|a_{k,j} - b_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \quad \text{za vse } k \geq k_j.$$

Za vse

$$k \geq k_0 := \max\{k_1, \ldots, k_m\}$$

potem velja

$$\|a_k - b\| = \sqrt{|a_{k,1} - b_1|^2 + \ldots + |a_{k,m} - b_m|^2} \leq \sqrt{m(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}})^2} = \varepsilon.$$

Polnost prostora $\mathbb{C}^m$ sledi iz polnosti prostora $\mathbb{R}^{2m}$, ker obstaja med njima (realno linearna) bijektivna preslikava, ki ohranja normo, namreč preslikava

$$L : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}^{2m}, \quad L(x_1 + iy_1, \ldots, x_m + iy_m) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_m, y_m).$$

$\square$

*Naslednje definicije in izreka pri predavanjih za IŠRM ne bi obravnavali.

Definicija 2.6. *Diameter* ali *premer* podmnožice S metričnega prostora (M, d) je

$$d(S) := \sup\{d(x, y) : x, y \in S\}.$$

Izrek 2.7. *(Cantorjev izrek o preseku) Naj bo (M, d) poln metrični prostor, $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \ldots$ pa padajoče zaporedje nepraznih zaprtih podmnožic v M, katerih diametri $d(F_n)$ konvergirajo proti 0. Potem presek $F := \cap_{n=1}^{\infty} F_n$ vsebuje natanko eno točko.*

Dokaz. Ker je $d(F) \leq d(F_n)$ za vsak n in $\lim_{n\to\infty} d(F_n) = 0$, je $d(F) = 0$, zato F vsebuje kvečjemu eno točko. Dokazati je treba le, da F ni prazna množica. Za vsak n izberimo točko $a_n \in F_n$. Ker je zaporedje množic padajoče, so za vsak n vse točke $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ vsebovane v F_n. Ker diametri $d(F_n)$ konvergirajo proti 0, sledi, da je zaporedje (a_n) Caucyevo. Ker je M poln prostor, obstaja $a := \lim a_n$. Potem je a tudi limita podzaporedja $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$, ki je vsebovano v F_n. Po trditvi 2.4 mora zato biti $a \in F_n$, in sicer za vsak n, torej $a \in F$. $\square$

Naloge

1. Bodita (a_n) in (b_n) konvergentni zaporedji v metričnem prostoru (M, d) z limitama a in b (zaporedoma). Dokaži, da zaporedje števil $d(a_n, b_n)$ konvergira proti $d(a, b)$.

2. Dokaži, da je množica S v metričnem prostoru zaprta natanko tedaj, ko vsebuje limito vsakega konvergentnega zaporedja, katerega vsi členi so v S.

3. Naj bo $\mathcal{U}$ vektorski prostor vseh zveznih funkcij iz kakega zaprtega intervala $[a, b]$ v $\mathbb{R}$. Opremimo $\mathcal{U}$ z normo

$$\|f\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

Pokaži, da je to res norma na prostoru $\mathcal{U}$ in da je $\mathcal{U}$ poln prostor.

4. Če sta (M_k, d_k) $(k = 1, 2)$ polna metrična prostora, je poln tudi njun produkt $M_1 \times M_2$ za metriko $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}$.

5.* Naj bo S končna množica, opremljena z diskretno metriko d_0 (zgled 1.3) in $M = S \times S \times \ldots$ kartezični produkt števno mnogo primerkov množice S, opremljen z metriko

$$d(a, b) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_0(a_n, b_n)}{1 + d_0(a_n, b_n)}, \text{ kjer je } a = (a_1, a_2, \ldots),\ b = (b_1, b_2, \ldots).$$

Ali so v metričnem prostoru (M, d) vse podmnožice odprte? Ali je M poln metrični prostor?

6. Definirajmo padajoče zaporedje zaprtih podmnožic F_n intervala $[0, 1]$ takole: $F_1 := [0, 1]$. F_2 naj bo množica, ki jo dobimo, ko iz F_1 izrežemo interval $(1/3, 2/3)$; torej je F_2 unija dveh zaprtih intervalov $[0, 1/3]$ in $[2/3, 1]$. F_3 naj bo podmnožica v F_2, ki jo dobimo, ko iz vsakega od intervalov $[0, 1/3]$ in $[2/3, 1]$ izrežemo srednjo tretjino (odprt interval širine $1/9$). F_3 je torej unija štirih disjunktnih zaprtih intervalov širine $1/9$. F_4 dobimo iz F_3 tako, da iz vsakega od teh intervalov izrežemo srednjo tretjino (odprt interval). Če tako nadaljujemo, dobimo padajoče zaporedje zaprtih množic F_n. Presek

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

imenujemo *Cantorjeva množica*.

Pokaži, da je F neprazna zaprta podmnožica intervala $[0, 1]$, ki ne vsebuje nobenega (nepraznega) odprtega intervala **in ima toliko elementov, kot je vseh realnih števil. (Namig: za dokaz zadnjega dejstva si lahko pomagate s trojiškim zapisom realnih števil.)

3. Kompaktnost

Definicija 3.1. Točka $s \in M$ je *stekališče zaporedja* (a_n) v metričnem prostoru (M, d), če je za vsak $r > 0$ v krogli $B(s, r)$ neskončno mnogo členov zaporedja. Pri tem štejemo vsak člen tolikokrat, kolikorkrat nastopa v zaporedju.

Kot pri zaporedjih realnih števil je tudi v metričnem prostoru limita zaporedja že stekališče, obratno pa seveda ni res.

Definicija 3.2. Metrični prostor M je *kompakten*, če ima vsako zaporedje iz M stekališče v M. Podmnožica metričnega prostora M je *kompaktna*, če je kompaktna kot metrični prostor za metriko, ki jo podeduje iz M.

Če je F zaprta podmnožica v kompaktnem metričnem prostoru M in (a_n) poljubno zaporedje v F, potem ima po gornji definiciji kompaktnosti to zaporedje vsaj eno stekališče $s \in M$. Ni težko pokazati (2. naloga), da potem obstaja podzaporedje zaporedja (a_n), ki konvergira proti s, in da je zato (in ker je F zaprta) $s \in F$. Torej ima vsako zaporedje v F stekališče v F. S tem smo dokazali naslednjo trditev:

Trditev 3.3. *Zaprta podmnožica kompaktnega metričnega prostora je kompaktna.*

Iz osnov analize vemo, da je zaprt interval na realni osi kompakten. To ugotovitev bomo kasneje posplošili na nekatere podmnožice v $\mathbb{R}^n$. Najprej pa si bomo ogledali nekaj lastnosti kompaktnih množic.

Lema 3.4. *Vsak kompakten metrični prostor je poln.*

Dokaz. Naj bo (M, d) kompakten metrični prostor in (a_n) Cauchyjevo zaporedje v njem. Ker je M kompakten, obstaja stekališče $a \in M$ zaporedja (a_n). Ker je zaporedje Cauchyjevo, je stekališče dejansko limita. Naj bo namreč $\varepsilon > 0$ in $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, da je

$$d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{za } m, n \geq n_0.$$

Ker je a stekališče, je v krogli $B(a, \frac{\varepsilon}{2})$ neskončno mnogo členov, torej tudi kak člen a_m z indeksom $m > n_0$. Tedaj je hkrati $d(a_m, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ in $d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ za vse $n \geq n_0$, torej

$$d(a_n, a) \leq d(a_n, a_m) + d(a_m, a) < \varepsilon \quad \text{za vse } n \geq n_0.$$

Pokazali smo, da je vsako Cauchyjevo zaporedje v M konvergentno, kar pomeni, da je M poln. $\square$

Definicija 3.5. Podmnožica S metričnega prostora (M, d) je *omejena*, če je vsebovana v kaki krogli, torej če obstaja kako tako realno število $r > 0$, da je $S \subseteq B(a, r)$ za kako točko $a \in M$.

Izrek 3.6. *(Heine-Borel) Podmnožica v $\mathbb{R}^n$ je kompaktna natanko tedaj, ko je zaprta in omejena.*

Dokaz. Kompaktna mnoˇica M je zaprta in omejena v vsakem metričnem prostoru. Kompakten metrični prostor M je namreč poln po lemi 3.4, zato zaprt kot podmnožica v vsakem metričnem prostoru (kako to pokažemo?). Da bi dokazali njegovo omejenost, vzemimo poljubno toko $a \in M$ in privzemimo nasprotno, da M ne bi bil vsebovan v nobeni krogli $B(a,m)$, $m = 1,2,\ldots$. Potem za vsak m obstaja točka $a_m \in M \setminus B(a,m)$. Trdimo, da zaporedje (a_m) ne more imeti nobenega stekališča v M, kar bo v protislovju s kompaktnostjo prostora M. Recimo, da bi bila točka $b \in M$ stekališče zaporedja (a_m). Potem je v krogli $B(b,1)$ neskončno mnogo členov a_m, torej je

$$d(a,a_m) \leq d(a,b) + d(b,a_m) < d(a,b) + 1$$

za neskončno mnogo indeksov m. Toda to je nemogoče, saj je $d(a,a_m) \geq m$ za vsak m po izbiri zaporedja (a_m).

Naj bo sedaj M poljubna zaprta in omejena podmnožica v $\mathbb{R}^n$. Pokazati moramo, da ima vsako zaporedje (a_m) v M vsaj eno stekališče v $\mathbb{R}^n$; ker je M zaprta, je to stekališče gotovo v M (utemeljite!). Zaradi nazornosti si lahko mislimo, da je $n = 2$, torej M podmnožica ravnine; dokaz za splošen n je v bistvu enak. Ker je M omejena, je vsebovana v dovolj velikem kvadru $K = [c_1,d_1] \times \cdots \times [c_n,d_n]$ (ko je $n = 2$, je ta kvader kar pravokotnik $[c_1,d_1] \times [c_2,d_2]$). Zaporedje vseh prvih komponent $a_{m,1}$ vektorjev a_m je torej vsebovano v intervalu $[c_1,d_1]$, zato ima vsaj eno stekališče, imenujmo ga b_1. Po eni od nalog to pomeni, da kako njegovo podzaporedje $(a_{m_1,1})$ konvergira proti b_1. Zaporedje vektorjev (a_{m_1}) je podzaporedje zaporedja (a_m), zato vsebovano v kvadru K, torej je zaporedje drugih komponent $a_{m_1,2}$ teh vektorjev vsebovano v intervalu $[c_2,d_2]$, zato ima vsaj eno stekališče, imenujmo ga b_2. To pomeni, da kako njegovo podzaporedje $(a_{m_2,2})$ konvergira proti b_2. Zaporedje ustreznih vektorjev a_{m_2} je podzaporedje zaporedja a_{m_1} in s tem tudi podzaporedje zaporedja (a_m), zato vsebovano v K. Zaporedje tretjih komponent $a_{m_2,3}$ vektorjev a_{m_2} je torej vsebovano v intervalu $[c_3,d_3]$. Ko ta postopek nadaljujemo, dobimo po n korakih tako podzaporedje (a_{m_n}) prvotnega zaporedja (a_m), da za vsak $j = 1,\ldots,n$ zaporedje j-tih komponent $a_{m_n,j}$ konvergira proti kakemu $b_j \in \mathbb{R}$. Toda potem zaporedje (a_{m_n}) konvergira proti vektorju $b := (b_1,b_2,\ldots,b_n)$, saj velja

$$\lim_{m_n\to\infty} \|a_{m_n} - b\| = \lim_{m_n\to\infty} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (a_{m_n,j} - b_j)^2} = 0.$$

Ker je (a_{m_n}) podzaporedje prvotnega zaporedja (a_m), to pomeni, da je b stekališče zaporedja (a_m). □

Naloge

1. Prepričajte se, da je zaprta podmnožica kompaktne množice kompaktna.
2. Dokaži, da je s stekališče zaporedja (a_n) v metričnem prostoru natanko tedaj, ko obstaja kako podzaporedje (a_{n_k}), ki konvergira proti s. (Namig: če je s stekališče, obstaja v vsaki krogli $B(s,\frac{1}{k})$ $(k = 1,2,\ldots)$ vsaj en člen zaporedja.)
3. Dokaži, da je zaprtje omejene množice omejeno.
4. Naj bo c_0 množica vseh zaporedij $x = (x_1,x_2,\ldots)$ realnih števil, ki konvergirajo proti 0.

(i) Pokaži, da je c_0 vektorski prostor in da je

$$\|x\| := \max_n |x_n|$$

norma, za katero je c_0 Banachov prostor.

(ii) Za vsak n naj bo $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, kjer je 1 na n-tem mestu, povsod drugod pa so ničle. Dokaži, da je množica $S = \{e_1, e_2, \ldots\}$ zaprta in omejena, a ni totalno omejena. Ali je S kompaktna?

5.* Dokaži, da je metrični prostor, definiran v 5. nalogi prejšnjega razdelka, kompakten.

9.* Naj bo K kompaktna množica v metričnem prostoru (M, d). Pokaži, da obstajata taki točki $a, b \in K$, da je razdalja med njima enaka diametru množice K.

10.* Za podmnožici K in F metričnega prostora definirajmo njuno razdaljo kot

$$d(K, F) = \inf\{d(x, y) : \; x \in K, \; y \in F\}.$$

Dokaži:

(i) Če sta K in F kompaktni, obstajata taka $a \in K$ in $b \in F$, da je $d(a, b) = d(K, F)$. Ali to vedno velja tudi, ko je le ena od množic kompaktna, druga pa zaprta?

(ii) Če sta K in F disjunktni, K kompaktna in F zaprta, je $d(K, F) > 0$.

11. Poišči kaki disjunktni zaprti podmnožici v ravnini $\mathbb{R}^2$, med katerima je razdalja 0.

12. Dokaži, da je unija končno mnogo kompaktnih podmnožic (metričnega prostora) kompaktna. Sklepaj, da je vsaka končna množica kompaktna.

4. Zvezne preslikave

4.1. **Zveznost.** Pojem zveznosti je zlahka mogoče posplošiti iz realnih funkcij na preslikave med metričnimi prostori.

Definicija 4.1. Bodita (M_1, d_1) in (M_2, d_2) metrična prostora. Preslikava $f : M_1 \to M_2$ je *zvezna v točki* $a \in M_1$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vse $x \in M_1$ iz $d_1(x, a) < \delta$ sledi $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Z drugimi besedami, f je zvezna v točki a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \varepsilon).$$

Preslikava f je *zvezna*, če je zvezna v vsaki točki $a \in M_1$.

Trditev 4.2. *Preslikava $f : M_1 \to M_2$ je zvezna v točki $a \in M_1$ natanko tedaj, ko za vsako zaporedje (a_n) v M_1, ki konvergira proti a, konvergira zaporedje $(f(a_n))$ proti $f(a)$.*

Dokaz. Naj bo f zvezna v točki a in (a_n) zaporedje v M_1, ki konvergira proti a. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben, $\delta > 0$ pa tak, da je $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$, če je $d_1(x, a) < \delta$. Ker zaporedje (a_n) konvergira proti a, obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $d_1(a_n, a) < \delta$ za vse $n \geq n_0$. Tedaj je $d_2(f(a_n), f(a)) < \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$, kar pomeni, da zaporedje $(f(a_n))$ konvergira proti $f(a)$.

Privzemimo sedaj, da f ni zvezna v točki a. Potem obstaja tak $\varepsilon > 0$, da za vsak $\delta > 0$ obstaja kak tak $x \in M_1$, da je $d_1(x, a) < \delta$ in $d_2(f(x), f(a)) \geq \varepsilon$. Za

$\delta := 1$ torej obstaja tak $x_1 \in M_1$, da je $d_1(x_1, a) < 1$ in $d_2(f(x_1), f(a)) \geq \varepsilon$. Za $\delta := \frac{1}{2}$ obstaja tak $x_2 \in M_1$, da je $d_1(x_2, a) < \frac{1}{2}$ in $d_2(f(x_2), f(a)) \geq \varepsilon$. Ko tako nadaljujemo, dobimo tako zaporedje točk $x_n \in M_1$, da je

$$d_1(x_n, a) < \frac{1}{n} \tag{4.1}$$

in

$$d_2(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon. \tag{4.2}$$

Iz (4.1) sledi, da zaporedje (x_n) konvergira proti a, iz (4.2) pa, da zaporedje $(f(x_n))$ ne konvergira proti $f(a)$. □

Trditev 4.3. *Preslikava $f : M_1 \to M_2$ je zvezna natanko tedaj, ko je $f^{-1}(G)$ odprta množica v M_1 za vsako odprto množico $G \subseteq M_2$.*

Dokaz. Naj bo f zvezna in G odprta podmnožica v M_2. Če je množica $f^{-1}(G)$ prazna, je odprta. Vzemimo torej, da $f^{-1}(G) \neq \emptyset$. Naj bo $a \in f^{-1}(G)$, torej $f(a) \in G$. Ker je G odprta, obstaja tak $\varepsilon > 0$, da je $B(f(a), \varepsilon) \subseteq G$. Ker je f zvezna, obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$. Tedaj je

$$B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(G).$$

To pomeni, da je $f^{-1}(G)$ odprta množica, saj za vsako svojo točko a vsebuje kako odprto kroglo $B(a, \delta)$.

Predpostavimo sedaj, da je $f^{-1}(G)$ odprta množica v M_1 za vsako odprto množico G v M_2, in pokažimo, da je tedaj f zvezna v vsaki točki $a \in M_1$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Po predpostavki je $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ odprta množica, torej obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)).$$

To pomeni, da je $f(B(a, \delta) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$ in f je zvezna v točki a. □

Upoštevajmo, da je $f^{-1}(G^c) = (f^{-1}(G))^c$ za vsako podmnožico $G \subseteq M_2$ in vsako preslikavo $f : M_1 \to M_2$. Ker so komplementi odprtih množic ravno zaprte množice, sledi iz prejšnjega izreka naslednja posledica:

Posledica 4.4. *Preslikava $f : M_1 \to M_2$ je zvezna natanko tedaj, ko je $f^{-1}(F)$ zaprta množica v M_1 za vsako zaprto množico $F \subseteq M_2$.*

Naj omenimo, da slika odprte množice pri zvezni preslikavi ni nujno odprta. Na primer konstantna preslikava $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = 0$, preslika vsako neprazno odprto množico v množico $\{0\}$ z enim elementom, ki ni odprta.

Trditev 4.5. *Če je $f : M_1 \to M_2$ zvezna preslikava, je $f(K)$ kompaktna podmnožica v M_2 za vsako kompaktno podmnožico $K \subseteq M_1$.*

Dokaz. Naj bo (b_n) poljubno zaporedje v $f(K)$. Za vsak b_n izberimo tak $a_n \in K$, da je $f(a_n) = b_n$. Ker je K kompaktna, ima zaporedje (a_n) stekališče $a \in K$. Od tod sledi, da kako podzaporedje (a_{n_k}) zaporedja (a_n) konvergira proti a. Ker je f zvezna, zaporedje $(f(a_{n_k}))$ konvergira proti $f(a)$ po trditvi 4.2, torej je $f(a)$ stekališče zaporedja $(f(a_n))$. S tem smo pokazali, da ima vsako zaporedje v $f(K)$ stekališče, kar pomeni, da je $f(K)$ kompaktna množica. □

Definicija 4.6. Preslikava $f : M_1 \to M_2$ je *omejena*, če je $f(M_1)$ omejena podmnožica v M_2.

Ker je vsaka kompaktna množica omejena (glejte prvi del dokaza Heine-Borelovega izreka) **??**, ima trditev 4.5 naslednjo posledico.

Posledica 4.7. *Naj bo $f : M_1 \to M_2$ zvezna preslikava med metričnima prostoroma. Slika $f(K)$ vsake kompaktne množice $K \subseteq M_1$ je omejena v M_2.*

Naslednjo trditev je mogoče dokazati z uporabo definicije zveznosti, takoj sledi pa tudi iz trditve 4.2.

Trditev 4.8. *Kompozitum zveznih preslikav je zvezna preslikava.*

Inverz bijektivne zvezne preslikave med metričnima prostoroma pa ni vedno zvezen.

Zgled 4.9. Naj bo d običajna, d_0 pa diskretna metrika na $\mathbb{R}$ (zgled 1.3). Ker je vsaka podmnožica odprta v diskretni metriki, je identična preslikava zvezna iz $(\mathbb{R}, d_0)$ v $(\mathbb{R}, d)$. V obratno smer pa identična preslikava ni zvezna, saj ni praslika vsake odprte množice G v $(\mathbb{R}, d_0)$ (na primer množice z enim elementom) odprta v $(\mathbb{R}, d)$.

Definicija 4.10. Bijektivno zvezno preslikavo, katere inverz je zvezen, imenujemo *homeomorfizem*. Metrična prostora M_1 in M_2 imenujemo *homeomorfna*, če obstaja kak homeomorfizem $f : M_1 \to M_2$.

4.2. **Enakomerna zveznost.**

Definicija 4.11. Preslikavo $f : M_1 \to M_2$ med metričnima prostoroma (M_1, d_1) in (M_2, d_2) je *enakomerno zvezna*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsaki točki $x, y \in M_1$ iz $d_1(x, y) < \delta$ sledi $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Vsaka enakomerno zvezna preslikava je zvezna, obratno pa ni vedno res. Če je namreč preslikava f zvezna v vsaki točki $x \in M_1$, potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak δ_x, da iz $d_1(x, y) < \delta_x$ sledi, da je $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Vendar pa je pri tem število δ_x lahko odvisno od x tako, da ne obstaja noben skupen $\delta > 0$, ki bi ustrezal zahtevi iz definicije zveznosti za vse $x \in M_1$ hkrati. (Na primer pri funkciji $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, ni takega skupnega δ.) Ravno obstoj ustreznega skupnega $\delta > 0$ razlikuje definicijo enakomerne zveznosti od običajne zveznosti.

Trditev 4.12. *Če je (M, d_1) kompakten metrični prostor, je vsaka zvezna preslikava $f : M_1 \to M_2$ enakomerno zvezna za vsak metrični prostor (M_2, d_2).*

Dokaz. Privzemimo nasprotno, da je f zvezna in ni enakomerno zvezna. Potem obstaja tak $\varepsilon > 0$, da za vsak $\delta > 0$ obstajata taki točki $x, y \in M_1$, da je

$$d_1(x, y) < \delta \ \text{ in } \ d_2(f(x), f(y)) \geq \varepsilon.$$

Ko vzamemo za δ zaporedoma $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, najdemo take točke $x_n, y_n \in M_1$, da je

$$d_1(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \tag{4.3}$$

in

$$d_2(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon. \tag{4.4}$$

Ker je M_1 kompakten prostor, ima zaporedje (x_n) vsaj eno stekališče x. Ker je funkcija f zvezna v x, obstaja tak $\delta_x > 0$, da iz $d_1(x, y) < \delta_x$ sledi $d_2(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ za vsak $y \in M_1$. Ker je x stekališče zaporedja (x_n), je v krogli $B(x, \delta_x)$ neskončno členov tega zaporedja, torej tudi členi s poljubno velikimi indeksi n. Iz (4.3) potem sledi, da obstaja tak n, da je $x_n, y_n \in B(x, \delta_x)$. Za tak n je tedaj $d_2(f(x), f(x_n)) < \frac{\varepsilon}{2}$ in $d_2(f(x), f(y_n)) < \frac{\varepsilon}{2}$, torej je

$$d_2(f(x_n), f(y_n)) \leq d_2(f(x_n), f(x)) + d_2(f(x), f(y_n)) < \varepsilon.$$

To pa je v protislovju z (4.4). □

4.3. **Negibne točke kontrakcij.** * (Tega podrazdelka ne bi obravnavali pri predavanjih.) Preslikavo $f : M_1 \to M_2$ med dvema metričnima prostoroma (M_1, d_1) in (M_2, d_2) bi lahko imenovali kontrakcija (ali skrčitev), če je $d_2(f(x), f(y)) \leq d_1(x, y)$ za vsaka $x, y \in M_1$. Vendar pa bi bila taka definicija nekoliko preohlapna za namene tega podrazdelka.

Definicija 4.13. Preslikava $f : M \to M$ metričnega prostora (M, d) vase je *skrčitev* ali *kontrakcija*, če obstaja kako tako število $q \in [0, 1)$, da je

$$d(f(x), f(y)) \leq q d(x, y)$$

za vsaka $x, y \in M$.

Očitno je vsaka kontrakcija (enakomerno) zvezna.

Definicija 4.14. Točka $x \in M$ je *negibna* ali *fiksna* za preslikavo $f : M \to M$, če je $f(x) = x$.

Izrek 4.15. *(Banachov izrek o skrčitvah) Za vsako kontrakcijo $f : M \to M$ polnega metričnega prostora (M, d) obstaja natanko ena negibna točka $a \in M$.*

Dokaz. Po definiciji skrčitve je $d(f(x), f(y)) \leq q d(x, y)$ za vse $x, y \in M$, kjer je $q \in [0, 1)$ konstanta. Če sta a in b negibni točki za f, je

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq q d(a, b).$$

Ker je $q \in [0, 1)$, je ta neenakost mogoča le, ko je $d(b, a) = 0$, torej ko je $b = a$. Negibna točka je torej ena sama, če sploh obstaja.

Za dokaz obstoja negibne točke vzemimo poljuben $x \in M$ in si oglejmo zaporedje

$$x, f(x), f^2(x), \ldots, f^n(x), \ldots,$$

kjer je f^n kompozitum n primerkov preslikave f (npr. $f^2 = f \circ f$). Pokazali bomo, da je to zaporedje Cauchyjevo, torej ima limito,

$$a := \lim_{n \to \infty} f^n(x).$$

Ker je f zvezna, bo od tod sledilo, da je

$$f(a) = \lim_{n \to \infty} f(f^n(x)) = \lim_{n \to \infty} f^{n+1}(x) = \lim_{n \to \infty} f^n(x) = a,$$

torej bo a negibna točka, katere obstoj smo želeli dokazati.

Dokazati moramo še, da je zaporedje $(f^n(x))$ Cauchyjevo, torej da konvergirajo razdalje $d(f^m(x), f^n(x))$ proti 0, ko gresta m in n proti ∞. V ta namen privzemimo, da je $n > m$ (sicer zamenjamo njuni vlogi) in ocenimo po trikotniški neenakosti

$$(4.5)\quad d(f^m(x), f^n(x)) \le \\ d(f^m(x), f^{m+1}(x)) + d(f^{m+1}(x), f^{m+2}(x)) + \ldots + d(f^{n-1}(x), f^n(x)).$$

Ker je f kontrakcija, je za vsak $k > 1$

$$d(f^k(x), f^{k+1}(x)) \le q d(f^{k-1}(x), f^k(x)) \le \ldots \le q^k d(x, f(x)).$$

Tako lahko vse člene na desni strani neenakosti (4.5) ocenimo navzgor, da dobimo

$$(4.6)\quad d(f^m(x), f^n(x)) \le (q^m + q^{m+1} + \ldots + q^{n-1}) d(x, f(x)) \le \frac{q^m}{1-q} d(x, f(x)).$$

Ko gre m proti ∞, gre q^m proti 0, zato ocena (4.6) pove, da gre proti 0 tudi $d(f^m(x), f^n(x))$. S tem smo dokazali, da je zaporedje $(f^n(x))$ res Cauchyjevo. $\square$

Naloge

1. Poišči kako zvezno preslikavo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in tako zaprto podmnožico $F \subseteq \mathbb{R}$, da množica $f(F)$ ni zaprta.

2. Poišči kako tako zvezno preslikavo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in kompaktno podmnožico $K \subseteq \mathbb{R}$, da množica $f^{-1}(K)$ ni kompaktna.

3. Dokaži, da je bijektivna zvezna preslikava $f : M_1 \to M_2$ homeomorfizem natanko tedaj, ko je $f(G)$ odprta množica za vsako odprto množico $G \subseteq M_1$. To pa je natanko tedaj, ko je $f(F)$ zaprta množica za vsako zaprto množico $F \subseteq M_1$.

4. Naj bo M_1 kompakten, M_2 pa poljuben metrični prostor. Dokaži, da je tedaj vsaka bijektivna zvezna preslikava $f : M_1 \to M_2$ homeomorfizem. (Namig: zaprte množice v M_1 so kompaktne; uporabi prejšnjo nalogo.)

5.* Dokaži, da je linearna preslikava $L : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ med normiranima prostoroma zvezna natanko tedaj, ko je zvezna v točki 0, kar je natanko tedaj, ko je omejena. Sklepaj, da je vsaka linearna preslikava med unitarnimi (ali pa evklidskimi) prostori zvezna.

6.** Dokaži, da je linearen funkcional na normiranem prostoru $\mathcal{U}$ zvezen natanko tedaj, ko je njegovo jedro zaprt podprostor. (Navodilo: Ker je jedro praslika množice $\{0\}$, ki je zaprta v $\mathbb{C}$ (ali $\mathbb{R}$), je jedro $\mathcal{N}_f$ zaprto, če je f zvezen funkcional. Za dokaz v obratno smer pa najprej pokaži, da iz zaprtosti jedra $\mathcal{N}_f$ sledi tudi zaprtost vsakega od podprostorov $a + \mathcal{N}_f$ $(a \in \mathcal{U})$, torej tudi podprostora $\mathcal{W} := \{x \in \mathcal{U} : f(x) = 1\}$. Ker $0 \notin \mathcal{W}$, obstaja tak $r > 0$, da je krogla $B(0, r)$ vsa zunaj hiperravnine $\mathcal{W}$. Pokaži, da je funkcional f omejen na krogli $B(0, r)$ in nato uporabi prejšnjo nalogo.)

7. (i) Dokaži, da je množica $C(M,\mathcal{U})$ vseh zveznih preslikav iz metričnega prostora M v normiran prostor $\mathcal{U}$ vektorski prostor za običajno seštevanje funkcij in množenje s skalarji, podmnožica $C_b(M,\mathcal{U})$ vseh omejenih zveznih funkcij pa vektorski podprostor v $C(M,\mathcal{U})$.

(ii) Dokaži, da je $C_b(M,\mathcal{U})$ normiran prostor za normo

$$\|f\| := \sup_{x\in M} \|f(x)\|,$$

ki je poln, če je $\mathcal{U}$ Banachov prostor.

8. Dokaži, da je vsak polinom p n spremenljivk z realnimi koeficienti zvezna preslikava na $\mathbb{R}^n$. Podobno dokaži tudi za kompleksne polinome na $\mathbb{C}^n$.

9. Dokaži, da je preslikava, ki vsaki matriki $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ priredi njen element $a_{i,j}$ na mestu (i,j) (kjer sta i,j fiksna), zvezen funkcional, če je prostor $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ opremljen z operatorsko normo. Natančneje: $|a_{i,j}| \leq \|A\|$. Sklepaj od tod in iz prejšnje naloge, da sta sled in determinanta zvezni funkciji na prostoru $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

10. Ali je $\sin x$ enakomerno zvezna funkcija na $\mathbb{R}$? Kaj pa $\sqrt{x}$ na poltraku $[0,\infty)$?

11. Dokaži: če je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ taka zvezna funkcija, da obstajata limiti $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ in $\lim_{x\to\infty} f(x)$ in sta končni, je f enakomerno zvezna.

12.* Naj bo S podmnožica metričnega prostora M_1, $f: S\to M_2$ pa enakomerno zvezna preslikava v poln metrični prostor M_2. Dokaži, da je mogoče preslikavo f enolično razširiti do enakomerno zvezne preslikave $\overline{f}:\overline{S}\to M_2$. (Navodilo: Za vsak $x\in\overline{S}$ naj bo (x_n) zaporedje iz S, ki konvergira proti x. Pokaži, da je zaporedje $(f(x_n))$ Cauchyjevo in ima zato limito y v M_2. Naj bo $\overline{f}(x) = y$. Pokaži, da je y neodvisen od izbire zaporedja (x_n), ki konvergira proti x, in da je tako definirana preslikava $\overline{f}$ zvezna.)

15.* Poišči kako tako funkcijo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, da je $d(f(x),f(y)) < d(x,y)$ (kjer je d običajna metrika na $\mathbb{R}$), a kljub temu preslikava f nima nobene negibne točke. (Navodilo: poskusi poiskati f oblike $f(x) = x + g(x)$, kjer je g kaka taka padajoča funkcija brez ničel, da je $|g'(x)| < 1$ za vsak $x\in\mathbb{R}$.)

16. Naj bosta G_1 in G_2 odprti podmnožici v metričnem prostoru M_1, $f_j: G_j\to M_2$ $(j=1,2)$ pa taki zvezni preslikavi, da je $f_1|(G_1\cap G_2) = f_2|(G_1\cap G_2)$. Dokaži, da je preslikava

$$f: G_1\cup G_2\to M_2,\quad f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x\in G_1\\ f_2(x), & x\in G_2\end{cases}$$

zvezna. Formuliraj in dokaži podobno trditev za zaprte množice.

17. (Urysohnova lema za metrične prostore) Naj bosta F_1 in F_2 disjunktni zaprti podmnožici metričnega prostora (M,d). Dokaži, da je funkcija

$$f: M\to\mathbb{R},\quad f(x) = \frac{d(x,F_1)}{d(x,F_1)+d(x,F_2)}$$

zvezna, da so njene vrednosti v intervalu $[0,1]$ ter da je $f(x)=0$ za vsak $x\in F_1$ in $f(x)=1$ za vsak $x\in F_2$.

18. Pravimo, da je funkcija $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *zvezna v spremenljivki* x_j, če je zvezna naslednja funkcija iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$:

$$x_j \mapsto f(a_1,\ldots,a_{j-1},x_j,a_{j+1},\ldots,a_n),$$

in sicer za vsak fiksen $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$.

(i) Pokaži, da je vsaka zvezna funkcija $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ zvezna v vsaki posamezni spremenljivki x_j za $j=1,\ldots,n$.

(ii) Izrazi funkcijo

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2) := \begin{cases} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0, & (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

v polarnih koordinatah in pokaži, da je zvezna v vsaki spremenljivki x_1 in x_2 posebej, a kljub temu ni zvezna kot funkcija na $\mathbb{R}^2$.

Stvarno kazalo

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani