Algorithmen & Datenstrukturen - Aufgaben zum 26. Oktober 2015 (Blatt 02)

26.10.2015

2.1

1.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^3-6n+20}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-\frac{6}{n^2}+\frac{20}{n^3}}{1}\right) = 3$$

$\Rightarrow$ Es existiert ein endlicher Limes > 0 für die Division der beiden Ausdrücke;
d.h. $3n^3 - 6n + 20 \in O(n^3)$.

2.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\cdot log\ n}{n^3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1\cdot\frac{log\ n}{n^2}}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{log\ n}{n^3}\right) \overset{H}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n\cdot ln10}}{3n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n^3\cdot ln10}\right) = \infty$$

$\Rightarrow$ Es existiert kein endlicher Limes; d.h. $n^2 \cdot log\ n \notin O(n^3) \to n^2 \cdot log\ n \notin O(n^3) \cap \Omega(n^2)$.

2.2

1.

$$log\ n < ln\ n < 4 < 1000 < \sqrt{n}^3 = n^{\frac{1}{3}} < n^{\frac{1}{2}} < n < n^2 < 2^n$$

Anmerkung: $<$ drückt hier lediglich eine Ordnung aus, nicht "kleiner/gleich".

Begründung:
$log\ n \in O(ln\ n)$, da $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(log\ n)'}{(ln\ )'}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{1}{2n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = \frac{1}{10} = 0,1 < \infty$
$ln\ n < O(4)$, da $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(ln\ n)'}{4'}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot n}\right) = 0 < \infty$
$4 \in O(1000)$, da $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{1000}\right) = 0,004 < \infty$
$1000 \in O(\sqrt{n}^3)$, da $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1000)}{n^{\frac{1}{3}}}\right) = 0 < \infty$
$\sqrt{n}^3 \in O(n^{\frac{1}{2}})$, da $n^{\frac{1}{3}} < n^{\frac{1}{2}} \quad \forall n \in \mathbb{R}$ mit $n > 0$

$n^{\frac{1}{2}} \in O(n)$, da $n^{\frac{1}{2}} < n \quad \forall n \in \mathbb{R}$ mit $n > 0$
$n \in O(n^2)$, da $n < n^2 \quad \forall n \in \mathbb{R}$ mit $n > 0$
$n^2 \in 2^n$, da $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{(n^2)'}{e^{ln\ 2\cdot n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{ln\ 2\cdot e^{ln\ 2\cdot n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{1\cdot e^{ln\ 2\cdot n} + ln\ 2\cdot ln\ 2\cdot e^{ln\ 2\cdot n}}\right)$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{(1+(ln\ 2)^2)e^{ln\ 2\cdot n}}\right) = \frac{2}{1+(ln\ 2)^2} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{e^(ln\ 2\cdot n)}\right) = \frac{2}{1+(ln\ 2)^2} < \infty$

Funktionen gleicher Äquivalenzklassen:

2.3

$f(n), g(n) \in O(h(n))$

$\Rightarrow \exists n_0, c\ (\forall n_{n>n_0}\ f(n) \leq h(n)\cdot c) \wedge \exists n_0', c'\ (\forall n_{n>n_0'}\ g(n) \leq h(n)\cdot c')$
$\Rightarrow \forall n > max(n_0, n_0')\ (f(n)\cdot g(h) \leq (h(n)\cdot c)\cdot(h(n)\cdot c'))$
$\Rightarrow \forall n > max(n_0, n_0')\ (f(n)\cdot g(h) \leq h(n)\cdot 2\cdot c\cdot c')$

$\Rightarrow f(n)\cdot g(n) \in O(h(n))$

2.4

1.

$T(n) := \begin{cases} 0, & \text{für n = 0} \\ 3\cdot T(n-1)+2, & \text{sonst} \end{cases}$

a)

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T(n-1)+2 \\ &= 3(3T(n-2)+2)+2 = 9T(n-2)+6+2 \\ &= 27T(n-3)+18+6+2 \\ &= ... \\ &= 3^kT(n-k)+3^{k-1}+3^{k-2}+...+2^1+2^0 \quad (*) \end{aligned}$$

(*)
I) Induktionsanfang: Behauptung: $(\exists n)$
Beweis:

II) Induktionsschritt:
Induktionsvorraussetzung (IV): $(\forall n)$
Beweis: