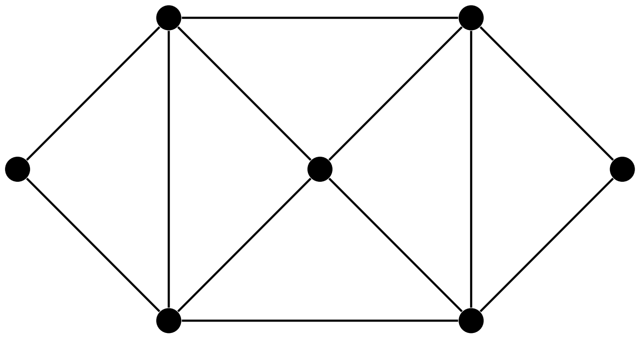
Übungen zur Mathematik I für Studierende der Informatik und Wirtschaftsinformatik (Diskrete Mathematik) im Wintersemester 2014/2015
Fachbereich Mathematik, Stefan Geschke

A: Präsenzaufgaben am 4. und 5. Dezember 2014

1. Wie viele paarweise nicht isomorphe Graphen mit 3 Ecken gibt es?

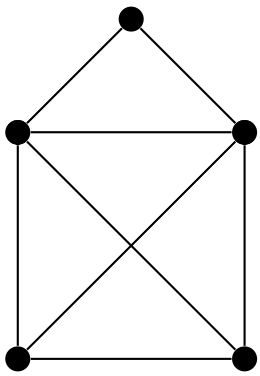
2. Nach Satz 5.32 im Skript besitzt ein zusammenhängender Multigraph genau dann eine Eulersche Linie, wenn jeder Knoten geraden Grad hat. Gehen Sie den Beweis dieses Satzes anhand des folgenden Graphen durch.



   Beginnen Sie dabei mit verschiedenen Kreisen als erstem Schritt in der rekursiven Konstruktion der Eulerschen Linie.

3. Ein *Eulerzug* in einem Multigraphen ist ein Kantenzug, in dem jede Kante des Multigraphen einmal durchlaufen wird, der aber nicht unbedingt geschlossen ist.

   (a) Geben Sie einen Eulerzug in dem folgenden Graphen an.



   (b) Stellen Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür auf, dass eine zusammenhängender Multigraph einen Eulerzug besitzt. Beweisen Sie Ihre Charakterisierung zusammenhängender Multigraphen mit einem Eulerzug.

B: Hausaufgaben zum 11. und 12. Dezember 2014

1. Sei G ein vollständiger Graph mit 10 Knoten. Wie viele Kreise der Länge 4 hat G?

2. Wie viele paarweise nicht isomorphe Graphen mit 4 Ecken gibt es?

   Hinweis: Man erinnere sich daran, dass zwei Graphen genau dann isomorph sind, wenn ihre Komplemente isomorph sind. Diese Bemerkung reduziert deutlich die Anzahl der Fälle, die man betrachten muss.

3. Man gebe zwei nicht isomorphe Graphen mit der Gradfolge $(3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ an.

4. Zeigen Sie, dass ein zusammenhängender Graph genau dann eine Eulersche Linie hat, wenn er eine Vereinigung von geschlossenen Kantenzügen ist, deren Kantenmengen disjunkt sind.

   Hinweis: Man erinnere sich an den Beweis der Charakterisierung von zusammenhängenden Multigraphen mit Eulerschen Linien (Satz 5.32 im Skript).

5. Wir wollen Graphen in *Eulersche* Graphen verwandeln, also in Graphen (nicht Multigraphen!), die eine Eulersche Linie haben.

   (a) Beweisen oder widerlegen Sie: Jeder Graph lässt sich durch Hinzufügen neuer Kanten zu einem Eulerschen Graphen machen.

   (b) Zeigen Sie, dass man jeden Graphen zu einem Eulerschen Graphen machen kann, indem man eine neue Ecke hinzufügt und dann Kanten zwischen der neuen Ecke und gewissen alten Ecken. Dabei ist es auch erlaubt, keine neue Kante einzuführen.

   Hinweis: Man erinnere sich an den Satz über die Anzahl der Knoten von ungeradem Grad in einem Graphen.