Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

А.Н.Субочев

Москва
2024-25 учебный год

Математический анализ

1 курс бакалавриата
Направление 38.03.05 Бизнес-информатика
Высшая Школа Бизнеса
2024/2025 учебный год

Лекция 1

Лектор:

Су́бочев Андрей Николаевич

доцент Департамента математики ФЭН НИУ ВШЭ,
старший научный сотрудник
Международного центра анализа и выбора решений (DeCAn Lab),
кандидат физико-математических наук.

hse.ru/staff/subochev

asubochev@hse.ru

Математический анализ

Что анализируем?

Непрерывные числовые функции.

Что такое непрерывные числовые функции?

Непрерывные зависимости между количественно измеримыми переменными величинами.

Как анализируем?

С помощью дифференцирования и интегрирования.

	x	v
Физика	положение в пространстве	скорость перемещения в пространстве
Экономика	запас ресурса	поток ресурса

Дифференцирование: Зная x как функцию времени t, находим v:

$$v(t) = \frac{dx}{dt}.$$

Интегрирование: Зная v как функцию времени t и начальное положение $x(t_0) = x_0$, находим x

$$x(T) = \int_{t_0}^{T} v(t)\, dt + x_0.$$

Пример: *инерционный компас*

Физически измеряем ускорение a как функцию времени $a = a(\tau)$.

Зная начальную скорость $v(t_0) = v_0$, находим скорость $v(t) = \int_{t_0}^{t} a\,(\tau) d\tau + v_0$.

Зная начальное положение $x(t_0) = x_0$, находим $x(T) = \int_{t_0}^{T} \left(\int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau \right) dt + v_0(T - t_0) + x_0$.

Любое действительное число $a \in \mathbb{R}$ представляется *бесконечной* *десятичной дробью* вида

$$\pm a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$$

где $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Теорема: Рациональные числа представляются периодическими дробями, а иррациональные – непериодическими.

Определение (*правило сравнения вещественных чисел*)**:**

1. a и b – неотрицательные. Найдём наименьшее $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$: $a_n \neq b_n$. Если $a_n > b_n$, то $a > b$. Если такого n не существует, то $a = b$.

2. a – положительное, b – отрицательное. Тогда $a > b$.

3. a и b – неположительные.

Если $|a| > |b|$, то $a < b$. Если $|a| = |b|$, то $a = b$.

Определение: Промежутками называются следующие множества:
1) отрезок (сегмент числовой прямой) $[a, b] = \{c \in \mathbb{R} | a \leq c \leq b\}$;
2) интервал $(a, b) = \{c \in \mathbb{R} | a < c < b\}$;
3) полуинтервал $[a, b) = \{c \in \mathbb{R} | a \leq c < b\}$ или $(a, b] = \{c \in \mathbb{R} | a < c \leq b\}$
4) открытый луч $(a, +\infty) = \{c \in \mathbb{R} | a < c\}$ или $(-\infty, b) = \{c \in \mathbb{R} | c < b\}$;
5) замкнутый луч $[a, +\infty) = \{c \in \mathbb{R} | a \leq c\}$ или $(-\infty, b] = \{c \in \mathbb{R} | c \leq b\}$;
6) числовая прямая $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Числа a и b называются *границами* соответствующих промежутков.

Интерпретация: Промежуток является областью непрерывного изменения числовой (то есть, количественно измеримой) переменной величины.

Определение: Интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ называется *ε-окрестностью точки a* и обозначается $\Omega_\varepsilon(a)$

$$\forall x \in D, P(x)$$

$\forall$ - Any, All квантор **всеобщности**

Для любого элемента x множества D верно утверждение $P(x)$.

$$\exists x \in D: P(x)$$

$\exists$- Exist квантор существования

В множестве D есть элемент x такой, что верно утверждение $P(x)$.

$$\overline{\forall x \in D, P(x)} = \exists x \in D: \overline{P(x)}$$

Рассмотрим числовое множество D.

Определение: a – *максимум* множества $D, a = \max(D)$,

если $a \in D \ \land \ \forall x \in D, a \geq x$.

Определение: b – *минимум* множества $D, b = \min(D)$,

если $b \in D \ \land \ \forall x \in D, b \leq x$.

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$.

Определение: a – *верхняя грань* множества D,

если $\forall x \in D, a \geq x$.

Определение: b – *нижняя* грань множества D,

если $\forall x \in D, b \leq x$.

Определение: множество D *ограничено сверху* (*снизу*),

если у него есть верхняя (нижняя) грань.

Множество D *ограничено*,

если у него есть и верхняя, и нижняя грани.

$$A = \{a \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D, a \geq x\}$$

Определение: s – *точная верхняя грань* множества D, если $s = \min(A)$. s – *супремум* множества D.

$$B = \{b \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D, b \leq x\}$$

Определение: i – *точная нижняя грань* множества D, если $i = \max(B)$. i – *инфимум* множества D.

Теорема: У любого ограниченного сверху (снизу) числового множества $D \subseteq \mathbb{R}$ есть супремум (инфимум), причём (естественно) только один.

Рассмотрим $x, y \in \mathbb{R}$.

Определение (*сумма x и y***):**

Рассмотрим

$$X = \{a - \text{конечная дробь } \mid a \leq x\}$$
$$Y = \{b - \text{конечная дробь } \mid b \leq y\}$$

Составим $Z = \{z = a + b \mid a \in X \wedge b \in Y\}$

$$x + y = \sup(Z),$$

Теорема: $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}: z = x + y$

Пусть переменные x и y принимают значения в множествах X и Y.
Множество $X \times Y$ состоит из всех упорядоченных пар $(a, b), a \in X, b \in Y$.
Рассмотрим подмножество F множества $X \times Y$, $F \subseteq X \times Y$.
Определение: Если F удовлетворяет условиям:

1) $\forall a \in X, \exists b \in Y: (a, b) \in F$;
2) $\forall (a_1, b_1) \in F, \forall (a_2, b_2) \in F, a_1 = a_2 \Rightarrow b_1 = b_2$;

говорят, что на X определена функция y от x.

Функция F может обозначаться как $y(x)$, $y = f(x)$, $f: X \to Y$.

x называется *независимой переменной* или *аргументом* функции,
y – *зависимой* (от x) *переменной* или, собственно, *функцией*.
X называется *областью определения* (domain) функции $y(x)$
и обозначается $D\big(y(x)\big)$ или D_y.
Множество $\{b \in Y |\ \exists a \in X: (a, b) \in F\}$, называется *множеством значений* (range) функции $y(x)$ и обозначается $R\big(y(x)\big)$ или R_y.

Определение: Если множество значений функции является числовым, то функция называется *числовой*.

Определение: Числовая функция ограничена *сверху* (*снизу*), если её множество значений ограничено *сверху* (*снизу*).

Определение (*ограниченность на части области определения*)**:** Числовая функция ограничена *сверху* (*снизу*) на множестве $M \subseteq X$, если множество $\{b \in Y | \exists a \in M: (a, b) \in F\}$ ограничено *сверху* (*снизу*).

Утверждение:

У ограниченной на M сверху $y(x)$ есть супремум $s = sup_{x \in M}(y(x))$.

У ограниченной на M снизу $y(x)$ есть инфимум $i = inf_{x \in M}(y(x))$.

Определение: Если областью определения функции является множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, то такая функция называется

последовательностью.

Последовательность $y(n), n \in \mathbb{N}$, обозначается $\{y_n\}$ или просто y_n.

Числовые последовательности, то есть функции $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,

могут обладать тремя важнейшими свойствами:

ограниченностью, монотонностью и сходимостью.

Определение: y_n ограничена *сверху* (*снизу*),

если $\exists c \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}, c \geq (\leq) y_n$.

y_n - ограниченная, если она ограничена сверху и снизу.

Определение: x_n *неубывающая*, если

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \Rightarrow x_m \geq x_n.$$

Определение: x_n *невозрастающая*, если

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \Rightarrow x_m \leq x_n.$$

Определение: x_n *монотонная*, если она или неубывающая, или невозрастающая.

Определение: x_n - *сходящаяся*, если

$$\exists a \in \mathbb{R}: \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N, |x_n - a| < \varepsilon.$$

a – *предел* последовательности x_n

$a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или $x_n \to a$

Теорема: предел у x_n может быть только один.

Теорема: Если x_n сходящаяся, то она ограниченная.

Обратное неверно!

Теорема: Если x_n неубывающая и ограничена сверху,

то x_n сходящаяся, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = sup_{n\in\mathbb{N}}(\{x_n\})$.

Если x_n невозрастающая и ограничена снизу,

то x_n сходящаяся, и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = inf_{n\in\mathbb{N}}(\{x_n\})$.

Следствие: Если x_n монотонна и ограничена, то x_n сходится.

Теорема (*о предельном переходе в неравенстве*)**:**
Пусть $x_n \to a, y_n \to b$ и $\exists n \in \mathbb{N}: \forall m \geq n, x_m \leq y_m$,
тогда $a \leq b$.

Замечание: Даже если неравенство членов последовательности будет строгим, $x_m < y_m$,
неравенство пределов останется нестрогим $a \leq b$.

Теорема (*«о двух полицейских»*)**:**
Пусть $x_n \to a, y_n \to a$ и $\exists n \in \mathbb{N}: \forall m \geq n, x_m \leq z_m \leq y_m$,
тогда $z_n \to a$.

Утверждение:

Исключение из последовательности любого конечного числа членов не меняет свойств последовательности. Сходящаяся, или монотонная, или ограниченная последовательность остаётся, соответственно, сходящейся, или монотонной, или ограниченной.

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

А.Н.Субочев

Москва
2024-25 учебный год

Спасибо за внимание!