

Контрольная работа № 1. Вариант 2.

Все ответы нужно обосновать!

Каждый шаг в ваших вычислениях должен быть легко осуществим без калькулятора. Мы считаем легко осуществимыми сложение и вычитание трехзначных чисел, а также умножение двузначных.

Не следует обосновывать ответ в числовой задаче тем, что вы его угадали, — напротив, нужно показать, как получить ответ с помощью утверждений и алгоритмов курса. Используя какое-нибудь утверждение из лекции или семинаров, явно сослаться на него, например, напишите: «по малой теореме Ферма, ...»).

1. Можно ли из A, B, C с помощью связок составить такое высказывание X , что оба высказывания $(A \wedge X) \rightarrow (A \rightarrow B)$ и $(B \vee C) \rightarrow (X \vee A)$ являются тавтологиями?

2. Запишите с помощью кванторов, переменных, логических связок, равенства и символа унарного предиката P следующее высказывание:

Есть ровно два различных объекта, удовлетворяющих свойству P .

3. Докажите, что $0^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ при всех натуральных n .

4. Докажите, что число $5 \cdot 39^n - n^{19} - 56n + 71$ делится на 19 при всех натуральных n .

5. Найдите остаток от деления числа $701^{2019!} + 801^{2020!} \cdot 901^{2021!}$ на 103.

6. Найдите остаток от деления числа $66^{85^{93}}$ на 47.

7. Решите уравнение $-115x + 185y = 2020$ в целых числах.

8. Пусть дана «уравнивающая» функция f на парах натуральных чисел, такая что $f(x, y) = \frac{n}{2}$, где $n = x + y$, если эта сумма четна, и $n = x + y - 1$ в противном случае. Для всякой конечной последовательности натуральных чисел (a_0, \dots, a_N) за один шаг разрешается любые a_i и a_j заменить на $f(a_i, a_j)$. Докажите, что при любом натуральном N последовательность $(1, 2, 4, \dots, 2^N)$ можно превратить в последовательность $(1, 1, \dots, 1)$ из $N + 1$ единиц за конечное число шагов.