Д/з по алгебре N 7

N 1

Пусть $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -1 \\ 10 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 7 \\ -2 & -8 & -7 \end{pmatrix}$

Приведём A к улучшенному ступенчатому виду:

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 10 & 4 & -1 \\ 10 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 7 \\ -2 & -8 & -7 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 & 7 \\ 10 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 & 7 \\ 0 & -36 & -36 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3{,}5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = S \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0{,}5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = S$$

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0$ (1)

$\Updownarrow$ (*)

$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 = 0$ (2)

$$\left.\begin{array}{l}(1) \Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0 \\ (2) \Leftrightarrow S \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (*)$$

(т.к. множество решений СЛАУ не меняется при элементарных преобразованиях)

$\alpha_3 w_3 = -\alpha_1 w_1 - \alpha_2 w_2$

$w_3 = -\frac{1}{2} w_1 + w_2 \Rightarrow u_3 = -\frac{1}{2} u_1 + u_2$

Тогда:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 10 & 4 \\ 2 & 8 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ – скелетное разложение матрицы A

N2

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

Рассмотрим каждый из угловых миноров 1–3 порядков м-цы A.

$|1| = 1$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 15 + 4 - 10 + 12 - 1 + 10 = $$
$$= 19 + 11 = 30$$

Все они ненулевые $\Rightarrow \exists$ $\mathcal{L}U$-разложение
Приведём м-цу A к ступенчатому виду:

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}}_{=A_1} \xrightarrow[\mathcal{L}_1 \cdot A_1]{\mathrm{II} - 2\cdot \mathrm{I}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}}_{=A_2} \xrightarrow[\mathcal{L}_2 \cdot A_2]{\mathrm{III} - 4\cdot \mathrm{I}}$$

$$\longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & -9 \end{pmatrix}}_{=A_3} \xrightarrow[\mathcal{L}_3 \cdot A_3]{\mathrm{III} - \frac{3}{5}\mathrm{II}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{42}{5} \end{pmatrix}}_{=A_4 = U}$$

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{L}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{L}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \mathcal{L}_3(\mathcal{L}_2(\mathcal{L}_1 A_1))$$
$$U = (\mathcal{L}_3 \cdot \mathcal{L}_2 \cdot \mathcal{L}_1) \cdot A_1$$
$$\Updownarrow$$
$$A = \underbrace{(\mathcal{L}_3 \cdot \mathcal{L}_2 \cdot \mathcal{L}_1)^{-1}}_{\mathcal{L}} \cdot U$$

$$(L_3 \cdot L_2 \cdot L_1)^{-1} = L_3^{-1} \cdot L_2^{-1} \cdot L_3^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix}}_{L}$$

В итоге LU - разложение для матрицы A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & \frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{42}{5} \end{pmatrix}$$

№3

Пусть $A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Рассмотрим угловые миноры м-цы A:

$|4| = 4$

$\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 32 = -4$

$\begin{vmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 28 - 24 + 100 - 105 + 20 - 32 = -13$

Каждый из них не равен нулю $\Rightarrow$
$\exists$ LU -разложение для матрицы A.

Приведём м-цу A к ступенчатому виду:

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}\begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II} + 1\cdot \mathrm{I}} \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ 0 & -1 & -6 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III} + \frac{3}{4}\cdot \mathrm{I}}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & -\frac{11}{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{III} + (-1)\cdot \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{13}{4} \end{pmatrix} = U$$

Воспользуемся алгоритмом построения L, суть которого – заменить нули в соотв. клетках единичной м-цы на коэфф. элементарных преобразований с противоположными знаками:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

В итоге LU – разложение для м-цы A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{13}{4} \end{pmatrix}$$

№4

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Предположим, что оно существует, тогда

$A = LU$, пусть $L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix}$; $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$

(*)

Тогда (*) можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} l_{11} \cdot u_{11} + l_{12} \cdot u_{21} = 0 \\ l_{11} \cdot u_{12} + l_{12} \cdot u_{22} = 1 \\ l_{21} \cdot u_{11} + l_{22} \cdot u_{21} = 1 \\ l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot u_{22} = 1 \end{cases} \quad (**)$$

Т.к L - нижнетреугольная матрица, то $l_{12} = 0$. U - верхнетреугольная $\Rightarrow u_{21} = 0$

Тогда (**) примет вид:

$$\begin{cases} l_{11} \cdot u_{11} = 0 \quad (1) \\ l_{11} \cdot u_{12} = 1 \quad (2) \\ l_{21} \cdot u_{11} = 1 \quad (3) \\ l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot u_{22} = 1 \end{cases}$$

Из (1) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} l_{11} = 0 \\ u_{11} = 0 \end{array} \right.$, но если $l_{11} = 0$, то

тогда (2) не имеет решений, если $u_{11} = 0$, то тогда (3) не имеет решений. Получили,

что (1) не может иметь решений ⇒
⇒ вся система не имеет решений -
- противоречие ⇒ LU - разложения
действительно не существует