ДЗ к семинару 2

Задача 1 (K17.7)**.** Вычислить A^k, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

и $k \geq 0$.

Задача 2 (K17.14-15)**.** Зафиксируем натуральные числа $m, n, k, p, q \in \mathbb{N}$ и рассмотрим произвольную матрицу $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$. Вычислить:

1) $E_{pq} \cdot A$, где $E_{pq} \in \mathrm{Mat}_{k \times m}(\mathbb{R})$ – матричная единица и $1 \leq p \leq k$, $1 \leq q \leq m$;

2) $A \cdot E_{pq}$, где $E_{pq} \in \mathrm{Mat}_{n \times k}(\mathbb{R})$ – матричная единица и $1 \leq p \leq n$, $1 \leq q \leq k$.

Задача 3. Рассмотрим матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ и $B \in \mathrm{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$. Доказать, что

$$\mathrm{tr}(A \cdot B) = \mathrm{tr}(B \cdot A).$$

Задача 4.

1) Рассмотрим матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Mat}_{n \times p}(\mathbb{R})$ и $C \in \mathrm{Mat}_{p \times m}(\mathbb{R})$. Используя результат задачи 3, доказать, что

$$\mathrm{tr}(A \cdot B \cdot C) = \mathrm{tr}(B \cdot C \cdot A) = \mathrm{tr}(C \cdot A \cdot B).$$

2) Привести пример таких матриц $A, B, C \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, что

$$\mathrm{tr}(A \cdot B \cdot C) \neq \mathrm{tr}(A \cdot C \cdot B).$$

Задача 5 (K17.19)**.** Рассмотрим матрицу $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Доказать, что $\mathrm{tr}(AX) = 0$ для любой матрицы $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $A = \mathbf{0}$.

Задача 6. Доказать, что матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ коммутирует с любой матрицей $X \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда A скалярна.