Die Regel von l'Hospital

Beim Rechnen mit dem Limes ist der Satz von l'Hospital oft nützlich. Er lautet: Sind f, g differenzierbare Funktionen mit $\forall n : g'(n) \neq 0$ und gehen f und g beide gegen 0 oder beide gegen ∞, wenn n gegen ∞ geht, so existiert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right)$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f'(n)}{g'(n)}\right)$ existiert und in diesem Fall ist dann

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f'(n)}{g'(n)}\right).$$

(Kurz gesagt: Man darf den Limes der Ableitungen bestimmen, wenn f und g beide gegen 0 oder beide gegen unendlich gehen, wenn n gegen unendlich geht und zudem f und g 'gute' Funktionen sind in dem Sinne, dass sie differenzierbar sind. Da wir es hier praktisch immer mit differenzierbaren Funktionen zu tun haben, die bei wachsenden n gegen ∞ gehen, ist der Satz praktisch immer anwendbar. Die Frage ist dann, ob es einem hilft, denn der Grenzwert der Ableitungen muss ja nicht umbedingt existieren und dann ist man nicht weiter als vorher.)

Als Beispiel wollen wir

$$\ln(n) \in O(\sqrt[3]{n})$$

unter Nutzung des Satzes von l'Hospital beweisen.

Mit den Ableitungen $\ln'(n) = \frac{1}{n}$ und $(n^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}n^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3n^{\frac{2}{3}}}$ (mit $\sqrt[3]{n} = n^{\frac{1}{3}}$) folgt nun

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n)}{\sqrt[3]{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^{\frac{2}{3}}}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^{\frac{1}{3}}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{\sqrt[3]{n}}\right) = 0.$$

Damit ist diese Größenabschätzung (und sogar $\ln n \in o(\sqrt[3]{n})$) bewiesen.