Базовые понятия теории формальных языков

Теория формальных языков

2022 г.

Формальные языки

Традиционный подход

Формальный язык — это множество $\mathcal{M}$ слов над алфавитом Σ (обозначается $\mathcal{M} \subseteq \Sigma^*$, здесь знак * — итерация Клини). Обычно подразумевает наличие формальных правил, определяющих корректность формы (т.е. синтаксиса) слов из $\mathcal{M}$.

Теоретико-категорный подход

Формальный язык — это категория (т.е. способ задания объектов и их взаимосвязей в форме направленного графа). Отличие от теоретико-множественного подхода — способ описания не синтаксиса слов, а отношения между ними.

Классический пример: A man saw a dog with a telescope.

Перечислимость и разрешимость

- Язык $\mathcal{M}$ разрешимый $\Leftrightarrow$ для любого слова w существует алгоритм проверки принадлежности w к $\mathcal{M}$ (всегда завершающийся и дающий точный, либо положительный, либо отрицательный ответ).
- Язык $\mathcal{M}$ перечислимый $\Leftrightarrow$ для любого слова w существует алгоритм, положительно отвечающий на вопрос принадлежности w к $\mathcal{M}$ за конечное время (но, возможно, зацикливающийся, если $w \notin \mathcal{M}$).

Перечислимый, но не разрешимый: язык программ, завершающихся на входе $\mathsf{0}$ (на любом достаточно мощном ЯП).
Далее разрешимые языки можно классифицировать по минимально необходимой сложности разрешающего алгоритма (P-разрешимые, $\mathsf{ExpTime}$-разрешимые...)

Примеры формальных языков

- $\{\underbrace{aa\ldots a}_{n\ \text{раз}}\underbrace{bb\ldots b}_{n\cdot 3\ \text{раз}}\}$ (сокращаем до $\{a^n b^{3n}\}$);
- палиндромы чётной длины в русском языке;
- правильно записанные арифметические выражения с $\cdot$, $+$ над натуральными числами;
- правильные скобочные последовательности;
- язык тождественно истинных формул логики предикатов;
- язык правильно типизированных программ на ЯП со статическими типами;
- язык, описывающий все разрешимые за линейное время формальные языки.

Представления формальных языков

- Свёртки множеств
- Системы переписывания термов
- Распознающие / порождающие машины
- Алгебраические выражения
- Алгебраические структуры
- Формулы логики предикатов

Пример представления

Язык слов в алфавите $\{a, b\}$ с чётным количеством букв a.

- Свёртка: $\{w \in \{a, b\}^* \mid 2 \text{ делит } |w|_a\}$. $|w|_t$ — количество вхождений терма t в слово w.
- Система переписывания термов:

  $S \to "a" {+\!+} T \quad S \to "b" {+\!+} S \quad S \to \varepsilon$

  $T \to "a" {+\!+} S \quad T \to "b" {+\!+} T$

  А можно и по-другому:

  $S \to "a" {+\!+} S {+\!+} "a" \quad S \to "b" {+\!+} S$

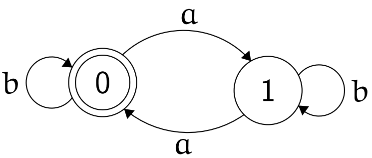
  $S \to S {+\!+} "b" \quad S \to \varepsilon$

  Здесь и далее ε — стандартное обозначения для пустого слова (строки нулевой длины). Поскольку структура данных — слова, то кавычки и знак конкатенации $+\!+$ дальше опускаются.

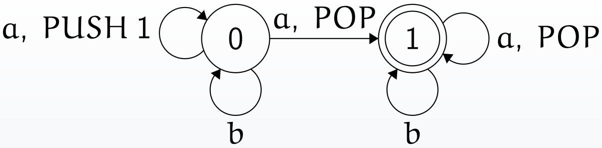
Пример представления

Язык слов в алфавите $\{a, b\}$ с чётным количеством букв a.

- Распознающие машины:



А можно иначе:



Пример представления

Язык слов в алфавите $\{a, b\}$ с чётным количеством букв a.

- Алгебраические выражения:
  $(b^*ab^*ab^*)^*$
  А можно и так:
  $(b^*ab^*a)^*b^*$
- Алгебраические структуры:
  Класс эквивалентности слова ε в полугруппе с соотношениями $aa \to \varepsilon$, $b \to \varepsilon$.
- Формулы логики предикатов: без введения считающих предикатов не выразима в логике предикатов первого порядка (но выразима в логике одноместных предикатов второго порядка).

Анализ свойств языков

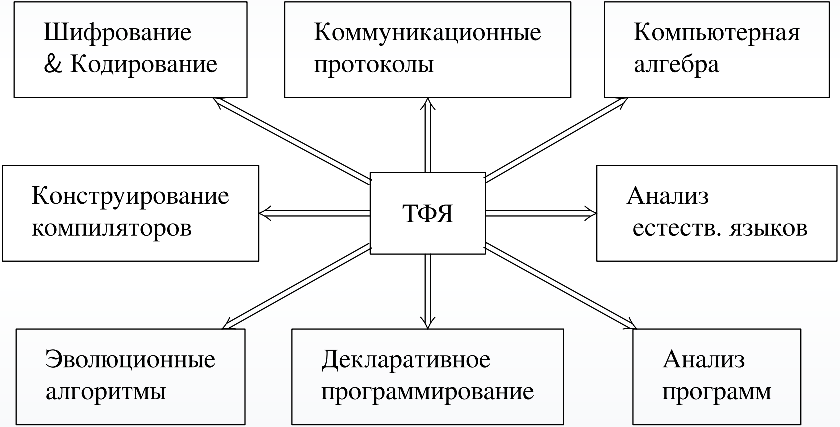
Проверить, действительно ли данная система переписывания термов порождает язык $\{w \mid |w|_a$ делится на $2\}$, если начальным состоянием является S.

$S \to a\,S\,a \quad S \to b\,S \quad S \to S\,b \quad S \to \varepsilon$

- Необходимо доказать, что все указанные слова порождаются системой (например, по индукции).
- А также что никакие другие не порождаются.

Предположим, что система порождает слова с нечётным числом букв a. Выберем из них такое, которое выводится из S за самое малое число шагов. Покажем, что каким бы ни был предпоследний шаг вывода, его можно поменять на $S \to \varepsilon$ и получится слово с нечётным числом букв a, вывод которого ещё короче.

Области применения



Структура курса

- Два рубежных контроля $\times$ 15 баллов.
- Пять лабораторных работ $\times$ 8 баллов.
  - Java, Python, Go, JS — без бонуса
  - C/C++, Kotlin, TypeScript — бонус +1 балл
  - Rust, Dart, все лиспы, Scala — бонус +2 балла
  - Lua, Haskell, Erlang, Рефал — бонус +3 балла
  - Agda, Idris (с доказательствами) — 5 баллов за курс
- С момента выдачи лабораторной работы:
  - 0-14 дней — сдача за полный балл
  - 15-21 день — сдача со штрафом -1 балл
  - 22-28 дней — сдача со штрафом -2 балла
  - 29-∞ — сдача со штрафом -3 балла

Системы переписывания термов

Определение

Сигнатура — множество пар $\langle f, n\rangle$ из имени конструктора f и его местности n.

Определение

Пусть V — множество переменных, F — множество конструкторов; множество термов $T(F)$ над F определяется рекурсивно:

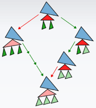
- все элементы V — термы;
- если $\langle f, n\rangle$ — конструктор и $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $f(t_1, \ldots, t_n)$ — терм;
- других термов нет.

Term Rewriting Systems

Пусть V — множество переменных, F — множество конструкторов (сигнатура); $T(F)$ — множество термов над множеством конструкторов F. TRS — набор правил переписывания вида $\Phi_i \to \Psi_i$, где Φ_i, Ψ_i — термы в $T(F)$. Правило переписывания $\Phi_i \to \Psi_i$ применимо к терму t, если t содержит подтерм, который можно сопоставить (унифицировать) с Φ_i.

Если к терму t не применимо ни одно правило переписывания TRS, терм называется нормализованным.

Имея правила переписывания вида $f(g(x)) \to g(g(f(x)))$ и $g(g(x)) \to f(x)$, каждое из них можно применить к терму $f(g(g(f(g(f(g(g(g(Z)))))))))$ тремя разными способами.



Конфлюэнтность

Определение

TRS называется конфлюэнтной, если для любых двух термов t, s, которые получаются переписыванием одного и того же терма u, существует терм v такой, что t, s оба переписываются в v.
Формально:
$\forall u, t, s(u \to^* t \;\&\; u \to^* s \Rightarrow \exists v(t \to^* v \;\&\; s \to^* v))$

Конфлюэнтные системы поддаются распараллеливанию и легко оптимизируются.
$\to$ — переписывание за 1 шаг;
$\to^*$ — переписывание за произвольное число шагов, начиная с 0.

Особенности TRS

- Недетерминированные.
- Нет ограничений на порядок применения правил.
- Не обязательно конфлюэнтны.
- Могут порождать бесконечные цепочки.

Особенности TRS

- Недетерминированные.
- Нет ограничений на порядок применения правил.
- Не обязательно конфлюэнтны.
- Могут порождать бесконечные цепочки.

Пример Хетта

$$f(x, x) \to a$$
$$f(x, g(x)) \to b$$
$$c \to g(c)$$

Терм, где нарушается конфлюэнтность?

Особенности TRS

- Недетерминированные.
- Нет ограничений на порядок применения правил.
- Не обязательно конфлюэнтны.
- Могут порождать бесконечные цепочки.

Пример Клопа

$$\mathsf{A} \to \mathsf{CA}$$
$$\mathsf{C}z \to \mathsf{D}z(\mathsf{C}z)$$
$$\mathsf{D}zz \to \mathsf{E}$$

Способы преобразовать A?

Особенности TRS

- Недетерминированные.
- Нет ограничений на порядок применения правил.
- Не обязательно конфлюэнтны.
- Могут порождать бесконечные цепочки.

Пример Тойямы

- TRS 1:
  $f(0, 1, x) \to f(x, x, x)$
- TRS 2:
  $g(x, y) \to x$
  $g(x, y) \to y$

Как можно вычислить $f(g(0, 1), g(0, 1), g(0, 1))$?

Фундированность

Определение

Частичный порядок $\preceq$ является фундированным (wfo) на множестве M, если в M не существует бесконечных нисходящих цепочек относительно $\preceq$ (говоря о множестве термов, иногда такой $\preceq$ называют нётеровым).

Частичный порядок $\preceq$ является монотонным в алгебре A, если $\forall f, t_1, ..., t_n, s, s'(s \preceq s' \Rightarrow f(t_1, \ldots, s, \ldots, t_n) \preceq f(t_1, \ldots, s', \ldots, t_n))$ (строго монотонным, если при этом неверно обратное).

Завершаемость

Определение

Фундированная монотонная алгебра (ФуМА) над множеством функциональных символов F — это фундированное множество $\langle A, > \rangle$ такое, что для каждого функционального символа $f \in F$ существует функция $f_A : A^n \to A$, строго монотонная по каждому из аргументов.

Определим расширение произвольного отображения σ из множества переменных в A следующим образом:

- $[x, \sigma] = \sigma(x)$;
- $[f(t_1, \ldots, t_n), \sigma] = f_A([t_1, \sigma], \ldots, [t_n, \sigma])$.

Завершаемость

Совместность

TRS $\{l_i \to r_i\}$ совместна с ФуМА A $\Leftrightarrow$ для всех i и для всех σ выполняется условие $[l_i, \sigma] > [r_i, \sigma]$.

Теорема

TRS не порождает бесконечных вычислений (завершается), если и только если существует совместная с ней ФуМА.

ФуМА, совместные с TRS

Стандартные способы определения f_A:

- лексикографический порядок на множестве имён F + отношение подтерма;
- построение монотонно возрастающей (по каждому аргументу) числовой функции, соответствующей f_A.

Оба случая подразумевают, что в построенной модели целое больше части, т.е. всегда выполняется $f(t) > t$.

Лексикографический порядок $>$ lo

Определение

$f(t_1, \dots, t_n) >_{lo} g(u_1, \dots, u_m)$ (этот порядок также называют порядком Кнута–Бендикса) если и только если выполнено одно из условий:

1. $\exists i(1 \leqslant i \leqslant n \;\&\; t_i = g(u_1, \dots, u_m))$;
2. $\exists i(1 \leqslant i \leqslant n \;\&\; t_i >_{lo} g(u_1, \dots, u_m))$;
3. $(f > g) \;\&\; \forall i(1 \leqslant i \leqslant m \Rightarrow f(t_1, \dots, t_n) >_{lo} u_i)$;
4. $(f = g) \;\&\; \forall i(1 \leqslant i \leqslant n \Rightarrow f(t_1, \dots, t_n) >_{lo} u_i)$ и n-ка $(t_1, \dots, t_n)$ лексикографически больше, чем $(u_1, \dots, u_n)$ (т.е. первый её не совпадающий с u_i элемент t_i удовлетворяет условию $t_i >_{lo} u_i$).

Примеры

Проверить завершаемость TRS методом $>_{lo}$:

$$f(g(x)) \to g(h(x,x))$$
$$g(f(x)) \to h(g(x),x)$$

- Первое правило переписывания вынуждает либо $g(x) >_{lo} g(h(x,x))$ (по условию 1 или 2) — что невозможно, потому что x должно лексикографически оказаться больше $h(x,x)$ (по условию 4); либо $f > g$ и $f(g(x)) > h(x,x)$ (по условию 3). В этом случае можно взять также $f > h$. Неравенство $f(g(x)) > x$ выполняется тривиально.
- Второе правило переписывания удовлетворяет условию завершаемости по условию 2, например, если показать, что $f(x) >_{lo} h(g(x),x)$. Уже имеем $f > h$, поэтому достаточно показать $f(x) >_{lo} g(x)$ и $f(x) >_{lo} x$. Оба условия тривиально выполняются из допущений выше.

Примеры

Проверить завершаемость TRS методом построения монотонной функции:

$$f(g(x, y)) \to g(h(y), x)$$
$$h(f(x)) \to f(x).$$

- Завершаемость по второму правилу переписывания автоматически выполняется по свойству подтерма. Поэтому то, что функция f стоит на двух его сторонах, не дает никаких указаний относительно того, стоит ли делать f_A быстро растущей или медленно. Все подсказки содержатся только в первом правиле переписывания.
- По первому правилу переписывания видно, что f_A надо делать большой (f стоит только слева), а h_A нет (h есть только справа). Положим $f_A(x) = 10 \cdot (x + 1)$, $h_A(x) = x + 1$. Тогда должно выполняться $10 \cdot (g_A(x, y) + 1) > g_A(y + 1, x)$. Этому неравенству удовлетворяет, например, $g_A(x, y) = x + y$.

Общие комментарии

- Не обязательно добиваться выполнения неравенства на образах f_A на всём множестве $\mathbb{N}$. Поскольку любой отрезок $\mathbb{N}$ от k и до бесконечности фундирован, а все образы f_A монотонны, они замкнуты на этом отрезке. Поэтому, если неравенство не выполняется для нескольких первых чисел натурального ряда, этим можно пренебречь.

- Если не получается применить $>_{lo}$ или подобрать числовую функцию, это ещё не значит, что TRS не завершается. См. пример Зантемы: $f(g(x)) \to g(f(f(x)))$.

Терминалы и нетерминалы

Если TRS определена над алфавитом Σ, а нас интересует порождаемый ею язык в $\Sigma' \subset \Sigma$, то элементы Σ' обычно называются терминалами, а элементы $\Sigma \setminus \Sigma'$ — нетерминалами.

В этом случае значащие (порождающие) нетерминалы обязательно должны встречаться хотя бы в одной левой части правила переписывания (иначе такой нетерминал не сможет быть переписан в слово над Σ').

Терминалы также могут встречаться в левых частях правил (это не так только для некоторых классов систем переписывания термов).

Грамматики

Определение

Грамматика — это четвёрка $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$, где:

- N — алфавит нетерминалов;
- Σ — алфавит терминалов;
- P — множество правил переписывания $\alpha \to \beta$ типа $\langle (N \cup \Sigma)^+ \times (N \cup \Sigma)^* \rangle$;
- $S \in N$ — начальный символ.

$\alpha \Rightarrow \beta$, если $\alpha = \gamma_1 \alpha' \gamma_2$, $\beta = \gamma_1 \beta' \gamma_2$, и $\alpha' \to \beta' \in P$.
$\Rightarrow^*$ — рефлексивное транзитивное замыкание $\Rightarrow$.

Определение

Язык $L(G)$, порождаемый G — множество $\{u \mid u \in \Sigma^* \ \& \ S \Rightarrow^* u\}$.

α-преобразование

По-разному воспринимают переименовку:

- Переменные vs конструкторы в TRS;
- Нетерминалы vs терминалы в грамматиках.

α-преобразование

По-разному воспринимают переименовку:

- Переменные vs конструкторы в TRS;
- Нетерминалы vs терминалы в грамматиках.

Для любой инъективной переименовки σ применение σ к правилам грамматики/trs для переменных и нетерминалов также называется α-преобразованием.

- α-преобразование не меняет терминальный язык;
- обычно термы различаются с точностью до α-преобразования.

α-преобразование

По-разному воспринимают переименовку:

- Переменные vs конструкторы в TRS;
- Нетерминалы vs терминалы в грамматиках.

Для любой инъективной переименовки σ применение σ к правилам грамматики/trs для переменных и нетерминалов также называется α-преобразованием.

- α-преобразование не меняет терминальный язык;
- обычно термы различаются с точностью до α-преобразования.

Неформально: контейнеры определяются не именем, а содержимым (см. экстенсиональность в логике).

Иерархия Хомского без ε-правил

$A, B \in N$, $a \in \Sigma^*$, $\alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$, $\gamma \in (N \cup \Sigma)^+$

Иерархия грамматик

Тип 0	Рекурсивно-перечислимые	$\forall$
Тип 1	Контекстно-зависимые	$\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta, \gamma \neq \varepsilon$
Тип 2	Контекстно-свободные	$A \to \gamma$
Тип 3	Праволинейные (регулярные)	$A \to a, A \to aB$

Иерархия Хомского без ε-правил

$A, B \in N$, $a \in \Sigma^*$, $\alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$, $\gamma \in (N \cup \Sigma)^+$

Иерархия грамматик

Тип 0	Рекурсивно-перечислимые	$\forall$
Тип 1	Контекстно-зависимые	$\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta$, $\gamma \neq \varepsilon$
Тип 2	Контекстно-свободные	$A \to \gamma$
Тип 3	Праволинейные (регулярные)	$A \to a$, $A \to aB$

Примеры языков

Тип 0	$\{u \mid L(u) = L(r)\}$, r — фикс. regex, u — regex;
Тип 1	$\{ww \mid w \in \Sigma^+\}$
Тип 2	непустые палиндромы в алфавите $\{a, b\}$
Тип 3	$\{w \mid w = aw_1 \,\&\, (w_1 = a^{2k} \vee w = a^{3k} \vee w_1 \neq a^{5k})\}$

Иерархия Хомского с ε-правилами

$A, B \in N$, $a \in \Sigma^*$, $\alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$, $\gamma \in (N \cup \Sigma)^+$.

Иерархия грамматик

Тип 0	Рекурсивно-перечислимые	$\forall$
Тип 1	Контекстно-зависимые	$\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta, \gamma \neq \varepsilon$
		$\vee\ S \to \varepsilon \ \&\ \forall p : \alpha \to \beta \in P \forall \beta_1, \beta_2 (\beta \neq \beta_1 S \beta_2)$
Тип 2	Контекстно-свободные	$A \to \alpha$
Тип 3	Регулярные	$A \to a, A \to aB, A \to \varepsilon$