Семинар 1

Обозначения:

- $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ – множество всех матриц размера $m \times n$;
- $\mathrm{M}_m(\mathbb{R}) = \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathbb{R})$ – множество всех *квадратных матриц порядка* m;
- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Операции над матрицами:

- для матриц $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ определена матрица $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$;
- для матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ и скаляра $\lambda \in \mathbb{R}$ определена матрица $\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$;
- для матриц $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ и $B \in \mathrm{Mat}_{n\times p}(\mathbb{R})$ определена матрица $C = A \cdot B \in \mathrm{Mat}_{m\times p}(\mathbb{R})$, где

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Задача 1 (К17.1(б-г))**.** Вычислить:

1) $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$.

Свойства операций сложения и умножения на скаляр:

(1) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (*ассоциативность* сложения);

(2) $A + B = B + A$ (*коммутативность* сложения);

(3) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$;

(4) $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$;

(5) $(\lambda\mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$;

(6) $1 \cdot A = A$.

Предупреждение. **Умножение** матриц, вообще говоря, **некоммутативно**.

Задача 2. Перемножить матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ в прямом и обратном порядке.

Определение 1. Пусть $A = (a_{ij})$ – произвольная матрица порядка $m \times n$. *Главной диагональю* (или просто *диагональю*) *матрицы* A называется множество элементов вида a_{ii}, где $i = 1, \ldots, \min(m, n)$.

Определение 2. *Единичной матрицей порядка* m называется матрица

$$E_m = E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R}),$$

у которой на диагонали стоят единицы, а в остальных местах – нули.

Свойства умножения матриц:

(1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (ассоциативность умножения);

(2) $E \cdot A = A \cdot E = A$ (*нейтральный элемент* по умножению).

Возведение матрицы в степень. Пусть $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$. Из ассоциативности умножения следует, что корректно определено возведение квадратной матрицы A в целую неотрицательную степень N:

$$A^N = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{N \text{ раз}} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R}).$$

Другими словами,

$$A^0 = E_m \quad \text{и} \quad A^N = A^{N-1} \cdot A \text{ при } N > 0.$$

Задача 3 (К17.4(б))**.** Вычислить $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ и $n > 0$.

Задача 4 (П834)**.** Найти все матрицы порядка 2, квадрат которых равен единичной матрице.

Определение 3. Зафиксируем натуральные числа m и n.

- *Нулевой матрицей размера* $m \times n$ называется матрица

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R}).$$

- Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ – произвольная матрица. *Противоположной к* A *матрицей* называется матрица

$$-A = (-a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R}).$$

Свойства:

(1) $\mathbf{0} + A = A + \mathbf{0} = A$ (нейтральный элемент по сложению);

(2) $A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{0}$ (*обратный элемент* по сложению).

Подстановка матрицы в многочлен. Рассмотрим произвольную квадратную матрицу $A \in$ $\in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ и произвольный многочлен

$$f(x) = c_0 x^d + c_1 x^{d-1} + \ldots + c_{d-1} x + c_d.$$

Тогда можно подставить матрицу A в многочлен f и получить матрицу

$$f(A) = c_0 \cdot A^d + c_1 \cdot A^{d-1} + \ldots + c_{d-1} \cdot A + c_d \cdot E \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R}).$$

Задача 5 (К17.5(а))**.** Вычислить $f(A)$, где $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ и $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.