0.0.1. Pomen gradienta. Pri prejšnjem predavanju smo spoznali, da je odvod funkcije $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ glede na vektor v v točki a enak skalarnemu produktu

$$(\nabla_v f)(a) = \langle (\nabla f)(a), v \rangle,$$

kjer je $(\nabla f)(a)$ gradient funkcije v točki a. Po Cauchy-Schwarzovi neenakosti je

$$|\langle (\nabla f)(a), v \rangle| \leq \|(\nabla f)(a)\| \|v\|,$$

kjer velja enakost natanko tedaj, ko sta vektorja v in $(\nabla f)(a)$ kolinearna. Ker pomeni $(\nabla_v f)(a)$ hitrost spreminjanja vrednosti funkcije f v točki a, vidimo od tod, da velja:

TRDITEV 0.0.1. *Gradient* $(\nabla f)(a)$ *kaže v smeri najhitrejšega naraščanja funkcije* f *v točki* a.

ZGLED 0.0.2. Planinec stoji na gori oblike $z = 2000 - 2x^4 - 3y^2$. V kateri smeri se mora odpraviti iz točke $(2, 3, 1941)$, da se bo najhitreje dvigal?

Tukaj je $\nabla z = (-8x^3, -6y)$ in $a = (2, 3)$, torej $(\nabla z)(a) = (-64, -18)$. Planinec se mora odpraviti v smeri, katere projekcija na ravnino x, y je določena z vektorjem $(-64, -18)$, se pravi z enotskim vektorejm

$$(-64, -18)/\sqrt{64^2 + 18^2} = (-32, -9)/\sqrt{1105}.$$

0.1. Višji odvodi, Taylorjeva formula in ekstremi

0.1.1. Višji odvodi. Odvod $Df = f'$ preslikave $f : G \to \mathcal{V}$ je preslikava iz G v vektorski prostor $B(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ vseh linearnih preslikav iz $U = \mathbb{R}^n$ v $V = \mathbb{R}^m$, ki je pravzaprav prostor $M_{m,n}(\mathbb{R})$ vseh realnih $m \times n$ matrik, torej v bistvu $\mathbb{R}^{mn}$ (saj lahko vse vrstice matrike napišemo v eno vrsto dolžine mn). Zato lahko govorimo o odvodu preslikave Df.

DEFINICIJA 0.1.1. Če je preslikava Df odvedljiva, imenujemo $D(Df)$ *drugi odvod preslikave* f in ga označimo z $D^2 f$ ali pa s f''. Induktivno lahko definiramo *k-ti odvod* kot $f^{(k)} = D^k f := D(D^{k-1} f)$, če je le $D^{k-1} f$ odvedljiva preslikava.

Vendar se tukaj ne bomo ukvarjali s takimi odvodi, temveč se bomo sedaj raje vrnili v bolj konkretne tirnice.

DEFINICIJA 0.1.2. Višji parcialni odvodi skalarne funkcije $f : G \to \mathbb{R}$, kjer je G odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$, so definirani kot produkti prvih odvodov. Na primer produkti

$$(D_i D_j) f := D_i(D_j f) \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

so drugi odvodi. Tradicionalna oznaka zanje je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := D_i D_j f.$$

Odvode reda višjega od dva lahko nato definiramo z indukcijo na očiten način.

Zelo koristna je enakost mešanih odvodov $D_i D_j f = D_j D_i f$, ki jo bomo dokazali v naslednjem izreku:

IZREK 0.1.3. *Naj ima funkcija $f : G \to \mathbb{R}$ vse parcialne odvode do reda 2, kjer je G odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$. Če sta za kaka $i, j \in \{1, \dots, n\}$ parcialna odvoda $D_i D_j f$ in $D_j D_i f$ zvezni funkciji na G, potem je $D_i D_j f = D_j D_i f$.*

DOKAZ. Ker se pri računanju parcialnih odvodov $D_i D_j$ in $D_j D_i$ spreminjata le dve spremenljivki x_i in x_j, druge pa so konstantne, zadošča prvi del izreka dokazati le za funkcije dveh spremenljivk. Privzemimo torej, da je $G \subseteq \mathbb{R}^2$, in označimo spremenljivki z x in y (namesto x_1 in x_2). Naj bo $(a, b) \in G$ in bodita $h, k \in \mathbb{R}$ tako majhna pozitivna, da je daljica med (a, b) in $(a + h, b + k)$ vsebovana v G. Oglejmo si izraz

$$\Delta := f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b). \tag{0.1.1}$$

Če označimo s ϕ funkcijo $\phi(x) := f(x, b+k) - f(x, b)$, lahko Δ zapišemo kot

$$\Delta = \phi(a + h) - \phi(a).$$

Po Lagrangeevem izreku obstaja tak $\xi \in (a, a + h)$, da je $\phi(a + h) - \phi(a) = \phi'(\xi)h$. Ker je $\phi'(x) = (D_1 f)(x, b + k) - (D_1 f)(x, b)$, sledi, da je

$$\Delta = [(D_1 f)(\xi, b + k) - (D_1 f)(\xi, b)]h.$$

Izraz v oglatem oklepaju lahko po Lagrangeevem izreku (uporabljenem na funkciji $y \mapsto (D_1 f)(\xi, y))$ zapišemo v obliki $(D_2(D_1 f))(\xi, \eta)k$ za kak $\eta \in (b, b + k)$. Tako dobimo

$$\Delta = (D_2(D_1 f))(\xi, \eta)hk. \tag{0.1.2}$$

Če pa vpeljemo funkcijo $\psi(y) := f(a + h, y) - f(a, y)$, lahko izraz Δ zapišemo kot

$$\Delta = \psi(b + k) - \psi(b).$$

Sedaj lahko ravnamo podobno kot v prejšnjem odstavku in vidimo, da je

$$\Delta = (D_1(D_2 f))(\zeta, \tau)hk \tag{0.1.3}$$

za kaka $\zeta \in (a, a + h)$ in $\tau \in (b, b + k)$. Iz (0.1.2) in (0.1.3) sledi, da je

$$(D_2(D_1 f))(\xi, \eta) = (D_1(D_2 f))(\zeta, \tau).$$

Ta ugotovitev velja za poljubno majhne pozitivne h in k. Ko gresta h in k proti 0, se ξ in ζ približujeta k a (ker sta na intervalu $(a, a + h)$), η in τ pa k b. Ker sta odvoda $D_1(D_2 f)$ in $D_2(D_1 f)$ po predpostavki zvezna, sledi, da je $(D_2(D_1 f))(a, b) = (D_1(D_2 f))(a, b)$ za vsako točko $(a, b) \in G$.

$\square$

Parcialni odvod D_i je operator na funkcijah. Enakost $D_i D_j f = D_j D_i f$ iz izreka 0.1.3 pove, da operatorja D_i in D_j komutirata, zato komutirajo tudi vse njune potence D_i^k in D_j^l na prostoru neskončnokrat odvedljivih funkcij. Tedaj torej ni pomembno, v kakšnem vrstnem redu računamo parcialne odvode, temveč le, kolikokrat odvajamo na posamezno spremenljivko.

0.1.2. Taylorjeva formula. Taylorjevo vrsto za funkcijo $f : G \to \mathbb{R}$, kjer je G odprta podmnožica v $= \mathbb{R}^n$, lahko izpeljemo iz Taylorjeve vrste za funkcijo ene spremenljivke, ki je znana iz elementarne analize. Naj bo $a \in G$, $h \in \mathcal{U}$ pa tak vektor, da je krogla $\overline{B(a, \|h\|)}$ vsebovana v G. Funkcijo

$$g(t) := f(a + th)$$

ene realne spremenljivke t lahko razvijemo po Taylorjevi formuli okrog točke $t = 0$ kot

$$g(t) = \sum_{k=1}^{r} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k + R_r(t), \tag{0.1.4}$$

kjer je ostanek

$$R_r(t) = \frac{g^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!} t^{r+1} \quad \text{za kak } \xi \in (0, t).$$

Pri tem smo seveda privzeli, da je funkcija g vsaj $(r + 1)$-krat odvedljiva, kar je izpolnjeno, če je f vsaj $(r + 1)$-krat zvezno odvedljiva na G. Odvode funkcije g bomo izrazili s parcialnimi odvodi funkcije f po pravilu za posredno odvajanje. Označimo $x = a + th$ in naj bodo a_j, h_j in x_j komponente vektorjev a, h in x. Potem je $f'(x) = [(D_1 f)(x), \ldots, (D_n f)(x)]$ in $x'(t) = h$. Po pravilu za posredno odvajanje je $g'(t) = f'(x)x'(t)$, torej

$$g'(t) = f'(x)h = \sum_{j=1}^{n} h_j (D_j f)(x) = ((\sum_{j=1}^{n} h_j D_j) f)(x). \tag{0.1.5}$$

Odvod funkcije g izračunamo torej tako, da uporabimo na funkciji f operator $\sum_{j=1}^{n} h_j D_j$. Drugi odvod $g''(t)$ izračunamo tako, da posredno odvajamo na t vse člene $h_j(D_j f)(x)$ v formuli (0.1.5). Ker je h_j konstanta, je treba odvajati le $(D_j f)(x) = (D_j f)(a + th)$. To funkcijo odvajamo enako kot funkcijo g; uporabimo lahko torej kar formulo (0.1.5), le da moramo funkcijo f nadomestiti z $D_j f$. Torej je $\frac{d}{dt}(D_j f)(x) = ((\sum_{k=1}^{n} h_k D_k)(D_j f))(x)$ in zato

$$g''(t) = ((\sum_{j,k=1}^{n} h_j h_k D_k D_j) f)(x) = ((\sum_{j=1}^{n} h_j D_j)^2 f)(x). \tag{0.1.6}$$

Z nadaljevanjem tega postopka lahko dobimo vse odvode

$$g^{(k)}(t) = ((\sum_{j=1}^{n} h_j D_j)^k f)(x) \quad (k = 0, 1, \ldots, r+1). \tag{0.1.7}$$

Ko to uporabimo v formuli (0.1.4), kamor vstavimo $t = 1$, ker je $g(1) = f(a+h)$, dobimo

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!}((\sum_{j=1}^{n} h_j D_j)^k) f)(a) + R_r(h), \tag{0.1.8}$$

kjer je

$$R_r(h) = \frac{1}{(r+1)!}((\sum_{j=1}^{n} h_j D_j)^{r+1} f)(a + \xi h), \quad (\xi \in (0,1)).$$

Tako smo dokazali:

Izrek 0.1.4. *Naj bo G odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$, $f : G \to \mathbb{R}$ pa funkcija, ki je vsaj $(r+1)$-krat zvezno odvedljiva za kak $r \in \mathbb{N}$. Potem velja Taylorjeva formula (0.1.8) za vsak $a \in G$ in vsak tak $h \in \mathbb{R}^n$, da je krogla $\overline{B(a, \|h\|)}$ vsebovana v G.*

Pri določanju ekstremov bomo potrebovali v Taylorjevi formuli člene do drugega reda. Zapisana nekoliko bolj eksplicitno do členov reda dva se formula (0.1.8) glasi:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{n} (D_j f)(a) h_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (D_i D_j f)(a + \xi h) h_i h_j \quad (\xi \in (0,1)). \tag{0.1.9}$$

Pri privzetku, da so zvezni, bomo druge odvode v točki $a + \xi h$ aproksimirali z odvodi v točki a (za majhne h). Matrika drugih odvodov

$$H_f(a) := [(D_i D_j f)(a)]$$

je simetrična, ker sta mešana odvoda $(D_i D_j f)(a)$ in $(D_j D_i f)(a)$ enaka. Imenujemo jo *Hessova matrika* funkcije f v točki a. Če vpeljemo funkcije

$$E_{i,j}(h) = (D_i D_j f)(a + \xi h) - (D_i D_j f)(a),$$

ki gredo proti 0, ko $h \to 0$, lahko formulo (0.1.9) napišemo v obliki

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}\langle H_f(a)h, h\rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} E_{i,j}(h) h_i h_j, \quad \lim_{h \to 0} E_{i,j}(h) = 0. \tag{0.1.10}$$

Naj omenimo, da lahko izraz

$$((\sum_{j=1}^{n} h_j D_j)^k f)(a),$$

ki vsebuje člene reda k v Taylorjevi formuli (0.1.8), razvijemo kot

$$\sum_{k_1+\ldots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!\cdots k_n!}(D_1^{k_1}\cdots D_n^{k_n}f)(a)h_1^{k_1}\cdots h_n^{k_n},$$

kjer teče vsota po vseh možnih zapisih števila k kot vsote n naravnih števil (0 štejemo za naravno število). Ker te formule tukaj ne bomo potrebovali, bomo pustili dokaz za nalogo.

0.1.3. Ekstremi.

Definicija 0.1.5. Funkcija $f : G \to \mathbb{R}$ ima v točki $a \in G$ *lokalni minimum*, če je $f(a) \leq f(x)$ za vse x v kaki krogli $B(a,r) \subseteq G$ $(r > 0)$. Podobno definiramo *lokalni maksimum*, skupno ime za lokalni minimum in lokalni maksimum pa je *lokalni ekstrem*.

Naj bo $G \subseteq \mathbb{R}^n$ odprta podmnožica. Če ima funkcija $f : G \to \mathbb{R}$ v točki $a = (a_1, \ldots, a_n)$ iz G lokalni ekstrem, potem ima za vsak j funkcija ene spremenljivke

$$x_j \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

v točki $x_j = a_j$ lokalni ekstrem. Zato mora biti $(D_j f)(a) = 0$. Torej velja:

Trditev 0.1.6. *Če ima odvedljiva funkcija $f : G \to \mathbb{R}$ lokalni ekstrem v točki $a \in G$ (kjer je G odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$), je $f'(a) = 0$.*

Točko a, v kateri je $f'(a) = 0$, imenujemo *stacionarna* ali *kritična točka* funkcije f. Kot pri funkcijah ene spremenljivke pa pogoj $f'(a) = 0$ še ni zadosten za nastop ekstrema v točki a. Do zadostnega pogoja lahko pridemo s pomočjo formule (0.1.10). Če je $f'(a) = 0$, lahko (0.1.10) napišemo kot

(0.1.11)

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}\langle H_f(a)h, h\rangle + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} E_{i,j}(h)h_i h_j, \quad \lim_{h\to 0} E_{i,j}(h) = 0.$$

Označimo $H = H_f(a)$, $t = \|h\|$ in naj bo $u \in \mathbb{R}^n$ tak enotski vektor, da je $h = tu$. Potem se (0.1.11) glasi

(0.1.12)

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}t^2\left[\langle Hu, u\rangle + \sum_{i,j=1}^{n} E_{i,j}(tu)u_i u_j\right], \quad \lim_{t\to 0} E_{i,j}(tu) = 0.$$

Funkcija $u \mapsto \langle Hu, u\rangle$ je zvezna (kvadratna forma). Denimo sedaj, da je Hessova matrika H pozitivno definitna. Potem doseže ta funkcija na enotski sferi minimum c, ki je seveda pozitiven. (Ni težko pokazati, da je c najmanjša lastna vrednost matrike H. V ta namen izrazimo kvadratno formo v ortonormirani bazi, sestavljeni iz lastnih vektorjev matrike H.) Za vse tako majhne $t = \|h\|$, da je $\sum_{i,j} |E_{i,j}(tu)| < \frac{c}{2}$, je tudi $|\sum_{i,j} E_{i,j}(tu)u_i u_j| < \frac{c}{2}$ (ker je $|u_i| \leq 1$ za vse i) in zato po (0.1.12)

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{c}{4}\|h\|^2.$$

Od tod je jasno, da je tedaj v točki a lokalni minimum funkcije f, saj je $f(a+h)-f(a) > 0$ za vse dovolj majhne $h \neq 0$. Podobno pokažemo, da je v a lokalni maksimum za f, če je H negativno definitna matrika (kar pomeni, da je $-H$) pozitivno definitna). Če pa ima matrika H tako pozitivne kot negativne lastne vrednosti, zavzame kvadratna forma $\langle Hu, u\rangle$ na enotski sferi $\|u\| = 1$ tako pozitivne kot negativne vrednosti. Da bi to videli, lahko vzamemo za u lastni vektor, ki pripada kaki pozitivni oziroma kaki negativni lastni vrednosti λ. Pri tej izbiri je prvi člen v oglatem oklepaju na desni strani formule (0.1.12) enak $\langle Hu, u\rangle = \lambda$, vsota na desni pa je dominirana z $\sum_{i,j} |E_{i,j}(tu)|$, kar je manjše od $|\lambda| > 0$ za vse dovolj majhne $t = \|h\|$. Od tod sledi, da ima desna (in zato tudi leva) stran enakosti (0.1.12) enak predznak kot λ, če je h dovolj majhen lastni vektor za H, ki pripada lastni vrednosti λ. Izraz $f(a+h) - f(a)$ zato nima konstantnega predznaka v nobeni (še tako majhni) odprti okolici točke a, zato tedaj v a funkcija f nima lokalnega ekstrema. Zberimo te zaključke v izrek.

Izrek 0.1.7. *Naj bo $f : G \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija na odprti množici $G \subseteq \mathbb{R}^n$ in naj bo $f'(a) = 0$. Če je simetrična matrika*

$$H_f(a) = [(D_i D_j f)(a)]$$

pozitivno definitna (torej, če so vse njene lastne vrednosti pozitivne), ima funkcija f v točki a lokalni minimum. Če je matrika $H_f(a)$ negativno definitna, ima f v točki a lokalni maksimum. Če pa ima matrika $H_f(a)$ tako pozitivne kot negativne lastne vrednosti, potem v točki a ni ekstrema funkcije f.

Definitnost simetrične matrike pomeni, da so vse njene lastne vrednosti neničelne in istega predznaka. Matrika A reda 2×2 ima obe lastni vrednosti λ_1 in λ_2 pozitivni natanko tedaj, ko je pozitivna njena determinanta ($\det A = \lambda_1\lambda_2$) in sled ($\tau(A) = \lambda_1 + \lambda_2$). Ker pri simetrični realni 2×2 matriki pozitivnost determinante $\det A = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2$ povzroči, da je $a_{1,1}a_{2,2} > 0$, sta tedaj števili $a_{1,1}$ in $a_{2,2}$ istega predznaka. Zato je v tem primeru sled $a_{1,1} + a_{2,2}$ pozitivna (negativna) natanko tedaj, ko je $a_{1,1} > 0$ ($a_{1,1} < 0$). Za funkcije dveh spremenljivk lahko zato zapišemo izrek 0.1.12 tudi takole:

POSLEDICA 0.1.8. *Naj bo G odprta podmnožica v $\mathbb{R}^2$, $f : G \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija in $a \in G$ taka točka, da je $f'(a) = 0$. Če je $\Delta_f(a) := (D_1^2 f)(a)(D_2^2 f)(a) - (D_1 D_2 f)(a)^2 > 0$, ima f v točki a ekstrem, in sicer lokalni minimum, kadar je $(D_1^2 f)(a) > 0$, ter lokalni maksimum, kadar je $(D_1^2 f)(a) < 0$. Če pa je $\Delta_f(a) < 0$, potem f v točki a nima ekstrema.*

Podoben kriterij bi lahko navedli tudi za funkcije n spremenljivk, le da bi morali opazovati vse glavne poddeterminante matrike $[(D_i D_j f)(a)]$ (glej 5. nalogo iz razdelka 4.4).

ZGLED 0.1.9. Določimo ekstreme funkcije $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$. Parcialni odvodi te funkcije so:

$$D_1 f = 2(x + yz), \quad D_2 f = 2(y + xz), \quad D_3 f = 2(z + xy).$$

Kritična točka (to je taka, kjer so vsi trije odvodi enaki 0) zadošča torej sistemu enačb

$$\begin{aligned} x &= -yz \\ y &= -xz \\ z &= -xy. \end{aligned}$$

Če zmnožimo vse tri enačbe, dobimo $xyz = -(xyz)^2$, torej je $xyz = 0$ ali pa $xyz = -1$. Pri prvi možnosti mora biti ena od neznank 0 in iz sistema enačb takoj sledi, da je tedaj $x = 0$, $y = 0$ in $z = 0$. Pri drugi možnosti pa je $yz = -\frac{1}{x}$ in iz prve enačbe sistema sledi $x = \frac{1}{x}$, torej $x = \pm 1$. Iz sistema nato brez težav izračunamo še ustrezne y in z. Tako dobimo v celoti naslednjih pet kritičnih točk: 0, $a := (1, 1, -1)$, $b := (1, -1, 1)$, $c := (-1, 1, 1)$ in $d := (-1, -1, -1)$.

Hessova matrika $H_f = [(D_i D_j f)(x, y, z)]$ se glasi:

$$H_f = 2 \begin{bmatrix} 1 & z & y \\ z & 1 & x \\ y & x & 1 \end{bmatrix}.$$

Ker je matrika $H_f(0) = 2I$ pozitivno definitna, je v točki 0 lokalni minimum funkcije f.

Matrika $H_f(a)$ pa je enaka

$$H_f(a) = 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom $\det(H_f(a) - \lambda I)$ te matrike se da izračunati brez težav in je enak $-(\lambda - 4)^2(\lambda + 2)$. Lastne vrednosti so torej $4, 4, -2$. Ker niso vse istega predznaka, obrnljiva matrika $H_f(a)$ ni definitna, zato v točki a

ni ekstrema funkcije f. Podobno bi lahko obravnavali preostale tri kritične točke b, c, d.

Naloge

1. Poišči vse stacionarne točke in lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2y + y^3 - y$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

2. Določi ekstreme funkcije $f(x, y, z) = (x - z)y + xz(y + 1)$.

3. Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija, definirana s predpisom

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Pokaži, da obstajajo vsi parcialni odvodi D_iD_jf in da je

$$(D_1D_2f)(0,0) \neq (D_2D_1f)(0,0).$$

4. Razvij v Taylorjevo vrsto okrog točke $(0, 0)$ naslednji funkciji iz $\mathbb{R}^2$ v $\mathbb{R}$:

(i) $\sin xy$;

(ii) $e^{-x^2-y^2}$.

5. Razvij v Taylorjevo vrsto do členov reda 2 okrog točke $(1, 1)$ funkcijo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = ye^{xy}$.

6. Razvij v Taylorjevo vrsto do členov reda 3 okrog točke $(0, 0, 0)$ funkcijo $f(x, y, z) = \sqrt{1 - \frac{x-z}{1+xy}}$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$.

7.* Pokaži, da je $(x_1+\ldots+x_n)^k = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$, kjer teče vsota po particijah števila k na vsoto $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ nenegativnih celih števil. (Dokaz je podoben dokazu običajne binomske formule.) Sklepaj od tod, da je za vsako dovoljkrat odvedljivo funkcijo f izraz $((h_1D_1 + \ldots + h_nD_n)^k f)(a)$ homogen polinom stopnje k v spremenljivkah $h_1, \ldots, h_n$. (Polinom $p(h_1, \ldots, h_n)$ imenujemo *homogen*, če imajo vsi njegovi monomi enako stopnjo.)

8.* Funkcijo $t \mapsto e^{tA}e^{tB}e^{-tA}e^{-tB}$ $(t \in \mathbb{R})$, kjer sta $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ poljubni matriki, razvij v Taylorjevo vrsto okrog točke 0 in izračunaj

$$\lim_{t\to 0} t^{-2}(e^{tA}e^{tB}e^{-tA}e^{-tB} - I).$$