

$A \rightarrow X_{OY}$; $E \setminus F = E \text{ ma non } F$; \rightarrow COSTITUENTI \rightarrow eventi disgiunti la cui unione è lo SPAZIO CAMPIONARIO

$F = \text{FAMIGLIA DEGLI EVENTI}$ \rightarrow realizzazioni interessanti per l'osservatore

σ -ALGEBRA \rightarrow I) $S \in F$

2) $E \cap F \in F$ \rightarrow STAB. pass al compl

3) $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in F$ \rightarrow STAB. per INTERSEZIONI Binarie (FINITE)

INOLTRE

1) STAB. per UNIONI NUMERABILI

2) STAB. per UNIONI FINITE

$F = \sigma(E)$

per poter operare linearmente

$F = \sigma(E, F)$ \rightarrow unione dei costituenti di E e di F . Contiene 16 ELEMENTI se E ed F sono INDIPENDENTI ossia tutti i loro costituenti sono NON VUOTI

\rightarrow se E ed F sono DIPENDENTI allora F è la famiglia delle unioni dei loro costituenti NON VUOTI. Se $E \subset F$ ha cardinalità 8.

$\rightarrow F, F^c, E + i \text{ negati} + \emptyset + S$

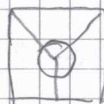


DIAGRAMMA A DISCO SOLARE IN CAMPO A STRISCE $\rightarrow F = \sigma(H_1, H_2, H_3, E)$

\rightarrow 6 costituenti non vuoti

SEMI-ALGEBRA \rightarrow I) $S \in K \leftarrow$ famiglia di parti di S

2) $\bar{E} = \bigcup_{i=1}^m E_i$ per un certo m e per opportuni $E_1, \dots, E_m \in C$ DISGIUNTI se $E \in C$

3) $E \cap F \in C$ se $E, F \in C \rightarrow$ STAB. per INTERSEZIONI Binarie (FINITE)

OGNI σ -ALGEBRA è UNA SEMI-ALGEBRA

\rightarrow soddisfa la cond 2 con $E_1 = E$ ($m=1$)

SOLITAMENTE F è una σ -ALGEBRA su S , tipicamente generata da una SEMI-ALGEBRA C

$D_{n,k} = m^k$
COMO L'ORDINE!

$D_{n,k} = \frac{m!}{(m-k)!}$

$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$

COSTO OBBLIGAZ: $P(\text{SUCCESSO}) \times \text{PREMIO}$

FORMULA DI BAYES $P(H|E) = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)}$

IDENTITÀ FONDAMENTALE
 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$

$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}$

REGOLA DELLA NEGAZIONE: $P(\bar{E}|\bar{H}) = 1 - P(E|H)$
REGOLA DELLA CATENA

$P(E \cap F \cap G) = P(E|F \cap G) \cdot P(F \cap G) \cdot P(G)$

FORMULA DI BAYES: $P(H|E) = P(E|H) \cdot P(H)$

$P(E) \rightarrow P(E|H)P(H) + P(E|\bar{H})P(\bar{H})$

FORMULA DI BAYES SULLA STALA
DEI PRONOSTICI

$\rightarrow \frac{P(H|E)}{P(H|\bar{E})} = \frac{P(E|H)}{P(E|\bar{H})} \times \frac{P(H)}{P(\bar{H})}$

(2 eventi)

INDIPENDENZA LOGICA \rightarrow se i loro costituenti sono tutti NON VUOTI

FORMULA DI BAYES per più SPIEGAZIONI

$P(H_j|E) = \frac{P(E|H_j)P(H_j)}{\sum_{i=1}^m P(E|H_i)P(H_i)}$

$j=1 \dots m$

INDIPENDENZA STOCASTICA \rightarrow se $P(E \cap F) = P(E)P(F)$

INVARIANZA PER NEGAZIONE $\rightarrow P(E \cap F) = P(E)P(F)$ se E ed F sono indipendenti

EVENTI INCIDENTALMENTE INDIPENDENTI \rightarrow eventi non indipendenti a coppie ma indipendenti insieme

EVENTI CONGIUNTAMENTE INDIPENDENTI \rightarrow eventi indipendenti sia a coppie che insieme.

FUNZIONE QUANTILE $\rightarrow F^{-1}(w) = tw$ per $w = 0,5, 0,25, 0,75 \dots$

CARATTERISTICA DI UNA VARIABILE ALEATORIA $\alpha(x) = \sum_{x_j \leq x} P(x_j)$

DENSITÀ DISCRETA (g) $\rightarrow F(t) = \sum_{x_j \leq t} g(x_j)$

DENSITÀ DIFFUSA: $F(t) = \int_{-\infty}^t g(x) dx$

FUNZIONE ASSOLUTAMENTE CONT. \rightarrow diffusa con densità.



PENDENZA DI ARRESTO: $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(t)$

ANGOLO DI ARRESTO: $\frac{1}{2} + \frac{b}{\pi}$

TEOREMA: CARATT. delle DENSITÀ DIFFUSE: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

TRASFORMAZIONI AFFINI: $f_y(u) = \frac{1}{|B|} f_x\left(\frac{u-a}{B}\right)$

se $y = a + Bx$ per $a=0 \rightarrow$ TR. LINEARI

VALOR MEDIO: $E(x) = \int_0^1 F^{-1}(w) dw$

MEDIANA: $F^{-1}(1/2)$

oppure

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 - F(t) dt - \int_0^{\infty} F(t) dt$$

→ quando f è simmetrica o simmetrica distribuita

MEDIA NEL CASO CONTINUO, FORMULA DI CALCOLO: $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

VARIANZA: $E(x - \mu)^2$

VARIANZA: $E(x^2) - E^2(x)$

DEV. ST. = $\sqrt{\text{VAR}(x)}$

LEGGE DELLO STATISTICO INCONSAPEVOLE

$$E(g(x)) = \sum_{x_j} g(x_j) f(x_j) \quad \bullet \quad E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

TRASFORM. AFFINI

$$\text{Var}(a+Bx) = B^2 \text{Var}(x)$$

$$\text{sd}(a+Bx) = |B| \text{sd}(x)$$

MEDIA NEL CASO CONTINUO, RISULTATO NOTEVOLE

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

DIFFERENZA INTERQUANTILE

$$IQR(x) = F^{-1}(0.75) - F^{-1}(0.25)$$

nulla se X è COSTANTE

per la SEMIDIFFERENZA dividendo per 2

VARIANZA NEL CASO CONTINUO, RISULTATO NOTEVOLE

$$\text{Var}(x) = E(x - \mu)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

DISUGUAGLIANZA DI MARKOV

$$P\{x \geq t\} \leq \frac{E(x)}{t}$$

RELAZIONE TRA f e F : $\int_t^{+\infty} f(x) dx = P(x \geq t)$

MOMENTO K-ESIMO: $\mu_k = E(x^k)$

MOM. CENTRATO: $\mu_k = E(x - \mu)^k$

DISUGUAGLIANZA DI CHEBYSHEV: $P\{|Y - \mu_Y| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\text{Var}(Y)}{\varepsilon^2}$

VAR. ALEATORIA STANDARD: $E(Z) = 0, \text{sd}(Z) = 1$

VAR. ALEATORIA CENTRATA: $E(Z) = 0, \text{sd}(Z) = 1$

STANDARDIZZAZIONE: $x^* = \frac{x - \mu}{\sigma}$ se $\sigma > 0 \rightarrow \text{Var}(x^*) = 1$

STORTEZZA
 $\mu_3 = 0$ densità simmetrica
 $\mu_3 > 0$ densità storta dx
 $\mu_3 < 0$ " " " dx

$$\text{SKEW}(x) = E\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \gamma$$

$$\text{KURTOSI}(x) = \mu_4^* = E\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

SPESSEZZA della coda

SCHEMI DI BERNOULLI FINITI

Binom(m, p)

DISTR. BINOMIALI

num. di eventi
INDEPENDENTI
EQUIPROB.

$$f_S(k) = \binom{m}{k} p^k q^{m-k}$$

$$E(S) = mp$$

$$\text{Var}(S) = mpq$$

URNE DICOTOMICHE

DISTR. IPERGEOMETRICA

$$f_y(k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{m-k}}{\binom{N}{m}}$$

biglie bianche

(N)
m

biglie nere

estrazioni

$$y = \text{Hyper}(K, N-K, m)$$

$$E(y) = \sum_{k=0}^m k f_y(k) = \frac{mK}{N}$$

$$\text{Var}(y) = mp(1-p) \cdot \frac{N-m}{N-1}$$

$$p = \frac{N-K}{N-1}$$

SCHEMI DI BERNOULLI INFINITI

DISTR. BINOMIALI NEGATIVE

$$f_{T_k}(j) = \binom{j+k-1}{k-1} q^j p^k$$

$$E(T_k) = k \frac{(1-p)}{p}$$

$$\text{sd}(T_k) = \frac{\sqrt{k(1-p)}}{p}$$

DISTR. GEOMETRICHE $\sim \text{Geom}(p)$

$$f_T(j) = q^j p$$

$$P\{T \geq t\} = q^t = A_T(t)$$

$$E(T) = \frac{1-p}{p}$$

$$\text{sd}(T) = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$$

$$E(T+1) = E(T) + 1$$

$$\text{sd}(T+1) = \text{sd}(T)$$

ETTORE A COMPONENTI INDIPENDENTI:

$F(x,y) = F_x(x)F_y(y) \rightarrow$ non succede allora

X e Y sono INDIPENDENTI

$$X \perp Y \rightarrow P\{x \in B, y \in C\} = P\{x \in B\} P\{y \in C\}$$

$$\rightarrow f(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

$$\rightarrow F(x,y) = F_x(x) \cdot F_y(y)$$

LEGGE dello STATISTICO INCONSAPEVOLE per

VEETORI DISCRETI

$$E(T) = \sum_{x_i \in A_x, y_j \in A_y} g(x_i, y_j) g(x_i, y_j) \quad \text{con } T = g(x, y)$$

ADDITIVITÀ BINOMIALE della MEDIA (non usa l'indipendenza)

$$E(x+y) = E(x) + E(y)$$

ADDITIVITÀ FINITA DELLA MEDIA

$$E \sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m E(x_i)$$

LINEARITÀ della MEDIA

$$E \sum_{i=1}^m c_i x_i = \sum_{i=1}^m c_i E(x_i)$$

$$\text{COVARIANZA} = E((x - \mu_x)(y - \mu_y))$$

$$\text{VARIANZA della SOMMA: } \text{Var}(x+y) = \text{Var}(x) + \text{Var}(y) + 2 \text{Cov}(x,y)$$

$$\text{COVARIANZA: } \text{Cov}(x,y) = E(xy) - E(x)E(y)$$

PROPRIETÀ della COVARIANZA

$$1) \text{ BILINEARE: } \text{Cov}(c_1 x_1 + c_2 x_2, y) = c_1 \text{Cov}(x_1, y) + c_2 \text{Cov}(x_2, y)$$

$$\text{Cov}(x, c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 \text{Cov}(x, y_1) + c_2 \text{Cov}(x, y_2)$$

$$2) \text{ SIMMETRICA: } \text{Cov}(xy) = \text{Cov}(yx)$$

$$3) \text{ SEMIDEFINITA POSITIVA: } \text{Cov}(x,x) \geq 0$$

PREVISIONE LINEARE OTTIMA

$$\text{PREVISIONE: } y_{a|B} = \alpha + \beta x$$

\rightarrow voglio minimizzare

$$\text{L'ERRORE QUAD. MEDIO, ossia } E(y_{a|B} - y)^2 = \text{Var}(y_{a|B} - y) + E^2(y_{a|B} - y)$$

$$\rightarrow \hat{\alpha} = E(y) - \hat{\beta} E(x)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\text{Cov}(x,y)}{\text{Var}(x)}$$

COEFFICIENTE di CORRELAZIONE LINEARE

$$\text{Cor}(x,y) = \frac{\text{Cov}(x,y)}{\text{sd}(x)\text{sd}(y)}$$

$$\rightarrow \in [-1, 1]$$

$\rightarrow -1$ y è una tr. aff. neg. di x

$\rightarrow 0$ $x \perp y$, sono incorrelati

$\rightarrow 1$ y è una trasform. affine positiva di x

congiunte con marginali F_x e F_y

ma l'indipendenza non NON la discreta

MEDIA DEL PRODOTTO, se $X \perp Y$

$$E(xy) = E(x)E(y), \text{ non vale il viceversa}$$

VARIANZA DELLA SOMMA DI VAR. INDIPENDENTI

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^m x_i\right) = \sum_{i=1}^m \text{Var}(x_i)$$

COEFFICIENTE di DETERMINAZIONE

$$R^2_{x,y} = \rho^2_{x,y}$$

TEOREMA DEI COMPONENTI INDIPENDENTI:

$$F(x, y) = F_x(x) F_y(y) \rightarrow \text{se moltiplico allora}$$

X e Y sono INDIPENDENTI

$$X \perp Y \rightarrow P\{X \in B, Y \in C\} = P\{X \in B\} P\{Y \in C\} \begin{cases} \rightarrow f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y) \\ \rightarrow F(x, y) = F_x(x) \cdot F_y(y) \end{cases}$$

REGGE dello STATISTICO INCONSAPEVOLE per

VECTORI DISCRETI

$$E(T) = \sum_{x_i \in A, y_j \in B} g(x_i, y_j) g(x_i, y_j) \text{ con } T = g(x, y)$$

ADDITIVITÀ BINOMIALE della MEDIA (non usa l'indipendenza)

$$E(x+y) = E(x) + E(y)$$

ADDITIVITÀ FINITA DELLA MEDIA

$$E\left(\sum_{i=1}^m x_i\right) = \sum_{i=1}^m E(x_i)$$

LINEARITÀ della MEDIA

$$E\left(\sum_{i=1}^m c_i x_i\right) = \sum_{i=1}^m c_i E(x_i)$$

$$\text{COVARIANZA} = E((x - \mu_x)(y - \mu_y))$$

$$\text{VARIANZA della SOMMA: } \text{Var}(x+y) = \text{Var}(x) + \text{Var}(y) + 2 \text{Cov}(x, y)$$

$$\text{COVARIANZA: } \text{Cov}(x, y) = E(xy) - E(x)E(y)$$

PROPRIETÀ della COVARIANZA

- 1) BILINEARE: $\text{Cov}(c_1 x_1 + c_2 x_2, y) = c_1 \text{Cov}(x_1, y) + c_2 \text{Cov}(x_2, y)$
 $\text{Cov}(x, c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 \text{Cov}(x, y_1) + c_2 \text{Cov}(x, y_2)$
- 2) SIMMETRICA: $\text{Cov}(x, y) = \text{Cov}(y, x)$
- 3) SEMIDEFINITA POSITIVA: $\text{Cov}(x, x) \geq 0$

PREVISIONE LINEARE OTTIMA

$$\text{PREVISIONE: } y_{a|B} = \alpha + \beta x$$

→ voglio minimizzare

$$\text{L'ERRORE QUAD. MEDIO, ossia } E(y_{a|B} - y)^2 = \text{Var}(y_{a|B} - y) + E^2(y_{a|B} - y)$$

$$\rightarrow \alpha = E(y) - \hat{\beta} E(x)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\text{Var}(x)}$$

COEFFICIENTE di CORRELAZIONE LINEARE

$$\text{Cor}(x, y) = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\text{sd}(x) \text{sd}(y)}$$

$$\rightarrow \in [-1, 1]$$

→ -1 y è una tr. aff. neg. di x

→ 0 $X \perp Y$, sono incorrelati

→ 1 y è una transf. affine positiva di x

CLASSE DI FACOLTÀ, quindi non sono correlati

congiunte con marginali F_x e F_y

ma l'indipendenza non NON la discreta

MEDIA DEL PRODOTTO, se $X \perp Y$

$$E(xy) = E(x)E(y), \text{ non vale il viceversa}$$

VARIANZA DELLA SOMMA DI VAR. INDIPENDENTI

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^m x_i\right) = \sum_{i=1}^m \text{Var}(x_i)$$

COEFFICIENTE di DETERMINAZIONE

$$R^2_{x,y} = \eta^2_{x,y}$$