Матан.

Дз по семинарам 7-8

№ 1

а) Решим, используя теорему о зажатой посл-ти:

Очевидно, что начиная с достаточно большого n:

$\cdot \left(\frac{3n+2}{n+1}\right)^{2n} \leq (3n+2)^{2n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

$\cdot \left(\frac{3n+2}{n+1}\right)^{2n} \geqslant \left(\frac{3n}{2n}\right)^{2n} = (1{,}5)^{2n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

Тогда имеем: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n+2}{n+1}\right)^{2n} = +\infty$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{4}{n}\right)^{3n-2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1-\frac{4}{n}\right)^{3n} \cdot \left(1-\frac{4}{n}\right)^{-2}\right]$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(\left(1-\frac{4}{n}\right)^{n}\right)^{3} \cdot \left(1-\frac{4}{n}\right)^{-2}\right] =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(1-\frac{4}{n}\right)^{n}\right)^{3} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{4}{n}\right)^{-2} =$

$= e^{-12} \cdot 1 = e^{-12}$

д) Решим, используя теорему о зажатой посл-ти:

Очевидно, что: $\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n} \geqslant \frac{1}{(3n-1)^{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

При достаточно больших n:

$1{,}5n > n+2$

$$\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^n \leq \left(\frac{1,5n}{2n}\right)^n = (0,75)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\Rightarrow$ (по теореме о зажатой посл-ти) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^n = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)^{4n+1}$

При достаточно больших n: $1+n \leq 100^n$

$(1+n)^4 \leq 100^{n^4}$

$$\frac{n^2+3}{n^2+2} = \left(1+\frac{1}{n^2+2}\right)^{4n+1} \leq \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{4n+1} \leq$$

$$\leq 100^{\frac{4n+1}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$$\left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)^{4n+1} \geq \left(\frac{n^2+2}{n^2+2}\right)^{4n+1} = 1^{4n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Но тогда, по теореме о зажатой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)^{4n+1} = 1$$

№2

·Доказательство по Коши

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x}{x+1} = -1$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) \quad \forall x \in D_f \quad 0 < |x-1| < \delta:$

$$\left| \frac{x^2-3x}{x+1} + 1 \right| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\left| \frac{x^2-2x+1}{x+1} \right| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{(x-1)^2}{x+1} < \varepsilon$$

$$\Uparrow \ \delta \leq 1$$

$$(x-1)^2 < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$|x-1| < \sqrt{\varepsilon}$$

Но тогда можем взять $\delta = \min\{1; \sqrt{\varepsilon}\}$

ч.т.д..

·Доказательство по Гейне:

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-3x}{x+1} = -1 \iff$ верна импликация:

$$\left(\forall \{x_n\}: \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 1 \wedge x_n \neq 1\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n^2-3x_n}{x_n+1}\right) = -1$$

Пусть посылка импликации верна.

Тогда т.д.:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n^2-3x_n}{x_n+1}\right) = -1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n^2-3x_n}{x_n+1}\right) \underset{\text{а.л.}}{\iff} \frac{1-3}{1+1} = \frac{-2}{2} = -1$$

ч.т.д..

№3

Пусть дана функция:

$$f(x) = \begin{cases} x(x-1)(x-2); & x \in \mathbb{Q} \\ 0; & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Докажем, что эта функция непрерывна только в точках 0, 1, 2 и не непрерывна на всех остальных:

Рассмотрим для $x=1$ (для $x=0$ и $x=2$ доказательство будет полностью аналогичным):

$f(1) = 0$

Докажем, что: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) \quad \forall x \quad 0 < |x-1| < \delta$:

$|f(x)| < \varepsilon \quad (*)$

• Пусть $x \in \mathbb{Q}$: $(*) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad |x(x-1)(x-2)| < \varepsilon$

$\Uparrow \quad \delta \le 1$

$|x(x-1)| < \varepsilon$

$\Uparrow \quad \delta \le 1$

$10 \cdot |x-1| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$|x-1| < \frac{\varepsilon}{10}$

$\Downarrow$

$\delta = \min\{1; \frac{\varepsilon}{10}\}$

• Пусть $x \in \mathbb{R}$: $(*) \Leftrightarrow 0 < \varepsilon$ — верно всегда. Ч.т.д.

Докажем отсутствие непрерывности функции в точке $a \notin \{0, 1, 2\}$

• Пусть $a \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(a) = a(a-1)(a-2) \neq \neq 0$. Предположим, что при $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq 0 \ (*)$

Рассмотрим любую окрестность точки a, в ней бесконечно много иррациональных чисел (аксиома непрерывности, $b \in w$).

Построим посл-ть $\{x_n\}$ такую, что $\forall n \ x_n \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Тогда посл-ть $\{f(x_n)\}$ — это просто посл-ть нулей $\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 0$.

Но тогда $(*)$ неверно (нарушается определение по Гейне.

• Пусть $a \in \mathbb{R} \Rightarrow f(a) = 0$. Предположим, что при $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \ (**)$

Рассмотрим любую окр-ть точки a, в ней бесконечно много рациональных чисел. Построим посл-ть $\{x_n\}$ такую, что $\forall n \ x_n \in \mathbb{Q}$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Тогда посл-ть $\{f(x_n)\}$ — посл-ть из ненулевых чисел (там может быть не более трёх нулевых членов, но на пределе они не влияют)

$\Downarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq 0$, но тогда $(**)$

неверно (нарушено определение по Гейне)

№5

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^3; & x<0 \\ (x-1)^3; & 0\le x\le 2 \\ 4-x; & x>2 \end{cases}$$

Заметим, что каждая из функций $1-x^3$, $(x-1)^3$ и $4-x$ непрерывна на всей своей области определения. Но тогда точки разрыва возможны лишь в $x=0$ и $x=2$.

• $x=0$:

Заметим, что $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 1$,

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = -1$. Значит это неустранимый разрыв 1-го рода (скачок)

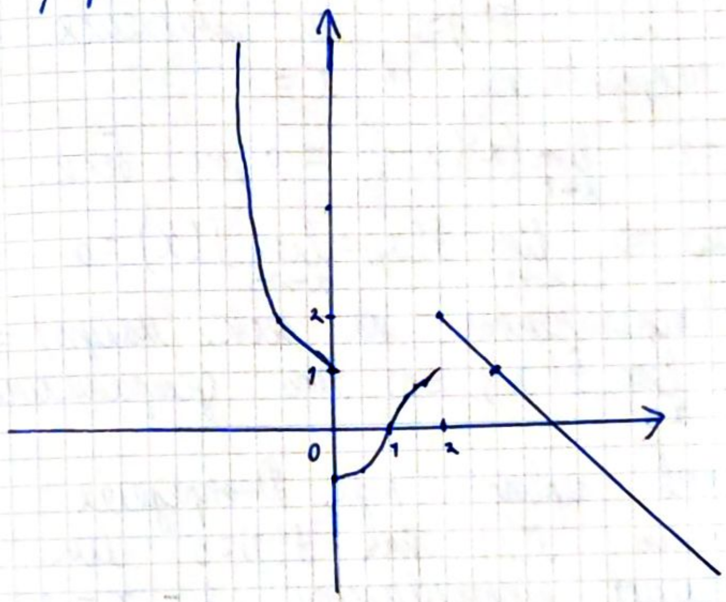
• $x=2$

Заметим, что $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 2$

Значит это неустранимый разрыв 1-го рода (скачок)

Множество точек, в которых $f(x)$ непрерывна: $x\in(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty)$

Эскиз графика:



№6

$$y=\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{x^3-x^2}=f(x)$$

$\cos\frac{\pi x}{2}$ и x^3-x^2 – непрерывные функции на всей своей области определения. $\Rightarrow$ их частное непрерывно $\Leftrightarrow$ $(x^3-x^2)\neq 0$; $x^2(x-1)\neq 0 \Rightarrow$ в точках $x=0$ и $x=1$ непрерывность нарушается

• $x=0$, заметим, что $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 0$

(т.к. мы ограниченную функцию делим на бесконечно малую) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Это устранимый разрыв первого рода. Доопределяя функцию $f(x)$ как $f(0)=0$ мы добиваемся непрерывности в $x=0$

• $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1}(x^2(x-1)) = 0$, т.е. беск. малая $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} f(x) = 0$

(ограниченная на беск. малую) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$. Это устранимый разрыв первого рода. Доопределяя функцию $f(x)$ как $f(1)=0$ мы добиваемся непрерывности в $x=1$.

№3

Пусть $X_1 = (0;1]$, $X_2 = [1;2)$

Тогда $X_1 \cup X_2 = (0;2)$

Пусть $f(x) = \begin{cases} 0; & x \in (0;1] \\ 1; & x \in [1;2) \end{cases}$

По отдельности на X_1 и X_2 $f(x)$ принимает тождественные значений (0 и 1 соотв.)

Рассмотрим её поведение на $(0;2)$:
Рассмотрим пределы в точке $x=1$:

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = 1$.

Односторонние пределы существуют, но не равны друг другу $\Rightarrow f(x)$ имеет неустранимый разрыв 1-ого рода в точке $x=1$ (скачок).