Funkcije več spremenljivk

0.1. Uvod

Obravnavali bomo *preslikave* (ali *funkcije*), definirane na podmnožicah v $\mathbb{R}^n$ z vrednostmi v $\mathbb{R}^m$. Taka preslikava, definirana na podmnožici G v $\mathbb{R}^n$, je torej predpis $f : G \to \mathbb{R}^m$, ki vsaki točki x iz G priredi natanko določeno točko $f(x) \in \mathbb{R}^m$. Najprej bomo obravnavali primer, ko je $m = 1$. Tedaj so vrednosti funkcij realna števila, definicijska območja pa podmnožice v $\mathbb{R}^n$; ker so vektorji iz $\mathbb{R}^n$ pravzaprav n-terke realnih števil, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, imenujemo take funkcije *funkcije n spremenljivk.* Zgled take funkcije je npr. temperatura v prostoru, ki je funkcija treh prostorskih koordinat in časa.

0.1.1. Graf. Za funkcijo $f : G \to \mathbb{R}$, kjer je G podmnožica v $\mathbb{R}^n$, lahko definiramo *graf* kot

$$G_f := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n; f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G\}.$$

Torej je graf G_f podmnožica v $\mathbb{R}^{n+1}$, zato si ga lahko predstavljamo le, če je $n+1 \leq 3$, torej $n \leq 2$. Funkcije dveh spremenljivk si torej lahko ponazorimo z grafom.

Zgled 0.1.1. (i) Funkcija $z := f(x, y) := x^2 + y^2$ je definirana za vse $x, y \in \mathbb{R}$, njeno deginicijsko območje je zato $G = \mathbb{R}^2$. Da bi si lažje zamislili njen graf, je koristno vpeljati v ravnini x, y polarni koordinati (r, φ); točka v prostoru je enolično določena s trojko r, φ, z (imenovano *cilindrične koordinate)*, saj lahko njene kartezične koordinate izrazimo kot

$$x = r \cos\varphi, \quad y = r \sin\varphi, \quad z = z.$$

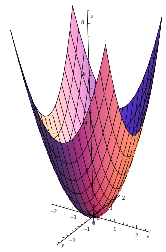
Pri tem r pomeni razdaljo točke $(x, y, 0)$ od izhodišča, kar je enako razdalji točke (x, y, z) od aplikatne osi (tj. osi z), saj je $(x, y, 0)$ pravokotna projekcija točke (x, y, z) na ravnino x, y. V novih koordinatah se funkcija glasi (ker je $x^2 + y^2 = r^2$) kot

$$z = r^2.$$

V ravnini, v kateri označimo abscisno os kot r, ordinatno os pa z, predstavlja enačba $z = r^2$ parabolo. Ker lahko polarna koordinata r zavzame le nenegativne vrednosti, pride pravzaprav v poštev le polovica te parabole. V prostoru pa imamo pri vsakem kotu φ eno tako parabolo z enačbo $z = r^2$, vse te parabole skupaj pa sestavljajo ploskev, imenovano *paraboloid*, ki nastane tudi tako, da se parabola $z = x^2$ zavrti okrog osi z.

(ii) Tudi funcija $z := f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$ je definirana na množici $G = \mathbb{R}^2$. Njen graf je ploskev, ki ima v cilindričnih koordinatah enačbo

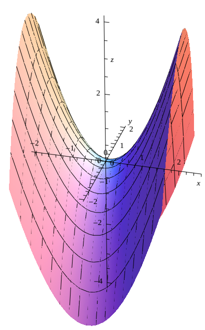
$$z = r.$$



SLIKA 0.1. Paraboloid $z = x^2 + y^2$.

Ta enačba predstavljha stožec z vrhom v koordinatnem izhodišču, katerega os je os z, kot ob vrhu pa je 90.

(iii) Tudi funkcija $z := x^2 - y^2$ je definirana na $\mathbb{R}^2$. Prerezi te ploskve z ravninami $x = c =$ konst. so navzdol obrnjene parabole $z = c^2 - y^2$, katerih temena (tj, ko je $y = 0$) ležijo na navzgor obrnjeni paraboli $z = x^2,\ y = 0$ (ker je $x = c$). To ploskev imenujemo *sedlo*.



SLIKA 0.2. Sedlo $z = x^2 - y^2$.

(iv) Funkcija $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ je definirana na množici $G = \{x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, ki je krog v ravnini x,y s središčem 0 in polmerom 1. Točke na grafu te funkcije ležijo na obli $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ s središčem 0 in polmerom 1; ker je na grafu $z \geq 0$, je graf zgornja polsfera.

Pri ponazoritvah funkcij treh spremenljivk si lahko, namesto z grafom, pomagamo z nivojskimi ploskvami. *Nivojska ploskev* funkcije f treh spremenljivk ima enačbo $f(x, y, z) = c$, kjer je c konstanta. (Če predstavljajo vrednosti funkcije f temperaturo v danem času, tako da je temperatura funkcija koordinat, so nivojske ploskve izoterme, če predstavlja f tlak, so izobare....)

ZGLED 0.1.2. (i) Kaj so nivojske ploskve funkcije $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$? Odgovor: sfere s središčem 0.

(ii) Kaj so nivojske ploskve funkcije $f(x,y,z) = 2x^2+3y^2+4z^2$? Odgovor: elipsoidi z enačbami $2x^2+3y^2+4z^2 = e$, kjer je e nenegativna konstanta, torej $e = d^2$ za kak $d \in \mathbb{R}^+$. Taka ploskev je trirazsežna analogija elipse, saj lahko njeno enačbo napišemo v obliki $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, kar je enačba splošnega elipsoida s središčem 0 in polosemi a, b, c vzdolž koordinatnih osi x, y in z, zaporedoma.

Analogen pojem nivojskim ploskvam so pri funkcijah dveh spremenljivk *nivojske krivulje*. Za vajo lahko določite nivojske krivulje na primer za funkcijo $z = 20 - 2x^2 - y^4$. Narišite tudi graf te funkcije.

0.1.2. Parcialni odvodi. Naj bo $f : G \to \mathbb{R}$ funkcija, definirana na odprti podmnožici G v $\mathbb{R}^n$. Za vsako točko $a = (a_1, \ldots, a_n) \in G$ je kaka dovolj majhna odprta krogla s središčem v a vsebovana v G, zato je za vse dovolj majhne vektorje $h \in \mathbb{R}^n$ točka $a + h$ vsebovana v G, torej je vrednost $f(a + h)$ definirana. Tedaj lahko opazujemo na primer limito

$$D_1 f(a) := \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(a_1 + h_1, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{h_1}.$$

To limito (kadar obstaja) imenujemo *parcialni odvod funkcije f v točki a na prvo spremenljivko.* Tradicionalna oznaka zanj je $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$, namesto $D_1 f(a)$. To je torej odvod funkcije f (v točki a) kot funkcije prve spremenljivke, kjer imamo druge spremenljivke za konstantne. Podobno definiramo tudi parcialne odvode na ostale spremenljivke. Kadar so vrednosti funkcije označene z u, torej $u = f(x_1, \ldots, x_n)$, bomo, namesto $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, pisali tudi $\frac{\partial u}{\partial x_j}$.

ZGLED 0.1.3. (i) Za funkcijo $z := x^2 y^4$ dveh spremenljivk x, y sta njena parcialna odvoda

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^4 \quad \text{in} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x^2 y^3.$$

Torej je $\frac{\partial z}{\partial x}(3,5) = 2 \cdot 3 \cdot 5^4$.

(ii) Za funkcijo $z = \sin(xy)$ pa je $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cos(xy)$, torej $\frac{\partial z}{\partial x}(\frac{\pi}{4}, 3) = 3\cos(\frac{3\pi}{4}) = -3\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(iii) Izračunajte parcialne odvode na vse tri spremenljivke za funkcijo $u = xy^2 \cos(xz)$.

0.1.3. Višji parcialni odvodi. Parcialni odvodi $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ dane funkcije f, so spet funkcije; njihovi parcialni odvodi so *parcialni odvodi reda* 2. Pri funkciji dveh spremenljivk, $u = f(x, y)$ so tako načeloma možni naslednji parcialni odvodi drugega reda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y}), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial x}), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y}).$$

Kasneje pa bomo pokazali, da sta *mešana partialna odvoda* enaka, kadar sta zvezna, torej

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Če označimo odvajanje na prvo in drugo spremenljivko z D_1 in D_2, lahko mešana odvoda zapišemo kot $D_1 D_2 u$ in $D_2 D_1 u$, enakost mešanih odvodov pa pomeni, da operatorja D_1 in D_2 komutirata.

Zgled 0.1.4. Za vajo lahko preverite enakost mešanih drugih odvodov na primer na funkciji $u = y \sin(x^2 + y)$. Rezultat je $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x \cos(x^2 + y) - 2xy \sin(x^2 + y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

Parcialne odvode tretjega in višjih redov lahko (za funkcijo dveh spremenljivk) definiramo kar s pomočjo potenc (to je zaporedne uporabe) operatorjev D_1 in D_2. Odvodi tretjega reda so tako

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = D_1^3 u, \ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = D_1^3 D_2 u, \ \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} = D_2 D_1^2 u, \ \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x} = D_1 D_2 D_1 u, \ldots.$$

Ker operatorja D_1 in D_2 komutirata (na funkcijah, ki imajo vse parcialne odvode vseh redov), vrstni red odvajanj ni pomemben, pomembno je le, kolikokrat odvajamo na vsako spremenljivko. Tako je na primer

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2},$$

kadar sta odvoda zvezna.

0.1.4. Ekstremi. Če ima funkcija $u = f(x, y)$ lokalni ekstrem v točki $a = (a_1, a_2)$, ima funkcija prve spremenljivke, to je funkcija $x \mapsto f(x, a_2)$, v točki $x = a_1$ lokalni ekstrem, zato je njen odvod v točki a_1 enak 0. To pomeni, da je $\frac{\partial u}{\partial x}(a) = 0$. Podobno mora biti tudi $\frac{\partial u}{\partial y}(a) = 0$. Enako velja tudi za funkcije več spremenljivk:

Potreben pogoj, da ima funkcija $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ v točki $a = (a_1, \ldots, a_n)$ lokalni ekstrem je, da so vsi njeni parcialni odvodi v točki a enaki 0*, torej*

$$(\frac{\partial u}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(a)) = (0, \ldots, 0).$$

Vektor na levi strani zadnje formule imenujemo *gradient funkcije f v točki a* in označimo $\operatorname{grad} u(a)$ ali $\nabla u(a)$. Kakšen je njegov pomen, si bomo ogledali kasneje.

Da bi ugotovili, kakšni so zadostni pogoji za nastop ekstremov, bomo potrebovali Taylorjevo formulo za funkcije več spremenljivk, ki jo bomo izpeljali kasneje. Za funkcijo dveh spremenljivk, $u = f(x, y)$, se ta formula, do členov reda dva okrog točke $a = (a_1, a_2)$, glasi:

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2) = f(a_1, a_2)+h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a)+h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a)+\frac{1}{2!}[h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)+2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)+h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)]+\ldots,$$

kjer pike označujejo člene višjih redov v spremenljivkah h_1 in h_2. Če je točka a kandidatka za ekstrem, sta prva odvoda v točki a enaka 0 in gornja formula se poenostavi v

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = f(a_1, a_2) + \frac{1}{2}[ph_1^2 + 2qh_1h_2 + rh_2^2] + \ldots, \tag{0.1.1}$$

kjer smo označili

$$p = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad q = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a), \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a). \tag{0.1.2}$$

Če zavzame kvadratna funkcija dveh spremenljivk

$$Q(h_1, h_2) := ph_1^2 + 2qh_1h_2 + rh_2^2$$

le pozitivne vrednosti za vse $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$, sledi iz (0.1.1), če zanemarimo člene višjega reda označene s pikami, ki so zelo majhni za majhna h_1 in h_2, da je $f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) \geq f(a_1, a_2)$, torej ima tedaj funkcija f v točki a lokalni minimum. Podobno ima f v a lokalni maksimum v točki a, če je $Q(h_1, h_2) < 0$ za vse $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$. Razmisliti moramo torej, kdaj ima kvadratna funkcija Q le pozitivne ali le negativne vrednosti. Za $h_1 \neq 0$, jo lahko napičemo kot

$$Q(h_1, h_2) = h_1^2[p + 2q\frac{h_2}{h_1} + r(\frac{h_2}{h_1})^2].$$

Spremenljivka $t := \frac{h_2}{h_1}$ lahko zavzame vse vrednosti že, ko dopustimo, da vektor (h_1, h_2) teče po še tako majhni krogli okrog 0, saj ostane razmerje h_2/h_1 lahko poljubno. Funkcija Q bo torej vedno pozitivna ali vedno negativna za vse h_2 in vse $h_1 \neq 0$, če in samo če bo kvadratna funkcija

$$t \mapsto p + 2qt + rt^2$$

imela le pozitivne ali le negativne vrednosti. Ta kvadratna funkcija je vedno pozitivna natanko tedaj, ko je njena diskriminanta (tj. $D = 4q^2 - 4pr$) negativna (kvadratna funkcija tedaj nima realnih ničel) in $r > 0$ (njen graf je tedaj obrnjen navzgor). Vedno negativna pa bo, če je $D < 0$ in $r < 0$. Pogoj $D < 0$ lahko zapišemo kot $pr - q^2 > 0$ oziroma $pr > q^2$, od koder vidimo (ker je $q^2 \geq 0$), da imata p in r isti predznak, kadar je $D < 0$. Zaključimo torej lahko, da je $Q(h_1, h_2) > 0$ za vse neničelne (h_1, h_2) natanko tedaj, ko je $pr - q^2 > 0$ in $r > 0$ (ekvivalentno $p > 0$); opazite, da to velja tudi v primeru, ko je $h_1 = 0$, saj je tedaj $Q(h_1, h_2) = rt^2$. Izraz $pr - q^2$ lahko napišemo kot determinanto

$$pr - q^2 = \begin{vmatrix} p & q \\ q & r \end{vmatrix}.$$

Te ugotovitve lahko sedaj strnemo takole:

Naj bosta prva parcialna odvoda funkcije f dveh spremenljivk v točki $a = (a_1, a_2)$ enaka 0, parcialni odvodi drugega reda zvezni in predpostavimo, da je

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{0.1.3}$$

Potem ima f v točki a lokalni ekstrem natanko tedaj, ko je determinanta (0.1.3) pozitivna: tedaj je v a lokalni minimum, kadar je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$; lokalni maksimum pa, kadar je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$.

Natančneje bomo kriterije za ekstreme pri funkcijah več spremenljivk izpeljali kasneje.

Zgled 0.1.5. Določimo ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 y - y - x$. Prva parcialna odvoda sta

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 1 \quad \text{in} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1.$$

Potrebna pogoja za ekstreme sta torej

$$2xy - 1 = 0 \quad \text{in} \quad x^2 - 1 = 0.$$

Rešitvi tega sistema enačb sta $x = \pm 1$, $y = \pm \frac{1}{2}$; kandidatki za ekstrem sta torej točki $a = (1, \frac{1}{2})$ in $b = (-1, -\frac{1}{2})$. Determinanta (0.1.3) se v splošni točki (x, y) glasi

$$\begin{vmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = -4x^2$$

in je v obeh točkah a in b negativna, zato ta funkcija nima (lokalnih) ekstremov.