Семинар 3

Определение 1. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Матрица $B = A^T \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R})$ называется *транспонированной к* A, если

$$b_{ij} = a_{ji} \quad \text{для всех} \quad 1 \le i \le n \quad \text{и} \quad 1 \le j \le m.$$

Другими словами:

1) для всех $1 \le i \le n$ в i-й строке B записан i-й столбец A;

2) для всех $1 \le j \le m$ в j-м столбце B записана j-я строка A.

Пример 1.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$;

2) если $\mathbf{0}_{m\times n}$ – нулевая матрица размера $m \times n$, то $\mathbf{0}_{m\times n}^T = \mathbf{0}_{n\times m}$ – нулевая матрица размера $n \times m$;

3) $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^T = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ и, в частности, $E_n^T = E_n$;

4) $E_{p,q}^T = E_{q,p}$;

5) матрица A верхнетреугольна (соответственно нижнетреугольна) тогда и только тогда, когда матрица A^T нижнетреугольна (соответственно верхнетреугольна).

Свойства транспонирования:

(1) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

(2) $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$;

(3) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$;

(4) $(A^T)^T = A$;

(5) $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}\, A$.

Использование транспонирования для доказательства утверждений. Идея: применить операцию транспонирования к равенству вида $A \cdot B = C$ и получить равенство вида $B^T \cdot A^T = C^T$.

1) Рассмотрим матрицу $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Вычислим произведение $A \cdot E_{p,q}$, используя формулу

$$E_{q,p} \cdot A = \begin{pmatrix} & 0 & \\ a_{p1} & \ldots & a_{pn} \\ & 0 & \end{pmatrix} \leftarrow q.$$

Применяя эту формулу к матрице $B = A^T$, получаем равенство

$$E_{q,p} \cdot B = \begin{pmatrix} & 0 & \\ b_{p1} & \ldots & b_{pn} \\ & 0 & \end{pmatrix} \leftarrow q.$$

Применим транспонирование к этому равенству и получим

$$A \cdot E_{p,q} = B^T \cdot E_{q,p}^T = (E_{q,p} \cdot B)^T = \begin{pmatrix} & 0 & \\ b_{p1} & \dots & b_{pn} \\ & 0 & \end{pmatrix}^{T} \begin{array}{l} \\ \leftarrow q \\ \\ \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & q & \\ & \downarrow & \end{array} \\ \begin{pmatrix} & b_{p1} & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & b_{pn} & \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & q & \\ & \downarrow & \end{array} \\ \begin{pmatrix} & a_{1p} & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & a_{np} & \end{pmatrix} \end{array}.$$

2) Докажем, что произведение нижнетреугольных матриц A и B – это нижнетреугольная матрица. Обозначим $A \cdot B = C$. Тогда $B^T \cdot A^T = C^T$. Так как B^T и A^T – это верхнетреугольные матрицы, то матрица C^T верхнетреугольна в силу задачи с прошлого семинара. Отсюда следует, что матрица C нижнетреугольна.

Обозначение. Отныне будем использовать следующие упрощения в обозначениях.

- Вместо жирного нуля будем использовать обычный нуль для обозначения нулевой матрицы:

$$\mathbf{0} = 0.$$

- Будем опускать точку в умножении матрицы на скаляр и в произведении матриц:

$$\lambda \cdot A = \lambda A, \quad A \cdot B = AB.$$

Определение 2. *Строкой* (соответственно *столбцом*) *длины* n будем называть матрицу размера $1 \times n$ (соответственно $n \times 1$).

Определение 3. Рассмотрим матрицу $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$. При $1 \le i \le m$ и $1 \le j \le n$ матрицы

$$A_{(i)} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

будем называть *i-й строкой* и *j-м столбцом матрицы* A соответственно. Матрицы можно записывать по строкам или по столбцам:

$$A = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(1)} & \dots & A^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Элементарные преобразования строк. Зафиксируем матрицу $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, индексы $1 \le i, j \le m$ и скаляр $\lambda \in \mathbb{R}$. Для удобства будем считать, что $i < j$. Имеются три типа *элементарных преобразований строк матрицы* A.

I. Матрица A' получается из матрицы A, если в A поменять местами i-ю и j-ю строки, то есть

$$A' = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i-1)} \\ A_{(j)} \\ A_{(i+1)} \\ \vdots \\ A_{(j-1)} \\ A_{(i)} \\ A_{(j+1)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{pmatrix}.$$

Обозначение:

$$A \overset{Э_1(i;j)}{\rightsquigarrow} A'.$$

II. Матрица A' получается из матрицы A, если в A умножить i-ю строку на $\lambda \neq 0$, то есть

$$A' = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i-1)} \\ \lambda A_{(i)} \\ A_{(i+1)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{pmatrix}.$$

Обозначение:

$$A \overset{Э_2(i;\lambda)}{\rightsquigarrow} A'.$$

III. Матрица A' получается из матрицы A, если в A при $i \neq j$ к i-й строке прибавить j-ю строку, умноженную на λ, то есть

$$A' = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A_{(i-1)} \\ A_{(i)} + \lambda A_{(j)} \\ A_{(i+1)} \\ \vdots \\ A_{(m)} \end{pmatrix}.$$

Обозначение:

$$A \overset{Э_3(i;j,\lambda)}{\rightsquigarrow} A'.$$

Задача 1. Доказать, что используя элементарные преобразования строк только третьего типа, можно получить преобразование, которое меняет две строки местами, умножая при этом одну из них на -1.

Элементарные преобразования столбцов. Зафиксируем матрицу $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, индексы $1 \leq i, j \leq n$ и скаляр $\lambda \in \mathbb{R}$. Для удобства будем считать, что $i < j$. *Имеются три типа элементарных преобразований столбцов матрицы A.*

I. Матрица A' получается из матрицы A, если в A поменять местами i-й и j-й столбцы, то есть

$$A' = \begin{pmatrix} A^{(1)} & \dots & A^{(i-1)} & A^{(j)} & A^{(i+1)} & \dots & A^{(j-1)} & A^{(i)} & A^{(j+1)} & \dots & A^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Обозначение:

$$A \overset{Э_1^T(i;j)}{\rightsquigarrow} A'.$$

II. Матрица A' получается из матрицы A, если в A умножить i-й столбец на $\lambda \neq 0$, то есть

$$A' = \begin{pmatrix} A^{(1)} & \dots & A^{(i-1)} & \lambda A^{(i)} & A^{(i+1)} & \dots & A^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Обозначение:

$$A \overset{Э_2^T(i;\lambda)}{\rightsquigarrow} A'.$$

III. Матрица A' получается из матрицы A, если в A при $i \neq j$ к i-му столбцу прибавить j-й столбец, умноженный на λ, то есть

$$A' = \begin{pmatrix} A^{(1)} & \dots & A^{(i-1)} & A^{(i)} + \lambda A^{(j)} & A^{(i+1)} & \dots A^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Обозначение:

$$A \overset{Э_3^T(i;j,\lambda)}{\rightsquigarrow} A'.$$

Обозначение. Если матрица A' получается из матрицы A последовательным применением некоторых элементарных преобразований строк (соответственно столбцов), то будем писать $A \overset{Э}{\rightsquigarrow} A'$ (соответственно $A \overset{Э^T}{\rightsquigarrow} A'$).

Определение 4. Зафиксируем число $n \in \mathbb{N}$, индексы $1 \le i, j \le n$ и скаляр $\lambda \in \mathbb{R}$. Имеются три типа *элементарных матриц порядка n.*

I. $E_n \overset{Э_1(i;j)}{\rightsquigarrow} U_1(i;j)$, то есть

$$U_1(i;j) = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & \overset{i}{\downarrow} & & \overset{j}{\downarrow} & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \dots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \dots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}.$$

II. $E_n \overset{Э_2(i;\lambda)}{\rightsquigarrow} U_2(i;\lambda)$, то есть

$$U_2(i;\lambda) = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & \overset{i}{\downarrow} & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array}.$$

III. $E_n \overset{Э_3(i;j,\lambda)}{\rightsquigarrow} U_3(i;j,\lambda)$, то есть

$$U_3(i;j,\lambda) = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & \overset{i}{\downarrow} & & \overset{j}{\downarrow} & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \dots & \lambda & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}.$$

Определение 5. Рассмотрим ненулевую строку

$$v = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{1\times n}(\mathbb{R}).$$

Ведущим элементом (*лидером*) *строки* v называется первый ненулевой элемент в этой строке, то есть такой $a_j \neq 0$, что $a_k = 0$ для всех $k < j$.

Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ – произвольная матрица. Тогда для некоторого $0 \le s \le m$ определены две последовательности.

1) Последовательность $1 \le i_1 < \ldots < i_s \le m$ индексов всех ненулевых строк матрицы A.

2) Последовательность $1 \le j_1, \ldots, j_s \le n$, где j_k – это индекс столбца с лидером строки $A_{(i_k)}$.

Определение 6. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Говорят, что матрица A имеет *ступенчатый вид*, если выполнены следующие условия:

1) нулевые строки A расположены после ненулевых;

2) индексы столбцов A с лидерами строк образуют строго возрастающую последовательность.

Замечание 1. Элементарные преобразования строк не изменяют нулевые столбцы: если $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A^{(j)} = 0$ и $A \overset{\text{Э}}{\rightsquigarrow} A'$, то $A'^{(j)} = 0$.

Алгоритм. [Приведение к ступенчатому виду, `(СВ)`]

`Вход.` Матрица $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

`Выход.` Такая матрица $A' \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ в ступенчатом виде, что $A \overset{\text{Э}}{\rightsquigarrow} A'$.

`Инструкции.`

[0] Положим $(i, j) := (1, 1)$.

[1] Если $i > m$ или $j > n$, то алгоритм завершается.

Если $a_{kj} = 0$ для всех $k \ge i$, то полагаем $j := j + 1$ и переходим к шагу [1]. Иначе найдём $l \ge i$ такое, что $a_{lj} \neq 0$, и переходим к шагу [2].

[2] Применяя $\text{Э}_1(i; l)$ к A, добьёмся того, что $a_{ij} \neq 0$.

Применяя $\text{Э}_3\left(i; k, -\frac{a_{kj}}{a_{ij}}\right)$ при $k > i$ к A, добьемся того, что $a_{kj} = 0$ для всех $k > i$.

Полагаем $(i, j) := (i + 1, j + 1)$ и переходим к шагу [1].