REALNA ŠTEVILA

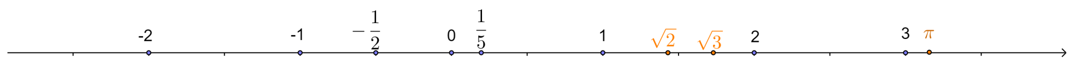
BOJAN MAGAJNA

Racionalna števila, ki jih predstavimo z ulomki, so ljudje poznali že pred tisočletji. Stari grki so dolgo časa menili, da lahko vse razdalje natančno izrazimo z racionalnimi števili. Že kmalu po obdobju Pitagore (okrog 5 stoletij pred našim štetjem) pa so ugotovili, da dolžina diagonale kvadrata s stranico 1 ne more biti racionalno število. Dolžina diagonale je namreč $\sqrt{2}$ in, če bi bilo to racionalno število, bi ga lahko izrazili kot okrajšani ulomek

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

kjer bi bili p in q tuji naravni števili. Od tod bi potem dobili $p^2 = 2q^2$, iz česar bi sledilo, da mora biti p sodo število, saj je kvadrat lihega štivala lih, p^2 pa sodo (ker je enako $2q^2$). Torej je $p = 2p_1$ za kako naravno število p_1. Ko vstavimo to v enakost $p^2 = 2q^2$, dobimo $4p_1^2 = 2q^2$, torej $q^2 = 2p_1^2$. Od tod enak sklep pove, da mora biti q sodo število. Toda potem imata p in q skupni delitelj 2, kar je protislovje, saj smo vzeli, da sta p in q tuji števili. Dolžina diagonale kvadrata s stranico 1 torej ne more biti racionalno število, zato za natančno predstavljanje dolžin racionalna števila ne zadoščajo. Vpeljati moramo večjo množico števil, namreč množico realnih števil $\mathbb{R}$.

Realna števila si lahko zamišljamo kot točke na premici, na kateri sedijo v enakomernih razmikih ene enote vsa cela števila $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$, pri čemer so pozitivna desno, negativna pa levo od 0. Med njimi so v primernih razmikih vsa racionalna števila; npr. $1/2$ je točno na sredini med 0 in 1, $1/3$ je na tretjini razdalje med 0 in 1 itd. Ko smo tako na premico razporedili vsa racionalna števila, pa s tem nismo zasedli vseh točk na premici. Npr. točke, ki je od 0 oddaljena $\sqrt{2}$, nismo zasedli, ker $\sqrt{2}$ ni racionalno število. Nezasedene točke ustrezajo *iracionalnim številom.* Množico vseh racionalnih števil označimo s $\mathbb{Q}$; njen komplement v $\mathbb{R}$ pa z $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Obe množici, $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, sta neskončni, vendar se izkaže, da ima $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ vseeno mnogo več elementov. $\mathbb{Q}$ vsebuje kot svojo podmnožico množico $\mathbb{Z}$ vseh celih števil, le ta pa množico $\mathbb{N}$ vseh naravnih števil. Čeprav se zdi nenavadno, celih števil ni več kot naravnih, saj jih lahko razporedimo v pare z naravnimi števili na naslednji način: $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, 2)$, $(2, 3)$, $(-2, 4)$, $(-3, 5)$, $(3, 6)\ldots$. Tudi racionalnih števil ni več kot naravnih; dokaz bomo pustili kot nalogo, tukaj bomo pokazali le, kako lahko pozitivna racionalna števila preštejemo (tj. razporedimo v pare z naravnimi). Najprej napišemo vse pozitivne ulomke v tabelo in sicer tako, da so v prvi vrsti vsi ulomki z imenovalcem 1, v drugi vrsti vsi ulomki z imenovalcem 2, v tretji vsi ulomki z imenovalcem 3 itd. Nato te ulomke oštevilčimo z naravnimi števili, kot nakazujejo puščice (in pri tem lahko izpuščamo tiste ulomke, ki so bili na vrsti že



SLIKA 1. Realna os

prej).

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & \to & 2 & & 3 & \to & 4 & & 5 & \to & \dots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \dots \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \frac{5}{2} & & \dots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \nearrow & & \swarrow & \dots \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} & & \dots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \dots \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & & \frac{5}{4} & & \dots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \dots \\
\frac{1}{5} & & \frac{2}{5} & & \frac{3}{5} & & \frac{4}{5} & & \frac{5}{5} & & \dots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \dots \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}
$$

Vsak pozitiven ulomek je napisan nekje v tej tabeli. Ko tabelo razvijemo v ravno črto, kot nakazujejo puščice, dobimo vse te ulomke zapisane v eno samo zaporedje, zato jih ne more biti več kot naravnih števil.

Iz načina, kako izračunamo decimalni zapis ulomka p/q, in dejstva, da je pri deljenju s q možnih le končno mnogo različnih ostankov, sledi (kot je znano iz srednje šole), da se v decimalnem zapisu ulomka od nekje naprej neka skupina cifer ponavlja. Tudi obratno je res: če se v decimalnem zapisu od nekega mesta naprej kaka skupina cifer ponavlja, predstavlja ta zapis racionalno število. Namesto splošnega dokaza, si oglejmo konkreten primer, saj je na njegovi podlagi mogoče zlahka izdelati splošen dokaz.

Zgled 0.1. Da bi ugotovili, da predstavlja zapis $3.1141414... = 3.1 + 0.0141414\dots$ racionalno število, zadošča to ugotoviti za zapis $0.0141414\dots$, saj je $3.1 = 31/10$ racionalno število. Označimo

$$x = 0.0141414\dots$$

in pomnožimo to enakost s 100, da dobimo

$$100x = 1.4141414\ldots = 1.4 + x.$$

Od tod sledi $99x = 1.4 = 14/10$, torej je $x = 14/990 = 7/495$.

Iracionalna števila so torej predstavljena s takimi decimalnimi zapisi, da se v njih nobena skupina cifer ne ponavlja. Od tod lahko sklepamo, da se vseh realnih števil med 0 in 1 ne da vključiti v eno samo zaporedje. Predpostavimo namreč, da bi se to dalo, in naj bodo

$$a_1 = 0.a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}\ldots,\ a_2 = 0.a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}\ldots,\ a_3 = 0.a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3},\ \ldots$$

decimalni zapisi vseh členov tega zaporedja. Sedaj pa sestavimo decimalni zapis $0.b_1b_2b_3\ldots$ takole: b_1 izberimo tako, da bo $b_1 \neq a_{1,1}$ in potem $b \neq a_1$ (ne glede na to, kaj bodo ostale decimalke $b_2, b_3\ldots$); nato izberimo b_2 tako da bo $b_2 \neq a_{2,2}$ in $b \neq a_2$; b_3 izberimo različen od $a_{3,3}$.... Na ta način dobimo realno število b, ki se razlikuje od vseh a_j v našem zaporedju. Dodamo ga sicer lahko našemu zaporedju, toda potem lahko po istem postopku sestavimo novo število, ki ga ne bo v zaporedju. Zato nobeno zaporedje ne more vsebovati vseh realnih števil.

Ključne lastnosti množice realnih števil so zajete v nekaj aksiomih (ki jih tukaj ne bomo našteli), iz katerih izpeljujemo vse druge lastnosti. Ti aksiomi govorijo o lastnostih računskih operacij seštevanja in množenja (kot so asociativnost, komutativnost, distributivnost), lastnostih relacije "manjši", označene kot $<$, ter povezavi med operacijama in relacijo. Vse te lastnosti so dobro znane iz srednje šole. Navedli bomo le enega od aksiomov, ki bo ključen za našo nadajnjo obravnavo, in po katerem se množica $\mathbb{R}$ bistveno razlikuje od svoje podmnožice $\mathbb{Q}$.

Definicija 0.2. Podmnožica S v $\mathbb{R}$ je *navzgor omejena*, če obstaja tak $M \in \mathbb{R}$, da je

$$x \leq M \quad \forall x \in S.$$

(Pri tem znak $\forall$ pomeni "za vsak".) Vsak tak M imenujemo *zgornja meja* množice S. Najmanjšo med zgornjimi mejami imenujemo *natančna zgornja meja* ali *supremum* in označimo kot $\sup S$.

Podmnožica $S \subseteq \mathbb{R}$ je *navzdol omejena*, če obstaja tak $m \in \mathbb{R}$, da je

$$x \geq m \quad \forall x \in S.$$

Vsak tak m imenujemo *spodnja meja množice S*. Največjo med spodnjimi mejami imenujemo *natančna spodnja meja* ali *infimum* in označimo kot $\inf S$.

Množica S je *omejena*, če je omejena navzgor in navzdol.

Zgled 0.3. Množica naravnih števil $\mathbb{N}$ na primer je navzdol omejena, $\inf \mathbb{N} = 0$, navzgor pa ni omejena. Vsak interval $S = (a, b)$ je omejena množica in sicer je $\inf S = a$ in $\sup S = b$. Opazimo, da tukaj $\inf S \notin S$ in $\sup S \notin S$.

Tudi vsak zaprt interval $[a, b]$ je omejena množica in spet je $\inf S = a$ ter $\sup S = b$, le da sta tokrat infimum in supremum elementa množice S.

Poltraki, so omejeni le z ene strani.

Absolutna vrednost realnega števila x je definirana z

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{če je } x \geq 0; \\ -x, & \text{če je } x < 0. \end{cases}$$

Naloge. 1. Za dano množico $S \subseteq \mathbb{R}$ označimo $-S = \{-x : x \in S\}$. ($-S$ je torej zrcalna slika množice S glede na točko 0.) Pokažite, da je S navzgor omejena natanko tedaj, ko je $-S$ navzdol omejena in da velja $\inf(-S) = -\sup S$. Prav tako pokažite, da je S navzdol omejena natanko tedaj, ko je $-S$ navzgor omejena in $\sup(-S) = -\inf S$.

2. Za podmnožico S v $\mathbb{R}$ naj bo $\tilde{S} = \{|x| : x \in S\}$. Pokažite, da je S omejena natanko tedaj, ko je $\tilde{S}$ navzgor omejena.

3. Pokažite (tako da obravnavate vse možnosti predznakov števil a in b), da je $|ab| = |a||b|$ in $|a + b| \leq |a| + |b|$ za poljubni realni števili a in b.

Ključen je naslednji *aksiom o polnosti*, imenovan tudi *aksiom o kontinuumu*.

Aksiom o kontinuumu. *Za vsako neprazno navzgor omejeno podmnožico S v $\mathbb{R}$ obstaja v $\mathbb{R}$ njen supremum.*

Ta aksiom postane evidenten, če si predstavljamo realna števila kot točke na premici, saj je premica neprekinjena (je kontinuum), nima lukenj. Tak aksiom ne velja v $\mathbb{Q}$; nima namreč vsaka neprazna navzgor omejena podmnožica S v $\mathbb{Q}$ supremuma v $\mathbb{Q}$.

Zgled 0.4. Naj bo

$$S = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < \sqrt{2}\}.$$

Ta množica je navzgor omejena npr. z 2, njen supremum v $\mathbb{R}$ je $\sqrt{2}$, ki pa ni v $\mathbb{Q}$. Nobeno število $M \in \mathbb{Q}$ ne more biti supremum množice S, kajti tak M bi bil zgornja meja za S tudi v $\mathbb{R}$ in zato $\sqrt{2} \leq M$ (saj je $\sqrt{2}$ najmanjša med zgornjimi mejami za S v $\mathbb{R}$). Ker $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, mora biti potem $\sqrt{2} < M$. Toda med $\sqrt{2}$ in M obstaja racionalno število, imenujmo ga r. (Dobimo ga npr. tako, da v decimalnem zapisu za $\sqrt{2}$ dovolj pozno decimalko povečamo za 1, poznejše decimalke pa nadomestimo z ničlami. Če smo izbrali dovolj pozno decimalko, smo s tem $\sqrt{2}$ le tako malo povečali, da bo dobljeno število še vedno manjše od M.) Ker je $\sqrt{2} < r$, je r zgornja meja za S v $\mathbb{Q}$. Ker je $r < M$, torej M ne more biti najmanjša zgornja meja v $\mathbb{Q}$.

Ker lahko z zrcaljenjem množice prek 0 spremenimo spodnje meje v zgornje, velja naslednja trditev, katere dokaz bomo pustili za vajo:

Trditev 0.5. *Vsaka neprazna navzdol omejena podmnožica v $\mathbb{R}$ ima infimum v $\mathbb{R}$.*

Realna števila se da konstruirati, brez sklicevanja na premico, njihove lastnosti pa dokazovati le na podlagi aksiomov. Dokazati je treba na primer tudi obstoj korenov pozitivnih realnih števil, tj., da za vsako naravno število n in vsak pozitiven $a \in \mathbb{R}$ obstaja tak pozitiven $x \in \mathbb{R}$, da je $x^n = a$. Namesto v splošnem, bomo to pokazali v posebnem primeru $a = 2$ in $n = 5$; splošen dokaz je podoben temu, ki ga bomo navedli v naslednjem zgledu:

Zgled 0.6. Obstaja tako pozitivno realno število M, da je $M^5 = 2$.

Za dokaz si oglejmo množico

$$S = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x,\ x^5 < 2\},$$

ki ni prazna, saj je $1 \in S$. Ta množica je tudi navzgor omejena, npr. z 2, saj so vsa pozitivna števila x, ki zadoščajo pogoju $x^5 < 2$, manjša od 2. (Če je namreč $x \geq 2$, je $x^5 \geq 32 > 2$.) Po aksiomu o kontinuumu obstaja $M := \sup S$. Trdimo, da je $M^5 = 2$. V nasprotnem primeru bi bilo namreč bodisi $M^5 < 2$ bodisi $M^5 > 2$, pokazali pa bomo, da obe ti dve možnosti vodita v protislovje.

Če je $M^5 < 2$, potem je, kot bomo videli, tudi $(M+\varepsilon)^5 < 2$ za kak dovolj majhen pozitiven ε. Toda to pomeni, da je $M + \varepsilon \in S$, se pravi $M + \varepsilon \leq M$ (ker je M zgornja meja za S), kar je protislovje, saj je očitno $M + \varepsilon > M$. Poiskati moramo torej tak $\varepsilon > 0$, da bo $(M + \varepsilon)^5 < 2$. Tak ε bomo poiskali med števili, manjšimi od 1, tako, da lahko ocenimo

$$(M+\varepsilon)^5 = M^5+5M^4\varepsilon+\binom{5}{2}M^3\varepsilon^2+\ldots\varepsilon^5 = M^5+\varepsilon\left(5M^4+\binom{5}{2}M^3\varepsilon+\ldots+\varepsilon^4\right)$$

$$< M^5 + \varepsilon\left(5M^4 + \binom{5}{2}M^3 + \ldots + 1\right).$$

Zadnji izraz bo manjši od 2, če izberemo ε manjši od

$$\frac{2 - M^5}{\left(5M^4 + \binom{5}{2}M^3 + \ldots + 1\right)}.$$

Če pa je $M^5 > 2$, potem je tudi $(M - \varepsilon)^5 > 2$ za kak dovolj majhen pozitiven ε, ki ga lahko izberemo manjšega od 1, saj velja ocena

$$(M - \varepsilon)^5 = M^5 - 5M^4\varepsilon^2 + \binom{5}{2}M^3\varepsilon^2 - \ldots + \varepsilon^4$$

$$> M^5 - \varepsilon\left(5M^4 + \binom{5}{2}M^3 + \ldots + 1\right) > 2,$$

če izberemo ε manjši od

$$\frac{M^5 - 2}{\left(5M^4 + \binom{5}{2}M^3 + \ldots + 1\right)}.$$

Toda iz neenakost $(M - \varepsilon)^5 > 2$ sledi, da je $M - \varepsilon > x$ za vsak $x \in S$, če izberemo ε manjši tudi od M, kot pove naslednji račun, kjer smo označili $y = M - \varepsilon$:

$$0 < y^5 - x^5 = (y - x)(y^4 + y^3x + \ldots + x^4).$$

Ker so namreč v zadnjem oklepaju sami pozitivni členi, iz te neenakosti sledi (ko jo delimo z izrazom v oklepaju), da je $0 < y - x$, torej res $y > x$. To pove, da je y zgornaj meja množice S. Toda $y = M - \varepsilon < M$, kar je v protislovju s tem, da je M najmanjša med zgornjimi mejami za S.

Naloge. 1. Dokažite, da vsak (še tako kratek) odprt interval vsebuje kako racionalno število.

2. (i) Dokažite, da za vsako naravno število $q \geq 1$ in vsako realno število x obstaja tako celo število p, da je $|x - \frac{p}{q}| < 1$.

(ii)* Dokažite, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ in vsak pozitiven ε obstaja tak ulomek p/q $(p, q \in \mathbb{Z})$, da je $|x - \frac{p}{q}| < \frac{\varepsilon}{q}$.

3.* Dokažite, da za vsako pokritje zaprtega intervala $[a, b]$ z odprtimi intervali (a_j, b_j) (torej $[a, b] \subseteq \cup_j (a_j, b_j)$, kjer je intervalov neskončno mnogo), obstaja med temi intervali končno mnogo takih, da njihova unija vsebuje $[a, b]$. (Navodilo: Opazujte množico vseh tistih $c \in [a, b]$, za katere je mogoče interval $[a, c]$ pokriti s končno mnogo intervali (a_j, b_j) in uporabite aksiom o kontinuumu.)

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani