Inverzije permutacij, permutacijski grafi in tekmovalnostni grafi

Luka Uranič
Mentorica: izr. prof. dr. Polona Oblak

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Fakulteta za matematiko in fiziko

Ljubljana, 2023

Uvod

- Kombinatorične interpretacije inverzij permutacij
- Graf inverzij
- Karakterizacija permutacijskega grafa
- Tekmovalnostni grafi
- Gručenje tekmovalcev

Permutacije in inverzije permutacij

Definicija permutacije:

Bijektivni preslikavi $\pi : [n] \to [n]$ rečemo permutacija.

Primer permutacije $\pi : [6] \to [6]$:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} = (3, 1, 5, 2, 6, 4).$$

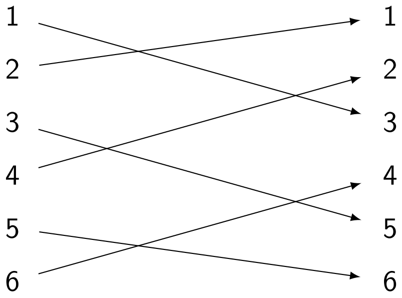
Definicija inverzije:

Inverzija permutacije $\sigma = (a_1, a_2, \ldots a_n) \in S_n$ je urejen par (a_i, a_j), kjer je $i < j$ in $a_i > a_j$.

Inverzije permutacije π so $\{(3, 1), (3, 2), (5, 2), (5, 4), (6, 4)\}$.

Število inverzij

Število inverzij permutacije nam meri stopnjo neurejenosti oziroma oddaljenost permutacije od identične permutacije in je enako številu presečišč v puščičnem diagramu permutacije.



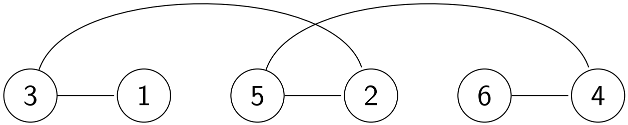
Identična permutacija $id = (1, 2, \ldots, n)$ nima inverzij.
Permutacija $(n, n-1, \ldots, 1)$ ima $\binom{n}{2}$ inverzij.

Permutacijski grafi

Definicija permutacijskega grafa:

Naj bo $\sigma \in S_n$. Graf inverzij permutacije σ, ki ga označimo z G_σ, je neusmerjen graf z $V(G_\sigma) = [n]$, kjer je $xy \in E(G_\sigma)$ natanko tedaj, ko je (x, y) ali (y, x) inverzija permutacije σ. Vsak graf izomorfen grafu G_σ za neko permutacijo σ imenujemo permutacijski graf.

$\pi = (3, 1, 5, 2, 6, 4)$



Kohezivno zaporedje grafa

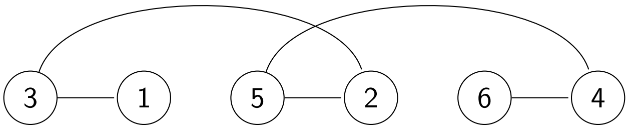
Definicija kohezivnega zaporedja grafa:

Naj bo G neusmerjen graf na n vozliščih. Zaporedju vozlišč $I = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ rečemo kohezivno zaporedje grafa G, če sta za poljubne i, j, k, kjer je $1 \leq i < k < j \leq n$, izpolnjena naslednja pogoja:

(a) Če je $v_i v_k \in E(G)$, $v_k v_j \in E(G)$, potem je $v_i v_j \in E(G)$.

(b) Če je $v_i v_j \in E(G)$, potem je $v_i v_k \in E(G)$ ali $v_k v_j \in E(G)$.

$\pi = (3, 1, 5, 2, 6, 4)$



Karakterizacija permutacijskih grafov

Izrek:

Naj bo $\sigma \in S_n$. Zaporedje vozlišč $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n))$ je kohezivno zaporedje permutacijskega grafa G_σ.

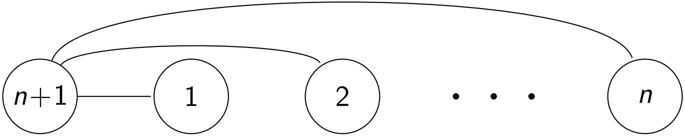
Izrek (karakterizacija permutacijskih grafov):

Graf G je permutacijski graf natanko tedaj, ko ima kohezivno zaporedje.

Zvezde in poti

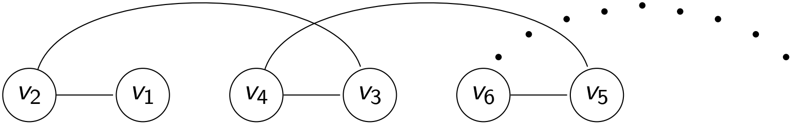
Trditev:

Zvezda $K_{1,n}$ je permutacijski graf.



Trditev:

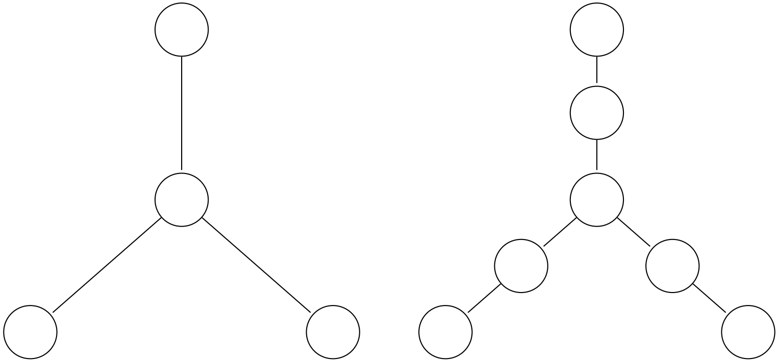
Pot P_n je permutacijski graf.



Drevo $K_{1,3}^*$

Trditev:

Drevo $K_{1,3}^*$ ni permutacijski graf.



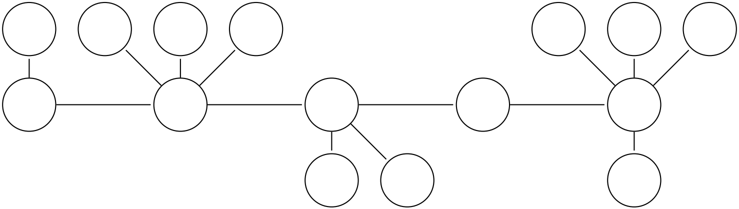
Gosenice

Definicija gosenice:

Drevo je gosenica, če po odstranitvi vseh listov dobimo pot.

Lema:

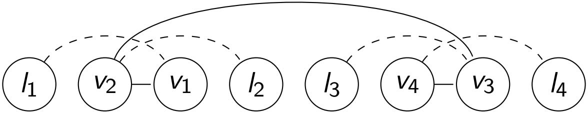
Drevo je gosenica natanko tedaj, ko ne vsebuje podgrafa $K^*_{1,3}$.



Drevesa, ki so permutacijski grafi

Izrek:

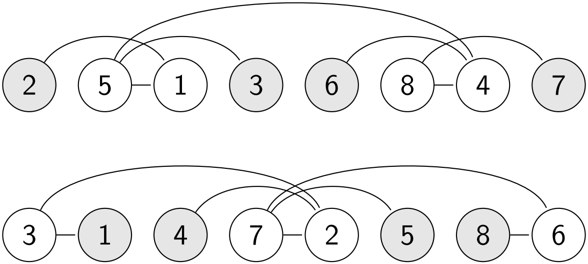
Drevo je permutacijski graf natanko tedaj, ko je gosenica.



Permutacije gosenic

Izrek:

Naj bo $n \geq 3$ in C gosenica na n vozliščih. Potem obstajata natanko dve permutaciji iz S_n, katerih permutacijski graf je izomorfen grafu gosenice C.



Rangiranja in tekmovalnost vozlišč

Definicija rangiranja:

Rangiranje $c = (i_1, \ldots, i_n)$ množice $[n]$ je permutacija iz S_n. Pisali bomo $i \prec_c j$, kadar se vozlišče i pojavi pred vozliščem j v vektorju rangiranja c.

Definicija tekmovanja para vozlišč:

Naj bo $R = \{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ končna množica rangiranj. Potem rečemo, da par vozlišč $(i, j) \in [n] \times [n]$ (neposredno) tekmuje, če obstajata takšni rangiranji $c_s, c_t \in R$, da je $i \prec_{c_s} j$ ampak $j \prec_{c_t} i$.

Naj bo $R = \{c_1, c_2, c_3\}$ množica rangiranj množice [6]:

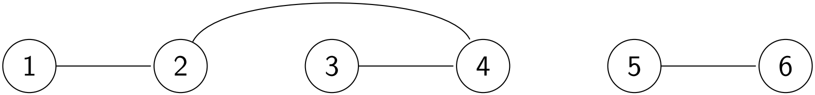
$$c_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6), \quad c_2 = (2, 1, 3, 4, 6, 5), \quad c_3 = (1, 4, 2, 3, 5, 6).$$

Pari vozlišč $(1, 2), (2, 4), (3, 4)$ in $(5, 6)$ tekmujejo.

Tekmovalnostni grafi

Definicija tekmovanja para vozlišč:

Naj bo $R = \{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ množica rangiranj množice $[n]$. Tekmovalnostni graf množice rangiranj R definiramo kot neusmerjen graf $G_c(R) = ([n], E)$, kjer je množica povezav E podana na nasledni način: med i in j je povezava, če (i, j) tekmujeta.



Delna kohezivnost

Definicija delne kohezivnosti:

Naj bo G neusmerjen graf na n vozliščih. Zaporedju vozlišč $I = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ rečemo delno kohezivno zaporedje grafa G, če za poljubne i, j, k, kjer je $1 \leq i < k < j \leq n$ velja naslednji pogoj:

(b) Če je $v_i v_j \in E(G)$, potem je $v_i v_k \in E(G)$ ali $v_k v_j \in E(G)$.

Graf G je delno koheziven, če ima delno kohezivno zaporedje.

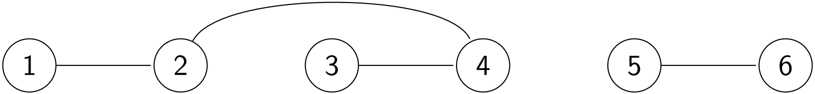
Izrek:

Vsak tekmovalnostni graf je delno koheziven.

Množice posrednih in neposrednih tekmovalcev

Definicija množice posrednih in neposrednih tekmovalcev:

Če vzamemo množico rangiranj $R = \{c_1, \ldots, c_r\}$ množice $[n]$, rečemo, da par vozlišč $(i, j) \in [n] \times [n]$ posredno ali neposredno tekmuje, če obstaja tak $k \in \mathbb{N}$ in vozlišča $i_1, \ldots, i_k \in [n]$, da (i, i_1) tekmujeta, (i_1, i_2) tekmujeta, $\ldots$, in (i_k, j) tekmujeta.
Množici vozlišč $D \subseteq [n]$ rečemo množica posrednih in neposrednih tekmovalcev, če vsaka dva elementa $i, j \in D$ posredno ali neposredno tekmujeta in D je maksimalna glede na to lastnost.



Algoritem za izračun množic posrednih in neposrednih tekmovalcev

$$D_{[p,q]} = \{x \in [n] \mid c_s^{-1}(x) \in [p,q] \text{ za nek } c_s \in R\}$$

$$c_1 = (1,2,3,4,5,6)$$
$$c_2 = (2,1,3,4,6,5)$$
$$c_3 = (1,4,2,3,5,6)$$

$$D_{[1,1]} = \{1,2\} \subseteq D_1 \qquad max\{1,2,3\} = 3$$
$$D_{[1,3]} = \{1,2,3,4\} \subseteq D_1 \qquad max\{1,2,3,4\} = 4$$
$$D_{[1,4]} = \{1,2,3,4\} = D_1$$
$$D_{[5,5]} = \{5,6\} \subseteq D_2 \qquad max\{5,6\} = 6$$
$$D_{[5,6]} = \{5,6\} = D_2$$

Zaključek

- Permutacije in inverzije permutacij
- Permutacijski graf
- Kohezivno zaporedje
- Karakterizacija permutacijskih grafov
- Gosenice
- Drevesa, ki so permutacijski grafi
- Rangiranja
- Tekmovalnost para vozlišč
- Množica posrednih in neposrednih tekmovalcev
- Tekmovalnostni grafi
- Delna kohezivnost
- Algoritem za izračun množic posrednih in neposrednih tekmovalcev