Univerza v Ljubljani
Fakulteta za računalništvo in informatiko
Fakulteta za matematiko in fiziko

Luka Uranič

Inverzije permutacij, permutacijski grafi in tekmovalnostni grafi

DIPLOMSKO DELO

INTERDISCIPLINARNI UNIVERZITETNI
ŠTUDIJSKI PROGRAM PRVE STOPNJE
RAČUNALNIŠTVO IN MATEMATIKA

Mentorica: izr. prof. dr. Polona Oblak

Ljubljana, 2023

Besedilo je oblikovano z urejevalnikom besedil LaTeX.

Kandidat: Luka Uranič
Naslov: Inverzije permutacij, permutacijski grafi in tekmovalnostni grafi
Vrsta naloge: Diplomska naloga na univerzitetnem programu prve stopnje Računalništvo in matematika
Mentor: izr. prof. dr. Polona Oblak

Opis:
Besedilo teme diplomskega dela študent prepiše iz študijskega informacijskega sistema, kamor ga je vnesel mentor. V nekaj stavkih bo opisal, kaj pričakuje od kandidatovega diplomskega dela. Kaj so cilji, kakšne metode naj uporabi, morda bo zapisal tudi ključno literaturo.

Title: Inversions of permutations, permutation graphs and competitivity graphs

Description:
opis diplome v angleščini

Zahvaljujem se mentorici izr. prof. dr. Poloni Oblak za pomoč in usmeritvi pri izdelavi diplomskega dela.

Kazalo

Povzetek

Naslov: Inverzije permutacij, permutacijski grafi in tekmovalnostni grafi

Avtor: Luka Uranič

V diplomski nalogi si najprej ogledamo inverzije permutacij, njihove lastnosti, rodovno funkcijo za število permutacij množice $[n]$ z i inverzijami in Bruhatovi delni urejenosti. Nato pokažemo kako permutacije predstavimo s permutacijskimi grafi, karakteriziramo permutacijske grafe s pomočjo kohezivnega zaporedja vozlišč, pokažemo, da so gosenice edina drevesa, ki so permutacijski grafi ter pokažemo, da za $n \geq 3$ obstajata natanko dve permutaciji, ki generirata permutacijski graf izomorfen neki gosenici na n vozliščih. Potem si ogledamo kaj so tekmovalnostni grafi, množice tekmovalcev, množice posrednih in neposrednih tekmovalcev ter algoritem, ki ne potebuje konstrukcije tekmovalnostega grafa, za izračun množice posrednih in neposrednih tekmovalcev. Na koncu uporabimo algoritem na primeru z resničnimi podatki.

Ključne besede: permutacije, inverzije, rangiranja, permutacijski grafi, tekmovalnostni grafi, primerljivostni grafi.

Abstract

Title: Inversions of permutations, permutation graphs and competitivity graphs

Author: Luka Uranič

This sample document presents an approach to typesetting your BSc thesis using LaTeX. A proper abstract should contain around 100 words which makes this one way too short.

Keywords: permutations, inversions, rankings, permutation graphs, competitivity graphs, comparability graphs.

Poglavje 1

Uvod

Inverzija permutacije je par elementov, ki sta v obratnem vrstem redu kot v permutaciji $(1, 2, \ldots, n)$. Število inverzij nam meri stopnjo neurejenosti oziroma oddaljenost permutacije od urejenega zaporedja števil $1, 2, \ldots, n$. Permutacijski graf permutacije π je graf z vozlišči $\{1, 2, \ldots, n\}$, kjer je xy povezava natanko tedaj, ko je par elementov (x, y) ali (y, x) inverzija permutacije π.

Leta 2012 so Gervacio, Rapanut in Ramos [5] karakterizirali permutacijske grafe s pomočjo kohezivnega zaporedja vozlišč. Poleg tega so pokazali, da so gosenice edina drevesa, ki so permutacijski grafi ter kako lahko na enostaven način konstruiramo permutacijske grafe. Leta 2023 sta Brualdi in Dahl [2] pokazala, da obstajata natanko dve permutaciji iz S_n, katerih permutacijski graf je izomorfen neki dani gosenici na n vozliščih ($n \geq 3$). Poleg tega pokažeta tudi, kako so permutacije urejene v šibki Bruhatovi delni urejenosti. Definicija Bruhatove delne urejenosti na permutacijah je podana v članku [10]. V [8] Margolius prikaže, kakšna je rodovne funkcije za število permutacij dolžine n z i inverzijami.

Vsak permutacijski graf je tudi tekmovalnostni. Tekmovalnostni graf je generiran z množico permutacij oziroma rangiranj R. Vozlišča tekmovalnostnega grafa so $\{1, 2, \ldots, n\}$, kjer je xy povezava natanko tedaj, ko je par elementov (x, y) v dveh permutacijah iz R v različnem vrstnem redu.

Leta 2015 so Criado, García, Pedroche in Romance v [3] predstavili in analizirali nekaj pomembnih množic vozlišč tekmovalnostnega grafa. Na primer, množica tekmovalcev je množica vozlišč, kjer vsako vozlišče iz množice tekmuje z vsemi ostalimi vozlišči iz množice. Množica posrednih in neposrednih tekmovalcev je množica vozlišč, kjer vsako vozlišče iz množice posredno ali neposredno tekmuje z vsemi vozlišči iz množice preko neke poti v grafu, kjer med seboj tekmujeta vsaki sosednji vozlišči na poti. Poleg tega predstavijo algoritem za izračun množic posrednih in neposrednih tekmovalcev, ki ne potrebuje konstrukcije tekmovalnostnega grafa.

Ostale informacije o permutacijah, inverzijah, permutacijskih grafih in faktorskem številskem sistemu so bile pridobiljene iz [9, 1, 4].

V drugem poglavju bomo predstavili permutacije in inverzije permutacij. Pogledali si bomo njihove lastnosti ter različne urejenosti množice permutacij S_n. V tretjem poglavju bomo definirali permutacijske grafe in jih karakterizirali s pomočjo kohezivnega zaporedja vozlišč. Pokazali bomo, da so gosenice edina drevesa, ki so permutacijski grafi. V četrtem poglavju bomo predstavili tekmovalnostne grafe, množice tekmovalcev, množice posrednih in neposrednih tekmovalcev ter algoritem za izračun množice posrednih in neposrednih tekmovalcev, ki ne potebuje konstrukcije tekmovalnostega grafa.

1.1 Splošne oznake in definicije

V delu bomo uporabili naslednje oznake in definicije. Graf $G = (V(G), E(G))$ ima množico vozlišč $V(G)$ in množico povezav $E(G)$. Premer grafa je najdaljša pot med dvema vozliščema. Disjunktna unija grafov je združitev dveh grafov v večji graf tako, da naredimo disjunktno unijo množic vozlišč in disjunktno unijo množic povezav. Komplement grafa G označimo z $\overline{G}$ (nepovezave grafa G so povezave grafa $\overline{G}$). K_n je poln graf na n vozliščih, $\overline{K_n}$ je nepovezan graf na n vozliščih, P_n je pot na n vozliščih, $K_{m,n}$ je dvodelen graf z m vozlišči v eni in n vozlišči v drugi množici. Določiti smer povezave uv grafa G pomeni spremeniti uv v urejen par (u, v) ali (v, u). Usmerjen graf je graf, ki ima vse povezave usmerjene. Orientacija grafa G je usmerjen graf, ki je pridobljen tako, da vsaki povezavi grafa G določimo smer.

Relacija R na neprazni množici A je množica urejenih parov elementov iz A, to pomeni $R \subseteq A \times A$. Oznako $(x, y) \in R$ preberemo kot x je v relaciji R z y, kar označimo z xRy. Relacija R je:

- refleksivna, če xRx za vsak $x \in A$,
- irefleksivna, če $\neg xRx$ za vsak $x \in A$,
- simetrična, če iz xRy sledi, yRx za vsaka $x, y \in A$,
- asimetrična, če iz xRy sledi, $\neg yRx$ za vsaka $x, y \in A$,
- antisimetrična, če iz xRy sledi, da je $x = y$ ali $\neg yRx$ za vsaka $x, y \in A$,
- tranzitivna, če iz xRy in yRz sledi, da je xRz za vse $x, y, z \in A$,
- sovisna, če iz $x \neq y$ sledi, da xRy ali yRx za vsaka $x, y \in A$,
- strogo sovisna, če xRy ali yRx za vsaka $x, y \in A$.

Za relacijo R rečemo, da je:

- delna urejenost, če je R refleksivna, antisimetrična in tranzitivna,
- linearna urejenost, če je R antisimetrična, strogosovisna, transitivna,
- stroga delna urejenost, če je R asimetrična in tranzitivna,
- stroga linearna urejenost, če je R asimetrična, sovisna in transitivna.

Če je R linearna urejenost, potem je delna urejenost. Če je R stroga linearna urejenost, potem je stroga delna urejenost.

Definicija 1.1 (definicija grupe) *Naj bo A množica in $\cdot$ operacija, ki vsakemu urejenemu paru elementov iz A priredi natančno določen element iz množice A:*

$$\cdot : A \times A \to A$$

Par $(A, \cdot)$ je grupa če veljajo naslednje trditve:

1. *Za vsake* $a, b, c \in A$ *velja* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *(asociativnost)*
2. *Obstaja tak element* $e \in A$*, da za vsak* $a \in A$ *velja* $a \cdot e = e \cdot a = a$ *(obstoj enote)*
3. *Za vsak* $a \in A$ *obstaja tak element* $a^{-1} \in A$*, da velja* $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ *(obstoj inverza)*

Poglavje 2

Permutacije in inverzije

V tem poglavju bomo definirali permutacije, pogledali kako jih lahko predstavimo in pokazali, da so permutacije množice $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ skupaj z operacijo kompozitum grupa. Nato bomo definirali inverzije permutacije, pogledali kako sta definirani Bruhatovi delni urejenosti, pokazali, kako zapišemo rodovno funkcijo za število permutacij množice $[n]$ z i inverzijami, in si ogledali, kako lahko uredimo množico S_n in tako permutacije identificiramo s celimi števili.

2.1 Permutacije

Množico naravnih števil od 1 do n označimo z $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Permutacije so prerazporeditve elementov neke končne množice. Elemente te množice lahko oštevilčimo s števili $1, 2, \ldots, n$, za nek n, zato bomo brez škode za splošnost permutacije gledali na množici $[n]$. Permutacije so pomembne v matematiki, računalništvu in na številnih drugih področjih.

Definicija 2.1 *Bijektivni preslikavi $\pi : [n] \to [n]$ rečemo permutacija. S_n je množica vseh permutacij na množici $[n]$.*

2.1.1 Zapis permutacij

Permutacijo π lahko zapišemo z vodoravno tabelo:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Ker ima množica $[n]$ naravno urejenost $1 \leq 2 \leq \cdots \leq n$, lahko zgornjo vrstico izpustimo in π predstavimo zgolj s spodnjo vrstico:

$$\pi = (\pi(1), \pi(2), \cdots, \pi(n)) = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n),$$

kjer je $\pi_i = \pi(i)$. Temu zapisu bomo rekli enovrstični zapis permutacije. Permutacijo lahko zapišemo tudi s produktom disjunktnih ciklov:

$$\pi = (a_1 a_2 \cdots a_{i_1})(b_1 b_2 \cdots b_{i_2}) \cdots (c_1 c_2 \cdots c_{i_k}).$$

Ta zapis nam pove, da je:

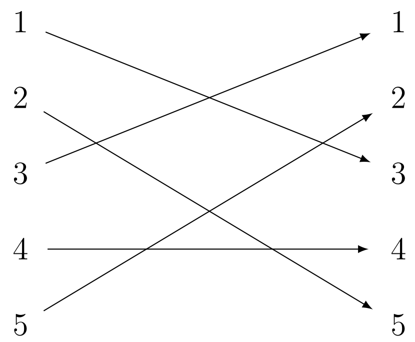
$$\begin{array}{ccccc} \pi(a_1) = a_2, & \pi(a_2) = a_3, & \cdots & \pi(a_{i_1-1}) = a_{i_1}, & \pi(a_{i_1}) = a_1 \\ \pi(b_1) = b_2, & \pi(b_2) = b_3, & \cdots & \pi(b_{i_2-1}) = b_{i_2}, & \pi(b_{i_2}) = b_1 \\ & & \cdots & & \\ \pi(c_1) = c_2, & \pi(c_2) = c_3, & \cdots & \pi(c_{i_k-1}) = c_{i_k}, & \pi(c_{i_k}) = c_1. \end{array}$$

Primer 2.1 *Naj bo $\pi \in S_5$, $\pi(1) = 3$, $\pi(2) = 5$, $\pi(3) = 1$, $\pi(4) = 4$ in $\pi(5) = 2$ (slika 2.1). Na naslednji način zapišemo permutacijo π z vodoravno tabelo in enovrstičnim zapisom:*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (3, 5, 1, 4, 2).$$

Če so vsi elementi permutacije manjši od 10, bomo med številkami izpustili vejice. Včasih izpustimo tudi oklepaje. Pri tem moramo vedeti, da to ni zapis permutacije z disjunktnimi cikli.

$$\pi = (35142) = 35142$$



Slika 2.1: Primer bijektivne preslikave (permutacije) $\pi = (3, 5, 1, 4, 2)$.

Permutacijo π *zapišemo s produktom disjunktnih ciklov na naslednji način:*

$$\pi = (13)(25)(4).$$

Če vemo koliko elementov ima permutacija, lahko cikle dolžine ena izpustimo:

$$\pi = (13)(25).$$

Zapis permutacije π *kot produkt disjunktnih ciklov ni enoličen, saj lahko na začetek vsakega cikla postavimo poljuben element iz tega cikla, poleg tega pa disjunktni cikli komutirajo:*

$$\pi = (31)(52) = (52)(31).$$

V nadaljevanju bomo za zapis permutacije uporabljali enovrstični zapis razen, kjer bo navedeno drugače.

2.1.2 Simetrična in permutacijska grupa

Naj bo $id \in S_n$ permutacija podana s predpisom $id(a) = a$ za vsak $a \in [n]$.

Kompozitum preslikav, ki ga označimo z $\circ$, je operacija na množici preslikav. Kompozitum preslikav $\pi \circ \sigma$ je taka preslikava, ki najprej element preslika z σ, nato pa dobljeni element preslika še s π.

Trditev 2.1 $(S_n, \circ)$ *je grupa.*

Dokaz.

1. Asociativnost: Naj bodo $\pi, \sigma, \tau \in S_n$. Za vsak $i \in [n]$ velja:

$$((\pi \circ \sigma) \circ \tau)(i) = (\pi \circ \sigma)(\tau(i)) = \pi(\sigma(\tau(i))),$$

$$(\pi \circ (\sigma \circ \tau))(i) = \pi((\sigma \circ \tau)(i)) = \pi(\sigma(\tau(i))).$$

2. Obstoj enote: Za vsaka $\pi \in S_n$ in $i \in [n]$ velja:

$$(\pi \circ id)(i) = \pi(id(i)) = \pi(i),$$

$$(id \circ \pi)(i) = id(\pi(i)) = \pi(i).$$

3. Obstoj inverza: Naj bo $\pi \in S_n$. Ker je π bijekcija, obstaja $\pi^{-1} \in S_n$:

$$\pi \circ \pi^{-1} = \pi^{-1} \circ \pi = id.$$

S pomočjo zgornjih lastnosti smo pokazali, da je $(S_n, \circ)$ grupa. □

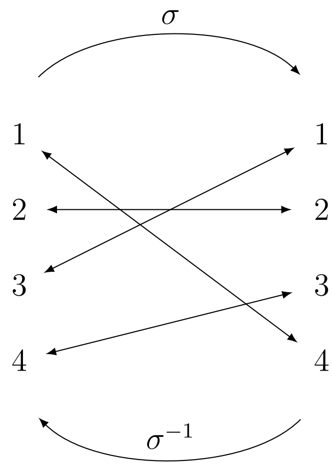
Definicija 2.2 *Grupi $(S_n, \circ)$ rečemo simetrična grupa. Vsaki podgrupi simetrične grupe rečemo permutacijska grupa.*

Po Cayleyevem izreku [9] je vsaka grupa izomorfna neki permutacijski grupi.

2.2 Inverzije permutacij

V tem podpoglavju bomo najprej definirali inverzijo permutacije, ki je par elementov, ki sta v obratnem vrstem redu kot v identični permutaciji. Število inverzij nam meri stopnjo neurejenosti permutacije oziroma oddaljenost permutacije od identične permutacije.

Definicija 2.3 *Inverzija permutacije $\sigma = (a_1, a_2, \dots a_n) \in S_n$ je urejen par (a_i, a_j), kjer je $i < j$ in $a_i > a_j$. Množico vseh inverzij permutacije σ označimo z I_σ. Pozicijski zapis inverzije (a_i, a_j) je (i, j).*



Slika 2.2: Permutacija $\sigma = (4, 2, 1, 3)$ in njen inverz $\sigma^{-1} = (3, 2, 4, 1)$.

Naj bo (a_i, a_j) inverzija permutacije σ. Potem je po definiciji 2.3 veljata pogoja:

$$\sigma^{-1}(a_i) = i < j = \sigma^{-1}(a_j), \quad \sigma(i) = a_i > a_j = \sigma(j).$$

Torej je (j, i) inverzija permutacije σ^{-1}. Še več, če ima permutacija σ inverzije $(a_{i_1}, a_{j_1}), \ldots, (a_{i_k}, a_{j_k})$, potem ima σ^{-1} inverzije $(j_1, i_1), \ldots, (j_k, i_k)$. Število inverzij permutacije σ je enako številu inverzij permutacije σ^{-1}.

Primer 2.2 *Naj bo* $\sigma = (4, 2, 1, 3)$ *kot na sliki 2.2. Inverzije permutacije* σ *so* $(4, 2), (4, 1), (4, 3), (2, 1)$. *Pozicijski zapisi inverzij permutacije* σ *so* $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3)$. *Inverz permutacije* σ *je* $\sigma^{-1} = (3, 2, 4, 1)$. *Inverzije permutacije* σ^{-1} *so* $(3, 2), (3, 1), (2, 1), (4, 1)$. *To so ravno obrnjeni pozicijski zapisi inverzij permutacije* σ.

Identična permutacija $id = (1, 2, \ldots, n)$ nima inverzij. Največ inverzij ima permutacija $(n, n-1, \ldots, 1)$. V tem primeru je vsak par različnih števil v inverziji. Število izborov dveh elementov izmed n je ravno $\binom{n}{2}$, torej je $|I_{(n,n-1,\ldots,1)}| = \binom{n}{2}$.

Število inverzij je enako številu presečišč v puščičnem diagramu permutacije (slika 2.2). To je res, saj vsaka inverzija (a_i, a_j) ustreza presečišču puščic, ki izhajajata iz i in j ter gresta proti a_i in a_j, kjer je $a_i > a_j$ in $i < j$.

Standardne primerjalne algoritme razvrščanja, kot je na primer merge sort, lahko prilagodimo tako, da izračunamo število inverzij neke permutacije iz S_n v času $O(n \cdot \log(n))$, [7].

2.3 Bruhatovi delni urejenosti permutacij

Definicija 2.4 *(Krepka) Bruhatova delna urejenost na množici S_n je tranzitivno refleksivna ovojnica relacije $\preceq_B$, ki jo definiramo kot $\sigma \preceq_B (ij) \cdot \sigma$, če je $|I_{(ij)\cdot\sigma}| = |I_\sigma| + 1$, kjer je (ij) zapis transpozicije elementov na pozicijah i in j.*

Primer 2.3 *Naj bo $\sigma = (1,2,4,3) \in S_4$ in $\pi = (2,3,4,1) \in S_4$ (slika 2.3). σ manjša od π v (krepki) Bruhatovi delni urejenosti, ker velja:*

$$\sigma = (1,2,4,3) \preceq_B (2,1,4,3) \preceq_B (2,3,4,1) = \pi.$$

Definicija 2.5 *Naj bosta $\sigma, \pi \in S_n$. Permutacija σ je manjša ali enaka od permutacije π v šibki Bruhatovi delni urejenosti, kar označimo z $\sigma \preceq_b \pi$, če je $I_\sigma \subseteq I_\pi$.*

Iz definicije 2.5 sledi, da lahko σ pridobimo iz π z zaporedjem transpozicij sosednih elementov, pri čemer vsaka transpozicija zmanjša število inverzij za ena.

Primer 2.4 *Naj bo $\pi = (4,2,1,3)$ in $\sigma = (2,1,3,4)$. Potem sta:*

$$I_\pi = \{(4,2),(4,1),(4,3),(2,1)\}, I_\sigma = \{(2,1)\}$$

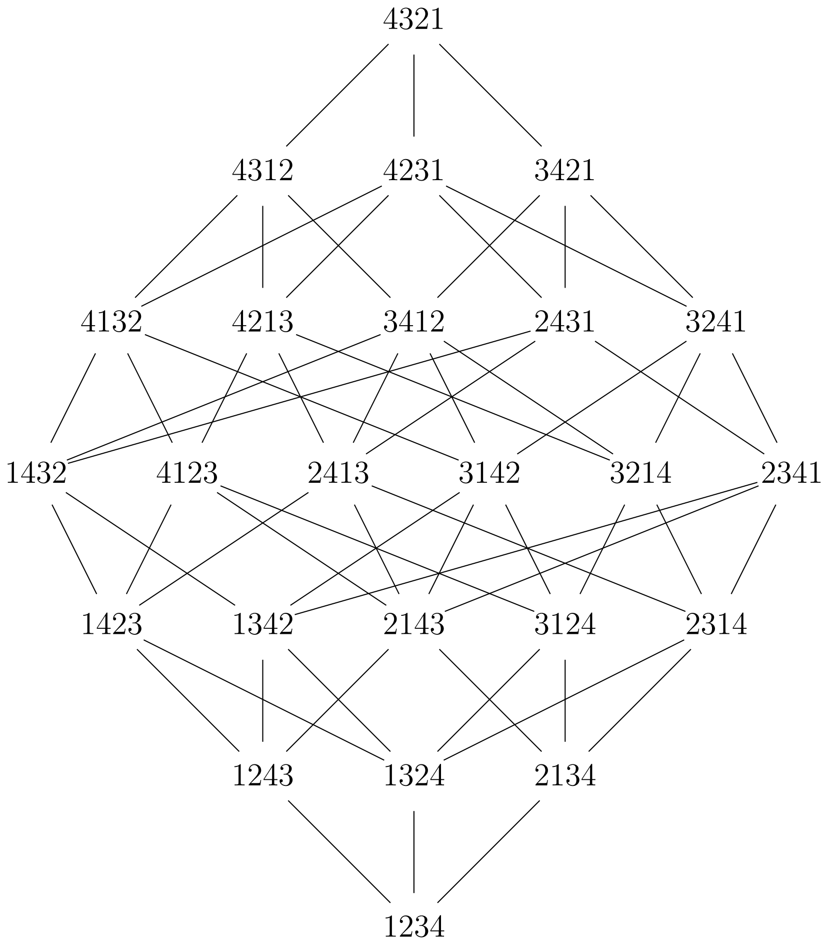
in zato $\sigma \preceq_b \pi$ (slika 2.4). Permutacijo σ pridobimo iz π z zaporedjem treh transpozicij sosednjih elementov:

$$(4,2,1,3) \overset{(12)}{\to} (2,4,1,3) \overset{(23)}{\to} (2,1,4,3) \overset{(34)}{\to} (2,1,3,4).$$

Opazimo, da je množica:

$$I_\pi \setminus I_\sigma = \{(4,3),(4,2),(4,1)\}$$

ravno množica inverzij I_τ za permutacijo $\tau = (4,1,2,3)$.

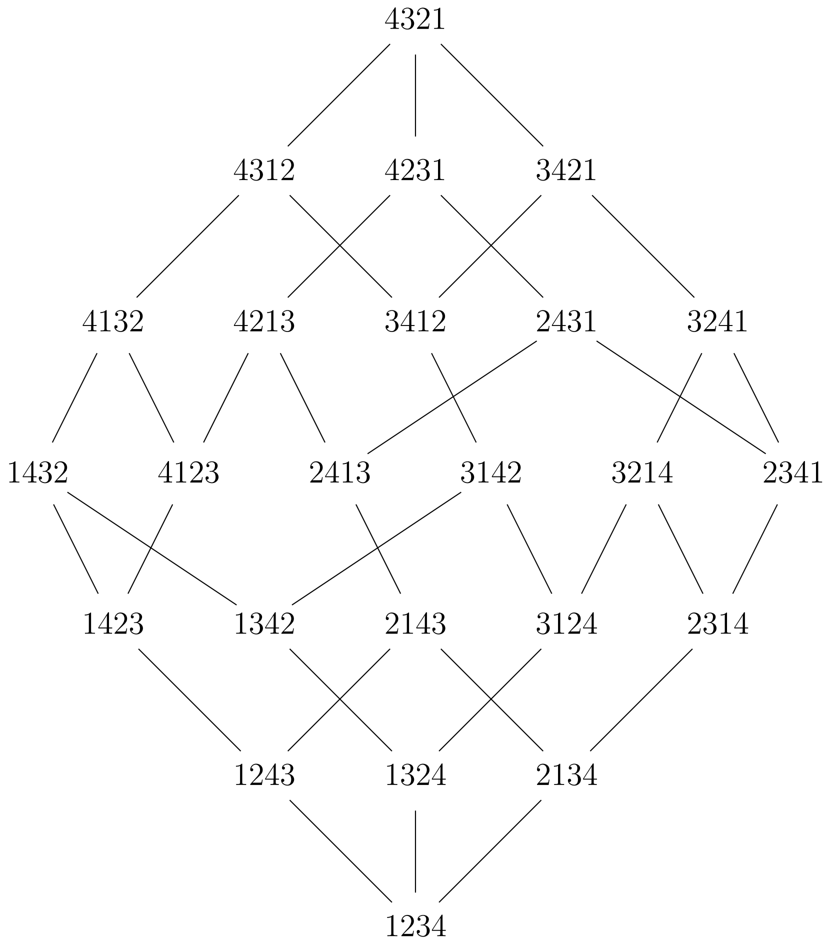


Slika 2.3: Hessejev diagram Bruhatove delne urejenosti množice S_4.

Naslednja lema nam pove, kaj se zgodi z množicami inverzij I_π in I_σ permutacij π in σ, kjer eno pridobimo iz druge s poljubno transpozicijo.

Lema 2.1 *Naj bo* $\pi = (i_1, \ldots, i_{k-1}, i_k, \ldots, i_l, i_{l+1}, \ldots, i_n) \in S_n$, *kjer je* $i_k > i_l$ *in* $1 \leq k < l \leq n$, *in* $\sigma = (i_1, \ldots, i_{k-1}, i_l, \ldots, i_k, i_{l+1}, \ldots, i_n) \in S_n$, *pridobljena iz* π *s transpozicijo elementov* i_k *in* i_l. *Poglejmo si particijo množice* $L = \{k, k+1, \ldots, l\}$ *v množice* L_1, L_2, L_3 *in* $\{k, l\}$, *kjer so:*

$$L_1 = \{s \in L : i_s > i_k\}, L_2 = \{s \in L : i_k > i_s > i_l\}, L_3 = \{s \in L : i_s < i_l\}.$$



Slika 2.4: Hessejev diagram šibke Bruhatove delne urejenosti množice S_4.

Množici inverzij I_π, I_σ permutacij π, σ imata razliki:

$$\begin{aligned} I_\pi \setminus I_\sigma &= \{(i_k, i_l)\} \cup \{(i_k, i_s) : s \in L_2 \cup L_3\} \cup \{(i_s, i_l) : s \in L_1 \cup L_2\}, \\ I_\sigma \setminus I_\pi &= \{(i_l, i_s) : s \in L_3\} \cup \{(i_s, i_k) : s \in L_1\}. \end{aligned}$$

Vidimo, da je $\sigma \preceq_b \pi$ ($I_\sigma \subseteq I_\pi$) natanko tedaj, ko za vsak s, kjer je $k < s < l$, velja $i_k > i_s > i_l$ ($I_\sigma \setminus I_\pi = \emptyset$). Zato je $\sigma \preceq_b \pi$ natanko tedaj, ko lahko pridobimo σ iz π z zaporedjem transpozicij sosednjih elementov, ki zmanjšajo število inverzij za ena.

Dokaz. Naj bo $1 \leq k < l \leq n$, $\pi = (i_1, \ldots, i_{k-1}, i_k, \ldots, i_l, i_{l+1}, \ldots, i_n) \in S_n$, kjer je $i_k > i_l$, in $\sigma = (i_1, \ldots, i_{k-1}, i_l, \ldots, i_k, i_{l+1}, \ldots, i_n) \in S_n$, pridobljena iz π s transpozicijo elementov i_k in i_l. Inverzije oblike $(i_a, i_b), (i_{b_1}, i_{b_2})$, (i_b, i_c) in (i_a, i_c), kjer je $a < k$, $k \leq b \leq l$, $k < b_1 < l$, $k < b_2 < l$ in $l < c$, so v obeh permutacijah. Zato jih v razlikah $I_\pi \setminus I_\sigma$ in $I_\sigma \setminus I_\pi$ ni. Razliki sta zato ravno:

$$I_\pi \setminus I_\sigma = \{(i_k, i_l)\} \cup \{(i_k, i_s) : s \in L_2 \cup L_3\} \cup \{(i_s, i_l) : s \in L_1 \cup L_2\},$$
$$I_\sigma \setminus I_\pi = \{(i_l, i_s) : s \in L_3\} \cup \{(i_s, i_k) : s \in L_1\}.$$

Sledi, da je $\sigma \preceq_b \pi$ $(I_\sigma \subseteq I_\pi)$ natanko tedaj, ko za vsak s, kjer je $k < s < l$, velja $i_k > i_s > i_l$ $(I_\sigma \setminus I_\pi = \emptyset)$. $\square$

Opomba 2.1 *Če je $\sigma \preceq_b \pi$, potem $I_\pi \setminus I_\sigma$ ni vedno množica inverzij neke permutacije (glej primera 2.4 in 2.5). Drži pa, da z ustreznim preimenovanjem elementov dobimo množico inverzij neke permutacije (glej primer 2.5). V splošnem, če je $\sigma \preceq_b \pi$, potem lahko $I_\pi \setminus I_\sigma$ vedno identificiramo z množico inverzij neke permutacije v smislu, da je vsak interval $[\sigma, \pi]$ v Hessejevem diagramu, kjer je $\pi = \tau \circ \sigma$, v šibki Bruhatovi urejenosti izomorfen nekemu intervalu oblike $[id, \tau]$, kjer je $\tau = \tau \circ id$. To je res, saj je τ po definiciji šibke Bruhatove urejenosti takšna, da doda nekaj novih inverzij, vendar ohrani vse inverzije permutacije σ. Če τ uporabimo na id prav tako pridobimo enako število inverzij, ki so med seboj v enakih razmerjih, kot novo pridobljene inverzije permutacije π.*

Primer 2.5 *Naj bo $\pi = (3, 1, 4, 2)$ in $\sigma = (1, 3, 2, 4)$. Potem sta:*

$$I_\pi = \{(3, 1), (3, 2), (4, 2)\}, I_\sigma = \{(3, 2)\}$$

in zato $\sigma \preceq_b \pi$. Opazimo, da množica:

$$I_\pi \setminus I_\sigma = \{(3, 1), (4, 2)\}$$

ni množica inverzij I_τ za nobeno permutacijo τ. Če bi bila, bi 4 morala biti desno od 3 in 1 ter levo od 2. Iz tega bi sledilo, da je $(3, 2)$ tudi inverzija. Ampak za preimenovanje:

$$1 \to 1,\ 2 \to 3,\ 3 \to 2,\ 4 \to 4$$

dobimo množico inverzij $I_\tau = \{(2,1),(4,3)\}$ *permutacije* $\tau = (2,1,4,3)$.

Kot poseben primer je $id \preceq_b \pi$, za vsak $\pi \in S_n$. Zato je urediti permutacijo (jo preoblikovati v identično permutacijo) s k inverzijami vedno mogoče. To lahko storimo z zaporedjem k transpozicij sosednjih elementov. Na vsakem koraku izberemo transpozicijo i in $i+1$, če je element na poziciji $i+1$ manjši od elementa na poziciji i. Na ta način zmanjšamo število inverzij za 1. To ponavljamo, dokler ne pridemo do identične permutacije.

Primer 2.6 *Postopek ureditve permutacije* $\sigma = (4,2,1,3)$, *ki ima* 4 *inverzije:*

$$(4,2,1,3) \stackrel{(12)}{\to} (2,4,1,3) \stackrel{(23)}{\to} (2,1,4,3) \stackrel{(34)}{\to} (2,1,3,4) \stackrel{(12)}{\to} (1,2,3,4).$$

2.4 Rodovne funkcije permutacij

Naj bo $f_n(x)$ rodovna funkcija s koeficienti a_i pred x^i, ki štejejo število permutacij množice $[n]$ z i inverzijami:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{\binom{n}{2}} a_i x^i.$$

Število vseh permutacij množice $[n]$ je $n!$, zato velja:

$$\sum_{i=0}^{\binom{n}{2}} a_i = n!.$$

Sedaj si poglejmo, kako rekurzivno konstruiramo rodovno funkcijo $f_n(x)$. Začnimo z rodovno funkcijo f_1. Edina permutacija iz S_1 je (1). Ta permutacija nima nobene inverzije. Tako dobimo rodovno funkcijo:

$$f_1(x) = 1.$$

Sedaj iz permutacije iz S_1 naredimo permutacijo iz S_2 tako, da vstavimo dvojko na prvo ali drugo mesto. Vidimo da, če jo vstavimo na prvo mesto, dobimo permutacijo $(2, 1)$, ki ima eno inverzijo. V drugem primeru pa dobimo permutacijo $(1, 2)$, ki nima inverzij. Tako dobimo rodovno funkcijo:

$$f_2(x) = 1 + x = f_1(x) \cdot (1 + x).$$

Sedaj iz permutacije iz S_2 na podoben način naredimo permutacijo iz S_3. Imamo dve različni permutaciji iz S_2. Permutacija $(1, 2)$ je brez inverzij. Ko vstavimo trojko na poljubno mesto, ustvarimo permutacijo z dvema, eno ali nič inverzijami. Druga permutacija je $(2, 1)$ z eno inverzijo. Ko vstavimo trojko na poljubno mesto, ustvarimo permutacijo s tremi, dvema ali eno inverzijo, torej zopet dve, eno ali nič novih inverzij. Tako dobimo rodovno funkcijo:

$$f_3(x) = 1+2x+2x^2+x^3 = 1\cdot(1+x+x^2)+x\cdot(1+x+x^2) = f_2(x)\cdot(1+x+x^2).$$

Vidimo da, ko v permutacijo iz S_{n-1} vstavimo element n, lahko naredimo med 0 in $n - 1$ novih inverzij $(1 + x + \cdots + x^{n-1})$ odvisno od tega, kam vstavimo element n. Prav tako vse inverzije, ki so bile del permutacije iz S_{n-1}, ostanejo. Tako iz a_i permutacij iz S_{n-1} z i inverzijami dobimo a_i permutacij iz S_n z i inverzijami (vstavimo n na zadnje mesto), a_i permutacij iz S_n z $i+1$ inverzijami (vstavimo n na predzadnje mesto), $\ldots$, a_i permutacij iz S_n z $i + n - 1$ inverzijami (vstavimo n na prvo mesto). Se pravi iz člena $a_i x^i$ v rodovni funkciji f_{n-1} dobimo člene $a_i x^i \cdot (1 + x + \cdots + x^{n-1})$ v rodovni funkciji f_n. Zato, velja rekurzivna zveza:

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) \cdot (1 + x + \cdots + x^{n-1}).$$

In tako dobimo eksplicitno formulo za rodovno funkcijo:

$$f_n(x) = \prod_{m=1}^{n} \sum_{i=0}^{m-1} x^i = 1(1 + x)(1 + x + x^2) \cdots (1 + x + \cdots + x^{n-1}).$$

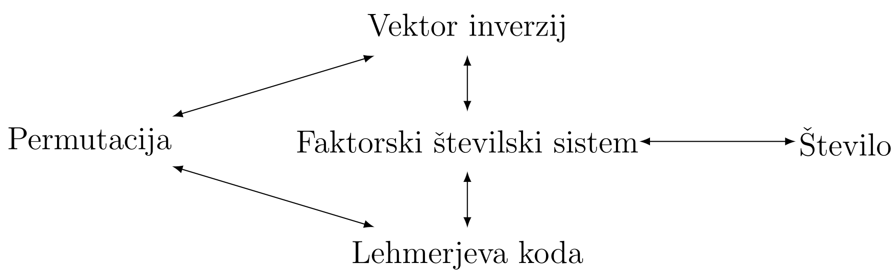
Naslednja formula iz [8] nam pove, kako je Donald Knuth izrazil koeficient a_i iz rodovne funkcije f_n:

$$a_i = \binom{n+i-1}{i} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left(\binom{n+i-u_j-j-1}{i-u_j-j} + \binom{n+i-u_j-1}{i-u_j} \right),$$

kjer so $u_j = \frac{j(3j-1)}{2}$ petkotniška števila. Če je v binomskem simbolu spodaj negativno število, je vrednost binomskega simbola enaka 0. Zato je vsota končna.

2.5 Lehmerjeva koda in vektor inverzij

Množico S_n lahko uredimo na različne načine. Zato lahko vsaki permutaciji iz množice S_n dodelimo celo število N, kjer je $0 \leq N \leq n!$. To je ravno njena zaporedna številka v neki ureditvi. V tem podpoglavju si bomo pogledali ureditvi s pomočjo Lehmerjeve kode in vektorja inverzij. Lehmerjeva koda in vektor inverzij sta zapisa števil v faktorskem številskem sistemu. Uporabimo ju kot vmesni korak med pretvarjanjem števila v permutacijo in obratno (slika 2.5).



Slika 2.5: Pretvorba med permutacijo in številom z vmesnim korakom.

2.5.1 Faktorski številski sistem

Faktorski številski sistem je številski sistem, kjer teže pozicije števk niso geometriska vrsta nekega števila, temveč so fakultete naravnih števil (primer 2.7). Naj ima število v faktorskem številskem sistemu zapis $d_n d_{n-1} ... d_2 d_1$, potem ima števka d_i na poziciji i težo $(i-1)!$. Števka d_i je nenegativno celo število manjše od i (pri tem lahko izpustimo d_1, saj je d_1 vedno 0).

Število zapisano v faktorskem številskem sistemu pretvorimo v desetiški številski sistem tako, da seštejemo produkt vseh števk s pripadajočo težo pozicije števke (primer 2.7).

Primer 2.7 *Vzemimo za primer število* $341010_!$ *v faktorskem številskem sistemu. Ker je:*

$$341010_! = 3 \cdot 5! + 4 \cdot 4! + 1 \cdot 3! + 0 \cdot 2! + 1 \cdot 1! + 0 \cdot 0! = 463_{10}$$

je $341010_! = 463_{10}$

Naj bo x pozitivno celo število zapisano v desetiškem številskem sistemu. Število x bi radi zapisali v faktorskem številskem sistemu kot

$$x = \sum_{i=1}^{n} d_i \cdot (i-1)!$$

Če x delimo z 1, potem je

$$x = r_1 + 1 \cdot x^{(1)},$$

kjer je $x = x^{(1)}$ in $r_1 = 0 < 1$. Potem lahko rekurzivno delimo $x^{(1)}$ z 2 in dobimo

$$x^{(1)} = r_2 + 2 \cdot x^{(2)}$$

in zato

$$x = r_1 + 1 \cdot (r_2 + 2 \cdot x^{(2)}),$$

kjer je $x^{(2)} < x^{(1)}$ in $r_2 < 2$. Na ta način nadaljujemo rekurzijo, ki ima končno število korakov in dobimo:

$$x = r_1 + 1 \cdot (r_2 + 2 \cdot (r_3 + 3 \cdot (\cdots + (n-1) \cdot r_n))),$$

kjer je $0 \leq r_i < i$ za $i = 1, 2, \ldots, n$. Se pravi $d_i = r_i$. Tako dobimo faktorski zapis števila x.

Pretvorbo iz desetiškega v faktorski številski sistem torej naredimo tako, da število zaporedoma delimo s števili $1, 2, 3, \ldots$ in si zapisujemo ostanke pri deljenju, dokler ne dobimo 0 kot rezultat deljenja. Zapis števila so ostanki pri deljenju v vrstem redu od zadnjega deljenja proti prvemu (primer 2.8).

Primer 2.8 *Vzemimo za primer število* 463 *v desetiškem številskem sistemu. Ker je:*

$$\begin{aligned}
463/1 = 463,\ ostanek = 0, &\quad 463 = 0\cdot 0! + 463\cdot 1!\\
463/2 = 231,\ ostanek = 1, &\quad 463 = 1\cdot 1! + 231\cdot 2!\\
231/3 = 77,\ ostanek = 0, &\quad 463 = 1\cdot 1! + 0\cdot 2! + 77\cdot 3!\\
77/4 = 19,\ ostanek = 1, &\quad 463 = 1\cdot 1! + 1\cdot 3! + 19\cdot 4!\\
19/5 = 3,\ ostanek = 4, &\quad 463 = 1\cdot 1! + 1\cdot 3! + 4\cdot 4! + 3\cdot 5!\\
3/6 = 0,\ ostanek = 3, &\quad 463 = 1\cdot 1! + 1\cdot 3! + 4\cdot 4! + 3\cdot 5! + 0\cdot 6!
\end{aligned}$$

je $463_{10} = 341010_!$

2.5.2 Pretvorba med Lehmerjevo kodo ali vektorjem inverzij in številom

Lehmerjeva koda in vektor inverzij sta zapisa števil v faktorskem številskem sistemu, zato je pretvorba med Lehmerjevo kodo ali vektorjem inverzij in številom ravno pretvorba med faktorskim in desetiškim številskim sistemom.

2.5.3 Pretvorba med Lehmerjevo kodo ali vektorjem inverzij in permutacijo

Poglejmo si najprej pretvorbi permutacije v Lehmerjevo kodo in vektor inverzij. Naj bo $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in S_n$ in $d_n d_{n-1} ... d_2 d_1$ zapis števila v faktorskem številskem sistemu (Lehmerjeva koda ali vektor inverzij), ki pripada permutaciji σ.

V Lehmerjevi kodi permutacije σ števka d_n predstavlja $\sigma_1 - 1$. To je število elementov manjših od σ_1, ki so v inverziji s σ_1. Števka d_{n-1} predstavlja število elementov, ki so manjši od σ_2 in so v inverziji s σ_2. V splošnem, števka d_{n-i+1} predstavlja število elementov, ki so manjši od σ_i in so v inverziji s σ_i.

Vektor inverzij permutacije σ je podoben zapis. d_{n-j+1} nam pove, koliko je inverzij oblike (i, j), kjer je j manjša vrednost para števil v inverziji.

Obe kodiranji lahko prikažemo z Rothejevim diagramom, kjer so pike postavljene na pozicijah (i, σ_i), križi pa predstavljajo inverzije permutacije. Lehmerjeva koda nam šteje število križev v vsaki vrstici, vektor inverzij pa nam šteje število križev v vsakem stolpcu. Ker ima inverzna permutacija ravno transponiran Rothejev diagram, sledi, da je vektor inverzij ravno Lehmerjeva koda inverzne permutacije in Lehmerjeva koda je ravno vektor inverzij inverzne permutacije. Primer Rothejevega diagrama je prikazan v tabeli 2.1.

$i \setminus \sigma_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Lehmerjeva koda
1	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\cdot$				$d_9 = 5$
2	$\times$	$\times$	$\cdot$							$d_8 = 2$
3	$\times$	$\times$		$\times$	$\times$		$\times$	$\cdot$		$d_7 = 5$
4	$\cdot$									$d_6 = 0$
5		$\times$		$\cdot$						$d_5 = 1$
6		$\times$			$\times$		$\times$		$\cdot$	$d_4 = 3$
7		$\times$			$\times$		$\cdot$			$d_3 = 2$
8		$\cdot$								$d_2 = 0$
9					$\cdot$					$d_1 = 0$
Vektor inverzij	3	6	1	2	4	0	2	0	0	

Tabela 2.1: Rothejev diagram za permutacijo $\sigma = (6, 3, 8, 1, 4, 9, 7, 2, 5)$.

Sedaj si poglejmo še pretvorbi Lehmerjeve kode in vektorja inverzij v permutacijo (primeri za permutacije iz S_4 so v tabeli 2.2).

Da bi pretvorili Lehmerjevo kodo $d_n d_{n-1} ... d_1$ v permutacijo, najprej uredimo števila $1, 2, \dots, n$ v vrsto. σ_1 je enak elementu v vrsti, ki je za d_n elementi. Nato ta element izbrišemo iz vrste. σ_2 je enak elementu v spremenjeni vrsti, ki je za d_{n-1} elementi. Nato ta element izbrišemo iz vrste in ponovimo postopek za $\sigma_3, \dots, \sigma_n$ (primer 2.9). Ta postopek je inverzen prej opisanemu, saj ko izberemo element za σ_i, bo ta element vedno imel natanko d_{n-i+1} elementov, ki so manjši od σ_i in so v inverziji s σ_i.

Da bi pretvorili tabelo inverzij $d_n d_{n-1} ... d_1$ v permutacijo, imejmo najprej prazno vrsto. Najprej vzemimo n in ga vstavimo v vrsto za d_1 elementi (vedno 0). Nato vzamemo $n-1$ in ga vstavimo v vrsto za d_2 elementi, ..., vzamemo 1 in ga vstavimo v vrsto za d_n elementi (primer 2.10). Ta postopek je inverzen prej opisanemu, saj ko vstavimo element j za d_{n-j+1} elementi, bo j vedno v inverziji oblike (i, j) z natanko d_{n-j+1} elementi, kjer je j manjša vrednost para števil v inverziji.

Primer 2.9 *Vzemimo za primer Lehmerjevo kodo 525013200, kot v primeru iz tabele 2.1. Ker je*

$$
\begin{array}{llcl}
d_9 = 5, & [\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\ ] & \Rightarrow & \sigma_1 = 6, \\
d_8 = 2, & [\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9\ ] & \Rightarrow & \sigma_2 = 3, \\
d_7 = 5, & [\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9\ ] & \Rightarrow & \sigma_3 = 8, \\
d_6 = 0, & [\ 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9\ ] & \Rightarrow & \sigma_4 = 1, \\
d_5 = 1, & [\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9\ ] & \Rightarrow & \sigma_5 = 4, \\
d_4 = 3, & [\ 2,\ 5,\ 7,\ 9\ ] & \Rightarrow & \sigma_6 = 9, \\
d_3 = 2, & [\ 2,\ 5,\ 7\ ] & \Rightarrow & \sigma_7 = 7, \\
d_2 = 0, & [\ 2,\ 5\ ] & \Rightarrow & \sigma_8 = 2, \\
d_1 = 0, & [\ 5\ ] & \Rightarrow & \sigma_9 = 5,
\end{array}
$$

je $\sigma = (6, 3, 8, 1, 4, 9, 7, 2, 5)$ *permutacija Lehmerjeve kode 525013200.*

Primer 2.10 *Vzemimo za primer vektor inverzij 361240200, kot v primeru* *iz tabele 2.1. Ker je*

$$
\begin{array}{lcl}
d_1 = 0 & \Rightarrow & [\ 9\ ], \\
d_2 = 0 & \Rightarrow & [\ 8,\ 9\ ], \\
d_3 = 2 & \Rightarrow & [\ 8,\ 9,\ 7\ ], \\
d_4 = 0 & \Rightarrow & [\ 6,\ 8,\ 9,\ 7\ ], \\
d_5 = 4 & \Rightarrow & [\ 6,\ 8,\ 9,\ 7,\ 5\ ], \\
d_6 = 2 & \Rightarrow & [\ 6,\ 8,\ 4,\ 9,\ 7,\ 5\ ], \\
d_7 = 1 & \Rightarrow & [\ 6,\ 3,\ 8,\ 4,\ 9,\ 7,\ 5\ ], \\
d_8 = 6 & \Rightarrow & [\ 6,\ 3,\ 8,\ 4,\ 9,\ 7,\ 2,\ 5\ ], \\
d_9 = 3 & \Rightarrow & [\ 6,\ 3,\ 8,\ 1,\ 4,\ 9,\ 7,\ 2,\ 5\ ],
\end{array}
$$

je $\sigma = (6, 3, 8, 1, 4, 9, 7, 2, 5)$ *permutacija vektorja inverzij 361240200.*

Vsota števk v Lehmerjevi kodi ali vektorju inverzij nam pove število inverzij permutacije, saj vsak križ v Rothejevem diagramu predstavlja ravno eno inverzijo in vsota števk Lehmerjeve kode ali vekorja inverzij je ravno število vseh križev v Rothejevem diagramu.

σ	Lehmerjeva koda	Vektor inverzij	Število inverzij
1234	0000	0000	0
1243	0010	0010	1
1324	0100	0100	1
1342	0110	0200	2
1423	0200	0110	2
1432	0210	0210	3
2134	1000	1000	1
2143	1010	1010	2
2314	1100	2000	2
2341	1110	3000	3
2413	1200	2010	3
2431	1210	3010	4
3124	2000	1100	2
3142	2010	1200	3
3214	2100	2100	3
3241	2110	3100	4
3412	2200	2200	4
3421	2210	3200	5
4123	3000	1110	3
4132	3010	1210	4
4213	3100	2110	4
4231	3110	3110	5
4312	3200	2210	5
4321	3210	3210	6

Tabela 2.2: Permutacije iz S_4 z zapisom Lehmerjeve kode in tabele inverzij.

Poglavje 3

Permutacijski grafi

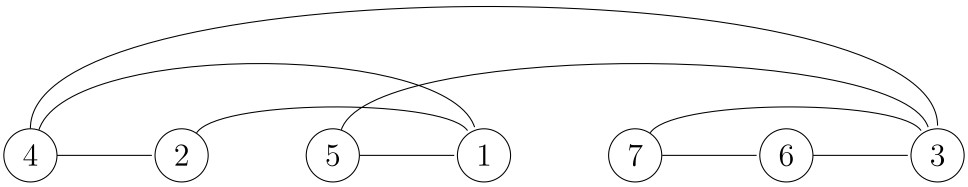
V tem poglavju bomo definirali permutacijske grafe in si ogledali njihovo karakterizacijo s kohezivnim zaporedjem grafa. Nato bomo pokazali, da so gosenice edina drevesa, ki so permutacijski grafi, in si ogledali, koliko je permutacij, katerih permutacijski graf je izomorfen neki poti ali gosenici. Na koncu pa bomo pokazali še, kako lahko konstruiramo permutacijske grafe.

3.1 Karakterizacija permutacijskih grafov

Definicija 3.1 *Naj bo $\sigma \in S_n$. Graf inverzij permutacije σ, ki ga označimo z G_σ, je neusmerjen graf z $V(G_\sigma) = [n]$, kjer je $xy \in E(G_\sigma)$ natanko tedaj, ko je (x, y) ali (y, x) inverzija permutacije σ. Vsak graf izomorfen grafu G_σ za neko permutacijo σ imenujemo permutacijski graf.*

Primer 3.1 *Naj bo $\sigma = (4, 2, 5, 1, 7, 6, 3) \in S_7$ permutacija in $V(G_\sigma) = [7]$ množica vozlišč grafa inverzij permutacije σ. Množica inverzij permutacije σ je $I_\sigma = \{(4, 2), (4, 1), (4, 3), (2, 1), (5, 1), (5, 3), (7, 6), (7, 3), (6, 3)\}$, zato je $E(G_\sigma) = \{42, 41, 43, 21, 51, 53, 76, 73, 63\}$ množica povezav grafa inverzij permutacije σ. Graf G_σ je prikazan na sliki 3.1.*

Če je graf permutacijski graf, potem lahko veliko problemov, ki so na poljubnih grafih NP-polni, rešimo v polinomskem času. Na primer iskanje



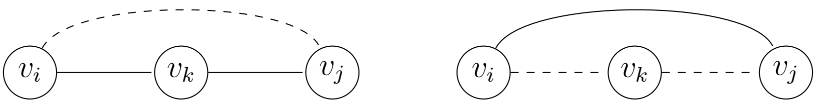
Slika 3.1: Primer grafa inverzij permutacije $\sigma = (4, 2, 5, 1, 7, 6, 3)$.

največjega podgrafa, ki je poln graf, je ekvivalentno iskanju največjega padajočega zaporedja v permutaciji, ki definira permutacijski graf [6].

Definicija 3.2 (Kohezivno zaporedje grafa) *Naj bo G neusmerjen graf na n vozliščih. Zaporedju vozlišč $l = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ rečemo kohezivno vozliščno zaporedje grafa G (ali enostavneje kohezivno zaporedje grafa G), če sta za poljubne i, j, k, kjer je $1 \leq i < k < j \leq n$, izpolnjena naslednja pogoja (slika 3.2):*

(a) Če je $v_i v_k \in E(G)$, $v_k v_j \in E(G)$, potem je $v_i v_j \in E(G)$.

(b) Če je $v_i v_j \in E(G)$, potem je $v_i v_k \in E(G)$ ali $v_k v_j \in E(G)$.



Slika 3.2: Pogoja za kohezivno zaporedje grafa G.

Lema 3.1 *Naj bo G graf. Zaporedje vozlišč l je kohezivno zaporedje grafa G natanko tedaj, ko je l kohezivno zaporedje grafa $\overline{G}$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Naj bo $l = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ kohezivno zaporedje grafa G. Trdimo, da je l kohezivno zaporedje grafa $\overline{G}$.

(a) Naj bosta $v_iv_k, v_kv_j \in E(\overline{G})$ taki povezavi, da $i < k < j$. Potem, po definiciji komplementa $v_iv_k, v_kv_j \notin E(G)$. Če pogoj (b) iz definicije 3.2 negiramo ($v_iv_k, v_kv_j \notin E(G) \Rightarrow v_iv_j \notin E(G)$), sledi, da $v_iv_j \notin E(G)$. Kar pomeni $v_iv_j \in E(\overline{G})$.

(b) Naj bo $v_iv_j \in E(\overline{G})$ taka povezava, da $i < j$ in k tako naravno število, da je $i < k < j$. Potem $v_iv_j \notin E(G)$. Če pogoj (a) iz definicije 3.2 negiramo, vidimo, da $v_iv_k \notin E(G)$ ali $v_kv_j \notin E(G)$. Zato sledi, da je $v_iv_k \in E(\overline{G})$ ali $v_kv_j \in E(\overline{G})$.

($\Leftarrow$) Obratna smer dokaza sledi iz dejstva, da je $\overline{\overline{G}} = G$. □

Izrek 3.1 *Naj bo $\sigma \in S_n$. Zaporedje vozlišč $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$ je kohezivno zaporedje permutacijskega grafa G_σ.*

Dokaz. Naj bo $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)) \in S_n$. Trdimo, da je σ kohezivno zaporedje grafa G_σ.

(a) Če je $i < k < j$ in $\sigma(i)\sigma(k), \sigma(k)\sigma(j) \in E(G_\sigma)$, potem sta $(\sigma(i), \sigma(k))$ in $(\sigma(k), \sigma(j))$ inverziji permutacije σ. To pomeni $\sigma(i) > \sigma(k) > \sigma(j)$. Zato je tudi $(\sigma(i), \sigma(j))$ inverzija permutacije σ in $\sigma(i)\sigma(j) \in E(G_\sigma)$.

(b) Naj bo $\sigma(i)\sigma(j) \in E(G_\sigma)$ in k tak, da $i < k < j$. Potem je $(\sigma(i), \sigma(j))$ inverzija permutacije σ in $\sigma(i) > \sigma(j)$. Če je $\sigma(i) > \sigma(k)$ je $(\sigma(i), \sigma(k))$ inverzija permutacije σ in $\sigma(i)\sigma(k) \in E(G_\sigma)$. Če je $\sigma(k) > \sigma(i)$, potem je tudi $\sigma(k) > \sigma(j)$ in je $(\sigma(k), \sigma(j))$ inverzija permutacije σ in $\sigma(k)\sigma(j) \in E(G_\sigma)$. To pomeni, da je $\sigma(i)\sigma(k) \in E(G_\sigma)$ ali $\sigma(k)\sigma(j) \in E(G_\sigma)$.

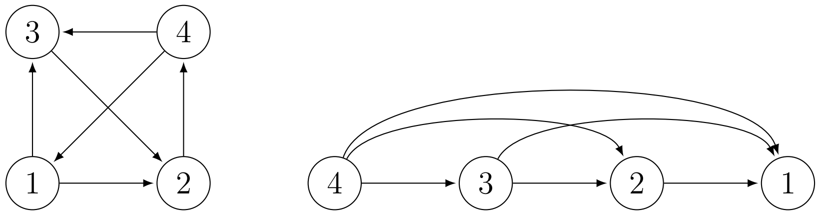
□

Zaporedje vozlišč $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ je kohezivno zaporedje grafa G natanko tedaj, ko je zaporedje vozlišč $(v_n, v_{n-1}, \ldots, v_1)$ kohezivno zaporedje grafa G, saj sta oba pogoja (a) in (b) iz definicije 3.2 hkrati izpolnjena ali neizpolnjena za obe zaporedji.

Pri dokazu izreka 3.3 bomo uporabili tranzitivne turnirje, zato si poglejmo, kaj je turnir in kaj je tranzitiven graf.

Za usmerjen graf D rečemo, da je tranzitiven, če je (x, z) usmerjena povezava grafa D, kadar sta (x, y) in (y, z) usmerjeni povezavi grafa D.

Polnemu orientiranemu grafu rečemo turnir. Rezultat vozlišča x v turnirju je izhodna stopnja vozlišča x. Označimo ga s $s(x)$. Rezultatsko zaporedje turnirja je zaporedje rezultatov vozlišč turnirja v nepadajočem vrstnem redu.



Slika 3.3: Levo je turnir, desno je tranzitiven turnir na 4 vozliščih.

Obstaja samo en tranzitiven turnir na n vozliščih (do izomorfizma natančno). Ta je izomorfen grafu permutacije $\sigma = (n, n-1, \ldots, 1)$ z usmerjenimi povezavami $x \to y$, če je (x, y) inverzija. Opazimo tudi, da v tranzitivnem turnirju ni usmerjenih ciklov.

Izrek 3.2 *Naj bo T turnir na n vozliščih. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

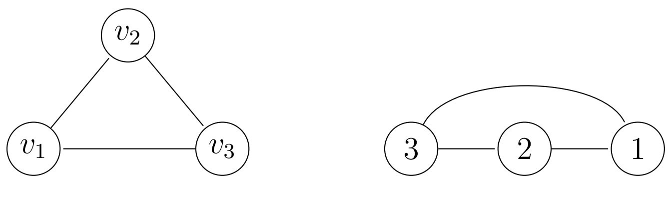
1. *T je tranzitiven.*
2. *Za vsaka $x, y \in V(T)$ velja, da če je (x, y) usmerjena povezava v T, potem je $s(x) > s(y)$.*
3. *Za vsaka $x, y \in V(T)$ velja, da če je $s(x) > s(y)$, potem je (x, y) usmerjena povezava v T.*
4. *Rezultatsko zaporedje turnirja T je $(0, 1, 2, \ldots, n-1)$.*

Dokaz. Tranzitiven turnir T na n vozliščih je izomorfen grafu permutacije $\sigma = (n, n-1, \ldots, 1)$ z usmerjenimi povezavami $x \to y$, če je (x, y) inverzija.

Če uredimo vozlišča od leve proti desni tako, kot so v permutaciji σ, vidimo, da ima vsako vozlišče povezave do vseh vozlišč desno od njega (slika 3.3 desno). Iz tega sledijo vse lastnosti iz izreka. $\square$

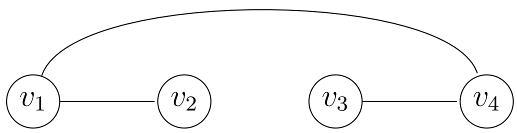
Izrek 3.3 *Graf G je permutacijski graf natanko tedaj, ko ima kohezivno zaporedje.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Vsak permutacijski graf G je po definiciji izomorfen nekemu grafu G_σ za neko permutacijo σ. Po izreku 3.1 je $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ kohezivno zaporedje grafa G_σ. Naj bo f izomorfizem, ki graf G slika v graf G_σ. Potem je $g = f^{-1}$ izomorfizem, ki graf G_σ slika v graf G. Sledi, da je $\pi = (g(\sigma(1)), \ldots, g(\sigma(n)))$ kohezivno zaporedje grafa G, saj je σ kohezivno zaporedje grafa G_σ (slika 3.4).



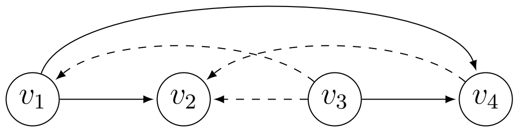
Slika 3.4: Izomorfna grafa G in G_σ.

($\Leftarrow$) Naj bo G graf s kohezivnim zaporedjem $\pi = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ (slika 3.5). Orientirajmo graf G tako, da vse povezave usmerimo od vozlišča z



Slika 3.5: Graf G s kohezivnim zaporedjem (v_1, v_2, v_3, v_4).

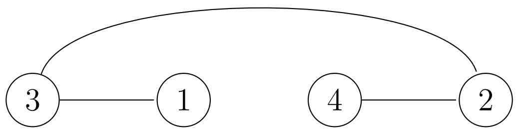
manjšim indeksom proti vozlišču z večjim indeksom. Če je $v_iv_j \in E(G)$ in $i < j$, potem dobimo (v_i, v_j). Označimo usmerjen graf, ki ga na ta način dobimo z D. Spomnimo se, da je zaradi pogoja (a) iz definicije 3.2 graf D tranzitiven. Orientirajmo še komplement $\overline{G}$ grafa G. Povezave $v_iv_j \in E(\overline{G})$, kjer je $i < j$, usmerimo od večjega indeksa k manjšemu in tako dobimo (v_j, v_i). Označimo dobljeni graf z $\overline{D}$. Po lemi 3.1 je π kohezivno zaporedje grafa $\overline{G}$. Po definiciji 3.2 je tudi usmerjen graf $\overline{D}$ tranzitiven. Unija grafov $T = D \cup \overline{D}$ je turnir, to je orientacija polnega grafa $G \cup \overline{G}$ (slika 3.6). Radi



Slika 3.6: Tranzitiven turnir T.

bi pokazali, da je T tranzitiven turnir.

Naj bosta (x, y) in (y, z) usmerjeni povezavi v grafu T. Če bi obe pripadali istemu grafu D ali $\overline{D}$, bi sledilo, da je (x, z) usmerjena povezava v T, saj sta D in $\overline{D}$ tranzitivna. Zato brez škode za splošnost privzamimo, da $(x, y) \in E(D)$ in $(y, z) \in E(\overline{D})$. Če je $(x, z) \in E(D)$ smo končali, saj je potem $(x, z) \in E(T)$. Zato privzamimo da $(x, z) \notin E(D)$. Poglejmo, ali je lahko $(z, x) \in E(D)$. Zaradi tranzitivnosti grafa D bi to pomenilo, da je tudi $(z, y) \in E(D)$, kar je v protislovju s tem, da je $(y, z) \in E(\overline{D})$. Potem je $(z, x) \in E(\overline{D})$ ali $(x, z) \in E(\overline{D})$. Če je $(z, x) \in E(\overline{D})$, potem zaradi tranzitivnosti $\overline{D}$ in $(y, z), (z, x) \in E(\overline{D})$ sledi, da je $(y, x) \in E(\overline{D})$. To je v protislovju z $(x, y) \in E(D)$. Zato je $(x, z) \in E(\overline{D})$. Sledi, da je $(x, z) \in E(T)$ in T je tranzitiven turnir. Po izreku 3.2 je rezultatsko zaporedje tranzitivnega turnirja T enako $(0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Rezultat vozlišča v_i tranzitivnega turnirja



Slika 3.7: Permutacijski graf G_σ, $\sigma = (3, 1, 4, 2)$.

T je $s(v_i)$ (slika 3.6).

Naj bo $\sigma(i) = 1 + s(v_i)$ (slika 3.7). Radi bi pokazali, da je $f : v_i \to 1 + s(v_i) = \sigma(i)$ izomorfizem, ki slika graf G v graf G_σ. Preslikava f je bijektivna, saj imajo vozlišča različne rezultate. Pokazati moramo še, da f ohranja sosednosti vozlišč. Naj bo $v_iv_j \in E(G)$, kjer je $i < j$. Potem je $(v_i, v_j) \in E(D)$. Ker je T tranzitiven turnir, je $s(v_i) > s(v_j)$ (izrek 3.2). Sledi, da je $\sigma(v_i) = 1+s(v_i) > 1+s(v_j) = \sigma(v_j)$. Zato je $(\sigma(i), \sigma(j))$ inverzija v σ in $f(v_i)f(v_j) \in E(G_\sigma)$. Obratno, naj bo $xy \in E(G_\sigma)$. Potem je (x, y) ali (y, x) inverzija v σ. Privzemimo, da je (x, y) inverzija v σ. Potem je $x = \sigma(i) = 1 + s(v_i)$ in $y = \sigma(j) = 1 + s(v_j)$, $i < j$. Ker je (x, y) inverzija, je $x > y$. Potem je tudi $s(v_i) > s(v_j)$ in $(v_i, v_j) \in E(T)$ (izrek 3.2). Ker je $i < j$, je $(v_i, v_j) \in E(D)$ in posledično $v_iv_j \in E(G)$. □

Izrek 3.4 *Naj bo G neusmerjen graf. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

(a) G je permutacijski graf.

(b) $\overline{G}$ je permutacijski graf.

(c) Vsak induciran podgraf grafa G je permutacijski graf.

(d) Vsaka povezana komponenta grafa G je permutacijski graf.

Dokaz. Ekvivalentnost trditve (a) in (b) sledi iz leme 3.1 in izreka 3.3. Naj bo G permutacijski graf. Po izreku 3.3 ima graf G kohezivno zaporedje $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Induciran podgraf z vozlišči $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}\}$, kjer $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, ima kohezivno zaporedje $(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k})$, saj sta izpolnjena pogoja (a) in (b) iz definicije 3.2. Torej induciran podgraf je permutacijski in iz (a) sledi (c). Iz (c) sledi (d), saj je vsaka povezana komponenta induciran podgraf. Pokazati moramo še, da iz (d) sledi (a). Naj bo G graf, ki ima povezane komponente $G_1, G_2, \ldots, G_k$. Naj bo n_i število vozlišč grafa G_i. Ker je vsaka povezana komponenta grafa G permutacijski graf, ima kohezivno zaporedje. Naj bo $l_i = (v_1^i, v_2^i, \ldots, v_{n_i}^i)$ kohezivno zaporedje povezane komponente G_i. Potem je

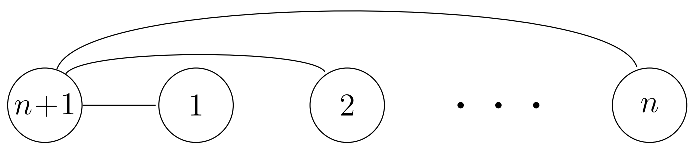
$$l = (l_1, l_2, \ldots, l_k) = (v_1^1, v_2^1, \ldots, v_{n_1}^1, v_1^2, v_2^2, \ldots, v_{n_2}^2, \ldots, v_1^k, v_2^k, \ldots, v_{n_k}^k)$$

kohezivno zaporedje grafa G in graf G permutacijski. □

3.2 Drevesa

Trditev 3.1 *Graf zvezde $K_{1,n}$ je permutacijski graf.*

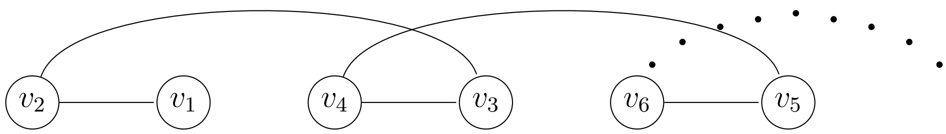
Dokaz. Permutacija $\pi = (n+1, 1, 2, \ldots, n)$ je kohezivno zaporedje zvezde $K_{1,n}$ (slika 3.8), saj sta pogoja (a) in (b) iz definicije kohezivnega zaporedja 3.2 izpolnjena. □



Slika 3.8: Primer kohezivnega zaporedja za zvezdo $K_{1,n}$.

Trditev 3.2 *Graf poti P_n je permutacijski graf.*

Dokaz. Naj bo P_n pot na n vozliščih. Naj bo prvo vozlišče na poti označeno z v_1, drugo z v_2, ..., in zadnje z v_n (slika 3.9). Če je n sodo število, potem je $(v_2, v_1, v_4, v_3, \ldots, v_n, v_{n-1})$ kohezivno zaporedje poti P_n. Če je n liho število, potem je $(v_2, v_1, v_4, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_{n-2}, v_n)$ kohezivno zaporedje poti P_n. To je res, saj sta pogoja (a) in (b) iz definicije 3.2 izpolnjena. □



Slika 3.9: Primer kohezivnega zaporedja za pot P_n.

Primer 3.2 *Kohezivni zaporedji poti P_{13} sta permutaciji:*

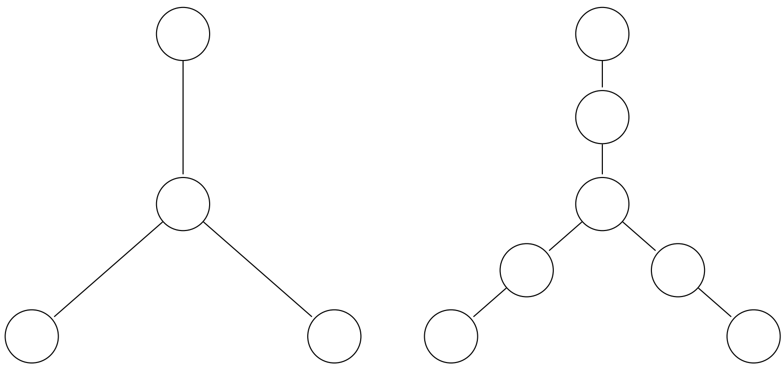
$$\sigma_1 = (3, 1, 5, 2, 7, 4, 9, 6, 11, 8, 13, 10, 12)$$

in

$$\sigma_2 = (2, 4, 1, 6, 3, 8, 5, 10, 7, 12, 9, 13, 11).$$

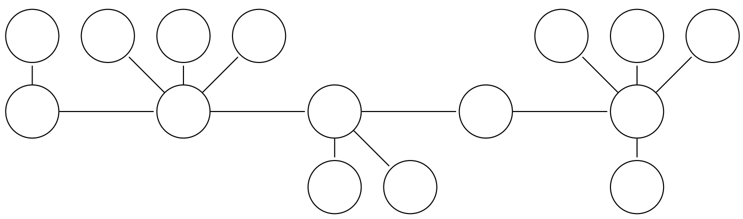
Vidimo, da obstajata vsaj dve permutaciji, katerih permutacijski graf je pot P_{13}*. V izreku 3.6 bomo pokazali, da sta to tudi edini permutaciji, katerih permutacijski graf je pot* P_{13}*.*

Poti in zvezde so drevesa. Ampak niso vsa drevesa permutacijski grafi. Drevo $K^*_{1,3}$, pridobljeno s subdivizijo vseh povezav zvezde $K_{1,3}$ (slika 3.10), ni permutacijski graf.



Slika 3.10: Grafa $K_{1,3}$ in $K^*_{1,3}$.

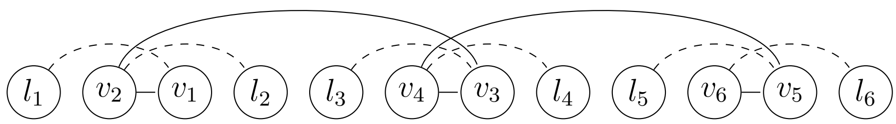
Definicija 3.3 *Gosenica je drevo, ki po odstranitvi vseh listov postane pot.*



Slika 3.11: Graf gosenice z 10 listi.

Lema 3.2 *Drevo je gosenica natanko tedaj, ko ne vsebuje podgrafa* $K^*_{1,3}$*.*

Dokaz. Če je drevo gosenica, potem po odstranitvi vseh listov dobimo pot. Če drevesu $K^*_{1,3}$ odstranimo vse liste, ne dobimo poti. Torej tudi če drevo vsebuje $K^*_{1,3}$ kot podgraf, nam po odstranitvi listov ostane graf, ki ni pot. Torej gosenica ne vsebuje podgrafa $K^*_{1,3}$. Če drevo ne vsebuje podgrafa $K^*_{1,3}$, potem ima vsako vozlišče največ dva soseda, ki nista lista. Prav tako graf ne vsebuje ciklov, saj je drevo. Po odstranitvi listov drevesa vedno dobimo povezan graf in stopnja vsakega vozlišča je ≤ 2, zato po odstranitvi listov tako dobimo pot. Torej je drevo, ki ne vsebuje podgrafa $K^*_{1,3}$, gosenica. $\square$



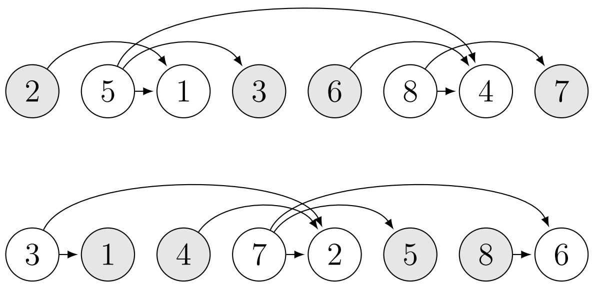
Slika 3.12: Primer kohezivnega zaporedja gosenice.

Izrek 3.5 *Drevo je permutacijski graf natanko tedaj, ko je gosenica.*

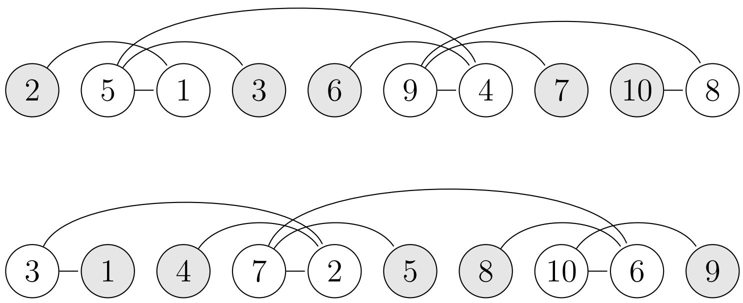
Dokaz. ($\Rightarrow$) Če drevo ni gosenica, potem po lemi 3.2 vsebuje $K^*_{1,3}$ kot podgraf. Drevo, ki vsebuje $K^*_{1,3}$, ni permutacijski graf, saj $K^*_{1,3}$ ni permutacijski graf.

($\Leftarrow$) Potrebno je še pokazati, da je gosenica permutacijski graf. Po izreku 3.3 je graf permutacijski graf natanko tedaj, ko ima kohezivno zaporedje, zato bomo pokazali, da ima gosenica kohezivno zaporedje. Naj bo C gosenica in naj bo P_n pot, ki jo pridobimo iz C tako, da odstranimo liste. Če je $n = 1$, potem je C zvezda $K_{1,k}$ za nek $k \geq 0$ ali pa trivialen graf K_1. Po trditvi 3.1 so zvezde in trivialen graf permutacijski grafi. Zato predpostavimo, da je $n \geq 2$. Kohezivno zaporedje poti P_n je $(v_2, v_1, v_4, v_3, \dots)$, kot v dokazu trditve 3.2. Liste lihega vozlišča v_i na poti (i je liho število) vstavimo levo od vozlišče v_{i+1} na poti P_n. Vse liste sodega vozlišča v_i na poti (i je sodo število) vstavimo desno od vozlišča v_{i-1} na poti P_n. Rezultat je kohezivno zaporedje $(l_1, v_2, v_1, l_2, l_3, v_4, v_3, l_4, \dots)$, kjer l_i predstavlja liste vozlišča v_i (slika 3.12). Zato je gosenica C res permutacijski graf. $\square$

Imejmo tako gosenico, da ko ji odstranimo vse liste, dobimo pot na k vozliščih. Vozlišče u_i na poti naj ima m_i listov. Označimo tako gosenico s $C_k(m_1, m_2, \dots, m_k)$.



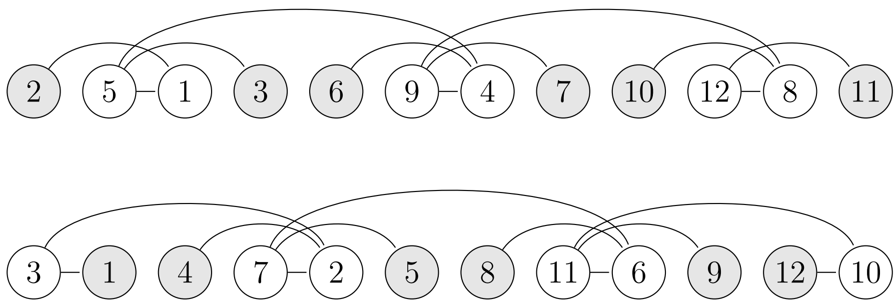
Slika 3.13: Tranzitivni orientaciji gosenice $C_4(1, 1, 1, 1)$ na osmih vozliščih. Gosenica $C_4(1, 1, 1, 1)$ je permutacijski graf permutacij $(2, 5, 1, 3, 6, 8, 4, 7)$ in $(3, 1, 4, 7, 2, 5, 8, 6)$.



Slika 3.14: Gosenica $C_5(1, 1, 1, 1, 1)$ je permutacijski graf na desetih vozliščih permutacij $(2, 5, 1, 3, 6, 9, 4, 7, 10, 8)$ in $(3, 1, 4, 7, 2, 5, 8, 10, 6, 9)$.

Trditev 3.3 *Gosenica $C_k(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ je permutacijski graf vsaj dveh permutacij.*

Dokaz. Vsako drevo, z vsaj eno povezavo ima natanko dve tranzitivni orientaciji. To sledi iz dejstva, da ko usmerimo eno povezavo smo že določili tranzitivno orientacijo drevesa. Zato ima tudi gosenica $C_k(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ natanko dve tranizitivni orientaciji (slika 3.13). Naj bo $n = k+m_1+m_2+\cdots+m_k$ število vozlišč grafa $C_k(m_1, m_2, \ldots, m_k)$. Priredimo števila $1, 2, \ldots, n$ vozliščem grafa tako, da če je povezava uv orientirana od u proti v, potem mora biti število, ki ga priredimo vozlišču u, večje od števila, ki ga priredimo



Slika 3.15: Gosenica $C_6(1,1,1,1,1,1)$ je permutacijski graf permutacij $(2,5,1,3,6,9,4,7,10,12,8,11)$ in $(3,1,4,7,2,5,8,11,6,9,12,10)$.

vozlišču v (primer sliki 3.13). To bomo naredili induktivno na dva načina (slike 3.13, 3.14, 3.14).

(1. način) Če je $k = 1$ priredimo števila $2, 3, \ldots, m_1 + 1$ listom, ki so sosedi vozlišča u_1 in število 1 vozlišču u_1. Na ta način dobimo permutacijo $(2, 3, \ldots, m_1 + 1, 1)$, katere permutacijski graf je gosenica $C_1(m_1)$. Naj bo k sodo število in si poglejmo, kako iz $C_k(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ konstruiramo $C_{k+1}(m_1, m_2, \ldots, m_{k+1})$. Število p, ki je prirejeno vozlišču u_k povečamo na $p+1$ in priredimo število p vozlišču u_{k+1}. Števila $p+2, p+3, \ldots, p+m_{k+1}+1$ priredimo listom, ki so sosedi vozlišča u_{k+1}. Se pravi, da smo permutacijo posodobili tako, da najprej na koncu zaporedja prejšne permutacije priključimo nova števila v zaporedju $p + 2, p + 3, \ldots, p + m_{k+1} + 1, p + 1$ in dobimo $(\ldots, p, \ldots, p+2, p+3, \ldots, p+m_{k+1}+1, p+1)$, potem pa zamenjamo števili p in $p+1$ in dobimo $(\ldots, p+1, \ldots, p+2, p+3, \ldots, p+m_{k+1}+1, p)$. Naj bo sedaj k liho število in si poglejmo, kako iz $C_k(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ konstruiramo $C_{k+1}(m_1, m_2, \ldots m_{k+1})$. Naj bo $p_k = k + m_1 + m_2 + \cdots + m_k$. Priredimo števila $p_k + 1, p_k + 2, \ldots, p_k + m_{k+1}$ listom, ki so sosedi vozlšča u_{k+1}. Število $p_k + m_{k+1} + 1$ pa priredimo vozlišču u_{k+1}. Se pravi, da smo permutacijo posodobili tako, da najprej na koncu zaporedja prejšne permutacije priključimo nova števila v zaporedju $p_k+m_{k+1}+1, p_k+1, p_k+2, \ldots, p_k+m_{k+1}$ in dobimo $(\ldots, p_k - m_k - 1, \ldots, p_k + m_{k+1} + 1, p_k + 1, p_k + 2, \ldots, p_k + m_{k+1})$, potem pa zamenjamo števili $p_k - m_k - 1$ in $p_k + m_{k+1} + 1$, ki pripadata vozliščema u_k

in u_{k+1}.

(2. način) Če je $k = 1$ priredimo število $m_1 + 1$ vozlišču u_1 in števila $1, 2, \dots, m_1$ listom, ki so sosedi vozlišča u_1. Na ta način dobimo permutacijo $(m_1 + 1, 1, 2, \dots, m_1)$. Naj bo k sodo število in si poglejmo, kako iz $C_k(m_1, m_2, \dots, m_k)$ konstruiramo $C_{k+1}(m_1, m_2, \dots, m_{k+1})$. To naredimo na enak način kot pri 1. načinu v primeru, ko je bilo k liho število. Naj bo k liho število in si poglejmo, kako iz $C_k(m_1, m_2, \dots, m_k)$ konstruiramo $C_{k+1}(m_1, m_2, \dots, m_{k+1})$. To naredimo na enak način kot pri 1. načinu v primeru, ko je bilo k sodo število. Tako smo pokazali, da je $C_k(m_1, m_2, \dots, m_k)$ permutacijski graf vsaj dveh permutacij.

$\square$

Izrek 3.6 *Za $n \geq 3$ obstajata natanko dve permutaciji iz S_n, katerih permutacijski graf je pot na n vozliščih.*

Dokaz. Naj bo $n \geq 3$ in $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in S_n$ takšna permutacija, da je $G_\sigma = P_n$. Opazimo naslednje lastnosti permutacije σ:

(a) $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) \notin S_k$ za $k < n$.

(b) $i - 2 \leq \sigma_i \leq i + 2$ za $i \leq n$

Dokaz lastnosti (a): Naj bo $k < n$. Če je $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) \in S_k$, potem graf G_σ ni povezan. To je v nasprotju s tem, da je G_σ pot.

Dokaz lastnosti (b): Če je $\sigma_i \leq i - 3$, potem je največ $i - 4$ števil, ki so manjše od σ_i, (med $i - 1$ števili) pred σ_i v permutaciji σ. Zato so vsaj 3 števila pred σ_i v permutaciji σ večja od σ_i. To pomeni, da ima σ_i vsaj 3 sosede v grafu G_σ, kar pa je v protislovju s tem, da je G_σ pot. Simetrično, če je $\sigma_i \geq i + 3$, potem so za σ_i v permutaciji σ vsaj 3 števila, ki so manjša od σ_i. Kar zopet pomeni, da ima σ_i vsaj 3 sosede v grafu G_σ, kar pa je v protislovju s tem, da je G_σ pot.

Zaradi lastnosti (a) in (b) je $\sigma_1 \in \{2, 3\}$. Poglejmo si najprej primer, ko je $\sigma_1 = 2$. Zaradi lastnosti (a) in (b) je $\sigma_2 \in \{3, 4\}$. Če je $\sigma_2 = 3$, potem graf G_σ vsebuje pot na vozliščih $2, 3, 1$, kjer imata vozlišči 2 in 3 stopnjo enako 1, kar se lahko zgodi samo, če je $n = 3$ in $\sigma = (2, 3, 1)$ (v nasprotnem primeru bi bil graf G_σ nepovezan). Če je $\sigma_2 = 4$, potem mora biti $\sigma_3 = 1$ (drugače bi imelo vozlišče 1 stopnjo vsaj 3), se pravi $\sigma = (2, 4, 1, \dots)$. Zaradi lastnosti (a) in (b) je $\sigma_4 \in \{5, 6\}$. Če je $\sigma_4 = 5$, potem imata vozlišči 2 in 5 stopnjo enako 1, kar se lahko zgodi samo ko je $n = 5$ in $\sigma = (2, 4, 1, 5, 3)$. Sicer je $\sigma_4 = 6$ in $\sigma_5 = 3$ (drugače bi imelo vozlišče 3 stopnjo vsaj 3), se pravi $\sigma = (2, 4, 1, 6, 3, \dots)$. Tako lahko nadaljujemo do poljubne dolžine. Induktivno lahko pokažemo, da je σ unikatno določena.

Pogljemo si sedaj še primer, ko je $\sigma_1 = 3$. Potem je $\sigma_2 \in \{1, 2, 4\}$. Element $\sigma_2 \neq 2$, saj bi tako v permutaciji imeli podzaporedje $3, 2, 1$, kar nam da cikel dolžine 3. Prav tako $\sigma_2 \neq 4$, saj bi tako permutacija vsebovala povezave $32, 31, 42, 41$, kar nam da cikel dolžine 4. Zato je $\sigma_2 = 1$. Zaradi lastnosti (a) in (b) je $\sigma_3 \in \{4, 5\}$. Če je $\sigma_3 = 4$, potem je $\sigma_4 = 2$ (drugače bi imelo vozlišče 2 stopnjo vsaj 3). Se pravi $n = 4$ in $\sigma = (3, 1, 4, 2)$. Če je $\sigma_3 = 5$, potem je $\sigma_4 = 2$ in $\sigma = (3, 1, 5, 2, \dots)$. Podobno, kot prej lahko nadaljujemo do poljubne dolžine. Induktivno lahko pokažemo, da je σ unikatno določena.

Dobimo sklep, da obstajata natanko dve permutaciji iz S_n, katerih permutacijski graf je pot na n vozliščih. □

Posledica 3.1 *Naj bo $\sigma \in S_n$ taka, da je njen permutacijski graf pot na n vozliščih. Potem nam zaporedje vozlišč na poti da permutacijo σ^*, ki je sestavljena iz sosednjih transpozicij. Še več $\sigma^* \preceq_b \sigma$.*

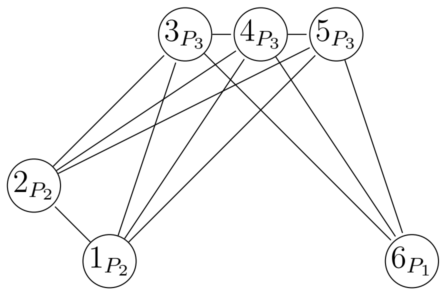
Dokaz. Po izreku 3.6 imata edini dve poti na n vozliščih permutaciji $\sigma_1 = (2, 4, 1, 6, 3, \dots)$ in $\sigma_2 = (3, 1, 5, 2, 7, 4, \dots)$. Zaporedja vozlišč na poti sta $\sigma_1^* = (2, 1, 4, 3, \dots)$ in $\sigma_2^* = (1, 3, 2, 5, 4, \dots)$. Vidimo, da je permutacija σ^* pridobljena iz permutacije σ z zaporedjem transpozicij sosednjih elementov, kjer vsaka transpozicija odstrani eno inverzjo. □

Posledica 3.2 *Naj bo $n \geq 3$ in C gosenica na n vozliščih. Potem obstajata natanko dve permutaciji iz S_n, katerih permutacijski graf je izomorfen grafu gosenice C.*

Dokaz. Privzamimo, da ima pot gosenice maksimalno dolžino (se pravi $m_1 = m_k = 0$). Naj bo N število permutacij iz S_n, katerih permutacijski graf je izomorfen grafu C. Po trditvi 3.3 je $N \geq 2$. Naj bo π perutacija, katere graf je izomorfen grafu C. Vidimo, da je π unikatno določena z zaporedjem vozlišč na poti. To je res, saj morajo biti listi urejeni naraščujoče, da preprečimo dodatne inverzije v permutaciji. Po izreku 3.6 obstajata natanko dve zaporedji vozlišč na poti. Torej je $N \leq 2$. Zato je $N = 2$. □

3.3 Konstrukcija permutacijskih grafov

Definicija 3.4 *Naj bo G graf z množico vozlišč $V(G) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ in naj bodo $H_1, H_2, \ldots, H_n$ poljubni grafi. Kompozicija grafov $H_1, H_2, \ldots, H_n$ z grafom G, označena z $G(H_1, H_2, \ldots, H_n)$, je graf sestavljen iz disjunktne unije $H_1, H_2, \ldots, H_n$ in dodanih povezav $a_i b_j$, kjer je $a_i \in V(H_i)$ in $b_j \in V(H_j)$, kadar je $x_i x_j \in E(G)$ (sliki 3.16 in 3.17). Če je H_i fiksen graf H, potem kompozicijo označimo z $G(H)$.*



Slika 3.16: Graf $P_3(P_2, P_3, P_1)$.

Vsota grafov L in M, označena z $L + M$, je sestavljena iz disjunktne unije grafov L in M ter dodanih povezav ab, kjer $a \in V(L)$ in $b \in V(M)$. Se pravi, kompozicija $G(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ je sestavljena iz disjunktne unije grafov H_i in potem iz vsote $H_i + H_j$ za vsako pripadajočo povezavo $x_i x_j \in E(G)$.

Izrek 3.7 *Naj bo G graf z n vozlišči in naj bodo $H_1, H_2, \ldots, H_n$ poljubni grafi. Potem je $G(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ permutacijski graf natanko tedaj, ko so $G, H_1, H_2, \ldots, H_n$ permutacijski grafi.*

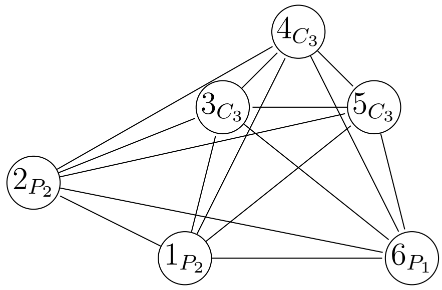
Dokaz. ($\Rightarrow$) Privzamimo, da je $G(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ permutacijski graf. Ker so $H_1, H_2, \ldots, H_n$ inducirani podgrafi grafa $G(H_1, H_2, \ldots, H_n)$, so permutacijski grafi po izreku 3.4. Prav tako lahko vzamemo eno vozlišče iz vsakega od grafov H_i in ga označimo z x_i. Tako dobimo induciran podgraf izomorfen grafu G. To pomeni, da je tudi G permutacijski.

($\Leftarrow$) Obratno privzamemo, da so $G, H_1, H_2, \ldots, H_n$ permutacijski grafi. Potem je $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ kohezivno zaporedje grafa G. Grafe $H_1, H_2, \ldots, H_n$ ustrezno preimenujemo tako, da je graf, ki pripada vozlišču v_1, poimenovan H_1, graf, ki pripada vozlišču v_2, poimenovan H_2, ..., graf, ki pripada vozlišču v_n, poimenovan H_n. Z n_i označimo število vozlišč grafa H_i. Potem ima graf H_i kohezivno zaporedje $l_i = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_{n_i}^i)$. Se pravi je

$$l = (l_1, l_2, \ldots, l_n) = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{n_1}^1, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_{n_2}^2, \ldots, x_1^n, x_2^n, \ldots, x_{n_n}^n)$$

kohezivno zaporedje grafa $G(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ in $G(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ je permutacijski graf. □

Izrek 3.7 nam podaja enostaven način konstrukcije permutacijskih grafov. Naj bo G polni graf K_3. Poglejmo si kompozicijo $K_3(P_2, C_3, P_1)$ (slika 3.17). Ker so K_3, P_2, C_3, P_1 polni grafi dobimo polni graf K_6.



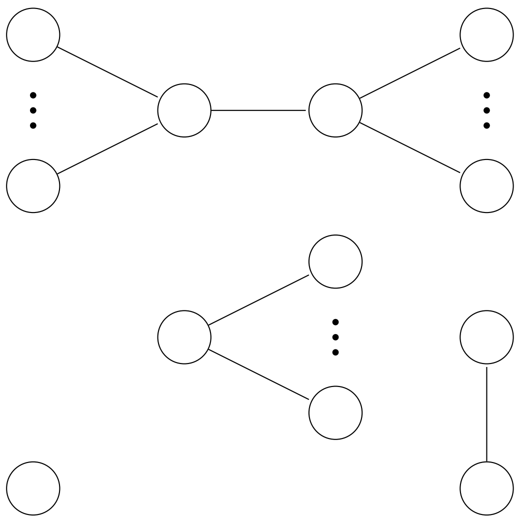
Slika 3.17: Graf $K_3(P_2, C_3, P_2)$.

Vsi grafi na največ 4 vozliščih so permutacijski grafi. Zato sta grafa $P_3(P_2, P_3, P_1)$ in $K_3(P_2, C_3, P_1)$ permutacijska (sliki 3.16 in 3.17).

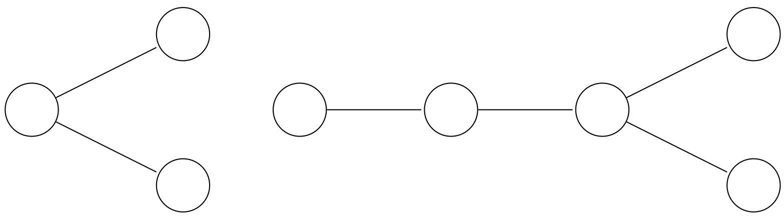
Vsak graf G z n vozlišči se lahko zapiše kot $G(\overline{P_1, \ldots, P_1}^{n})$ in $K_1(G)$. Če sta to edina načina za zapis grafa G kot kompozicija, potem je graf primaren.

Med polnimi grafi sta primarna samo grafa K_1 in K_2.

Med drevesi s premerom, ki ni večji od 3 (slika 3.18), lahko pokažemo, da so primarni grafi samo poti P_1, P_2 in P_4. To so vse gosenice, ki nimajo dveh listov z istim sosednjim vozliščem. Graf P_3 ni primaren, saj ima dva lista, ki imata isto sosednje vozlišče. Poleg trivialnih kompozicij ima pot na treh vozliščih tudi kompozicijo $P_3 = P_2(P_1, \overline{K_2})$ (slika 3.19).



Slika 3.18: Grafi dreves s premerom ≤ 3.



Slika 3.19: Neprimarna grafa $P_3 = P_2(P_1, \overline{K_2})$ in $P_3(P_1, P_1, P_1, \overline{K_2})$.

Izrek 3.8 *Drevo je primaren permutacijski graf natanko tedaj, ko je gosenica brez dveh listov z istim sosednjim vozliščem.*

Dokaz. Ker smo že pogledali drevesa s premeri, ki ne presegajo 3, privzamimo, da imamo drevo T s premerom vsaj 4.

($\Rightarrow$) Naj bo T drevo z n vozlišči. Privzemimo, da je T primaren permutacijski graf. Po izreku 3.5 je T gosenica. Predpostavimo, da imamo dva lista x_1 in x_2 z istim sosedom y. Naj bo G graf, ki ga dobimo, če identificiramo ti dve vozlišči (x_1 in x_2 zamenjamo z enim listom y_1, ki je povezan s sosedom vozlišč x_1 in x_2). Naj bodo $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ vozlišča grafa G. Recimo, da je y_1 vozlišče pridobljeno z identifikacijo vozlišč x_1 in x_2. Naj bo $H_1 = \overline{K_2}$ in H_i trivialen graf za $i = 2, 3, \ldots, n-1$. Potem je $T = G(H_1, H_2, \ldots, H_n)$. To je v protislovju s tem, da je T primaren.

($\Leftarrow$) Privzemimo zdaj, da je T gosenica brez dveh listov z istim sosednim vozliščem, in predpostavimo, da T ni primaren permutacijski graf. Potem je za nek netrivialen graf G z vozlišči $y_1, y_2, \ldots, y_k$ $T = G(H_1, H_2, \ldots, H_k)$. Brez izgube splošnosti lahko privzamemo, da ima H_1 vsaj 2 vozlišči. Ker je drevo T povezan graf, mora biti tudi graf G povezan. Zato mora y_1 imeti soseda. Privzemimo, da sta y_1 in y_2 sosednji vozlišči. Potem je $H_1 + H_2$ podgraf grafa T. Če bi H_2 imel vsaj 2 vozlišči, bi graf $H_1 + H_2$ vseboval cikel, kar je v protislovju s tem, da je T drevo. Torej ima H_2 samo eno vozlišče. Če bi y_1 imel še kakšnega soseda v grafu G, bi graf T tako imel cikel dolžine 4. Prav tako v H_1 ne sme biti povezav, saj bi tako podgraf $H_1 + H_2$ vseboval cikel dolžine 3. Ampak potem so vsa vozlišča grafa H_1 listi grafa T s skupnim sosedom, ki je edino vozlišče grafa H_2. To je v protislovju s predpostavko, da je T gosenica brez dveh listov z istim sosedom. Torej je T primaren permutacijski graf. □

Izrek 3.9 *Naj bo G sestavljen permutacijski graf. Potem obstajajo takšni netrivialen primaren permutacijski graf U in permutacijski grafi $H_1, H_2, \ldots, H_k$, ki so podgrafi grafa G, da je $G = U(H_1, H_2, \ldots, H_k)$.*

Dokaz. Naj bo $G = U(H_1, H_2, \ldots, H_k)$, kjer je U netrivialen. Če vzamemo eno vozlišče x_i iz vsakega izmed H_i, potem je induciran podgraf izomorfen grafu U. Zato mora biti U permutacijski po izreku 3.4. Prav tako so grafi H_i permutacijski, saj so inducirani podgrafi grafa G. Privzemimo, da ima U najmanjše število vozlišč med vsemi takimi kompozicijami. Dokazali bi radi, da je U primaren. Privzemimo, da U ni primaren. Naj bo $U = V(L_1, L_2, \ldots, L_p)$ kompozicija, kjer je V netrivialen. Ker je U kompozicija in vozlišča grafa U predstavljajo inducirane podgrafe H_i v grafu G, potem vsak L_i predstavlja neko podmnožico $A_i \subset \{H_1, H_2, \ldots, H_k\}$. A_i je tako tudi induciran podgraf grafa G. Zato je $G = V(A_1, A_2, \ldots, A_p)$. Ampak to predstavlja protislovje z izborom grafa U. Torej je U primaren. $\square$

Poglavje 4

Tekmovalnostni grafi

Tekmovalnostni grafi so razširitev permutacijskih grafov v smislu, da je vsak tekmovalnostni graf, ki je generiran z dvema permutacijama π in σ izomorfen ravno permutacijskemu grafu permutacije $\pi^{-1} \circ \sigma$.

V tem poglavju bomo spoznali kaj so rangiranja, tekmovalnostni grafi, primerljivostni grafi, množice tekmovalcev, množice posrednih in neposrednih tekmovalcev. Nato si bomo ogledali algoritem za izračun množice posrednih in neposrednih tekmovalcev ter kako lahko množice posrednih in neposrednih tekmovalcev uredimo. Na koncu si bomo pogledali še primer na resničnih podatkih.

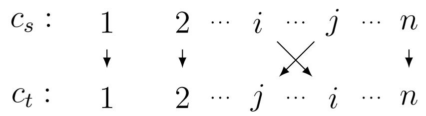
4.1 Tekmovalnostni grafi ter množice posrednih in neposrednih tekmovalcev

Definicija 4.1 *Rangiranje $c = (i_1, \ldots, i_n)$ množice $[n]$ je permutacija iz S_n. Pisali bomo $i \prec_c j$, kadar se vozlišče i pojavi pred vozliščem j v vektorju rangiranja c, to je, ko $c^{-1}(i) < c^{-1}(j)$. Zato rangiranje c definira zaporedje (urejenost) množice $[n]$:*

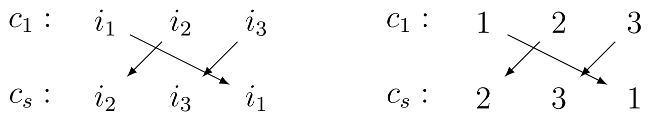
$$c(1) = i_1 \prec_c c(2) = i_2 \prec_c \cdots \prec_c c(n) = i_n.$$

Definicija 4.2 *Naj bo $R = \{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ končna množica rangiranj. Potem rečemo, da par vozlišč $(i, j) \in [n]\times[n]$ (neposredno) tekmuje, če obstajata takšni rangiranji $c_s, c_t \in R$, da je $i \prec_{c_s} j$ ampak $j \prec_{c_t} i$, to je i in j zamenjata svoji relativni poziciji v rangiranjih c_s in c_t (slika 4.1).*

Tekmovalnost med dvema vozliščema $i, j \in [n]$ je močno povezano z dejstvom, da je (i, j) inverzija rangiranja množice. Spomnimo se, da je inverzija v rangiranju c par vozlišč (i, j) tako, da je $(i - j)(c^{-1}(i) - c^{-1}(j)) < 0$.



Slika 4.1: Par vozlišč (i, j) tekmuje.



Slika 4.2: Preimenovanje vozlišč tako, da je $c_1 = id$.

Lema 4.1 *Če imamo podano končno množico $R = \{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ rangiranj, so naslednje trditve ekvivalentne:*

(i) *Par vozlišč (i, j) tekmuje.*

(ii) *Obstaja tak $c_s \in \{c_1, \ldots, c_{r-1}\}$, da i in j zamenjata svoji relativni poziciji med rangiranji c_s in c_{s+1}.*

(iii) *Obstaja preimenovanje vozlišč tako, da je $c_1 = id$ (slika 4.2) in nek $c_s \in \{c_2, \ldots, c_r\}$ z inverzijo (i, j).*

Dokaz. $((ii) \Rightarrow (i))$ To sledi iz definicije 4.2.

((i) $\Rightarrow$ (iii)) Preimenujmo vozlišča tako, da bo $c_1 = id$. Naj i in j zamenjata svoji relativni poziciji med rangiranji c_s in c_t. Potem je v enem izmed c_s ali c_t inverzija (i, j).

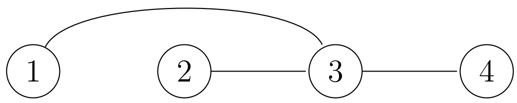
((iii) $\Rightarrow$ (ii)) Preimenujmo vozlišča, tako da $c_1 = id$. Imamo inverzijo (i, j) v c_s. Potem i in j zamenjata relativno pozicijo med c_s in c_{s-1} ali pa c_{s-1} prav tako vsebuje inverzijo (i, j) in se zamenjava zgodi prej. To sledi iz dejstva, da je R končna množica. $\square$

Definicija 4.3 *Naj bo $R = \{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ množica rangiranj množice $[n]$. Definirajmo tekmovalnostni graf množice rangiranj R kot neusmerjen graf $G_c(R) = ([n], E)$, kjer je množica povezav E podana na naslednji način: med i in j je povezava, če (i, j) tekmujeta.*

Primer 4.1 *Naj bo $R = \{c_1, c_2, c_3\}$ množica rangiranj množice $[4]$.*

$$c_1 = (1, 2, 3, 4)$$
$$c_2 = (1, 2, 4, 3)$$
$$c_3 = (3, 1, 2, 4)$$

Ker je $c_1 = id$, so povezave grafa $G_c(R)$ ravno inverzije rangiranj c_2 in c_3. Rangiranje c_2 ima inverzijo $(4, 3)$, medtem ko ima rangiranje c_3 inverziji $(3, 1)$, $(3, 2)$. Graf $G_c(R)$ je prikazan na sliki 4.3.



Slika 4.3: Graf tekmovalnosti $G_c(R)$.

Definicija 4.4 *Če vzamemo množico rangiranj $R = \{c_1, \ldots, c_r\}$ množice $[n]$ in fiksiramo $i \in [n]$, je tekmovalnostna množica $C(i)$ vozlišča i enaka množici elementov množice $[n]$, ki tekmuje z i vključno z i:*

$$C(i) = \{j \in [n] \mid (i, j) \text{ } tekmujeta\} \cup \{i\}.$$

Primer 4.2 *Naj bo R tak kot v primeru 4.1. Potem je:*

$$C(1) = \{1, 3\},\ C(2) = \{2, 3\},\ C(3) = \{1, 2, 3, 4\},\ C(4) = \{3, 4\}.$$

Definicija 4.5 *Naj bo $R = \{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ množica rangiranj množice $[n]$. Množici vozlišč $C \subseteq [n]$ rečemo množica tekmovalcev, če je maksimalna množica glede na lastnost tekmovalnosti svojih elementov. To pomeni, da vsaka dva elementa $i, j \in C$ tekmujeta in C je maksimalna glede na to lastnost.*

Opomba 4.1 *Množice tekmovalcev so ravno največji polni podgrafi grafa $G_c(R)$. Opazimo, da dve vozlišči tekmujeta natanko tedaj, ko pripadata isti množici tekmovalcev. Še več, lahko preverimo, da je množica vozlišč $C \subseteq [n]$ množica tekmovalcev natanko tedaj, ko je $C = \bigcap_{i \in C} C(i)$.*

Definicija 4.6 *Če vzamemo množico rangiranj $R = \{c_1, \ldots, c_r\}$ množice $[n]$, rečemo, da par vozlišč $(i, j) \in [n] \times [n]$ posredno ali neposredno tekmuje, če obstaja tak $k \in \mathbb{N}$ in vozlišča $i_1, \ldots, i_k \in [n]$, da (i, i_1) tekmujeta, (i_1, i_2) tekmujeta, $\ldots$, in (i_k, j) tekmujeta.*

Množici vozlišč $D \subseteq [n]$ rečemo množica posrednih in neposrednih tekmovalcev, če je maksimalna množica glede na lastnost posredne ali neposredne tekmovalnosti med svojimi elementi.

Opomba 4.2 *Očitno je, da, če par vozlišč (i, j) tekmuje, potem tudi posredno ali neposredno tekmuje. Še več par (i, j) posredno ali neposredno tekmuje natanko tedaj, ko sta i in j povezana s potjo v grafu $G_c(R)$. Opazimo, da so množice posrednih ali neposrednih tekmovalcev iz $[n]$ povezane komponente grafa $G_c(R)$ in dve vozlišči posredno ali neposredno tekmujeta natanko tedaj, ko pripadata isti množici posrednih in neposrednih tekmovalcev. Seveda dve vozlišči, ki pripadata različnim množicam posrednih in neposrednih tekmovalcev, ne moreta tekmovati.*

Definicija 4.7 *Delno urejeni množici $(N, \preceq)$ lahko priredimo usmerjen graf $G_{\preceq}$ tako, da je množica vozlišč enaka N, vozlišči i in j pa sta povezani, če*

$i \neq j$ in $i \preceq j$. Graf $G = (N, E)$ je primerljivostni graf, če je neusmerjen graf pridobljen po odstranitvi orientacije grafa $G_{\preceq}$ za neko delno urejenost $\preceq$ množice N.

Graf $G = (N, E)$ je primerljivosten natanko tedaj, ko dopušča tranzitivno orientacijo svojih povezav. To pomeni, da je usmerjen graf $\vec{G} = (N, \vec{E})$ pridobljen iz G z orientiacijo vseh povezav v E, tako da če sta $(i, j), (j, k) \in \vec{E}$, potem je $(i, k) \in \vec{E}$.

Uporabna karakterizacija permutacijskih grafov je dejstvo, da sta G in $\overline{G}$ primerljivostna grafa, to je, dovoljujeta tranzitivno orientazijo svojih povezav.

Opazimo, da so permutacijski grafi tako primerljivostni grafi kot tekmovalnostni (imamo dve rangiranji/permutaciji $c_1 = id$ in c_2, ki predstavlja permutacijski graf).

Definicija 4.8 *Graf G ima delno kohezivno zaporedje vozlišč (ali enostavneje delno kohezivno zaporedje), če obstaja takošno preimenovanje vozlišč, da velja (b) iz definicije 3.2, to je, če obstaja povezava ab, kjer $a < b$, potem mora za vsak x, za katerega velja $a < x < b$ obstajati povezava ax ali xb. Graf G je delno koheziven, če ima delno kohezivno zaporedje.*

Medtem, ko je pogoj (a) iz definicije 3.2 povezan s primerljivostnimi grafi, je pogoj (b) (delna kohezivnost) povezan s tekmovalnostnimi grafi, kot pokaže naslední izrek.

Izrek 4.1 *Vsak tekmovalnostni graf je delno koheziven.*

Dokaz. Naj bo $G_c(R)$ tekmovalnostni graf, ki je generiran z množico rangiranj R. Brez izgube splošnosti privzemimo, da rangiranje $id \in R$. Naj bo $ab \in E(G_c(R))$, kjer $a < b$ in $x \in [n]$ tak, da je $a < x < b$. Ker je ab povezava, vozlišči (a, b) tekmujeta. To pomeni, da obstaja tako rangiranje $c_m \in R$, da je $b \prec_{c_m} a$. Če $x \prec_{c_m} a$, potem tekmujeta (x, a) in je $ax \in E(G_c(R))$, v nasprotnem primeru je $b \prec_{c_m} a \prec_{c_m} x$, kar pomeni, da tekmujeta (b, x) in $xb \in E(G_c(R))$. $\square$

Domneva 4.1 *Izrek 4.1 je karakterizacija tekmovalnostnih grafov, to pomeni G je tekmovalnostni graf natanko tedaj, ko ima delno kohezivno zaporedje.*

4.2 Algoritem za izračun množice posrednih in neposrednih tekmovalcev

Lema 4.2 *Naj bo $R = \{c_1, \ldots, c_r\}$ množica rangiranj množice $[n]$. Če je $D \subseteq [n]$ množica posrednih in neposrednih tekmovalcev in $a, b \in D$, potem za vsak $x \in [n]$ in vsako rangiranje $c_m \in R$ tako, da je $a \prec_{c_m} x \prec_{c_m} b$, sledi $x \in D$.*

Dokaz. Če vozlišči (a, b) tekmujeta, potem zaradi delne kohezivnosti tekmovalnostnega grafa tekmujeta tudi (a, x) ali (x, b), se pravi $x \in D$. Če vozlišči (a, b) ne tekmujeta, potem obstaja tak $k \in \mathbb{N}$ in vozlišča $i_1, \ldots, i_k \in [n]$, da (a, i_1) tekmujeta, (i_1, i_2) tekmujeta, $\ldots$, in (i_k, b) tekmujeta, saj sta $a, b \in D$. Če $a \prec_{c_m} x \prec_{c_m} i_1$, potem $x \in D$, ker (a, i_1) tekmujeta. V nasprotnem primeru je $i_1 \prec_{c_m} x \prec_{c_m} b$. Če $i_1 \prec_{c_m} x \prec_{c_m} i_2$, potem $x \in D$, ker (i_1, i_2) tekmujeta. V nasprotnem primeru je $i_2 \prec_{c_m} x \prec_{c_m} b$... Če $i_{k-1} \prec_{c_m} x \prec_{c_m} i_k$, potem $x \in D$, ker (i_{k-1}, i_k) tekmujeta. V nasprotnem primeru je $i_k \prec_{c_m} x \prec_{c_m} b$. Ker (i_k, b) tekmujeta, sledi $x \in D$. □

Primer 4.3 *Naj bo $R = \{c_1, c_2, c_3\}$ množica rangiranj $[5]$.*

$$c_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$$
$$c_2 = (2, 1, 3, 4, 5)$$
$$c_3 = (1, 4, 2, 3, 5)$$

Vidimo, da par $(4, 1)$ posredno tekmujeta, saj $(1, 2)$ in $(2, 4)$ tekmujeta, zato sta v isti množici posrednih in neposrednih tekmovalcev. Ker je $3 \in [5]$ in $1 \prec_{c_1} 3 \prec_{c_1} 4$, je tudi 3 v isti množici posrednih in neposrednih tekmovalcev. To je res, saj $2 \prec_{c_1} 3 \prec_{c_1} 4$ in $(2, 4)$ tekmujeta, iz delne kohezivnost sledi, da tekmujeta tudi $(2, 3)$ ali $(3, 4)$. Vidimo, da par $(3, 4)$ res tekmuje.

Lema 4.3 *Naj bo $R = \{c_1, \ldots, c_r\}$ množica rangiranj množice $[n]$. Če je $D \subseteq [n]$ množica posrednih in neposrednih tekmovalcev ter obstajata taka $a \in D$ in $c_m \in R$, da je $c_m^{-1}(a) = 1$ (element a se pojavi na prvi poziciji v rangiranju c_m), potem*

$$\{x \in [n] \mid c_s^{-1}(x) = 1 \text{ za nek } c_s \in R\} \subseteq D.$$

To pomeni, da vsi elementi na prvi poziciji rangiranj iz R pripadajo D.

Dokaz. Če $c_m \neq c_s$, $a \neq x$ in $c_m^{-1}(a) = 1 = c_s^{-1}(x)$, potem je $a \prec_{c_m} x$ in $x \prec_{c_s} a$, se pravi (a, x) tekmujeta in $x \in D$. □

Izrek 4.2 *Naj bo $R = \{c_1, \ldots, c_r\}$ množica rangiranj vozlišč $[n]$. Množico posrednih in neposrednih tekmovalcev lahko identificiramo z zaprtimi intervali naravnih števil $[p, q]$ na naslednji način:*

$$D_{[p,q]} = \{x \in [n] \mid c_s^{-1}(x) \in [p, q] \text{ za nek } c_s \in R\}.$$

Še več, p in q sta prvi na levi in zadnji na desni poziciji elementov iz $D_{[p,q]}$ glede na vsa rangiranja.

Dokaz. Pokazali bomo, da ima vsaka množica posrednih in neposrednih tekmovalcev obliko $D_{[p,q]}$ za neki naravni števili p in q. Naj bo $a \in [n]$, $c_m \in R$ tako, da $c_m^{-1}(a) = 1$, in naj bo D množica posrednih in neposrednih tekmovalcev, ki vsebuje a. Iz leme 4.3 sledi, da je

$$D_{[1,1]} = \{x \in [n] \mid c_s^{-1}(x) = 1 \text{ za nek } c_s \in R\} \subseteq D.$$

Defirajmo

$$D_{[1,p_k]} = \{x \in [n] \mid c_s^{-1}(x) \in [1, p_k] \text{ za nek } c_s \in R\}$$

in naj bo p_{k+1} zadnja pozicija (na desni) vseh elementov $D_{[1,p_k]}$ v vseh rangiranjih. Trdimo, da če $D_{[1,p_k]} \subseteq D$ in

$$D_{[1,p_{k+1}]} = \{x \in [n] \mid c_s^{-1}(x) \in [1, p_{k+1}] \text{ za nek } c_s \in R\},$$

potem je $D_{[1,p_{k+1}]} \subseteq D$. Naj bo $x \in [n]$ z $c_s^{-1}(x) \in [1, p_{k+1}]$ za nek c_s. Potem je $c_s^{-1}(x) \in [1, p_k]$ in $x \in D_{[1,p_k]} \subseteq D$ (po predpostavki) ali pa je $c_s^{-1} \in [p_k + 1, p_{k+1}]$. V tem primeru naj bo b element $D_{[1,p_k]}$, ki se pojavi na poziciji p_{k+1} v nekem rangiranju c_{m_b}, to pomeni $c_{m_b}^{-1}(b) = p_{k+1}$. Če $x \prec_{c_{m_b}} b$, potem je po lemi 4.2 $x \in D$. Zato predpostavimo, da je $b \prec_{c_{m_b}} x$. Vsi elementi levo od b v rangiranju c_{m_b} pripadajo množici D po lemi 4.2. Naj bo teh elementov t. Če je $x \prec_{c_s} b$, potem (c, b) tekmujeta in $x \in D$. Zato predpostavimo, da $b \prec_{c_s} x$. Na levi od x v rangiranju c_s je tako največ t elementov, ampak en od njih je b, kar pomeni, da obstaja element z, za katerega velja $z \prec_{c_{m_b}} b \prec_{c_{m_b}} x$ in $b \prec_{c_s} x \prec_{c_s} z$. To pomeni, da (x, z) tekmujeta, zato $x \in D$.

Ker je $[n]$ končna množica in $D_{[1,p_m]} \in [n]$, se veriga množic

$$D_{[1,1]} \subset D_{[1,p_1]} \subset D_{[1,p_2]} \subset \cdots$$

stabilizira za nek $D_{[1,p_m]} \subseteq D$. Še več $D \subseteq D_{[1,p_m]}$: po hipotezi je $a \in D$, zato za vsak drug elemet $x \in D$ obstaja takšno končno število elementov $a_1, a_2, \ldots, a_k$, da $(a, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_k, x)$ tekmujejo. Zaradi dejstva, da je $a \in D_{[1,1]}$ in (a, a_1) tekmujeta, dobimo, da je $a_1 \in D_{[1,p_1]}$, podobno ker $a_1 \in D_{[1,p_1]}$ in (a_1, a_2) tekmujeta, dobimo, da je $a_2 \in D_{[1,p_2]}$, $\ldots$, in ker $a_k \in D_{[1,p_k]}$ in (a_k, x) tekmujeta, dobimo, da je $x \in D_{[1,p_{k+1}]} \subseteq D_{[1,p_m]}$.

Izbrišimo elemente iz $[n]$, ki se pojavijo v D, in ponovimo postopek, da odkrijemo ostale množice posrednih in neposrednih tekmovalcev. $\square$

Primer 4.4 *Naj bo $R = \{c_1, c_2, c_3\}$ množica rangiranj* [5].

$$c_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$$
$$c_2 = (2, 1, 3, 4, 5)$$
$$c_3 = (1, 4, 2, 3, 5)$$

Poiščimo množice posrednih in neposrednih tekmovalcev. Najprej si poglejmo množico posrednih in neposrednih tekmovalcev D_1, ki vsebuje elemente, ki se v vsaj enem rangiranju pojavijo na prvem mestu.

$$D_{[1,1]} = \{x \in [n] \mid c_s^{-1}(x) = 1 \text{ za nek } c_s \in R\} = \{1, 2\} \subseteq D_1$$

Elementa 1 *in* 2 *se v rangiranjih nahajata na* $1., 2.$ *in* $3.$ *mestu. Ker je* $max\{1,2,3\} = 3$*, si sedaj poglejmo* $D_{[1,3]}$.

$$D_{[1,1]} \subset D_{[1,3]} = \{x \in [n] \mid c_s^{-1}(x) \in [1,3] \ za \ nek \ c_s \in R\} = \{1,2,3,4\} \subseteq D_1$$

Elementi $1, 2, 3$ *in* 4 *se v rangiranjih nahajajo na* $1., 2., 3.$ *in* $4.$ *mestu. Ker je* $max\{1,2,3,4\} = 4$*, si sedaj poglejmo* $D_{[1,4]}$.

$$D_{[1,3]} = D_{[1,4]} = \{x \in [n] \mid c_s^{-1}(x) \in [1,4] \ za \ nek \ c_s \in R\} = \{1,2,3,4\} = D_1$$

Vidimo, da se je veriga stabilizirala in je $D_1 = D_{[1,4]} = \{1,2,3,4\}$*. Sedaj si poglejmo množico posrednih in neposrednih tekmovalcev* D_2*, ki vsebuje vse elemente, ki se v vsaj enem rangiranju pojavijo na* $5.$ *mestu (*$5 = 4 + 1$*).*

$$D_{[5,5]} = \{x \in [n] \mid c_s^{-1}(x) = 5 \ za \ nek \ c_s \in R\} = \{5\} \subseteq D_2$$

Element 5 *se v rangiranjih vedno nagaja na* $5.$ *mestu. Ker* $max\{5\} = 5$*, se nam zgorna meja ne poveča. Zato je* $D_2 = D_{[5,5]} = \{5\}$.

Dokaz zadnjega izreka nam podaja algoritem za izračun množice posrednih in neposrednih tekmovalcev direktno iz množice rangiranj brez predhodnega izračuna tekmovalnostnega grafa.

```
Psevdo koda algoritma za izračun množic
posrednih in neposrednih tekmovalcev:

Vhod:
$N = \{1, \dots, n\}$ končna množica vozlišč
$R = \{c_1, \dots, c_r\}$ končna množica rangiranj

begin
    $j := 1$;
    $p_0 := 0$;
    $p_j := 1$;
    while $|N| > 0$ do
        $D_j := \emptyset$;
        $q_0 := p_{j-1}$;
        $q_1 := p_j$;
        $i := 0$;
        while $q_i \neq q_{i+1}$ do
            $i := i + 1$;
            Construct $D_j := D_{[p_j, q_i]}$;
            $q_{i+1} := \max_{x \in D_j, c \in R} c^{-1}(x)$;
        end
        $N := N \setminus D_j$;
        $j := j + 1$;
        $p_j := q_i + 1$;
    end
end

Izhod:
Množice posrednih in neposrednih
tekmovalcev $D_1, \dots, D_k$
```

Definicija 4.9 *Naj bo* $R = \{c_1, \ldots, c_r\}$ *množica* r *rangiranj* ($r \geq 2$) *množice* $[n]$. *Definirajmo usmerjen graf* $G_d(R)$ *na naslednji način:*

(i) Vozlišča grafa $G_d(R)$ *so elementi množice* $[n]$.

(ii) Če $i, j \in [n]$, $i \neq j$ *potem je* (i, j) *usmerjena povezava v grafu* $G_d(R)$, *če obstaja takšno rangiranje* $c_m \in R$, *da je* $i \preceq_{c_m} j$.

Opomba 4.3 *Opazimo, da se usmerjen graf* $G_d(R)$ *sklada z usmerjenim grafom* $G_{\preceq}$, *ki ga definiramo z (refleksivno in antisimetrično) relacijo* $\preceq$ *podano z:*

(i) $i \preceq i$ *za vsak* $i \in [n]$

(ii) $i \preceq j$ $(i, j \in [n], i \neq j)$, *če obstaja takšno rangiranje* $c_m \in R$, *da je* $i \preceq_{c_m} j$.

Tekmovalnostni graf $G_c(R)$ *se sklada z neusmerjenim grafom z enakimi vozlišči kot graf* $G_d(R)$ *in povezavami med* (i, j), *kadar sta usmerjeni povezavi* $(i, j), (j, i) \in E(G_d(R))$.

Trditev 4.1 *Naj bosta* D_1 *in* D_2 *dve različni množici posrednih in neposrednih tekmovalcev. Naslednji trditvi o usmerjenem grafu* $G_d(R)$ *sta ekvivalentni:*

(i) Obstaja takšna usmerjena povezava (a, b), *da je* $a \in D_1$ *in* $b \in D_2$.

(ii) Vsa vozlišča iz D_1 *imajo usmerjeno povezavo proti vsem vozliščem iz* D_2.

Dokaz. *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* To je vedno res.

1. Pokazali bomo, da, če je $a \in D_1$, $b_1, b_2 \in D_2$, par (b_1, b_2) tekmuje in obstaja usmerjena povezava od a do b_1, potem obstaja usmerjena povezava od a do b_2. Po hipotezi obstaja takšno rangiranje c_m, da je $a \prec_{c_m} b_1$. Če $a \prec_{c_m} b_2$, potem smo pokazali, kar smo hoteli, sicer $b_2 \prec_{c_m}$

$a \prec_{c_m} b_1$. Ampak, ker (b_1, b_2) tekmujeta, obstaja takšno rangiranje $c_{m'}$, da $b_1 \prec_{c_{m'}} b_2$, in ker a ne tekmuje z b_1, mora biti $a \prec_{c_{m'}} b_1 \prec_{c_{m'}} b_2$, kar pomeni, da (a, b_2) tekmujeta. To je protislovje in zato $a \prec_{c_m} b_2$.

2. Pokazali bomo, da, če je $a \in D_1$, $b \in D_2$ in obstaja usmerjena povezava od a proti b, potem za vsak $b' \in D_2$ obstaja povezava od a do b. Ker sta $b, b' \in D_2$, obstaja tak $k \in \mathbb{N}$ in $b_1, \ldots, b_k \in D_2$, da (b, b_1) tekmujeta, (b_1, b_2) tekmujeta, $\ldots$, (b_k, b') tekmujeta. Vozlišča a, b, b_1 so v takem razmerju kot v koraku 1., zato obstaja povezava od a do b_1, podobno vozlišča a, b_1, b_2, zato obstaja povezava a do b_2, $\ldots$, podobno vozlišča a, b_k, b', zato obstaja povezava od a do b'.

3. $(i) \Rightarrow (ii)$. Če od elementa $a \in D_1$ obstaja povezava do elementa v D_2, potem po koraku 2. obstaja povezava od a do vseh elementov v D_2. Zdaj fiksirajmo nek element iz D_2 in dva elementa iz D_1. Uporabimo podoben premislek, kot smo ga v korakih 1 in 2 in dobimo, da obstaja povezava od vsakega elementa iz D_1 do fiksiranega elementa.

□

Definicija 4.10 *Naj bo $R = \{c_1, \ldots, c_r\}$ množica r rangiranj ($r \geq 2$) vozlišč $[n]$, katerih množice posrednih in neposrednih tekmovalcev označimo z $D_1, \ldots, D_k$. Definirajmo binarno relacijo $\rightarrow$ med dvema množicama posrednih in neposrednih tekmovalcev na nasledni način:*

(i) $D_i \rightarrow D_i$ za vsako množico posrednih in neposrednih tekmovalcev D_i.

(ii) za vsaki različni množici D_i, D_j posrednih in neposrednih tekmovalcev, je $D_i \rightarrow D_j$ natanko tedaj, ko velja katerakoli od trditev iz 4.1.

Lema 4.4 *Binarna relacija iz definicije 4.10 je tranzitivna.*

Dokaz. Predpostavimo, da je $D_1 \rightarrow D_2$ in $D_2 \rightarrow D_3$, ampak $D_3 \rightarrow D_1$. Vzamimo vozlišče $x \in D_1$. Ker je $D_3 \rightarrow D_1$, obstaja takšno rangiranje c_m tako, da je $a \prec_{c_m} x$ za vse $a \in D_3$. Še več, ker $D_1 \rightarrow D_2$, $x \prec_{c_m} b$ za vsak

$b \in D_2$ in zato $a \prec_{c_m} b$ za vse $a \in D_3$ in $b \in D_2$, kar pomeni $D_3 \rightarrow D_2$. To je protislovje. $\square$

Posledica 4.1 *Binarna relacija, podana v definiciji 4.10, nam daje linearno urejenost med množicami posrednih in neposrednih tekmovalcev iz* $[n]$.

4.3 Uporaba algoritma na resničnih podatkih

Poglejmo si sezono 2014 v prvenstvu MotoGP. V tej sezoni je bil najboljši dirkač Marc Márquez. Zmagal je na prvih 10 dirkah sezone. V celi sezoni pa je zmagal na 13 od skupaj 18 dirk. Na 3 dirkah je padel, vendar se je v trenutku padca potegoval za zmago. Poleg tega je bil še enkrat drugi in enkrat četrti. Poleg Marca Márqueza so bili veliko boljši od ostalih še Valentino Rossi, Jorge Lorenzo in Dani Pedrosa. Na stopničkah so bili trije od njih (štirih) na 13 dirkah, vsaj dva na 17 dirkah, vsaj en pa na vseh 18 dirkah te sezone. Opazimo, da so se to sezono izoblikovale vsaj tri kakovostne skupine. V prvi skupini je Marc Márquez, ki je bil to sezono veliko boljši od ostalih. V drugi skupini so Valentino Rossi, Jorge Lorenzo in Dani Pedrosa. V ostalih skupinah pa so ostali dirkači.

Če bi uporabili algoritem za izračun množic posrednih in neposrednih tekmovalcev, kar direktno na rezultatih dirk, bi naleteli na težave. Ena od težav je, da ni na vsaki dirki tekmovalo enako tekmovalcev oziroma ni vsake dirke zaključilo enako število tekmovalcev. Zato rezultati dirk niso iz iste simetrične grupe S_n. Poleg tega opazimo, da je Marc Márquez bil na prvem in na zadnjem mestu (je odstopil), iz česar sledi, da tekmuje z vsemi ostalimi dirkači in imamo samo eno množico posrednih in neposrednih tekmovalcev.

Zato bomo izbrali neko podmnožico dirk A in neko podmnožico dirkačev, ki so na vseh dirkah iz podmnožice A dirko zaključili. Tako dobimo $|A|$ rangiranj/permutacij neke simetrične grupe.

Izberimo 5 dirk iz te sezone. $R = \{c_{arg}, c_{esp}, c_{cat}, c_{ger}, c_{gbr}\}$. Izberimo še vse dirkače, ki so na teh dirkah zaključili dirko. Teh dirkačev je 14. Uredimo jih relativno glede na to, kako so bili na koncu sezone uvrščeni v skupnem vrstem redu. Tako dobimo dobimo vektor = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14) = (Marc Márquez, Valentino Rossi, Jorge Lorenzo, Dani Pedrosa, Andrea Dovizioso, Pol Espargaró, Aleix Espargaró, Bradley Smith, Stefan Bradl, Scott Redding, Hiroshi Aoyama, Yonny Hernández, Héctor Barberá, Broc Parkes). Sedaj si oglejmo rangiranja teh dirkačev na dirkah iz R:

$$\begin{aligned}
c_{arg} &= (1, 4, 3, 2, 9, 8, 6, 5, 11, 12, 10, 7, 13, 14)\\
c_{esp} &= (1, 2, 4, 3, 5, 7, 8, 6, 9, 11, 10, 12, 13, 14)\\
c_{cat} &= (1, 2, 4, 3, 9, 7, 6, 5, 8, 12, 10, 11, 14, 13)\\
c_{ger} &= (1, 4, 3, 2, 7, 6, 5, 10, 11, 9, 12, 13, 8, 14)\\
c_{gbr} &= (1, 3, 2, 4, 5, 6, 9, 7, 10, 12, 11, 13, 14, 8)
\end{aligned}$$

To pomeni, da je bil na dirki v Argentini (c_{arg}) prvi Marc Márquez, drugi Dani Pedrosa, tretji Jorge Lorenzo, četrti Valentino Rossi,...

Sedaj poženemo algoritem za izračun množice posrednih in neposrednih tekmovalcev in dobimo naslednje množice posrednih in neposrednih tekmovalcev:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{1\},\\
D_2 &= \{2, 3, 4\},\\
D_3 &= \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}.
\end{aligned}$$

Tako vidimo, da so za to izbiro dirk in dirkačev, ki so zaključili te dirke dobimo pričakovane ugotovitve. Torej je Marc Márquez v svoji množici posrednih in neposrednih tekmovalcev, v drugi množici posrednih in neposrednih tekmovalcev so Valentino Rossi, Jorge Lorenzo in Dani Pedrosa. Ostali dirkači pa so v tretji množici posrednih in neposrednih tekmovalcev.

Poglejmo si še en pristop. Dirkače označimo z zaporedno številko glede na to, kako so bili na koncu sezone uvrščeni v skupnem vrstem redu. Tako dobimo dobimo vektor = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29) = (Marc Márquez, Valentino Rossi, Jorge Lorenzo, Dani Pedrosa, Andrea Dovizioso, Pol Espargaró, Aleix

Espargaró, Bradley Smith, Stefan Bradl, Andrea Iannone, Álvaro Bautista, Scott Redding, Cal Crutchlow, Hiroshi Aoyama, Yonny Hernández, Nicky Hayden, Karel Abraham, Héctor Barberá, Michele Pirro, Danilo Petrucci, Alex de Angelis, Colin Edwards, Broc Parkes, Michael Laverty, Mike Di Meglio, Katsuyuki Nakasuga, Leon Camier, Michel Fabrizio, Randy de Puniet). Tokrat si za podmnožice dirk izbirajmo po 3 zaporedne dirke in glejmo samo dirkače, ki so na vseh teh 3 dirkah zaključili dirko. Množice posrednih in neposrednih tekmovalcev so v tabeli 4.1. Ponovno vidimo, da se Marc Márquez velikokrat pojavi v prvi množici posrednih in neposrednih tekmovalcev, kot edini tekmovalec te množice. Dvakrat se nam kot samostojna množica pojavi množica najboljših štirih te sezone. Množice $\{24\}$, $\{25\}$, $\{18\}$, $\{23\}$ nam pokažejo, da nekateri dirkači to sezono niso bili prav zares konkurenčni ostalim dirkačem. Vidimo tudi, da se nam pri praktično vseh izbirah treh dirk ustvari nekaj množic posrednih in neposrednih tekmovalcev (to se ne zgodi samo takrat, ko je Marc Márquez padel, vendar nadeljeval dirko in jo zaključil na 15 oziroma 13 mestu), kar nam pove, da so dirkači v različnih množicah verjetno res različno konkurenčni. Na to seveda vpliva tudi to, da dirkajo na različno dobrih motorjih.

dirke	Množice posrednih in neposrednih tekmovalcev
[1,3]	$\{1\}, \{2, 4, 5, 7, 10, 14, 15, 16, 17\}, \{24\}, \{25\}$
[2,4]	$\{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 16\}, \{18\}, \{24\}$
[3,5]	$\{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 15\}, \{24\}, \{23\}$
[4,6]	$\{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 11\}, \{12, 14, 15\}, \{24\}, \{23\}$
[5,7]	$\{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \{12, 15\}, \{14\}, \{22, 23, 24\}$
[6,8]	$\{1\}, \{2, 3, 4, 5, 7, 10, 12, 14, 15, 22, 23, 24\}$
[7,9]	$\{1\}, \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 22, 23\}$
[8,10]	$\{1\}, \{2, 3, 4, 5, 8, 12, 13, 14, 17, 22, 23, 25\}$
[9,11]	$\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 8, 12, 14, 17\}, \{23, 25\}$
[10,12]	$\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 8, 12, 14, 17, 23, 25\}$
[11,13]	$\{1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 14, 17, 18, 21, 23, 27\}$
[12,14]	$\{1, 3, 4, 6, 8, 12, 13, 14, 15, 18, 21, 23, 24\}$
[13,15]	$\{3\}, \{1, 4, 6, 8, 11, 12, 14, 18, 21, 23, 24\}$
[14,16]	$\{3\}, \{8\}, \{11, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 25\}$
[15,17]	$\{2, 3\}, \{5, 8\}, \{12, 14, 18\}, \{24\}, \{25\}$
[16,18]	$\{2\}, \{5, 8, 12, 18\}, \{14\}, \{24\}, \{25\}$

Tabela 4.1: Množice posrednih in neposrednih tekmovalcev za 3 zaporedne dirke.

Poglavje 5

Sklep

V diplomskem delu smo si pogledali, kaj so inverzije permutacij, njihove lastnosti in kako definirajo permutacijske in tekmovalnostne grafe.

Diplomsko delo smo začeli s ponovitvijo nekaterih osnovnih pojmov, notacij in definicij s področja teorije grafov, algebre in teorije množic, ki so ključni za nadaljno razumevanje.

Nato smo definirali permutacije in pokazali nekaj načinov, kako jih lahko zapišemo. Povedali smo, da je množica vseh permutacij z n elementi skupaj z operacijo kompozitum simetrična grupa. Permutacijska grupa je vsaka podgrupa simetrične grupe ter po Cayleyevem izreku je vsaka grupa izomorfna neki permutacijski grupi.

V nadaljevanju smo povedali kaj so inverzije neke permutacije. Pokazali smo kako lahko permutacije delno uredimo s pomočjo Bruhatovih delnih urejenosti. Šibka Bruhatova delna urejenost nam pove, da lahko vsako permutacijo z i inverzijami uredimo z natanko i transpozicijami sosednih elementov. Zatem izračunamo rodovno funkcijo, ki nam šteje število permutacij množice $[n]$ z i inverzijami. Potem smo pokazali kako lahko množico permutacij S_n uredimo in tako vsaki permutaciji iz množice S_n dodelimo celo število N, kjer je $0 \leq N \leq n!$. To lahko denimo naredimo s pomočjo Lehmerjeve kode ali vektorja inverzij.

V tretjem poglavju smo se posvetili permutacijskim grafom. Najprej smo jih karakterizirali s pomočjo kohezivnega zaporedja grafa. Potem smo se osredotočili na drevesa, ki so permutacijski grafi. Ugotovili smo, da so to ravno gosenice. Pokazali smo, da obstajata natanko dve permutaciji iz S_n, ki imata permutacijski graf izomorfen neki gosenici na $n \geq 3$ vozliščih. Nato smo predstavili, kako lahko konstruiramo permutacijske grafe s pomočjo kompozicije grafov.

V zadnjem delu smo si pogledali kaj so tekmovalnostni grafi. Povedali smo, kaj so rangiranja, kdaj par vozlišč tekmuje, kako je tekmovalnost dveh vozlišč povezana z inverzijami permutacij, kaj je tekmovalnostna množica, kaj je množica tekmovalcev ter kaj je množica posrednih in neposrednih tekmovalcev. Nato smo povedali, kaj so primerljivostni grafi in ugotovili, da so permutacijski grafi tako primerljivostni kot tekmovalnostni grafi. Definirali smo tudi delno kohezivno zaporedje vozlišč ter pokazali, da je vsak tekmovalnostni graf delno koheziven. Zatem smo predstavili algoritem za izračun množice posrednih in neposrednih tekmovalcev direktno iz množice rangiranj brez predhodnega izračuna tekmovalnostnega grafa. Pokazali smo tudi, kako so množice posrednih in neposrednih tekmovalcev urejene. Na koncu smo algoritem uporabili na resničnih podatkih. Ker so bili podatki iz špotra, kjer so velike spremembe rangiranj pogoste, smo ugotovili, da če želimo pridobiti uporabne informacije, moramo algoritem uporabiti na manjšem številu rangiranj. Prvi prikazani način je izbira nekaterih rangiranj. Drugi prikazani način pa je izbira nekaj zaporednih rangiranj. Pri drugem načinu tako lahko vidimo formo športkov skozi čas. Treba pa je poudariti, da sta oba načina pomanjkliva. Pri prvem je težava, da dobimo informacije iz neke podmnožice rangiranj. Te informacije so lahko zelo variabilne. Pri drugem načinu je težava v tem, da ne dobimo veliko informacij o športnikih, ki so v tem zaporedju imeli en slab rezultat. Rezultate algoritma bi morda lahko izboljšali s pomočjo predprocesiranja podatkov. Na primer, v primeru odstopa športnika, ga lahko kaznujemo z uvrstitvijo na njegovo rahlo podpovprečno mesto, namesto da ga diskvalifikaciramo.

Literatura

[1] Ziya Arnavut. Inversion coding. *The Computer Journal*, 47(1):46–57, 2004.

[2] Richard A Brualdi and Geir Dahl. Permutation graphs and the weak Bruhat order. *The Art of Discrete and Applied Mathematics*, 2023.

[3] Regino Criado, Esther García, Francisco Pedroche, and Miguel Romance. On graphs associated to sets of rankings. *Journal of computational and applied mathematics*, 291:497–508, 2016.

[4] Alessio del Vigna. The factorial number system. Dosegljivo: `http://www.phc.pisa.it/~delvigna/maths/factorial-base.pdf`. [Dostopano: 18. 1. 2023].

[5] Severino V Gervacio, Teofina A Rapanut, and Phoebe Chloe F Ramos. Characterization and construction of permutation graphs. *Open Journal of Discrete Mathematics*, 3(1):33–38, 2013.

[6] Martin Charles Golumbic. *Algorithmic graph theory and perfect graphs.* Elsevier, 1980.

[7] Jon Kleinberg and Éva Tardos. Algorithm design. Dosegljivo: `https://web.cs.ucla.edu/~srinath/static/pdfs/AlgorithmDesign_%20EvaTardos.pdf`, 2005. [Dostopano: 18. 11. 2023].

[8] Barbara H Margolius. Permutations with inversions. *Journal of Integer Sequences*, 4(2), 2001.

[9] Riste Skrekovski. Diskretne strukture II [Elektronski vir] : zapiski predavanj. Dosegljivo: `https://users.fmf.uni-lj.si/skreko/Gradiva/DS2-skripta.pdf`, 2010. [Dostopano: 18. 11. 2023].

[10] Yufei Zhao. On the Bruhat order of the symmetric group and its shellability. Dosegljivo: `https://web.mit.edu/yufeiz/www/papers/bruhat.pdf`, 2007. [Dostopano: 18. 11. 2023].