Inverzije permutacij, permutacijski grafi in tekmovalnostni grafi

Luka Uranič
Mentorica: izr. prof. dr. Polona Oblak

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Fakulteta za matematiko in fiziko

Ljubljana, 2023

Uvod

V delu smo si pogledali različne kombinatorične interpretacije inverzij permutacij. Za permutacijo smo predstavili njen graf inverzij in karakterizirali permutacijske grafe. Nato smo si ogledali tekmovalnostne grafe, ki so posplošitev permutacijskih grafov. Pokazali smo, kako jih lahko uporabimo za gručenje tekmovalcev.

Permutacije in inverzije permutacij

Definicija permutacije:

Bijektivni preslikavi $\pi : [n] \to [n]$ rečemo permutacija.

Primer permutacije $\pi : [6] \to [6]$:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = (3, 1, 5, 2, 6, 4).$$

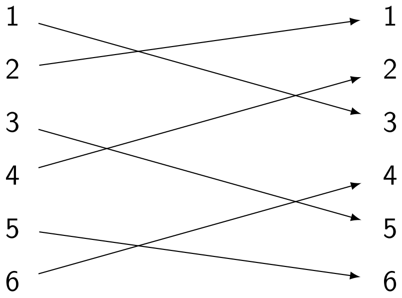
Definicija inverzije:

Inverzija permutacije $\sigma = (a_1, a_2, \ldots a_n) \in S_n$ je urejen par (a_i, a_j), kjer je $i < j$ in $a_i > a_j$.

Inverzije permutacije π so $\{(3, 1), (3, 2), (5, 2), (5, 4), (6, 4)\}$.

Število inverzij

Število inverzij permutacije nam meri stopnjo neurejenosti oziroma oddaljenost permutacije od identične permutacije in je enako številu presečišč v puščičnem diagramu permutacije.

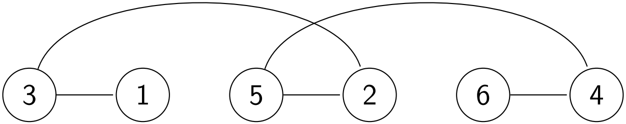


Identična permutacija $id = (1, 2, \ldots, n)$ nima inverzij.
Permutacija $(n, n-1, \ldots, 1)$ ima $\binom{n}{2}$ inverzij.

Permutacijski grafi

Definicija permutacijskega grafa:

Naj bo $\sigma \in S_n$. Graf inverzij permutacije σ, ki ga označimo z G_σ, je neusmerjen graf z $V(G_\sigma) = [n]$, kjer je $xy \in E(G_\sigma)$ natanko tedaj, ko je (x, y) ali (y, x) inverzija permutacije σ. Vsak graf izomorfen grafu G_σ za neko permutacijo σ imenujemo permutacijski graf.



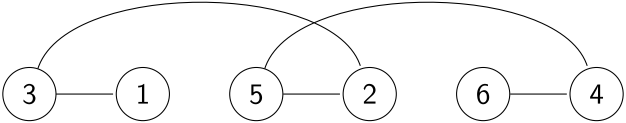
Kohezivno zaporedje grafa

Definicija kohezivnega zaporedja grafa:

Naj bo G neusmerjen graf na n vozliščih. Zaporedju vozlišč $I = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ rečemo kohezivno zaporedje grafa G, če sta za poljubne i, j, k, kjer je $1 \leq i < k < j \leq n$, izpolnjena naslednja pogoja:

(a) Če je $v_i v_k \in E(G)$, $v_k v_j \in E(G)$, potem je $v_i v_j \in E(G)$.

(b) Če je $v_i v_j \in E(G)$, potem je $v_i v_k \in E(G)$ ali $v_k v_j \in E(G)$.



Karakterizacija permutacijskih grafov

Izrek:

Naj bo $\sigma \in S_n$. Zaporedje vozlišč $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$ je kohezivno zaporedje permutacijskega grafa G_σ.

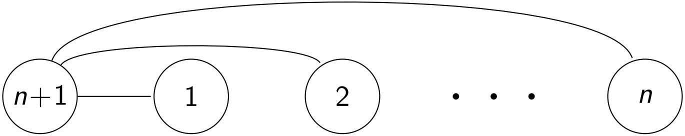
Izrek (karakterizacija permutacijskih grafov):

Graf G je permutacijski graf natanko tedaj, ko ima kohezivno zaporedje.

Zvezde in poti

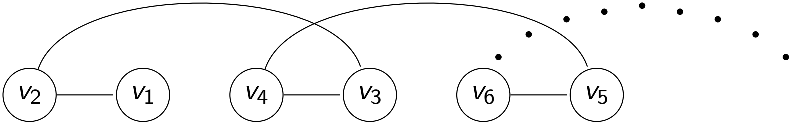
Trditev:

Zvezda $K_{1,n}$ je permutacijski graf.



Trditev:

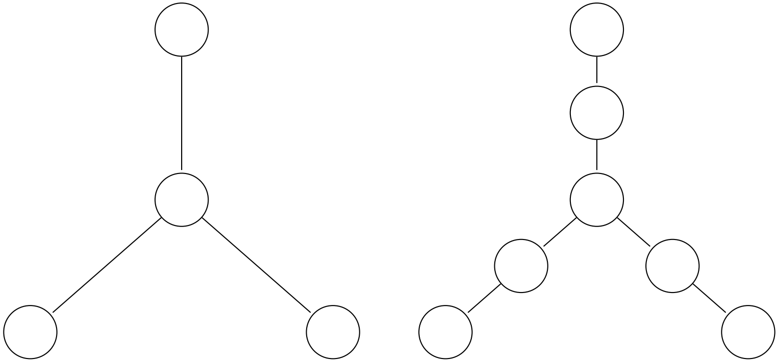
Pot P_n je permutacijski graf.



Drevo $K_{1,3}^*$

Trditev:

Drevo $K_{1,3}^*$ ni permutacijski graf.



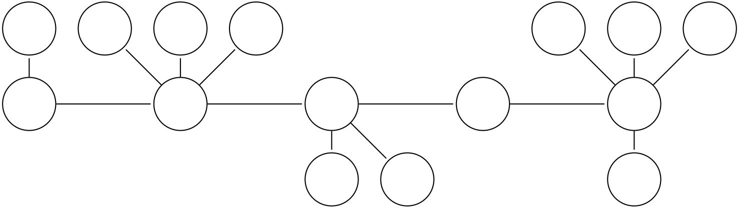
Gosenice

Definicija gosenice:

Drevo je gosenica, če po odstranitvi vseh listov dobimo pot.

Lema:

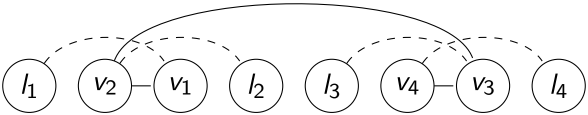
Drevo je gosenica natanko tedaj, ko ne vsebuje podgrafa $K_{1,3}^{*}$.



Drevesa, ki so permutacijski grafi

Izrek:

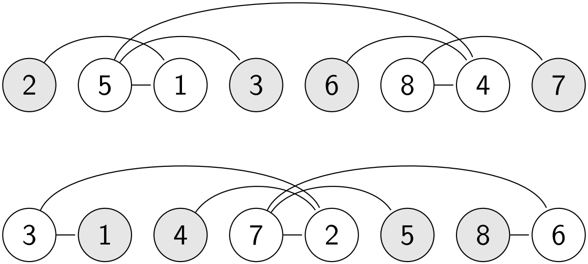
Drevo je permutacijski graf natanko tedaj, ko je gosenica.



Permutacije gosenic

Izrek:

Naj bo $n \geq 3$ in C gosenica na n vozliščih. Potem obstajata natanko dve permutaciji iz S_n, katerih permutacijski graf je izomorfen grafu gosenice C.



Rangiranja in tekmovalnost vozlišč

Definicija rangiranja:

Rangiranje $c = (i_1, \ldots, i_n)$ množice $[n]$ je permutacija iz S_n. Pisali bomo $i \prec_c j$, kadar se vozlišče i pojavi pred vozliščem j v vektorju rangiranja c.

Definicija tekmovanja para vozlišč:

Naj bo $R = \{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ končna množica rangiranj. Potem rečemo, da par vozlišč $(i, j) \in [n] \times [n]$ (neposredno) tekmuje, če obstajata takšni rangiranji $c_s, c_t \in R$, da je $i \prec_{c_s} j$ ampak $j \prec_{c_t} i$.

Naj bo $R = \{c_1, c_2, c_3\}$ množica rangiranj množice [6]:

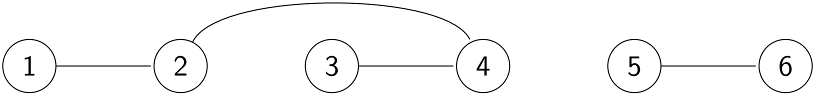
$$c_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6), \quad c_2 = (2, 1, 3, 4, 6, 5), \quad c_3 = (1, 4, 2, 3, 5, 6).$$

Pari vozlišč $(1, 2), (2, 4), (3, 4)$ in $(5, 6)$ tekmujejo.

Tekmovalnostni grafi

Definicija tekmovanja para vozlišč:

Naj bo $R = \{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ množica rangiranj množice $[n]$. Tekmovalnostni graf množice rangiranj R definiramo kot neusmerjen graf $G_c(R) = ([n], E)$, kjer je množica povezav E podana na naslednji način: med i in j je povezava, če (i, j) tekmujeta.



Delna kohezivnost

Definicija delne kohezivnosti:

Naj bo G neusmerjen graf na n vozliščih. Zaporedju vozlišč $l = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ rečemo delno kohezivno zaporedje grafa G, če za poljubne i, j, k, kjer je $1 \leq i < k < j \leq n$ velja naslednji pogoj:

(b) Če je $v_i v_j \in E(G)$, potem je $v_i v_k \in E(G)$ ali $v_k v_j \in E(G)$.

Graf G je delno koheziven, če ima delno kohezivno zaporedje.

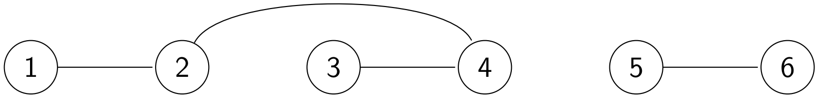
Izrek:

Vsak tekmovalnostni graf je delno koheziven.

Množice posrednih in neposrednih tekmovalcev

Definicija množice posrednih in neposrednih tekmovalcev:

Če vzamemo množico rangiranj $R = \{c_1, \ldots, c_r\}$ množice $[n]$, rečemo, da par vozlišč $(i, j) \in [n] \times [n]$ posredno ali neposredno tekmuje, če obstaja tak $k \in \mathbb{N}$ in vozlišča $i_1, \ldots, i_k \in [n]$, da (i, i_1) tekmujeta, (i_1, i_2) tekmujeta, $\ldots$, in (i_k, j) tekmujeta.
Množici vozlišč $D \subseteq [n]$ rečemo množica posrednih in neposrednih tekmovalcev, če vsaka dva elementa $i, j \in D$ posredno ali neposredno tekmujeta in D je maksimalna glede na to lastnost.



Algoritem za izračun množic posrednih in neposrednih tekmovalcev

$$D_{[p,q]} = \{x \in [n] \mid c_s^{-1}(x) \in [p,q] \ za\ nek\ c_s \in R\}$$

$$c_1 = (1,2,3,4,5,6)$$
$$c_2 = (2,1,3,4,6,5)$$
$$c_3 = (1,4,2,3,5,6)$$

$$D_{[1,1]} = \{1,2\} \subseteq D_1 \qquad max\{1,2,3\} = 3$$
$$D_{[1,3]} = \{1,2,3,4\} \subseteq D_1 \qquad max\{1,2,3,4\} = 4$$
$$D_{[1,4]} = \{1,2,3,4\} = D_1$$
$$D_{[5,5]} = \{5,6\} \subseteq D_2 \qquad max\{5,6\} = 6$$
$$D_{[5,6]} = \{5,6\} = D_2$$

Zaključek

Pogledali smo si, kaj so inverzije permutacij, njihove lastnosti in kako definirajo permutacijske in tekmovalnostne grafe. Permutacijske grafe smo karakterizirali s kohezivnim zaporedjem. Povedali smo, da so gosenice edina drevesa, ki so permutacijski grafi, in da obstajata natanko dve permutaciji iz S_n, ki imata permutacijski graf izomorfen neki gosenici na $n \geq 3$ vozliščih. Potem smo definirali, kaj so rangiranja, kdaj par vozlišč tekmuje ter kaj je množica posrednih in neposrednih tekmovalcev. Pogledali smo si, kaj so tekmovalnostni grafi in povedali, da so delno kohezivni. Na koncu smo predstavili algoritem za izračun množic posrednih in neposrednih tekmovalcev.