Контекстно-свободные грамматики. Деревья разбора. Нормальная форма Хомского. Первая лемма о накачке

Теория формальных языков

2022 г.

Ограничения регулярных грамматик

- (синтаксический моноид) Слова лишь конечно различимы относительно правил переписывания
- (префиксные грамматики) Доступ лишь к началу (концу) слова

Что будет, если снять эти условия?

Ограничения регулярных грамматик

- (синтаксический моноид) Слова лишь конечно различимы относительно правил переписывания
- (префиксные грамматики) Доступ лишь к началу (концу) слова

Что будет, если снять эти условия?

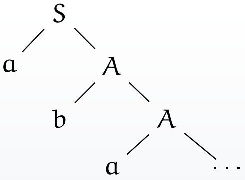
Структура вывода — дерево, а не последовательность.

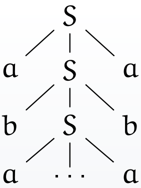
Ограничения регулярных грамматик

- (синтаксический моноид) Слова лишь конечно различимы относительно правил переписывания
- (префиксные грамматики) Доступ лишь к началу (концу) слова

Что будет, если снять эти условия?

Структура вывода — дерево, а не последовательность.





Контекстно-свободные грамматики

Определение

Контекстно-свободная грамматика (CFG) — это грамматика $\langle \Sigma, N, P, S \rangle$, где правила переписывания P имеют вид $A \to \alpha$, $A \in N$, $\alpha \in (\Sigma \cup N)^*$.

- Нетерминалы переписываются независимо друг от друга (можно понимать их как нульместные функции).
- Вывод в грамматике (разбор слова) не линеен.

Контекстно-свободные грамматики

Определение

Контекстно-свободная грамматика (CFG) — это грамматика $\langle \Sigma, N, P, S \rangle$, где правила переписывания P имеют вид $A \to \alpha$, $A \in N$, $\alpha \in (\Sigma \cup N)^*$.

- Нетерминалы переписываются независимо друг от друга (можно понимать их как нульместные функции).
- Вывод в грамматике (разбор слова) не линеен.

Грамматика G_1

S	$\to$	S S
S	$\to$	(S)
S	$\to$	ε

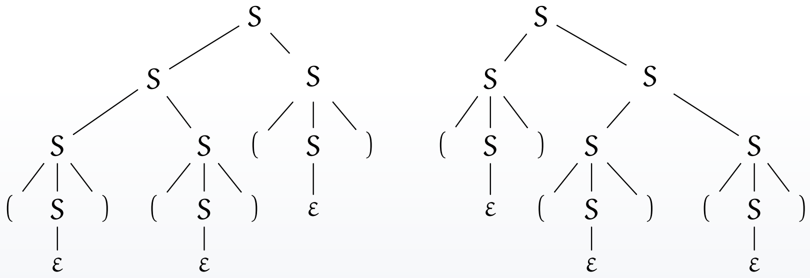
Грамматика G_2

S	$\to$	B	R	$\to$	)
B	$\to$	(RB	R	$\to$	(RR
B	$\to$	ε			

Неоднозначность разбора

Грамматика G_1 для языка Дика

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow S\,S \\
S &\rightarrow (S) \\
S &\rightarrow \varepsilon
\end{aligned}
$$



Левосторонний разбор

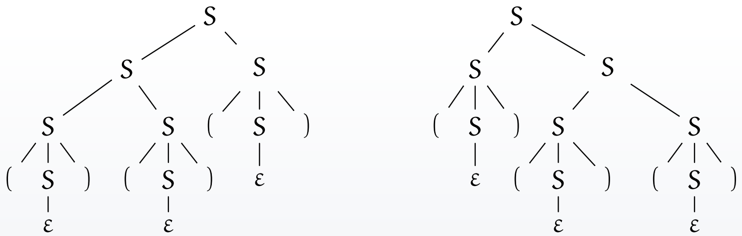
Шаг левостороннего разбора с.ф. $\alpha_1 A \alpha_2$, где $\alpha_1 \in \Sigma^*$, $A \in N$, — замена выделенного вхождения A на правую часть $A \to \beta$. Левосторонний разбор S — разбор, каждый шаг которого левосторонний.

Левосторонний разбор

Шаг левостороннего разбора с.ф. $\alpha_1 A \alpha_2$, где $\alpha_1 \in \Sigma^*$, $A \in N$, — замена выделенного вхождения A на правую часть $A \to \beta$. Левосторонний разбор S — разбор, каждый шаг которого левосторонний.

Левосторонний разбор не обязательно единственный, см. ниже.

$$S \to S\,S \qquad S \to (S) \qquad S \to \varepsilon$$



Левосторонний разбор

Шаг левостороннего разбора с.ф. $\alpha_1 A \alpha_2$, где $\alpha_1 \in \Sigma^*$, $A \in N$, — замена выделенного вхождения A на правую часть $A \to \beta$. Левосторонний разбор S — разбор, каждый шаг которого левосторонний.

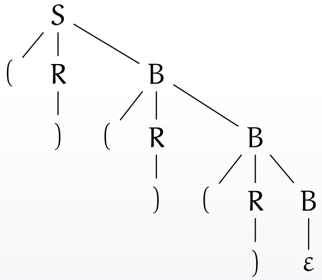
Утверждение

Между деревьями разбора слов $w \in L(G)$ и левосторонними разборами w есть взаимно-однозначное соответствие.

(Не)однозначность грамматик

Грамматика G_2 для языка Дика

$$
\begin{array}{lllllll}
S & \to & B & \qquad & R & \to &) \\
B & \to & (RB & \qquad & R & \to & (RR \\
B & \to & \varepsilon & & & &
\end{array}
$$



Грамматика G_2 однозначна — для всех $w \in L(G_2)$ существует единственный левосторонний разбор w. Достаточно заглянуть на 1 символ после разобранной позиции.

Другие проблемы контекстно-свободного разбора слов

- ε-правила (правила вида $A \to \varepsilon$);
- «ε-переходы», или цепные правила (правила вида $A \to B$).

Устранение ε-правил

$A \in N$ коллапсирует, если $A \to \varepsilon \in P$ или $A \to \alpha \in P$ и все элементы α коллапсируют.

Устранение ε-правил

$A \in N$ коллапсирует, если $A \to \varepsilon \in P$ или $A \to \alpha \in P$ и все элементы α коллапсируют.

- Объявляем $\texttt{Nullable} = \emptyset$;
- $\forall A \in N$, если $A \to \varepsilon$, тогда $\texttt{Nullable} = \texttt{Nullable} \cup \{A\}$;
- Пока $\texttt{Nullable}$ меняется:
    - для всех $A \in N$, если $A \to B_1 \dots B_n$, $B_i \in \texttt{Nullable}$ $\Rightarrow \texttt{Nullable} = \texttt{Nullable} \cup \{A\}$.
- Итоговое множество $\texttt{Nullable}$ — множество всех коллапсирующих нетерминалов.

Устранение ε-правил

$A \in N$ коллапсирует, если $A \to \varepsilon \in P$ или $A \to \alpha \in P$ и все элементы α коллапсируют.

- Если $\varepsilon \in L(G)$, тогда добавляем новый стартовый символ S_0 и правила $S_0 \to \varepsilon$, $S_0 \to S$.
- Стираем все правила $B_i \to \varepsilon$, кроме $S_0 \to \varepsilon$.
- Для всех правил $A \to \alpha_1 B_i \alpha_2$, где $B_i \in \mathtt{Nullable}$, добавляем правила $A \to \alpha_1 \alpha_2$.

Устранение ε-правил

$A \in N$ коллапсирует, если $A \to \varepsilon \in P$ или $A \to \alpha \in P$ и все элементы α коллапсируют.

- Если $\varepsilon \in L(G)$, тогда добавляем новый стартовый символ S_0 и правила $S_0 \to \varepsilon$, $S_0 \to S$.
- Стираем все правила $B_i \to \varepsilon$, кроме $S_0 \to \varepsilon$.
- Для всех правил $A \to \alpha_1 B_i \alpha_2$, где $B_i \in \texttt{Nullable}$, добавляем правила $A \to \alpha_1 \alpha_2$. И получаем новые ε-правила! Порядок преобразований существенен.

Устранение ε-правил

$A \in N$ коллапсирует, если $A \to \varepsilon \in P$ или $A \to \alpha \in P$ и все элементы α коллапсируют.

- Если $\varepsilon \in L(G)$, тогда добавляем новый стартовый символ S_0 и правила $S_0 \to \varepsilon$, $S_0 \to S$.
- Для всех правил $A \to \alpha_1 B_i \alpha_2$ ($|\alpha_1 \alpha_2| \geqslant 1$), где $B_i \in \mathtt{Nullable}$, добавляем правила $A \to \alpha_1 \alpha_2$.
- Стираем все правила $B_i \to \varepsilon$, кроме $S_0 \to \varepsilon$.

Уничтожение цепных правил

- Строим транзитивное замыкание $A \to_c^* B$ отношения $A \to_c B : A \to B \in P$.
- $\forall A, B : A \to_c B$, строим множество правил $A \to \phi_i$, для которых $\exists C, \phi_i (C \to \phi_i \in P \; \& \; (B \to_c^* C \vee C = B) \; \& \; (|\phi_i| > 1 \vee \phi_i = \varepsilon \vee (\phi_i = a \; \& \; a \in \Sigma)))$.
- Удаляем все правила $A \to B$.

Нормальная форма Хомского

Определение

Грамматика G находится в нормальной форме Хомского (CNF) $\Leftrightarrow$ все её правила имеют вид либо $A \to a$, либо $A \to BC$, либо $S \to \varepsilon$, причём S не входит в правую часть никакого правила из G.

Нормальная форма Хомского

Определение

Грамматика G находится в нормальной форме Хомского (CNF) $\Leftrightarrow$ все её правила имеют вид либо $A \to a$, либо $A \to BC$, либо $S \to \varepsilon$, причём S не входит в правую часть никакого правила из G.

- Устраняем ε-правила.
- Устраняем цепные правила.
- $\forall a \in \Sigma$ таких, что a входит в правую часть правила, отличную от a, заводим нетерминал–охранник G_a, строим правило $G_a \to a$, и во всех правых частях, кроме совпадающих с a, заменяем a на G_a.
- $\forall A \to B_1 \dots B_n$, $n > 2$, вводим новый нетерминал B_{1f} и заменяем $A \to B_1 \dots B_n$ на два правила $A \to B_1 B_{1f}$, $B_{1f} \to B_2 \dots B_n$ (рекурсивно).

Смысл нормальной формы Хомского

1. Неукорачивающие применения правил
2. Нет пустых переходов — правила либо финальные, либо удлиняющие
3. Контролируемый рост длины сентенциальной формы от количества шагов разбора

Перевод грамматики в CNF позволяет легче анализировать свойства её языка и проводить разбор слов.

Недостижимость и зацикливание

- Стартовый нетерминал $S \in N$ достижим.
- Нетерминал $A \in N$ достижим, если существует правило $B \to \alpha$ такое, что $|\alpha|_A \geqslant 1$ и B достижим.

Недостижимость и зацикливание

- Стартовый нетерминал $S \in N$ достижим.
- Нетерминал $A \in N$ достижим, если существует правило $B \to \alpha$ такое, что $|\alpha|_A \geqslant 1$ и B достижим.

- Если существует правило $A \to w$, $w \in \Sigma^*$, A порождающий.
- Если $A \to \alpha$ и $\forall B_i (|\alpha|_{B_i} \geqslant 1 \Rightarrow B_i$ порождающий$)$, то A порождающий.

1. Удаляем из G все правила, в левых или правых частях которых стоят непорождающие нетерминалы.
2. Удаляем из G все правила, в левых или правых частях которых стоят недостижимые нетерминалы.

Проверка корректности рекурсивных алгоритмов

1. Завершаемость — фундированность — искомое множество M нетерминалов не может уменьшаться, и количество нетерминалов грамматики конечно.

Проверка корректности рекурсивных алгоритмов

1. Завершаемость — фундированность — искомое множество M нетерминалов не может уменьшаться, и количество нетерминалов грамматики конечно.

2. Корректность — способ доказательства «*minimal bad sequence*» — пусть существуют элементы $k_i \in M$, которые не находятся рекурсивным алгоритмом. Выберем тот из них, до которого минимальный путь из S (варианты — из которого минимальный путь до Σ^*; до ε). Покажем, что есть ещё какой-то с путём вывода ещё короче.

Н.Ф. Хомского и префиксные граммати-ки

При линеаризации правил, поведение КС-грамматики G в Н.Ф. Хомского в точности описывается алфавитной префиксной грамматикой на нетерминалах.

- Переведём АПГ в регулярную грамматику по методу, описанному в предыдущей лекции.
- У этой грамматики есть длина накачки, т.е. всякое достаточно длинное слово имеет вид $w_1(w_2)^n w_3$, причём $w_1 w_3$ также входит в язык сентенциальных форм G.

Поскольку G — КС-грамматика, то $w_1 \longrightarrow \alpha_1$, $w_3 \longrightarrow \alpha_3$, каждое из $w_2 \longrightarrow \alpha_2$.

Но ещё есть шаг порождения w_2, также выбрасывающий последовательность терминалов.

Лемма о накачке КС-языков

Лемма о накачке (разрастании)

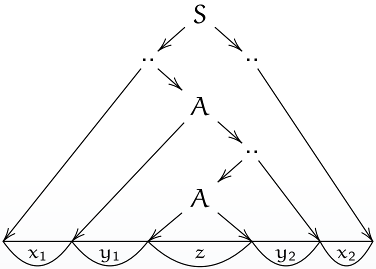
Пусть G — КС-грамматика в форме Хомского. Тогда существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что любое слово $w \in L(G)$ длины не меньше p имеет представление вида $x_1 y_1 z y_2 x_2$, где $|y_1 y_2| \geqslant 1$, $|y_1 z y_2| \leqslant p$, и все слова вида $x_1 y_1^k z y_2^k x_2$ также принадлежат $L(G)$.

Лемма о накачке КС-языков

Пусть в н.ф. Хомского G n нетерминалов. Возьмём $p = 2^n$. Его вывод будет иметь минимум высоту $n + 1 \Rightarrow$ в нём будет существовать путь, содержащий два одинаковых нетерминала A.

Лемма о накачке КС-языков

Пусть в н.ф. Хомского G n нетерминалов. Возьмём $p = 2^n$. Его вывод будет иметь минимум высоту $n + 1 \Rightarrow$ в нём будет существовать путь, содержащий два одинаковых нетерминала A.



Выберем самые нижние два одинаковых нетерминала $\Rightarrow$ высота поддерева от первого из них не больше $n + 1 \Rightarrow$ длина выводимого слова $y_1 z y_2 \leqslant 2^n$ (т.е. $\leqslant p$). $\square$

Пример применения

Парсинг в Python

Проанализировать язык
$\{a^n z_1 a^n z_2 a^n | n \geqslant 1, |z_i|_a = 0, |z_i| \geqslant 1\}$.

Пример применения

Парсинг в Python

Проанализировать язык
$\{a^n z_1 a^n z_2 a^n | n \geqslant 1, |z_i|_a = 0, |z_i| \geqslant 1\}$.

Пусть длина накачки есть p. Рассмотрим слово $a^p b a^p b a^p$. Заметим, что если $y_1 z y_2 = a^i b a^j$ (где i и j могут быть равны 0), тогда $|y_1 y_2|_b = 0$. Действительно, иначе нулевая накачка породит слово $a^m b a^p$, которое не принадлежит языку.

Значит, $y_1 = a^j$, $y_2 = a^i$. Однако слова $a^{p+i+j} b a^p b a^p$, $a^p b a^{p+i+j} b a^p$, $a^p b a^p b a^{p+i+j}$, $a^{p+j} b a^{p+i} b a^p$, $a^p b a^{p+j} b a^{p+i}$ ни одно не принадлежат требуемому языку $\Rightarrow$ он не контекстно-свободен.

Теоретико-игровая интерпретация

Достаточное условие непринадлежности языка L к КС по лемме о накачке:
$\forall p \exists w \in L(|w| > p \;\&\; \forall x_i, y_i, z(w = x_1 y_1 z y_2 x_2 \;\&\; |y_1 z y_2| < p \Rightarrow \exists i(x_1 y_1^i z y_2^i x_2 \notin L)))$.

В пренексной форме этого условия кванторы образуют последовательность: $\forall\exists\forall\exists$. Эта последовательность задаёт правила игры, где каждый квантор $\exists$ — ход протагониста, квантор $\forall$ — ход антагониста. Ходы антагониста назначают неопределённые параметры. Ходы протагониста дают выбор известной вам структуры, зависящей от ходов антагониста. В случае леммы о накачке это выглядит так.

- Антагонист выбирает длину накачки p.
- Зная p, протагонист выбирает w.
- Антагонист выбирает разбиение w на пять подстрок.
- Возможно, в зависимости от этого разбиения, протагонист предъявляет i, для которого накачка не выполняется.

Теоретико-игровая интерпретация

- Антагонист выбирает длину накачки p.
- Зная p, протагонист выбирает w.
- Антагонист выбирает разбиение w на пять подстрок.
- Возможно, в зависимости от этого разбиения, протагонист предъявляет i, для которого накачка не выполняется.

Иногда такая система анализа свойств, записанных в виде формул с чередующимися кванторами, также называется игрой Элоизы и Абеляра (по буквам, образующим кванторы $\exists$ и $\forall$).

Замыкания

Пока без доказательства: множество КС-языков замкнуто относительно пересечения с регулярными языками.

Техника применения

Сужение перебора

Если в язык L входят подслова произвольной формы из Σ^+, где $|\Sigma| > 1$, тогда, скорее всего, потребуется пересечь L с регулярным языком, чтобы облегчить поиск свидетельства о ненакачиваемости. Пример: язык $\{w_1 w_1 w_2 \mid |w_1|_a = |w_2|_a\}$. Пересечение этого языка с $ba^*bba^*bba^*$ гораздо легче поддаётся анализу, поскольку такие слова разбиваются на подходящие w_1 и w_2 однозначно.

- Начальная буква b вынуждает w_1 содержать ровно две буквы b. Действительно, если $|w_1|_b = 1$, тогда второе вхождение w_1 должно будет начинаться с b^2, что противоречит выбору w_1.
- Последняя буква b навязывает позицию начала w_2.

Техника применения

Работа с отрицанием

Если характеристическая функция L содержит предикат отрицания, связывающий две структуры неопределённого размера, в некоторых случаях это приводит к невозможности применения леммы о накачке. В других можно попробовать воспользоваться приёмом «всё включено». Поскольку мы знаем, что длина накачиваемого фрагмента $y_1 z y_2$ меньше p, то выберем w так, чтобы в нём нашлись всевозможные фрагменты такой длины, удовлетворяющие желательному свойству.

Техника применения

Покажем, что язык $L = \{w \,|\, w \neq a^{n^2} \;\&\; w \in \{a, b\}^*\}$ не является КС. Для начала заметим, что слова L содержат произвольные подслова в $\{a, b\}^*$, и пересечём L с a^*. Получим $L' = \{a^k \,|\, k \neq n^2\}$ — если он не КС, то исходный язык также не КС.

- Антагонист выбирает p.
- Наша задача — подобрать такое k, что $\forall p' \exists i, m (p' < p \Rightarrow k + p' * i = m^2)$. То есть включить возможность взятия любого такого p' в наше значение k как конструктивного элемента для построения квадрата числа.
- Возьмём $k = (p!)^2 + 1$. Тогда при любом значении p', меньшем p, можно взять $i = \frac{p!}{p'} * 2$, и получим $k + p' * i = (p! + 1)^2$.

Ещё пример применения

Покажем, что язык $L = \{ww^R a^n \mid |w|_a = n\}$ не является КС. Опять сначала избавимся от произвольных подслов в L и пересечём его с языком $ba^+b^2a^+ba^+$. Пересечение с таким языком вынуждает w иметь вид ba^ib, а весь язык — вид $L' = \{ba^nbba^nba^n\}$.

- Абеляр выбирает p. Элоиза строит слово $ba^pb^2a^pba^p$. Абеляру предоставляется возможность построить его разбиение на $x_1y_1zy_2x_2$.
- Если Абеляр выберет $|y_1|_a > 0$ & $|y_1|_b > 0$ (т.е. y_1 содержащим сразу буквы a и b), тогда ненулевая накачка сразу же выведет нас из языка. Аналогично с y_2.
- Если Абеляр решит накачивать только b (т.е. выберет y_1 либо y_2 равными b или b^2), тогда любая накачка также будет выводить из языка.

Ещё пример применения

Покажем, что язык $L = \{ww^R a^n \mid |w|_a = n\}$ не является КС. Опять сначала избавимся от произвольных подслов в L и пересечём его с языком $ba^+b^2a^+ba^+$. Пересечение с таким языком вынуждает w иметь вид ba^ib, а весь язык — вид $L' = \{ba^nbba^nba^n\}$.

- Абеляр выбирает p. Элоиза строит слово $ba^pb^2a^pba^p$. Абеляру предоставляется возможность построить его разбиение на $x_1y_1zy_2x_2$.
- Остаётся только возможность $y_1 = a^i$, $y_2 = a^j$, что позволяет следующие накачки y_1, y_2 на расстоянии не больше p:
  - $ba^{p+i*k}b^2a^{p+j*k}ba^p$ — можно сохранить свойство палиндрома, но нельзя сохранить корректный подсчёт букв a, последний индекс не меняется.
  - $ba^pb^2a^{p+i*k}ba^{p+j*k}$ — теряется свойство палиндрома.
  - $ba^{p+(i+j)*k}b^2a^pba^p$ — теряется свойство палиндрома, при накачке только второго подслова a^p аналогично.
  - $ba^pb^2a^pba^{p+(i+j)*k}$ — некорректный подсчёт букв a в w.

Языки, накачиваемые обманно

Некоторые не КС-языки тоже накачиваются, например, $\{a^m b^n c^n d^n \mid m > 0\} \cup \{b^i c^j d^k\}$.

Языки, накачиваемые обманно

Некоторые не КС-языки тоже накачиваются, например, $\{a^m b^n c^n d^n \mid m > 0\} \cup \{b^i c^j d^k\}$.

Действительно, если слово языка содержит буквы a, тогда мы можем взять $y_1 y_2 = a^i$. Иначе накачку можно выбрать произвольно.

Языки, накачиваемые обманно

Некоторые не КС-языки тоже накачиваются, например, $\{a^m b^n c^n d^n \mid m > 0\} \cup \{b^i c^j d^k\}$.

Действительно, если слово языка содержит буквы a, тогда мы можем взять $y_1 y_2 = a^i$. Иначе накачку можно выбрать произвольно.

То, что этот язык — не КС, можно понять по тому факту, что его пересечение с регулярным языком $ab^*c^*d^*$ не контекстно-свободно.

Языки, накачиваемые обманно

Некоторые не КС-языки тоже накачиваются, например, $\{a^m b^n c^n d^n \mid m > 0\} \cup \{b^i c^j d^k\}$.

Действительно, если слово языка содержит буквы a, тогда мы можем взять $y_1 y_2 = a^i$. Иначе накачку можно выбрать произвольно.

То, что этот язык — не КС, можно понять по тому факту, что его пересечение с регулярным языком $ab^*c^*d^*$ не контекстно-свободно.

Иногда пересечение с регулярным языком делает язык «излишне накачиваемым»: например, пересекая $L = \{ww^R a^n \mid |w|_a = n\}$ с $ba^+b^*a^+ba^+$, мы даём возможность Абеляру выбрать в качестве y_1 пару букв из центрального блока b^* (положив $y_2 = \varepsilon$). Заметим, что слова без этого блока будут иметь вид $ba^{2n}ba^n$ — а такие слова тоже можно накачивать, выбрав y_1 из a^{2n}, y_2 — из a^n.