DM - Hausaufgaben zum 31. Oktober 2014 (Blatt 04)

31.10.2014

1

1. a)

i) Es gibt keine injektive Funktion $f : A \mapsto B$, da $\mid B \mid > \mid A \mid$.

ii) Ja, z.B.:

$$f : f(1) = a$$
$$f(2) = b$$
$$f(3) = c$$

iii) Nein, da es keine injektive Funktion $A \mapsto B$ gibt, existiert auch keine bijektive Funktion $A \mapsto B$.

1. b)

i) Nein, da eine injektive Abbildung $A \mapsto B$ mit $\mid A \mid = \mid B \mid$ immer auch bijektiv sein muss.

ii) Ja, z.B.

$$f : f(1) = a$$
$$f(2) = b, c$$
$$f(3) = c$$

iii) Ja, z.B.

$$f : f(1) = a$$
$$f(2) = b$$
$$f(3) = c$$

1. c)

i) Ja, z.B.

$$f : f(1) = a \\ f(2) = b \\ f(3) = c$$

ii) Ja, z.B.

$$f : f(1) = a, b \\ f(2) = b, c \\ f(3) = d$$

iii) Ja, z.B.

$$f : f(1) = a, b \\ f(2) = c \\ f(3) = d$$

2

2. a)

f ist injektiv, da $\forall n(n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2n \in \mathbb{Z})$.
Beweis:

I Induktionsannahme: $\exists n \in \mathbb{Z}(2n \in \mathbb{Z})$
Beweis: $2 \cdot 1 = 2 \in \mathbb{Z}$

II Induktionsschritt:
Behauptung: $2n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2(n + 1) \in \mathbb{Z}$
Beweis:

$$2(x + 1) = 2x + 2$$

$$(2 \in \mathbb{Z}) \wedge (2x \in \mathbb{Z}) \Rightarrow 2x + 2 \in \mathbb{Z} \ \square$$

f ist nicht surjektiv, da es z.B. kein n gibt, für das gilt f(n) = 5.
Beweis:
Angenommen, es gelte: $\exists n(f(n) = 5 \Rightarrow f(n) = 2 \cdot \frac{5}{2})$, dann wäre $n = \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$, womit die Annahme, dass f surjektiv sei, zum Widerspruch geführt ist. $\square$

f ist nicht bijektiv, da f nicht surjektiv ist.

2. b)

g ist injektiv, da $\forall n \in \mathbb{Z}(2n+5 \in \mathbb{Z})$.
Beweis:

I Induktionsannahme (IA): $\exists n \in \mathbb{Z}(2n+5 \in \mathbb{Z})$
$(n = 1 \Leftrightarrow 2n+5 = 7) \wedge (7 \in \mathbb{Z}) \Rightarrow$ IA ist erfüllt für n = 1.

II Induktionsschritt:
Behauptung: $(2n+5 \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (2(x+1)+5 \in \mathbb{Z})$
Beweis:

$2(n+1)+5 = 2n+7 = 2n+5+2$

$(2n+5 \in \mathbb{Z}) \wedge (2 \in \mathbb{Z}) \Rightarrow 2n+7 \in \mathbb{Z}$

III Induktionsschluss:
$(I) \wedge (II) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{Z}(2n+5 \in \mathbb{Z})$
Daraus folgt, dass g injektiv ist. $\square$

g ist nicht surjektiv, da $\exists n \notin \mathbb{Z}(2n+5 \in \mathbb{Z})$.
Beweis:
Angenommen, $2n+5 = 6$.
Dann gälte $n = \frac{6-5}{2} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \exists n \notin \mathbb{Z}(2n+5 \in \mathbb{Z})$ $\square$
g ist nicht bijektiv, da g nicht surjektiv ist.

2. c)

h ist nicht injektiv, da h(-2) = 9 = h(2).

h ist nicht surjektiv, da $n \notin \mathbb{Z}$ für $(2n^2+5 = 2)$.
Beweis:
$n^2+5 = 2 \Leftrightarrow n^2 = -3 \Leftrightarrow n = \sqrt{3} \Rightarrow n \notin \mathbb{Z}$ $\square$.

h ist nicht bijektiv, da h weder injektiv noch surjektiv ist.

3

3. a)

Behauptung: f ist injektiv.
Beweis:
Angenommen, f wäre nicht injektiv. Dann gäbe es $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \neq n$, für die gälte:

$f(m) = f(n)$

$\Rightarrow$I $m^2 - 5 = n^2 - 5 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{n^2} = \pm n = * - n$

II $(m^2 - 2)^2 = (n - 2)^2$

m in II $(-n-2)^2 = (n-2)^2$

$n^2 + 4n + 4 = n^2 - 4n + 4$

$4n = -4n \Leftrightarrow 4 = -4$ ↯

* gilt wegen der Annahme, dass m $\neq$ n seien.

Damit ist die Annahme, es gäbe $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \neq n$, für die gilt: $f(m) = f(n)$ zum Widerspruch geführt und bewiesen, dass f injektiv ist. $\square$

f ist nicht surjektiv, da es z.B. kein $m \in \mathbb{Z}$ gibt, für das gilt: $f(m) = (-7, 4)$.
Beweis:
Angenommen, es gäbe ein $m \in \mathbb{Z}$, für das gilt: $f(m) = (-7, 4)$.
Dann gälte:
I $m^2 - 5 = -7 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{-2}$
II $(m-2)^2 = 4 \Leftrightarrow m = 4$
Da $m \neq 4\sqrt{-2}$, ist die Annahme widerlegt, es gäbe ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $f(m) = (-7, 4)$ und bewiesen, dass f nicht surjektiv ist. $\square$

f ist nicht bijektiv, da f nicht surjektiv ist.

3. b)

g ist nicht injektiv, da $g(2, 2) = 10 = g(2, -2)$.

g ist surjektiv, da gilt: $\forall a \in \mathbb{Z} \exists n (g(0, n) = a)$.
Beweis:
Sei $m = 0$. Dann gilt für $f(m, n) = -n$.
Wegen $(n \in \mathbb{Z} \Rightarrow -n \in \mathbb{Z})$ folgt somit $\forall a \in \mathbb{Z} \exists m \exists n (f(m, n) = a)$.
Damit ist g surjektiv. $\square$

g ist nicht bijektiv, da g nicht injektiv ist.

3. c)

h ist nicht surjektiv, da es keine $m, n \in \mathbb{Z}$ gibt, für die gilt: $f(m, n) = (2, -1)$.
Beweis:
Angenommen, es gäbe, $m, n \in \mathbb{Z}$, sodass $h(m, n) = (2, 1)$, dann gälte:
I $3m - n = 2 \Leftrightarrow m = \frac{2-n}{3}$
II $-3m + n = 1$
m in II $-3 \cdot \frac{2-n}{3} + n = 1 \Leftrightarrow -2 + n + n = 1 \Leftrightarrow n = 1$

n in I $\frac{2-1}{3} = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$lightning
Damit ist die Annahme, es existierten m, n, sodass $h(m,n) = (2,1)$, zum Widerspruch geführt und bewiesen, dass h nicht surjektiv ist.

h ist nicht bijektiv, da h weder injektiv noch surjektiv ist.

4

Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N}(\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2)$

I Induktionsanfang:
Behauptung: $\exists n(\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2)$
Beweis: Es sei $n = 1$. Dann ist $\sum_{i=1}^{i}(2i - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = (n+1)^2$. $\square$

II Induktionsschritt:
Induktionsannahme: $(\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (n+1)^2)$
Beweis:
$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) \Leftrightarrow 2(n+1)-1+\sum_{i=1}^{n}(2i-1) \Leftrightarrow 2n+1+\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = (n+1)^2 = n^2+2n+1 = n^2+2n+1$
$\Leftrightarrow \sum i = 1n(2i-1) = n^2$ $\square$.