DM - Hausaufgaben zum 7. November 2014 (Blatt 03)

07.11.2014

1

1. a)

$A(n) : 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 = \sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i$

1. b)

$A(1) : 1 \cdot 2^1 = 2 = 0 + 2 = (1-1) \cdot 2^{1+1} + 2$
$A(2) : 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 = 10 = 8 + 2 = 2^3 + 2 = (2-1) \cdot 2^{2+1} + 2$
$A(3) : 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 = 34 = 2 \cdot 16 + 2 = 2 \cdot 2^4 + 2 = (3-1) \cdot 2^{3+1} + 2$

1. c)

I) Induktionsanfang:
Behauptung: $(\exists n)_{n \in \mathbb{N}}(A(n))$
Beweis: siehe 1a)

II) Induktionsschritt:
Induktionsannahme: $(\forall n)_{n \in \mathbb{N}} : (A(n) \rightarrow A(n+1))$
Beweis:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i \cdot 2^i = (n+1) \cdot 2^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i = (n+1) \cdot 2^{n+1} + (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 = (n+1+n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$$
$$\Leftrightarrow 2n \cdot 2^{n+1} + 2 = n \cdot 2^{n+1+1} + 2$$

Wegen I und II ist A(n) damit für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. $\square$

2

2. a)

$$B(1): \sum_{k=1}^{1}(-1)^k k^2 = -1 \cdot 1 = -1 = -1 \cdot \frac{2}{2} = (-1)^1 \frac{1(1+1)}{2}$$
$$B(1): \sum_{k=1}^{2}(-1)^k k^2 = -1 + (-1)^2 2^2 = 3 = 1 \cdot \frac{6}{2} = (-1)^2 \frac{2(2+1)}{2}$$
$$B(1): \sum_{k=1}^{3}(-1)^k k^2 = 3 + -1 \cdot 9 = -6 = -1 \cdot 6 = -1 \cdot \frac{12}{2} = (-1)^3 \frac{3(3+1)}{2}$$

2. b)

$$B(n): \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^1 \cdot 1^2 + (-1)^2 \cdot 2^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot (n-1)^2 + (-1)^n \cdot n^2$$

2. c)

I) Induktionsanfang:
Behauptung: $(\exists n)_{n \in \mathbb{N}}(A(n))$
Beweis: siehe 2a)

II) Induktionsschritt:
Induktionsannahme: $(\forall n)_{n \in \mathbb{N}}(B(n) \to B(n+1)$
Beweis:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k^2 = (-1)^{n+1}(n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^{n+1}(n+1)^2 + (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\Leftrightarrow (-1)^n \cdot \left(-1 \cdot (n+1)^2 + \frac{n(n+1)}{2}\right) = (-1)^n \cdot \left(-\frac{2(n+1)^2}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow (-1)^n \cdot \left(\frac{-2(n^2+2n+1)+n^2+n)}{2}\right) = (-1)^n \cdot \left(\frac{-2n^2-4n-2+n^2+n)}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow (-1)^n \cdot \left(\frac{-n^2-3n-2}{2}\right) = (-1)^n \cdot \left(-1 \cdot \frac{n^2+3n+2}{2}\right) = (-1)^n \cdot \left(-1 \cdot \frac{(n^2+2n)+n+2}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow (-1)^n \cdot \left(-1 \cdot \frac{n(n+2)+n+2}{2}\right) = (-1)^n \cdot \left(-1 \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2}\right) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

Wegen I und II ist B(n) damit für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. $\square$

3

I) Induktionsanfang:
Behauptung: $(\exists n)_{n \in \mathbb{N}_0}(6|(7^n - 1))$.
Beweis: $6|(7^0 - 1) = 6|(1 - 1) = 6|0$

II) Induktionsschritt:
Induktionsannahme (IA): $(\forall n)_{n \in \mathbb{N}_0}(6|(7^n - 1) \rightarrow (6|(7^{n+1} - 1))$
Beweis:

$$7^{n+1} - 1 = 7^n \cdot 7 - 1 = 7^n \cdot 6 + 7^n - 1 = (7^n \cdot 6) + (7^n - 1)$$

Da laut Induktionsannahme $6|(7^n - 1)$ gilt und $\frac{7^n \cdot 6}{6} = 7^n \rightarrow 6|(7^n \cdot 6)$, gilt auch $6|(7^n \cdot 6 + 7^n - 1)$, womit die Behauptung $(\exists n)_{n \in \mathbb{N}_0}(6|(7^n - 1))$ bewiesen ist. $\square$

4

i) Es seien $f(x) = 5x - 7$ und $g(x) = 2^x$ zwei Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so gilt $(\forall n)_{n \in \mathbb{N}}(f(n) < g(n) \rightarrow 5x - 7 < 2^x)$.

$$f'(x) = 5$$
$$g(n) = 2^n = e^{ln(2) \cdot n}$$
$$\Rightarrow g'(n) = ln(2) \cdot e^{ln(2) \cdot n}$$

Daraus folgt:

$$g'(x) = f'(x)$$
$$\Leftrightarrow 5 = ln(2) \cdot e^{ln(2) \cdot x} \Leftrightarrow e^{ln(2) \cdot x} = 5/ln(2)$$
$$\Leftrightarrow ln(2) \cdot x = ln(5/ln(2)) \Leftrightarrow x = ln(5/ln(2))/ln(2)$$

Da $\lceil ln(5/ln(2))/ln(2) \rceil = 3$ und $g'(3) > 5 = f'(3)$ gilt auch $(\forall x)_{x>3}(g'(x) > f'(x))$. Aus diesem Grund und wegen i) gilt also: $(\forall n)_{n \in \mathbb{N}; n>3}(5n - 7 < 2^n \rightarrow 5(n+1) - 7 < 2^{n+1})$.
Daraus und aus den folgenden Ungleichungen folgt also:
$(\forall n)_{n \in \mathbb{N}; n \neq 3; n \neq 4}(5n - 7 < 2^n)$. $\square$

$$5 \cdot 1 - 7 = -2 < 2 = 2^1$$
$$5 \cdot 2 - 7 = 3 < 4 = 2^2$$
$$5 \cdot 3 - 7 = 8 \not< 8 = 2^3$$
$$5 \cdot 4 - 7 = 13 \not< 16 = 2^4$$
$$5 \cdot 5 - 7 = 18 < 32 = 2^5$$

5

Behauptung: $(\forall n)_{n \in \mathbb{N}; n \geq 4}(2^n < n!)$
Beweis durch Induktion:

I) Induktionsanfang
Behauptung: $(\exists n)_{n\in\mathbb{N};n\geq 4}(2^n < n!)$
Beweis: $2^4 = 16 < 24 = 4\cdot 3\cdot 2 = 4!$
II) Induktionsschritt
Induktionsannahme: $(\forall n)_{n\in\mathbb{N};n\geq 4}(2^n < n! \to 2^{n+1} < (n+1)!)$
Beweis:

$2^{n+1} < (n+1)! \Leftrightarrow 2\cdot 2^n < (n+1)\cdot n!$

Da wir angenommen haben, dass $2^n < n!$, gilt also $2\cdot 2^n = 2^{n+1} < (n+1)! = (n+1)\cdot n!$ zumindest dann, wenn $2 < n+1$, was durch die obige Annahme von $n \geq 4$ gegeben ist. Damit ist bewiesen, dass $(\forall n)_{n\in\mathbb{N};n\geq 4}(2^n < n!)$. $\square$