ФКН. Программная инженерия. Дизайн и разработка информационных продуктов

Математический анализ

2025/2026 учебный год

Дополнительный лист 2. Предел функции. Непрерывность

19 ноя – 6 дек 2025 г.

Задача 1. (5) Доказать, что если из любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к точке x_0 и нигде не равной x_0, можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = a$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

Задача 2. (5) Пусть f и g – непрерывные на X функции. Доказать, что $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ и $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ также непрерывны на X.

Задача 3. (5) Пусть задана функция $f : X \to Y$; X, $Y \subseteq \mathbb{R}$. Будем называть множество $f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$ *прообразом* множества $A \subseteq Y$. Пусть теперь f непрерывна на $X = \mathbb{R}$. Докажите, что

(a) если U открыто, то $f^{-1}(U)$ открыто;

(b) если F замкнуто, то $f^{-1}(F)$ замкнуто.

Задача 4. (5) Показать, что если для функции, определенной на открытом подмножестве прямой, выполнено, что прообраз любого открытого открыт, то эта функция непрерывна на своей области определения.

Задача 5. (5) Пусть задана монотонная функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Докажите, что если она имеет точку разрыва, то это скачок.

Задача 6. (8) Исследуйте на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \notin \mathbb{Q}, \\ \dfrac{qx}{q+1}, & x = \dfrac{p}{q} \text{ — несократимая дробь, } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Задача 7. (8) Функция f непрерывна и ограничена на интервале $(0, +\infty)$ и не имеет предела при $x \to +\infty$. Доказать, что найдется число a, для которого уравнение $f(x) = a$ имеет бесконечно много решений.

Задача 8. (5) Функция f удовлетворяет на множестве X такому условию: существуют числа $L > 0$, $\alpha > 0$, такие что для любых x_1, $x_2 \in X$ верно

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le L|x_1 - x_2|^\alpha$$

(при $\alpha = 1$ это неравенство называют условием Липшица, при $\alpha < 1$ – условием Гельдера порядка α). Доказать, что f равномерно непрерывна на X.

Задача 9. (3+5+5+8)

(a) Приведите пример функции, равномерно непрерывной на множестве и не ограниченной на нем.

(b) Приведите пример функции, ограниченной и непрерывной на ограниченном интервале, но не равномерно непрерывной на нем.

(c) Приведите пример функции, непрерывной на замкнутом множестве, и не равномерно непрерывной на нем.

(d) Докажите, что если функция равномерно непрерывна на ограниченном множестве, то она ограничена на нем.

Корректнсть каждого примера нужно обосновать.

Задача 10. (8) Докажите, что всякая непрерывная на отрезке функция может быть с любой точностью аппроксимирована кусочно линейной функцией.

Кусочно линейной на отрезке $[a,b]$ будем называть непрерывную на этом отрезке функцию f, если существует конечное разбиение отрезка $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$, такое что на каждом $[x_k,x_{k+1}]$, $k = 0 \ldots n$ функция f линейна.

Аппроксимировать функцию F функцией f на множестве E с точностью ε – значит задать такую f, что $\forall x \in E \quad (|f(x) - F(x)| < \varepsilon)$.

Равномерную непрерывность функций-примеров нужно уметь доказывать. Если ассистенту неочевидно, что ваша функция непрерывна / ограничена или что ваше множество открыто / замкнуто / ограничено, это тоже нужно будет доказать.

Задача 11. (8) Докажите, что если функцию f на промежутке можно аппроксимировать с любой точностью кусочно линейной функцией, то f равномерно непрерывна на этом промежутке.

Задача 12. (12+5) Докажите следующее утверждение:

Если функция $f : X \to Y$, где X – компакт, переводит фундаментальную последовательность в фундаментальную, то она равномерно непрерывна.

Верно ли, что Липшецево отображение сохраняет фундаментальность последовательности?

Дедлайн приема работ – 6 декабря.

Если в своих решениях вы используете утверждения и определения, которых не было на лекции Эрлиха, в том числе те, что были на консультации, вам нужно уметь их доказывать / строго записывать.

Если вы не согласны с оценкой, выставленной вам ассистентом, принимавшим работу, вы можете подать апелляцию @vadim_kolba в течение трех суток после сдачи работы. При этом содержательно поясняйте свою позицию.

Присутствие на консультации по дополнительному листочку всячески приветствуется, а активная работа на ней – поощряется бонусами к оценке!