Algorithmen & Datenstrukturen - Aufgaben zum 26. Oktober 2015 (Blatt 02)

Tobias Knöppler (6523815), Nico Tress (6378086)

26.10.2015

2.1

1.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^3-6n+20}{n^3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3-\frac{6}{n^2}+\frac{20}{n^3}}{1}\right) = 3$

$\Rightarrow$ Es existiert ein endlicher Limes > 0 für die Division der beiden Ausdrücke;
d.h. $3n^3 - 6n + 20 \in O(n^3)$.

2.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2\cdot log\ n}{n^3}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1\cdot\frac{log\ n}{n^2}}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{log\ n}{n^3}\right) \overset{H}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n\cdot ln10}}{3n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n^3\cdot ln10}\right) = \infty$

$\Rightarrow$ Es existiert kein endlicher Limes; d.h. $n^2\cdot log\ n \notin O(n^3) \rightarrow n^2\cdot log\ n \notin O(n^3)\cap\Omega(n^2)$.

2.2

1.

$log\ n < ln\ n < 4 < 1000 < \sqrt{n}^3 = n^{\frac{1}{3}} < n^{\frac{1}{2}} < n < n^2 < 2^n$

Anmerkung: $<$ drückt hier lediglich eine Ordnung aus, nicht "kleiner/gleich".

Begründung:
$log\ n \in O(ln\ n)$, da $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(log\ n)'}{(ln\ )'}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{1}{2n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = \frac{1}{10} = 0,1 < \infty$
$ln\ n < O(4)$, da $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(ln\ n)'}{4'}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot n}\right) = 0 < \infty$
$4 \in O(1000)$, da $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{1000}\right) = 0,004 < \infty$
$1000 \in O(\sqrt{n}^3)$, da $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(1000)}{n^{\frac{1}{3}}}\right) = 0 < \infty$

$\sqrt{n}^3 \in O(n^{\frac{1}{2}})$, da $n^{\frac{1}{3}} < n^{\frac{1}{2}} \quad \forall n \in \mathbb{R}$ mit $n > 0$
$n^{\frac{1}{2}} \in O(n)$, da $n^{\frac{1}{2}} < n \quad \forall n \in \mathbb{R}$ mit $n > 0$
$n \in O(n^2)$, da $n < n^2 \quad \forall n \in \mathbb{R}$ mit $n > 0$
$n^2 \in 2^n$, da $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{(n^2)'}{e^{ln\ 2\cdot n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{ln\ 2\cdot e^{ln\ 2\cdot n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{1\cdot e^{ln\ 2\cdot n} + ln\ 2\cdot ln\ 2\cdot e^{ln\ 2\cdot n}}\right)$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{(1+(ln\ 2)^2)e^{ln\ 2\cdot n}}\right) = \frac{2}{1+(ln\ 2)^2} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{e^(ln\ 2\cdot n)}\right) = \frac{2}{1+(ln\ 2)^2} < \infty$

Funktionen gleicher Äquivalenzklassen:

$log\ n \in \Theta(ln\ n)$, da $log\ n \in O(ln\ n)$ (siehe oben) und da
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{ln\ n}{log\ n}\right) \overset{\text{H}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{n}\right) = 2 < \infty \Rightarrow ln\ n \in O(log\ n)$

$4 \in \Theta(1000)$, da $4 \in O(1000)$ (siehe oben) und $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1000}{4}\right) = 250 < \infty \Rightarrow 1000 \in O(4)$

2.3

$f(n), g(n) \in O(h(n))$

$\Rightarrow \exists n_0, c\ (\forall n_{n>n_0}\ f(n) \leq h(n) \cdot c) \wedge \exists n_0', c'\ (\forall n_{n>n_0'}\ g(n) \leq h(n) \cdot c')$
$\Rightarrow \forall n > max(n_0, n_0')\ (f(n) \cdot g(h) \leq (h(n) \cdot c) \cdot (h(n) \cdot c'))$
$\Rightarrow \forall n > max(n_0, n_0')\ (f(n) \cdot g(h) \leq h(n) \cdot 2 \cdot c \cdot c')$

$\Rightarrow f(n) \cdot g(n) \in O(h(n))$

2.4

1.

$T(n) := \begin{cases} 0, & \text{für n = 0} \\ 3 \cdot T(n-1)+2, & \text{sonst} \end{cases}$

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T(n-1)+2 \\ &= 3(3T(n-2)+2)+2 = 9T(n-2)+6+2 \\ &= 9(3T(n-3)+2)+6+2 = 27T(n-3)+18+6+2 \\ &= ... \\ &= 3^kT(n-k) + 2\cdot 3^{k-1} + 2\cdot 3^{k-2} + ... + 2\cdot 3^1 + 2\cdot 3^0 \quad (*) \end{aligned}$$

(*)
I) Induktionsanfang: Behauptung: $A\ :=\ \exists n\ (T(n) = 3^kT(n-k) + 2\cdot 3^{k-1} + ... + 2\cdot 3^0$
Beweis: $T(n) = 3T(n-1)+2 = 3^1T(n-1) + 2\cdot 3^0$

II) Induktionsschritt:

Induktionsvorraussetzung (IV): $\forall n\ A(n) \Rightarrow A(n+1)$
Beweis:

...

2.

$$S(n) := \begin{cases} c, & \text{für n} = 1 \\ 16 \cdot S(\frac{n}{4}) + n^2, & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

$(I)\ log_4(16) = 2$

$(II)\ n^2 \in \Theta(n^{log_4(16)} = n^2) \Rightarrow T(n) \in \Theta(n^{log_4(16)} \cdot log_2(n))$
$\Rightarrow T(n) \in \Theta(n^2 \cdot log_2(n))$