Univerza v Ljubljani
Fakulteta za računalništvo in informatiko
Fakulteta za matematiko in fiziko

Luka Uranič

Inverzije v permutacijah, permutacijski grafi in njihove lastnosti

diplomsko delo

interdisciplinarni univerzitetni
študijski program prve stopnje
računalništvo in matematika

Mentor: izr. prof. dr. Polona Oblak

Ljubljana, 2023

Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil LaTeX.

Kandidat: Luka Uranič
Naslov: Inverzije v permutacijah, permutacijski grafi in njihove lastnosti
Vrsta naloge: Diplomska naloga na univerzitetnem programu prve stopnje Računalništvo in matematika
Mentor: izr. prof. dr. Polona Oblak

Opis:
Besedilo teme diplomskega dela študent prepiše iz študijskega informacijskega sistema, kamor ga je vnesel mentor. V nekaj stavkih bo opisal, kaj pričakuje od kandidatovega diplomskega dela. Kaj so cilji, kakšne metode naj uporabi, morda bo zapisal tudi ključno literaturo.

Title: Naslov diplome v angleščini

Description:
opis diplome v angleščini

Na tem mestu zapišite, komu se zahvaljujete za izdelavo diplomske naloge. Pazite, da ne boste koga pozabili. Utegnil vam bo zameriti. Temu se da izogniti tako, da celotno zahvalo izpustite.

Kazalo

Seznam uporabljenih kratic

kratica	angleško	slovensko
CA	classification accuracy	klasifikacijska točnost
DBMS	database management system	sistem za upravljanje podatkovnih baz
SVM	support vector machine	metoda podpornih vektorjev

Povzetek

Naslov: Inverzije v permutacijah, permutacijski grafi in njihove lastnosti

Avtor: Luka Uranič

V vzorcu je predstavljen postopek priprave diplomskega dela z uporabo okolja LaTeX. Vaš povzetek mora sicer vsebovati približno 100 besed, ta tukaj je odločno prekratek. Dober povzetek vključuje: (1) kratek opis obravnavanega problema, (2) kratek opis vašega pristopa za reševanje tega problema in (3) (najbolj uspešen) rezultat ali prispevek magistrske naloge.

Ključne besede: permutacija, inverzija, permutacijski grafi.

Abstract

Title: Inversions in permutations

Author: Luka Uranič

This sample document presents an approach to typesetting your BSc thesis using LaTeX. A proper abstract should contain around 100 words which makes this one way too short.

Keywords: permutation, inversion, permutation graph.

Poglavje 1

Notacija, oznake in definicije

$[n] = \{1, 2, ..., n\}$.
S_n je množico vseh permutacij na množici $[n]$.
$id \in S_n$ je permutacija podana s predpisom $id(a) = a$ za $\forall a \in [n]$.
$V(G)$ je množica vozlišč grafa G.
$E(G)$ je množica povezav grafa G.
$\overline{G}$ je komplement grafa G (nepovezave grafa G so povezave grafa $\overline{G}$).
K_n je poln graf na n vozliščih.
$\overline{K_n}$ je nepovezan graf na n vozliščih.
P_n je pot na n vozliščih.
$K_{n,k}$ je dvodelen graf z n vozlišči v eni in k vozlišči v drugi množici.
$deg_D^+(x)$ je izhodna stopnja vozlišča x v usmerjenem grafu D.
$deg_D^-(x)$ je vhodna stopnja vozlišča x v usmerjenem grafu D.
Premer drevesa je najdaljša pot med dvema vozliščema v grafu.
Disjunktna unija grafov pomeni da vzamemo dva grafa in ju združimo v večji graf tako, da ju postavimo drug ob drugega.
Določiti smer povezave vu grafa G pomeni spremeniti vu v urejen par (v, u) ali (u, v).
Orientacija grafa G je usmerjen graf pridobljen tako da vsaki povezavi grafa G določimo smer.

Definicija 1.1 (definicija grupe) *Naj bo A množica. Operacija* $\cdot : A \times A \to A$ *vsakemu urejenemu paru elementov iz A priredi natančno določen element iz množice A. Par* $(A, \cdot)$ *je grupa če velja:*

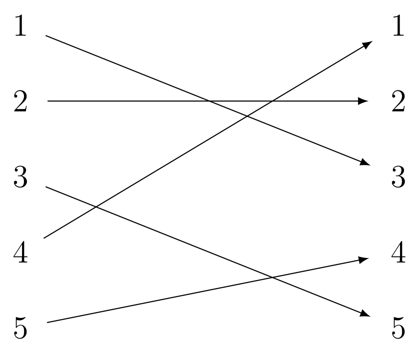
1. $\forall a, b, c \in A : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *(asociativnost)*
2. $\exists e \in A : \forall a \in A : a \cdot e = e \cdot a = a$ *(obstoj enote)*
3. $\forall a \in A : \exists a^{-1} \in A : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ *(obstoj inverza)*

Relacije: $R \subseteq A \times A, A \neq \emptyset$
R je refleksivna $\Leftrightarrow \forall x \in A : xRx$
R je irefleksivna $\Leftrightarrow \forall x \in A : \neg xRx \Leftrightarrow \overline{R}$ relfeksina
R je simetricna $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx \Leftrightarrow R = R^{-1}$
R je asimetricna $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : xRy \Rightarrow \neg yRx \Leftrightarrow R \cap R^{-1} = \emptyset$
če asimetricna $\Rightarrow$ irefleksina
R je antisimetricna $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : xRy \Rightarrow x = y \vee \neg yRx \Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I = \{(x, x) : x \in A\}$
R je tranzitivna $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
R je sovisna $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$ (x in y sta primerljiva)
R je strogosovisna $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : xRy \vee yRx$
Relacije urejenosti:
Delna urejenost: R je refleksivna, antisimetricna in tranzitivna [$\subseteq$]
Linearna urejenost: R je antisimetricna, strogosovisna, transitivna (refleksivna) [$\leq$]
Stroga delna urejenost: R je asimetricna in tranzitivna (irefleksivna) [$\subset$]
Stroga linearna urejenost: R je asimetricna, sovisna in transitivna [$<$]
linearna urejenost $\Rightarrow$ delna urejenost
stroga linearna urejenost $\Rightarrow$ stroga delna urejenost

Poglavje 2

Permutacije

Bijektivni preslikavi $\pi : [n] \to [n]$ rečemo permutacija (glej sliko 2.1).



Slika 2.1: Bijektivna preslikava $[5] \to [5]$.

Permutacijo lahko zapišemo na različne načine. Zapis permutacije π kot vodoravna tabela:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Ker gledamo permutacije na množici $[n]$, ki ima naravno urejenost, lahko zgornjo vrstico izpustimo:

$$\pi = (\pi(1), \pi(2), \cdots, \pi(n)) = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n)$$

Temu zapisu bomo rekli enovrstični zapis permutacije. Permutacijo lahko zapišemo tudi kot produkt disjunktnih ciklov:

$$\pi = (a_1, a_2, ..., a_i)(b_1, b_2, ..., b_j) \cdots (c_1, c_2, ..., c_k)$$

Ta zapis nam pove, da je

$$\pi(a_1) = a_2, \pi(a_2) = a_3, ..., \pi(a_{i-1}) = a_i, \pi(a_i) = a_1$$

$$\pi(b_1) = b_2, \pi(b_2) = b_3, ..., \pi(b_{j-1}) = b_j, \pi(b_j) = b_1$$

$$\dots$$

$$\pi(c_1) = c_2, \pi(c_2) = c_3, ..., \pi(c_{k-1}) = c_k, \pi(c_k) = c_1$$

Primer: Naj bo $\pi \in S_5$, $\pi(1) = 3$, $\pi(2) = 5$, $\pi(3) = 1$, $\pi(4) = 4$ in $\pi(5) = 2$. Zapis permutacije π kot vodoravna tabela:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi = (3, 5, 1, 4, 2) = (35142) = 35142$$

Če so vsi elementi permutacije manjši od 10 lahko med številkami vejice izpustimo, vendar ne smemo pozabiti, da ne gre za zapis z disjunktinimi cikli. Včasih izpustimo tudi oklepaje. Zapis permutacije π kot produkt disjunktnih ciklov:

$$\pi = (13)(25)(4) = (13)(25)$$

Ker vemo, da je $\pi \in S_5$ lahko cikel dolžine ena izpustimo.

V nadaljevanju bomo za zapis permutacije uporabljali enovrstični zapis, razen kjer bo navedeno drugače.

Trditev 2.1 *Naj bo $\circ$ kompozitum permutacij. $(S_n, \circ)$ je grupa.*

Dokaz.

1. Asociativnost: Naj bodo $\pi, \sigma, \tau \in S_n$. Za $\forall i \in [n]$

$$((\pi \circ \sigma) \circ \tau)(i) = (\pi \circ \sigma)(\tau(i)) = \pi(\sigma(\tau(i)))$$

$$(\pi \circ (\sigma \circ \tau))(i) = \pi((\sigma \circ \tau)(i)) = \pi(\sigma(\tau(i)))$$

2. Enota: Za $\forall \pi \in S_n$ in $\forall i \in [n]$ velja:

$$(\pi \circ id)(i) = \pi(id(i)) = \pi(i)$$

$$(id \circ \pi)(i) = id(\pi(i)) = \pi(i)$$

3. Inverz: Naj bo $\pi \in S_n$. Ker je π bijekcija, $\exists \pi^{-1} \in S_n$.

$$\pi \circ \pi^{-1} = \pi^{-1} \circ \pi = id$$

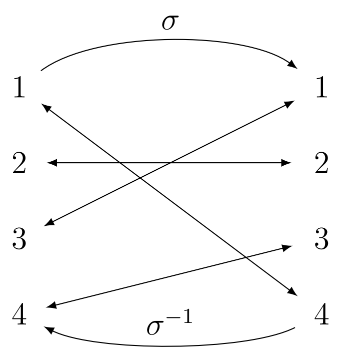
□

Grupi $(S_n, \circ)$ rečemo simetrična grupa. Permutacijska grupa je podgrupa simetrične grupe. Po Cayleyevem izreku je vsaka grupa izomorfna neki permutacijski grupi.

Poglavje 3

Inverzije

Inverzija permutacije $\sigma = (a_1, a_2, ...a_n) \in S_n$ je urejen par (a_i, a_j), kjer je $i < j$ $(\sigma^{-1}(a_i) < \sigma^{-1}(a_j))$ in $a_i > a_j$.



Slika 3.1: Permutacija $\sigma = (4, 2, 1, 3)$ in njen inverz $\sigma^{-1} = (3, 2, 4, 1)$.

Število inverzij permutacije σ je enako številu inverzij permutacije σ^{-1}. Še več, če ima σ inverzije $(a_{i_1}, a_{j_1}), ..., (a_{i_k}, a_{j_k})$, potem ima σ^{-1} inverzije $(j_1, i_1), ..., (j_k, i_k)$.

Primer: Naj bo $\sigma = (4, 2, 1, 3)$ kot na sliki 3.1, inverzije permutacije σ so $(4, 2), (4, 1), (4, 3), (2, 1)$. Pozicije inverzij permutacije σ so sledeči pari: $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)$. Inverz permutacije σ je $\sigma^{-1} = (3, 2, 4, 1)$, inverzije permutacije σ^{-1} so $(3, 2), (3, 1), (2, 1), (4, 1)$. Opazimo, da so to ravno obrnjeni pari pozicij inverzij permutacije σ.

Število inverzije je mera, ki nam pove kako daleč je permutacija od urejenega zaporedja $(1, ..., n)$. Urejena permutacija nima inverzij. Največ inverzij ima permutacija $(n, n-1, ..., 1)$. V tem primeru je vsak par različnih števil $(i, j) \in [n] \times [n], i > j$ v inverziji. Izborov dveh elementov izmed n pa je ravno $\binom{n}{2}$.

Število inverzij je število presečišč v puščičnem diagramu premutacije.

Standardne primerjalne algoritme razvrščanja lahko prilagodimo, tako da izračunamo število inverzij v času $O(n \cdot log(n))$. Primer: Merge sort.

Urediti permutacijo (jo preoblikovali v identično permutacijo) s k inverzijami, je vedno mogoče in zahteva zaporedje k transpozicij sosednjih elementov. Na vsakem koraku izberemo transpozicijo i in $i+1$, če je element na poziciji $i+1$ manjši od elementa na poziciji i. Na ta način zmanjšamo število inverzij za 1. To ponavljamo dokler ne pridemo do identične permutacije.

Primer postopka ureditve permutacije $\sigma = (4, 2, 1, 3)$: σ ima 4 inverzije. (ij) je ciklični zapis transpozicije elementov i in j:

$$(4, 2, 1, 3) \overset{(42)}{\to} (2, 4, 1, 3) \overset{(41)}{\to} (2, 1, 4, 3) \overset{(43)}{\to} (2, 1, 3, 4) \overset{(21)}{\to} (1, 2, 3, 4)$$

Število permutacij množice [n] s k inverzijami je koeficijent pred x^k v razvoju produkta:

$$\prod_{m=1}^{n} \sum_{i=0}^{m-1} x^i = 1(1+x)(1+x+x^2)\cdots(1+x+\cdots+x^{n-1})$$

Permutacije množice [n] lahko predstavimo tudi, kot celo število N, ki je $0 \leq N \leq n!$. Pretvorbo naredimo preko vmesne oblike zaporedja n števil $d_n, d_{n-1}, ..., d_2, d_1$, kjer je d_i nenegativno celo število manjše od i (pri tem lahko izpustimo d_1, saj je vedno $d_1 = 0$). Prvi korak je, da N predstavimo v faktorskem številskem sistemu (angl. factorial number system). Ta sistem ima za števila manjša od $n!$, baze zaporednih števk $(n-1)!, (n-2)!, ..., 2!, 1!$. Drugi korak pa je interpretacija tega zaporedja kot vektor inverzij ali Lehmerjeva koda.

Število zapisano v faktorskem številskem sistemu pretvorimo v desetiški številski sistem tako, da seštejemo produkt vsah števk s pripadajočo bazo.

Pretvorbo iz desetiškega v faktorski številski sistem pa naredimo tako, da število zaporedoma delimo z števili $1, 2, 3...$ in si zapisujemo ostanke pri deljenju, dokler ne dobimo 0 kot rezultat deljenja. Zapis števila so ostanki pri deljenju od zadnjega deljenja proti prvemu. Primer pretvorbe:

$$341010_! = 3 \cdot 5! + 4 \cdot 4! + 1 \cdot 3! + 0 \cdot 2! + 1 \cdot 1! + 0 \cdot 0! = 463_{10}$$
$$463/1 = 463,\ ostanek = 0$$
$$463/2 = 231,\ ostanek = 1$$
$$231/3 = 77,\ ostanek = 0$$
$$77/4 = 19,\ ostanek = 1$$
$$19/5 = 3,\ ostanek = 4$$
$$3/6 = 0,\ ostanek = 3$$

V Lehmerjevi kodi permutacije σ, število d_n predstavlja $\sigma_1 - 1 = \sigma(1) - 1$, to je število elementov manjših od σ_1, ki so v inverziji z σ_1, število d_{n-1} predstavlja število elementov, ki so manjši od σ_2 in so v inverziji z σ_2,... Se pravi d_{n-i+1} predstavlja število elementov, ki so manjši od σ_i in so v inverziji z σ_i.

Vektor inverzij permutacije σ je podobn zapis. d_{n-j+1} nam pove koliko je inverzij oblike (i, j), kjer je j manjša vrednost para števil v inverziji.

Obe kodiranji lahko prikažemo z Rothejevim diagramom, kjer pike predstavljajo elemente permutacije, križi pa inverzije permutacije. Lehmerjeva koda nam šteje število križev v vsaki vrstici, vektor inverzij pa šteje število križev v vsakem stolpcu. Poleg tega velja tudi, da je vektor inverzij ravno Lehmerjeva koda inverzne permutacije, in obratno. Primer Rothejevega diagrama je prikazan v tabeli 3.1.

Da bi pretvorili Lehmerjevo kodo $d_n, d_{n-1}, ..., d_1$ v permutacijo, najprej uredimo števila $1, 2, ..., n$ v vrsto. σ_1 je enak elementu v vrsti, ki je za d_n elementi. Nato ta element izbrišemo iz vrste. σ_2 je enak elemntu v spremenjeni vrsti, ki je za d_{n-1} elemnti. Nato ta element izbrišemo iz vrste in ponovimo postopek za $\sigma_3, ..., \sigma_n$.

$i \setminus \sigma_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Lehmerjeva koda
1	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\cdot$				$d_9 = 5$
2	$\times$	$\times$	$\cdot$							$d_8 = 2$
3	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$		$\times$	$\cdot$		$d_7 = 5$
4	$\cdot$									$d_6 = 0$
5		$\times$		$\cdot$						$d_5 = 1$
6		$\times$			$\times$		$\times$		$\cdot$	$d_4 = 3$
7		$\times$			$\times$		$\cdot$			$d_3 = 2$
8		$\cdot$								$d_2 = 0$
9					$\cdot$					$d_1 = 0$
Vektor inverzij	3	6	1	2	4	0	2	0	0	

Tabela 3.1: Rothejev diagram za permutacijo $\sigma = (6, 3, 8, 1, 4, 9, 7, 2, 5)$

Da bi pretvorili tabelo inverzij $d_n, d_{n-1}, ..., d_1$ v permutacijo. Imejmo najprej prazno vrsto. Najprej vzemimo n in ga vstavimo v vrsto za d_1 elementi (vedno 0). Nato vzamimo $n-1$ in ga vstavimo v vrsto za d_2 elementi, ..., vzamemo 1 in ga vstavimo v vrsto za d_n elementi.

Vsota števk v faktorskem zapisu (Lehmerjeva koda ali vektor inverzij) nam pove število inverzij permutacije. Parnost vsote pa nam pove znak permutacije.

σ	Lehmerjeva koda	Vektor inverzij	Število inverzij
1234	0000	0000	0
1243	0010	0010	1
1324	0100	0100	1
1342	0110	0200	2
1423	0200	0110	2
1432	0210	0210	3
2134	1000	1000	1
2143	1010	1010	2
2314	1100	2000	2
2341	1110	3000	3
2413	1200	2010	3
2431	1210	3010	4
3124	2000	1100	2
3142	2010	1200	3
3214	2100	2100	3
3241	2110	3100	4
3412	2200	2200	4
3421	2210	3200	5
4123	3000	1110	3
4132	3010	1210	4
4213	3100	2110	4
4231	3110	3110	5
4312	3200	2210	5
4321	3210	3210	6

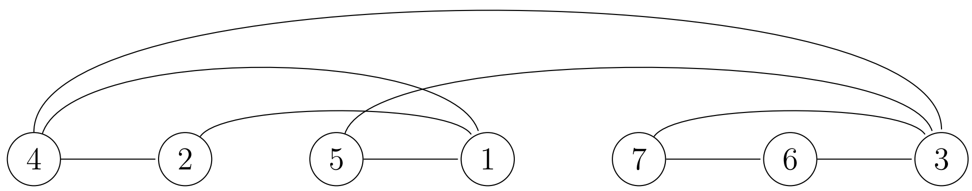
Tabela 3.2: Permutacije iz S_4 z zapisom Lehmerjeve kode in tebele inverzij

Poglavje 4

Permutacijski grafi

Definicija 4.1 *Naj bo $\sigma \in S_n$. Graf inverzij permutacije σ, ki ga označimo z G_σ, je neusmerjen graf z $V(G_\sigma) = [n]$, kjer je $xy \in E(G_\sigma)$ natanko tedaj, ko je (x, y) ali (y, x) inverzija permutacije σ. Vsak graf izomorfen grafu G_σ za neko permutacijo σ imenujemo permutacijski graf.*

Primer: $\sigma = (4, 2, 5, 1, 7, 6, 3) \in S_7$, $V(G_\sigma) = [7]$. Množica inverzij σ je $I = \{(4, 2), (4, 1), (4, 3), (2, 1), (5, 1), (5, 3), (7, 6), (7, 3), (6, 3)\}$ zato je $E(G_\sigma) = \{\{4, 2\}, \{4, 1\}, \{4, 3\}, \{2, 1\}, \{5, 1\}, \{5, 3\}, \{7, 6\}, \{7, 3\}, \{6, 3\}\}$. Graf G_σ je prikazan na sliki 4.1.



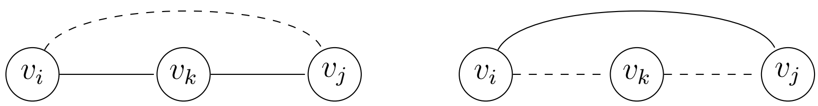
Slika 4.1: Primer grafa inverzij.

Če je graf permutacijski graf, potem lahko veliko problem, ki so NP-polni na poljubnih grafih rešimo v polinomskem času. Na primer: iskanje naječjega podgrafa, ki je poln graf, je ekvivalento iskanju največjega padajočega zaporedja v permutaciji, ki definira permutacijski graf.

Definicija 4.2 (Kohezivno zaporedje grafa) *Naj bo G neusmerjen graf na n vozliščih. Zaporedju vozlišč $l = (v_1, v_2, ..., v_n)$ rečemo kohezivno vozliščno zaporedje grafa G (ali enostavneje kohezivno zaporedje grafa G), če sta izpolnjena nasledna pogoja (glej sliko 4.2):*

(a) če $i < k < j$ in v_iv_k, $v_kv_j \in E(G) \Rightarrow v_iv_j \in E(G)$

(b) če $i < k < j$ in $v_iv_j \in E(G) \Rightarrow v_iv_k \in E(G)$ ali $v_kv_j \in E(G)$



Slika 4.2: Pogoja za kohezivno zaporedje grafa G.

Lema 4.1 *Naj bo G graf. Zaporedje vozlišč l je kohezivno zaporedje grafa G natanko tedaj ko je l kohezivno zaporedje grafa $\overline{G}$*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Naj bo $l = (v_1, v_2, ..., v_n)$ kohezivno zaporedje grafa G. Trdimo, da je l kohezivno zaporedje grafa $\overline{G}$.

(a) Naj bosta $v_iv_k, v_kv_j \in E(\overline{G})$ tako da $i < k < j$. Potem, po definiciji komplementa $v_iv_k, v_kv_j \notin E(G)$. Če pogoj (b) iz definicije 4.2 negiramo ($i < k < j$ in $v_iv_k, v_kv_j \notin E(G) \Rightarrow v_iv_j \notin E(G)$) sledi, da $v_iv_j \notin E(G)$. Kar pomeni $v_iv_j \in E(\overline{G})$

(b) Naj bo $v_iv_j \in E(\overline{G})$ tako da $i < j$ in k tako naravno število, da je $i < k < j$. Potem $v_iv_j \notin E(G)$. Če pogoj (a) iz definicije 4.2 negiramo vidimo, da $v_iv_k \notin E(G)$ ali $v_kv_j \notin E(G)$ (vsaj ena od povezav v_iv_k, v_kv_j ni povezava grafa G). Zato sledi, da je $v_iv_k \in E(\overline{G})$ ali $v_kv_j \in E(\overline{G})$.

($\Leftarrow$) Obratna smer dokaza sledi iz dejstva, da je $\overline{\overline{G}} = G$. $\square$

Izrek 4.1 *Naj bo $\sigma \in S_n$. $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n))$ je kohezivno zaporedje permutacijskega grafa G_σ*

Dokaz. Naj bo $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(n)) \in S_n$. Trdimo, da je σ kohezivno zaporedje grafa G_σ.

(a) Če je $i < k < j$ in $\sigma(i)\sigma(k), \sigma(k)\sigma(j) \in E(G_\sigma)$, potem sta $(\sigma(i), \sigma(k))$ in $(\sigma(k), \sigma(j))$ inverziji permutacije σ, kar pomeni $\sigma(i) > \sigma(k) > \sigma(j)$. Zato je tudi $(\sigma(i), \sigma(j))$ inverzija permutacije σ in $\sigma(i)\sigma(j) \in E(G_\sigma)$.

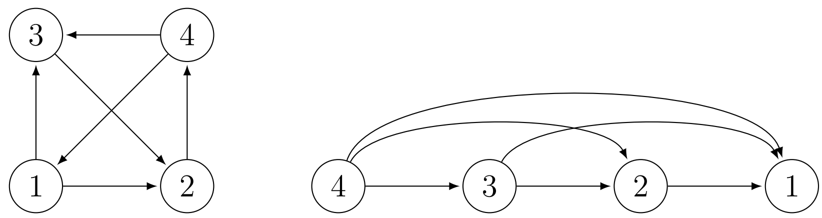
(b) Naj bo $\sigma(i)\sigma(j) \in E(G_\sigma)$ in k tak da $i < k < j$. Potem je $(\sigma(i), \sigma(j))$ inverzija permutacije σ in $\sigma(i) > \sigma(j)$. Če je $\sigma(i) > \sigma(k)$ je $(\sigma(i), \sigma(k))$ inverzija permutacije σ in $\sigma(i)\sigma(k) \in E(G_\sigma)$. Če je $\sigma(k) > \sigma(j)$ je $(\sigma(k), \sigma(j))$ inverzija permutacije σ in $\sigma(k)\sigma(j) \in E(G_\sigma)$. Tako je vsaj ena od povezav $\sigma(i)\sigma(k)$ in $\sigma(k)\sigma(j)$ povezava grafa G_σ.

□

Zaporedje vozlišč $(v_1, v_2, ..., v_n)$ je kohezivno zaporedje grafa G natanko tedaj, ko je zaporedje vozlišč $(v_n, v_{n-1}, ..., v_1)$ kohezivno zaporedje grafa G.

Za usmerjen graf D rečemo, da je tranzitiven, če je (x, z) usmerjena povezava grafa D kadar sta (x, y) in (y, z) usmerjeni povezavi grafa D.

Polnemu orientiranemu grafu rečemo turnir. Rezultat vozlišča x v turnirju je $s(x) = deg^+(x)$. Rezultatsko zaporedje turnirja je zaporedje rezultatov vozlišč turnirja v nepadajočem vrstnem redu.



Slika 4.3: Levo je turnir, desno je tranzitiven turnir na 4 vozliščih

Obstaja samo en tranzitiven turnir na n vozliščih (do izomorfizma natančno), ki je izomorfen grafu permutacije $\sigma = (n, n-1, ..., 1)$ z usmerjenimi povezavami $x \to y$, če je (x, y) inverzija. Opazimo tudi, da v tranzitivnem turnirju ni usmerjenih ciklov.

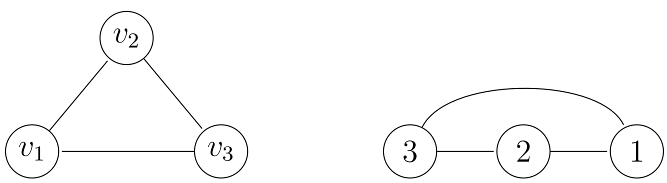
Izrek 4.2 *Naj bo T turnir na n vozliščih. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

1. *T je tranzitiven*
2. *Za $\forall x, y \in V(T)$ velja, če je (x, y) usmerjena povezava v T potem je $s(x) > s(y)$*
3. *Za $\forall x, y \in V(T)$ velja, če je $s(x) > s(y)$ potem je (x, y) usmerjena povezava v T*
4. *Rezultatsko zaporedje turnirja T je $(0, 1, 2, ..., n-1)$*

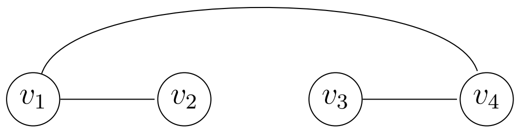
Dokaz. Tranzitiven turnir T na n vozliščih je izomorfen grafu permutacije $\sigma = (n, n-1, ..., 1)$ z usmerjenimi povezavami $x \to y$, če je (x, y) inverzija. Če uredimo vozlišča od leve proti desni tako kot so v permutaciji σ vidimo, da ima vsako vozlišče povezave do vseh vozlišč desno on njega (glej sliko 4.3). Iz tega sledijo vse lastnosti iz izreka. □

Izrek 4.3 *Graf G je permutacijski graf natanko tedaj ko ima kohezivno zaporedje.*

Dokaz. (⇒) Vsak permutacijski graf G je izomorfen nekemu grafu G_σ za neko permutacijo σ. Po izreku 4.1, je $\sigma = (\sigma(1), ..., \sigma(n)$ kohezivno zaporedje grafa G_σ. Naj bo f izomorfizem, ki graf G slika v graf G_σ. Potem je $g = f^{-1}$ izomorfizem, ki graf G_σ slika v graf G. Sledi, da je $\pi = (g(\sigma(1)), ..., g(\sigma(n)))$ kohezivno zaporedje grafa G, saj je σ kohezivno zaporedje grafa G_σ (glej sliko 4.4).

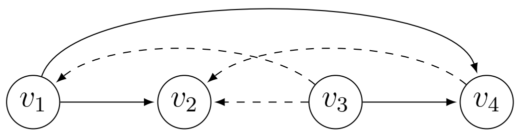


Slika 4.4: Izomorfna grafa G in G_σ



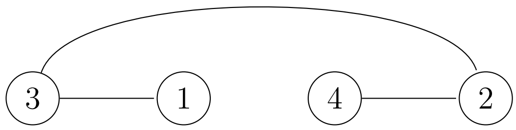
Slika 4.5: Graf G s koezivnim zaporedjem (v_1, v_2, v_3, v_4).

($\Leftarrow$) Naj bo G graf s kohezivnim zaporedjem $\pi = (v_1, v_2, ..., v_n)$ (slika 4.5). Orientirajmo graf G tako, da vse povezave usmerimo od vozlišča z manjšim indeksom proti vozlišču z večjim indeksom. Če je $i < j$ in $v_i v_j \in E(G)$, tako dobimo (v_i, v_j). Označimo usmerjen graf, ki ga na ta način dobimo z D. Spomnimo se, da je zaradi pogoja (a) iz 4.2 graf D tranzitiven. Orientirajmo še komplement $\overline{G}$ grafa G. Povezave $v_i v_j \in E(\overline{G})$, kjer je $i < j$ usmerimo od večjega indeksa k manjšemu in tako dobimo (v_j, v_i). Označimo dobljeni graf z $\overline{D}$. Zaradi leme 4.1 je π kohezivno zaporedje grafa $\overline{G}$. Zato je tudi usmerjen graf $\overline{D}$ tranzitiven. Unija grafov $T = D \cup \overline{D}$ je turnir (orientacija polnega grafa $G \cup \overline{G}$). Glej sliko 4.6. Radi bi pokazali, da je T tranzitiven



Slika 4.6: Tranzitiven turnir T.

turnir. Naj bosta (x, y) in (y, z) usmerjeni povezavi v grafu T. Če bi obe pripadali enemu od D ali $\overline{D}$ bi sledilo, da je (x, z) usmerjena povezava v T, saj sta D in $\overline{D}$ tranzitivna. Zato brez škode za splošnost privzamimo, da $(x, y) \in E(D)$ in $(y, z) \in E(\overline{D})$. Če je $(x, z) \in E(D)$ smo končali, saj je potem $(x, z) \in E(T)$. Zato privzamimo da $(x, z) \notin E(D)$. Poglejmo ali je lahko $(z, x) \in E(D)$. Zaradi tranzitivnosti grafa D bi to pomenilo da je tudi $(z, y) \in E(D)$, kar je v protislovju s tem da je $(y, z) \in E(\overline{D})$. Potem je $(z, x) \in E(\overline{D})$ ali $(x, z) \in E(\overline{D})$. Če je $(z, x) \in E(\overline{D})$, potem zaradi tranzitivnosti $\overline{D}$ in $(y, z), (z, x) \in E(\overline{D})$ sledi, da je $(y, x) \in E(\overline{D})$. To je v protislovju z $(x, y) \in E(D)$. Se pravi nam ostane $(x, z) \in E(\overline{D})$. Sledi, da je $(x, z) \in E(T)$ in T je tranzitiven turnir. Po izreku 4.2, je rezultatsko zaporedje tranzitivnega turnirja T enako $(0, 1, 2, ..., n-1)$. Naj bo $\sigma(i) =$



Slika 4.7: Permutacijski graf G_σ, $\sigma = (3, 1, 4, 2)$.

$1 + s(v_i)$, kjer je $s(v_i)$ rezultat vozlišča v_i grafa T (glej sliki 4.6 in 4.7). Radi bi pokazali, da je $f : v_i \to 1 + s(v_i) = \sigma(i)$ izomorfizem, ki slika graf G v graf G_σ. Preslikava f je bijektivna, saj imajo vozlišča različne rezultate. Pokazati moramo še, da f ohranja sosenosti vozlišč. Naj bo $v_i v_j \in E(G)$, kjer je $i < j$. Potem je $(v_i, v_j) \in E(D)$. Ker je T tranzitiven turnir, je $s(v_i) > s(v_j)$ (izrek 4.2). Sledi, da je $\sigma(v_i) = 1 + s(v_i) > 1 + s(v_j) = \sigma(v_j)$. Zato je $(\sigma(i), \sigma(j))$ inverzija v σ in $f(v_i)f(v_j) \in E(G_\sigma)$. Obratno, naj bo $xy \in E(G_\sigma)$. Potem je (x, y) ali (y, x) inverzija v σ. Privzemimo, da je (x, y) inverzija v σ. Potem je $x = \sigma(i) = 1 + s(v_i)$ in $y = \sigma(j) = 1 + s(v_j)$, $i < j$. Ker je (x, y) inverzija je $x > y$. Potem je tudi $s(v_i) > s(v_j)$ in $(v_i, v_j) \in E(T)$ (izrek 4.2). Ker je $i < j$ je $(v_i, v_j) \in E(D)$ in posledično $v_i v_j \in E(G)$. □

Izrek 4.4 *Naj bo G graf. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

(a) G je permutacijski graf

(b) $\overline{G}$ je permutaciski graf

(c) Vsak induciran podgraf grafa G je permutacijski graf

(d) Vsaka povezana komponenta grafa G je permutacijski graf

Dokaz. Ekvivalentnost trditve (a) in (b) sledi iz leme 4.1 in izreka 4.3. Naj bo $(v_1, v_2, ..., v_n)$ kohezivno zaporedje grafa G. Induciran podgraf z vozlišči $\{v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_k}\}$, kjer $i_1 < i_2 < ... < i_k$, ima kohezivno zaporedje

$(v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_k})$ (izpolnjeni sta (a) in (b) iz definicije 4.2). Torej induciran podgraf je permutacijski in iz (a) sledi (c). Iz (c) sledi (d), saj je vsaka povezana komponenta induciran podgraf. Pokazati moramo še da iz (d) sledi (a). Naj bo G graf, ki ima povezane komponente $G_1, G_2, ..., G_k$. Povezana komponenta G_i naj ima n_i vozlišč. Ker je vsaka povezana komponenta grafa G permutacijski graf ima vsaka povezana komponenta tudi kohezivno zaporedje. Naj bo $l_i = (v_1^i, v_2^i, ..., v_{n_i}^i)$ kohezivno zaporedje povezane komponente G_i. Potem je $l = (l_1, l_2, ..., l_k) = (v_1^1, v_2^1, ..., v_{n_1}^1, v_1^2, v_2^2, ..., v_{n_2}^2, ..., v_1^k, v_2^k, ..., v_{n_k}^k)$ kohezivno zaporedje grafa G in graf G permutacijski. $\square$

Grafi poti P_n in zvezd $K_{1,n}$ so permutacijski grafi saj imajo kohezivno zaporedje (sliki 4.8 in 4.9). Kohezivni zaporedji za pot P_{13} sta permutaciji:

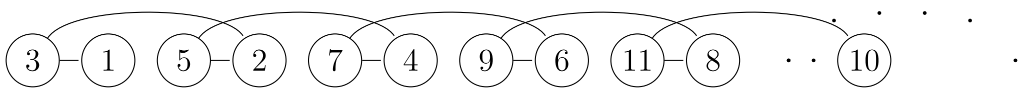
$$\sigma_1 = (3, 1, 5, 2, 7, 4, 9, 6, 11, 8, 13, 10, 12)$$

in

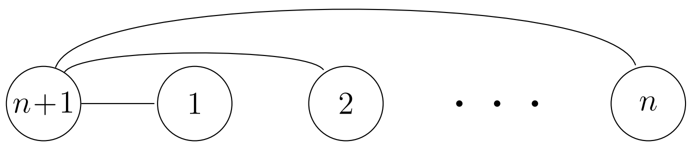
$$\sigma_2 = (2, 4, 1, 6, 3, 8, 5, 10, 7, 12, 9, 13, 11).$$

Kohezivno zaporedje za zvezdo $K_{1,n}$ pa je permutacija:

$$\pi = (n + 1, 1, 2, ..., n).$$



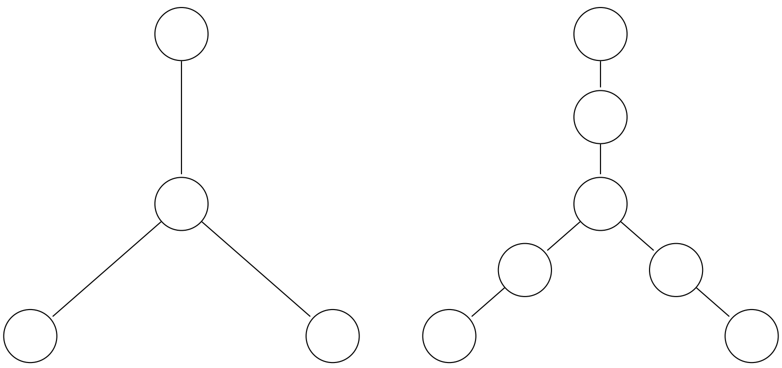
Slika 4.8: Primer kohezivnega zaporedja za pot P_n.



Slika 4.9: Primer kohezivnega zaporedja za zvezdo $K_{1,n}$.

Vidimo, da je pogoj (a) iz definicije kohezivnega zaporedja 4.2 za poti P_n na prazno izpolnjen, saj ni dveh povezav $v_i v_k$ in $v_k v_j$, kjer so $i < k < j$. Pogoj (b) pa je izpolnjen, saj je vedno ko je $v_i v_j$ povezava in k tak, da $i < k < j$ v grafu ena od povezav $v_i v_k$ ali $v_k v_j$. Podobno je pogoj (a) izpolnjen na prazno za zvezde. Pogoj (b) pa je izpolnjen, saj so vse povezave v grafu oblike $v_{n+1} v_k$ za $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Zato katerokoli povezavo vzamemo bodo vsa vozlišča med krajiščema izbrane povezave $v_{n+1} v_k$ povezana z vozliščem v_{n+1}.

Poti in zvezde so drevesa. Ampak niso vsa drevesa permutacijski grafi. Drevo $K^*_{1,3}$, pridobljeno s subdivizijo vseh povezav zvezde $K_{1,3}$, ni permutacijski graf (slika 4.10).

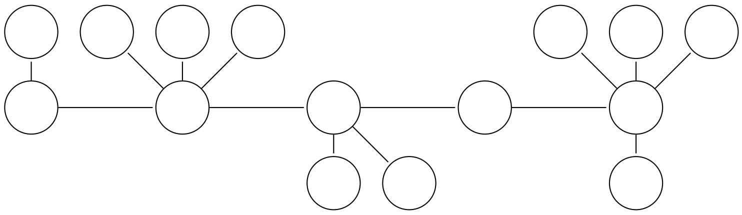


Slika 4.10: Graf $K_{1,3}$ in $K^*_{1,3}$.

Definicija 4.3 *Gosenica je drevo, ki po odstranitvi vseh listov postane pot (slika 4.11).*

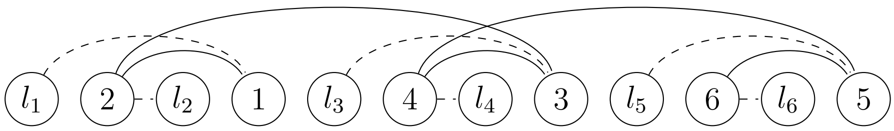
Lema 4.2 *Drevo je gosenica natanko tedaj ko ne vsebuje $K^*_{1,3}$ kot podgraf.*

Dokaz. Če je drevo gosenica, potem po odstranitvi vseh listov dobimo pot. Če drevesu $K^*_{1,3}$ odstranimo vse liste ne dobimo poti. Torej tudi če drevo vsebuje $K^*_{1,3}$ kot podgraf, nam po odstranitvi listov ostane graf, ki ni pot. Torej gosenica ne vsebuje podgrafa $K^*_{1,3}$. Če drevo ne vsebuje $K^*_{1,3}$ kot



Slika 4.11: Graf gosenice z 10 listi.

podgraf, potem ima vsako vozlišče največ dva soseda, ki nista lista. Prav tako graf ne vsebuje ciklov, saj je drevo. Po odstranitvi listov drevesa vedno dobimo povezan graf, zato po odstranitvi listov tako dobimo pot. Torej je drevo, ki ne vsebuje podgrafa $K^*_{1,3}$, gosenica. □

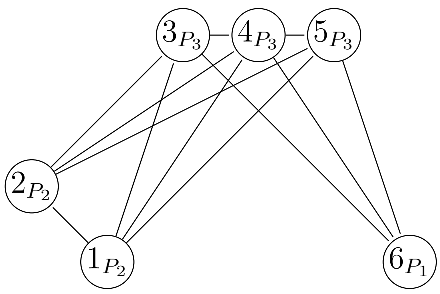


Slika 4.12: Primer kohezivnega zaporedja gosenice.

Izrek 4.5 *Drevo je permutacijski graf natanko tedaj ko je gosenica.*

Dokaz. (⇒) Če drevo ni gosenica, potem vsebuje $K^*_{1,3}$ kot podgraf. Drevo, ki vsebuje $K^*_{1,3}$ ni permutacijski graf, saj $K^*_{1,3}$ ni permutacijski graf. (⇐) Potrebno je še pokazati, da je gosenica permutacijski graf. To bomo pokazali tako, da bomo gosenici našli kohezivno zaporedje. Naj bo C gosenica in naj bo P_n pot, ki jo pridobimo iz C tako, da odstranimo liste. Če je $n = 1$, potem je C zvezda $K_{1,k}$ za nek $k \geq 0$ ali pa trivialen graf K_1. Ker so zvezde in trivialen graf permutacijski grafi, predpostavimo da je $n \geq 2$. Zgradimo kohezivno zaporedje poti P_n kot na primeru od prej. Vse liste lihega vozlišča i na poti vstavimo levo od vozlišče $i+1$ na poti P_n. Vse liste sodega vozlišča i na poti vstavimo med vozlišči i in $i-1$ na poti P_n. Rezultat je kohezivno zaporedje (slika 4.12). Zato je gosenica C res permutacijski graf. □

Definicija 4.4 *Naj bo G graf z množico vozlišč $V(G) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ in naj bodo $H_1, H_2, ..., H_n$ poljubni grafi. Kompozicija grafov $H_1, H_2, ..., H_n$ z grafom G, označena z $G(H_1, H_2, ..., H_n)$, je graf sestavljen iz disjunktne unije $H_1, H_2, ..., H_n$ in dodanih povezav a_ib_j, kjer je $a_i \in V(H_i)$ in $b_j \in V(H_j)$, kadar je $x_ix_j \in E(G)$ (sliki 4.13 in 4.14). Če je H_i fiksen graf H. Potem kompozicijo označimo z $G(H)$.*



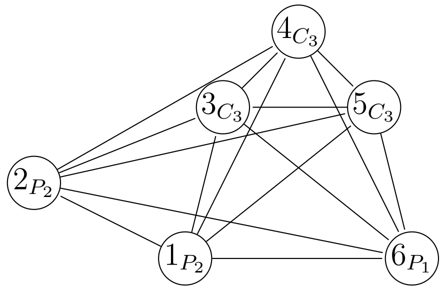
Slika 4.13: Graf $P_3(P_2, P_3, P_1)$.

Vsota grafov L in M, označena z $L + M$, je sestavljena iz disjunktne unije grafov L in M in dodanih povezav ab, kjer $a \in V(L)$ in $b \in V(M)$. Se pravi, kompozicija $G(H_1, H_2, ..., H_n)$ je sestavljena iz disjunktne unije grafov H_i in potem iz vsote $H_i + H_j$ za vsak pripadajočo povezavo $x_ix_j \in E(G)$.

Izrek 4.6 *Naj bo G graf z n vozlišči in naj bodo $H_1, H_2, ..., H_n$ poljubni grafi. Potem je $G(H_1, H_2, ..., H_n)$ permutacijski graf natanko tedaj ko so $G, H_1, H_2, ..., H_n$ permutacijski grafi.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Privzamimo, da je $G(H_1, H_2, ..., H_n)$ permutacijski graf. Ker so $H_1, H_2, ..., H_n$ inducirani podgrafi grafa $G(H_1, H_2, ..., H_n)$, so permutacijski grafi po izreku 4.4. Prav tako lahko vzamemo eno vozlišče iz vsakega od grafov H_i in ga označimo z x_i. Tako dobimo induciran podgraf izomorfen grafu G. To pomeni, da je tudi G permutacijski. ($\Leftarrow$) Obratno privzamemo, da so $G, H_1, H_2, ..., H_n$ permutacijski grafi. Potem je $(v_1, v_2, ..., v_n)$ kohezivno zaporedje grafa G. Grafe $H_1, H_2, ..., H_n$ ustrezno preimenujemo tako da je graf, ki pripada vozlišču v_1 poimenovan H_1, graf, ki pripada vozlišču v_2 poimenovan H_2, ..., graf, ki pripada vozlišču v_n poimenovan H_n. Z n_i označimo število vozlišč grafa H_i. Potem ima graf H_i kohezivno zaporedje $l_i = (x_1^i, x_2^i, ..., x_{n_i}^i)$. Se pravi je $l = (l_1, l_2, ..., l_n) = (x_1^1, x_2^1, ..., x_{n_1}^1, x_1^2, x_2^2, ..., x_{n_2}^2, ..., x_1^n, x_2^n, ..., x_{n_n}^n)$ kohezivno zaporedje grafa $G(H_1, H_2, ..., H_n)$ in $G(H_1, H_2, ..., H_n)$ je permutacijski graf. □

Izrek 4.6 nam podaja enostaven način konstrukcije permutacijskih grafov. Naj bo G polni graf $K3$. Poglejmo si kompozicijo $K_3(P_2, C_3, P_1)$ (slika 4.14). Ker so K_3, P_2, C_3, P_1 polni grafi dobimo polni graf K_6.



Slika 4.14: Graf $K_3(P_2, C_3, P_2)$.

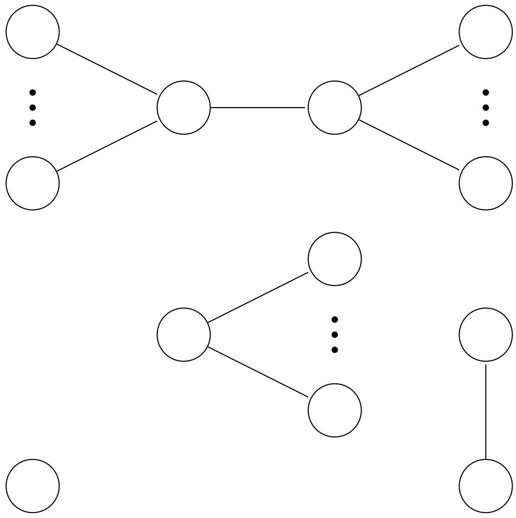
Vsi grafi na največ 4 vozliščih so permutacijski grafi. Zato sta grafa $P_3(P_2, P_3, P_1)$ in $K_3(P_2, C_3, P_1)$ permutacijska (sliki 4.13 in 4.14).

Vsak graf G z n vozlišči se lahko zapiše kot $G(\overset{n}{\overline{P_1, ..., P_1}})$ and $K_1(G)$. Če sta to edina načina za zapis grafa G kot kompozicija, potem je graf primaren.

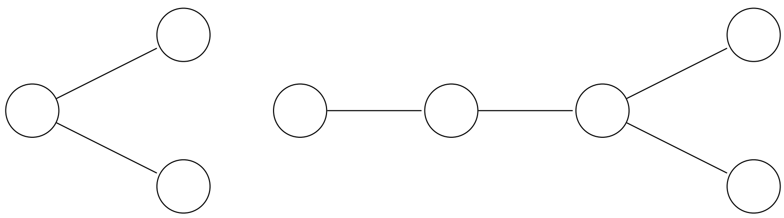
Med polnimi grafi sta primarna samo grafa K_1 in K_2.

Med drevesi s premerom, ki ni večji od 3 (slika 4.15) lahko pokažemo, da so primarni grafi samo poti P_1, P_2 in P_4. To so vse gosenice, ki nimajo dveh listov z istim sosednjim vozliščem. Graf P_3 ni primaren, saj ima dva lista, ki imata isto sosednje vozlišče. Poleg trivialnih kompozicij ima pot na treh vozliščih tudi kompozicijo $P_3 = P_2(P_1, \overline{K_2})$ (slika 4.16).

Izrek 4.7 *Drevo je primaren permutacijski graf natanko tedaj, ko je gosenica brez dveh listov z istim sosednjim vozliščem.*



Slika 4.15: Grafi dreves s premerom ≤ 3.



Slika 4.16: Neprimarna grafa $P_3 = P_2(P_1, \overline{K_2})$ in $P_3(P_1, P_1, P_1, \overline{K_2})$.

Dokaz. Ker smo že pogledali drevesa z premeri, ki ne presegajo 3, privzamimo, da imamo drevo T s premerom vsaj 4. ($\Rightarrow$) Naj bo T drevo z n vozlišči. Privzemimo, da je T primaren permutacijski graf. Po izreku 4.5 je T gosenica. Predpostavimo, da imamo dva lista x_1 in x_2 z istim soseda y. Naj bo G graf, ki ga dobimo, če identificiramo ti dve vozlišči (x_1 in x_2 zamenjamo z enim listom x_{12}, ki je povezan s sosedom vozlišč x_1 in x_2). Naj bodo $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ vozlišča grafa G. Recimo, da je y_1 vozlišče pridobljeno z identifikacijo vozlišč x_1 in x_2. Naj bo $H_1 = \overline{K_2}$ in H_i trivialen graf za $i = 2, 3, ..., n-1$. Potem je $T = G(H_1, H_2, ..., H_n)$. To je v protislovju s tem, da je T primaren. ($\Leftarrow$) Privzamimo zdaj, da je T gosenica brez dveh listov z istim sosednjim vozliščem in predpostavimo, da T ni primaren permutacijski graf. Potem je za nek netrivialen graf G z vozlišči $y_1, y_2, ..., y_k$, $T = G(H_1, H_2, ..., H_k)$. Brez izgube splošnosti lahko privzamemo, da ima H_1 vsaj 2 vozlišči. Ker je drevo T povezan graf, mora biti tudi graf G povezan. Zato mora y_1 imeti soseda. Privzemimo, da sta y_1 in y_2 sosednji vozlišči. Potem je $H_1 + H_2$ podgraf grafa T. Če bi H_2 imel vsaj 2 vozlišči, bi graf $H_1 + H_2$ vseboval cikel, kar je v protislovju s tem, da je T drevo. Torej ima H_2 samo eno vozlišče. Če bi y_1 imel še kakšnega soseda v grafu G, bi graf T tako imel cikel dolžine 4. Prav tako v H_1 ne sme biti povezav, saj bi tako podgraf $H_1 + H_2$ vseboval cikel dolžine 3. Ampak potem so vsa vozlišča grafa H_1 listi grafa T s skupnim sosedom, ki je edino vozlišče grafa H_2. To je v protislovju s predpostavko, da je T gosenica brez dveh listov z istim sosedom. Torej je T primaren permutacijski graf. □

Izrek 4.8 *Naj bo G sestavljen permutacijski graf. Potem obstaja netrivialen primaren permutacijski graf U in permutacijski grafi $H_1, H_2, ..., H_k$, ki so podgrafi grafa G, tako da je $G = U(H_1, H_2, ..., H_k)$.*

Dokaz. Naj bo $G = U(H_1, H_2, ..., H_k)$, kjer je U netrivialen. Če vzamemo eno vozlišče x_i iz vsakega izmed H_i, potem je induciran podgraf izomorfen grafu U. Zato mora biti U permutacijski po izreku 4.4. Prav tako so grafi H_i permutacijski, saj so inducirani podgrafi grafa G. Privzemimo, da ima U najmanjše število vozlišč med vsemi takimi kompozicijami. Dokazali bi radi, da je U primaren. Privzemimo, da U ni primaren. Naj bo $U = V(L_1, L_2, ..., L_p)$ kompozicija, kjer je V netrivialen. Ker je U kompozicija in oglišča grafa U predstavljajo inducirane podgrafe H_i v grafu G, potem vsak L_i predstavlja neko podmnožico $A_i \subset \{H_1, H_2, ..., H_k\}$. A_i je tako tudi induciran podgraf grafa G. Zato je $G = V(A_1, A_2, ..., A_p)$. Ampak to predstavla protislovje z izborom grafa U. Torej je U primaren. □

Poglavje 5

Tekmovalnostni graf

Definicija 5.1 *Rangiranje* $c = (i_1, ..., i_n)$ *množice* $[n]$ *je permutacija iz* S_n*. Pisali bomo* $i \prec_c j$*, kadar se vozlišče* i *pojavi pred vozliščem* j *v vektorju rangiranja* c*, to je ko* $c^{-1}(i) < c^{-1}(j)$*. Zato rangiranje* c *definira zaporedje (urejenost) množice* $[n]$*, kjer je prvi element zaporedja* $c(1)$*, drugi* $c(2)$ *in tako naprej.*

Definicija 5.2 *Če imamo podano končno množico* $R = \{c_1, c_2, ..., c_r\}$ *rangiranj, potem rečemo, da je par vozlišč* $(i, j) \in [n] \times [n]$ *tekmuje, če obstajata rangiranji* $c_s, c_t \in R$ *tako da je* $i \prec_{c_s} j$ *ampak* $j \prec_{c_t} i$*, to je* i *in* j *zamenjata svoji relativni poziciji v rangiranjih* c_s *in* c_t*.*

Tekmovalnost med dvema vozliščema $i, j \in [n]$ *je močno povezano z dejstvom, da je* (i, j) *inverzija rangiranja množice. Spomnimo se, da je inverzija v rangiranju* c *par vozlišč* (i, j)*, tako da je* $(i - j)(c^{-1}(i) - c^{-1}(j)) < 0$

Lema 5.1 *Če imamo podano končno množico* $R = \{c_1, c_2, ..., c_r\}$ *rangiranj, so naslednje trditve ekvivalentne:*

(i) *Par vozlišč (i, j) tekmuje*

(ii) *Obstaja* $c_s \in \{c_1, ..., c_{r-1}\}$ *tak, da* i *in* j *zamenjata svoji relativni poziciji med rangiranji* c_s *in* c_{s+1}

(iii) *Obstaja preimenovanje vozlišč, tako da je* $c_1 = id$ *in nek* $c_s \in \{c_2, ..., c_r\}$ *z inverzijo* (i, j)

Dokaz. $((ii) \Rightarrow (i))$ To sledi iz definicije 5.2. $((i) \Rightarrow (iii))$ Preimenujmo vozlišča, tako da bo $c_1 = id$. Naj i in j zamenjata svoji relativni poziciji med rangiranji c_s in c_t. Potem je v enem izmed c_s ali c_t inverzija (i, j). $((iii) \Rightarrow (ii))$ Preimenujmo vozlišča, tako da $c_1 = id$. Imamo inverzijo (i, j) v c_s. Potem i in j zamenjata pozicijo med c_s in c_{s-1} ali pa c_{s-1} prav tako vsebuje inverzijo (i, j) in se zamenjava zgodi prej. To sledi iz dejstva, da je R končna množica.

□

Definicija 5.3 *Naj bo* $R = \{c_1, c_2, ..., c_r\}$ *množica rangiranj množice* $[n]$. *Definirajmo tekmovalnostni graf množice rangiranj* R*, kot neusmerjen graf* $G_c(R) = ([n], E_R)$*, kjer je množica povezav* E_R *podana na naslednji način: med i in j je povezava, če* (i, j) *tekmujeta.*

Definicija 5.4 *Če vzamemo množico rangiranj* $R = \{c_1, ..., c_r\}$ *množice* $[n]$ *in fiksiramo* $i \in [n]$*, je tekmovalnostna množica* $C(i)$ *vozlišča i enaka množicc elementov množice* $[n]$*, ki tekmuje z i vključno z i:*

$$C(i) = \{j \in [n] \mid (i, j) \ tekmujeta\} \cup \{i\}.$$

Definicija 5.5 *Naj bo* $R = \{c_1, c_2, ..., c_r\}$ *množica rangiranj množice* $[n]$. *Množici vozlišč* $C \subseteq [n]$ *rečemo množica tekmovalcev, če je maksimalna množica glede na lastnost tekmovalnosti svojih elementov. To pomeni, da vsaka dva elementa* $i, j \in C$ *tekmujeta in* C *je maksimalna glede na to lastnost.*

Opomba: Množice tekmovalcev so ravno največji polni podgrafi grafa $G_c(R)$. Opazimo, da dva vozlišča tekmujeta natanko tedaj ko pripadata isti množici tekmovalcev. Še več, lahko preverimo, da je množica vozlišč $C \subseteq [n]$ množica tekmovalcev natanko tedaj ko je $C = \bigcap_{i \in C} C(i)$.

Definicija 5.6 *Če vzamemo množico rangiranj* $R = \{c_1, ..., c_r\}$ *množice* $[n]$, *rečemo da par vozlišč* $(i, j) \in [n] \times [n]$ *posredno ali neposredno tekmuje, če* *obstaja* $k \in \mathbb{N}$ *in vozlišča* $i_1, ..., i_k \in [n]$ *tako da* (i, i_1) *tekmujeta,* (i_1, i_2) *tekmujeta, ..., in* (i_k, j) *tekmujeta.*

Množici vozlišč $D \subseteq [n]$ *rečemo množica posrednih in neposrednih tekmovalcev, če je maksimalna množica glede na lastnost posredne ali neposredne tekmovalnosti med svojimi elementi.*

Opomba: Očitno je, da če par vozlišč (i, j) tekmuje potem tudi posredno ali neposredno tekmuje. Še več par (i, j) posredno ali neposredno tekmuje natanko tedaj, ko sta i in j povezana s potjo v grafu $G_c(R)$.

Opazimo, da so množice posrednih ali neposrednih tekmovalcev iz $[n]$, povezane komponente grafa $G_c(R)$ in dva vozlišča posredno ali neposredno tekmujeta natanko tedaj ko pripadata isti množici posrednih in neposrednih tekmovalcev. Seveda dve vozlišči, ki pripadata različnim množicam posrednih in neposrednih tekmovalcev, ne moreta tekmovati.

Definicija 5.7 *Delno urejeni množici* $(N, \preceq)$ *lahko priredimo usmerjen graf* $G_{\preceq}$*, tako da je množica vozlišč enaka* N*, vozlišči* i *in* j *pa sta povezani, če* $i \neq j$ *in* $i \preceq j$*. Graf* $G = (N, E)$ *je primerljivostni graf, če je neusmerjen graf pridobljen po odstranitvi orientacije grafa* $G_{\preceq}$ *za neko delno urejenost* $\preceq$ *množice* N*.*

Graf $G = (N, E)$ je primerljivosten natanko tedaj ko dopušča tranzitivno orientacijo svojih povezav. To pomeni, da je usmerjen graf $\vec{G} = (N, \vec{E})$ pridobljen iz G z orientiacijo vseh povezav v E, tako da če sta $(i, j), (j, k) \in \vec{E}$ potem je $(i, k) \in \vec{E}$

Uporabna karakterizacija permutacijskih grafov je dejstvo, da sta G in $\overline{G}$ primerljivostna grafa, to je dovoljujeta tranzitivno orientazijo svojih povezav.

Opazimo, da so permutacijski grafi tako primerljivostni grafi kot tekmovalnostni (imamo dve rangiranji/permutaciji $c_1 = id$ in c_2, ki predstavlje permutacijski graf).

Definicija 5.8 *Graf* G *ima delno kohezivno zaporedje vozlišč (ali enostavneje delno kohezivno zaporedje), če obstaja preimenovanje vozlišč, tako da* *velja (b) iz definicije 4.2, to je če obstaja povezava ab, kjer $a < b$, potem mora za vsak x, za katerega velja $a < x < b$ obstajati povezava ax ali xb. Graf G je delno koheziven, če ima delno kohezivno zaporedje.*

Medtem ko je pogoj (a) iz definicije 4.2 je povezan z primerljivostnimi grafi, je pogoj (b) (delna kohezivnost) povezan z tekmovalnostnimi grafi, kot pokaže nasledni izrek.

Izrek 5.1 *Vsak tekmovalnostni graf je delno koheziven.*

Dokaz. Naj bo $G_c(R)$ tekmovalnostni graf, ki je generiran z množico rangiranj R. Brez izgube za splošnost privzemimo, da rangiranje $id \in R$. Naj bo $ab \in E(G_c(R))$, kjer $a < b$ in $x \in [n]$ tak, da je $a < x < b$. Ker je ab povezava vozlišči (a, b) tekmujeta. To pomeni, da obstaja tako rangiranje $c_m \in R$, da je $b \prec_{c_m} a$. Če $x \prec_{c_m} a$ potem tekmujeta (x, a) in je $ax \in E(G_c(R))$, v nasprotnem primeru je $b \prec_{c_m} a \prec_{c_m} x$, kar pomeni, da tekmujeta (b, x) in $xb \in E(G_c(R))$. □

Domneva 5.1 *Izrek 5.1 je karakterizacija tekmovalnostnih grafov, to pomeni G je tekmovalnostni graf natanko tedaj ko ima delno kohezivno zaporedje.*

Poglavje 6

Algoritem za izračun množice posrednih in neposrednih tekmovalcev

Lema 6.1 *Naj bo $R = \{c_1, ..., c_r\}$ množica rangiranj množice $[n]$. Če je $D \subseteq [n]$ množica posrednih in neposrednih tekmovalcev in $a, b \in D$ potem za vsak $x \in [n]$ in vsako rangiranje $c_m \in R$ tako da je $a \prec_{c_m} x \prec_{c_m} b$, sledi $x \in D$.*

Dokaz. Če vozlišči (a, b) tekmujeta, potem zaradi delne kohezivnosti tekmovalnostnega grafa tekmujeta tudi (a, x) ali (x, b), se pravi $x \in D$. Če vozlišči (a, b) ne tekmujeta, potem obstaja $k \in \mathbb{N}$ in vozlišča $i_1, ..., i_k \in [n]$, tako da (a, i_1) tekmujeta, (i_1, i_2) tekmujeta, ..., in (i_k, b) tekmujeta, saj sta $a, b \in D$. Če $a \prec_{c_m} x \prec_{c_m} i_1$ potem $x \in D$, ker (a, i_1) tekmujeta. V nasprotnem primeru je $i_1 \prec_{c_m} x \prec_{c_m} b$. Če $i_1 \prec_{c_m} x \prec_{c_m} i_2$ potem $x \in D$, ker (i_1, i_2) tekmujeta. V nasprotnem primeru je $i_2 \prec_{c_m} x \prec_{c_m} b$... Če $i_{k-1} \prec_{c_m} x \prec_{c_m} i_k$ potem $x \in D$, ker (i_{k-1}, i_k) tekmujeta. V nasprotnem primeru je $i_k \prec_{c_m} x \prec_{c_m} b$. Ker (i_k, b) tekmujeta, sledi $x \in D$. □

Lema 6.2 *Naj bo $R = \{c_1, ..., c_r\}$ množica rangiranj množice $[n]$. Če je $D \subseteq [n]$ množica posrednih in neposrednih tekmovalcev ter obstajata $a \in D$*

in $c_m \in R$*, tako da je* $c_m^{-1}(a) = 1$ *(element* a *se pojavi na prvi poziciji v rangiranju* c_m*), potem*

$$\{x \in [n] \mid c_s^{-1}(x) = 1 \text{ za nek } c_s \in R\} \subseteq D.$$

To pomeni da vsi elementi na prvi poziciji rangiranj iz R *pripadajo* D*.*

Dokaz. Če $c_m \neq c_s$, $a \neq x$ in $c_m^{-1}(a) = 1 = c_s^{-1}(x)$, potem je $a \prec_{c_m} x$ in $x \prec_{c_s} a$, se pravi (a, x) tekmujeta in $x \in D$. □

Izrek 6.1 *Naj bo* $R = \{c_1, ..., c_r\}$ *množica rangiranj vozlišč* $[n]$*. Množico posrednih in neposrednih tekmovalcev lahko identificiramo z zaprtimi intervali naravnih števil* $[p, q]$ *na naslednji način:*

$$D_{[p,q]} = \{x \in [n] \mid c_s^{-1}(x) \in [p, q] \text{ za nek } c_s \in R\}.$$

Še več p *in* q *sta prvi na levi in zadnji na desni poziciji elementov iz* $D_{[p,q]}$ *glede na vsa rangiranja.*

Dokaz. Pokazali bomo, da ima vsaka množica posrednih in neposrednih tekmovalcev obliko $D_{[p,q]}$, za neki naravni števili p in q. Naj bo $a \in [n]$, $c_m \in R$, tako da $c_m^{-1}(a) = 1$ in naj bo D množica posrednih in neposrednih tekmovalcev, ki vsebuje a. Iz lemi 6.2 sledi, da je

$$D_{[1,1]} = \{x \in [n] \mid c_s^{-1}(x) = 1 \text{ za nek } c_s \in R\} \subseteq D.$$

Defirajmo

$$D_{[1,p_k]} = \{x \in [n] \mid c_s^{-1}(x) \in [1, p_k] \text{ za nek } c_s \in R\}$$

in naj bo p_{k+1} zadnja pozicija (na desni) vseh elementov $D_{[1,p_k]}$ v vseh rangiranjih. Trdimo, da če $D_{[1,p_k]} \subseteq D$ in

$$D_{[1,p_{k+1}]} = \{x \in [n] \mid c_s^{-1}(x) \in [1, p_{k+1}] \text{ za nek } c_s \in R\}$$

potem je $D_{[1,p_{k+1}]} \subseteq D$. Naj bo $x \in [n]$ z $c_s^{-1}(x) \in [1, p_{k+1}]$ za nek c_s. Potem je $c_s^{-1}(x) \in [1, p_k]$ in $x \in D_{[1,p_k]} \subseteq D$ (po predpostavki) ali pa je

$c_s^{-1} \in [p_k + 1, p_{k+1}]$. V tem primeru, naj bo b element $D_{[1,p_k]}$, ki se pojavi na poziciji p_{k+1} v nekem rangiranju c_{m_b}, to pomeni $c_{m_b}^{-1}(b) = p_{k+1}$. Če $x \prec_{c_{m_b}} b$, potem je po lemi 6.1 $x \in D$. Zato predpostavimo, da je $b \prec_{c_{m_b}} x$. Vsi elementi levo od b v rangiranju c_{m_b} pripadajo množici D po lemi 6.1. Naj bo teh elementov t. Če je $x \prec_{c_s} b$ potem (c, b) tekmujeta in $x \in D$. Zato predpostavimo, da $b \prec_{c_s} x$. Na levi od x v rangiranju c_s je tako največ t elementov, ampak en od njih je b, kar pomeni, da obstaja element z, ki $z \prec_{c_{m_b}} b \prec_{c_{m_b}} x$ in $b \prec_{c_s} x \prec_{c_s} z$. To pomeni, da (x, z) tekmujeta, zato $x \in D$.

Ker je $[n]$ končna množica in $D_{[1,p_m]} \in [n]$ se veriga množic

$$D_{[1,1]} \subset D_{[1,p_1]} \subset D_{[1,p_2]} \subset \cdots$$

stabilizira za nek $D_{[1,p_m]} \subseteq D$. Še več $D \subseteq D_{[1,p_m]}$: po hipotezi je $a \in D$, zato za vsak drug elemet $x \in D$ obstaja končno število elementov $a_1, a_2, ..., a_k$, tako da $(a, a_1), (a_1, a_2), ..., (a_k, x)$ tekmujejo. Zaradi dejstva, da je $a \in D_{[1,1]}$ in (a, a_1) tekmujeta dobimo, da je $a_1 \in D_{[1,p_1]}$, podobno ker $a_1 \in D_{[1,p_1]}$ in (a_1, a_2) tekmujeta dobimo, da je $a_2 \in D_{[1,p_2]}$, ..., in ker $a_k \in D_{[1,p_k]}$ in (a_k, x) tekmujeta dobimo, da je $x \in D_{[1,p_{k+1}]} \subseteq D_{[1,p_m]}$

Izbrišimo elemente iz $[n]$, ki se pojavijo v D in ponovimo postopek, da odkrijemo ostale možice posrednih in neposrednih tekmovalcev. □

Dokaz zadnjega izreka nam podaja algoritem za izračun množice posrednih in neposrednih tekmovalcev direktno iz množice rangiranj in ne potrebuje predhodnega izračuna tekmovalnostnega grafa.

```
Algoritem za izračun množice posrednih
in neposrednih tekmovalcev:

Vhod:
$N = \{1, ..., n\}$ končna množica vozlišč
$R = \{c_1, ..., c_r\}$ končna množica rangiranj

begin
    $j := 1$;
    $p_0 := 0$;
    $p_j := 1$;
    while $|N| > 0$ do
        $D_j := \emptyset$;
        $q_0 := p_{j-1}$;
        $q_1 := p_j$;
        $i := 0$;
        while $q_i \neq q_{i+1}$ do
            $i := i + 1$;
            Construct $D_j := D_{[p_j, q_j]}$;
            $q_{i+1} := \underset{x \in D_j, c \in R}{max} c^{-1}(x)$;
        end
        $N := N \setminus D_j$;
        $j := j + 1$;
        $p_j := q_i + 1$;
    end
end

Izhod:
Množice posrednih in neposrednih
tekmovalcev $D_1, ..., D_k$
```

Definicija 6.1 *Naj bo $R = \{c_1, ..., c_r\}$ množica r rangiranj ($r \geq 2$) vozlišč $N = \{1, ..., n\}$. Definirajmo usmerjen graf $G_d(R)$ na naslenji način:*

(i) Vozlišča grafa $G_d(R)$ so elementi množice N.

(ii) Če $i, j \in N$, $i \neq j$ potem je (i, j) usmerjena povezava v grafu $G_d(R)$, če obstaja rangiranje $c_m \in R$, tako da je $i \preceq_{c_m} j$.

Opomba: Opazimo, da se usmerjen graf $G_d(R)$ sklada z usmerjenim grafom $G_{\preceq}$, ki ga definiramo z (refleksivno in antisimetrično) relacijo $\preceq$ podano z:

(i) $i \preceq i$ za vsak $i \in N$

(ii) $i \preceq j$ $(i, j \in N, ineqj)$, če obstaja tako rangiranje $c_m \in R$, da je $i \preceq_{c_m} j$

Tekmovalnostni graf $G_c(R)$ se sklada z neusmerjenim grafom z enakimi vozlišči kot $G_d(R)$ in povezavami med (i, j), kadar sta usmerjeni povezavi $(i, j), (j, i) \in E(G_d(R))$

Trditev 6.1 *Naj bosta D_1 in D_2 dve različni množici tekmovalcev, ki slejkoprej tekmujejo. Naslednji trditvi o usmerjenem grafu $G_d(R)$ sta ekvivalentni:*

(i) Obstaja usmerjena povezava (a, b), tako da je $a \in D_1$ in $b \in D_2$

(ii) Vsa vozlišča iz D_1 imajo usmerjeno povezavo proti vsem vozliščem iz D_2

Dokaz.

1. Pokazali bomo, da če je $a \in D_1$, $b_1, b_2 \in D_2$, par (b_1, b_2) tekmuje in obstaja usmerjena povezava od a do b_1, potem obstaja usmerjena povezava od a do b_2. Po hipotezi obstaja rangiranje c_m tako da je $a \prec_{c_m} b_1$. Če $a \prec_{c_m} b_2$ potem smo pokazali kar smo hoteli, sicer $b_2 \prec_{c_m} a \prec_{c_m} b_1$. Ampak ker (b_1, b_2) tekmujeta, obstaja rangiranje $c_{m'}$, tako da $b_1 \prec_{c_{m'}} b2$ in ker a ne tekmuje z b_1 mora biti $a \prec_{c_{m'}} b_1 \prec_{c_{m'}} b_2$, kar pomeni, da (a, b_2) tekmujeta. To je protislovje.

2. Pokazali bomo, da če je $a \in D_1$, $b \in D_2$ in obstaja usmerjena povezava od a proti b, potem za vsak $b' \in D_2$ obstaja povezava od a do b. Ker sta $b, b' \in D_2$ obstaja $k \in N$ in $b_1, ..., b_k \in D_2$ tako da (b, b_1) tekmujeta, (b_1, b_2) tekmujeta, ..., (b_k, b') tekmujeta. Vozlišča $a, b, b1$ so v takem razmerju kot v koraku 1., zato obstaja povezava od a do b_1, podobno vozlišča a, b_1, b_2, zato obstaja povezava a do b_2, ..., podobno vozlišča a, b_k, b', zato obstaja povezava od a do b'.

3. $(i) \Rightarrow (ii)$. Če od elementa $a \in D_1$ obstaja povezava do elementa v D_2, potem po koraku 2. obstaja povezava od a do vseh elementov v D_2. Zdaj fiksirajmo nek element iz D_2 in uporabimo korak 2.. Tako dobimo, da obstaja povezava od vsakega elementa iz D_1 do fiksiranega elementa.

□

Definicija 6.2 *Naj bo $R = \{c_1, ..., c_r\}$ množica r rangiranj $(r \geq 2)$ vozlišč $N = \{1, ..., n\}$, katerih množice tekmovalcev, ki slejkoprej tekmujejo, označimo z $D_1, ..., D_k$. Definirajmo binarno relacijo $\rightarrow$ med dvema množicama tekmovalcev, ki slejkoprej tekmujejo na nasledni način:*

(i) $D_i \rightarrow D_i$ za vsako množico tekmovalcev D_i, ki slejkoprej tekmujejo.

(ii) za vsaki različni množici D_i, D_j tekmovalcev, ki slejkoprej tekmujejo, je $D_i \rightarrow D_j \Leftrightarrow$ velja katerakoli od trditev iz 6.1

Lema 6.3 *Binarna relacija iz definicije 6.2 je tranzitivna*

Dokaz. Predpostavimo, da je $D_1 \rightarrow D_2$ in $D_2 \rightarrow D_3$, ampak $D_3 \rightarrow D_1$. Vzamimo vozlišče $x \in D_1$. Ker je $D_3 \rightarrow D_1$, obstaja rangiranje c_m, tako da je $a \prec_{c_m} x$ za vse $a \in D_3$. Še več, ker $D_1 \rightarrow D_2$, $xprec_{c_m} b$ za vsa $b \in D_2$ in zato $a \prec_{c_m} b$ za vse $a \in D_3$ in $b \in D_2$, kar pomeni $D_3 \rightarrow D_2$. To je protislovje. □

Posledica 6.1 *Binarna relacija podana v definiciji 6.2 nam daje linearno urejost med množicami tekmovalcev iz N, ki slejkoprej tekmujejo.*

Poglavje 7

Uvod

Prvi koristen nasvet v zvezi uporabo LaTeXa je, da v celoti preberete ta dokument!

Datoteka `vzorec_dip_Seminar.tex` na kratko opisuje, kako se pisanja diplomskega dela lotimo z uporabo programskega okolja LaTeX [6, 7]. V tem dokumentu bomo predstavili nekaj njegovih prednosti in hib. Kar se slednjih tiče, nam pride na misel ena sama. Ko se srečamo z njim prvič, nam izgleda morda kot kislo jabolko, nismo prepričani, ali bi želeli vanj ugrizniti. Toda prav iz kislih jabolk lahko pripravimo odličen jabolčni zavitek in s praktičnim preizkusom LaTeXa najlažje pridemo na njegov pravi okus.

LaTeX omogoča logično urejanje besedil, ki ima v primerjavi z vizualnim urejanjem številne prednosti, saj se problema urejanja besedil loti s programerskega stališča. Logično urejanje besedil omogoča večjo konsistentnost, uniformnost in prenosljivost besedil. Vsebinska struktura nekega besedila pa se odraža v strukturiranem LaTeXovem kodiranju besedila.

V 8. poglavju bomo spoznali osnovne gradnike LaTeXa. V 9. poglavju bomo na hitro spoznali besedilne konstrukte kot so izreki, enačbe in dokazi. Naučili se bomo, kako se na njih sklicujemo. 10. poglavje bo predstavilo vključevanje plovk: slik in tabel. Poglavje 11 na kratko predstavi tipične sestavne dele strokovnega besedila. V 12. poglavju omenjamo nekaj najpogostejših slovničnih napak, ki jih delamo v slovenščini. V 13. poglavju je še nekaj koristnih praktičnih nasvetov v zvezi z uporabo LaTeXa. V 14. poglavju se bomo srečali s sklicevanjem na literaturo, 15. poglavje pa govori o formatu PDF/A, v katerem morate svojo diplomo oddati v sistemu STUDIS. Sledil bo samo še zaključek.

Ta vzorec ni priročnik za uporabo LaTeXa, saj razloži le nekatere osnovne ukaze, druge funkcionalnosti pa le omeni. Kako se jih uporablja pa naj bralec poišče drugje.

Poglavje 8

Osnovni gradniki LaTeXa

LaTeX bi lahko najbolj preprosto opisali kot programski jezik namenjen oblikovanju besedil. Tako kot vsak visokonivojski programski jezik ima tudi LaTeX številne ukaze za oblikovanje besedila in okolja, ki omogočajo strukturiranje besedila.

Vsi LaTeXovi ukazi se začnejo z levo poševnico `\`, okolja pa definiramo bodisi s parom zavitih oklepajev { in } ali z ukazoma `\begin{ }` in `\end{ }`. Ukazi imajo lahko tudi argumente, obvezni argumenti so podani v zavitih oklepajih, opcijski argumenti pa v oglatih oklepajih.

Z ukazi torej definiramo naslov in imena avtorjev besedila, poglavja in podpoglavja in po potrebi bolj podrobno strukturiramo besedila na spiske, navedke itd. Posebna okolja so namenjena zapisu matematičnih izrazov, kratki primeri so v naslednjem poglavju.

Vse besedilne konstrukte lahko poimenujemo in se s pomočjo teh imen nato kjerkoli v besedilu na njih tudi sklicujemo.

LaTeX sam razporeja besede v odstavke tako, da optimizira razmike med besedami v celotnem odstavku. Nov odstavek začnemo tako, da izpustimo v izvornem besedilu prazno vrstico. Da besedilo skoči v novo vrstico pa ukažemo z dvema levima poševnicama. Število presledkov med besedami v izvornem besedilo ni pomembno.

Poglavje 9

Matematično okolje in sklicevanje na besedilne konstrukte

Matematična ali popolna indukcija je eno prvih orodij, ki jih spoznamo za dokazovanje trditev pri matematičnih predmetih.

Izrek 9.1 *Za vsako naravno število n velja*

$$n < 2^n. \tag{9.1}$$

Dokaz. Dokazovanje z indukcijo zahteva, da neenakost (9.1) najprej preverimo za najmanjše naravno število – 0. Res, ker je $0 < 1 = 2^0$, je neenačba (9.1) za $n = 0$ izpolnjena.

Sledi indukcijski korak. S predpostavko, da je neenakost (9.1) veljavna pri nekem naravnem številu n, je potrebno pokazati, da je ista neenakost v veljavi tudi pri njegovem nasledniku – naravnem številu $n + 1$. Računajmo.

$$\begin{align} n + 1 &< 2^n + 1 \tag{9.2} \\ &\leq 2^n + 2^n \tag{9.3} \\ &= 2^{n+1} \notag \end{align}$$

Neenakost (9.2) je posledica indukcijske predpostavke, neenakost (9.3) pa enostavno dejstvo, da je za vsako naravno število n izraz 2^n vsaj tako velik kot 1. S tem je dokaz Izreka 9.1 zaključen. $\square$

Opazimo, da je LaTeX številko izreka podredil številki poglavja. Na podoben način se lahko sklicujemo tudi na druge besedilne konstrukte, kot so med drugim poglavja, podpoglavja in plovke, ki jih bomo spoznali v naslednjem poglavju.

Poglavje 10

Plovke: slike in tabele

Slike in daljše tabele praviloma vključujemo v dokument kot plovke. Pozicija plovke v končnem izdelku ni pogojena s tekom besedila, temveč z izgledom strani. LaTeX bo skušal plovko postaviti samostojno, praviloma na mestu, kjer se pojavi v izvornem besedilu, sicer pa na vrhu strani, na kateri se na takšno plovko prvič sklicujemo. Pri tem pa bo na vsako stran končnega izdelka želel postaviti tudi sorazmerno velik del besedila. V skrajnem primeru, če imamo res preveč plovk na enem mestu besedila, ali če je plovka previsoka, se bo LaTeX odločil za stran popolnoma zapolnjeno s plovkami.

Poleg tega, da na položaj plovke vplivamo s tem, kam jo umestimo v izvorno besedilo, lahko na položaj plovke na posamezni strani prevedenega besedila dodatno vplivamo z opcijami `here, top` in `bottom`. Zelo velike slike je najbolje postaviti na posebno stran z opcijo `page`. Skaliranje slik po njihovi širini lahko prilagodimo širini strani tako, da kot enoto za dolžino uporabimo kar širino strani, npr. `0.5\textwidth` bo raztegnilo sliko na polovico širine strani. Slike lahko po potrebi tudi zavrtimo za 90 stopinj, tako da bodo podrobnosti na sliki lažje berljive in da bo prostor na papirju bolje izkoriščen.

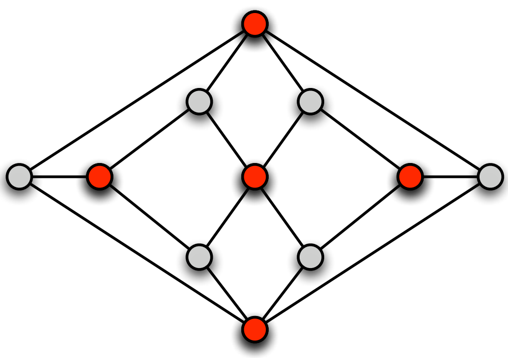
Na vse plovke se moramo v besedilu sklicevati, saj kot beseda pove, plovke plujejo po besedilu in se ne pojavijo točno tam, kjer nastopajo v izvornem besedilu. Sklic na plovko v besedilu in sama plovka naj bosta čimbližje skupaj, tako da bralcu ne bo potrebno listati po diplomi. Upoštevajte pa, da se naloge tiska dvostransko in da se hkrati vidi dve strani v dokumentu! Na to, kje se bo slika ali druga plovka pojavila v postavljenem besedilu torej najbolj vplivamo tako, da v izvorni kodi plovko premikamo po besedilu nazaj ali naprej!

Tabele ja najbolje oblikovati kar neposredno v LaTeXu, saj za oblikovanje tabel obstaja zelo fleksibilno okolje `tabular` (glej tabelo 10.1). Slike pa je po drugi strani pogosto najlažje oblikovati oziroma izdelati z drugimi orodji in programi, rezultate shraniti v formatu `.pdf` in se v LaTeXu le sklicevati na ustrezno slikovno datoteko.

Knjižnica `https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/PGF/TikZ` pa omogoča risanje raznovrstnih grafov neposredno v okolju LaTeX.

10.1 Formati slik

Bitne slike, vektorske slike, kakršnekoli slike, z LaTeXom lahko vključimo vse. Slika 10.1 je v formatu `.pdf`. Pa res lahko vključimo slike katerihkoli for-



Slika 10.1: Herschelov graf, vektorska grafika.

matov? Žal ne. Programski paket LaTeX lahko uporabljamo v več dialektih.

ukaz/format	.pdf	.eps	ostali formati
pdflatex	da	ne	da
latex	ne	da	da

Tabela 10.1: Kompatibilnost različnih formatov slikovnih datotek z različnimi dialekti LaTeXa.

Ukaz `latex` ne mara vključenih slik v formatu Portable Document Format `.pdf`, ukaz `pdflatex` pa ne prebavi slik v Encapsulated Postscript Formatu `.eps`. Strnjeno je vključevanje različnih vrst slikovnih datotek prikazano v tabeli 10.1.

Nasvet? Odločite se za uporabo ukaza `pdflatex`. Vaš izdelek bo brez vmesnih stopenj na voljo v .pdf formatu in ga lahko odnesete v vsako tiskarno. Če morate na vsak način vključiti sliko, ki jo imate v `.eps` formatu, jo vnaprej pretvorite v alternativni format, denimo `.pdf`.

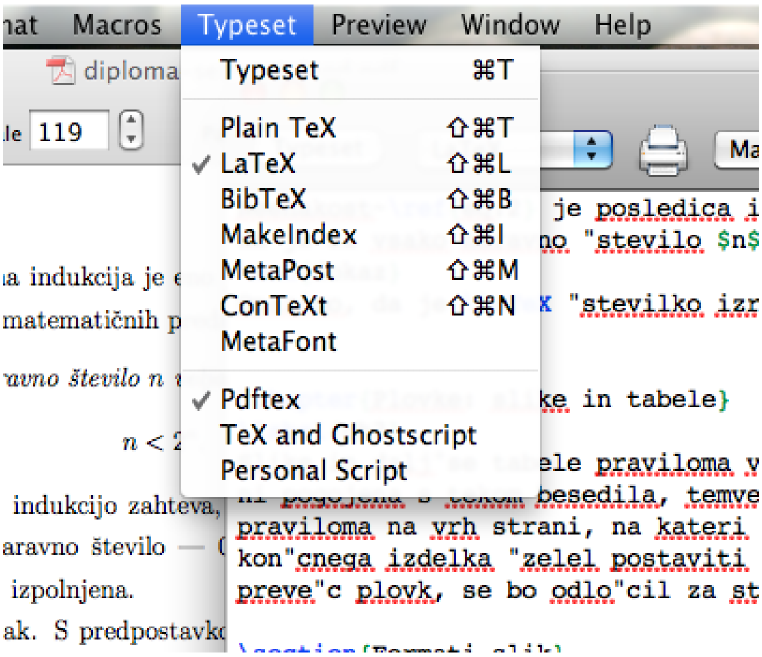
Včasih se da v okolju za uporabo programskega paketa LaTeX nastaviti na kakšen način bomo prebavljali vhodne dokumente. Spustni meni na Sliki 10.2 odkriva uporabo LaTeXa v njegovi pdf inkarnaciji — `pdflatex`. Vključena slika 10.2 je seveda bitna.

Na vse tabele se moramo v besedilu, podobno kot na slike, tudi sklicevati, saj kot plovke v oblikovanem besedilo niso nujno na istem mestu kot v izvornem besedilu.

10.1.1 Podnapisi k slikam in tabelam

Vsaki sliki ali tabeli moramo dodati podnapis, ki na kratko pojasnuje, kaj je na sliki ali tabeli. Če nekdo le prelista diplomsko delo, naj bi že iz slik in njihovih podnapisov lahko na grobo razbral, kakšno temo naloga obravnava.

Če slike povzamemo iz drugih virov, potem se moramo v podnapisu k taki sliki sklicevati na ta vir!



Slika 10.2: Kateri dialekt uporabljati?

Poglavje 11

Struktura strokovnih besedil

Strokovna besedila imajo ustaljeno strukturo, da bi lahko hitreje in lažje brali in predvsem razumeli taka besedila, saj načeloma vemo vnaprej, kje v besedilu se naj bi nahajale določene informacije.

Najbolj osnovna struktura strokovnega besedila je:

naslov besedila, ki naj bo sicer kratek, a kljub temu dovolj poveden o vsebini besedila,

imena avtorjev so običajno navedena po teži prispevka, prvi avtor je tisti, ki je besedilo dejansko pisal, zadnji pa tisti, ki je raziskavo vodil,

kontaktni podatki – poleg imena in naslova institucije je potreben vsaj naslov elektronske pošte,

povzetek je kratko besedilo, ki povsem samostojno povzame vsebino in izpostavi predvsem glavne rezultate ali zaključke,

ključne besede so tudi namenjene iskanju vsebin med množico člankov,

uvodno poglavje uvede bralca v tematiko besedila, razloži kaj je namen besedila, predstavi področje o katerem besedilo piše (če temu ni namenjeno v celoti posebno poglavje) ter na kratko predstavi strukturo celotnega besedila,

poglavja tvorijo zaokrožene celote, ki se po potrebi še nadalje členijo na podpoglavja, namenjena so recimo opisu orodij, ki smo jih uporabili pri delu, teoretičnim rezultatom ali predstavitvi rezultatov, ki smo jih dosegli,

zaključek še enkrat izpostavi glavne rezultate ali ugotovitve, jih primerja z dosedanjimi in morebiti poda tudi ideje za nadaljne delo,

literatura je seznam vseh virov, na katere smo se pri svojem delu opirali, oziroma smo se na njih sklicevali v svojem besedilu.

Naslove poglavij in podpoglavij izbiramo tako, da lahko bralec že pri prelistavanju diplome in branju naslovov v grobem ugotovi, kaj je vsebina diplomskega dela.

Strokovna besedila običajno pišemo v prvi osebi množine, v nevtralnem in umirjenem tonu. Uporaba sopomenk ni zaželjena, saj želimo zaradi lažjega razumevanja za iste pojme vseskozi uporabljati iste besede. Najpomenbnejše ugotovitve je smiselno večkrat zapisati, na primer v povzetku, uvodu, glavnem delu in zaključku. Vse trditve naj bi temeljile bodisi na lastnih ugotovitvah (izpeljavah, preizkusih, testiranjih) ali pa z navajanjem ustreznih virov.

Največ se lahko naučimo s skrbnim branjem dobrih zgledov takih besedil.

Poglavje 12

Pogoste napake pri pisanju v slovenščini

V slovenščini moramo paziti pri uporabi pridevnikov, ki se ne sklanjajo kot so npr. kratice. Pravilno pišemo model CAD in **ne** CAD model!

Pri sklanjanju tujih imen ne uporabljamo vezajev, pravilno je Applov operacijski sistem in **ne** Apple-ov.

Pika, klicaj in vprašaj so levostični: pred njimi ni presledka, za njimi pa. Klicajev in vprašajev se v strokovnih besedilih načeloma izogibamo. Oklepaji so desnostični in zaklepaji levostični (takole).

V slovenščini pišemo narekovaje drugače kot v angleščini! Običajno uporabljamo dvojne spodnje-zgornje narekovaje: „slovenski narekovaji“. Za slovenske narekovaje je v tej LaTeXovi predlogi definiran nov ukaz `\sn{ ... }`.

Vezaj je levo in desno stičen: `slovensko-angleški slovar` in ga pišemo z enim pomišljajem.

V slovenščini je pred in po pomišljaju presledek, ki ga v LaTeXu pišemo z dvema pomišljajema: `Pozor -- hud pes!` V angleščini pa je za razliko pomišljaj levo in desno stičen in se v LaTeXu piše s tremi pomišljaji: `---`. S stičnim pomišljajem pa lahko nadomeščamo predlog od . . . do, denimo pri navajanju strani, npr. preberite strani 7–11 (`7--11`).

„Pred ki, ko, ker, da, če vejica skače“. To osnovnošolsko pravilo smo v življenju po potrebi uporabljali, dopolnili, morda celo pozabili. Pravilo sicer drži, ampak samo če je izpolnjenih kar nekaj pogojev (npr. da so ti vezniki samostojni, enobesedni, ne gre za vrivek itd.). Povedki so med seboj ločeni z vejicami, razen če so zvezani z in, pa, ter, ne–ne, niti–niti, ali, bodisi, oziroma. Sicer pa je bolje pisati kratke stavke kot pretirano dolge.

V računalništvu se stalno pojavljajo novi pojmi in nove besede, za katere pogosto še ne obstajajo uveljavljeni slovenski izrazi. Kadar smo v dvomih, kateri slovenski izraz je primeren, si lahko pomagamo z Računalniškim slovarčkom [13].

Poglavje 13

Koristni nasveti pri pisanju v LaTeXu

Programski paket LaTeX je bil prvotno predstavljen v priročniku [6] in je v resnici nadgradnja sistema TeX avtorja Donalda Knutha [4], znanega po svojih knjigah o umetnosti programiranja, ter Knuth-Bendixovem algoritmu [5].

Različnih implementacij LaTeXa je cela vrsta. Za OS X priporočamo TeXShop, za Windows PC pa MikTeX. Spletna verzija, ki poenostavi sodelovanje pri pisanju, je Overleaf.

Včasih smo si pri pisanju v LaTeXu pomagali predvsem s tiskanimi priročniki, danes pa je enostavneje in hitreje, da ob vsakem problemu za pomoč enostavno povprašamo Google, saj je na spletu cela vrsta forumov za pomoč pri TeXiranju.

LaTeX včasih ne zna deliti slovenskih besed, ki vsebujejo črke s strešicami. Če taka beseda štrli preko desnega roba, LaTeXu pokažemo, kje lahko tako besedo deli, takole: `ra\-ču\-nal\-ni\-štvo`. Katere vrstice štrlijo preko desnega roba, se lahko prepričamo tako, da dokument prevedemo s vključeno opcijo `draft`: `\documentclass[a4paper, 12pt, draft]{book}`.

Predlagamo, da v izvornem besedilu začenjate vsak stavek v novi vrstici, saj LaTeX sam razporeja besede po vrsticah postavljenega besedila. Bo pa zato iskanje po izvornem besedilu in popravljanje veliko hitrejše. Večina sistemov za TEXiranje sicer omogoča s klikanjem enostavno prestopanje iz prevedenega besedila na ustrezno mesto v izvornem besedilu in obratno.

Boljšo preglednost dosežemo, tako kot pri pisanju programske kode, tudi z izpuščanjem praznih vrstic za boljšo preglednost strukture izvornega besedila.

S pomočjo okolja `\begin{comment} ... \end{comment}` lahko hkrati zakomentiramo več vrstic izvornega besedila.

Pri spreminjanju in dodajanju izvornega besedila je najbolje pogosto prevajati, da se sproti prepričamo, če so naši nameni izpolnjeni pravilno.

Kadar besedilo, ki je že bilo napisano z nekim vizualnim urejevalnikom (npr. z Wordom), želimo prenesti v LATEX, je tudi najbolje to delati postopoma s posameznimi bloki besedila, tako da lahko morebitne napake hitro identificiramo in odpravimo. Za prevajanje Wordovih datotek v LATEX sicer obstajajo prevajalniki, ki pa običajno ne generirajo tako čisto logično strukturo besedila, kot jo LATEX omogoča. Hiter in enostaven način prevedbe besedila, ki zahteva sicer ročne dopolnitve, poteka tako, da besedilo urejeno z vizualnim urejevalnikom najprej shranimo v formatu pdf, nato pa to besedilo uvozimo v urejevalnik, kjer urejamo izvorno besedilo v formatu LATEX.

13.1 Pisave v LATEXu

V LATEXovem okolju lahko načeloma uporabljamo poljubne pisave. Izbira poljubne pisave pa ni tako enostavna kot v vizualnih urejevalnikih besedil. Posamezne oblikovno medseboj usklajene pisave so običajno združene v družine pisav. V LATEXu se privzeta družina pisav imenuje Computer Modern, kjer so poleg navadnih črk (roman v LATEXu) na voljo tudi kurzivne črke (*italic* v LATEXu), krepke (**bold** v LATEXu), kapitelke (SMALL CAPS v LATEXu), linearne črke (san serif v LATEXu) in druge pisave. V istem dokumentu zaradi skladnega izleda uporabljamo običajno le pisave ene družine.

Ko začenjamo uporabljati LATEX, je zato najbolj smiselno uporabljati kar privzete pisave, s katerimi je napisan tudi ta dokument. Z ustreznimi ukazi lahko nato preklapljamo med navadnimi, kurzivnimi, krepkimi in drugimi pisavami. Zelo enostavna je tudi izbira velikosti črk. LaTeX odlično podpira večjezičnost, tudi v sklopu istega dokumenta, saj obstajajo pisave za praktično vse jezike, tudi take, ki ne uporabljajo latinskih črk.

Za prikaz programske kode se pogosto uporablja pisava, kjer imajo vse črke enako širino, kot so črke na mehanskem pisalnem stroju (`typewriter` v LaTeXu).

Najbolj priročno okolje za pisanje kratkih izsekov programske kode je okolje `verbatim`, saj ta ohranja vizualno organizacijo izvornega besedila in ima privzeto pisavo pisalnega stroja.

```
for (i = 0; i < 100; i++)
   for (j = i; j < 10; j++)
      some_function(i, j);
```

Poglavje 14

Kaj pa literatura?

Kot smo omenili že v uvodu, je pravi način za citiranje literature uporaba BibTeXa [8]. BibTeX zagotovi, da nobene obvezne informacije pri določeni vrsti literature ne izpustimo in da vse informacije o določeni vrsti vira dosledno navajamo na enak način.

Osnovna ideja BibTeXa je, da vse informacije o literaturi zapisujemo v posebno datoteko, v našem primeru je to `literatura.bib`. Vsakemu viru v tej datoteki določimo simbolično ime. V našem primeru je v tej datoteki nekaj najbolj značilnih zvrsti literature, kot so knjige [6], članki v revijah [11] in zbornikih konferenc [10], spletni viri [8, 13, 12], tehnično poročilo [1], diplome [2] itd. Diploma [2] iz leta 1990 je bila prva diploma na Fakulteti za elektrotehniko in računalništvo, ki je bila oblikovana z LaTeXom! Novejše reference, ki so spletnih straneh svojih založnikov arhivirane v elektronski obliki, imajo določeno številko DOI: `http://dx.doi.org`, ki jo tudi lahko vključimo v izpis literature in omogoča neposredno povezavo do te reference [3].

Po vsaki spremembi pri sklicu na literaturo moramo najprej prevesti izvorno besedilo s prevajalnikom LaTeX, nato s prevajalnikom BibTeX, ki ustvari datoteko `vzorec_dip_Seminar.bbl`, in nato še dvakrat s prevajalnikom LaTeX.

Kako natančno se spisek literature nato izpiše (ali po vrstnem redu sklicevanja, ali po abecedi priimkov prvih avtorjev, ali se imena avtorjev pišejo pred priimki itd.) je odvisno od stilske datoteke. V diplomi bomo uporabili osnovno stilsko datoteko `plain`, oz. `plainnat`, ki vire razporedi po abecedi. Zato je potrebno pri določenih zvrsteh literature, ki nima avtorjev, dodati polje `key`, ki določi vrstni red vira po abecedi.

Z uporabo BibTeXa v slovenščini je še nekaj nedoslednosti, saj so pomožne besede, ki jih BibTeX sam doda, kot so *editor*, *pages* in besedica *and* pred zadnjim avtorjem, če ima vir več avtorjev [1], zapisane v angleščini, čeprav smo izbrali opcijo `slovene` pri paketu `babel`. To nedoslednost je možno popraviti z ročnim urejanjem datoteke `vzorec_dip_Seminar.bbl`, kar pa je smiselno šele potem, ko bibliografije v datoteki `literatura.bib` ne bomo več spreminjali, oziroma ne bomo več dodajali novih sklicev na literaturo v izvornem besedilu. Vsebino datoteke `vzorec_dip_Seminar.bbl` lahko na koncu urejanja tudi vključimo kar v izvorno besedilo diplome, tako da je vso besedilo, vključno z literaturo, zajeto le v eni datoteki.

Ko začenjamo uporabljati BibTeX je lažje, če za urejanje datoteke .bib uporabljamo kar isti urejevalnik kot za urejanje datotek .tex, čeprav obstajajo tudi posebni urejevalniki oziroma programi za delo z BibTeXom.

Le če se bomo na določen vir v besedilu tudi sklicevali, se bo pojavil tudi v spisku literature. Tako je avtomatično zagotovljeno, da se na vsak vir v seznamu literature tudi sklicujemo v besedilu diplome. V datoteki `.bib` imamo sicer lahko veliko več virov za literaturo, kot jih bomo uporabili v diplomi.

Vire v formatu BibTeX lahko enostavno poiščemo in prekopiramo iz spletnih strani založnikov ali različnih akademskih spletnih portalov za iskanje znanstvene literature v našo datoteko `.bib`. Izvoz referenc v Google učenjaku še dodatno poenostavimo, če v nastavitvah izberemo BibTeX kot želeni format za izvoz navedb. Navedbe, ki jih na tak način prekopiramo, pa moramo pred uporabo vseeno preveriti, saj so taki navedki pogosto generirani povsem avtomatično in lahko vsebujejo napačne ali nepopolne podatke.

Pri sklicevanju na literaturo na koncu stavka moramo paziti, da je pika po ukazu `\cite{ }`. Da LaTeX ne bi delil vrstico ravno tako, da bi sklic na literaturo v oglatih oklepajih začel novo vrstico, lahko pred sklicem na literaturo dodamo nedeljiv presledek: `~\cite{ }`.

14.1 Izbiranje virov za spisek literature

Dandanes se skoraj vsi pri iskanju informacij vedno najprej lotimo iskanja preko svetovnega spleta. Rezultati takega iskanja pa so pogosto spletne strani, ki danes obstajajo, jutri pa jih morda ne bo več, ali pa vsaj ne v taki obliki, kot smo jo prebrali. Smisel navajanja literature pa je, da tudi po dolgih letih nekdo, ki bo bral vašo diplomo, lahko poišče vire, ki jih navajate v diplomi. Taki viri pa so predvsem članki v znanstvenih revijah, ki se arhivirajo v knjižnicah, založniki teh revij pa večinoma omogočajo tudi elektronski dostop do arhiva vseh njihovih člankov.

Znanstveni rezultati, ki so objavljeni v obliki recenziranih člankov, bodisi v konferenčnih zbornikih, še bolje pa v znanstvenih revijah, so veliko bolj izčiščen in zanesljiv vir informacij, saj so taki članki šli skozi recenzijski postopek. Zato na svetovnem spletu začenjamo iskati vire za strokovna besedila predvsem preko akademskih spletnih portalov, kot so npr. Google učenjak, Research Gate ali Academia, saj so na teh portalih rezultati iskanja le akademske publikacije. Če je za dostop do nekega članka potrebno plačati, se obrnemo za pomoč in dodatne informacije na našo knjižnico.

Če res ne gre drugače, pa je pomembno, da pri sklicevanju na spletni vir, vedno navedemo tudi datum, kdaj smo dostopali do tega vira.

Poglavje 15

Sistem STUDIS in PDF/A

Elektronsko verzijo diplome moramo oddati preko sistema STUDIS v formatu PDF/A [9]. Natančneje v formatu PDF/A-1b.

LaTeX in omenjeni format imata še nekaj težav s sobivanjem. Paket `pdfx.sty`, ki naj bi LaTeXu omogočal podporo formatu PDF/A ne deluje v skladu s pričakovanji. Ta predloga delno ustreza formatu, vsekakor dovolj, da jo študentski informacijski sistem sprejme. Znaten del rešitve je prispeval Damjan Cvetan.

V predlogi, poleg izvornega dokumenta `.tex` in vloženih slik `pic1.pdf` in `pic2.png`, potrebujemo še predlogo datoteke z metapodatki `pdfa-1b.xmp` in datoteko z barvnim profilom `sRGBIEC1966-2.1.icm`.

Poglavje 16

Sklepne ugotovitve

Uporaba LaTeXa in BibTeXa je v okviru Diplomskega seminarja **obvezna**! Izbira LaTeX ali ne LaTeX pri pisanju dejanske diplomske naloge pa je prepuščena dogovoru med vami in vašim mentorjem.

Res je, da so prvi koraki v LaTeXu težavni. Ta dokument naj vam služi kot začetna opora pri hoji. Pri kakršnihkoli nadaljnih vprašanjih ali napakah pa svetujem uporabo Googla, saj je spletnih strani za pomoč pri odpravljanju težav pri uporabi LaTeXa ogromno.

Preden diplomo oddate na sistemu STUDIS, še enkrat preverite, če so slovenske besede, ki vsebujejo črke s strešicami, pravilno deljene. Poravnavo po vrsticah pa kontrolirajte tako, da izvorno datoteko prevedete z opcijo `draft`, kar vam pokaže predolge vrstice.

Literatura

[1] Michael Riis Andersen, Thomas Jensen, Pavel Lisouski, Anders Krogh Mortensen, Mikkel Kragh Hansen, Torben Gregersen, and Peter Ahrendt. Kinect depth sensor evaluation for computer vision applications. Technical report, Department of Engineering, Aarhus University, 2012.

[2] Andreja Balon. Vizualizacija. Diplomska naloga, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, Univerza v Ljubljani, 1990.

[3] Matjaž Kljun, Rok Krulec, Klen Čopič Pucihar, and Franc Solina. Persuasive technologies in m-learning for training professionals: how to keep learners engaged with adaptive triggering. *IEEE Transactions on Learning Technologies*, pages 1–1, 2018. URL `https://doi.org/10.1109/tlt.2018.2840716`.

[4] Donald Knuth. Dosegljivo: `https://sl.wikipedia.org/wiki/Donald_Knuth`. [Dostopano: 1. 10. 2016].

[5] Donald E Knuth and Peter B Bendix. Simple word problems in universal algebras. In Jörg H. Siekmann and Graham Wrightson, editors, *Automation of Reasoning: Classical papers on computational logic 1957–1966*, pages 342–376. Springer, 1983.

[6] Leslie Lamport. *LaTEX: A Document Preparation System.* Addison-Wesley, 1986.

[7] Tobias Oetiker, Hubert Partl, Irene Hyna, and Elisabeth Schlegl. Ne

najkrajši uvod v LaTeX2ε. Dosegljivo: http://www-lp.fmf.uni-lj.si/plestenjak/vaje/latex/lshort.pdf, 2006. [Dostopano: 1. 10. 2016].

[8] Oren Patashnik. BibTeXing. Dosegljivo: http://bibtexml.sourceforge.net/btxdoc.pdf, 1988. [Dostopano 5. 6. 2016].

[9] pdfa. PDF/A. Dosegljivo: http://en.wikipedia.org/wiki/PDF/A, 2005. [Dostopano: 5. 6. 2016].

[10] Peter Peer and Borut Batagelj. Art—a perfect testbed for computer vision related research. In *Recent Advances in Multimedia Signal Processing and Communications*, pages 611–629. Springer, 2009.

[11] Franc Solina. 15 seconds of fame. *Leonardo*, 37(2):105–110, 2004.

[12] Franc Solina. Light fountain—an interactive art installation. Dosegljivo: https://youtu.be/CS6x-QwJywg, 2015. [Dostopano: 9. 10. 2015].

[13] Matjaž Gams (ured.). DIS slovarček, slovar računalniških izrazov, verzija 2.1.70. Dosegljivo: http://dis-slovarcek.ijs.si. [Dostopano: 1. 10. 2016].