Д/з по дискретной математике 2.б

N 1

Пусть:

$$x = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}; \quad y = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\beta_i}, \quad z = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\gamma_i}$$

$$НОК(x, y, z) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)}$$

$$НОД(x, y, z) = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)}$$

Перепишем выражение в правой части:

$$\frac{\prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i+\beta_i+\gamma_i} \cdot \prod_{i=1}^{n} p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)}}{\prod_{i=1}^{n} p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i) + \min(\alpha_i, \gamma_i) + \min(\beta_i, \gamma_i)}} =$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i+\beta_i+\gamma_i + \min(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)}}{\prod_{i=1}^{n} p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i) + \min(\alpha_i, \gamma_i) + \min(\beta_i, \gamma_i)}}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i+\beta_i+\gamma_i+\min(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) - \min(\alpha_i, \beta_i) - \min(\alpha_i, \gamma_i) - \min(\beta_i, \gamma_i)} \overset{?}{=} \prod_{i=1}^{n} p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)}$$

По сути, требуется доказать:

$$(*) \quad \alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \min(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) - \min(\alpha_i, \beta_i) - \min(\alpha_i, \gamma_i) - \min(\beta_i, \gamma_i) = \underbrace{\max(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)}_{mx}$$

Обозначим левую часть за h и рассмотрим несколько случаев:

- $\alpha_i < \beta_i < \gamma_i$

$h = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \min(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) - \min(\alpha_i, \beta_i) -$
$- \min(\alpha_i, \gamma_i) - \min(\beta_i, \gamma_i) =$
$= \alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \alpha_i - \alpha_i - \alpha_i - \beta_i = \gamma_i = \dots nx$

- $\alpha_i < \gamma_i < \beta_i$

$h = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \alpha_i - \alpha_i - \alpha_i - \gamma_i = \beta_i = nx$

- $\gamma_i < \beta_i < \alpha_i$

$h = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \gamma_i - \beta_i - \gamma_i - \gamma_i = \alpha_i = nx$

- $\gamma_i < \alpha_i < \beta_i$

$h = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \gamma_i - \alpha_i - \gamma_i - \gamma_i = \beta_i = nx$

- $\beta_i < \alpha_i < \gamma_i$

$h = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \beta_i - \beta_i - \alpha_i - \beta_i = \gamma_i = nx$

- $\beta_i < \gamma_i < \alpha_i$

$h = \alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \beta_i - \beta_i - \gamma_i - \beta_i = \alpha_i = nx$

Все возможные случаи показывают истинность (*), что и завершает доказательство исходного равенства.

№2

$24 \mid (p^2-1) \iff \begin{matrix} 6 \mid (p-1)(p+1) \\ 4 \mid (p-1)(p+1) \end{matrix}$

Заметим, что p – нечётное, но тогда $(p-1)$ и $(p+1)$ – чётные $\Rightarrow (p-1)(p+1)$ в своём разложении имеет по крайней мере две двойки $\Rightarrow 4 \mid (p-1)(p+1)$

$p \equiv 1 \pmod 3$ или $p \equiv 2 \pmod 3$

Но тогда

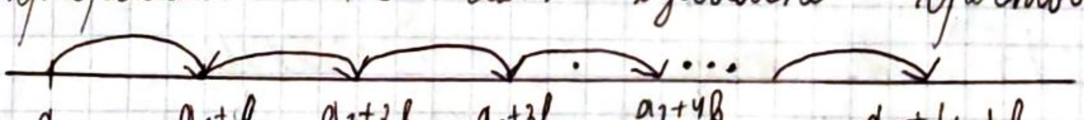
$p-1 \equiv 0 \pmod 3$ или $p+1 \equiv 0 \pmod 3$.

Но тогда $(p-1)$ и $(p+1)$ чётные и одно из них делится на 3

$\Rightarrow 6 \mid (p-1)(p+1)$. Ч.т.д..

№3

Докажем, построив контрпример, в котором два члена произвольной арифм. прогрессии не явл. взаимно простыми:



b – разность прогрессии. Слева направо числа могут как уменьшаться, так и увеличиваться, в зав. от знака b.

Но тогда $a_1 \mid a_1$ и $a_1 \mid a_1+|a_1|b$

$\Rightarrow$ эти числа не взаимно просты

№4

По сути, необходимо доказать, что

НОД $(n^2-n+1, n^2+1) = 0$

НОД $(n^2-n+1, n^2+1) =$ НОД $(n^2-n+1-n^2-1, n^2+1) =$ НОД $(-n, n^2+1) =$ НОД $(n, n^2+1) =$

$=$ НОД $(n, n^2+1-n\cdot n) =$ НОД $(n, 1) = 1$

ч.т.д..

№6

Рассмотрим x^{10}, где $x \in \mathbb{Z}$

Заметим, что если $11 \nmid x$, то НОД $(x, 11) = 1$, то тогда $x^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ (малая теорема Ферма)

Заметим, что в исходной сумме, если хоть одно из чисел не делится на 11, то сумма остатков будет больше 0, но меньше 7 $\Rightarrow$ сама сумма не будет кратна 11. Значит, сумма кратна 11 $\Leftrightarrow$ $(11|a) \wedge (11|b) \wedge (11|c) \wedge (11|d) \wedge (11|e) \wedge (11|f)$. Но тогда в разложении каждого из чисел 11 встречается по крайней мере 1 раз $\Rightarrow$ в разложении числа $abcdef$ 11 встречается как минимум 6 раз $\Rightarrow$ $11^6 | abcdef$