Algorithmes numériques – Rapport

Interpolation et Approximation

Axel Delsol, Pierre-Loup Pissavy

Décembre 2013

Table des matières

1 Préambule

1.1 Structure du programme

Nous avons conçu un programme principal avec menus, présenté sous la forme suivante :

```
Menu principal : Interpolation et Approximation

Entrez n le nombre de points : 2
(Saisie de la série de points...)

(Affichage du tableau correspondant...)
Quelle résolution utiliser ?
1- Newton
2- Neuville
3- Régression Linéaire
4- Approximation par une fonction exponentielle
5- Approximation par une fonction "puissance"
9- Nouvelle série de points (Menu principal)
0- Quitter
Votre choix :
```

FIGURE 1.1 – Apercu : Menu Principal

2 Interpolation

2.1 Méthode de Newton

2.1.1 Présentation

2.1.2 Programme

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <math.h>
#include "polynome.h"

void newton (double ** tab, int n)
{
  int i, k;
  double** t= (double**) malloc(n*sizeof(double*));
  for (i=0; i<n; i++)
  {
    t[i]= (double*) malloc((i+1)*sizeof(double));
  }

  //initialisation des valeurs : on récupère les y.
  for (i=0; i<n; i++)
  {
    t[i][0]=tab[1][i];
  }

  //calcul des differences divisees
  for (k=1; k<n; k++)
  {
    for (i=k; i<n; i++)
    {
      t[i][k]=(t[i][k-1]-t[k-1][k-1])/(tab[0][i]-tab[0][k-1]);
    }
  }

  //tableau de polynomes
  polynome** tabP= (polynome**) malloc(n*(sizeof(polynome*)));
  for (i=0; i<n; i++)
  {
    tabP[i]=(polynome*) malloc(sizeof(polynome));
  }
  tabP[0]->d=0;
  tabP[0]->poln=(double*) malloc(sizeof(double));
  tabP[0]->poln[0]=t[n-1][n-1];

  for (i=1; i<n; i++)
  {
    tabP[i]=addPoly(creerPoly(1,"valeur",t[n-1-i][n-1-i]),mulPoly(creerPoly(2,"valeur",-tab[0][n-1-i], 1.),
        tabP[i-1]));
  }
  redimensionnerPoly(tabP[n-1]);

  //affichage
  menuAffichage(tabP[n-1]);
```

```c
	ecartPoly(tab,n,tabP[n-1]);
	printf("\n");

	//libération mémoire
	for(i=0;i<n;i++)
	{
	  free(tabP[i]->poln);
	  free(tabP[i]);
	  free(t[i]);
	}
	free(tabP);
	free(t);
}
```

Figure 2.1 – Code : newton.c

2.2 Méthode de Neuville

2.2.1 Présentation

2.2.2 Programme

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <math.h>
#include "polynome.h"

void neuville (double ** tab, int n)
{
  int i, k;
  polynome*** t= (polynome***) malloc(n*sizeof(polynome**));
  for (i=0; i<n; i++)
  {
    t[i]= (polynome**) malloc((i+1)*sizeof(polynome*));
  }

  //initialisation des valeurs : on récupère les y.
  for (i=0; i<n; i++)
  {
    t[i][0]=creerPoly(1,"valeur", tab[1][i]);
  }

  //calcul des differences divisees
  for (k=1; k<n; k++)
  {
    for (i=k; i<n; i++)
    {
      t[i][k]=mulSPoly((1/((tab[0][i-k])-(tab[0][i]))),addPoly(mulPoly(creerPoly(2,"valeur", -(tab[0][i]),
           1.), t[i-1][k-1]), mulPoly(creerPoly(2, "valeur", tab[0][i-k], -1.),t[i][k-1])));
    }
  }
  //polynome àretourner
  redimensionnerPoly(t[n-1][n-1]);

  //affichage
  menuAffichage(t[n-1][n-1]);
  ecartPoly(tab,n,t[n-1][n-1]);
  printf("\n");

  //libération mémoire
  for(i=0;i<n;i++)
  {
    for(k=0;k<i;k++)
    {
      free(t[i][k]->poln);
      free(t[i][k]);
    }
    free(t[i]);
  }
  free(t);
}
```

Figure 2.2 – Code : neuville.c

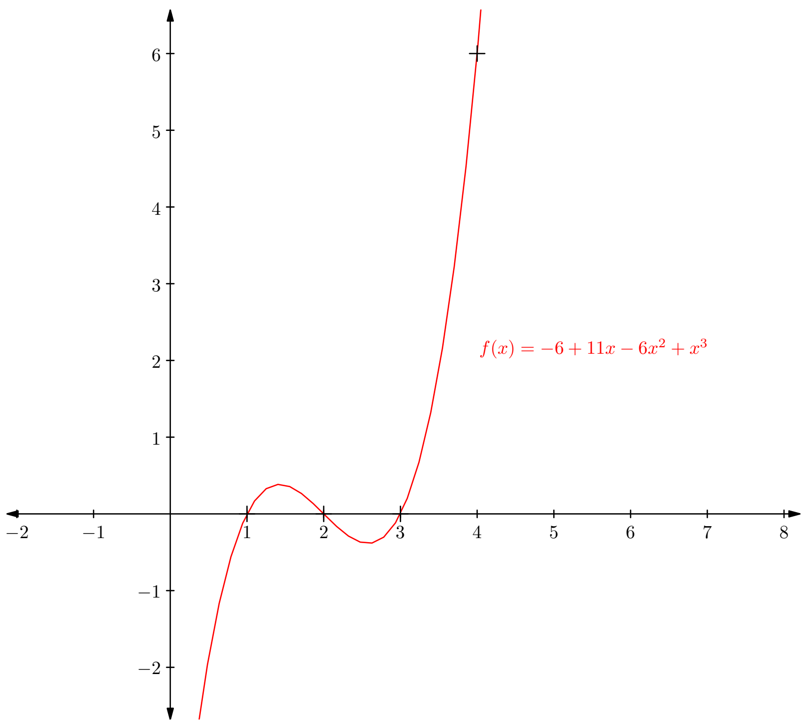
2.3 Résultats de tests

2.3.1 Exemple tiré d'un TD

x_i	1	2	3	4
y_i	0	0	0	6

TABLEAU 2.3.1 – Série 1

Méthode de Newton : $P(x) = -6.00 + 11.00 \cdot x - 6.00 \cdot x^2 + 1.00 \cdot x^3$
Méthode de Neuville : $P(x) = -6.00 + 11.00 \cdot x - 6.00 \cdot x^2 + 1.00 \cdot x^3$



GRAPHIQUE 2.3.1 – Interpolation de Newton et Neuville – (Tableau 2.3.1)

2.3.2 Densité de l'eau en fonction de la température

x_i	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
y_i	0.999870	0.999970	1.000000	0.999970	0.999880	0.999730	0.999530	0.999530	0.998970	0.998460
x_i	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38
y_i	0.998050	0.999751	0.997050	0.996500	0.996640	0.995330	0.994720	0.994720	0.993330	0.993260

Tableau 2.3.2 – Mesures

Méthode de Newton : $P(x) = 0.999870 + 7.693711 \cdot x - 13.276666 \cdot x^2 + 9.932303 \cdot x^3 - 4.345460 \cdot x^4 + 1.259124 \cdot x^5 - 0.258585 \cdot x^6 + 0.039240 \cdot x^7 - 0.004520 \cdot x^8 + 0.000402 \cdot x^9 - 0.000028 \cdot x^{10} + 0.000002 \cdot x^{11} - 0 \cdot x^{12} + 0 \cdot x^{13} - 0 \cdot x^{14} + 0 \cdot x^{15} - 0 \cdot x^{16} + 0 \cdot x^{17} - 0 \cdot x^{18} + 0 \cdot x^{19}$

Erreur moyenne : 0.000005

Méthode de Neuville : $P(x) = 0.999870 + 7.693711 \cdot x - 13.276666 \cdot x^2 + 9.932303 \cdot x^3 - 4.345460 \cdot x^4 + 1.259124 \cdot x^5 - 0.258585 \cdot x^6 + 0.039240 \cdot x^7 - 0.004520 \cdot x^8 + 0.000402 \cdot x^9 - 0.000028 \cdot x^{10} + 0.000002 \cdot x^{11} - 0 \cdot x^{12} + 0 \cdot x^{13} - 0 \cdot x^{14} + 0 \cdot x^{15} - 0 \cdot x^{16} + 0 \cdot x^{17} - 0 \cdot x^{18} + 0 \cdot x^{19}$

Erreur moyenne : 0.000033

Graphique 2.3.2 – Interpolation de Newton et Neuville – (Tableau 2.3.2)

2.3.3 3 séries

x_i	10	8	13	9	11	14	6	4	12	7	5
$y_i^{(1)}$	9.14	8.14	8.74	8.77	9.26	8.10	6.13	3.10	9.13	7.26	4.74
$y_i^{(2)}$	7.46	6.77	12.74	7.11	7.81	8.84	6.08	5.39	8.15	6.42	5.73
$y_i^{(3)}$	6.58	5.76	7.71	8.84	8.47	7.04	5.25	12.50	5.56	7.91	6.89

Tableau 2.3.3 – Trois séries S1, S2, S3

Série 1 :
Méthode de Newton :$P(x) = -229.550000 + 299.165750 \cdot x - 173.107636 \cdot x^2 + 58.546955 \cdot x^3 - 12.731862 \cdot x^4 + 1.859906 \cdot x^5 - 0.184968 \cdot x^6 + 0.012375 \cdot x^7 - 0.000533 \cdot x^8 + 0.000013 \cdot x^9 - 0 \cdot x^{10}$
Erreur moyenne : 0

Méthode de Neuville : $P(x) = -229.550000 + 299.165750 \cdot x - 173.107636 \cdot x^2 + 58.546955 \cdot x^3 - 12.731862 \cdot x^4 + 1.859906 \cdot x^5 - 0.184968 \cdot x^6 + 0.012375 \cdot x^7 - 0.000533 \cdot x^8 + 0.000013 \cdot x^9 - 0 \cdot x^{10}$
Erreur moyenne : 0

Série 2 :
Méthode de Newton :$P(x) = -12345.190000 + 16608.066492 \cdot x - 9870.941498 \cdot x^2 + 3416.593892 \cdot x^3 - 763.094009 \cdot x^4 + 114.979985 \cdot x^5 - 11.842442 \cdot x^6 + 0.823658 \cdot x^7 - 0.037039 \cdot x^8 + 0.000973 \cdot x^9 - 0.000011 \cdot x^{10}$
Erreur moyenne : 0

Méthode de Neuville : $P(x) = -12345.190000 + 16608.066492 \cdot x - 9870.941498 \cdot x^2 + 3416.593892 \cdot x^3 - 763.094009 \cdot x^4 + 114.979985 \cdot x^5 - 11.842442 \cdot x^6 + 0.823658 \cdot x^7 - 0.037039 \cdot x^8 + 0.000973 \cdot x^9 - 0.000011 \cdot x^{10}$
Erreur moyenne : 0

Série 3 :
Méthode de Newton : $P(x) = -568559.640000 + 739678.381270 \cdot x - 424130.450858 \cdot x^2 + 141275.523224 \cdot x^3 - 30298.693006 \cdot x^4 + 4375.222059 \cdot x^5 - 431.155992 \cdot x^6 + 28.652640 \cdot x^7 - 1.229803 \cdot x^8 + 0.030806 \cdot x^9 - 0.000342 \cdot x^{10}$
Erreur moyenne : 0

Méthode de Neuville : $P(x) = -568559.640000 + 739678.381270 \cdot x - 424130.450858 \cdot x^2 + 141275.523224 \cdot x^3 - 30298.693006 \cdot x^4 + 4375.222059 \cdot x^5 - 431.155992 \cdot x^6 + 28.652640 \cdot x^7 - 1.229803 \cdot x^8 + 0.030806 \cdot x^9 - 0.000342 \cdot x^{10}$
Erreur moyenne : 0

Graphique 2.3.3 – Interpolation de Newton et Neuville – (Tableau 2.3.3)

2.3.4 Dépenses et Revenus

x_i (R)	752	855	871	734	610	582	921	492	569	462	907
y_i (D)	85	83	162	79	81	83	281	81	81	80	243

Tableau 2.3.4 – Série 1

x_i (R)	643	862	524	679	902	918	828	875	809	894
y_i (D)	84	84	82	80	226	260	82	186	77	223

Tableau 2.3.5 – Série 2

Série 1 :
Méthode de Newton : $P(x) = 524166663.148073 - 8065079.743259 \cdot x + 55479.774423 \cdot x^2 - 224.689243 \cdot x^3 + 0.593281 \cdot x^4 - 0.001067 \cdot x^5 + 0.01 \cdot x^6 - 0.00 \cdot x^7 + 0.00 \cdot x^8 - 0.00 \cdot x^9 + 0.00 \cdot x^{10}$
Erreur moyenne : 0.000046

Méthode de Neuville : $P(x) = 524166663.148078 - 8065079.743259 \cdot x + 55479.774423 \cdot x^2 - 224.689243 \cdot x^3 + 0.593281 \cdot x^4 - 0.001067 \cdot x^5 + 0.000001 \cdot x^6 - 0 \cdot x^7 + 0 \cdot x^8 - 0 \cdot x^9 + 0 \cdot x^{10}$
Erreur moyenne : 0.000043

Série 2 :
Méthode de Newton : $P(x) = 264070485740.100494 - 3124699358.171593 \cdot x + 16351348.965791 \cdot x^2 - 49678.667726 \cdot x^3 + 96.596340 \cdot x^4 - 0.124686 \cdot x^5 + 0.000107 \cdot x^6 - 0 \cdot x^7 + 0 \cdot x^8 - 0 \cdot x^9$
Erreur moyenne : 0.005505

Méthode de Neuville : $P(x) = 264070485740.100800 - 3124699358.171597 \cdot x + 16351348.965791 \cdot x^2 - 49678.667726 \cdot x^3 + 96.596340 \cdot x^4 - 0.124686 \cdot x^5 + 0.000107 \cdot x^6 - 0 \cdot x^7 + 0 \cdot x^8 - 0 \cdot x^9$
Erreur moyenne : 0.005585

Graphique 2.3.4 – Interpolation de Newton et Neuville – (Tableaux 2.3.4 & 2.3.5)

2.4 Comparaison

3 Approximation

3.1 Régression linéaire

3.1.1 Présentation

3.1.2 Programme

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <math.h>
#include "polynome.h"

void mapping(double** from, double** to, int n, char* fn)
{
  int i, j;
  if (strcmp(fn,"exponentielle")==0)
  {
    for (j=0; j<n; j++)
    {
      to[0][j]=from[0][j];
    }
    for (j=0; j<n; j++)
    {
      to[1][j]=log(from[1][j]);
    }
  }
  else if (strcmp(fn,"puissance")==0)
  {
    for (i=0; i<2; i++)
    {
      for (j=0; j<n; j++)
      {
        to[i][j]=log(from[i][j]);
      }
    }
  }
}

double moyenneElements(double** tab,int l, int n)
{
  double resultat = 0.;
  double cpt = 0.;
  int i;
  for(i=0;i<n;i++)
  {
    resultat = resultat + tab[l][i];
    cpt = cpt + 1.;
  }
  resultat = resultat/cpt;
  return resultat;
}

double moyenneElementsCarres(double** tab,int l, int n)
{
  double resultat = 0;
```

```
  double cpt = 0;
  int i;
  for(i=0;i<n;i++)
  {
    resultat = resultat + pow(tab[1][i],2);
    cpt = cpt + 1;
  }
  resultat = resultat/cpt;
  return resultat;
}

double moyenneProduitElements(double** tab, int n)
{
  double resultat = 0;
  double cpt = 0;
  int i;
  for(i=0;i<n;i++)
  {
    resultat = resultat + tab[0][i]*tab[1][i];
    cpt = cpt + 1;
  }
  resultat = resultat/cpt;
  return resultat;
}

reglinD(double** tab, int n)
{
  double a0 = 0;
  double a1 = 0;
  double xb, yb, xcb, xyb; // b pour barre et c pour carre
  printf("Nous cherchons le polynome de degré 1 sous la forme a0 + a1*x.\n");

  //calculs
  xb = moyenneElements(tab,0,n);
  yb = moyenneElements(tab,1,n);
  xcb = moyenneElementsCarres(tab,0,n);
  xyb = moyenneProduitElements(tab,n);

  a1 = (xyb-xb*yb)/(xcb-pow(xb,2));
  a0 = yb-xb*a1;

  // creation et affichage du polynome
  polynome *P = creerPoly(2,"valeur",a0,a1);
  menuAffichage(P);

  //statistiques
  ecartPoly(tab,n,P);
  printf("\n");

  //libération mémoire
  free(P->poln);
  free(P);
}

reglinE(double** tab, int n) //y=c(e^(dx)) <=> ln(y)=ln(c)+xd => c=e^(a0) & d=a1
{
  int i;
  double c = 0;
  double d = 0;
  double a0 = 0;
  double a1 = 0;
  double xb, yb, xcb, xyb; // b pour barre et c pour carre
  double** t = (double**) malloc(2*sizeof(double*)); // contiendra le mapping de tab
  for(i=0;i<2;i++)
  {
    t[i] = (double*) malloc (n*sizeof(double));
  }
  printf("Nous cherchons une approximation sous la forme c*(e^(d*x)).\n");

  //calculs
  mapping(tab, t, n, "exponentielle");
```

```
  xb = moyenneElements(t,0,n);
  yb = moyenneElements(t,1,n);
  xcb = moyenneElementsCarres(t,0,n);
  xyb = moyenneProduitElements(t,n);

  a1 = (xyb-xb*yb)/(xcb-pow(xb,2.));
  a0 = yb-xb*a1;
  d = a1;
  c = exp(a0);

  //affichage
  printf("P(x) = %f*exp(%f*x)\n",c,d);

  //statistiques
  ecartExpo(tab,n,c,d);
  printf("\n");

  //libération mémoire
  for (i=0; i<2; i++)
  {
    free(t[i]);
  }
  free(t);
}

reglinP(double ** tab, int n) //y=a(x^b) <=> ln(y)=ln(a)+b*ln(x) => a=e^(a0) & b=a1
{
  int i;
  double a = 0.;
  double b = 0.;
  double a0 = 0.;
  double a1 = 0.;
  double xb, yb, xcb, xyb; // b pour barre et c pour carre
  double** t = (double**) malloc(2*sizeof(double*)); // contiendra le mapping de tab
  for(i=0;i<2;i++)
  {
    t[i] = (double*) malloc (n*sizeof(double));
  }
  printf("Nous cherchons une approximation sous la forme a*(x^(b)).\n");

  //calculs
  mapping(tab, t, n, "puissance");
  xb = moyenneElements(t,0,n);
  yb = moyenneElements(t,1,n);
  xcb = moyenneElementsCarres(t,0,n);
  xyb = moyenneProduitElements(t,n);

  a1 = (xyb-xb*yb)/(xcb-pow(xb,2));
  a0 = yb-xb*a1;
  b = a1;
  a = exp(a0);

  //affichage
  printf("P(x) = %f*x^(%f)\n",a,b);

  //statistiques
  ecartPui(tab,n,a,b);
  printf("\n");

  //libération mémoire
  for (i=0; i<2; i++)
  {
    free(t[i]);
  }
  free(t);
}
```

Figure 3.1 – Code : reglin.c

3.2 Ajustement exponentiel

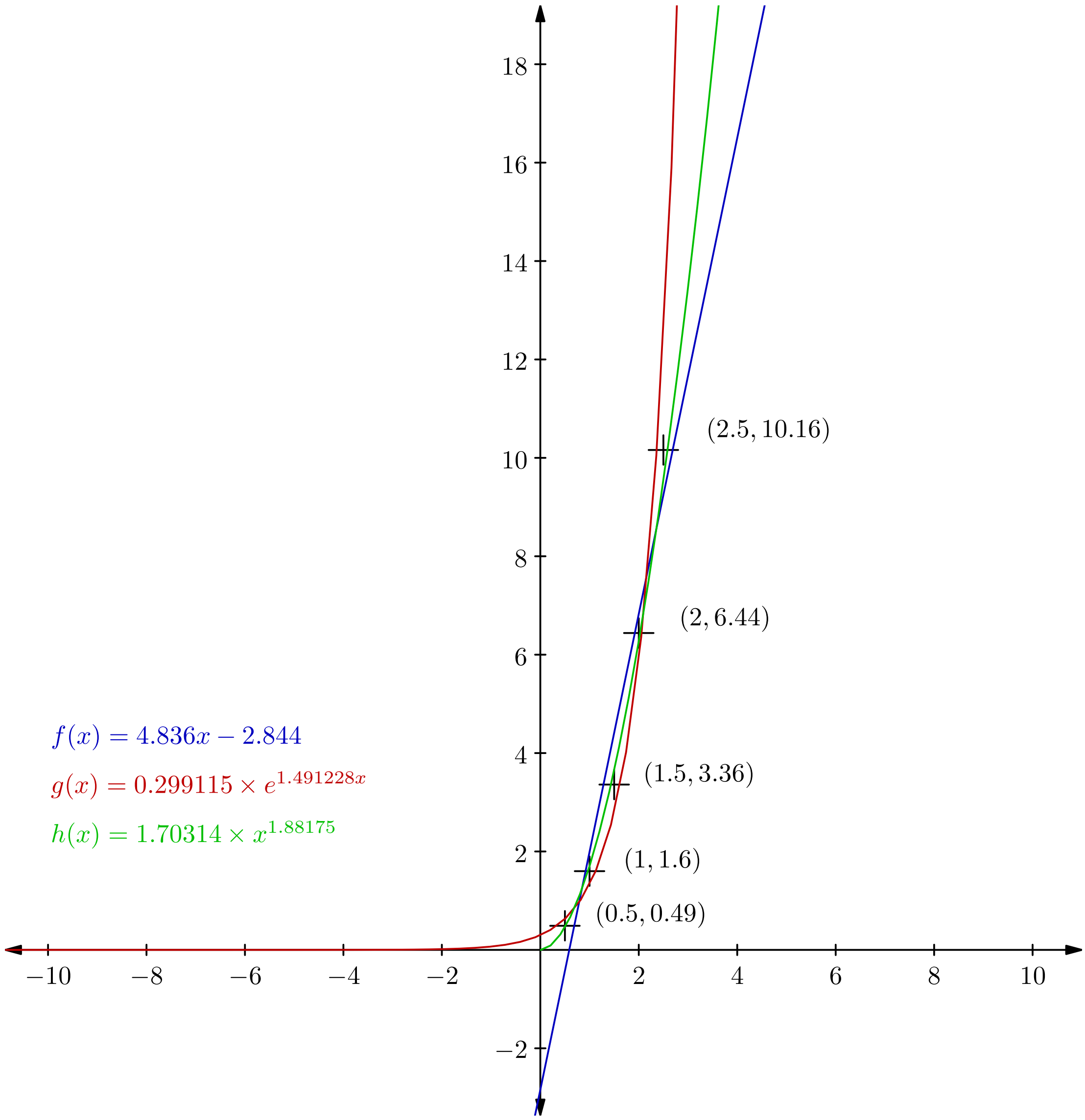
3.3 Ajustement de type "puissance"

3.4 Résultats de tests

3.4.1 Exemple tiré d'un TD

x_i	0.5	1	1.5	2	2.5
y_i	0.49	1.6	3.36	6.44	10.16

Tableau 3.4.1 – Série 1

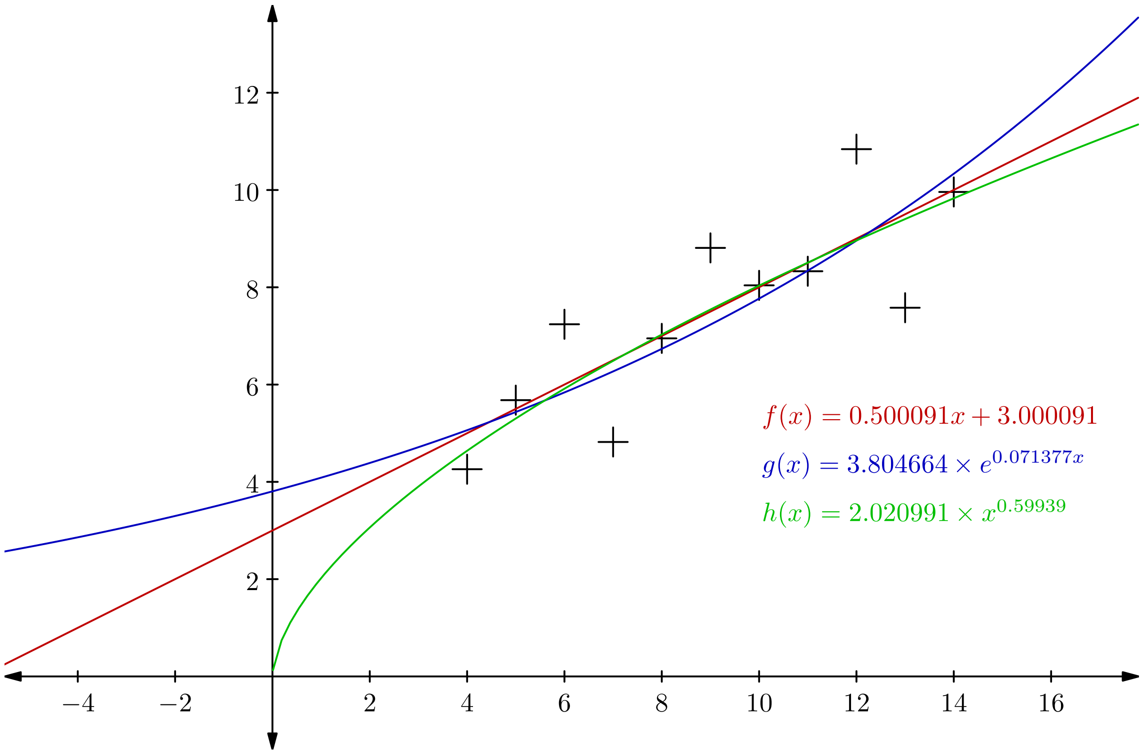


Graphique 3.4.1 – Régression linéaire – (Tableau 3.4.1)

3.4.2 Série d'Anscombe

x_i	10	8	13	9	11	14	6	4	12	7	5
$y_i^{(A)}$	8.04	6.95	7.58	8.81	8.33	9.96	7.24	4.26	10.84	4.82	5.68

TABLEAU 3.4.2 – Série dûe à Anscombe



GRAPHIQUE 3.4.2 – Régression linéaire – (Tableau 3.4.2)

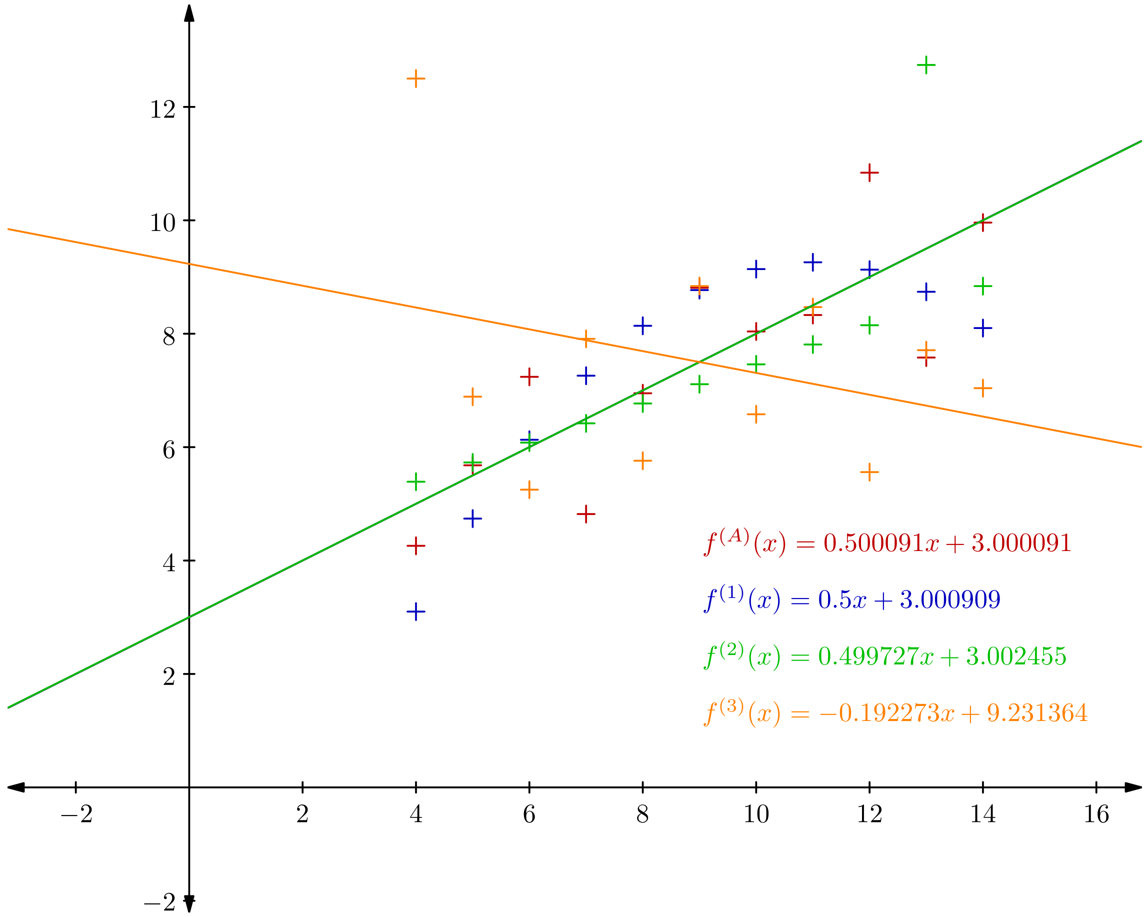
3.4.3 3 séries

x_i	10	8	13	9	11	14	6	4	12	7	5
$y_i^{(1)}$	9.14	8.14	8.74	8.77	9.26	8.10	6.13	3.10	9.13	7.26	4.74
$y_i^{(2)}$	7.46	6.77	12.74	7.11	7.81	8.84	6.08	5.39	8.15	6.42	5.73
$y_i^{(3)}$	6.58	5.76	7.71	8.84	8.47	7.04	5.25	12.50	5.56	7.91	6.89
$y_i^{(A)}$	8.04	6.95	7.58	8.81	8.33	9.96	7.24	4.26	10.84	4.82	5.68

TABLEAU 3.4.3 – 3 séries $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ et $S^{(3)}$ comparées à Anscombe

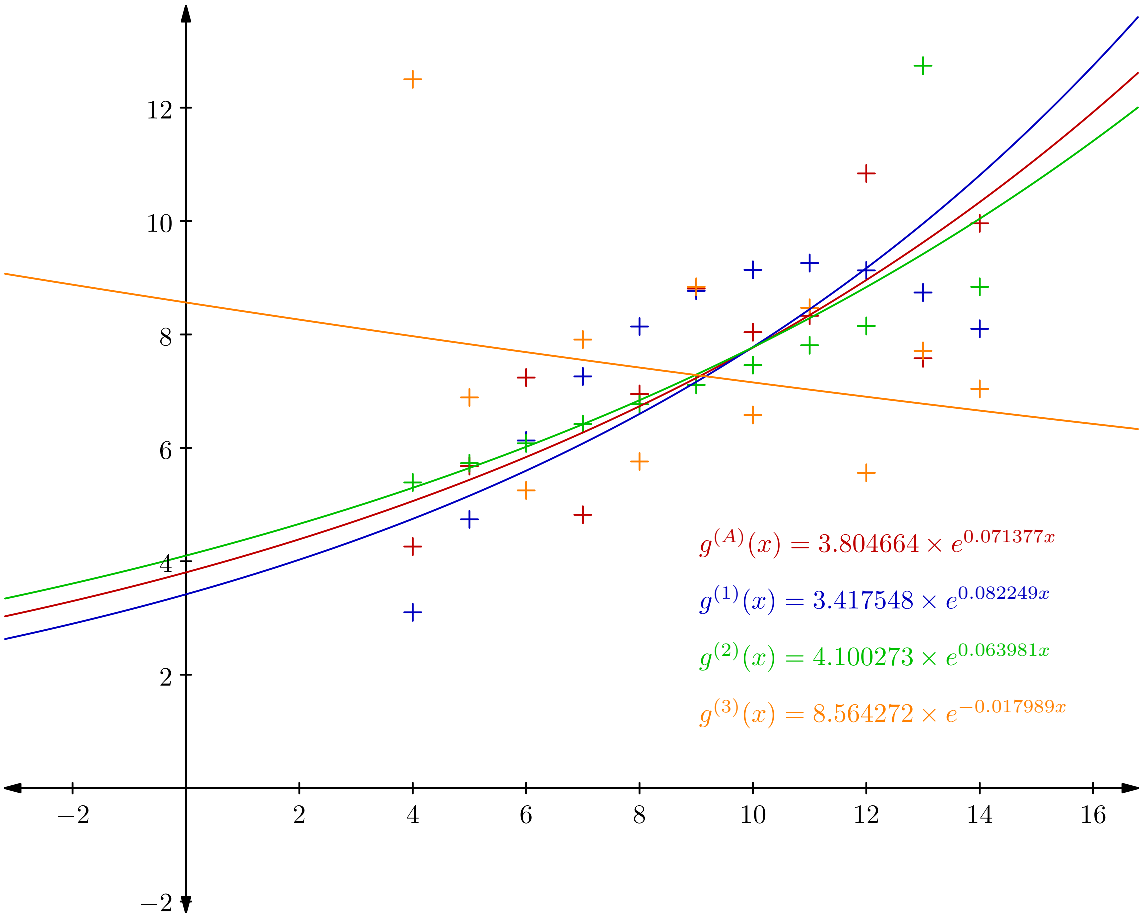
Série (1) :
Regression linéaire par une droite : $P(x) = 3.000909 + 0.500000 \cdot x$
Erreur moyenne : 0.967934

Série (2) :
Regression linéaire par une droite : $P(x) = 3.002455 + 0.499727 \cdot x$
Erreur moyenne : 0.715967



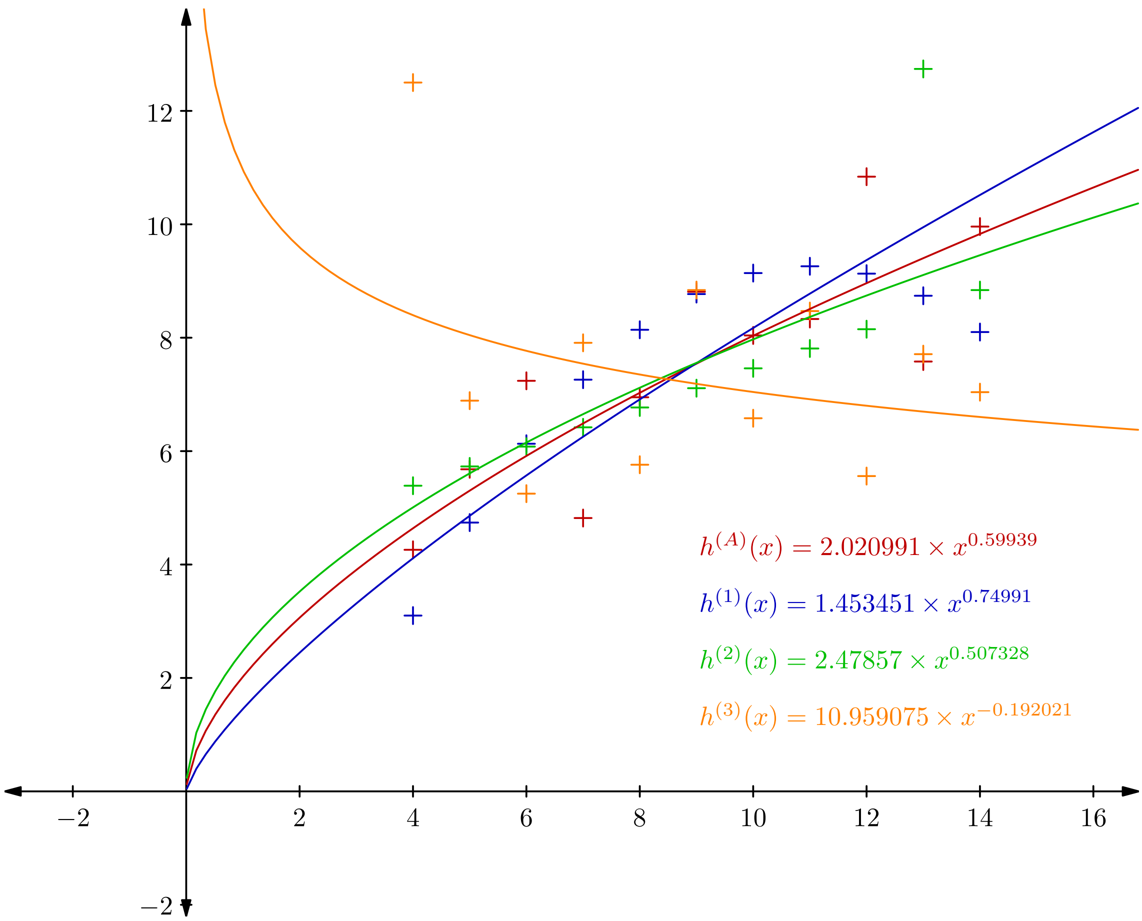
GRAPHIQUE 3.4.3 – Régression linéaire – (Tableau 3.4.3)

Regression linéaire par une exponentielle :$P(x) = 3.417548 \cdot \exp(0.082249 \cdot x)$
Erreur moyenne : 1.187786
Regression linéaire par une exponentielle :$P(x) = 4.100273 \cdot \exp(0.063981 \cdot x)$
Erreur moyenne : 0.590601



Graphique 3.4.4 – Approximation par ajustement exponentiel – (Tableau 3.4.3)

Regression linéaire par une puissance : $P(x) = 1.453451 \cdot x^{0.749910}$
Erreur moyenne : 0.950634
Regression linéaire par une puissance :$P(x) = 2.478570 \cdot x^{0.507328}$
Erreur moyenne : 0.682932



Graphique 3.4.5 – Approximation par ajustement “puissance” – (Tableau 3.4.3)

3.4.4 Dépenses mensuelles et revenus

x_i (R)	752	855	871	734	610	582	921	492	569	462	907
y_i (D)	85	83	162	79	81	83	281	81	81	80	243

Tableau 3.4.4 – Série 1

x_i (R)	643	862	524	679	902	918	828	875	809	894
y_i (D)	84	84	82	80	226	260	82	186	77	223

Tableau 3.4.5 – Série 2

Série 1 :
Regression linéaire par une droite :$P(x) = -98.368005 + 0.312192 \cdot x$
Erreur moyenne : 38.488186

Regression linéaire par une exponentielle :$P(x) = 24.011644 \cdot \exp(0.002124 \cdot x)$
Erreur moyenne : 33.486916

Regression linéaire par une puissance :$P(x) = 0.015258 \cdot x^{1.356482}$
Erreur moyenne : 36.660388

Série 2 :
Regression linéaire par une droite :$P(x) = -164.266162 + 0.381480 \cdot x$
Erreur moyenne : 46.455702

Regression linéaire par une exponentielle :$P(x) = 14.780629 \cdot \exp(0.002657 \cdot x)$
Erreur moyenne : 45.099159

Regression linéaire par une puissance :$P(x) = 0.000785 \cdot x^{1.793989}$
Erreur moyenne : 47.682118

3.4.5 Série chronologique avec accroissement exponentiel

3.4.6 Vérification de la loi de Pareto

4 Conclusion