Д/з по матану №4

№1

Пусть $\{|x_n|\}$ - бесконечно малая (*) докажем, что $\{x_n\}$ - бесконечно малая

(*): $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N: ||x_n|| < \varepsilon$

$|x_n| < \varepsilon \Rightarrow x_n$ - бесконечно малая (по опр.)

№2

По арифметике пределов: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$

1) Нет, не следует: пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, а $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$

2) Да, следует, так $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0 \end{array}\right.$

№3

Дано:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \ \exists N(M) \in \mathbb{N} \ n \geq N \ x_n < M$

2) $\exists C \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 \ (y_n \leq C)$

Доказать:

$\forall Z \ \exists N_1(Z) \in \mathbb{N} \ n \geq N_1: x_n + y_n < Z$

$y_n \leq C; \ x_n + y_n < Z \Leftarrow x_n + C < Z$ (**)

$x_n < Z - C$; Тогда $N = N(Z - C)$ (*)

Из (*) $\Rightarrow$ (**) и так мы возвращаемся к исходному нер-ву, тем самым доказывая его.

№4

Введём обозначения:

A – „$\{x_n\}$ – сходящаяся посл-ть"

B – $\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \ \exists N \ \forall n \geq N: |x_n - a| < \varepsilon$

1) „Для A достаточно B" $\Leftrightarrow B \Rightarrow A$

B по сути показывает, что у посл-ти есть предел, а из этого как раз и следует, что посл-ть сходящаяся, т.е. A.

Это верно

2) „Для B достаточно A" $A \Rightarrow B$ (*)

Если посл-ть сходящаяся, то у неё есть предел ровно это же говорит (*)

Это верно