# Inverzije permutacij, permutacijski grafi in tekmovalnostni grafi

Luka Uranič
Mentorica: izr. prof. dr. Polona Oblak

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Fakulteta za matematiko in fiziko

Ljubljana, 2023

# Uvod

# Permutacije

Permutacije so prerazporeditve elementov neke končne množice. Elemente te množice lahko oštevilčimo s števili $1, 2, \ldots, n$, za nek $n$, zato bomo brez škode za splošnost permutacije gledali na množici $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

**Definicija permutacije:**

Bijektivni preslikavi $\pi : [n] \to [n]$ rečemo permutacija.

$S_n$ je množica vseh permutacij na množici $[n]$.

# Zapis permutacije

Za zapis permutacije $\pi$ bomo uporabljali enovrstični zapis:

$$\pi = (\pi(1), \pi(2), \cdots, \pi(n)) = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n),$$

kjer je $\pi_i = \pi(i)$.

# Inverzije permutacij

**Definicija inverzije:**

Inverzija permutacije $\sigma = (a_1, a_2, \dots a_n) \in S_n$ je urejen par $(a_i, a_j)$, kjer je $i < j$ in $a_i > a_j$.

Množico vseh inverzij permutacije $\sigma$ označimo z $I_\sigma$. Pozicijski zapis inverzije $(a_i, a_j)$ je $(i, j)$.

# Število inverzij

Število inverzij nam meri stopnjo neurejenosti permutacije oziroma oddaljenost permutacije od identične permutacije.
Število inverzij je enako številu presečišč v puščičnem diagramu permutacije. Zato je število inverzij permutacije $\sigma$ enako številu inverzij permutacije $\sigma^{-1}$.
Identična permutacija $id = (1, 2, \ldots, n)$ nima inverzij. Največ inverzij ima permutacija $(n, n-1, \ldots, 1)$. V tem primeru je vsak par različnih števil v inverziji. Število izborov dveh elementov izmed $n$ je ravno $\binom{n}{2}$, torej je $|I_{(n,n-1,\ldots,1)}| = \binom{n}{2}$.

# Šibka Bruhatova delna urejenost

**Definicija šibke Bruhatove delne urejenosti:**

Naj bosta $\sigma, \pi \in S_n$. Permutacija $\sigma$ je manjša ali enaka od permutacije $\pi$ v šibki Bruhatovi delni urejenosti, kar označimo z $\sigma \preceq_b \pi$, če je $I_\sigma \subseteq I_\pi$.

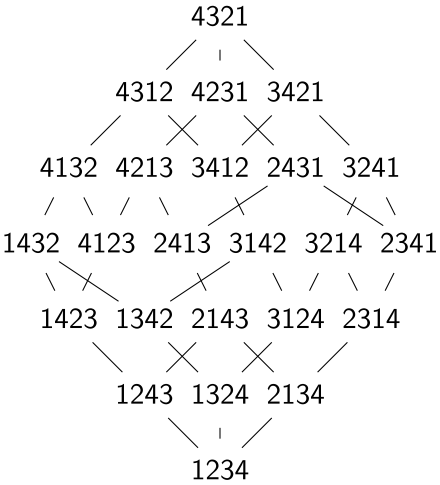


Figure: Hessejev diagram šibke Bruhatove delne urejenosti množice $S_4$.

# Rodovne funkcije permutacij

Naj bo $f_n(x)$ rodovna funkcija s koeficienti $a_i$ pred $x^i$, ki štejejo število permutacij množice $[n]$ z $i$ inverzijami:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{\binom{n}{2}} a_i x^i.$$

Število vseh permutacij množice $[n]$ je $n!$, zato velja:

$$\sum_{i=0}^{\binom{n}{2}} a_i = n!.$$

# Rodovne funkcije permutacij

Eksplicitna formula za rodovno funkcijo:

$$f_n(x) = \prod_{m=1}^{n} \sum_{i=0}^{m-1} x^i = 1(1+x)(1+x+x^2)\cdots(1+x+\cdots+x^{n-1}).$$

Naslednja formula nam pove, kako iz rodovne funkcije $f_n$ izrazimo koeficient $a_i$:

$$a_i = \binom{n+i-1}{i} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left( \binom{n+i-u_j-j-1}{i-u_j-j} + \binom{n+i-u_j-1}{i-u_j} \right),$$

kjer so $u_j = \frac{j(3j-1)}{2}$ petkotniška števila. Če je v binomskem simbolu spodaj negativno število, je vrednost binomskega simbola enaka 0. Zato je vsota končna.

# Permutacijski grafi

**Definicija permutacijskega grafa:**

Naj bo $\sigma \in S_n$. Graf inverzij permutacije $\sigma$, ki ga označimo z $G_\sigma$, je neusmerjen graf z $V(G_\sigma) = [n]$, kjer je $xy \in E(G_\sigma)$ natanko tedaj, ko je $(x, y)$ ali $(y, x)$ inverzija permutacije $\sigma$. Vsak graf izomorfen grafu $G_\sigma$ za neko permutacijo $\sigma$ imenujemo permutacijski graf.

# Kohezivno zaporedje grafa

**Definicija kohezivnega zaporedja grafa:**

Naj bo $G$ neusmerjen graf na $n$ vozliščih. Zaporedju vozlišč $I = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ rečemo kohezivno zaporedje grafa $G$, če sta za poljubne $i, j, k$, kjer je $1 \leq i < k < j \leq n$, izpolnjena naslednja pogoja:

(a) Če je $v_i v_k \in E(G)$, $v_k v_j \in E(G)$, potem je $v_i v_j \in E(G)$.

(b) Če je $v_i v_j \in E(G)$, potem je $v_i v_k \in E(G)$ ali $v_k v_j \in E(G)$.

# Karakterizacija permutacijskih grafov

**Lema:**

Naj bo $G$ graf. Zaporedje vozlišč $I$ je kohezivno zaporedje grafa $G$ natanko tedaj, ko je $I$ kohezivno zaporedje grafa $\overline{G}$.

**Izrek:**

Naj bo $\sigma \in S_n$. Zaporedje vozlišč $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$ je kohezivno zaporedje permutacijskega grafa $G_\sigma$.

**Izrek (karakterizacija permutacijskih grafov):**

Graf $G$ je permutacijski graf natanko tedaj, ko ima kohezivno zaporedje.

# Zvezde

**Trditev:**

Zvezda $K_{1,n}$ je permutacijski graf.

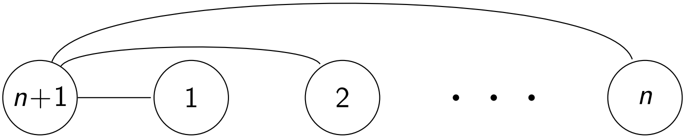


Figure: Primer kohezivnega zaporedja za zvezdo $K_{1,n}$.

# Poti

**Trditev:**

Pot $P_n$ je permutacijski graf.

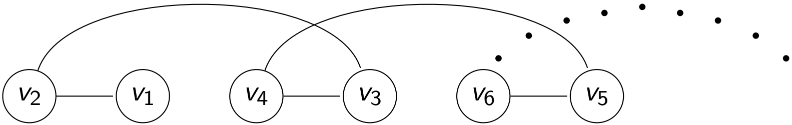


Figure: Primer kohezivnega zaporedja za pot $P_n$.

# Drevo $K_{1,3}^*$

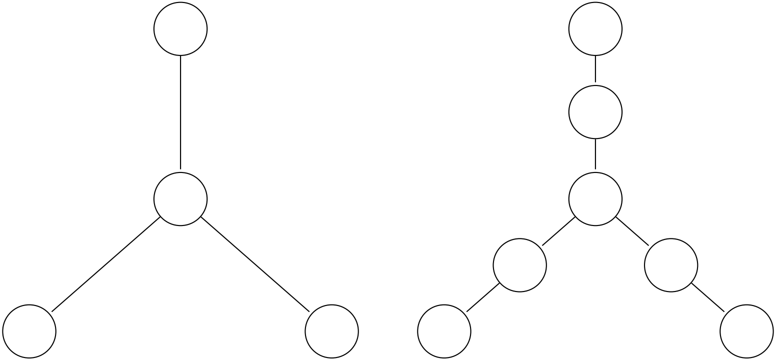

Figure: Grafa $K_{1,3}$ in $K_{1,3}^*$.

# Gosenice

**Trditev:**

Drevo $K_{1,3}^*$ ni permutacijski graf.

**Definicija gosenice:**

Drevo je gosenica, če po odstranitvi vseh listov dobimo pot.

**Lema:**

Drevo je gosenica natanko tedaj, ko ne vsebuje podgrafa $K_{1,3}^*$.

# Primer gosenice

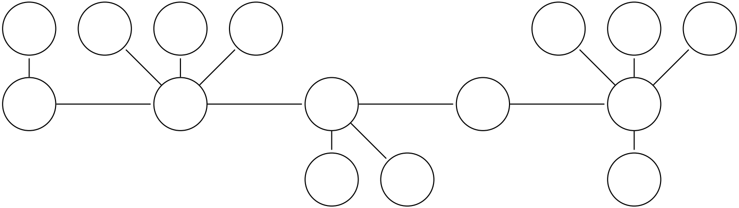

Figure: Primer gosenice z 10 listi.

# Drevesa, ki so permutacijski grafi

**Izrek:**

Drevo je permutacijski graf natanko tedaj, ko je gosenica.

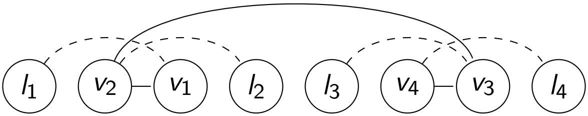


Figure: Primer kohezivnega zaporedja gosenice.

# Permutacije gosenic

Imejmo tako gosenico, da ko ji odstranimo vse liste, dobimo pot na $k$ vozliščih. Vozlišče $u_i$ na poti naj ima $m_i$ listov, $m_i \in \mathbb{N}_0$. Označimo tako gosenico s $C_k(m_1, m_2, \ldots, m_k)$.

**Trditev:**

Gosenica $C_k(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ je permutacijski graf vsaj dveh permutacij.

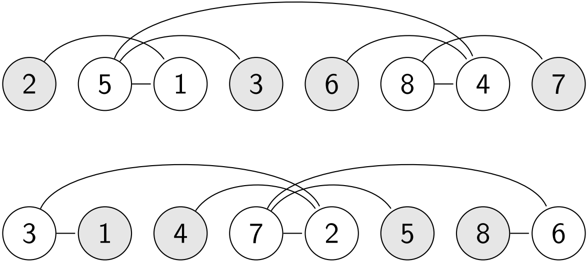


Figure: Gosenica $C_4(1,1,1,1)$ je permutacijski graf permutacij $(2,5,1,3,6,8,4,7)$ in $(3,1,4,7,2,5,8,6)$.

# Permutacije gosenic

**Izrek:**

Za $n \geq 3$ obstajata natanko dve permutaciji iz $S_n$, katerih permutacijski graf je pot na $n$ vozliščih.

**Izrek:**

Naj bo $n \geq 3$ in $C$ gosenica na $n$ vozliščih. Potem obstajata natanko dve permutaciji iz $S_n$, katerih permutacijski graf je izomorfen grafu gosenice $C$.

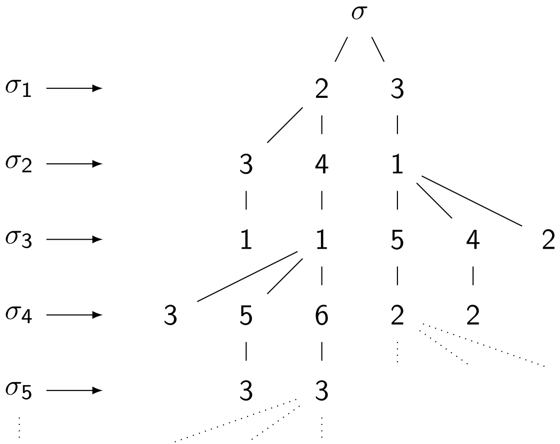


Figure: Slika ponazarja odločitveno za permutaciji $(2, 4, 1, 6, 3, \dots)$ in $(3, 1, 5, 2, \dots)$, katerih permutacijski graf je $P_n$.

# Rangiranja in tekmovalnost vozlišč

## Definicija rangiranja:

Rangiranje $c = (i_1, \ldots, i_n)$ množice $[n]$ je permutacija iz $S_n$. Pisali bomo $i \prec_c j$, kadar se vozlišče $i$ pojavi pred vozliščem $j$ v vektorju rangiranja $c$, to je, ko $c^{-1}(i) < c^{-1}(j)$. Zato rangiranje $c$ definira zaporedje (urejenost) množice $[n]$: $i_1 \prec_c i_2 \prec_c \cdots \prec_c i_n$.

## Definicija tekmovanja para vozlišč:

Naj bo $R = \{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ končna množica rangiranj. Potem rečemo, da par vozlišč $(i, j) \in [n] \times [n]$ (neposredno) tekmuje, če obstajata takšni rangiranji $c_s, c_t \in R$, da je $i \prec_{c_s} j$ ampak $j \prec_{c_t} i$.

# Tekmovalnostni grafi

**Definicija tekmovanja para vozlišč:**

Naj bo $R = \{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ množica rangiranj množice $[n]$. Tekmovalnostni graf množice rangiranj $R$ definiramo kot neusmerjen graf $G_c(R) = ([n], E)$, kjer je množica povezav $E$ podana na naslednji način: med $i$ in $j$ je povezava, če $(i, j)$ tekmujeta.

# Množice vozlišč v tekmovalnostenem grafu

## Definicija množice tekmovalcev:

Naj bo $R = \{c_1, c_2, \ldots, c_r\}$ množica rangiranj množice $[n]$. Množici vozlišč $C \subseteq [n]$ rečemo množica tekmovalcev, če vsaka dva elementa $i, j \in C$ tekmujeta in $C$ je maksimalna glede na to lastnost.

## Definicija množice posrednih in neposrednih tekmovalcev:

Če vzamemo množico rangiranj $R = \{c_1, \ldots, c_r\}$ množice $[n]$, rečemo, da par vozlišč $(i, j) \in [n] \times [n]$ posredno ali neposredno tekmuje, če obstaja tak $k \in \mathbb{N}$ in vozlišča $i_1, \ldots, i_k \in [n]$, da $(i, i_1)$ tekmujeta, $(i_1, i_2)$ tekmujeta, $\ldots$, in $(i_k, j)$ tekmujeta. Množici vozlišč $D \subseteq [n]$ rečemo množica posrednih in neposrednih tekmovalcev, če vsaka dva elementa $i, j \in D$ posredno ali neposredno tekmujeta in $D$ je maksimalna glede na to lastnost.

# Delna kohezivnost

**Definicija delne kohezivnosti:**

Graf $G$ ima delno kohezivno zaporedje, če obstaja povezava $ab$, kjer $a < b$, potem mora za vsak $x$, za katerega velja $a < x < b$ obstajati povezava $ax$ ali $xb$. Graf $G$ je delno koheziven, če ima delno kohezivno zaporedje.

**Izrek:**

Vsak tekmovalnostni graf je delno koheziven.

# Lemi

**Lema:**

Naj bo $R = \{c_1, \ldots, c_r\}$ množica rangiranj množice $[n]$. Če je $D \subseteq [n]$ množica posrednih in neposrednih tekmovalcev in $a, b \in D$, potem za vsak $x \in [n]$ in vsako tako rangiranje $c_m \in R$, da je $a \prec_{c_m} x \prec_{c_m} b$, sledi $x \in D$.

**Lema:**

Naj bo $R = \{c_1, \ldots, c_r\}$ množica rangiranj množice $[n]$. Če je $D \subseteq [n]$ množica posrednih in neposrednih tekmovalcev ter obstajata taka $a \in D$ in $c_m \in R$, da je $c_m^{-1}(a) = 1$, potem

$$\{x \in [n] \mid c_s^{-1}(x) = 1 \textit{ za nek } c_s \in R\} \subseteq D.$$

# Algoritem za izračun množice posrednih in neposrednih tekmovalcev

**Izrek:**

Naj bo $R = \{c_1, \ldots, c_r\}$ množica rangiranj vozlišč $[n]$. Množico posrednih in neposrednih tekmovalcev lahko identificiramo z zaprtimi intervali naravnih števil $[p, q]$ na naslednji način:

$$D_{[p,q]} = \{x \in [n] \mid c_s^{-1}(x) \in [p, q] \textit{ za nek } c_s \in R\}.$$

Še več, $p$ in $q$ sta prvi na levi in zadnji na desni poziciji elementov iz $D_{[p,q]}$ glede na vsa rangiranja.

# Usmerjen graf $G_d(R)$

**Definicija usmerjenega grafa $G_d(R)$:**

Naj bo $R = \{c_1, \dots, c_r\}$ množica $r$ rangiranj ($r \geq 2$) množice $[n]$. Definirajmo usmerjen graf $G_d(R)$ na naslednji način:

(i) Vozlišča grafa $G_d(R)$ so elementi množice $[n]$.

(ii) Če $i, j \in [n]$, $i \neq j$ potem je $(i, j)$ usmerjena povezava v grafu $G_d(R)$, če obstaja takšno rangiranje $c_m \in R$, da je $i \preceq_{c_m} j$.

# Ekvivalentnost trditev o usmerjenem grafu $G_d(R)$

**Trditev:**

Naj bosta $D_1$ in $D_2$ dve različni množici posrednih in neposrednih tekmovalcev. Naslednji trditvi o usmerjenem grafu $G_d(R)$ sta ekvivalentni:

(i) Obstaja takšna usmerjena povezava $(a, b)$, da je $a \in D_1$ in $b \in D_2$.

(ii) Vsa vozlišča iz $D_1$ imajo usmerjeno povezavo proti vsem vozliščem iz $D_2$.

# Relacija $\to$

**Definicija relacije $\to$:**

Naj bo $R = \{c_1, \dots, c_r\}$ množica r rangiranj vozlišč $[n]$, $r \geq 2$, katerih množice posrednih in neposrednih tekmovalcev označimo z $D_1, \dots, D_k$, kjer je $\bigcup_{i \in [k]} D_i = [n]$. Definirajmo binarno relacijo $\to$ med dvema množicama posrednih in neposrednih tekmovalcev na nasledni način:

(i) $D_i \to D_i$ za vsako množico posrednih in neposrednih tekmovalcev $D_i$.

(ii) za vsaki različni množici $D_i, D_j$ posrednih in neposrednih tekmovalcev, je $D_i \to D_j$ natanko tedaj, ko velja katerakoli od ekvivalentnih trditev o usmerjenem grafu $G_d(R)$ iz prejšne trditve.

# Latnosti relacije $\rightarrow$

**Lema:**

Binarna relacija $\rightarrow$ je tranzitivna.

**Posledica:**

Binarna relacija $\rightarrow$ je linearna urejenost množic posrednih in neposrednih tekmovalcev iz $[n]$.