Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Übungen zur Mathematik I für Studierende Informatik und Wirtschaftsinformatik (Diskrete Mathematik) im Wintersemester 2014/2015
Fachbereich Mathematik, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben am 13. und 14. November 2014

1. Es seien $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{a, b, c, d, e\}$.
   (a) Wieviele Abbildungen $f : A \to B$ gibt es, für die $f(3) \neq f(2)$ gilt?
   (b) Wieviele Abbildungen $f : A \to B$ gibt es, für die neben $f(3) \neq f(2)$ auch noch $f(4) \neq f(3)$ und $f(4) \neq f(2)$ gilt?
   (c) Wie viele Abbildungen $f : A \to B$ gibt es und wie viele davon sind injektiv?
   (d) Wie viele Abbildungen $f : A \to B$ sind surjektiv?

2. Die erste Zeilen des Pascalschen Dreiecks lauten wie folgt:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&&&&&&&& \\
&&&&&&&1&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&2&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&& \\
&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&& \\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&& \\
&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&& \\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1& \\
1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1
\end{array}
$$

   (a) Berechnen Sie die nächste Zeile mit Hilfe der bekannten Rekursionsformel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

   (b) Sei A eine Menge mit 10 Elementen. Wie viele 4-elementige Teilmengen hat A?
   (c) Nun gelte $|A| = 30$. Wie viele 4-elementige Teilmengen hat A in diesem Fall? Wieviele 24-elementige Teilmengen hat A?

3. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage für alle $n \geq 2$ gilt:

$$\sum_{i=2}^{n} \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$$

   Deuten Sie diese Gleichung in am Pascalschen Dreieck.

B: Hausaufgaben zum 20. und 21. November 2014

1. (a) Es seien $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Wie viele Abbildungen $g : X \to Y$ gibt es und wie viele davon sind injektiv?

   (b) X und Y seien definiert wie eben. Wieviele Abbildungen $g : X \to Y$ gibt es, für die $g(1)$, $g(3)$ und $g(5)$ paarweise verschieden sind?

2. (a) Wie viele verschiedene Tipps gibt es beim Lotto „6 aus 49“?

   (b) Die Menge M habe 500 Elemente. Wie viele Teilmengen mit mindestens 498 Elementen hat M?

3. (a) Wie lautet der Koeffizient von x^4y^{11} in $(x + y)^{15}$?

   (b) In eine Getränkekiste passen 6 Flaschen. Wieviele Möglichkeiten gibt es eine Kisten ganz zu füllen, wenn 8 Getränkesorten zur Verfügung stehen? Wir nehmen dabei an, dass von jeder Sorte genügend Flaschen vorhanden sind und dass es nicht darauf ankommt an welcher Stelle in der Kiste sich eine bestimmte Flasche befindet.

4. (a) Wie viele (sinnvolle oder sinnlose) Wörter lassen sich durch Veränderung der Reihenfolge der Buchstaben des Wortes MATHEMATIK bilden?

   (b) Wie eben, aber für das Wort CAPPUCCINO .

5. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 4$ die Gleichung

$$\sum_{i=4}^{n} \binom{i}{4} = \binom{n+1}{n-4}$$

   gilt.