Задачи для подготовки к контрольной работе по курсу «Алгебра»,
1-й модуль 2025/2026-го учебного года.

1. Выполните действия:

$$(3B)^2 - 2(BA^{-1} - E)^T, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Решите систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ 2x_1 - x_3 = 14 \\ x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}.$$

3. Подобрать $j$ и $i$ так, чтобы произведение $a_{32}a_{16}a_{2i}a_{53}a_{45}a_{6j}a_{77}$ входило в определитель 7 порядка со знаком минус.

4. Найти все такие $\sigma \in S_8$, что $\sigma^2 = (123)(456)$.

5. Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Решить неравенство

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \leq -50.$$

7. Вычислите определитель матрицы порядка n:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

8. Найти ранг матрицы при всевозможных значениях параметра $\lambda$, для каждого из значений ранга укажите соответствующий базисный минор:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \\ -4 & -5 & \lambda & -2 \\ -7 & -8 & 1 & \lambda - 7 \end{pmatrix}.$$

9. Найдите все пары $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, для которых матрица $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 & 1 \\ 2y & -1 & 3 & (y+1) \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ имеет ранг 2.

10. Проверить, существует ли для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$LU$-разложение, и если да, построить его.

Под $LU$-разложением подразумевается представление матрицы в виде произведения $A = LU$, где $L$ — нижнетреугольная матрица с единицами на главной диагонали, а $U$ — верхнетреугольная матрица.

11. Построить скелетное разложение (разложение полного ранга) матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Скелетным разложением называется представление $(m \times n)$-матрицы $A$ ранга $r$ в виде произведения $A = BC$ $(m \times r)$-матрицы $B$ ранга $r$ и $(r \times n)$-матрицы $C$ ранга $r$.

**По задачнику под редакцией Проскурякова:**

№184 Найти все подстановки чисел 1, 2, 3, 4, перестановочные с с подстановкой

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

№230 Как изменится определитель, если к каждому столбцу, начиная со второго, прибавить предыдущий столбец и в то же время к первому прибавить последний.

№231 Как изменится определитель порядка $n$, если его матрицу повернуть на 90° вокруг «центра»?

№283 Вычислить определитель приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.$$

№299 Вычислить определитель методом рекуррентных соотношений:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}.$$

№302 Вычислить определитель методом рекуррентных соотношений:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

№348 Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}.$$

№365 Рядом Фибоначчи называется числовой ряд, который начинается числами 1, 2 и в котором каждое следующее число равно сумме двух предыдущих, то есть ряд 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Доказать, что $n$-й член ряда Фибоначчи равен определителю $n$-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

№853 Найти обратную матрицу для следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

№177 Найти $A^{150}$, где

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

№178 Найти подстановку $X$ из равенства $AXB = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

№586 Найти многочлен 3-й степени $f(x)$, для которого

$$f(-1) = 0,\ f(1) = 4,\ f(2) = 3,\ f(3) = 16.$$

№829 Доказать, что матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению

$$x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0.$$