Семинар 2

Определение 1. Пусть $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ такие, что $1 \le p \le m$ и $1 \le q \le n$. *Матричной единицей* называется матрица $E_{pq} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, у которой в ячейке (p, q) стоит единица, а в остальных местах – нули.

Предупреждение. Не путать **матричные единицы** E_{pq} с **единичными матрицами** E_n, E.

Определение 2. *Символом Кро́некера* называется число δ_{ab}, где

$$\delta_{ab} = \begin{cases} 1, & \text{если } a = b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Пример 1.

1) $\delta_{01} = \delta_{02} = \delta_{26} = \delta_{43} = 0$ и $\delta_{00} = \delta_{22} = \delta_{99} = 1$.

2) В ячейке (i, j) у матрицы E_{pq} стоит число $\delta_{ip} \cdot \delta_{jq}$.

Задача 1 (К17.13)**.** Доказать, что $E_{pq} \cdot E_{rs} = \delta_{qr} E_{ps}$. Другими словами,

$$E_{pq} \cdot E_{rs} = \begin{cases} E_{ps}, & \text{если } q = r \\ \mathbf{0}, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Определение 3. *Матрица* $A = (a_{ij})$ называется *диагональной*, если $a_{ij} = 0$ для всех $i \ne j$.

Обозначение. Квадратные диагональные матрицы обозначаются как

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots\dots & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Определение 4. Квадратная *матрица* A называется *скалярной*, если

$$A = \mathrm{diag}(\lambda, \dots, \lambda) = \lambda E$$

для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Свойства диагональных матриц. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ – произвольная матрица. Тогда:

(1) $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \dots & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \dots & \lambda_2 a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_m a_{m1} & \lambda_m a_{m2} & \dots & \lambda_m a_{mn} \end{pmatrix}$;

(2) $A \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \dots & \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \dots & \lambda_n a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 a_{m1} & \lambda_2 a_{m2} & \dots & \lambda_n a_{mn} \end{pmatrix}$;

(3) $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1, \ \dots, \ \lambda_n\mu_n)$;

(4) $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ \ldots, \ \lambda_n^k)$.

Определение 5. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ – произвольная матрица. *Следом* $\operatorname{tr} A$ *матрицы* A называется сумма её диагональных элементов:

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} a_{ii}.$$

Пример 2.

1) $\operatorname{tr} \mathbf{0} = 0$;

2) $\operatorname{tr} E_n = n$;

3) $\operatorname{tr} E_{pq} = \delta_{pq}$;

4) $\operatorname{tr} \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

Определение 6. Говорят, что квадратные *матрицы* A и B одинакового размера *коммутируют*, если $A \cdot B = B \cdot A$.

Пример 3.

1) Любые две квадратные диагональные матрицы одинакового размера коммутируют.

2) Скалярная матрица порядка n коммутирует с любой матрицей порядка n.

Задача 2 (П822)**.** Найти все матрицы $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, коммутирующие с матрицей $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Доказать, что матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ коммутирует с любой диагональной матрицей $X \in$ $\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда A диагональна.

Определение 7. *Матрица* $A = (a_{ij})$ называется *верхнетреугольной* (соответственно *нижнетреугольной*), если $a_{ij} = 0$ для всех $i > j$ (соответственно $i < j$).

Задача 4. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ и $B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times p}(\mathbb{R})$ – верхнетреугольные матрицы. Обозначим $C = (c_{ij}) = A \cdot B$. Тогда:

1) $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$ при $1 \le i \le \min(m, n, p)$ и $c_{ii} = 0$ при $\min(m, n, p) < i \le \min(m, p)$;

2) матрица C верхнетреугольна.