Д/з по матану N 11

N 1 $\lim (3\sin^2 x^2 - 5x^2) \overset{\text{а.л.}}{=} 0 - 0 = 0$

непрерывности функций

Возьмём $g(x) = -5x^2$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3\sin^2 x^2}{-5x^2} + 1 \ (*)$$

Рассмотрим отдельно:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin^2 x^2}{-5x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{\sin x^2}{x}\right)^2 \ (**)$$

$\sin x^2 \sim x^2$:

$$\lim_{x\to 0} -\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{x^2}{x}\right)^2 \overset{\text{а.л.}}{=} 0$$

Но тогда $(*) = 1 \Rightarrow f(x) \sim g(x)$

№2

Рассмотрим при $x \to 0$.

Пусть $g(x) = x^3$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{tg} x}{x^5+x^2+1} \cdot \frac{1}{x^3} \overset{\text{экв.}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^5+x^2+1} \cdot \frac{1}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5+x^2+1} = 1$$

$$\Rightarrow f(x) \sim g(x)$$

№3

1) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)}{\sqrt{3} - 2\cos x}$$

Пусть $\frac{\pi}{6} - x = t$; При $x \to \frac{\pi}{6}$ $t \to 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + t\right)}{\sqrt{3} - 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6} - t\right)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)}{\sqrt{3} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t\right)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\sin t}{\sqrt{3}(1-\cos t) - \sin t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{\sin t - \sqrt{3}(1-\cos t)} \quad (*)$$

Перевернём дробь, от которой ищем предел:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t - \sqrt{3}(1-\cos t)}{\sin t} = 1 - \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{3}(1-\cos t)}{\sin t}$$

Используем эквивалентности:

$$1 - \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sqrt{3}\, t^2}{2}}{t} = 1 - \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{3}\, t}{2} = 1$$

Но тогда и исходный предел (*) тоже равен 1.

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{7x}-e^{2x}}{\operatorname{tg} x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{7x}-e^{2x}}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{7x}-1}{x} - \dfrac{e^{2x}-1}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\cancel{\dfrac{e^{7x}-1}{7x}}}_{1} \cdot \dfrac{7x}{x} - \underbrace{\cancel{\dfrac{e^{2x}-1}{2x}}}_{1} \cdot \dfrac{2x}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7x}{x} - \dfrac{2x}{x} = 5$

№4

• $y = \cos x$

$\cos' x = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cos(x_0+t) - \cos x_0}{t} =$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{-2\sin\frac{2x_0+t}{2} \cdot \sin\frac{t}{2}}{t} =$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{-2\cdot\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{2x_0+t}{2}}{t} =$

$= \lim\limits_{t\to 0} -\sin\dfrac{2x_0+t}{2} = -\sin x_0$

$\cos' x = -\sin x$

• $y = tg\, x$

$$tg'x = \lim_{t \to 0} \frac{tg(x_0+t) - tg\, x_0}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\sin t}{\cos(x_0+t)\cos x_0}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t \cdot \cos(x_0+t) \cdot \cos x_0}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\cos(x_0+t)\cos x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0}$$

$$tg'x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

• $y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

$$\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{\ln' x \cdot \ln a - \ln' a \cdot \ln x}{\ln^2 a} =$$

$$= \frac{\ln a}{x \cdot \ln^2 a} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\log_a' x = \frac{1}{x \ln a}$$

• $y = a^x = e^{x \cdot \ln a}$

$$(e^{x \cdot \ln a})' = e^{x \cdot \ln a} \cdot (x \cdot \ln a)' =$$

$$= a^x \cdot (\ln a \cdot x' + \ln' a \cdot x) = a^x \cdot \ln a$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

N5

а) $f(x) = \sqrt[5]{1+(2x-1)^3}$

$u = 2x-1 \to v = 1+u^3 \to \mathcal{U} = \sqrt[5]{v}$

Но погр: $f' = \mathcal{U}' \cdot v' \cdot u'$ (*)

1) $\mathcal{U}' = \left(v^{\frac{1}{5}}\right)' = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{v^{\frac{4}{5}}} =$

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{(1+(2x-1)^3)^4}}$

2) $v' = 3u^2 = 3(2x-1)^2$

3) $u' = 2$

(1), (2) и (3) $\to$ (*):

$f' = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{(1+(2x-1)^3)^4}} \cdot 3(2x-1)^2 \cdot 2 =$

$= \frac{6(2x-1)^2}{5\sqrt[5]{(1+(2x-1)^3)^4}}$

б) $f(x) = \ln \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

$f'(x) = \frac{1}{\ln\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \ln' \frac{x}{2} = \frac{1}{\ln\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\frac{x}{2}} \cdot$

$\cdot \left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{2}{x\ln\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{x \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)}$

c) Будем использовать формулу, выведенную в прошлом номере:

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$f'(x) = 2^{\sin x^2} \cdot \ln 2 \cdot \sin' x^2 =$

$= 2^{\sin x^2} \cdot \ln 2 \cdot \cos x^2 \cdot (x^2)' =$

$= 2^{\sin x^2} \cdot \ln 2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x =$

$= 2^{\sin x^2 + 1} \cdot \cos x^2 \cdot x \cdot \ln 2$

d) $f(x) = (\sin x)^{\cos x} = e^{\cos x \cdot \ln \sin x}$

$f'(x) = (e^{\cos x \cdot \ln \sin x})' = e^{\cos x \cdot \ln \sin x} \cdot$

$\cdot (\cos x \cdot \ln \sin x)' = \sin x^{\cos x} \cdot (\cos' x \cdot \ln \sin x +$

$+ \ln' \sin x \cdot \cos x) = \sin x^{\cos x} \cdot (-\sin x \cdot \ln \sin x +$

$+ \cos x (\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x)) =$

$= \sin x^{\cos x} \cdot (\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x)$

N3

c) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0}(-1+\cos x+1)^{-\frac{1}{x^2}} =$

$= \lim\limits_{x\to0}\left(1-(1-\cos x)\right)^{-\frac{1}{x_2}} = \lim\limits_{x\to0}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{1}{x^2}}$ (*)

$t = -\frac{1}{x^2}$; $x\to0$: $t\to-\infty$

$-\frac{1}{t} = x^2$

(*): $\lim\limits_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{2t}\right)^t = \lim\limits_{t\to-\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{2t}\right)^{2t}} = \sqrt{e}$

[redacted]

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[5]{1+2x}}{\sqrt{1+5x}-\sqrt[4]{1+2x}} =$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left((1+3x)^{\frac13}-1\right)-\left((1+2x)^{\frac15}-1\right)}{\left((1+5x)^{\frac12}-1\right)-\left((1+2x)^{\frac14}-1\right)} =$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+3x)^{\frac13}-1}{\left((1+5x)^{\frac12}-1\right)-\left((1+2x)^{\frac14}-1\right)} -$

$-\dfrac{(1+2x)^{\frac15}-1}{\left((1+5x)^{\frac12}-1\right)-\left((1+2x)^{\frac14}-1\right)}$ (*)

Рассмотрим перевёрнутые дроби:

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left((1+5x)^{\frac12}-1\right)-\left((1+2x)^{\frac14}-1\right)}{(1+3x)^{\frac13}-1} =$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+5x)^{\frac12}-1}{(1+3x)^{\frac13}-1} - \dfrac{(1+2x)^{\frac14}-1}{(1+3x)^{\frac13}-1} =$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{2}x}{x}-\frac{\frac{x}{2}}{x}=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left((1+5x)^{\frac{1}{2}}-1\right)-\left((1+2x)^{\frac{1}{4}}-1\right)}{(1+2x)^{\frac{1}{5}}-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+5x)^{\frac{1}{2}}-1}{(1+2x)^{\frac{1}{5}}-1}-\frac{(1+2x)^{\frac{1}{4}}-1}{(1+2x)^{\frac{1}{5}}-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{2}x}{\frac{2}{5}x}-\frac{\frac{x}{2}}{\frac{2}{5}x}=\lim_{x\to 0}\frac{25x}{4x}-\frac{5x}{4x}=$$

$$=\frac{20}{4}=5$$

Подставим полученные в $(*)$:

$$(*)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{5-2}{10}=\frac{3}{10}$$