Алгебра. ПИ. Семинар 8.
Линейная зависимость и независимость систем векторов. Свойства.
Связь с понятием ранга.

Осень 2025. Медведь Никита Юрьевич

1 Задачи для семинара

Обсуждение 1 (Определения л.з. и л.н.з.)**.** Напоминаю определения линейно зависимой системы векторов и линейно независимой. Подчёркиваю, что это не свойство самих векторов по отдельности, а именно их набора. («Когда говорят “вот эти числа чётные”, имеют в виду, что каждое из них чётное. Но когда говорят “вот эти вектора линейно независимы”, имеют в виду, что “вот этот набор векторов линейно независим”.»)

Упражнение 2. Система из векторов-строк $(1, 2)$ и $(3, 4)$ — л.з. или л.н.з.?

Упражнение 3. Система из векторов-столбцов $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ — л.з. или л.н.з.?

Упражнение 4. Система из векторов-строк $(1, 2)$ и на этом всё — л.з. или л.н.з.?

Упражнение 5. Система из векторов-строк $(1, 2)$, $(3, 4)$ и $(5, 6)$ — л.з. или л.н.з.?

Обсуждение 6. Алгоритм проверки системы строк или столбцов на линейную зависимость/независимость:

Шаг 1: записать координаты из строк/столбцов по столбцам (!) в одну матрицу.

Шаг 2: действиями над строками найти ступенчатый вид этой матрицы (не обязательно доводить до улучшенного ступенчатого вида).

Шаг 3: если есть свободная переменная, то исходная система векторов линейно зависима; если нету — линейно независима.

Упражнение 7. Найдите все такие значения λ, при которых вектор b линейно выражается через a_1, a_2, a_3.

а) $a_1 = (2, 3, 5), a_2 = (3, 7, 8), a_3 = (1, -6, 1), b = (7, -2, \lambda)$.

б) $a_1 = (3, 2, 5), a_2 = (2, 4, 7), a_3 = (5, 6, \lambda), b = (1, 3, 5)$.

Упражнение 8 (Закрепление успехов)**.** Верно ли рассуждение: дана матрица $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{pmatrix}$, приведём её к ступенчатому виду, получим $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & -3 & -6\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

а) Видим, что набор из всех трёх строк линейно зависим. Значит, набор из всех трёх строк был линейно зависим исходно.
Указание: да, такое рассуждение верно, хотя в следующих пунктах мы увидим, что это не лучшая стратегия для выяснения подобных вопросов про строки.

б) Видим, что набор из последних двух строк линейно зависим. Значит, набор из последних двух строк был линейно зависим исходно.
Указание: нет, такое рассуждение неверно. Даже для данной матрицы видно, что исходные последние две строки были линейно независимы.

в) Видим, что набор из последней одной строки линейно зависим. Значит, набор из последней одной строки был линейно зависим исходно.
Указание: то же, что и в б).

г) Видим, что набор из первых двух строк линейно независим. Значит, набор из первых двух строк был линейно независим исходно.
Указание: нет, хотя набор из первых двух строк и был действительно линейно независим, это никак не следует из того, что первые две строки ступенчатого вида линейно независимы; просто так совпало. Легко привести другой пример, где будет не так.

д) Видим, что набор из первых двух столбцов линейно независим. Значит, набор из первых двух столбцов был линейно независим исходно.
Указание: да, оказывается, что так можно. Обсуждаем доказательство.

Таким образом, мы получили полезное утверждение:

Утверждение: при действиях над строками линейная зависимость/независимость поднаборов столбцов не меняется.

Обсуждение 9 (П644 модиф.)**.** Пусть дана матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & -3 & 4 & 11 & 12 \end{pmatrix}$. Являются ли её строки л.з. или л.н.з.? (Последний раз напоминаю, что это следует читать как «является ли набор её строк…») А столбцы?

А те же вопросы для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 2 & -3 & 4 & 11 & 26 \end{pmatrix}$? А можем ли мы найти *максимальный линейно независимый набор строк* этой матрицы? А столбцов? А как это связано с рангом этой матрицы?

Понятие базы системы строк (или столбцов), упоминание слова «базис».

Алгоритм нахождения базы системы столбцов: привести к ступенчатому виду действиями над строками; взять исходные столбцы с теми же номерами, как столбцы в ступенчатом виде, проходящие через лидеров строк.

Алгоритм нахождения базы системы строк: к сожалению, как-то извлечь эту информацию из того же самого ступенчатого вида не выходит. Можно транспонировать исходную матрицу, а к результату применить предыдущий алгоритм.

Обсуждение 10 (П649 и П650)**.** Упомянули утверждения, что если добавить к линейно зависимой системе что-то ещё, то получившаяся автоматически линейно зависима, и что, наоборот, подсистема линейно независимой автоматически линейно независима.

Задача 11. Из координат каждого вектора данной системы векторов в $\mathbb{R}^n$ выберем координаты стоящие на определённых (одних и тех же для всех векторов) местах. Сохраним их порядок. Полученную систему векторов будем называть укороченной для первой системы, а начальную систему векторов будем называть удлинённой для второй. Докажите, что

а) укороченная система любой линейно зависимой системы векторов линейно зависима.

б) удлинённая система любой линейно независимой системы векторов линейно независима.

2 Домашнее задание

Упражнение 1 (П641)**.** Выяснить, является ли следующая система векторов линейно зависимой или линейно независимой:

$$a_1 = (2, -3, 1), a_2 = (3, -1, 5), a_3 = (1, -4, 3).$$

Упражнение 2 (П674)**.** Найти все базы системы векторов: $a_1 = (1, 2, 3, 4), a_2 = (2, 3, 4, 5), a_3 = (3, 4, 5, 6), a_4 = (4, 5, 6, 7)$.

Задача 3 (фольклор)**.** Существует ли набор из 25 линейно независимых столбцов высоты 12?

Упражнение 4. Найдите все такие значения λ, при которых вектор b линейно выражается через a_1, a_2, a_3.

а) $a_1 = (4, 4, 3), a_2 = (7, 2, 1), a_3 = (4, 1, 6), b = (5, 9, \lambda)$.

б) $a_1 = (3, 2, 6), a_2 = (5, 1, 3), a_3 = (7, 3, 9), b = (\lambda, 2, 5)$.

Обсуждение 5. Устное задание (не проверяется, но крайне рекомендуется сделать): прочесть в Проскурякове задачи 658, 645, 652, 653, 654, 661, 660, 658. Не решать, а просто прочесть. Повторение номера не случайно. Возможно, стоит делать после следующей лекции. Перед экзаменом рекомендую повторить процедуру.

2.1 Дополнительные задачи (не оцениваются)

Отсутствуют.