Подсчет пределов функций. Производная.

1. Доказать, что если $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A > 0$ и $g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} B$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, то
$$f(x)^{g(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A^B.$$
Вывести отсюда аналогичный результат для последовательностей и легко решить задачи из квиза.

2. Вычислить пределы, используя замечательные пределы, теорему о пределе сложной функции и результат предыдущей задачи
$$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^x, \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\left(1+3x^2\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

3. Вычислить производные $y = \sin x$, $\quad y = e^x$, $\quad y = \ln x$.

4. Вычислить производные
$$a)\ f(x) = \frac{\cos 3}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x+3), \qquad b)\ f(x) = \sqrt[13]{9 + 7\sqrt[5]{2x}}$$
$$c)\ f(x) = \log_2^3(2x+3)^2,$$
$$e)\ f(x) = \sin\cos^2 x \cdot \cos\sin^2 x, \qquad f)\ f(x) = x^{e^x}.$$

5. При каких значениях параметра α функция $f(x) = x^\alpha \sin\frac{1}{x}$, доопределенная в нуле нулем а) непрерывна, б) дифференцируема.

Домашнее задание

1. Показать, что $f(x) = 3\sin^2 x^2 - 5x^2$ бесконечно малая функция при $x \to 0$, и найти функцию $g(x)$ вида Ax^n такую, что $f(x) \sim g(x)$ при $x \to 0$.

2. Найти функции $g(x)$ вида Ax^n такую, что $f(x) \sim g(x)$ при $x \to 0$ и при $x \to +\infty$ для
$$f(x) = \frac{x^2 \operatorname{tg} x}{x^5 + x^2 + 1}.$$

3. Вычислить пределы, используя замечательные пределы и теорему о пределе сложной функции
$$a)\ \lim_{x\to\pi/6}\frac{\cos(2\pi/3 - x)}{\sqrt{3} - 2\cos x}, \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{7x} - e^{2x}}{\operatorname{tg} x};$$
$$c)\ \lim_{x\to 0}(\cos x)^{-1/x^2}, \qquad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt[5]{1+2x}}{\sqrt{1+5x} - \sqrt[4]{1+2x}}.$$

4. Вычислить производные функций $y = \cos x$, $\quad y = \operatorname{tg} x$, $\quad y = \log_a x$, $\quad y = a^x$.

5. Вычислить производные
$$a)\ f(x) = \sqrt[5]{1 + (2x-1)^3}, \qquad b)\ f(x) = \ln\ln\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$c)\ f(x) = 2^{\sin x^2}, \qquad d)\ f(x) = (\sin x)^{\cos x}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить пределы, используя замечательные пределы и теорему о пределе сложной функции

$$a)\ \lim_{x\to\infty} x^2\left(\cos\frac{1}{x}-\cos\frac{3}{x}\right), \qquad b)\ \lim_{x\to\pi/4}\frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}\cos x-1};$$

$$c)\ \lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{\pi}{\cos x}-2x\operatorname{tg} x\right), \qquad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin 3x}-\sqrt{1-4\sin 5x}}{\sin 6x}.$$

$$e)\ \lim_{x\to 0}\frac{\pi-4\operatorname{arctg} 1/(1+x)}{x}, \qquad f)\ \lim_{x\to\infty} x\log_2\frac{10+x}{5+x};$$

$$g)\ \lim_{x\to 1/4}\frac{1-\operatorname{ctg}\pi x}{\ln\operatorname{tg}\pi x}, \qquad h)\ \lim_{x\to\infty} x^2\left(4^{1/x}-4^{1/(x+1)}\right);$$

$$i)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}, \qquad j)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\sqrt{1+\sin x^2}-1};$$

$$k)\ \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}-x\right)^{1/x}, \qquad l)\ \lim_{x\to 0}\left(\ln(e+x)\right)^{\operatorname{ctg} x}.$$

2. Вычислить производные

$$a)\ f(x)=\sqrt{2x^2+\sqrt{x^2+1}}, \qquad b)\ f(x)=\frac{1-\cos\left(8x-3\pi\right)}{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{ctg} 2x}$$

$$c)\ f(x)=\cos\frac{1}{\log_2 x}, \qquad d)\ f(x)=\operatorname{arcctg} 2^x,$$

$$e)\ f(x)=\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right), \qquad f)\ f(x)=\ln\left(\sqrt{2}\cos x+\sqrt{\cos 2x}\right).$$

$$g)\ f(x)=x^{x^x}, \qquad h)\ f(x)=\left(\arcsin\sin^2 x\right)^{\operatorname{arctg} x}.$$