ДЗ к семинару 1

Задача 1. Вычислить $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 2 (К17.4(а))**.** При $n \geq 0$ вычислить

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n .$$

Задача 3. Напомним, что числа Фибоначчи задаются рекуррентным соотношением $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ и $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ при $n \geq 2$. Рассмотрим матрицу

$$F = \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что $F^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$ при $n \geq 1$.

Задача 4 (П832)**.** Найти все матрицы порядка 2, квадрат которых равен нулевой матрице.

Задача 5 (К17.5(б))**.** Вычислить $f(A)$, где $f(x) = x^3 - 3x + 2$ и $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача 6 (П829)**.** Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и многочлен

$$f(x) = x^2 - (a+d)x + ad - bc.$$

Доказать, что $f(A) = \mathbf{0}$.

Задача 7 ($*$, П833)**.** Пусть дана матрица A порядка 2 и целое $n > 2$. Доказать, что $A^n = \mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда $A^2 = \mathbf{0}$.