Дискретная математика ПИ

Домашнее задание 1в.

Все ответы следует обосновать.

1. Докажите, что для каждого натурального $n \geqslant 1$ верно $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Докажите, что для каждого натурального $n > 1$ верно $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

3. В некоторой стране лишь конечно много городов, причем любые два различных города соединены дорогой с односторонним движением. Докажите, что есть город, из которого можно добраться в любой другой по имеющимся дорогам.

4*. В некоторой стране имеется круговая железная дорога с $n \geqslant 1$ станциями, по которой ходит поезд на угле. Расход угля на каждом перегоне фиксирован. На каждой станции имеется некоторый запас угля, так что суммарного запаса достаточно для объезда поездом всего круга. Поезд может заправиться углем на любой станции и вмещает весь суммарный запас. Докажите, что существует станция, начиная с которой, *не загруженный изначально углем* поезд сможет объехать весь круг.

5*. На вещественной прямой выбраны несколько красных и несколько синих отрезков (общее число отрезков конечно). Известно, что каждый красный отрезок пересекается с каждым синим. Докажите, что найдется точка прямой, принадлежащая всем красным отрезкам или всем синим отрезкам.

6*. Для каждого числа $n \in \mathbb{N}$ найдется $k \in \mathbb{N}$, такое что $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} \geqslant n$.