



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ _____ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА _____ «Теоретическая информатика и компьютерные технологии»

ОТЧЕТ
ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1:
Решение СЛАУ с трехдиагональной матрицей
методом прогонки

Студент ИУ9-61Б
(Группа)

Е.А. Матвеев
(И.О. Фамилия)

Проверила

А. Б. Домрачева
(И.О. Фамилия)

2023 г.

Содержание

1	Цель	3
2	Постановка задачи	4
3	Теоретические сведения об оценке погрешности	5
4	Реализация	6
5	Тестирование	7
6	Вывод	8

1 Цель

Целью данной работы является изучение накопления погрешности при СЛАУ с трехдиагональной ленточной матрицей методом прогонки.

2 Постановка задачи

Дано: трехдиагональная матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $d \in \mathbb{R}^n$

Требуется: Найти вектор $x \in \mathbb{R}^n$ такой, что $Ax = d$

Для достижения цели работы были поставлены следующие задачи:

1. Изучить теоретическое обоснование метода прогонки.
2. Реализовать алгоритм метода прогонки на языке программирования python3.
3. Найти погрешность полученного результата.

3 Теоретические сведения об оценке погрешности

Пусть программа, реализующая метод прогонки получила вход матрицу A и вектор d , и вернула вектор x^* . При этом истинным решением задачи является вектор x .

Найдем вектор $d^* = Ax^*$.

$$Ax = d$$

$$Ax^* = d^*$$

$$A(x - x^*) = d - d^*$$

$$e = (x - x^*) = A^{-1}(d - d^*)$$

$$x = e + x^*$$

e - искомый вектор ошибок.

4 Реализация

На листинге 1 представлена реализация метода прогонки.

Листинг 1: Реализация метода прогонки

```
1 import numpy as np
2
3
4
5 top = np.array([1,1,1,0], dtype=np.float128)
6 mid = np.array([4,4,4,4], dtype=np.float128)
7 low = np.array([0,1,1,1], dtype=np.float128)
8 res = np.array([5,6,6,5], dtype=np.float128)
9
10 def method(low,top,mid,res):
11     n = len(mid)
12     alpha = np.zeros((n), dtype=np.float128)
13     beta = np.zeros((n), dtype=np.float128)
14
15     alpha[0] = -top[0] / mid[0]
16     beta[0] = res[0] / mid[0]
17
18     for i in range(1, n):
19         alpha[i] = -top[i]/(low[i]*alpha[i-1] + mid[i])
20         beta[i] = (res[i] - low[i]*beta[i-1])/(low[i]*alpha[i-1] + mid[i])
21
22     x = np.zeros((n), dtype=np.float128)
23     x[n-1] = beta[n - 1]
24
25     for i in range(n-1,0,-1):
26         x[i-1] = alpha[i-1]*x[i] + beta[i-1]
27
28     return x
29
30 def create_matrix(top, mid, low):
31     mat = np.diag(mid)
32     mat = mat.astype(np.float128)
33     for i in range(1,4):
34         mat[i-1, i] = top[i-1]
35         mat[i, i-1] = low[i]
36     return mat
37
38 def matmul(mat, vec):
39     n = len(vec)
40     vec = np.array(vec).reshape(n,1).astype(np.float128)
41     d = np.matmul(mat, vec).reshape(1,n)[0].astype(np.float128)
42     d = d.astype(np.float128)
43     return d
44
45 # got x via lab method
46 x = method(top=top,mid=mid,low=low,res=res)
47 # create tape-matrix
48 M = create_matrix(top,mid,low)
49 # res_star - result if we multiply M by our x
50 res_star = matmul(M, x)
51 r = res - res_star
52 M = M.astype('float32')
53 inv = np.linalg.inv(M)
54 M = M.astype(np.float128)
55 e = np.matmul(inv, r)
56 print(e, e.dtype)
```

5 Тестирование

В качестве тестовых выходных данных были выбраны матрица A :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

и вектор d :

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Получены	значения	вектора	погрешности	e :
$(-8.30011202e - 21$	$3.32004481e - 20$	$-1.24501681e - 19$	$3.11254203e - 20)$	

Вектор погрешностей не нулевой - это говорит о наличии вычислительной погрешности при использовании типа данных `float128` (63 бита на мантиссу).

6 Вывод

При выполнении лабораторной работы был изучен и реализован в программном коде метод прогонки.

Метод не имеет методологической погрешности, априорное решение тестовой задачи - это единичный вектор. Однако, в реализации присутствует вычислительная погрешность (из-за особенностей представления чисел с плавающей точкой в памяти ЭВМ), поэтому вектор ошибок не является нулевым.