Алгебра. ПИ. Семинар 9.
ФСР. Однородные и неоднородные системы.

Осень 2025. Медведь Никита Юрьевич

1 Задачи для семинара

Обсуждение 1. Кратко обсуждаем понятие ФСР на примере $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Упражнение 2 (П741б)**.** Выяснить, образуют ли строки матрицы $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ФСР для системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 0 \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases}$$

Возможный план действий в лоб:

1. проверить, являются ли эти строки решениями, подставив их в каждое уравнение (можно представить в виде матричного умножения);
2. проверить, являются ли строки линейно независимыми;
3. проверить, существуют ли решения, не выражающиеся через эти.

Проблема такого плана во-первых в том, что не все действия оптимальны (мы сейчас научимся немного упрощать работу), а во-вторых в том, что непонятно, как проверять третье условие.

Усовершенствованный план действий:

1. привести матрицу B к ступенчатому виду B';
2. понять по этому ступенчатому виду, являлись ли исходные строки линейно независимыми;
3. привести систему к ступенчатому виду, можно к улучшенному ступенчатому, обозначим матрицу полученной системы через S';
4. по результатам предыдущего пункта найти количество свободных переменных (количество переменных минус ранг S'), сравнить с количеством строк B;
5. наконец, проверить, являлись ли исходные строки решениями, перемножив матрицы $S' \cdot (B')^T$.

Обсуждение 3 (Неоднородные системы)**.** Кратко напоминаю про общее решение. Обсуждаем все эти теоремы. Вид решения в векторном виде. Как искать? Да так же, как всегда искали.

Задача 4 (П758)**.** При каких условиях в любом решении совместной системы линейных уравнений неизвестное x_k имеет одно и то же значение?

Комментарий: в этой задаче ничего прямо важного нет, но она помогает лучше разобраться в принципах.

План объяснения: представим, что система уже в улучшенном ступенчатом. Какой вид имеет соответствующее уравнение? Что можно сказать про строку и столбец? А что будет с рангом если вычеркнуть строку? Но как это поможет — у нас в исходной системе никакая строка не соответствует напрямую тому, что получится, поэтому нельзя взять, и что-то вычеркнуть... А что можно сказать про вычеркивание столбца? Сравните с теоремой Кронекера–Капелли!

2 Домашнее задание

Задача 1 (П742)**.** Определить, какие из наборов строк матрицы

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & -13 \\ 4 & -2 & -7 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Задача 2 (По мотивам П712)**.** Решить неоднородную систему уравнений с параметром, представить ответ в векторном виде. Выписать частное решение системы (возможно, при разных значениях параметра – разное) и ФСР соответствующей однородной системы (опять же, зависящий от параметра, причём возможно по-разному при разных значениях параметра).

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda \end{cases}$$

2.1 Дополнительные задачи (не оцениваются)

Пора! Вы знаете всю теорию, необходимую для двух следующих *сложных* задач. Если кто-то возьмётся решать, но не будет получаться, я умею давать подсказки на разных этапах решения.

Задача 3 (Теплопроводность)**.** На границе сетчатого прямоугольника 100×100 в каждом узле записали число. В каждом внутреннем узле сетки хотят записать число так, чтобы значение в узле равнялось среднему арифметическому значений в четырёх соседних по рёбрам узлах. Докажите, что это всегда можно сделать вне зависимости от значений на границе.

Задача 4 (Коровы)**.** В стаде 101 корова. Известно, что если убрать любую из коров, то оставшихся можно разделить на две группы по 50 коров с одинаковой суммарной массой в каждой из групп. Докажите, что веса всех коров одинаковые, если:
а) дано, что веса всех коров — натуральные числа (в килограммах, например);
б) дано, что веса всех коров — рациональные числа (положительные, если хотите — это не влияет на задачу);
в) дано, что веса всех коров — произвольные вещественные числа (положительные, если хотите).

Подсказка: пункт а) надо решить «вручную», за счёт сообразительности; пункт б) легко выводится из пункта а); пункт в) можно вывести из пункта б) при помощи знаний, полученных в нашем курсе. Никакого матанализа и пределов не нужно (да и не помогут...)