Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности

1. Привести примеры последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ и

   $a)\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0, \quad b)\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 1, \quad c)\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = +\infty, \quad d)\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$ не существует.

2. Сформулировать в позитивной форме утверждения: «Последовательность не стремится к ∞» и «Последовательность не стремится к $+\infty$».

3. Верно ли утверждение?

   (a) Если последовательность не является бесконечно большой, то она ограничена.

   (b) Если последовательность не является ограниченной, то она бесконечно большая.

4. Доказать или опровергнуть следующие утверждения:

   (a) Произведение бесконечно малой и отделимой от нуля - бесконечно малая.

   (b) Произведение бесконечно большой и отделимой от нуля - бесконечно большая.

5. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ и $y_n \leqslant c$ для всех $n \in \mathbb{N}$.
   Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = -\infty$.

6. Найти пределы последовательностей.

   (a) $a_n = q^n, \quad q \in \mathbb{R}$; (d) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$, + обощить результат;

   (b) $a_n = \sqrt[n]{a}, \quad a > 0$; (e) $a_n = \frac{2^n}{n!}$, + обобщить результат;

   (c) $a_n = \sqrt[n]{n}$;

Домашнее задание

1. Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ была бесконечно малой, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{|x_n|\}$ была бесконечно малой. Докажите.

2. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$. Следует ли отсюда, что

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$;

   (b) хотя бы одна из последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ стремится к нулю.

3. Пусть
$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty, \qquad \exists C\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ (y_n \leqslant C)\,.$$
   Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = -\infty$.

4. Верно ли, что для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, достаточно, чтобы было верно
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists a\ \exists N\ \forall n \geqslant N:\ |x_n - a| < \varepsilon.$$
   А наоборот?

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, где a это $+\infty$ или $-\infty$. Про y_n :

$$\exists C \; \exists n_0 \; \forall n > n_0 \left(y_n \geqslant C > 0\right).$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a$.

2. Для всех сочетаний $A \circ B \circ C$, где A, C - бесконечно малая, бесконечно большая, ограниченная, отделимая от нуля, B - арифметическое действие, сформулируйте и докажите или опровергните соответствующее свойство данных величин.