Д/з по матану N 12

N 1

a) $f'(x) = \dfrac{1}{\ln(\frac{x}{2})} \cdot \ln'(\frac{x}{2}) = \dfrac{1}{\ln(\frac{x}{2})} \cdot \dfrac{2}{x} \cdot (\frac{x}{2})' =$

$= \dfrac{1}{x \ln(\frac{x}{2})}$

в) $f(x) = 2^{\sin x^2} = e^{\sin x^2 \cdot \ln 2}$

$f'(x) = e^{\sin x^2 \cdot \ln 2} \cdot \ln 2 \cdot \sin' x^2 =$

$= 2^{\sin x^2} \cdot \ln 2 \cdot \cos x^2 \cdot (x^2)' =$

$= 2^{\sin x^2 + 1} \cdot \cos x^2 \cdot x \cdot \ln 2$

c) $f(x) = (\sin x)^{\cos x} = e^{\cos x \ln \sin x}$

$f'(x) = (\sin x)^{\cos x} \cdot (\cos x \cdot \ln \sin x)' =$

$= (\sin x)^{\cos x} \cdot (\ln' \sin x \cdot \cos x - \sin x \cdot \ln \sin x) =$

$= (\sin x)^{\cos x} \cdot (\cos x \cdot \dfrac{1}{\sin x} \cdot \sin' x - \sin x \cdot \ln \sin x) =$

$= (\sin x)^{\cos x} \cdot (\dfrac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \cdot \ln \sin x)$

$$d)\ f'(x) = \left(- \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^{2n} - 1}{x^{2n}+1} \right)}} \right) \cdot \left(\frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} \right)' \ (*)$$

$$\left(\frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} \right)' = \frac{(x^{2n} - 1)' \cdot (x^{2n} + 1) - (x^{2n} - 1)(x^{2n} + 1)'}{(x^{2n} + 1)^2} =$$

$$= \frac{2n \cdot x^{2n-1}(x^{2n} + 1) - 2n x^{2n-1}(x^{2n} - 1)}{(x^{2n} + 1)^2} =$$

$$= \frac{2n \cdot x^{2n-1}(x^{2n} + 1 - x^{2n} + 1)}{(x^{2n} + 1)^2} =$$

$$= \frac{4n \cdot x^{2n-1}}{(x^{2n}+1)^2} \longrightarrow (*):$$

$$\frac{4n \cdot x^{2n-1}}{(x^{2n}+1)^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n}+1}}} =$$

$$= \frac{4n \cdot x^{2n-1}}{\sqrt{(x^{2n}+1)^4 - (x^{2n}+1)^3 (x^{2n} - 1)}}$$

N 2

$y = \operatorname{arctg} x - \ln x$

$D_y = (0; +\infty)$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x} = \frac{x - 1 - x^2}{x(1+x^2)}$$

Рассмотрим $y' = 0$:

$$\frac{x^2 - x + 1}{x(1+x^2)} = 0 \quad \Big| \cdot (1+x^2) > 0$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x} = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{x^2 - x + 1} > 0$$

$$\frac{1}{x} = 0 \quad \text{— невозможно}$$

$$\frac{\overset{<0}{-x^2 + x - 1}}{\underset{>0}{x}\,\underset{>0}{(1+x^2)}}$$

Заметим, что на D_y $y' < 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ y строго убывает на всей своей области определения

№3

а) $y = (x^2+1)\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{\pi}{4}x^2 - x$

$D_y = \mathbb{R}$

$y' = 2x\cdot\mathrm{arctg}\,x + (x^2+1)\cdot\frac{1}{1+x^2} - \frac{\pi}{2}\cdot x -$

$= 2x\cdot\mathrm{arctg}\,x - \frac{\pi}{2}x$

$\cdot\; y' = 0:$

$2x\cdot\mathrm{arctg}\,x - \frac{\pi}{2}x = 0$

$x\left(2\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \mathrm{arctg}\,x = \frac{\pi}{4} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Исследуем знак производной:

$x<0: \quad x\left(2\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{\pi}{2}\right)$

$\Updownarrow$

$x\left(-2\,\mathrm{arctg}(-x) - \frac{\pi}{2}\right)$

$\Updownarrow$

$\underbrace{-x}_{>0}\underbrace{\left(2\,\mathrm{arctg}(\underbrace{-x}_{>0}) + \frac{\pi}{2}\right)}_{>0} > 0 \Rightarrow$

y': + − +

0 1 x

Значит, $x=0$ - точка максимума, $x=1$ - точка минимума.

Найдём значения в этих точках:

Максимум: $\operatorname{arctg} 0 - 0 - 0 = 0$

Минимум: $2 \operatorname{arctg} 1 - \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{4} - 1$

в) $y = (x+2) e^{\frac{1}{x}}$

$$D_y = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

$$y' = e^{\frac{1}{x}} + (x+2) \cdot \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' =$$

$$= e^{\frac{1}{x}} + (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{x+2}{x^2}\right)$$

$\bullet\ y' = 0:\ e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2}\right) = 0$

$$\Updownarrow$$

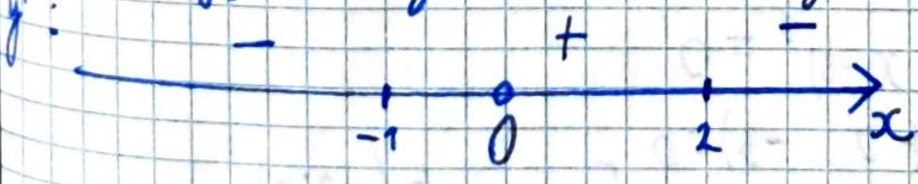
$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Исследуем знак производной



$\Rightarrow x = -1$ – точка минимума

$x = 2$ – точка максимума

Найдём значения функции в этих точках:

Минимум: $y = (-1+2)e^{-1} = \frac{1}{e}$

Максимум: $y = 4 \cdot e^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{e}$

N5

$f(x) = (x-3)^3 e^{|x+1|}$

Рассмотрим $x \in (-2; -1)$:

$f(x) = (x-3)^3 e^{-x-1}$

$f'(x) = 3(x-3)^2 \cdot e^{-x-1} - (x-3)^3 e^{-x-1} = 0 \Leftrightarrow$ ищем крит. точки

$\Leftrightarrow 3(x-3)^2 - (x-3)^3 = 0 \quad |:(x-3)^2 > 0$ $x < -1$

$3 - x + 3 = 0$

$\Downarrow$

$x = 6 \notin (-2; -1) \Rightarrow$ на этом интервале нет критических точек

Рассмотрим $x \in (-1; 4)$:

$f(x) = (x-3)^3 e^{x+1}$

$f'(x) = 3(x-3)^2 \cdot e^{x+1} + (x-3)^3 e^{x+1} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(x-3)^2 + (x-3)^3 = 0$

$(x-3)^2(3 + x - 3) = 0$

$x(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in (-1; 4) \\ x = 3 \in (-1; 4) \end{array}\right.$

Теперь рассмотрим все точки, среди где функция может принимать наибольшее или наименьшее значение:

• $x=-2$: $f(-2)=(-5)^3 e = -125e$

• $x=-1$ (эту точку мы рассматриваем, т.к из анализа ранее мы хз чё в ней происходит): $f(-1)=(-4)^3=-64$

• $x=0$: $f(0)=(-3)^3 e = -27e$

• $x=3$: $f(3)=0$

• $x=4$: $f(4)=e^5$

Наибольшее значение: e^5

Наименьшее значение: $-125e$