

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ВОПРОСАХ И ЗАДАЧАХ

Издание четвертое, исправленное  
Под редакцией В. Ф. БУТУЗОВА

*Рекомендовано Министерством образования  
Российской Федерации в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений*



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ  
2001

УДК 517  
ББК 22.16  
М34

**Математический анализ в вопросах и задачах:** Учеб. пособие/  
В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин; Под ред.  
В.Ф. Бутузова. — 4-е изд., испрav. — М.: Физико-математическая лите-  
ратура, 2001. — 480 с. — ISBN 5-9221-0127-7.

Пособие охватывает все разделы курса математического анализа функций одной и нескольких переменных. По каждой теме кратко излагаются основные теоретические сведения и предлагаются контрольные вопросы; приводятся решения стандартных и нестандартных задач; даются задачи и упражнения для самостоятельной работы с ответами и указаниями.

Третье издание вышло в 2000 г.

Для студентов высших учебных заведений.

**Р е ц е н з е н т:** доктор физико-математических наук, профессор  
*А. И. Прилепко* (Московский инженерно-физический институт)

ISBN 5-9221-0127-7

© ФИЗМАТЛИТ, 2000, 2001

© В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая,  
Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин,  
2000, 2001

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

Учебное пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения семинаров по математическому анализу на физическом факультете МГУ. Оно предназначено как для студентов, так и для преподавателей, особенно молодых, начинающих вести семинары.

Пособие охватывает основные разделы дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких переменных. Оно не является сборником задач в обычном смысле слова. Как следует из его структуры, назначение пособия — помочь активному и неформальному усвоению студентами изучаемого предмета. Материал каждого параграфа разбит, как правило, на четыре пункта.

В пункте “Основные понятия и теоремы” приводятся без доказательства основные теоретические сведения (определения, теоремы, формулы), необходимые для решения задач. Формулировки определений и теорем соответствуют в большинстве случаев учебнику В.А. Ильина и Э.Г. Позняка “Основы математического анализа”. Иногда после формулировки определения или теоремы даются поясняющие примеры или комментарии, чтобы облегчить студентам восприятие новых понятий. Там, где это возможно, авторы старались указать на физическую интерпретацию и физические приложения математических понятий. В наибольшей мере это относится к главе XV.

В пункте “Контрольные вопросы и задания” содержатся вопросы по теории и простые задачи, решение которых не связано с большими вычислениями, но которые хорошо иллюстрируют то или иное теоретическое положение. Назначение пункта — помочь студентам в самостоятельной работе над теоретическим материалом, дать возможность самостоятельно проконтролировать усвоение основных понятий. Предполагается, конечно, что основная работа над теоретическим материалом с проработкой доказательств теорем ведется по учебнику или конспектам лекций. Однако для решения задач часто достаточно понимания сути теоремы (или формулы). Многие контрольные вопросы направлены на раскрытие этой сути. Из этого пункта преподаватель может черпать вопросы для проверки готовности студентов к семинару по той или иной теме.

В пункте “Примеры решения задач” разобраны типичные примеры, демонстрирующие применение на практике результатов теории. При этом большое внимание уделяется обсуждению не только “технических приемов”, но и различным “тонким местам”, например усло-

виям применимости той или иной теоремы или формулы. Количество разобранных примеров варьируется в зависимости от объема и важности темы. Иногда здесь дается ответ на вопрос, поставленный в предыдущем пункте.

Назначение последнего пункта — “Задачи и упражнения для самостоятельной работы” — определено его названием. Авторы ограничились определенным минимумом упражнений, достаточным для усвоения основных приемов решения задач по каждой теме. При подборе упражнений были использованы различные источники, в том числе широко известные задачники, например “Сборник задач и упражнений по математическому анализу” Б.П. Демидовича. Поэтому многие задачи данного пособия не претендуют на оригинальность, хотя среди них есть целый ряд новых. В конце книги даны ответы и указания к задачам и упражнениям.

При подготовке данной книги были устраниены замеченные в предыдущем издании опечатки и неточности.

Начало и конец решений задач отмечаются соответственно знаками  $\Delta$  и  $\blacktriangle$ , а вместо слова “Указание” употребляется знак  $\star$ .

Авторы надеются, что пособие поможет студентам в овладении методами математического анализа при их самостоятельной работе над предметом. Они также выражают надежду, что пособие будет полезным для преподавателей в работе со студентами, и с благодарностью воспримут все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

*Авторы*

# ГЛАВА I

## ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

### § 1. Сравнение вещественных чисел

#### Основные понятия

**1. Представление вещественных чисел в виде бесконечных десятичных дробей.** Любое вещественное число  $a$  представимо в виде бесконечной десятичной дроби:

$$a = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots,$$

где из двух знаков  $\pm$  берется какой-то один: плюс — для положительных чисел, минус — для отрицательных чисел (знак плюс обычно не пишется).

Рациональные числа представимы в виде периодических, а иррациональные числа — в виде непериодических бесконечных десятичных дробей. Некоторые рациональные числа представимы в виде конечной дроби или, что то же самое, в виде бесконечной дроби с нулем в периоде. Такие числа допускают второе представление — в виде бесконечной десятичной дроби с цифрой 9 в периоде. Например,

$$1/2 = 0,500\dots0\dots = 0,5(0), \quad 1/2 = 0,4999\dots9\dots = 0,4(9).$$

При сравнении вещественных чисел будем пользоваться для таких рациональных чисел лишь первой формой записи (с нулем в периоде).

**2. Правило сравнения вещественных чисел.** Пусть  $a = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$  и  $b = \pm b_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$  — произвольные вещественные числа, представленные в виде бесконечных десятичных дробей.

Числа  $a$  и  $b$  называются *равными* ( $a = b$ ), если они имеют одинаковые знаки и справедливы равенства  $a_k = b_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). В противном случае считается, что  $a \neq b$ .

При сравнении неравных чисел  $a$  и  $b$  рассмотрим три случая:

1)  $a$  и  $b$  — неотрицательные числа. Так как  $a \neq b$ , то существует натуральное  $n$  (или  $n = 0$ ) такое, что  $a_k = b_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n - 1$ ) и  $a_n \neq b_n$ . Будем считать, что  $a > b$ , если  $a_n > b_n$ , и  $a < b$ , если  $a_n < b_n$ .

2)  $a$  — неотрицательное,  $b$  — отрицательное число. Будем считать, что  $a > b$ ;

3)  $a$  и  $b$  — отрицательные числа. Будем считать, что  $a > b$ , если  $|a| < |b|$ , и  $a < b$ , если  $|a| > |b|$ .

**3. Некоторые числовые множества.** Вещественные числа можно изображать точками на координатной прямой \*). Поэтому множество всех вещественных чисел называют *числовой прямой*, а сами числа — *точками*, и при рассмотрении числовых множеств часто пользуются их геометрической интерпретацией.

Будем использовать следующие обозначения и терминологию:

**$N$  — множество всех натуральных чисел;**

**$Z$  — множество всех целых чисел;**

**$R = (-\infty, +\infty)$  — множество всех вещественных чисел (числовая прямая);**

**$[a, b]$  — сегмент (отрезок), т. е. множество всех вещественных чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенствам  $a \leq x \leq b$ ;**

**$(a, b)$  — интервал, т. е. множество всех вещественных чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенствам  $a < x < b$ ;**

**$[a, b], (a, b)$  — полуинтервал (полусегмент), т. е. множество всех вещественных чисел  $x$ , удовлетворяющих соответственно неравенствам  $a \leq x < b, a < x \leq b$ ;**

**$[a, +\infty), (a, +\infty), (-\infty, a], (-\infty, a)$  — полуправая, т. е. множество всех вещественных чисел  $x$ , удовлетворяющих соответственно неравенствам  $a \leq x < +\infty, a < x < +\infty, -\infty < x \leq a, -\infty < x < a$ ;**

сегмент, интервал, полуинтервал, полуправую и числовую прямую будем называть также *промежутком*;

**окрестность** точки  $c$  — любой интервал, содержащий точку  $c$ ;

**$\varepsilon$ -окрестность** точки  $c$  — интервал  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon > 0$ .

### Контрольные вопросы и задания

1. В чем состоит различие бесконечных десятичных дробей, представляющих рациональные и иррациональные числа?
2. В каком случае два числа называют равными?
3. Верны ли равенства  $0,41(9) = 0,42(0) = 0,42$ ?
4. Сформулируйте правило сравнения двух неравных чисел.

### Примеры решения задач

1. Доказать, что для любых вещественных чисел  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ) найдется рациональное число  $c$  такое, что  $a < c < b$ .

Δ Пусть для определенности числа  $a$  и  $b$  положительны, т. е.

$$a = a_0, a_1 a_2 \dots a_k \dots > 0, \quad b = b_0, b_1 b_2 \dots b_k \dots > 0.$$

Если какое-нибудь из них является рациональным числом, выражаясь дробью с периодом 9, то запишем его в виде дроби с периодом 0. По условию  $a < b$ . Это означает, что существует неотрицательное целое число  $n$  такое, что  $a_k = b_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) и  $a_n < b_n$ .

\* ) Напомним, что *координатной прямой* называется прямая, на которой выбраны точка, являющаяся началом отсчета, масштабный отрезок и положительное направление.

Поскольку цифра 9 не является периодом числа  $a$ , найдется натуральное число  $i > n$  такое, что  $a_i \neq 9$ .

Рассмотрим рациональное число  $c = c_0, c_1c_2\dots c_i$ , где  $c_k = a_k$  ( $k = 0, 1, \dots, i-1$ ),  $c_i = a_i + 1$ . Число  $c$  больше  $a$ , так как  $c_k = a_k$  ( $k = 0, 1, \dots, i-1$ ),  $c_i = a_i + 1 > a_i$ , и меньше  $b$ , так как  $c_k = a_k = b_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ),  $c_n = a_n < b_n$ . Итак, существует рациональное число  $c$  такое, что  $a < c < b$ . ▲

2. Доказать, что для любых вещественных чисел  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ) найдется иррациональное число  $\alpha$  такое, что  $a < \alpha < b$ .

Δ При предположениях примера 1 рассмотрим число

$$\alpha = c_0, c_1c_2\dots c_i 0\overbrace{10010001\dots}^n \underbrace{000\dots 01}_{n+1} 01\dots$$

Эта дробь, очевидно, непериодическая (объясните, почему), т. е.  $\alpha$  — иррациональное число. Это число больше  $a$ , так как  $c_k = a_k$  ( $k = 0, 1, \dots, i-1$ ),  $c_i = a_i + 1 > a_i$ , и меньше  $b$ , так как  $c_k = b_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ),  $c_n = a_n < b_n$ . Итак, существует иррациональное число  $\alpha$  такое, что  $a < \alpha < b$ . ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Докажите, что  $\sqrt{8}$  есть иррациональное число.
2. Представьте дробь 31,2 (88) в виде обыкновенной.
3. Докажите, что любую периодическую десятичную дробь, не имеющую цифры 9 в периоде, можно получить как результат деления двух натуральных чисел.
4. Докажите, что любую периодическую десятичную дробь, имеющую в периоде цифру 9, нельзя получить как результат деления двух натуральных чисел.
5. Докажите, что для любых двух вещественных чисел  $a$  и  $b$  ( $a \neq b$ ) существует бесконечно много как рациональных, так и иррациональных чисел, заключенных между ними.
6. Докажите транзитивность знаков  $=, >$ , т. е.: а) если  $a = b$  и  $b = c$ , то  $a = c$ ; б) если  $a > b$  и  $b > c$ , то  $a > c$ .
7. Докажите, что для любого числа  $a$  справедливы неравенства  $-|a| \leq a \leq |a|$ .
8. Докажите, что если  $x \leq y$ , то  $-x \geq -y$ .

## § 2. Точные грани числового множества.

### Применение символов математической логики

#### Основные понятия и теоремы

##### 1. Об использовании некоторых логических символов.

Пусть  $X$  — непустое множество вещественных чисел.

Определение. Множество  $X$  называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если существует число  $M$  ( $m$ ) такое, что для любого числа

$x$  из множества  $X$  выполняется неравенство  $x \leq M$  ( $x \geq m$ ). Число  $M$  ( $m$ ) называется *верхней (нижней) гранью* множества  $X$ .

В этом определении, а также в формулировках многих других определений и теорем используются слова “существует” и “для любого”. Для краткости записи вместо этих слов будем использовать логические символы  $\exists$  и  $\forall$ .

Символ  $\exists$  называется *квантором существования*, а символ  $\forall$  — *квантором всеобщности*. Тот факт, что число  $x$  принадлежит (не принадлежит) множеству  $X$ , будем обозначать так:  $x \in X$  ( $x \notin X$ ).

С помощью указанных символов определение ограниченного сверху множества можно записать так: множество  $X$  называется *ограниченным сверху*, если  $\exists M \in R$  такое, что  $\forall x \in X$  выполняется неравенство  $x \leq M$ , или (еще более кратко)

$$\exists M \in R \quad \forall x \in X: \quad x \leq M. \quad (1)$$

Использование кванторов не только сокращает запись, но и позволяет весьма простым способом строить отрицания предложений (определений, утверждений), записанных с помощью кванторов. Продемонстрируем этот способ на примере отрицания определения ограниченного сверху множества. Иначе говоря, сформулируем определение неограниченного сверху множества. Неограниченность сверху множества  $X$  означает: не существует числа  $M$  такого, что для любого  $x \in X$  выполняется неравенство  $x \leq M$ . Это значит, что для любого числа  $M$  существует  $x \in X$ , для которого  $x > M$ . Поэтому определение неограниченного сверху множества с помощью кванторов можно записать так: множество  $X$  называется *неограниченным сверху*, если

$$\forall M \in R \quad \exists x \in X: \quad x > M. \quad (2)$$

Сравнивая (1) с (2), мы видим, что для построения отрицания предложения (1) нужно квантор  $\exists$  заменить на  $\forall$ , а квантор  $\forall$  на  $\exists$  и стоящее после двоеточия неравенство заменить ему противоположным.

Это правило можно использовать и для построения отрицаний любых других утверждений, содержащих кванторы  $\exists$  и  $\forall$ .

## 2. Точные грани числовых множеств.

**Определение.** Число  $\bar{x}$  называется *точной верхней гранью* ограниченного сверху множества  $X$ , если: 1°)  $\forall x \in X: x \leq \bar{x}$ ; 2°)  $\forall \bar{x} < \bar{x} \exists x \in X: x > \bar{x}$ .

Условие 1°) означает, что  $\bar{x}$  — одна из верхних граней множества  $X$ , а условие 2°), что  $\bar{x}$  — наименьшая из верхних граней множества  $X$ , т. е. никакое число  $\bar{x}$ , меньшее  $\bar{x}$ , уже не является верхней гранью. Точная верхняя грань множества  $X$  обозначается  $\sup X$ .

Аналогично определяется точная нижняя грань \*) ограниченного снизу множества  $X$ ; она обозначается  $\inf X$ .

\*) В некоторых учебниках по математическому анализу точная верхняя (нижняя) грань называется просто *верхней (нижней) гранью*.

**Теорема.** *Ограниченнное сверху (снизу) непустое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.*

Если множество  $X$  не ограничено сверху (снизу), то пишут  $\sup X = +\infty$  ( $\inf X = -\infty$ ).

Множество  $X$  называется *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу, т. е.

$$\exists M, m \quad \forall x \in X: \quad m \leq x \leq M. \quad (3)$$

### Контрольные вопросы и задания

- Напишите с помощью кванторов определение ограниченного снизу множества. Постройте отрицание этого определения, пользуясь правилом построения отрицаний.
- Дайте определение точной верхней (нижней) грани ограниченного сверху (снизу) множества.
- Сформулируйте теорему о существовании точных граней числового множества.
- Докажите единственность точных граней, т. е. что ограниченное сверху (снизу) множество имеет только одну точную верхнюю (нижнюю) грань.
- Покажите, что точные грани могут как принадлежать, так и не принадлежать множеству. Приведите примеры числовых множеств  $X$ , у которых: а)  $\sup X \in X$ ; б)  $\sup X \notin X$ ; в)  $\inf X \in X$ ; г)  $\inf X \notin X$ . Имеет ли множество  $X$  в случаях а) и б) наибольшее, а в случаях в) и г) наименьшее число?
- Что означает символическая запись: а)  $\sup X = +\infty$ ; б)  $\inf X = -\infty$ ?
- Какое множество называется ограниченным?
- Докажите, что следующее определение ограниченного множества эквивалентно (3): множество  $X$  называется *ограниченным*, если  $\exists A > 0 \quad \forall x \in X: |x| \leq A$ .
- Применяя правило построения отрицаний к приведенному в задании 8 определению, сформулируйте определение неограниченного множества.

### Примеры решения задач

- Найти точную верхнюю грань интервала  $(0, 1)$ .

Число 1 является верхней гранью интервала  $(0, 1)$ , так как  $\forall x \in (0, 1): x < 1$ . Более того,  $\forall \tilde{x} < 1 \quad \exists a \in (0, 1): a > \tilde{x}$ . Действительно, если  $x \leq 0$ , то  $\forall a \in (0, 1): a > x$ . Если  $x > 0$ , то, как показано в примере 1 § 1, на интервале  $(x, 1)$  найдется рациональное число  $a$  такое, что  $\tilde{x} < a < 1$ , т. е.  $\exists a \in (0, 1): a > \tilde{x}$ . Таким образом, для числа 1 выполнены оба условия определения точной верхней грани. Следовательно,  $\sup(0, 1) = 1$ . Заметим, что найденная точная грань не принадлежит интервалу  $(0, 1)$ , т. е.  $\sup(0, 1) \notin (0, 1)$ , в то время как для промежутка  $(0, 1]$   $\sup(0, 1] = 1 \in (0, 1]$ .  $\blacktriangleleft$

2. Найти точные грани множества всех правильных рациональных дробей  $m/n$  ( $m, n \in N$ ,  $m < n$ ) и показать, что это множество не

имеет наименьшего и наибольшего элементов.

Δ Пусть  $X$  — множество всех правильных рациональных дробей  $m/n$ . Так как  $\forall m, n \in N: m/n > 0$ , то число 0 — нижняя грань множества  $X$ . Более того,

$$\forall \tilde{x} > 0 \quad \exists a \in X: \quad a < \tilde{x}. \quad (4)$$

Действительно, если  $\tilde{x} > 1$ , то правильная рациональная дробь  $a = 1/2$  удовлетворяет условию (4). Если  $0 < \tilde{x} < 1$ , то число  $\tilde{x}$  можно записать в виде бесконечной десятичной дроби:

$$\tilde{x} = 0, x_1 x_2 \dots x_k \dots,$$

причем  $\exists n$  такое, что  $x_n \neq 0$ . Рациональное число

$$a = 0, x_1 x_2 \dots x_{n-1} (x_n - 1) 1$$

согласно правилу сравнения вещественных чисел удовлетворяет неравенствам  $0 < a < \tilde{x} < 1$ , т. е. является правильной рациональной дробью и удовлетворяет условию (4).

Таким образом, для числа 0 выполнено и второе условие определения точной нижней грани числового множества. Итак,  $\inf X = 0$ .

Так как множество  $X$  содержит только правильные дроби, т. е.  $m < n$ , то  $m/n < 1$ . Значит, число 1 — верхняя грань множества  $X$ . Более того,  $\forall \tilde{x} < 1 \exists m/n \in X: m/n > \tilde{x}$ . Действительно, как было показано в примере 1 § 1, существует рациональное число  $x_1$  такое, что  $\tilde{x} < x_1 < 1$ . Так как  $x_1 < 1$ , то  $x_1$  — правильная дробь:  $x_1 = m/n$  ( $m < n$ ), т. е.  $x_1 \in X$ . Следовательно, для числа 1 выполнены оба условия определения точной верхней грани числового множества. Итак,  $\sup X = 1$ .

Однако  $\inf X = 0 \notin X$ , поскольку  $m/n = 0$  лишь при  $m = 0$ , но  $0 \notin N$ . Значит, множество  $X$  не имеет наименьшего элемента. Точно так же  $\sup X = 1 \notin X$ , поскольку  $m/n = 1$  лишь при  $m = n$ , что противоречит требованию правильности дроби. Значит, множество  $X$  не имеет наибольшего элемента. ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

9. Пусть  $X$  и  $Y$  — непустые множества вещественных чисел, причем  $X$  ограничено сверху, а  $Y$  содержится в  $X$ . Докажите, что  $Y$  также ограничено сверху и  $\sup Y \leq \sup X$ .
10. Найдите точные грани множества рациональных чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $x^2 < 2$ .
11. Пусть  $A$  — множество чисел, противоположных по знаку числам из множества  $B$ . Докажите, что: а)  $\inf A = -\sup B$ ; б)  $\sup A = -\inf B$ .

### § 3. Арифметические операции над вещественными числами

#### Основные понятия

**1. Сложение и умножение рациональных чисел.** Для рациональных чисел известны следующие правила сложения и умножения:

$$\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}, \quad \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}. \quad (1)$$

Определим операции сложения и умножения для любых вещественных чисел.

**2. Сложение вещественных чисел.** Пусть  $x$  и  $y$  — произвольные вещественные числа, а  $x_1$  и  $y_1$  — любые рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$x_1 \leq x, \quad y_1 \leq y. \quad (2)$$

Далее символ  $(x_1 + y_1)_r$  будет означать, что числа  $x_1$  и  $y_1$  складываются по правилу (1) сложения рациональных чисел. Рассмотрим множество  $\{(x_1 + y_1)_r\}$  всевозможных сумм рациональных чисел  $x_1$  и  $y_1$ , удовлетворяющих условию (2). Это множество ограничено сверху и, следовательно, имеет точную верхнюю грань.

*Суммой* вещественных чисел  $x$  и  $y$  называется  $\sup\{(x_1 + y_1)_r\}$ .

**3. Умножение вещественных чисел.** Пусть  $x$  и  $y$  — произвольные положительные вещественные числа, а  $x_1$  и  $y_1$  — любые рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам  $0 < x_1 \leq x, 0 < y_1 \leq y$ . Далее символ  $(x_1 y_1)_r$  будет означать, что числа  $x_1$  и  $y_1$  перемножаются по правилу (1) умножения рациональных чисел. Рассмотрим множество  $\{(x_1 y_1)_r\}$  всевозможных произведений таких рациональных чисел. Это множество ограничено сверху и, следовательно, имеет точную верхнюю грань.

*Произведением* положительных вещественных чисел  $x$  и  $y$  называется  $\sup\{(x_1 y_1)_r\}$ .

Произведение вещественных чисел любого знака определим следующими правилами:

$$1^\circ) x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0;$$

$$2^\circ) xy = \begin{cases} |x| \cdot |y|, & \text{если знаки } x \text{ и } y \text{ одинаковы,} \\ -|x| \cdot |y|, & \text{если знаки } x \text{ и } y \text{ различны.} \end{cases}$$

#### Контрольные вопросы и задания

- Сформулируйте правила сложения и умножения двух любых вещественных чисел. Докажите, что множества  $\{(x_1 + y_1)_r\}$  и  $\{(x_1 y_1)_r\}$ , фигурирующие в этих правилах, ограничены сверху.

- 2 Докажите, что правило сложения вещественных чисел обладает свойствами а)  $x + y = y + x$  (переместительное свойство), б)  $(x + y) + z = x + (y + z)$  (сочетательное свойство)
- 3 Докажите, что правило умножения вещественных чисел обладает свойствами а)  $xy = yx$  (переместительное свойство), б)  $(xy)z = x(yz)$  (сочетательное свойство)

### Примеры решения задач

1. Доказать, что сложение двух рациональных чисел по правилу сложения вещественных чисел дает тот же результат, что и сложение их по правилу (1) для рациональных чисел

Δ Пусть  $x$  и  $y$  — произвольные рациональные числа,  $(x + y)_r$  — их сумма, полученная по правилу сложения рациональных чисел,  $(x + y)$  — сумма, полученная по правилу сложения вещественных чисел, т.е.  $x + y = \sup\{(x_1 + y_1)_r\}$ , где  $x_1$  и  $y_1$  — любые рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам  $x_1 \leq x$ ,  $y_1 \leq y$ . Нужно доказать, что  $x + y = (x + y)_r$ , или

$$\sup\{(x_1 + y_1)_r\} = (x + y)_r$$

Для этого согласно определению точной верхней грани множества нужно показать, что

- 1°)  $\forall (x_1 + y_1)_r \in \{(x_1 + y_1)_r\} \quad (x_1 + y_1)_r \leq (x + y)_r$ ,  
 2°)  $\forall \tilde{x} < (x + y)_r \quad \exists (x_1 + y_1)_r \in \{(x_1 + y_1)_r\} \quad (x_1 + y_1)_r > \tilde{x}$

Так как  $x_1 \leq x$  и  $y_1 \leq y$ , то  $(x_1 + y_1)_r < (x + y)_r$  (для рациональных чисел это свойство неравенств известно). Следовательно, условие 1° выполняется. Покажем, что выполнено условие 2°)

Пусть  $\tilde{x}$  — произвольное число, меньшее  $(x + y)_r$ . Между числами  $\tilde{x}$  и  $(x + y)_r$  найдется рациональное число  $a$  (см. пример 1 § 1).  $\tilde{x} < a < (x + y)_r$ . Положим  $\delta = (x + y)_r - a$  (вычитание производится по правилу вычитания рациональных чисел). Тогда  $a = (x + y)_r - \delta$ , и так как  $\delta > 0$ , то существует такое натуральное  $n$ , что  $2/n < \delta$ .

Рассмотрим теперь рациональные числа  $x_1 = x - 1/n$  и  $y_1 = y - 1/n$ . Так как  $x_1 < x$  и  $y_1 < y$ , то  $(x_1 + y_1)_r \in \{(x_1 + y_1)_r\}$ . При этом  $(x_1 + y_1)_r = (x + y)_r - 2/n > (x + y)_r - \delta = a$ , поскольку  $2/n < \delta$ .

Итак,  $(x_1 + y_1)_r > a > \tilde{x}$ , т.е.  $(x_1 + y_1)_r > \tilde{x}$ . Тем самым мы показали, что выполнено условие 2°) ▲

2. Доказать, что  $\forall x \quad x + (-x) = 0$

Δ Пусть  $x_1$  и  $y_1$  — любые рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам  $x_1 \leq x$ ,  $y_1 \leq -x$ . Нужно доказать, что  $\sup\{(x_1 + y_1)_r\} = 0$ , т.е.

- 1°)  $\forall (x_1 + y_1)_r \in \{(x_1 + y_1)_r\} \quad (x_1 + y_1)_r \leq 0$ ,  
 2°)  $\forall \tilde{x} < 0 \quad \exists (x_1 + y_1)_r \in \{(x_1 + y_1)_r\} \quad (x_1 + y_1)_r > \tilde{x}$

Так как  $y_1 \leq -x$ , то  $-y_1 \geq x$  (это легко установить, используя правило сравнения вещественных чисел, см. упр. 8 к § 1). Из неравенств  $x_1 \leq x$  и  $x \leq -y_1$  в силу транзитивности знака  $\leq$  следует, что

$x_1 \leq -y_1$  и, значит,  $(x_1 + y_1)_r \leq 0$  Тем самым выполнено условие 1°)

Покажем, что выполнено условие 2°) Пусть  $\tilde{x}$  — произвольное отрицательное число Так как  $-\tilde{x} > 0$ , то найдется такое натуральное  $n$ , что  $1/10^n < -\tilde{x}$ , т. е.  $-1/10^n > \tilde{x}$  Представим число  $x$  в виде бесконечной десятичной дроби (будем для определенности считать, что  $x > 0$ )

$$x = x_0, x_1 x_2 \dots x_n$$

Из правила сравнения вещественных чисел следует, что

$$x_1 = x_0, x_1 x_2 \dots x_n \leq x,$$

$$y_1 = -x_0, x_1 x_2 \dots x_n - \frac{1}{10^n} \leq -x$$

Тем самым  $(x_1 + y_1)_r \in \{(x_1 + y_1)_r\}$  При этом  $(x_1 + y_1)_r = -1/10^n > \tilde{x}$ , т. е. мы доказали, что выполнено условие 2°) ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

12. Докажите, что умножение двух рациональных чисел по правилу умножения вещественных чисел дает тот же результат, что и умножение их по правилу (1) для рациональных чисел
13. Докажите, что  $\forall x \quad x + 0 = x$
14. Докажите, что  $\forall x, y$  существует единственное число  $z$  такое, что  $x = y + z$  ( $z$  называется разностью чисел  $x$  и  $y$   $z = x - y$ )
15. Докажите, что  $\forall x \quad x \cdot 1 = x$
16. Докажите, что  $\forall x \neq 0 \quad \exists x' \quad xx' = 1$
17. Докажите, что  $\forall x$  и  $\forall y \neq 0$  существует единственное число  $z$  такое, что  $x = yz$  ( $z$  называется частным чисел  $x$  и  $y$   $z = x/y$ )
18. Докажите, что  $\forall x, y, z \quad (x + y)z = xz + yz$
19. Докажите, что если  $x > y$ , то  $\forall z \quad x + z > y + z$
20. Докажите, что если  $x > y$ , то  $\forall z > 0 \quad xz > yz$
21. Докажите справедливость неравенств а)  $|x + y| \leq |x| + |y|$ , б)  $|x - y| \geq |x| - |y|$
22. Пусть  $X, Y$  — непустые ограниченные множества вещественных чисел, а  $T$  — множество всевозможных сумм  $x + y$ , где  $x \in X, y \in Y$  Докажите, что множество  $T$  ограничено и что а)  $\sup T = \sup X + \sup Y$ , б)  $\inf T = \inf X + \inf Y$
23. Пусть  $X, Y$  — непустые ограниченные множества неотрицательных вещественных чисел, а  $B$  — множество всевозможных произведений  $xy$ , где  $x \in X, y \in Y$  Докажите, что множество  $B$  ограничено и что а)  $\sup B = \sup X \sup Y$ , б)  $\inf B = \inf X \inf Y$
24. Вычислите три первые значащие цифры суммы а)  $\frac{1}{7} + \sqrt{3}$  б)  $\sqrt{3} + \sqrt{7}$
25. Найдите три первых десятичных знака произведения а)  $\frac{1}{7}\sqrt{3}$ , б)  $\sqrt{3} \times \sqrt{7}$
26. Пусть  $A$  и  $B$  — непустые множества вещественных чисел, у которых каждое число из  $A$  меньше любого числа из  $B$  и для любого  $\varepsilon > 0$  существуют  $x \in A$  и  $y \in B$  такие, что  $y - x < \varepsilon$  Докажите, что  $\sup A = \inf B$

## § 4. Метод математической индукции

### Основные понятия

Чтобы доказать, что некоторое утверждение верно для любого натурального числа  $n$  начиная с  $n_0$ , достаточно доказать, что:

а) это утверждение верно для  $n = n_0$ ;

б) если данное утверждение справедливо для некоторого натурального числа  $k \geq n_0$ , то оно верно также и для следующего натурального числа  $k + 1$ .

Такой метод доказательства называется *методом математической индукции*.

### Контрольные вопросы

- 1 В чем состоит метод математической индукции?
- 2 Методом математической индукции докажите, что  $\forall n \in N \quad n \leq 2^{n-1}$

### Примеры решения задач

1. Доказать, что  $\forall n \in N$  и  $\forall x > -1$  справедливо неравенство (*неравенство Бернулли*)

$$(1+x)^n \geq 1 + nx. \quad (1)$$

Докажем неравенство (1) методом математической индукции. Если  $n = 1$ , то неравенство (1) справедливо, поскольку обращается в верное равенство. Предположим, что соотношение (1) справедливо для натурального числа  $k$  и  $\forall x > -1$ :

$$(1+x)^k \geq 1 + kx. \quad (2)$$

Так как  $x > -1$ , то  $1 + x > 0$ . Умножим неравенство (2) на положительное число  $1 + x$ :

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + kx + x + kx^2$$

Отбрасывая неотрицательное слагаемое  $kx^2$  в правой части, получаем неравенство

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x.$$

Мы доказали, что неравенство (1) справедливо для натурального числа  $k + 1$  и  $\forall x > -1$ . Тем самым доказано, что соотношение (1) справедливо  $\forall n \in N$  и  $\forall x > -1$ . ▲

2. Доказать, что для любых  $n$  положительных чисел  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , удовлетворяющих условию

$$y_1 y_2 \cdots y_n = 1, \quad (3)$$

имеет место соотношение

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n \geq n. \quad (4)$$

Δ При  $n = 1$  из условия (3) следует, что  $y_1 = 1$ . Поэтому соотношение (4) выполнено.

Пусть при  $n = k$  из условия (3) следует соотношение (4) и пусть  $k + 1$  положительных чисел  $y_1, y_2, \dots, y_k, y_{k+1}$  удовлетворяют условию (3). Докажем, что для них выполнено соотношение (4). Если все эти числа равны 1, то их сумма равна  $k + 1$  и соотношение (4) имеет место. Если же среди указанных чисел есть хотя бы одно, отличное от 1, то обязательно найдется еще одно число, не равное 1. При этом если одно число больше 1, то другое меньше 1. Не умалляя общности, предположим, что  $y_k > 1$ ,  $y_{k+1} < 1$ . Произведение  $k$  чисел  $y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k y_{k+1}$  в силу условия (3) равно 1. Поэтому по индуктивному предположению

$$y_1 + y_2 + \dots + y_{k-1} + y_k y_{k+1} \geq k.$$

Отсюда получаем

$$y_1 + y_2 + \dots + y_{k+1} + y_k y_{k+1} \geq k + y_k + y_{k+1},$$

или

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + \dots + y_{k+1} &\geq k + 1 + y_k + y_{k+1} - y_k y_{k+1} - 1 = \\ &= k + 1 + (1 - y_{k+1})(y_k - 1) \geq k + 1, \end{aligned}$$

т. е. соотношение (4) выполнено при  $n = k + 1$ . Таким образом, для любых  $n$  положительных чисел, удовлетворяющих условию (3), выполнено соотношение (4). ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Применяя метод математической индукции, докажите, что  $\forall n \in N$  справедливы следующие равенства

27.  $1 + 2 + 3 + \dots + n = 0,5n(n + 1)$

28.  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$

29.  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = 0,25n^2(n + 1)^2$

Методом математической индукции докажите справедливость следующих неравенств

30.  $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

31.  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$  ( $n \geq 2$ )

32.  $n^{n+1} > (n+1)^n$  ( $n \geq 3$ )

33.  $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$  при  $x_k \geq 0$ ,  $k = 1, \dots, n$  (среднее геометрическое  $n$  неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического)

34.  $\underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}}_n \leq 0,5(1 + \sqrt{4a + 1}) \quad \forall a > 0$

## ГЛАВА II

### ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

#### § 1. Ограничные и неограниченные последовательности. Предел последовательности

##### Основные понятия и теоремы

Если каждому натуральному числу  $n$  поставлено в соответствие некоторое число  $x_n$ , то говорят, что определена *числовая последовательность* (или просто *последовательность*)  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ . Кратко ее обозначают символом  $\{x_n\}$  или  $(x_n)$ . Число  $x_n$  называется *членом (элементом) последовательности*, а  $n$  — *номером члена*.

Последовательности  $\{x_n + y_n\}$ ,  $\{x_n - y_n\}$ ,  $\{x_n y_n\}$ ,  $\{x_n/y_n\}$  называются соответственно *суммой, разностью, произведением и частным* последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  (для частного  $y_n \neq 0$ ).

**Определение.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *ограниченной*, если  $\exists M > 0$  такое, что  $\forall n \ |x_n| \leq M$ .

С геометрической точки зрения это означает, что все члены последовательности находятся в некоторой окрестности ( $M$ -окрестности) точки  $x = 0$ .

**Определение.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *неограниченной*, если  $\forall M > 0 \ \exists n: |x_n| > M$ .

**Определение.** Число  $a$  называется *пределом последовательности*  $\{x_n\}$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in N$  такое, что  $\forall n > N \ |x_n - a| < \varepsilon$ . Обозначение:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

С геометрической точки зрения это означает, что в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$  находятся все члены последовательности начиная с некоторого номера (зависящего, вообще говоря, от  $\varepsilon$ ) или, что то же самое, вне любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$  находится лишь конечное число членов последовательности.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, а последовательность, не имеющая предела, — *расходящейся*.

**Теорема 1.** Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

**Теорема 2** (необходимое условие сходимости последовательности). Сходящаяся последовательность ограничена.

### Контрольные вопросы и задания

- Сформулируйте определения: а) последовательности; б) ограниченной и неограниченной последовательности; в) предела последовательности. Дайте геометрическую интерпретацию этих определений.
- Эквивалентно ли определение предела последовательности такому определению:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists K > 0$  (не обязательно натуральное) такое, что  $\forall n > K |x_n - a| < \varepsilon$ ?
- Покажите на примере, что номер  $N$ , фигурирующий в определении предела последовательности, зависит, вообще говоря, от  $\varepsilon$ .
- Пусть последовательность  $\{x_n\}$  и число  $a$  удовлетворяют условию:  $\exists N$  такой, что  $\forall \varepsilon > 0$  и  $\forall n > N |x_n - a| < \varepsilon$ . Всякая ли сходящаяся к  $a$  последовательность удовлетворяет этому условию? Какова геометрическая интерпретация этого условия?
- Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .
  - Могут ли все члены последовательности быть положительными (отрицательными), если  $a = 0$ ?
  - Может ли последовательность иметь бесконечно много отрицательных (равных нулю) членов, если:  $a > 0$ ;  $a \neq 0$ ?
  - Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+2} = a$ .
  - Докажите, что  $\{x_n\}$  ограничена.
- Пусть в некоторой окрестности точки  $a$  лежит бесконечно много членов последовательности  $\{x_n\}$ . Следует ли из этого условия, что: а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ; б) никакая точка вне этой окрестности не является пределом последовательности  $\{x_n\}$ ; в)  $\{x_n\}$  ограничена?
- Пусть в любой окрестности точки  $a$  лежит бесконечно много членов последовательности  $\{x_n\}$ . Следует ли отсюда, что: а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ; б)  $\{x_n\}$  ограничена?
- Какая последовательность называется: а) сходящейся; б) расходящейся?
- Пусть последовательность  $\{x_n\}$  является ограниченной (неограниченной). Следует ли из этого условия, что она сходится (расходится)?
- Пусть последовательность сходится. Является ли сходящейся последовательность, которая получается из исходной, если:
  - из нее удалить конечное число членов, а оставшиеся заново перенумеровать в порядке их следования;
  - к ней добавить конечное число членов, перенумеровав члены последовательности в порядке их следования;
  - в ней изменить произвольным образом конечное число членов?
- Докажите, что сходящаяся последовательность имеет только один предел.
- Сформулируйте необходимое условие сходимости последовательности.

### Примеры решения задач

- Сформулировать на языке " $\varepsilon - N$ " определение того, что число  $a$  не является пределом последовательности  $\{x_n\}$  ( $a \neq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ), и дать геометрическую интерпретацию этого определения.  
 $\Delta$  По определению предела последовательности  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , если

$\forall \varepsilon > 0 \exists N$  такое, что  $\forall n > N: |x_n - a| < \varepsilon$ . Пользуясь правилом построения отрицаний, получаем:  $a \neq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , если  $\exists \varepsilon > 0$  такое, что  $\forall N \exists n > N: |x_n - a| \geq \varepsilon$ .

Более подробно это можно записать так:  $a \neq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , если  $\exists \varepsilon > 0$  такое, что

для  $N = 1 \exists n_1 > 1: |x_{n_1} - a| \geq \varepsilon$ ,

для  $N = 2 \exists n_2 > 2: |x_{n_2} - a| \geq \varepsilon$ ,

.....  
для  $N = 100 \exists n_{100} > 100: |x_{100} - a| \geq \varepsilon$ ,

.....

Таким образом,  $a \neq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , если существуют  $\varepsilon > 0$  и последовательность номеров  $\{n_N\}$  ( $N = 1, 2, 3, \dots$ ) таких, что  $n_N > N$  и  $|x_{n_N} - a| \geq \varepsilon$ .

Геометрическая интерпретация этого определения:  $a \neq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , если существует некоторая  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$ , вне которой находится бесконечно много членов последовательности. ▲

2. Доказать, что последовательность  $x_n = 2^{n(-1)^n}$  не ограничена. Δ В силу определения неограниченной последовательности нужно показать, что  $\forall M > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ , для которого  $|x_n| > M$ . Зададим произвольное  $M > 0$  и возьмем любое четное число  $n$ , удовлетворяющее неравенству  $n > \log_2 M$ . Для такого  $n$  имеем

$$x_n = 2^n > 2^{\log_2 M} = M,$$

что и требовалось доказать. ▲

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 3^n}{3^n - 2} = 5$ .

Δ Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$  и рассмотрим модуль разности между  $n$ -м членом последовательности и числом 5:

$$\left| \frac{5 \cdot 3^n}{3^n - 2} - 5 \right| = \frac{10}{3^n - 2}.$$

В соответствии с определением предела последовательности мы должны указать номер  $N$  такой, что  $\forall n > N$  выполняется неравенство

$$\frac{10}{3^n - 2} < \varepsilon. \quad (1)$$

Для отыскания номера  $N$  решим неравенство (1) относительно  $n$ . Получим

$$n > \log_3 \left( \frac{10}{\varepsilon} + 2 \right). \quad (2)$$

Из неравенства (2) следует, что в качестве  $N$  можно взять целую часть числа  $\log_3 \left( \frac{10}{\varepsilon} + 2 \right)$ :

$$N = \left[ \log_3 \left( \frac{10}{\varepsilon} + 2 \right) \right].$$

В самом деле, если  $n > N$ , то

$$n \geq \left\lceil \log_3 \left( \frac{10}{\varepsilon} + 2 \right) \right\rceil + 1 > \log_3 \left( \frac{10}{\varepsilon} + 2 \right),$$

т. е. справедливо неравенство (2), а значит,  $\forall n > N$  выполняется и неравенство (1). (Отметим, что при  $\varepsilon > 10$  имеем  $N = \left\lceil \log_3 \left( \frac{10}{\varepsilon} + 2 \right) \right\rceil = 0$ , и поэтому неравенство (1) справедливо  $\forall n \in \mathbb{N}$ .)

Итак, для произвольного  $\varepsilon > 0$  мы указали такой номер  $N = \left\lceil \log_3 \left( \frac{10}{\varepsilon} + 2 \right) \right\rceil$ , что  $\forall n > N$  выполняется неравенство

$$\left| \frac{5 \cdot 3^n}{3^n - 2} - 5 \right| < \varepsilon.$$

Это и означает по определению предела последовательности, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 3^n}{3^n - 2} = 5. \blacksquare$$

4. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} = 0$ .

Δ Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$ . Нужно указать номер  $N$  такой, что  $\forall n > N$  выполняется неравенство

$$1/\sqrt{n!} < \varepsilon. \quad (3)$$

Мы не будем стремиться к тому, чтобы найти наименьший номер  $N$ , начиная с которого выполняется неравенство (3). Укажем номер "с запасом", решая более простое неравенство

$$2/n < \varepsilon. \quad (4)$$

Так как  $\forall n \in \mathbb{N} \ n! > n(n/4)$  (докажите это), то  $\forall n \in \mathbb{N}$  справедливо неравенство

$$1/\sqrt{n!} < 2/n, \quad (5)$$

и поэтому неравенство (3) является следствием неравенства (4). Решая относительно  $n$  неравенство (4), получаем

$$n > 2/\varepsilon. \quad (6)$$

Положим  $N = [2/\varepsilon]$ . Если  $n > N$ , то  $n \geq [2/\varepsilon] + 1 > 2/\varepsilon$ , т. е. выполняется неравенство (6), а следовательно, неравенства (4) и (3). Таким образом,  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$  ( $N = [2/\varepsilon]$ ) такой, что  $\forall n > N \ 1/\sqrt{n!} < \varepsilon$ . Тем самым доказано, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} = 0$ .  $\blacksquare$

Рассмотренные примеры показывают, каким образом следует доказывать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , пользуясь определением предела последовательности. Надо составить выражение  $|x_n - a|$  и подобрать (если

это целесообразно) последовательность  $\{y_n\}$  такую, что, во-первых,  $\forall n |x_n - a| \leq y_n$  и, во-вторых, неравенство

$$y_n < \varepsilon \quad (7)$$

при произвольном  $\varepsilon$  достаточно просто решается относительно  $n$ . Пусть решение неравенства (7) имеет вид

$$n > f(\varepsilon),$$

где  $f(\varepsilon) > 0$ . Тогда в качестве  $N$  можно взять  $[f(\varepsilon)]$  (если при этом окажется, что  $[f(\varepsilon)] = 0$ , то неравенство (7) справедливо  $\forall n$ ). Таким образом,  $\forall n > N = [f(\varepsilon)]$  будет выполнено неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ , а это и означает по определению предела последовательности, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

5. Известно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  и  $x_n \geq 0 \quad \forall n$ . Доказать, что при  $\alpha > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^\alpha = 0$$

Δ По условию  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , т. е.  $\forall \varepsilon_1 > 0 \exists N_1$  такое, что  $\forall n > N_1$  справедливо неравенство

$$|x_n| < \varepsilon_1 \quad (8)$$

Требуется доказать  $\forall \varepsilon > 0 \exists N$  такое, что  $\forall n > N |x_n^\alpha| < \varepsilon$ , или, что равносильно,

$$|x_n| < \varepsilon^{1/\alpha} \quad (9)$$

Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$  и положим  $\varepsilon_1 = \varepsilon^{1/\alpha}$  ( $\varepsilon_1 > 0$ ). Для этого  $\varepsilon_1 \exists N_1$  такое, что  $\forall n > N_1$  справедливо неравенство (8), т. е.  $|x_n| < \varepsilon_1^{1/\alpha}$ . Таким образом,  $\forall n > N = N_1$  справедливо неравенство (9). Тем самым доказано, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^\alpha = 0$ . ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

- Ограничены ли последовательности а)  $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ , б)  $x_n = 2n$ , в)  $x_n = \ln n$ , г)  $x_n = \sin n$ , д)  $\{x_n\} = 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6, \dots$ ? Ответы обоснуйте
- Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ ,
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+3} = 2$ ,
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n} = 0$ ,
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_n 2 = 0$ ,
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3 + 2n + 1} = 0$ ,
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} (0,8)^n = 0$ ,
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 5 \cdot 6^n}{3^n + 6^n} = 5$ ,
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n^2}{n+1} = 0$
- Известно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Докажите, что
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ ,
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ ,
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = a^2$
- Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ . Следует ли отсюда, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ?
- Докажите, что последовательность  $\{x_n\}$  расходится, если
  - $x_n = n$ ,
  - $x_n = \ln n$ ,
  - $x_n = n^{(-1)^n}$

6. Пусть последовательность  $\{x_n\}$  сходится и  $M = \sup\{x_n\}$ ,  $m = \inf\{x_n\}$ . Докажите, что либо  $\exists n$  такое, что  $x_n = M$ , либо  $\exists k$  такое, что  $x_k = m$ , либо  $\exists n, k$  такие, что  $x_n = M$ ,  $x_k = m$ . Приведите примеры последовательности всех трех типов.

## § 2. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

### Основные понятия и теоремы

**Определение** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *бесконечно малой*, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

**Определение** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *бесконечно большой*, если  $\forall A > 0 \ \exists N$  такое, что  $\forall n > N \ |x_n| > A$

С геометрической точки зрения это означает, что в любой (сколь угодно большой) окрестности нуля находится лишь конечное число членов последовательности, а вне ее — бесконечно много членов.

Если последовательность  $\{x_n\}$  бесконечно большая, то пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ . Если при этом начиная с некоторого номера все члены бесконечно большой последовательности положительны (отрицательны), то пишут  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty (-\infty)$ . Отметим, что бесконечно большая последовательность не является сходящейся и символическая запись  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty (-\infty)$  означает только, что последовательность  $\{x_n\}$  является бесконечно большой, но вовсе не означает, что она имеет предел.

Всякая бесконечно большая последовательность является неограниченной, поскольку вне любой окрестности нуля имеется член последовательности (даже все члены начиная с некоторого номера). Обратное неверно: неограниченная последовательность может и не быть бесконечно большой.

**Теорема 3 Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью**

**Теорема 4 Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную является бесконечно малой последовательностью**

**Следствие Произведение конечного числа бесконечно малых есть бесконечно малая**

**Теорема 5 Если последовательность  $\{x_n\}$  бесконечно большая, то, начиная с некоторого номера  $n$ , определена последовательность  $\{1/x_n\}$ , которая является бесконечно малой. Если последовательность  $\{x_n\}$  бесконечно малая и  $\forall n \ x_n \neq 0$ , то последовательность  $\{1/x_n\}$  является бесконечно большой.**

### Контрольные вопросы и задания

- 1 Сформулируйте определения а) бесконечно малой последовательности, б) бесконечно большой последовательности. Дайте геометрическую интерпретацию этих определений
- 2 Сформулируйте на языке “ $\varepsilon - N$ ” отрицание того, что последовательность является а) бесконечно малой, б) бесконечно большой. Дайте геометрическую интерпретацию этих отрицаний
- 3 Дайте определение, соответствующее символической записи  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$
- 4 Пусть бесконечное число членов последовательности находится а) в любой окрестности нуля, б) вне любой окрестности нуля. Следует ли из условия а) (из условия б)), что последовательность является бесконечно малой, бесконечно большой, ограниченной, неограниченной? Следует ли из условия а) (из условия б)), что последовательность не является бесконечно малой, бесконечно большой?
- 5 Известно, что последовательность  $\{x_n\}$  является а) бесконечно малой, б) бесконечно большой. Следует ли отсюда (при условии  $x_n \neq 0 \forall n$ ), что последовательность  $\{1/x_n\}$  является а) бесконечно большой, б) бесконечно малой?
- 6 а) Является ли бесконечно малая последовательность ограниченной?  
б) Является ли бесконечно большая последовательность неограниченной, сходящейся?  
в) Является ли любая неограниченная последовательность бесконечно большой?
- 7 Известно, что  $y_n \neq 0 \quad \forall n$  и а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ , б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ . Может ли последовательность  $\{x_n/y_n\}$  быть бесконечно большой, бесконечно малой, сходящейся, расходящейся, но не бесконечно большой? Приведите примеры
- 8 Докажите, что сумма двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой. Верно ли аналогичное утверждение для бесконечно больших последовательностей? Ответ обоснуйте
- 9 Докажите, что если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , то, начиная с некоторого номера  $n$ , определена последовательность  $\{1/x_n\}$ , причем  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/x_n) = 0$
- 10 Пусть  $\{x_n + y_n\}$  — бесконечно малая последовательность. Следует ли отсюда, что  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  — бесконечно малые последовательности? Ответ обоснуйте
- 11 Пусть  $\{x_n y_n\}$  — бесконечно малая последовательность. Следует ли отсюда, что хотя бы одна из последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  бесконечно малая? Ответ обоснуйте
- 12 Докажите, что если  $x_n \geq y_n$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$

### Примеры решения задач

1. Сформулировать на языке “ $\varepsilon - N$ ” отрицание того, что последовательность является бесконечно большой. Дать геометрическую интерпретацию этого отрицания  
 $\Delta$  Согласно определению бесконечно большой последовательности

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , если  $\forall A > 0 \exists N$  такое, что  $\forall n > N |x_n| > A$  Пользуясь правилом построения отрицаний, получаем, что последовательность  $\{x_n\}$  не является бесконечно большой, если  $\exists A > 0$  такое, что  $\forall N \exists n > N |x_n| \leq A$  С геометрической точки зрения это означает, что найдется некоторая окрестность нуля ( $A$ -окрестность), в которой находится бесконечно много членов последовательности  $\blacktriangle$

2. Доказать, что последовательность  $\{a^n\}$  является а) бесконечно большой при  $|a| > 1$ , б) бесконечно малой при  $|a| < 1$

$\Delta$  Пусть  $|a| > 1$  Докажем, что последовательность  $\{a^n\}$  удовлетворяет определению бесконечно большой, т. е.  $\forall A > 0 \exists N$  такое, что  $\forall n > N$  выполняется неравенство

$$|a|^n > A \quad (1)$$

Зададим произвольное  $A > 0$  Для отыскания номера  $N$  решим неравенство (1) относительно  $n$  Получим

$$n > \log_{|a|} A \quad (2)$$

Положим  $N = [\log_{|a|} A]$  Тогда  $\forall n > N$  выполняется неравенство (2), а значит, и (1) Таким образом,  $\forall A > 0 \exists N = [\log_{|a|} A]$  такое, что  $\forall n > N |a|^n > A$  Это и требовалось доказать

б) Пусть  $|a| < 1$  Если  $a = 0$ , то  $a^n = 0 \forall n$  и, следовательно,  $\{a^n\}$  бесконечно малая Пусть  $a \neq 0$  Тогда  $a^n = ((1/a)^n)^{-1}$  Так как  $|1/a| > 1$ , то последовательность  $\{(1/a)^n\}$  является бесконечно большой, а последовательность  $((1/a)^n)^{-1}$  бесконечно малой в силу теоремы 5 Таким образом, последовательность  $\{a^n\}$  бесконечно малая при  $|a| < 1$   $\blacktriangle$

3. Пусть  $x_n = n^{(-1)^n}$  Доказать, что последовательность  $\{x_n\}$  а) неограниченная, б) не является бесконечно большой

$\Delta$  а) Докажем, что  $\{x_n\}$  удовлетворяет определению неограниченной последовательности В самом деле,  $\forall M > 0$  член последовательности с номером  $n = 2([M] + 1)$  равен  $n$  и больше  $M$  Это и означает по определению, что  $\{x_n\}$  — неограниченная последовательность

б) Докажем, что последовательность  $\{x_n\}$  не является бесконечно большой Действительно, в интервале  $(-2, 2)$  находятся, очевидно, все члены последовательности с нечетными номерами, а значит, в этом интервале находится бесконечно много членов последовательности  $\{x_n\}$  Отсюда следует, что  $\{x_n\}$  не является бесконечно большой  $\blacktriangle$

4. Пусть  $\{x_n\}$  — сходящаяся, а  $\{y_n\}$  — бесконечно большая последовательность Доказать, что последовательность  $\{x_n + y_n\}$  бесконечно большая

$\Delta$  Докажем, что последовательность  $\{x_n + y_n\}$  удовлетворяет определению бесконечно большой, т. е.  $\forall A > 0 \exists N$  такое, что  $\forall n > N |x_n + y_n| > A$  Так как  $\{x_n\}$  сходится, то она ограничена, т. е.  $\exists M > 0$  такое, что  $\forall n$  выполняется неравенство

$$|x_n| < M \quad (3)$$

Зададим теперь произвольное  $A > 0$ . Поскольку  $\{y_n\}$  бесконечно большая, для числа  $A + M \exists N$  такое, что  $\forall n > N$  имеем

$$|y_n| > A + M. \quad (4)$$

Из (3) и (4) получаем, что  $\forall n > N$  выполняется неравенство

$$|x_n + y_n| \geq |y_n| - |x_n| > A + M - M = A,$$

что и требовалось доказать. ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

7. Известно, что в некоторой окрестности нуля находится: а) конечное число членов последовательности; б) бесконечное число членов последовательности. Следует ли отсюда, что в каждом из этих случаев последовательность является: ограниченной; бесконечно малой; бесконечно большой?
8. Известно, что последовательность  $\{x_n\}$  сходится, а  $\{y_n\}$  бесконечно большая. Может ли последовательность  $\{x_n y_n\}$ : а) сходиться; б) расходиться, но быть ограниченной; в) быть бесконечно большой; г) быть бесконечно малой? Ответьте на эти вопросы, используя в качестве примеров последовательности  $\{n\}$ ,  $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ ,  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ,  $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ ,  $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ .
9. Приведите примеры последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$ , для которых  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ , а произведение их  $\{x_n y_n\}$  является последовательностью: а) сходящейся; б) расходящейся, но ограниченной; в) бесконечно малой; г) бесконечно большой.
10. Докажите, что заданные последовательности бесконечно малые: а)  $x_n = n^k$  ( $k < 0$ ); б)  $x_n = (-1)^n \cdot 0,999^n$ ; в)  $x_n = \frac{1}{n!}$ ; г)  $x_n = \frac{n}{2n^3 + 1}$ .
11. Докажите, что заданные последовательности бесконечно большие: а)  $x_n = n^k$  ( $k > 0$ ); б)  $x_n = n(-1)^n$ ; в)  $x_n = 2^{\sqrt{n}}$ ; г)  $x_n = \log_2(\log_2 n)$  ( $n \geq 2$ ).
12. Докажите, что любая бесконечно большая последовательность является неограниченной.
13. Докажите, что последовательность  $\{(1 + (-1)^n)n\}$  неограниченная, однако не является бесконечно большой.
14. Докажите, что если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  ( $-\infty$ ), то последовательность  $\{x_n\}$  достигает своей точной нижней (верхней) грани.
15. Найдите наименьший член последовательности  $\{x_n\}$ , если: а)  $x_n = n^2 - 9n - 100$ ; б)  $x_n = n + 100/n$ .

### § 3. Свойства сходящихся последовательностей

#### Основные понятия и теоремы

Теорема 6. Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ . Тогда:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$ ;

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab;$

в) если  $b \neq 0$ , то, начиная с некоторого номера, определена последовательность  $\{x_n/y_n\}$  (т. е.  $\exists N$  такое, что  $\forall n \geq N y_n \neq 0$ ) и  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n/y_n) = a/b$ .

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n/y_n)$  называют неопределенностью типа 0/0. Аналогично определяются неопределенности типа  $\infty/\infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ . Ясно, что для таких пределов теорема 6 неприменима.

**Теорема 7.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  и, начиная с некоторого номера,  $x_n \geq b$  ( $x_n \leq b$ ), то  $a \geq b$  ( $a \leq b$ ).

**Теорема 8** (теорема о трех последовательностях). Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ , и, начиная с некоторого номера, выполняются неравенства  $x_n \leq z_n \leq y_n$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ .

### Контрольные вопросы и задания

- Дайте определение сходящейся последовательности.
- Сформулируйте на языке " $\varepsilon - N$ " определение расходящейся последовательности и дайте геометрическую интерпретацию этого определения.
- Сформулируйте теоремы 6–8.
- Пусть последовательность  $\{x_n\}$  сходится, а  $\{y_n\}$  расходится. Докажите, что  $\{x_n + y_n\}$  расходится,  $\{cx_n\}$  сходится,  $\{cy_n\}$  расходится при  $c \neq 0$ . Покажите на примерах, что последовательность  $\{x_n y_n\}$  может: а) сходиться; б) расходиться.
- Пусть последовательность  $\{x_n + y_n\}$  сходится. Следует ли из этого, что  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  сходятся?
- Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a. \quad (*)$$

Докажите, что  $\{x_n\}$  можно представить в виде

$$x_n = a + \alpha_n, \quad (**)$$

где  $\{\alpha_n\}$  — бесконечно малая последовательность. Докажите обратное: из  $(**)$  следует  $(*)$ .

- Докажите теорему 6.
- Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , причем  $\forall n x_n > b$ . Следует ли отсюда, что: а)  $a > b$ ;
- б)  $a \geq b$ ?

### Примеры решения задач

- Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$ , а последовательность  $\{z_n\}$  расходится.

Доказать, что  $\{z_n y_n\}$  расходится.

Δ Обозначим  $x_n = z_n y_n$ . Докажем расходимость последовательности  $\{x_n\}$  методом от противного. Предположим, что  $\{x_n\}$  сходится. Так как по условию  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0$ , то по теореме 6 последовательность

$\{x_n/y_n\} = \{z_n\}$  определена, начиная с некоторого номера, и сходится. Но это противоречит условию. Следовательно,  $\{x_n\}$  расходится. ▲

2. Доказать, что последовательность  $\{\sin n\}$  расходится.

△ Доказательство проведем методом от противного. Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = a$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n+2) = a$ , откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin(n+2) - \sin n) = 0. \quad (1)$$

Так как  $\sin(n+2) - \sin n = 2 \sin 1 \cos(n+1)$ , то, учитывая равенство (1), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n+1) = 0. \quad (2)$$

Из равенства  $\cos(n+1) = \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1$  находим  $\sin n = -\frac{1}{\sin 1}(\cos n \cos 1 - \cos(n+1))$ . Отсюда в силу (2) следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = 0$ . Таким образом, получаем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n = 0$ , что противоречит равенству  $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$ . Следовательно,  $\{\sin n\}$  расходится. ▲

3. Найти пределы:

$$\text{а)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n}{n^2 + 1}; \quad \text{б)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{n - \sqrt{n}}; \quad \text{в)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 3^n}{3^n - 2}.$$

△ Отметим, что каждый из этих пределов является неопределенностью типа  $\infty/\infty$ . Имеем:

$$\text{а)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n + \frac{1}{n}} = 0,$$

так как  $\left\{n + \frac{1}{n}\right\}$  бесконечно большая;

$$\text{б)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{n - \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - \sqrt{n})(n + \sqrt{n})}{n - \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sqrt{n}) = +\infty;$$

$$\text{в)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 3^n}{3^n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{1 - \frac{2}{3^n}} = 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3^n}\right)} = 5. \quad \blacktriangle$$

4. Найти предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$ .

△ Отметим, что этот предел является неопределенностью типа  $\infty - \infty$ . Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)} = \frac{1}{2}. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

5. Вычислить  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cos n}{n + 1}$ .

△ Последовательность  $\{\cos n\}$  ограничена, а  $\left\{\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right\}$  бесконечно

малая, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 0.$$

Отсюда по теореме 4 следует, что произведение этих последовательностей является бесконечно малой, т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cos n}{n+1} = 0$ . ▲

6. Найти предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{n^5}$ .

△ Обозначим  $S_n = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4$ . Будем искать  $S_n$  в виде

$$S_n = An^5 + Bn^4 + Cn^3 + Dn^2 + En + F.$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= A[(n+1)^5 - n^5] + B[(n+1)^4 - n^4] + \\ &\quad + C[(n+1)^3 - n^3] + D[(n+1)^2 - n^2] + E[(n+1) - n]. \end{aligned}$$

Отсюда для любого натурального  $n$  имеем

$$\begin{aligned} (n+1)^4 &= 5An^4 + (10A + 4B)n^3 + (10A + 6B + 3C)n^2 + \\ &\quad + (5A + 4B + 3C + 2D)n + A + B + C + D + E. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при равных степенях  $n$  в левой и правой частях равенства, получим

$$\begin{aligned} 5A &= 1, \\ 10A + 4B &= 4, \\ 10A + 6B + 3C &= 6, \\ 5A + 4B + 3C + 2D &= 4, \\ A + B + C + D + E &= 1. \end{aligned}$$

Отсюда  $A = 1/5$ ,  $B = 1/2$ ,  $C = 1/3$ ,  $D = 0$ ,  $E = -1/30$ . Таким образом, для любого  $n$  имеем  $S_n = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n + F$ . Полагая  $n = 1$ , получим  $1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{30} + F$ , откуда  $F = 0$ . Следовательно,

$$S_n = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}.$$

Итак,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{n^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{30n^4} \right) = \frac{1}{5}. ▲$$

## Задачи и упражнения для самостоятельной работы

16. а) Известно, что последовательность  $\{x_n\}$  сходится, а  $\{y_n\}$  расходится. Может ли последовательность  $\{x_n y_n\}$  быть сходящейся, расходящейся?
- б) Известно, что последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  расходятся. Могут ли последовательности  $\{x_n + y_n\}$ ,  $\{x_n y_n\}$  быть сходящимися, расходящимися?
- Ответьте на эти вопросы, используя в качестве примеров последовательности  $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ ,  $\{(-1)^n\}$ ,  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ,  $\{n\}$ ,  $\{-n\}$ ,  $\{(-1)^{n+1}\}$
17. Даны последовательности  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ,  $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ ,  $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ ,  $\left\{\frac{1}{n+100}\right\}$ . Выберите из этих бесконечно малых последовательностей такие, что
- а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n/y_n) = 0$ , б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n/y_n) = 1$ , в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n/y_n) = \infty$ ,
- г)  $\{x_n/y_n\}$  расходится, но ограничена
18. Дано  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \neq \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ . Докажите, что
- а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \infty$ , б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n/y_n) = 0$ ,
- в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n/x_n) = \infty$  ( $x_n \neq 0$ ), г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \infty$ , если  $b \neq 0$
19. Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n/y_n) = \infty$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \neq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  ( $y_n \neq 0$ )
20. Известно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq \infty$ . Найдите предел последовательности  $\{y_n\}$ , если
- а)  $y_n = 2x_n - x_{n+1}$ , б)  $y_n = x_n - x_{n+2}$ ,
- в)  $y_n = (x_{n+1} - x_n)^n$ , г)  $y_n = \min(x_n, x_{n+1})$
21. Известно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq \infty$ . Приведите пример, когда последовательность  $\{y_n\}$  сходится (расходится), если а)  $y_n = [x_n]$ , б)  $y_n = \operatorname{sgn} x_n$
22. Известно, что  $x_n > 0$ . Докажите, что
- а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n^2 - x_n) = 6$ ,
- б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) = 2$
23. Исследуйте на сходимость последовательности (в зависимости от  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ )
- а)  $x_n = \frac{n^\alpha + 1}{n^\beta + 3}$ , б)  $x_n = n^\gamma \frac{\sqrt[3]{n^3 + 1} - n}{\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}}$
24. Найдите пределы
- а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n + 2}$ , б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ , в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$
25. Пусть  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$ . Требуется вычислить  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .
- Оценим  $x_n$  сверху и снизу
- $$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2}} = 1$$
- Таким образом, имеем
- $$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} < x_n < 1$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1,$$

то по теореме о трех последовательностях  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ . С другой стороны, произвольный член в выражении для  $x_n$  равен  $\frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} = 0$ , то

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} = 0 + 0 + \dots + 0 = 0 \end{aligned}$$

Итак, мы получили, что  $1 = 0$ . Найдите ошибку в проведенных рассуждениях. Какой из двух результатов верен, а какой нет и почему?

26. Вычислите пределы

- а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$ ,
- б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right)$ ,
- в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$ ,
- г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right)$ ,
- д)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n-1}{n!} \right)$

## § 4. Замечательные пределы

### Основные понятия и формулы

Будем говорить, что бесконечно большая последовательность  $\{x_n\}$  имеет *более высокий порядок роста*, чем бесконечно большая последовательность  $\{y_n\}$ , если  $\{x_n/y_n\}$  бесконечно большая, при этом будем употреблять обозначение  $y_n \ll x_n$ . Этот параграф посвящен вычислениям некоторых пределов, с помощью которых сравниваются порядки роста различных бесконечно больших последовательностей. Нахождение таких пределов основывается на применении теоремы 8 о трех последовательностях и формулы бинома Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k,$$

где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, \quad 0! = 1$$

Из этой формулы получаем неравенство

$$(a+b)^n > \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2, \quad (1)$$

справедливо для положительных  $a$  и  $b$  и любого натурального числа  $n$ .

Рассматриваемые в этом параграфе примеры и задачи приводят к таким результатам:

$$\log_{|a|} n \ll n^\alpha \ll a^n \ll n! \quad \text{при } \alpha > 0, |a| > 1. \quad (2)$$

(Соотношение  $\log_{|a|} n \ll n^\alpha$  справедливо при  $\alpha > 0$ , но в упр. 24 и упр. 25 предлагается доказать его лишь при  $\alpha \geq 1$ .)

### Контрольные вопросы и задания

- Сформулируйте теорему о трех последовательностях.
- Напишите первые четыре члена формулы бинома Ньютона для разложения  $(1 + a)^n$ .
- Даны бесконечно большие последовательности:  $\{n!\}$ ,  $\{\log_{10} n\}$ ,  $\{\sqrt[3]{n}\}$ ,  $\{4^n\}$ ,  $\{n^5\}$ . Пользуясь соотношениями (2), для каждой из двух последовательностей укажите, какая имеет более высокий порядок роста.

### Примеры решения задач

1. Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$  при  $\alpha > 0, |a| > 1$ .

$\Delta$  Из определения предела последовательности следует, что если  $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$ , то и  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ . Поэтому достаточно доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0$ , где  $\omega_n = \frac{n^\alpha}{|a|^n}$ . Представим  $\omega_n$  в виде

$$\omega_n = \left( \frac{n}{\{|a|^{1/\alpha}\}^n} \right)^\alpha.$$

Рассмотрим последовательность  $z_n = \frac{n}{\{|a|^{1/\alpha}\}^n}$  и докажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ . Тогда из результата примера 5 из § 1 будет следовать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0$ . Так как  $\alpha > 0, |a| > 1$ , то  $\exists \beta > 0$  такое, что  $|a|^{1/\alpha} = 1 + \beta$ . Применив неравенство (1) к биному  $(1 + \beta)^n$ , получим

$$(|a|^{1/\alpha})^n = (1 + \beta)^n > \frac{n(n-1)}{2} \beta^2 \quad \forall n \geq 2.$$

Отсюда следует, что

$$z_n = \frac{n}{|a|^{n/\alpha}} < \frac{2}{\beta^2(n-1)} \quad \forall n \geq 2.$$

Положим  $x_n = 0 \quad \forall n$  и  $y_n = \frac{2}{\beta^2(n-1)} \quad \forall n \geq 2$ . Последовательности  $\{x_n\}$ ,  $\{z_n\}$ ,  $\{y_n\}$  удовлетворяют условиям теоремы о трех последовательностях, поскольку  $x_n \leq z_n \leq y_n$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ . Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ , что и требовалось доказать.

Таким образом, можно записать

$$n^\alpha \ll a^n \quad \text{при } \alpha > 0, \quad |a| > 1. \blacksquare$$

**2.** Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$  при  $|a| > 1$ .

Δ Рассмотрим последовательность  $z_n = \frac{|a|^n}{n!}$  и докажем, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ . Пусть  $k$  — натуральное число такое, что  $k \geq |a|$ , и пусть  $n > 2k$ . Представим  $z_n$  в виде произведения  $n$  сомножителей:

$$\frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|}{1} \frac{|a|}{2} \dots \frac{|a|}{2k} \frac{|a|}{2k+1} \dots \frac{|a|}{n}.$$

Поскольку  $k \geq |a|$ , дробь  $\frac{a}{2k}$  и все дроби, следующие за ней, не больше, чем  $1/2$ . Поэтому получаем оценку

$$z_n = \frac{|a|^n}{n!} \leq |a|^{2k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k+1} = (2|a|)^{2k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Так как  $z_n > 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2|a|)^{2k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ , по теореме о трех последовательностях  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ . Отсюда следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ , т. е. последовательность  $\{n!\}$  имеет более высокий порядок роста, чем последовательность  $\{a^n\}$  при  $|a| > 1$ . Итак,  $a^n \ll n!$  при  $|a| > 1$ . ▲

**3.** Доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

Δ При  $n \geq 2$  число  $\sqrt[n]{n}$  больше 1. Поэтому  $\forall n \geq 2 \exists \beta_n > 0$  такое, что

$$\sqrt[n]{n} = 1 + \beta_n. \quad (3)$$

Из равенства (3) вытекает, что  $n = (1 + \beta_n)^n$ . Применяя к правой части последнего равенства неравенство (1), получим

$$n = (1 + \beta_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{1} \beta_n^2.$$

Отсюда находим, что  $\beta_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$   $\forall n \geq 2$ . Из неравенств  $0 < \beta_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$  и соотношения  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$  по теореме о трех последовательностях следует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ . Из равенства (3) теперь имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ . ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

27. Используя определение предела последовательности и результат примера 3, докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$  при  $a > 1$ .
28. Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0$  при  $a > 1, \alpha > 1$ .

29. Докажите, что заданные последовательности бесконечно малые  
 а)  $x_n = \frac{n}{2^n}$ , б)  $x_n = \frac{3^n}{n!}$ , в)  $x_n = \sqrt[n]{5} - 1$
30. Вычислите пределы  
 а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} \right)$ , б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)}$
31. Используя результат примера 2, докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

### § 5. Монотонные последовательности

#### Основные понятия и теоремы

Последовательность  $\{x_n\}$  называется *невозрастающей* (*неубывающей*), если  $\forall n \quad x_{n+1} \leq x_n$  ( $x_{n+1} \geq x_n$ )

Невозрастающие и неубывающие последовательности называют *монотонными* последовательностями

Последовательность  $\{x_n\}$  называется *возрастающей* (*убывающей*), если  $\forall n \quad x_{n+1} > x_n$  ( $x_{n+1} < x_n$ )

Возрастающие и убывающие последовательности называют также *строго монотонными*

Отметим, что монотонная последовательность всегда ограничена хотя бы с одной стороны: невозрастающая последовательность ограничена сверху, а неубывающая — снизу своим первым членом. Если же монотонная последовательность ограничена и с другой стороны, то она сходится, т. е. имеет место следующая теорема

**Теорема 9** *Монотонная ограниченная последовательность сходится*

#### Контрольные вопросы и задания

- Сформулируйте а) определение монотонной последовательности, б) признак сходимости монотонной последовательности
- Является ли ограниченность последовательности необходимым и достаточным условием сходимости а) монотонной последовательности, б) произвольной последовательности?

#### Пример решения задачи

Найти предел последовательности  $\{x_n\}$ , которая определяется рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = x_n(2 - x_n) \quad \forall n \geq 1, \tag{1}$$

где  $x_1$  — произвольное число, удовлетворяющее неравенству  $0 < x_1 < 1$

Δ Докажем сначала, что последовательность  $\{x_n\}$  ограничена, а именно, пользуясь методом математической индукции, докажем, что  $\forall n$  справедливы неравенства

$$0 < x_n < 1 \quad (2)$$

Для  $x_1$  неравенства (2) выполняются по условию. Допустим, что неравенства (2) имеют место для номера  $n$ , и докажем, что тогда они будут справедливы для номера  $n + 1$ . Запишем формулу (1) в виде

$$x_{n+1} = 1 - (1 - x_n)^2$$

Из неравенств (2) следует, что  $0 < (1 - x_n)^2 < 1$ , поэтому  $0 < x_{n+1} < 1$ . Тем самым неравенства (2) доказаны  $\forall n$ .

Докажем теперь, что последовательность  $\{x_n\}$  возрастающая. Так как  $x_n < 1$ , то  $2 - x_n > 1$ . Разделив равенство (1) на  $x_n$ , получим

$$x_{n+1}/x_n = 2 - x_n > 1$$

Отсюда следует, что  $x_{n+1} > x_n \quad \forall n$ . Таким образом, последовательность  $\{x_n\}$  монотонная и ограниченная. Следовательно, по теореме 9 существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , который обозначим  $a$ . Для отыскания  $a$  перейдем к пределу в рекуррентной формуле (1). Получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 - x_n), \quad \text{или} \quad a = a(2 - a)$$

Отсюда  $a = 0$  или  $a = 1$ , так как  $x_1 > 0$  и последовательность  $\{x_n\}$  возрастающая, то  $a = 1$ . ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

32. Докажите сходимость последовательности  $\{x_n\}$ , где  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$
33. Докажите сходимость и вычислите предел последовательности  $\{x_n\}$ , если  $x_1 = \sqrt{a}$ ,  $x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}$ ,  $x_n = \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}}_n$ , где  $a > 0$
34. Докажите сходимость и вычислите предел последовательности  $\{x_n\}$ , если она определяется рекуррентным соотношением
- $x_1 = a$ ,  $x_2 = b$ ,  $a \neq b$ ,  $x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \quad \forall n \geq 3$ ,
  - $x_1$  — произвольное положительное число,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad \forall n \geq 1, \quad a > 0,$$

- в)  $x_1$  — произвольное отрицательное число,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad \forall n \geq 1, \quad a > 0,$$

- г)  $x_1 = \frac{3}{2}$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}$   $\forall n \geq 1$ ; д)  $x_1 \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ ,  $x_{n+1} = x_1 + x_n^2$   
 $\forall n \geq 1$ ; е)  $x_1 = 1$ ,  $x_{n+1} = 1 - \frac{1}{4x_n}$   $\forall n \geq 1$ ; ж)  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$ ,  
 $x_{n+1} = \frac{1}{3}(1 + x_n + x_{n-1}^3)$   $\forall n \geq 2$ ; з)  $x_n > 0$   $\forall n \geq 1$ ; в качестве  $x_{n+1}$   
берется любое число, удовлетворяющее неравенству  $x_n(6 - x_{n+1}) > 9$ .

35. Докажите, что неограниченная монотонная последовательность является бесконечно большой.

36. Докажите существование предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

## § 6. Пределные точки

### Основные понятия и теоремы

Пусть  $\{x_n\}$  — некоторая числовая последовательность. Рассмотрим произвольную возрастающую последовательность целых положительных чисел  $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ . Отметим, что  $k_n \geq n$ . Выберем из  $\{x_n\}$  члены с номерами  $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ :

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}, \dots$$

Полученная числовая последовательность  $\{x_{k_n}\}$  называется *подпоследовательностью* последовательности  $\{x_n\}$ .

**Теорема 10.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , то любая подпоследовательность  $\{x_{k_n}\}$  сходится к  $a$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Теорема 11** (теорема Больцано–Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

**Определение 1.** Число  $a$  называется *пределной точкой* (или *частичным пределом*) последовательности  $\{x_n\}$ , если из последовательности  $\{x_n\}$  можно выделить подпоследовательность  $\{x_{k_n}\}$ , сходящуюся к  $a$ .

Можно дать другое, эквивалентное определение предельной точки.

**Определение 2.** Число  $a$  называется *пределной точкой* последовательности  $\{x_n\}$ , если в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$  содержится бесконечно много членов последовательности  $\{x_n\}$ .

**Замечание 1.** Из теоремы 10 следует, что сходящаяся последовательность имеет только одну предельную точку, совпадающую с ее пределом.

**Замечание 2.** Из теоремы 11 следует, что всякая ограниченная последовательность имеет по крайней мере одну предельную точку.

Наибольшая (наименьшая) предельная точка последовательности  $\{x_n\}$ , ограниченной сверху (снизу), называется *верхним (нижним) пределом* этой последовательности и обозначается  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$  ( $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ ).

Очевидно, если  $\{x_n\}$  сходится, то  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Если последовательность  $\{x_n\}$  не ограничена сверху (снизу), то полагают  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  ( $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ).

### Контрольные вопросы и задания

- Сформулируйте определения: а) последовательности; б) предельной точки (дайте два определения и докажите их эквивалентность); в) верхнего (нижнего) предела последовательности.
- Дайте геометрическую интерпретацию определения предельной точки.
- Является ли предел последовательности ее предельной точкой? Ответ обоснуйте.
- Даны последовательности  $\{n((-1)^n + 1)\}$ ,  $\{n\}$ ,  $\{(-1)^n + 1\}$ . Укажите, какая из них: а) имеет предельную точку; б) не имеет предельной точки; в) имеет две предельные точки; г) имеет только одну предельную точку. Есть ли среди этих последовательностей сходящаяся?
- Докажите, что сходящаяся последовательность имеет только одну предельную точку, совпадающую с ее пределом. Верно ли обратное утверждение: если последовательность имеет единственную предельную точку, то она сходится?
- Дана последовательность  $\{x_n\}$ . Известно, что любая окрестность точки  $a$  содержит бесконечно много членов последовательности и никакой сегмент, которому не принадлежит точка  $a$ , не содержит бесконечно много членов последовательности. Следует ли отсюда, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ?
- Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = 4$ . Может ли последовательность  $\{x_n\}$  быть: а) сходящейся (если да, то чему может быть равен ее предел?); б) расходящейся?
- Сформулируйте теорему Больцано–Вейерштрасса.
- Верно ли утверждение: если последовательность не ограничена, то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность?

### Примеры решения задач

- Доказать расходимость последовательности  $x_n = (-1)^n$ .

$\Delta$  Рассмотрим две подпоследовательности этой последовательности:  $x_{2k} = 1$  и  $x_{2k-1} = -1$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Очевидно, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = 1$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k-1} = -1$ .

Таким образом, последовательность  $\{(-1)^n\}$  имеет две предельные точки: 1 и  $-1$ , а поэтому не может быть сходящейся, поскольку сходящаяся последовательность имеет только одну предельную точку. ▲

- Найти: а) все предельные точки последовательности  $\{\sin n^\circ\}$ ; б) верхний и нижний пределы этой последовательности.

$\Delta$  а) Каждое из чисел

$$0, \pm \sin 1^\circ, \pm \sin 2^\circ, \dots, \pm \sin 89^\circ, \pm 1$$

встречается в последовательности бесконечно много раз, поскольку  $\forall n, p \in N \sin n^\circ = \sin(360^\circ p + n^\circ)$ . Поэтому каждое указанное число является предельной точкой последовательности  $\{\sin n^\circ\}$ . Других предельных точек последовательность не имеет, так как если число  $a$  не совпадает ни с одним из этих 181 чисел, то существует окрестность точки  $a$ , не содержащая ни одного члена последовательности.

б) Из указанных в п а) 181 предельных точек наименьшей является  $-1$ , а наибольшей  $1$ , т. е.

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \sin n^\circ = 1, \quad \underline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \sin n^\circ = -1 \quad \blacktriangle$$

3. Найти: а) все предельные точки последовательности

$$0, 1, 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1/6, \dots;$$

б) верхний и нижний пределы этой последовательности.

Δ а) Данная последовательность  $\{x_n\}$  представляет собой множество всех рациональных чисел сегмента  $[0, 1]$ , расположенных в указанном порядке. Так как в любой  $\varepsilon$ -окрестности любого вещественного числа из сегмента  $[0, 1]$  содержится бесконечно много рациональных чисел (см. упр. 5 к гл. 1), то каждая точка этого сегмента является предельной точкой данной последовательности. Если же  $a \notin [0, 1]$ , то эта точка не является предельной точкой данной последовательности, поскольку для нее существует окрестность, не содержащая ни одного члена последовательности.

б) Очевидно,  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} x_n = 0, \quad \underline{\lim_{n \rightarrow \infty}} x_n = 1$ .  $\blacktriangle$

4. Доказать, что бесконечно большая последовательность  $\{x_n\}$  не имеет предельной точки.

Δ Доказательство проведем методом от противного. Пусть некоторая точка  $a$  является предельной точкой последовательности  $\{x_n\}$ . Тогда существует подпоследовательность  $\{x_{k_n}\}$  такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = a$ . С другой стороны,  $\{x_{k_n}\}$  не имеет предела, поскольку является бесконечно большой. Действительно, так как  $\{x_n\}$  — бесконечно большая, то  $\forall A > 0 \exists N: \forall n > N |x_n| > A$ . Отсюда, поскольку  $k_n \geq n$  и  $k_{n+1} > k_n$ , следует, что  $\forall k_n > N |x_{k_n}| > A$ , т. е.  $\{x_{k_n}\}$  бесконечно большая. Полученное противоречие доказывает, что  $\{x_n\}$  не имеет предельной точки.  $\blacktriangle$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

37. Докажите, что

- а) из любой неограниченной последовательности можно выделить бесконечно большую подпоследовательность,
- б) любая подпоследовательность бесконечно большой последовательности является бесконечно большой,
- в) монотонная неограниченная последовательность не имеет предельной точки,
- г) у каждой ограниченной последовательности существуют верхний и нижний пределы

38. Известно, что последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  имеют по одной предельной точке. Покажите на примерах, что последовательности  $\{x_n + y_n\}$  и  $\{x_n y_n\}$  могут не иметь предельных точек, иметь одну предельную точку, иметь две предельные точки.
39. Найдите все предельные точки последовательности  $\{x_n\}$ , а также  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ , если
- $x_n = (-1)^{n-1} \left(2 + \frac{3}{n}\right)$ ,
  - $x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{\pi n}{2}$ ,
  - $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{n(n-1)/2}$ ,
  - $x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2\pi n}{3}$ ,
  - $x_n = 1 + n \sin \frac{\pi n}{2}$ ,
  - $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$ ,
  - $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left((-1)^n + \sin \frac{\pi n}{4}\right)$ ,
  - $x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{\pi n}{4}$ ,
  - $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}$ ,
  - $x_n = \cos^n \frac{2\pi n}{3}$ ,
  - $x_n = (-1)^n n$
40. Исследуйте на сходимость последовательность
- $$x_n = \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{n}{n}$$

## § 7. Фундаментальные последовательности.

### Критерий Коши сходимости последовательности

#### Основные понятия и теоремы

Определение 1. Последовательность  $\{x_n\}$  называется *фундаментальной*, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N$  такое, что  $\forall n > N$  и любого натурального числа  $p$  выполняется неравенство  $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$ .

Это определение эквивалентно следующему

Определение 2. Последовательность  $\{x_n\}$  называется *фундаментальной*, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N$  такое, что  $\forall n > N \forall m > N$  выполняется неравенство  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ .

Геометрическая интерпретация этих определений состоит в следующем: если последовательность  $\{x_n\}$  фундаментальная, то  $\forall \varepsilon > 0 \exists N$  такое, что расстояние между любыми двумя членами последовательности с номерами, большими, чем  $N$ , меньше  $\varepsilon$ .

Теорема 12 (критерий Коши сходимости последовательности). Для того чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

#### Контрольные вопросы и задания

- Сформулируйте определения
  - фундаментальной последовательности (дайте два определения и докажите их эквивалентность),
  - нефундаментальной последовательности (пользуясь правилом построения отрицаний)
 Дайте геометрическую интерпретацию этих определений
- Сформулируйте критерий Коши сходимости последовательности

### Примеры решения задач

1. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности  $\{x_n\}$ , где  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{k^2}$ .

Δ В силу критерия Коши достаточно доказать, что последовательность  $\{x_n\}$  фундаментальная. Для этого оценим  $|x_n - x_{n+p}|$ . Имеем

$$|x_n - x_{n+p}| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin k}{k^2} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2}.$$

Так как  $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ , то

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} < \\ &< \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \right) = \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Поэтому  $\forall n, p \in N$  имеем

$$|x_n - x_{n+p}| < 1/n. \quad (1)$$

Зададим теперь произвольное  $\varepsilon > 0$  и положим  $N = [1/\varepsilon]$ . Тогда  $\forall n > N$  выполняется неравенство  $n \geq [1/\varepsilon] + 1 > 1/\varepsilon$ , откуда  $1/n < \varepsilon$ . Следовательно,  $\forall n > N$  и любого натурального числа  $p$ , используя неравенство (1), получаем  $|x_n - x_{n+p}| < 1/n < \varepsilon$ . Это доказывает фундаментальность последовательности  $\{x_n\}$ . ▲

2. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательности  $\{x_n\}$ , где  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

Δ В силу критерия Коши достаточно доказать, что последовательность  $\{x_n\}$  не является фундаментальной. Для этого оценим  $|x_n - x_{n+p}|$ . Имеем

$$|x_n - x_{n+p}| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{p}{\sqrt{n+p}} \quad \forall n, p \in N.$$

В частности, при  $p = n$  получаем

$$|x_n - x_{2n}| \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \forall n. \quad (2)$$

Возьмем  $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$ . Тогда  $\forall N$  найдутся такие  $n > N$  и натуральное число  $p$ , что  $|x_n - x_{n+p}| \geq \varepsilon$ . В самом деле, в силу неравенства (2) достаточно взять любое  $n > N$  и  $p = n$ . Это доказывает, что последовательность  $\{x_n\}$  не является фундаментальной.  $\blacktriangle$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

41. Пользуясь критерием Коши, докажите сходимость последовательности  $\{x_n\}$ , если
- $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ ,
  - $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos(k!)}{k(k+1)}$ ,
  - $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{2^k}$ ,
  - $x_n = \sum_{k=0}^n a_k q^k$ , где  $|q| < 1$  и  $|a_k| \leq M \quad \forall k, M > 0$
42. Пользуясь критерием Коши, докажите, что если последовательность  $x_n = \sum_{k=1}^n a_k$  сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
43. Пользуясь критерием Коши, докажите расходимость последовательности  $\{x_n\}$ , если
- $x_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k$ ,
  - $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

## ГЛАВА III

### ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

#### § 1. Предел функции. Теоремы о пределах. Бесконечно большие функции

##### Основные понятия и теоремы

**1. Предел функции в точке.** Пусть  $x$  — числовая переменная величина,  $X$  — область ее изменения. Если каждому числу  $x \in X$  поставлено в соответствие некоторое число  $y$ , то говорят, что на множестве  $X$  определена *функция*, и пишут  $y = f(x)$ . Переменная  $x$  называется *независимой переменной* (или *аргументом функции*), множество  $X$  — *областью определения функции*  $f(x)$ , а число  $y$ , соответствующее данному значению аргумента  $x$ , — *частным значением функции в точке*  $x$ . Совокупность  $Y$  всех частных значений функции называется *множеством значений функции*  $f(x)$ .

Точка  $a$  ( $a \in X$  или  $a \notin X$ ) называется *пределной точкой множества*  $X$ , если в любой окрестности точки  $a$  имеются точки множества  $X$ , отличные от  $a$ .

В определениях этого параграфа предполагается, что  $a$  есть *пределная точка* множества  $X$  — области определения функции  $f(x)$ .

**Определение 1** (по Коши). Число  $b$  называется *пределом функции*  $f(x)$  *в точке*  $a$  (при  $x \rightarrow a$ ), если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что  $\forall x$ , удовлетворяющего условиям  $x \in X$ ,  $0 < |x - a| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$ .

**Определение 2** (по Гейне). Число  $b$  называется *пределом функции*  $f(x)$  *в точке*  $a$ , если для любой сходящейся к  $a$  последовательности  $\{x_n\}$  такой, что  $x_n \in X$ ,  $x_n \neq a$ , соответствующая последовательность значений функции  $\{f(x_n)\}$  сходится к  $b$ .

Обозначение:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  или  $f(x) \rightarrow b$  при  $x \rightarrow a$ .

Подчеркнем, что понятие *предела функции в точке*  $a$  вводится только для *пределных точек*  $a$  области определения функции. Отметим, что при этом функция может быть и не определена в точке  $a$ , т. е., вообще говоря,  $a \notin X$ .

Сформулируем отрицания определений 1 и 2.

**Отрицание определения 1.** Число  $b$  не является *пределом функции*  $f(x)$  *в точке*  $a$  ( $b \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ), если  $\exists \varepsilon > 0$  такое, что  $\forall \delta > 0$

$\exists x \in X$ , для которого  $0 < |x - a| < \delta$  и  $|f(x) - b| \geq \varepsilon$ .

**Отрицание определения 2.** Число  $b$  не является *пределом функции*  $f(x)$  *в точке*  $a$  ( $b \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ), если существует сходящаяся

к  $a$  последовательность  $\{x_n\}$  ( $x_n \in X$ ,  $x_n \neq a$ ) такая, что соответствующая последовательность  $\{f(x_n)\}$  не сходится к  $b$ .

## 2. Теоремы о пределах.

Теорема 1. Определения 1 и 2 предела функции эквивалентны.

Теорема 2. Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  определены в некоторой окрестности точки  $a$ , кроме, быть может, самой точки  $a$ , и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ . Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = b + c; \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = b - c;$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = bc; \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} \text{ при условии } c \neq 0.$$

Теорема 3. Пусть функции  $f(x)$ ,  $g(x)$  и  $h(x)$  определены в некоторой окрестности точки  $a$ , кроме, быть может, самой точки  $a$ , и удовлетворяют неравенствам  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ . Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ .

## 3. Односторонние пределы.

Определение 1 (по Коши). Число  $b$  называется *правым (левым) пределом* функции  $f(x)$  в точке  $a$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что  $\forall x$ , удовлетворяющего условиям  $x \in X$ ,  $a < x < a + \delta$  ( $a - \delta < x < a$ ), выполняется неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$ .

Определение 2 (по Гейне). Число  $b$  называется *правым (левым) пределом* функции  $f(x)$  в точке  $a$ , если для любой сходящейся к  $a$  последовательности  $\{x_n\}$  такой, что  $x_n \in X$ ,  $x_n > a$  ( $x_n < a$ ), соответствующая последовательность значений функции  $\{f(x_n)\}$  сходится к  $b$ .

Обозначения:  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$  или  $f(a+0) = b$  (соответственно  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$  или  $f(a-0) = b$ ).

Определения 1 и 2 эквивалентны.

Теорема 4. Если существуют  $f(a+0)$  и  $f(a-0)$ , причем  $f(a+0) = f(a-0) = b$ , то существует  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ .

Теорема 5. Если функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $a$ , за исключением, быть может, самой точки  $a$ , и существует  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , то существуют  $f(a+0)$  и  $f(a-0)$ , причем  $f(a+0) = f(a-0) = b$ .

4. Предел функции при  $x \rightarrow \infty$ . Пусть функция  $f(x)$  определена на полупрямой  $(c, +\infty)$ .

Определение 1 (по Коши). Число  $b$  называется *пределом функции*  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  ( $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ), если  $\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0$  ( $a \geq c$ ) такое, что  $\forall x > A$  выполняется неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$ .

Определение 2 (по Гейне). Число  $b$  называется *пределом функции*  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , если для любой бесконечно большой последо-

вательности  $\{x_n\}$  ( $x_n > c$ ) соответствующая последовательность значений функции  $\{f(x_n)\}$  сходится к  $b$ .

Определения 1 и 2 эквивалентны.

Аналогично определяется  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . Если  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ , то пишут  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ . Например,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x) = 0$ .

Для односторонних пределов и пределов при  $x \rightarrow \infty$  справедлива теорема, аналогичная теореме 2.

### 5. Бесконечно большие функции.

Определение 1 Функция  $f(x)$  называется *бесконечно большой в точке  $a$  справа*, если  $\forall M > 0 \exists \delta > 0$  такое, что  $\forall x$ , удовлетворяющего условию  $x \in X, a < x < a + \delta$ , выполняется неравенство

$$|f(x)| > M. \quad (1)$$

Обозначение:  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$  или  $f(a+0) = \infty$ . Подчеркнем, что эта запись означает только, что  $f(x)$  является бесконечно большой в точке  $a$  справа, но вовсе не означает, что  $f(x)$  имеет в точке  $a$  правый предел, очевидно, этот предел не существует.

Если в определении 1 вместо неравенства (1) выполняется неравенство  $f(x) > M$  ( $f(x) < -M$ ), то говорят, что функция  $f(x)$  является бесконечно большой знака плюс (минус) в точке  $a$  справа, и пишут  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$  или  $f(a+0) = +\infty$  (соответственно

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty \text{ или } f(a+0) = -\infty)$$

Аналогично определяется бесконечно большая функция в точке  $a$  слева.

Если функция является бесконечно большой в точке  $a$  справа и слева, то пишут  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ . Например,  $\lim_{x \rightarrow 0} (1/x) = \infty$ .

Определение 2. Функция  $f(x)$  называется *бесконечно большой в точке  $a$  справа (слева)*, если для любой сходящейся к  $a$  последовательности  $\{x_n\}$  такой, что  $x_n \in X, x_n > a$  ( $x_n < a$ ), соответствующая последовательность  $\{f(x_n)\}$  является бесконечно большой.

Определения 1 и 2 эквивалентны.

Пусть функция  $f(x)$  определена на полупрямой  $(c, +\infty)$ .

Определение 3. Функция  $f(x)$  называется *бесконечно большой при  $x \rightarrow +\infty$* , если  $\forall M > 0 \exists A$  ( $A \geq c$ ) такое, что  $\forall x > A |f(x)| > M$ .

Определение 4. Функция  $f(x)$  называется *бесконечно большой при  $x \rightarrow +\infty$* , если для любой бесконечно большой последовательности  $\{x_n\}$  ( $x_n > c$ ) соответствующая последовательность  $\{f(x_n)\}$  является бесконечно большой.

Обозначение:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ .

Определения 3 и 4 эквивалентны.

Аналогично вводится понятие бесконечно большой функции при  $x \rightarrow -\infty$ :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ . Если функция  $f(x)$  является бесконечно

большой при  $x \rightarrow +\infty$  и при  $x \rightarrow -\infty$ , то пишут  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . Например,  $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ .

### Контрольные вопросы и задания

- 1 Сформулируйте два определения предела функции в точке. Что означает эквивалентность этих определений?
- 2 Пользуясь определением предела функции по Гейне, докажите единственность предела функции в точке.
- 3 Докажите, что  $\forall x_0 \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ , пользуясь определением предела функции а) по Коши, б) по Гейне.
- 4 Данна функция  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ . Определена ли функция  $f(x)$  в точке  $x = 0$ ? Является ли точка  $x = 0$  предельной точкой области определения функции? Существует ли  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ?
- 5 Сформулируйте отрицание двух определений предела функции в точке.
- 6 Сформулируйте теоремы 2 и 3 о пределах функций.
- 7 Сформулируйте два определения односторонних пределов функции и отрицания этих определений.
- 8 Существуют ли  $f(3+0)$  и  $f(3-0)$ , если  $f(x) = \frac{|3-x|}{3-x}$ ? Существует ли  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ?
- 9 При каких условиях из существования односторонних пределов (предела функции) следует существование предела функции (односторонних пределов)?
- 10 Сформулируйте два определения предела функции при  $x \rightarrow +\infty$  и отрицания этих определений.
- 11 Докажите, что функция  $f(x) = x$  не имеет предела при  $x \rightarrow +\infty$ .
- 12 Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ .
- 13 Сформулируйте определения по Гейне и по Коши, соответствующие следующим символическим обозначениям:  
 а)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , б)  $f(a+0) = -\infty$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ ,  
 г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , д)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- 14 Докажите, что функция  $f(x) = \frac{1}{x-3}$  является бесконечно большой в точке  $x = 3$ .

### Примеры решения задач

1. Доказать, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ .

Δ Воспользуемся неравенством  $|\sin x| \leq |x| \quad \forall x$ . Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$  и положим  $\delta = \varepsilon$ . Тогда если  $|x| < \delta$ , то  $|\sin x| \leq |x| < \delta = \varepsilon$ . Это и означает (согласно определению предела функции по Коши), что  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ . ▲

2. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , где  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ .

Δ Так как  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$ , то этот предел является

неопределенностью типа  $0/0$ , и мы не можем воспользоваться теоремой 2 о пределе частного двух функций. Воспользуемся тем, что при рассмотрении предела функции в точке  $x = 1$  ее аргумент не принимает значения, равного 1. Поэтому  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)$ , так как  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ , если  $x \neq 1$ .

Пусть  $\{x_n\}$  — произвольная последовательность, сходящаяся к 1 ( $x_n \neq 1$ ); тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + 1) = 2$ . Это означает (согласно определению предела функции по Гейне), что  $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ . ▲

**3.** Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}$ .

Δ Этот предел, как и в примере 2, является неопределенностью типа  $0/0$ . Однако в отличие от примера 2 здесь нельзя непосредственно “сократить” числитель и знаменатель дроби на  $x - 1$ . Поэтому предварительно преобразуем функцию, умножив числитель и знаменатель на  $(\sqrt{3+x}+2)$  — выражение, сопряженное числителю. Получим

$$\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)}.$$

Так как при рассмотрении данного предела аргумент  $x$  не принимает значения  $x = 1$ , то, сокращая на  $x - 1$ , получаем

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{3+x}+2} = \frac{1}{4}. \blacksquare$$

**4.** Доказать, что функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \\ 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \end{cases}$$

не имеет предела ни в одной точке.

Δ Докажем, что в произвольной точке  $a$  функция  $D(x)$  не удовлетворяет определению предела функции по Гейне. Для этого укажем две последовательности,  $\{x_n\}$  и  $\{x'_n\}$ , сходящиеся к  $a$  и такие, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} D(x'_n)$ . Сначала рассмотрим последовательность  $\{x_n\}$  рациональных точек, сходящуюся к  $a$ . Для нее  $D(x_n) = 1 \quad \forall n$ , и поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n) = 1$ . Теперь рассмотрим последовательность  $\{x'_n\}$  иррациональных точек, сходящуюся к  $a$ . Для нее  $D(x'_n) = 0 \quad \forall n$ , и поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} D(x'_n) = 0$ . Таким образом,  $\lim_{n \rightarrow \infty} D(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} D(x'_n)$ .

Отсюда следует, что предел функции  $D(x)$  в точке  $a$  не существует. ▲

**5.** Рассмотрим множество всех иррациональных чисел интервала  $(-1, 1)$ . Обозначим его  $I_r$ . Определим на множестве  $I_r$  функцию  $f(x)$ :  $f(x) = 1$ , если  $x \in I_r$ . Доказать, что  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ , где  $a$  — произвольная точка сегмента  $[-1, 1]$  (рациональная или иррациональная).

Δ Пусть  $a \in [-1, 1]$ . Точка  $a$  является предельной точкой множества  $I_r$  (см. упр. 5 к гл. I). Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Пусть  $\{x_n\}$  — произвольная последовательность точек множества  $I_r$ , сходящаяся к точке  $a$  ( $x_n \neq a$ ). По условию  $f(x_n) = 1 \forall x_n \in I_r$ . Поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$  и, следовательно,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ . ▲

**6.** Доказать, что функция  $\sin x$  не имеет предела при  $x \rightarrow +\infty$ .

Δ Докажем, что эта функция не удовлетворяет определению предела функции при  $x \rightarrow +\infty$  по Гейне. Для этого укажем такую бесконечно большую последовательность  $\{x_n\}$ , что последовательность  $\{\sin x_n\}$  расходится. Положим  $x_n = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , а последовательность  $\{\sin x_n\} = -1, 1, -1, 1, \dots$  расходится. Отсюда следует, что функция  $\sin x$  не имеет предела при  $x \rightarrow +\infty$ . ▲

**7.** Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x < 0, \\ \sin x & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

( $f(x)$  не определена при  $x = 0$ ). Существует ли  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ?

Δ Вычислим в точке  $x = 0$  односторонние пределы функции  $f(x)$ , пользуясь теоремой 5 для функций  $y = \sin x$  и  $y = x$  в точке  $a = 0$ :

$$f(a+0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0,$$

$$f(a-0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

Отсюда по теореме 4 следует, что существует  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , и он равен нулю. ▲

**8.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ , где  $f(x) = \frac{100x^2 + 1}{x^2 + 100}$ .

Δ Этот предел является неопределенностью типа  $\infty/\infty$ , так как числитель и знаменатель — бесконечно большие функции при  $x \rightarrow \infty$ . Представим  $f(x)$  в виде

$$f(x) = \frac{100 + 1/x^2}{1 + 100/x^2} \quad (x \neq 0).$$

Так как  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1/x^2) = 0$ , то, используя теорему 2 (для  $x \rightarrow \infty$ ), получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (100 + 1/x^2)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 100/x^2)} = \frac{100}{1} = 100. \blacksquare$$

Примеры 2 и 8 позволяют сформулировать общие правила вычисления пределов вида  $\lim_{x \rightarrow a} R(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x)$ . Здесь  $R(x)$  — рациональная функция (рациональная дробь), т. е.  $R(x) = P_n(x)/Q_m(x)$ , где  $P_n(x)$  и  $Q_m(x)$  — многочлены соответственно степени  $n$  и  $m$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow a} Q_m(x) = Q_m(a) \neq 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} R(x) = P_n(a)/Q_m(a)$

Если  $\lim_{x \rightarrow a} Q_m(x) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow a} P_n(x) \neq 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} R(x) = \infty$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow a} Q_m(x) = \lim_{x \rightarrow a} P_n(x) = 0$ , то  $P_n(x) = (x - a)P_{n-1}^*(x)$ ,  
 $Q_m(x) = (x - a)Q_{m-1}^*(x)$  и

$$\lim_{x \rightarrow a} R(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P_{n-1}^*(x)}{Q_{m-1}^*(x)}.$$

Для вычисления  $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x)$  надо разделить числитель и знаменатель функции  $R(x)$  на  $x^m$  и далее вычислять предел полученной функции, учитывая, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Q_m(x)}{x^m} = b_0$ , где  $b_0$  — коэффициент при  $x^m$  многочлена  $Q_m(x)$ . ▲

9. Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ . Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty$$

Δ Докажем, что функция  $f(x) + g(x)$  удовлетворяет определению бесконечно большой знака плюс в точке  $a$ , т.е.  $\forall M > 0 \exists \delta > 0$  такое, что  $\forall x$ , удовлетворяющего условию  $0 < |x - a| < \delta$ , выполняется неравенство  $f(x) + g(x) > M$ . Так как  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , то существует  $\delta_1$ -окрестность точки  $a$ , в которой (при  $x \neq a$ )

$$|f(x)| < C, \quad (2)$$

где  $C$  — некоторое положительное число (докажите это самостоятельно). Зададим произвольное  $M > 0$ . Поскольку  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ , для числа  $M + C \exists \delta > 0$  ( $\delta \leq \delta_1$ ) такое, что  $\forall x$ , удовлетворяющего условию  $0 < |x - a| < \delta$ , выполняется неравенство

$$g(x) > M + C. \quad (3)$$

Из неравенств (2) и (3) получаем, что при  $0 < |x - a| < \delta \leq \delta_1$  справедливо неравенство

$$f(x) + g(x) \geq g(x) - |f(x)| > M + C - C = M,$$

что и требовалось доказать. ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

- Пользуясь определением предела функции по Коши, докажите, что  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin(1/x)) = 0$
- Докажите, что функция  $f(x) = \sin(1/x)$  не имеет предела в точке  $x = 0$
- Существует ли  $\lim_{x \rightarrow 0} \{x\}$ , где  $\{x\} = x - [x]$  — дробная часть числа  $x$ ?

4. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \\ 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число} \end{cases}$$

Докажите, что  $f(x)$  имеет предел в точках  $x = 1$  и  $x = -1$  и не имеет предела в остальных точках

5. Докажите, что а)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$ , б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x = 0$

6. а) Используя неравенство  $\sin x < x < \operatorname{tg} x$  ( $0 < x < \pi/2$ ) и теорему 3, докажите, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\text{первый замечательный предел})$$

б) Используя первый замечательный предел, докажите, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

7. Пусть

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}, \quad a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0$$

Докажите, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } n > m, \\ a_0/b_0 & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n < m \end{cases}$$

8. Вычислите пределы

$$\begin{aligned} \text{а)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x+3x^2)}{x^4+x^3}, & \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^3-2x^2+x-2}, \\ \text{в)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}, & \quad \text{г)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}, \\ \text{д)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m-1}{x-1} \quad (m \text{ — натуральное число}) & \end{aligned}$$

9. Вычислите пределы

$$\begin{aligned} \text{а)} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}, & \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt[3]{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}, & \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt[3]{x}-4} \end{aligned}$$

10. Вычислите пределы

$$\begin{aligned} \text{а)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4}{(x-2)(x+1)}, & \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-3)^{40}(5x+1)^{10}}{(3x^2-2)^{25}}, \\ \text{в)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}, & \quad \text{г)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2x+1}} \end{aligned}$$

11. Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$  не существует

12. Существует ли  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , если

$$\text{а)} a = 1, \quad f(x) = x \operatorname{sgn}(x-1), \quad \text{где } \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

$$\text{б)} a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{при } x < 0, \\ \frac{x}{2x+x^2} & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

$$\text{в)} a = 0, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x < 0, \\ \cos x & \text{при } x \geq 0? \end{cases}$$

13. Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ . Докажите, что.
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = -\infty$ ;
  - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$  (при  $b \neq 0$ ),
  - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ,
  - $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \infty$  (при  $b \neq 0$ ).
14. Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  (причем  $f(x) \neq 0$  при  $x \neq a$ ),  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \neq 0$ . Докажите, что  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$ .

## § 2. Непрерывность функции в точке

### Основные понятия и теоремы

**1. Непрерывность функции в точке.** Пусть функция определена в некоторой окрестности точки  $a$ .

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется *непрерывной в точке  $a$* , если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

Пусть функция  $f(x)$  определена в правой (левой) полуокрестности точки  $a$ , т. е. на некотором полуинтервале  $[a, a + \varepsilon)$  (соответственно  $(a - \varepsilon, a]$ ). Функция  $f(x)$  называется *непрерывной справа* (соответственно *слева*) в точке  $a$ , если  $f(a + 0) = f(a)$  (соответственно  $f(a - 0) = f(a)$ ).

**Теорема 6.** Для того чтобы функция была непрерывна в точке  $a$ , необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна в этой точке справа и слева.

**Теорема 7.** Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны в точке  $a$ , то функции  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x) - g(x)$ ,  $f(x)g(x)$ ,  $f(x)/g(x)$  также непрерывны в точке  $a$  (частное — при условии  $g(a) \neq 0$ ).

**2. Непрерывность сложной функции.** Пусть функция  $y = \varphi(x)$  определена на множестве  $X$ , а  $Y$  — множество значений этой функции. Пусть, далее, на множестве  $Y$  определена функция  $u = f(y)$ . Тогда говорят, что на множестве  $X$  определена *сложная функция*, и пишут  $u = f(\varphi(x))$ , где  $y = \varphi(x)$ , или  $u = f(\varphi(x))$ .

**Теорема 8.** Пусть функция  $y = \varphi(x)$  непрерывна в точке  $a$ , а функция  $u = f(y)$  непрерывна в точке  $b = \varphi(a)$ . Тогда сложная функция  $u = f(\varphi(x)) = F(x)$  непрерывна в точке  $a$ .

**3. Непрерывность элементарных функций.** Функции  $y = C = \text{const}$ ,  $y = x^\alpha$ ,  $y = a^x$ ,  $y = \log_a x$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ),  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ ,  $y = \arcsin x$ ,  $y = \arccos x$ ,  $y = \operatorname{arctg} x$ ,  $y = \operatorname{arcctg} x$  называются *простейшими* (или *основными*) *элементарными функциями*.

Функция называется *элементарной*, если она может быть получена с помощью конечного числа арифметических операций и суперпозиций над самыми элементарными функциями.

Совокупность всех элементарных функций называется *классом элементарных функций*.

Наряду с простейшими элементарными функциями весьма широкое применение имеют так называемые гиперболические функции:

*гиперболический синус*  $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$ ;

*гиперболический косинус*  $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$ ;

*гиперболический тангенс*  $\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x / \operatorname{ch} x$ ;

*гиперболический котангенс*  $\operatorname{cth} x = \operatorname{ch} x / \operatorname{sh} x$ .

**Теорема 9.** Любая элементарная функция, определенная в окрестности некоторой точки, непрерывна в этой точке.

#### 4. Второй замечательный предел.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e \approx 2,718281828459045\dots$$

Отметим, что этот предел является неопределенностью типа  $1^\infty$ .

**5. Классификация точек разрыва.** Пусть  $a$  — предельная точка области определения функции  $f(x)$ . Точка  $a$  называется *точкой разрыва* функции  $f(x)$ , если  $f(x)$  в этой точке не является непрерывной. Пусть  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $a$ , за исключением, быть может, самой точки  $a$ . Тогда  $a$  называется:

1) *точкой устранимого разрыва* функции  $f(x)$ , если существует  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , но либо  $f(x)$  не определена в точке  $a$ , либо  $f(a) \neq b$  (если положить  $f(a) = b$ , то функция  $f(x)$  станет непрерывной в точке  $a$ , т. е. разрыв будет устранен);

2) *точкой разрыва I рода* функции  $f(x)$ , если существуют  $f(a+0)$  и  $f(a-0)$ , но  $f(a+0) \neq f(a-0)$ ;

3) *точкой разрыва II рода* функции  $f(x)$ , если в точке  $a$  не существует по крайней мере один из односторонних пределов функции  $f(x)$ .

#### Контрольные вопросы и задания

- Сформулируйте определения: а) непрерывности функции в точке; б) непрерывности функции справа (слева) в точке
- Сформулируйте необходимые и достаточные условия непрерывности функции в точке
- Исследуйте на непрерывность функцию  $f(x)$  в произвольной точке  $a$ :
  - $f(x) = x^2$ ;
  - $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \\ 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число} \end{cases}$  (функция Дирихле).
- Какие функции называются элементарными?
- Докажите, что функция  $y = \sin x$  непрерывна в любой точке  $a$ .
- При каких значениях аргумента  $x$  функция  $f(x) = \arcsin(\ln x)$  является непрерывной?
- Какие точки называются точками разрыва функции?
- Дайте определения точки устранимого разрыва и точек разрыва I и II рода.

9. Найдите точки разрыва функции Дирихле. Укажите тип этих точек разрыва.
10. Укажите тип точки разрыва функции  $f(x)$ : а)  $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ; б)  $f(x) = -|x|/x$ .
11. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции. Пользуясь этой теоремой и первым замечательным пределом, вычислите  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin x}{x}$ .
12. Какие функции называются гиперболическими? Принадлежат ли они классу элементарных функций? При каких значениях аргумента эти функции непрерывны?

### Примеры решения задач

1. Исследовать на непрерывность функцию  $f(x)$  и указать тип ее точек разрыва, если:

$$\text{а) } f(x) = \frac{x^2}{x}; \quad \text{б) } f(x) = e^{-1/x}; \quad \text{в) } f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leq 1, \\ \ln x & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Δ а) Функция  $f(x)$  равна  $x$  при  $x \neq 0$  и не определена при  $x = 0$ . Так как  $\forall a \lim_{x \rightarrow a} x = a$ , то при  $a \neq 0 \lim_{x \rightarrow a} f(x) = a = f(a)$ , и, следовательно,  $f(x)$  непрерывна в любой точке  $a \neq 0$ . В точке  $x = 0$   $f(x)$  имеет устранимый разрыв, поскольку существует  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ .

б) Функция  $f(x) = e^{-1/x}$  элементарная, так как она является суперпозицией функций  $y = -x^{-1}$  и  $f = e^y$ . Функция  $f(x)$  определена при всех  $x$ , кроме  $x = 0$ ; следовательно, по теореме 9 она непрерывна в любой точке  $x \neq 0$ . Так как  $f(x)$  определена в окрестности точки  $x = 0$ , а в самой точке не определена, то  $x = 0$  — точка разрыва. Вычислим  $f(0+0)$  и  $f(0-0)$ , пользуясь определением одностороннего предела функции по Гейне. Рассмотрим произвольную бесконечно малую последовательность  $\{x_n\}$  такую, что  $x_n > 0 \ \forall n$ . Поскольку  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1/x_n) = -\infty$ , имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-1/x_n} = 0$ . Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow 0+0} e^{-1/x} = 0$ . Рассмотрим теперь произвольную бесконечно малую последовательность  $\{x'_n\}$  такую, что  $x'_n < 0 \ \forall n$ . Так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1/x'_n) = +\infty$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-1/x'_n} = +\infty$ . Поэтому  $\lim_{x \rightarrow 0-0} e^{-1/x} = +\infty$ , т. е.  $f(0-0) = +\infty$ .

Таким образом, предел  $f(x)$  в точке  $x = 0$  слева не существует, и, значит,  $x = 0$  является точкой разрыва II рода.

в) Докажем непрерывность  $f(x)$  в точке  $a \neq 1$ . Возьмем  $\varepsilon < |a - 1|$ ,  $\varepsilon > 0$ . Тогда  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$  не содержит точку  $x = 1$ , если  $\varepsilon < |a - 1|$ . В этой  $\varepsilon$ -окрестности  $f(x)$  совпадает либо с функцией  $\varphi(x) = x$ , если  $a < 1$ , либо с функцией  $\psi(x) = \ln(x)$ , если  $a > 1$ . Так как указанные простейшие элементарные функции непрерывны в точке  $a$ , то  $f(x)$  непрерывна в любой точке  $a \neq 1$ . Исследуем на непрерывность функцию  $f(x)$  в точке  $a = 1$ . Для этого вычислим ее односторонние

пределы в этой точке, пользуясь непрерывностью функций  $\psi(x)$  и  $\varphi(x)$  в точке  $a = 1$  и теоремой 6. Получим

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \ln x = \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = \ln 1 = 0,$$

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1.$$

Таким образом,  $f(1+0) \neq f(1-0)$ , поэтому в точке  $a = 1$  функция  $f(x)$  имеет разрыв I рода. ▲

**2. Доказать, что:**

$$\text{а)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

△ а) Представим функцию  $\frac{\ln(1+x)}{x}$  в виде  $\ln(1+x)^{1/x} = \ln y$ , где  $y = (1+x)^{1/x}$ . Так как  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ , а функция  $\ln y$  непрерывна в точке  $y = e$ , то  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln e = 1$ .

б) Рассмотрим функцию  $y = \varphi(x) = a^x - 1$ . Она непрерывна в точке  $x = 0$  и  $y(0) = 0$ . При этом

$$x = \log_a(1+y), \quad \frac{a^x - 1}{x} = \frac{y}{\log_a(1+y)}.$$

Вычислим  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1+y)}$ , пользуясь результатом п. а):

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \ln a}{\ln(1+y)} = \ln a \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y}} = \frac{\ln a}{1} = \ln a.$$

Рассмотрим теперь функцию  $f(x)$ , непрерывную в точке  $y = 0$ :

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y}{\log_a(1+y)} & \text{при } y \neq 0, \\ \ln a & \text{при } y = 0. \end{cases}$$

Согласно теореме 8 сложная функция

$$f(\varphi(x)) = \begin{cases} \frac{a^x - 1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ \ln a & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

является непрерывной в точке  $x = 0$ . Поэтому  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$ . ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

15. Исследуйте на непрерывность функцию  $f(x)$  и укажите тип ее точек разрыва (см. упр. 1–4):  
 а)  $f(x) = x \sin(1/x)$ ; б)  $f(x) = \sin(1/x)$ ; в)  $f(x) = \{x\}$ ;

г)  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \\ 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число;} \end{cases}$

д)  $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^3 + 1}; \quad \text{е) } f(x) = \arctg \frac{1}{x}; \quad \text{ж) } f(x) = \frac{1}{1 - e^x/(1-x)};$

з)  $f(x) = \ln \frac{x^2}{(x+1)(x-3)}; \quad \text{и) } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ 2-x & \text{при } 1 < x \leq 2; \end{cases}$

к)  $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } |x| \leq 1, \\ 1 & \text{при } |x| > 1; \end{cases} \quad \text{л) } f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x/2) & \text{при } |x| \leq 1, \\ |x-1| & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$

16. Докажите, что: а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a;$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = 1; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} x}{x} = 1; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$

### § 3. Сравнение бесконечно малых функций.

Символ “*о малое*” и его свойства

Основные понятия и теоремы

**1. Сравнение бесконечно малых функций.** Функция  $\alpha(x)$  называется **бесконечно малой при  $x \rightarrow a$**  (в точке  $a$ ), если  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ .

Пусть  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  — две бесконечно малые функции при  $x \rightarrow a$ .

Функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются:

а) **бесконечно малыми одного порядка при  $x \rightarrow a$**  (в точке  $a$ ), если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0;$$

б) **эквивалентными бесконечно малыми при  $x \rightarrow a$**  (в точке  $a$ ), если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \quad (\text{обозначение: } \alpha \sim \beta \text{ при } x \rightarrow a).$$

Если  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ , то говорят, что  $\alpha(x)$  является **бесконечно малой более высокого порядка при  $x \rightarrow a$**  (в точке  $a$ ), чем  $\beta(x)$ , и пишут  $\alpha = o(\beta)$  при  $x \rightarrow a$  ( $\alpha$  равно “*о малое*” от  $\beta$  при  $x \rightarrow a$ ).

Например,  $x^2 = o(x)$  при  $x \rightarrow 0$ .

Аналогичные определения имеют место для случаев  $x \rightarrow a + 0$ ,  $x \rightarrow a - 0$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

Следует иметь в виду, что равенства, содержащие символ “*о малое*”, являются условными. Например, равенство  $x^2 = o(x)$  при  $x \rightarrow 0$  верно, но  $o(x) = x^2$  неверно, поскольку символ  $o(x)$  обозначает не какую-то конкретную функцию, а любую функцию, являющуюся при  $x \rightarrow 0$  бесконечно малой более высокого порядка, чем  $x$ . Таких функций бесконечно много, в частности, любая функция  $x^p$  (где  $p > 1$ ) есть  $o(x)$  при  $x \rightarrow 0$ . Таким образом, равенство  $x^2 = o(x)$  при  $x \rightarrow 0$  означает, что функция  $x^2$  принадлежит множеству бесконечно малых

функций более высокого порядка при  $x \rightarrow 0$ , чем  $x$ . Поэтому “в обратную сторону” это равенство ( $o(x) = x^2$ ) неверно: все множество функций  $o(x)$  не сводится к одной функции  $x^2$ .

## 2. Свойства символа “ $o$ малое”.

**Теорема 10.** Пусть  $\alpha_1(x)$  и  $\alpha_2(x)$  — две произвольные бесконечно малые при  $x \rightarrow a$  функции такие, что  $\alpha_1(x) = o(\beta)$  и  $\alpha_2(x) = o(\beta)$ . Тогда  $\alpha_1(x) + \alpha_2(x) = o(\beta)$  при  $x \rightarrow a$ .

Эту теорему кратко можно записать так:

$$o(\beta) + o(\beta) = o(\beta).$$

Сформулируем наряду с указанным еще ряд свойств символа “ $o$  малое” (всюду имеется в виду, что  $\alpha \rightarrow 0$  и  $\beta \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a$ ).

$$1^\circ. o(\beta) + o(\beta) = o(\beta).$$

$$2^\circ. o(\beta) - o(\beta) = o(\beta).$$

$$3^\circ. o(c\beta) = o(\beta) \quad \forall c \neq 0.$$

$$4^\circ. co(\beta) = o(\beta) \quad \forall c \neq 0.$$

$$5^\circ. o(\beta^n) = o(\beta^k), \quad n \geq 2 \quad (n \in N), \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

$$6^\circ. (o(\beta))^n = o(\beta^n) \quad \forall n \in N.$$

$$7^\circ. \beta^n o(\beta) = o(\beta^{n+1}) \quad \forall n \in N.$$

$$8^\circ. \frac{o(\beta^n)}{\beta} = o(\beta^{n-1}), \quad n \geq 2 \quad (n \in N).$$

Обозначим любую бесконечно малую при  $x \rightarrow a$  функцию символом  $o(1)$ . Тогда свойство  $8^\circ$  будет справедливо также при  $n = 1$ :

$$\frac{o(\beta)}{\beta} = o(1).$$

$$9^\circ. o\left(\sum_{k=1}^n c_k \beta^k\right) = o(\beta), \text{ где } c_k \text{ — числа.}$$

$$10^\circ. o(o(\beta)) = o(\beta).$$

$$11^\circ. o(\beta + o(\beta)) = o(\beta).$$

$$12^\circ. \alpha\beta = o(\alpha), \quad \alpha\beta = o(\beta).$$

$$13^\circ. \text{ Если } \alpha \sim \beta, \text{ то } \alpha - \beta = o(\alpha) \text{ и } \alpha - \beta = o(\beta).$$

## Контрольные вопросы и задания

- Дайте определение бесконечно малой функции: а) при  $x \rightarrow a$ ; б) при  $x \rightarrow \infty$ . Приведите примеры таких функций.
- Сформулируйте определение и приведите примеры бесконечно малой функции  $\alpha(x)$ :
  - одного порядка с функцией  $\beta(x)$  в точке  $a$ ;
  - эквивалентной функции  $\beta(x)$  в точке  $a$ ;
  - более высокого порядка при  $x \rightarrow a$ , чем  $\beta(x)$ .
- Что означает символическая запись  $\alpha = o(\beta)$  при  $x \rightarrow a$ ?

- 3 Приведите примеры функций  $\alpha(x)$ , для которых справедливы равенства
- $\alpha(x) = o(x)$  при  $x \rightarrow 0$ ,
  - $\alpha(x) = o(\sqrt{1-x})$  при  $x \rightarrow 1 - 0$ ,
  - $\alpha(x) = o(1/x^2)$  при  $x \rightarrow \infty$
- 4 Докажите, что  $x^3 = o(x^2)$  при  $x \rightarrow 0$ . Верно ли равенство  $x^3 = o(\beta)$  при  $x \rightarrow 0$ , если
- $\beta(x) = x$ ,
  - $\beta(x) = x^2 \sqrt{|x|}$ ,
  - $\beta(x) = x^3 \sqrt{|x|}$ ,
  - $\beta(x) = x^2 \sin x$ ?
- 5 Докажите, что  $(x-1)^2 = o(x-1)$  при  $x \rightarrow 1$ . Верно ли равенство  $(x-1)^2 = o(\beta)$  при  $x \rightarrow 1$ , если
- $\beta(x) = (x-1)^3$ ,
  - $\beta(x) = \sin(x-1)^2$ ,
  - $\beta(x) = \frac{(x-1)^2}{\ln x}$ ?
- 6 Докажите, что  $1/x^4 = o(1/x^3)$  при  $x \rightarrow \infty$ . Верно ли равенство  $1/x^4 = o(\beta)$  при  $x \rightarrow \infty$ , если
- $\beta(x) = \frac{1}{x^k}$  ( $k = 1, 2$ ),
  - $\beta(x) = \frac{1}{x^5}$ ,
  - $\beta(x) = \frac{1}{(x+1)^4}$ ,
  - $\beta(x) = \frac{1}{x^3 \sin x}$ ,
  - $\beta(x) = \frac{1}{(x-1)^4 \operatorname{arctg}(1/x)}$ ?
- 7 Являются ли функции  $\sin x$  и  $x$  эквивалентными бесконечно малыми при  $x \rightarrow 0$ ? Докажите, что  $\sin x - x = o(x)$  при  $x \rightarrow 0$
- 8 Пользуясь свойствами символа “ $o$  малое”, запишите для функции  $\alpha(x)$  равенство вида  $\alpha(x) = o(x^k)$  при  $x \rightarrow 0$ , если
- $$\alpha(x) = o(x^2) + o(x^3), \quad \alpha(x) = o(x) - o(x), \quad \alpha(x) = 5o(x),$$
- $$\alpha(x) = o(3x^2), \quad \alpha(x) = (o(x))^3, \quad \alpha(x) = xo(x), \quad \alpha(x) = \frac{o(x^5)}{x^2},$$
- $$\alpha(x) = o(-x + 2x^2 + x^4), \quad \alpha(x) = o(o(x^2)), \quad \alpha(x) = o(x + o(x))$$
- 9 Пользуясь свойствами символа “ $o$  малое”, запишите для функции  $\alpha(x)$  равенство вида  $\alpha(x) = o(1/x^k)$  при  $x \rightarrow \infty$ , если
- $$\alpha(x) = o\left(\frac{1}{x}\right) - o\left(\frac{1}{x}\right), \quad \alpha(x) = 1000 o\left(\frac{1}{x}\right), \quad \alpha(x) = o\left(\frac{1000}{x}\right),$$
- $$\alpha(x) = \left(o\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)\right)^2, \quad \alpha(x) = x^2 o\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad \alpha(x) = o\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right),$$
- $$\alpha(x) = o\left(o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right), \quad \alpha(x) = o\left(\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

### Примеры решения задач

1. Верно ли равенство  $\alpha(x) = o(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , если: а)  $\alpha(x) = 2x^2$ ,
- б)  $\alpha(x) = 3x$ , в)  $\alpha(x) = \sqrt{|x|}$ , г)  $\alpha(x) = \frac{x}{\ln|x|}$ ; д)  $\alpha(x) = 1 - \cos x$ ?
- △ а)  $2x^2 = o(x)$ , так как  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x} = 0$ .
- б) Равенство  $3x = o(x)$  неверно, поскольку  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} = 3 \neq 0$ . Функции  $3x$  и  $x$  являются бесконечно малыми одного порядка при  $x \rightarrow 0$ .
- в)  $\sqrt{|x|} \neq o(x)$ , так как  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \infty$ .

г)  $\frac{x}{\ln|x|} = o(x)$ , поскольку  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\ln|x|} : x \right) = 0$ .

д)  $1 - \cos x = o(x)$ , так как  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 \frac{x}{2} = 1 \cdot 0 = 0$ . ▲

2. Верно ли равенство  $\alpha(x) = o(x^2)$  при  $x \rightarrow 0$ , если:

а)  $\alpha(x) = \sin^2 x$ ; б)  $\alpha(x) = x^3$ ; в)  $\alpha(x) = 1 - \cos x$ ?

Δ а)  $\sin^2 x \neq o(x^2)$ , так как  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 = 1$ . Функции  $\sin^2 x$  и  $x^2$  — эквивалентные бесконечно малые в точке  $x = 0$

б)  $x^3 = o(x^2)$ , поскольку  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$

в)  $1 - \cos x \neq o(x^2)$ , так как  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ . Функции  $1 - \cos x$  и  $x^2$  — бесконечно малые одного порядка в точке  $x = 0$ . ▲

3. Используя пределы

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{n}$  ( $n$  — натуральное число),

представить функции  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $\sqrt[n]{1+x}$  в виде

$$\psi(x) = a_0 + a_1 x^k + o(x^k) \quad \text{при } x \rightarrow 0,$$

где  $k = 1$  или  $k = 2$ ;  $a_0$  и  $a_1$  — некоторые числа.

Δ Докажем сначала, что если  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  — бесконечно малые одного порядка при  $x \rightarrow a$ , т. е.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$ , то  $\alpha(x) = c\beta(x) + o(\beta)$  при  $x \rightarrow a$ .

В самом деле, так как

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - c \right) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x) - c\beta(x)}{\beta(x)} = 0,$$

то по определению символа  $o(\beta)$  имеем  $\alpha(x) - c\beta(x) = o(\beta)$ , или

$$\alpha(x) = c\beta(x) + o(\beta) \quad \text{при } x \rightarrow a. \tag{1}$$

Из равенств а)–г), пользуясь формулой (1), получаем

$$\sin x = x + o(x) \quad \text{при } x \rightarrow 0, \tag{2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2} x^2 + o(x^2) \quad \text{при } x \rightarrow 0, \tag{3}$$

$$\ln(1+x) = x + o(x) \quad \text{при } x \rightarrow 0, \tag{4}$$

$$\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{1}{n} x + o(x) \quad \text{при } x \rightarrow 0 \tag{5}$$

Формулы (2)–(5) называются *асимптотическими формулами*, а также *асимптотическими разложениями* или *асимптотическими*

представлениями функций  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $\sqrt[3]{1+x}$  при  $x \rightarrow 0$ . Последнее слагаемое в правой части этих формул ( $o(x)$  или  $o(x^2)$ ) называется *остаточным членом асимптотической формулы*. ▲

4. Доказать свойства  $2^\circ$ ,  $3^\circ$ ,  $6^\circ$ ,  $9^\circ$ ,  $10^\circ$  символа “ $o$  малое”.

△ Напомним, что символ  $o(\beta)$ , входящий в левую часть формул, означает любую бесконечно малую функцию в точке  $a$  более высокого порядка, чем  $\beta(x)$ .

1. Докажем сначала свойства  $2^\circ$ ,  $3^\circ$ ,  $6^\circ$ , т. е.

$$o(\beta) - o(\beta) = o(\beta), \quad (6)$$

$$o(c\beta) = o(\beta) \quad \forall c \neq 0, \quad (7)$$

$$(o(\beta))^n = o(\beta^n) \quad \forall n \in \mathbf{N}. \quad (8)$$

Обозначим через  $\alpha_1(x)$ ,  $\alpha_2(x)$ ,  $\alpha(x)$  произвольные бесконечно малые функции в точке  $a$  такие, что  $\alpha_1(x) = o(\beta)$ ,  $\alpha_2(x) = o(\beta)$ ,  $\alpha(x) = o(c\beta)$  при  $x \rightarrow a$ . По определению символа “ $o$  малое” эти равенства означают, что

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)} = 0, \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_2(x)}{\beta(x)} = 0, \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{c\beta(x)} = 0 \quad (c \neq 0). \quad (11)$$

Для доказательства справедливости равенств (6)–(8) нужно установить, что

$$\alpha_1(x) - \alpha_2(x) = o(\beta), \quad \alpha(x) = o(\beta), \quad (\alpha_1(x))^n = o(\beta^n),$$

т. е.

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}{\beta(x)} = 0,$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0, \quad L_3 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\alpha_1(x))^n}{(\beta(x))^n} = 0.$$

Учитывая (9) и (10), получим

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)} - \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_2(x)}{\beta(x)} = 0 - 0 = 0,$$

$$L_3 = \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)} \right)^n = 0^n = 0.$$

С помощью равенства (11) находим

$$L_2 = c \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{c\beta(x)} = c \cdot 0 = 0.$$

Итак, справедливость формул (6)–(8) доказана.

2. Докажем теперь свойства  $9^\circ$  и  $10^\circ$ , т. е.

$$o\left(\sum_{k=1}^n c_k \beta^k\right) = o(\beta) \quad (c_k \text{ — числа}), \quad (12)$$

$$o(o(\beta)) = o(\beta). \quad (13)$$

Обозначим через  $\psi(x)$ ,  $\alpha(x)$  и  $\varphi(x)$  произвольные бесконечно малые функции в точке  $a$  такие, что

$$\psi(x) = o\left(\sum_{k=1}^n c_k \beta^k\right), \quad \alpha(x) = o(\beta), \quad \varphi(x) = o(\alpha) = o(o(\beta)),$$

т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\psi(x)}{\sum_{k=1}^n c_k \beta^k} = 0, \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0, \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\alpha(x)} = 0. \quad (16)$$

Для доказательства справедливости равенств (12), (13) нужно доказать, что

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\psi(x)}{\beta(x)} = 0, \quad L_2 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\beta(x)} = 0.$$

Учитывая (14), (15), (16), получаем

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\psi(x)}{\sum_{k=1}^n c_k \beta^k} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sum_{k=1}^n c_k \beta^k}{\beta(x)} = 0 \cdot c_1 = 0,$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\alpha(x)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0 \cdot 0 = 0.$$

Таким образом, справедливость формул (12), (13) доказана. ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

17. Используя пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ); б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$ ;

д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} x}{x} = 1$ ; е)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{ch} x}{x^2} = -\frac{1}{2}$ ,

выведите асимптотические формулы (при  $x \rightarrow 0$ ) для функций  $a^x$ ,  $e^x$ ,  $(1+x)^a$ ,  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{th} x$ ,  $\operatorname{ch} x$ .

18. Докажите свойства  $1^\circ$ ,  $4^\circ$ ,  $5^\circ$ ,  $7^\circ$ ,  $8^\circ$ ,  $11^\circ$ – $13^\circ$  символа “ $o$  малое”
19. Справедливо ли равенство  $o(o(x)) = o(x^{1+\varepsilon})$  при  $x \rightarrow 0$ , если а)  $\varepsilon > 0$ , б)  $\varepsilon = 0$ , в)  $-1 < \varepsilon < 0$ ? Ответ обоснуйте
20. Верны ли равенства
- а)  $o(x + x^2) = o(x^2)$  при  $x \rightarrow 0$ , б)  $o(x) = o(x^2)$  при  $x \rightarrow 0$ ,
- в)  $o(x^2) = o(x)$  при  $x \rightarrow 0$ , г)  $o(1/x) = o(1/x^2)$  при  $x \rightarrow \infty$ ,
- д)  $o(1/x^2) = o(1/x)$  при  $x \rightarrow \infty$ ?  
Ответ обоснуйте
21. Пользуясь свойствами символа “ $o$  малое”, запишите для функции  $\alpha(x)$  равенство вида  $\alpha(x) = o(1)$  или  $\alpha(x) = o((x - a)^k)$  при  $x \rightarrow a$  ( $k$  натуральное), если
- а)  $\alpha(x) = o(-5x + x^2 - x^3 + o(-5x + x^2 - x^3))$  при  $x \rightarrow 0$ ,
- б)  $\alpha(x) = (x - 1)o((x - 1)^2 + o(x - 1))$  при  $x \rightarrow 1$ ,
- в)  $\alpha(x) = \frac{1}{5x} o(3x + x^2)$  при  $x \rightarrow 0$
22. Пользуясь свойствами символа “ $o$  малое”, запишите для функции  $\alpha(x)$  равенство вида  $\alpha(x) = o(1)$  или  $\alpha(x) = o(1/x^k)$  при  $x \rightarrow \infty$  ( $k$  натуральное), если
- а)  $\alpha(x) = o\left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ ,
- б)  $\alpha(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}$ , в)  $\alpha(x) = x^2 o\left(\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$ ,
- г)  $\alpha(x) = x\left(o\left(\frac{1}{x^2}\right) - o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$ , д)  $\alpha(x) = 5x o\left(\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

#### § 4. Вычисление пределов функций с помощью асимптотических формул. Вычисление пределов показательно-степенных функций

##### Основные понятия и формулы

**1. Асимптотические формулы.** В примерах и задачах § 3 были получены асимптотические формулы для простейших элементарных функций при  $x \rightarrow 0$ . Запишем эти формулы в виде таблицы

I	$\sin x = x + o(x)$	V	$(1 + x)^a = 1 + ax + o(x)$
II	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$	VI	$\operatorname{tg} x = x + o(x)$
III	$\ln(1 + x) = x + o(x)$	VII	$\operatorname{sh} x = x + o(x)$
IV	$a^x = 1 + x \ln a + o(x)$ ( $a > 0$ ), $e^x = 1 + x + o(x)$	VIII	$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ $\operatorname{th} x = x + o(x)$

Указанные формулы остаются справедливыми, если в них вместо аргумента  $x$  подставить  $x_n$ , где  $\{x_n\}$  — бесконечно малая последовательность, либо  $y(x)$ , где  $\lim_{x \rightarrow a} y(x) = 0$ . Например, справедливо представление, вытекающее из формулы I

$$\sin \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где  $\left\{ o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\}$  — бесконечно малая последовательность более высокого порядка, чем  $\left\{ \frac{1}{n^2} \right\}$ , т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{o(1/n^2)}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$

Функция  $y(x) = x - 1$  является бесконечно малой при  $x \rightarrow 1$  поэтому из формулы III получаем равенство

$$\ln(1 + y(x)) = y(x) + o(y) \quad \text{при } x \rightarrow 1,$$

или

$$\ln(1 + (x - 1)) = \ln x = x - 1 + o(x - 1) \quad \text{при } x \rightarrow 1$$

Используя это равенство и формулу II, запишем асимптотическое представление функции  $\cos \ln x$  при  $x \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} \cos \ln x &= \cos(x - 1 + o(x - 1)) = \\ &= 1 - \frac{(x - 1 + o(x - 1))^2}{2} + o((x - 1 + o(x - 1))^2) \end{aligned}$$

На основании свойств символа “ $o$  малое” получаем

$$\begin{aligned} \frac{(x - 1 + o(x - 1))^2}{2} &= \frac{(x - 1)^2}{2} + (x - 1)o(x - 1) + \frac{1}{2}(o(x - 1))^2 = \\ &= \frac{(x - 1)^2}{2} + o(x - 1)^2 + o(x - 1)^2 = \frac{(x - 1)^2}{2} + o(x - 1)^2 \end{aligned}$$

Аналогично,

$$(x - 1 + o(x - 1))^2 = (x - 1)^2 + o(x - 1)^2$$

В силу свойства 11° имеем

$$o((x - 1)^2 + o(x - 1)^2) = o(x - 1)^2$$

Окончательно получим

$$\cos \ln x = 1 - \frac{(x - 1)^2}{2} + o(x - 1)^2 \quad \text{при } x \rightarrow 1$$

## 2. Вычисление пределов показательно-степенных функций.

Рассмотрим вычисление предела при  $x \rightarrow a$  показательно-степенной функции  $[u(x)]^{v(x)}$ , где функции  $u(x)$  и  $v(x)$  определены в некоторой окрестности точки  $a$ , причем  $u(x) > 0$

Возможны следующие случаи

- 1 Если  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = c$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} u(x)^{v(x)} = b^c$
- 2 Если  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = c > 0$  (или  $+\infty$ ), то  $\lim_{x \rightarrow a} u^v = 0$
- 3 Если  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = c < 0$  (или  $-\infty$ ), то  $\lim_{x \rightarrow a} u^v = +\infty$
- 4 Если  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} u(x)^{v(x)}$  называется неопределенностью типа  $0^0$

5 Если  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = c > 0$  (или  $+\infty$ ), то  $\lim_{x \rightarrow a} u^v = +\infty$

6 Если  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = c < 0$  (или  $-\infty$ ), то  $\lim_{x \rightarrow a} u^v = 0$

7 Если  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} u^v$  называется *неопределенностью типа  $\infty^0$*

8 Если  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = \infty$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} u^v$  называется *неопределенностью типа  $1^\infty$* . Примером такой неопределенности является второй замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$$

Если  $u^v$  представить в виде  $e^{v \ln u}$ , то каждая из неопределенностей  $0^0$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$  сводится к неопределенности вида  $0 \cdot \infty$ , для функции  $v \ln u$ .

Если при этом  $\lim_{x \rightarrow a} v \ln u = b$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} u^v = e^b$

### Контрольные вопросы и задания

- Напишите асимптотические формулы для функций  $\sin x$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $\cos x$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $e^x$ ,  $a^x$ ,  $(1+x)^a$ ,  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{th} x$ ,  $\operatorname{ch} x$  при  $x \rightarrow 0$
- Напишите асимптотические формулы с остаточным членом вида  $o(x^\alpha)$  при  $x \rightarrow 0$  или  $o(1/x^\alpha)$  при  $x \rightarrow \infty$  ( $\alpha > 0$ ) для сложных функций  $\sin y$ ,  $\operatorname{tg} y$ ,  $\cos y$ ,  $\ln(1+y)$ ,  $e^y$ ,  $a^y$ ,  $(1+y)^a$ ,  $\operatorname{sh} y$ ,  $\operatorname{th} y$ ,  $\operatorname{ch} y$ , если
  - $y = 3x$  и  $x \rightarrow 0$ ,
  - $y = \sqrt{x}$  и  $x \rightarrow +0$ ,
  - $y = x^3$  и  $x \rightarrow 0$ ,
  - $y = 1/x$  и  $x \rightarrow \infty$
- Напишите асимптотические формулы с остаточным членом вида  $o(1/n^\alpha)$  ( $\alpha > 0$ ) для последовательностей  $\sin x_n$ ,  $\operatorname{tg} x_n$ ,  $\cos x_n$ ,  $\ln(1+x_n)$ ,  $e^{x_n}$ ,  $a^{x_n}$ ,  $(1+x_n)^a$ ,  $\operatorname{sh} x_n$ ,  $\operatorname{th} x_n$ ,  $\operatorname{ch} x_n$ , если
  - $x_n = \frac{1}{n}$ ,
  - $x_n = \frac{1}{n^2}$ ,
  - $x_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ,
  - $x_n = e^{1/n} - 1$
- Дайте определение бесконечно малой последовательности  $\{\alpha_n\}$  более высокого порядка, чем  $\{1/n\}$ , при  $n \rightarrow \infty$ . Дайте определение бесконечно малой функции  $\alpha(x)$  более высокого порядка, чем  $1/x$ , при  $x \rightarrow \infty$ . Запишите для  $\alpha_n$  и  $\alpha(x)$  соответствующие символические обозначения
- Какой порядок малости имеют последовательность  $\alpha_n = no(1/n^2)$  при  $n \rightarrow \infty$  и функция  $\alpha(x) = xo(1/x^2)$  при  $x \rightarrow \infty$  по сравнению соответственно с  $\{1/n\}$  и  $\beta(x) = 1/x^2$ ?
- Пользуясь асимптотической формулой IV и определением предела функции по Гейне, докажите, что  $e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  при  $n \rightarrow \infty$
- Верны ли равенства

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \quad \text{при } x \rightarrow 0,$$

$$\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{при } x \rightarrow 0?$$

Ответ обоснуйте

- 8 Назовите возможные случаи вычисления пределов показательно-степенных функций. Приведите примеры трех типов неопределенностей для таких функций
- 9 Вычислите пределы

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{2x-3} \right)^x$ , б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+3} \right)^{2x}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow +0} (x)^{1/\ln x}$

### Примеры решения задач

1. Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sin \operatorname{tg}(x^2/2)}{\ln \cos 3x}$

Δ Запишем асимптотическое разложение числителя, пользуясь асимптотическими формулами для синуса и тангенса и свойствами символа “*o* малое”

$$\begin{aligned} \sin \sin \operatorname{tg} \frac{x^2}{2} &= \sin \sin \left( \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right) \right) = \\ &= \sin \left[ \frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right) + o\left(\frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)\right) \right] = \\ &= \sin \left( \frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2) \right) = \sin \left( \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $o\left(\frac{x^2}{2} + o\left(\frac{x^2}{2}\right)\right) = o(x^2)$  и  $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$

Выведем теперь асимптотическое разложение знаменателя, используя асимптотические формулы для косинуса и логарифма

$$\begin{aligned} \ln \cos 3x &= \ln \left( 1 - \frac{(3x)^2}{2} + o((3x)^2) \right) = \ln \left( 1 + \left( -\frac{9x^2}{2} + o(x^2) \right) \right) = \\ &= \left( -\frac{9x^2}{2} + o(x^2) \right) + o\left( -\frac{9x^2}{2} + o(x^2) \right) = \\ &= -\frac{9x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2) = -\frac{9x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$o((3x)^2) = o(x^2), \quad o\left( -\frac{9x^2}{2} + o(x^2) \right) = o(x^2), \quad o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$$

Таким образом, данный предел равен

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{9x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}}{-\frac{9}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2}} = \frac{\frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{x^2}}{-\frac{9}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{x^2}} = -\frac{1}{9}$$

Здесь мы воспользовались тем, что, по определению символа “*o* малое”  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0$  ▲

**2.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - a^a}{x - a}$  ( $a > 0$ )

Δ Положим  $y = x - a$ , тогда данный предел запишется так:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{a^{y+a} - a^a}{y} = a^a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a^y - 1}{y}.$$

Так как  $a^y = 1 + y \ln a + o(y)$ , то

$$a^a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{a^y - 1}{y} = a^a \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \ln a + o(y)}{y} = a^a \left( \ln a + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{o(y)}{y} \right) = a^a \ln a.$$

Итак,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - a^a}{x - a} = a^a \ln a$ . ▲

**3.** Вычислить  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$

Δ Используя асимптотическую формулу V при  $x = 1/n^2$  и  $a = 1/2$ , получим

$$\sqrt{n^2 + 1} = n \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} = n \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = n + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Отсюда

$$\sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}) = \sin \left( \pi n + \frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = (-1)^n \sin \left( \frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

Последовательность  $\{(-1)^n\}$  ограниченная, а  $\left\{ \sin \left( \frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right\}$  бесконечно малая, поэтому произведение этих двух последовательностей является бесконечно малой последовательностью. Таким образом,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}) = 0$ . ▲

**4.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$ .

Δ Данный предел является неопределенностью типа  $1^\infty$ , так как  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg}^2 x = \infty$ . Запишем  $(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$  в виде  $e^{\operatorname{ctg}^2 x \ln \cos x}$  и вычислим  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg}^2 x \cdot \ln \cos x$ . Для этого напишем асимптотическое разложение для  $\ln \cos x$  и  $\sin^2 x$  при  $x \rightarrow 0$ :

$$\ln \cos x = \ln \left( 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\sin^2 x = (x + o(x))^2 = x^2 + o(x^2).$$

Используя эти равенства, находим

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2/2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, искомый предел равен  $e^L = e^{-1/2}$ . ▲

**5.** Вычислить  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \right)^{\operatorname{tg}(1/n)}$ .

Δ Данный предел является неопределенностью типа  $0^0$ . Для его вы-

числения запишем  $\left(\frac{1}{n}\right)^{\operatorname{tg}(1/n)}$  в виде  $e^{\operatorname{tg}(1/n) \ln(1/n)}$  и вычислим предел  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \operatorname{tg} \frac{1}{n} \cdot \ln \frac{1}{n} \right)$ . Имеем

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -\ln n \left( \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right] = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} - \\ -\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \ln n \cdot o\left(\frac{1}{n}\right) \right] = 0 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{o(1/n)}{1/n} = 0,$$

так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$  (см. § 4 гл. II) и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{o(1/n)}{1/n} = 0$ .

Таким образом,  $L = 0$ , т. е. искомый предел равен 1. ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

23. Напишите асимптотические разложения следующих функций при  $x \rightarrow 0$  с остаточным членом вида  $o(x^\alpha)$ , где  $\alpha \geq 0$
- $\sin^2(5\sqrt{x})$ ,  $\sin^2(5\sqrt{x} + x)$  ( $x > 0$ ), б)  $\cos(4x^2)$ ,  $\cos(4x^2 + x)$ ,
  - $e^{2x}$ ,  $e^{2x+\sqrt{x}}$  ( $x > 0$ ), г)  $\ln(1-x^2)$ ,  $\ln(1-x^2+x)$ ,
  - $3 - \sqrt[3]{27-x}$ ,  $3 - \sqrt[3]{27-x+\sqrt{x}}$  ( $x > 0$ ), е)  $2^{x^3}$ ,  $2^{x^3+x^2}$ ,
  - ж)  $\ln \cos 2x$ ,  $\ln \cos(2x+x^2)$ , з)  $\cos \sqrt{\sin x}$ ,  $\operatorname{ch} \sqrt{\sin x}$  ( $x > 0$ ),
  - и)  $\ln(e^x + \sqrt{x})$  ( $x > 0$ ), к)  $5^{e^x-\cos \sqrt{|x|}}$ ,
  - л)  $\sqrt[3]{\cos \sqrt{x}}$  ( $x > 0$ ), м)  $\cos x \cos x^2 - 1$
24. Напишите асимптотические разложения функций при  $x \rightarrow 2$  с остаточным членом вида  $o(x-2)^\alpha$ , где  $\alpha \geq 0$
- $\sin(x-2)^2$ , б)  $(3-x)^\beta$ , в)  $\ln(x-1)$ , г)  $\cos(\pi x)$ ,
  - д)  $\operatorname{tg}(\pi x^2)$ , е)  $\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x-1}$ , ж)  $x^x - 4$
25. Напишите асимптотические разложения функций при  $x \rightarrow \infty$  с остаточным членом вида  $o(1/x^\alpha)$ , где  $\alpha \geq 0$
- $\sqrt{x^2+x} - x$ , б)  $\sqrt[3]{x^3+x} - x$ , в)  $\sqrt[4]{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} - x$ ,
  - г)  $\sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$ ,  $\operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$ , д)  $\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ , е)  $5^{1/x}$ ,
  - ж)  $\ln \cos\left(\frac{2}{x}\right)$ ,  $\ln \operatorname{ch}\left(\frac{2}{x}\right)$ , з)  $e^{1/\sqrt{x}} - 1$  ( $x > 0$ )
26. Напишите асимптотические формулы для последовательностей с остаточным членом вида  $o(1/n^\alpha)$ , где  $\alpha \geq 0$
- $\sqrt[3]{n^3+n^2} - n$ , б)  $2^{1/n} + 7^{1/n} - 2$ , в)  $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
27. Вычислите пределы
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin(x - \pi/3)}{1 - 2 \cos x}$ ,
  - в)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ , г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - \sqrt[n]{1+bx}}{x}$  ( $m, n \in N$ ),
  - д)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$ , е)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ ,

- ж)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$ , з)  $\lim \left( \frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$  при  $x \rightarrow +0$ ,  $x \rightarrow 1$ ,  $x \rightarrow +\infty$   
 и)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4+0} \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{8} + x \right) \right)^{\operatorname{tg} 2x}$ , к)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{ax+1}{bx+2} \right)^x$  ( $a^2 + b^2 \neq 0$ ),  
 л)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ , м)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{(\operatorname{ch}(\pi/n)-1)}$ ,  
 н)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a} \right)^n$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ )

28. Вычислите пределы

- а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} - \sqrt[n]{1+bx} - 1}{x}$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ),  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+2x} - \sqrt[4]{1+9x}}{1 - \sqrt{1-x/2}}$ , в)  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^4 3\sqrt{x}}$ ,  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} 2x}{\ln \cos 3x}$ , д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{3x}}{\sin(x^2/2) - \sin x}$ ,  
 е)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[m]{a} - 1)$  ( $a > 0$ ), ж)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\operatorname{ch}(\pi/n)}{\cos(\pi/n)} \right)^{n^2}$ ,  
 з)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2}$ , и)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^2+1}{2x^2-1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}}$ ,  
 к)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \left( \frac{2\pi n}{3n+1} \right)$ , л)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}$ , м)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

29. Вычислите пределы

- а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(\pi \cdot 2^x)}{\ln \cos(\pi \cdot 2^x)}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^a}{x - a}$  ( $a > 0$ ),  
 в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg}(\pi/4 + ax)}{\sin bx}$ , г)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2}$  ( $a > 0$ ),  
 д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}$ , е)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - 1 \right)^{1/\ln n - 1}$ ,  
 ж)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin \left( \ln \sqrt[n]{\cos \frac{\pi}{n}} \right)$ , з)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{n}{n+1} \right)^a + \sin \frac{1}{n} \right]^n$ ,  
 и)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\pi \sqrt{n^2+n})$ , к)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln \operatorname{ch} x)$

30. Вычислите пределы

- а)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x})$ ,  
 б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/3} [(x+1)^{2/3} - (x-1)^{2/3}]$ , в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{\sin^2 2x}$ ,  
 г)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \log_x 2$ , д)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$  ( $a > 0$ ),  
 е)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a})$  ( $a > 0$ ), ж)  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(e^{x^2} + 2\sqrt{x})}{\operatorname{tg} \sqrt{x}}$ ,  
 з)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x} - \sqrt[3]{x}}$ , и)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \cos \left( 2\pi \left( \frac{x}{x+1} \right)^a \right) \right]^{x^2}$ ,  
 к)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg}^n \left[ \frac{\pi - 4}{4} + \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^\alpha \right]$ , л)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$ ,  
 м)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$ , н)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$

# ГЛАВА IV

## ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

### § 1. Производная функции. Правила дифференцирования

#### Основные понятия и теоремы

**1. Определение производной.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ . Приращением этой функции в точке  $x_0$  называется функция аргумента  $\Delta x$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Разностное отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  также является функцией аргумента  $\Delta x$

Определение Производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  называется  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  (если он существует)

Производная функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  обозначается  $f'(x_0)$  или  $y'(x_0)$ . Операция нахождения производной называется дифференцированием.

#### 2. Таблица производных простейших элементарных функций.

I.	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ( $\alpha$ — любое число)
II.	$(\sin x)' = \cos x$ .
III.	$(\cos x)' = -\sin x$
IV.	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ , в частности, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ( $x > 0$ )
V.	$(a^x)' = a^x \ln a$ , в частности, $(e^x)' = e^x$ .
VI.	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ( $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ , $n \in \mathbf{Z}$ )
VII.	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ( $x \neq \pi n$ , $n \in \mathbf{Z}$ ).
VIII.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ( $-1 < x < 1$ )
IX.	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ( $-1 < x < 1$ ).
X.	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
XI.	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
XII.	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ .

$$\text{XIII. } (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$$

$$\text{XIV. } (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$\text{XV. } (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \quad (x \neq 0).$$

**3. Физический смысл производной.** Производная  $f'(x_0)$  — это скорость изменения функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  (иными словами, скорость изменения зависимой переменной  $y$  по отношению к изменению независимой переменной  $x$  в точке  $x_0$ ). В частности, если  $x$  — время,  $y = f(x)$  — координата точки, движущейся по прямой, в момент  $x$ , то  $f'(x_0)$  — мгновенная скорость точки в момент времени  $x_0$ .

**4. Геометрический смысл производной.** Рассмотрим график

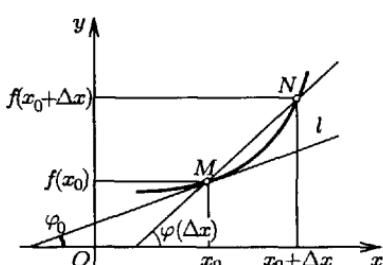


Рис. 1

функции  $y = f(x)$  (рис. 1). Точки  $M$  и  $N$  имеют следующие координаты:  $M(x_0, f(x_0)), N(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ . Угол между секущей  $MN$  и осью  $Ox$  обозначим  $\varphi(\Delta x)$ .

**Определение.** Если существует  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0$ , то прямая  $l$  с угловым коэффициентом  $k = \operatorname{tg} \varphi_0$ , проходящая через точку  $M(x_0, f(x_0))$ , называется *касательной* к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M$ .

**Теорема 1.** Если функция  $y = f(x)$  имеет в точке  $x_0$  производную  $f'(x_0)$ , то график функции имеет в точке  $M(x_0, f(x_0))$  касательную, причем  $f'(x_0)$  является угловым коэффициентом касательной, т. е. уравнение касательной записывается в виде

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Если функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  и

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty,$$

то говорят, что функция имеет в точке  $x_0$  бесконечную производную. В этом случае касательная к графику в точке  $M_0$  параллельна оси  $Oy$ , а ее уравнение таково:  $x = x_0$ .

**5. Односторонние производные.** Если существует

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \left( \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right),$$

то он называется *правой* (соответственно *левой*) производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  и обозначается  $f'(x_0 + 0)$  (соответственно  $f'(x_0 - 0)$ ).

Если существуют  $f'(x_0 + 0)$  и  $f'(x_0 - 0)$  и они равны, то существует  $f'(x_0)$ , и она равна  $f'(x_0 + 0)$ . Обратно: если существует  $f'(x_0)$ , то существуют  $f'(x_0 + 0)$  и  $f'(x_0 - 0)$ , причем  $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0)$ .

## 6. Правила дифференцирования.

Теорема 2. Если  $u(x)$  и  $v(x)$  имеют производные в точке  $x_0$ , то сумма, разность, произведение и частное этих функций (частное при условии  $v(x) \neq 0$ ) также имеют производные в точке  $x_0$ , причем в точке  $x_0$  справедливы равенства

$$(u + v)' = u' + v', \quad (u - v)' = u' - v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

## 7. Производная обратной функции.

Теорема 3. Если функция  $y = f(x)$  строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки  $x_0$ , имеет производную в точке  $x_0$  и  $f'(x_0) \neq 0$ , то существует обратная функция  $x = f^{-1}(y)$ , которая определена в некоторой окрестности точки  $y_0 = f(x_0)$  и имеет производную в точке  $y_0$ , причем

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (1)$$

Физическая интерпретация формулы (1): производная  $(f^{-1}(y_0))'$  есть скорость изменения переменной  $x$  по отношению к изменению переменной  $y$ , а  $f'(x_0)$  — скорость изменения переменной  $y$  по отношению к изменению переменной  $x$ . Ясно, что эти величины являются взаимно обратными.

## 8. Производная сложной функции.

Теорема 4. Если функция  $t = \varphi(x)$  имеет в точке  $x_0$  производную  $\varphi'(x_0)$ , а функция  $y = \psi(t)$  имеет в точке  $t_0 = \varphi(x_0)$  производную  $\psi'(t_0)$ , то сложная функция  $y = \psi(\varphi(x)) \equiv f(x)$  имеет производную в точке  $x_0$ , причем

$$f'(x_0) = \psi'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0). \quad (2)$$

Физическая интерпретация формулы (2): производная  $\varphi'(x_0)$  есть скорость изменения переменной  $t$  по отношению к изменению переменной  $x$ , а производная  $\psi'(t_0)$  — скорость изменения переменной  $y$  по отношению к изменению переменной  $t$ . Ясно, что скорость  $\varphi'(x_0)$  изменения переменной  $y$  по отношению к изменению переменной  $x$  равна произведению скоростей  $\psi'(t_0)$  и  $\varphi'(x_0)$ . (Если  $t$  “движется” быстрее  $x$  в  $k$  раз, а  $y$  — быстрее  $t$  в  $l$  раз, то  $y$  “движется” быстрее  $x$  в  $kl$  раз.)

**9. Производная функции, заданной параметрически.** Пусть функции

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (3)$$

определенны на некотором промежутке изменения переменной  $t$ , которую назовем *параметром*. Пусть функция  $x = \varphi(t)$  является строго монотонной на этом промежутке. Тогда существует обратная функция  $t = \varphi^{-1}(x)$ , подставляя которую в уравнение  $y = \psi(t)$ , получим

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)) \equiv f(x).$$

Таким образом, переменная  $y$  является сложной функцией переменной  $x$ . Задание функции  $y = f(x)$  с помощью уравнений (3) называется *параметрическим*.

Уравнения (3) можно интерпретировать как зависимость координат точки, движущейся на плоскости  $(x, y)$ , от времени  $t$ . При такой интерпретации график функции  $y = f(x)$  представляет собой траекторию точки.

Если функции  $x = \varphi(t)$  и  $y = \psi(t)$  имеют производные  $\varphi'(t) \neq 0$  и  $\psi'(t)$ , то функция  $y = f(x)$  также имеет производную, причем

$$f'(x) = \left. \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \quad (4)$$

Заметим, что существование производной  $\varphi'(t)$  определенного знака является достаточным условием строгой монотонности функции  $x = \varphi(t)$  и, следовательно, существования функции  $y = f(x)$ , заданной параметрически.

**10. Производная вектор-функции.** Если каждому значению переменной  $t \in T$  ( $T$  — некоторое числовое множество) поставлен в соответствие некоторый вектор  $\mathbf{r}$ , то говорят, что на множестве  $T$  определена вектор-функция  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ .

**Определение.** Вектор  $\mathbf{a}$  называется *пределом вектор-функции*  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  в точке  $t_0$ , если  $\lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{a}| = 0$ .

**Определение.** *Производной вектор-функции  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  в точке  $t$*  называется  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t))$  (если он существует).

Производная вектор-функции  $\mathbf{r}(t)$  обозначается  $\mathbf{r}'(t)$ .

**11. Физический смысл вектор-функции и ее производной.** Положение точки  $M$  в пространстве можно задать тремя ее координа-

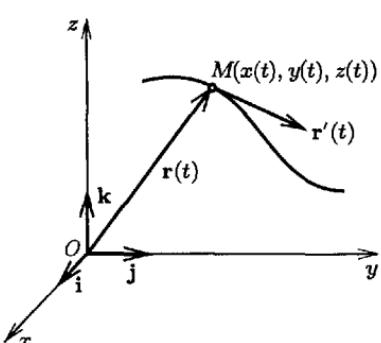


Рис. 2

натами или вектором  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ , начало которого совпадает с началом координат, а конец — с точкой  $M$  (рис. 2). Если точка  $M$  движется, то вектор  $\mathbf{r}$  изменяется в зависимости от времени  $t$ . Таким образом, движение точки можно описать вектор-функцией  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , где  $t$  изменяется на некотором отрезке  $[a, b]$ . Множество концов вектора  $\mathbf{r}(t)$  (где  $t \in [a, b]$ ) представляет собой траекторию движения точки (оно называется также *годографом* вектор-функции  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ). Производ-

ная  $\mathbf{r}'(t)$  есть вектор мгновенной скорости точки в момент времени  $t$ . Вектор  $\mathbf{r}'(t)$  направлен по касательной к траектории.

Если обозначить через  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  координаты точки  $M$  в момент времени  $t$ , а через  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  — единичные векторы осей координат,

то вектор-функцию  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  можно представить в виде

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

а производную  $\mathbf{r}'(t)$  — в виде

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

Аналогично, движение точки  $M$  на плоскости  $(x, y)$  можно описать вектор-функцией  $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ .

Если  $x'(t)$  имеет определенный знак, например,  $x'(t) > 0$ , то траектория движения точки  $M$  представляет собой график функции  $y = f(x)$ , заданной параметрически уравнениями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ .

Координаты вектора скорости  $\mathbf{r}'(t)$  равны  $x'(t)$  и  $y'(t)$ , а тангенс угла между вектором  $\mathbf{r}'(t)$  и осью  $Ox$ , т. е. угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = f(x)$ , равен  $y'(t)/x'(t)$  (рис. 3). Таким образом, мы снова получили выражение (4) для производной функции, заданной параметрически.

Вектор  $\mathbf{n}(t) = \{-y'(t), x'(t)\}$  при  $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$  является вектором нормали к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M(x(t), y(t))$ , т. е.

направляющим вектором прямой, проходящей через точку  $M$  перпендикулярно касательной к графику в этой точке (эта прямая называется нормалью).

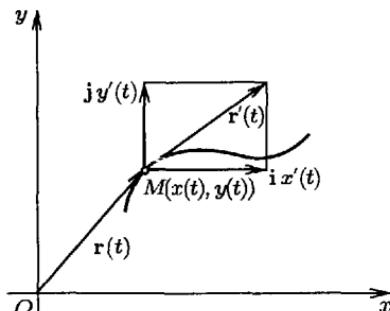


Рис. 3

### Контрольные вопросы и задания

- Что называется приращением функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ ?
- От какого аргумента зависит разностное отношение  $\Delta y/\Delta x$ ? Какова область определения функции  $\Delta y/\Delta x$ ?
- Дайте определение производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ .
- Пользуясь определением производной, выведите формулы для производных функций  $x^n$  ( $n$  — натуральное число),  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\log_a x$ ,  $a^x$ .
- Каков физический смысл производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ ? Какое движение точки описывается уравнением  $y = v_0x + y_0$  ( $x$  — время,  $v_0$  и  $y_0$  — постоянные)?
- Каков геометрический смысл производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ ? Дайте определение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $(x_0, f(x_0))$  и запишите уравнение касательной.
- Когда говорят, что функция имеет в точке  $x_0$  бесконечную производную? Приведите пример функции, график которой имеет в некоторой точке вертикальную касательную.
- Что такое односторонние производные функции в точке? Какова связь между односторонними производными и производной функции в точке? Приведите пример функции, у которой существуют односторонние производные в некоторой точке, но не существует производной в этой точке.

9. Выведите формулы для производных суммы, разности, произведения и частного двух функций. Используя их, выведите формулы для производных функций  $\operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{ctg} x$ ,  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} x$ ,  $\operatorname{th} x$ ,  $\operatorname{cth} x$ .
10. Сформулируйте теорему о производной обратной функции. Что можно сказать о производной обратной функции, если выполнены все условия теоремы, кроме условия  $f'(x_0) \neq 0$  (т. е. выполнено условие  $f'(x_0) = 0$ )? Приведите пример такого случая. Какова физическая интерпретация формулы для производной обратной функции? Пользуясь этой формулой, выведите формулы для производных обратных тригонометрических функций.
11. Сформулируйте теорему о производной сложной функции. Применима ли эта теорема к функции  $y = \sin^2(\sqrt[3]{x^2})$  в точке  $x = 0$ ? Существует ли производная этой функции в точке  $x = 0$ ? Какова физическая интерпретация формулы для производной сложной функции? Используя эту формулу, выведите формулу для производной функции  $x^\alpha$  ( $\alpha$  — любое число).
12. Что такое параметрическое задание функции? При каких условиях справедлива формула (4) для производной функции, заданной параметрически?
13. Что такое вектор-функция? Дайте определения предела и производной вектор-функции. Каков физический смысл вектор-функции и ее производной?
14. Пользуясь определением производной вектор-функции, выведите формулу  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i}x'(t) + \mathbf{j}y'(t) + \mathbf{k}z'(t)$ .
15. Каковы координаты единичного вектора нормали к годографу вектор-функции  $\mathbf{r} = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t)$  в точке  $M(x(t), y(t))$ ?

### Примеры решения задач

1. Пользуясь определением производной, найти производную функции  $y = x^3$  в точке  $x = 1$ .

•  $\Delta$  Находим приращение функции  $y = x^3$  в точке  $x = 1$ :

$$\Delta y = (1 + \Delta x)^3 - 1 = 3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Отсюда получаем  $\frac{\Delta x}{\Delta y} = 3 + 3\Delta x + (\Delta x)^2$  и, следовательно,  $y'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 3$ .  $\blacktriangle$

2. Сравнить на промежутке  $0 \leq t \leq 1$  мгновенные и средние скорости двух точек, прямолинейные движения которых заданы уравнениями  $s_1 = t^2$ ,  $s_2 = 2t^4$  ( $t \geq 0$ ).

$\Delta$  Находим мгновенные скорости точек в момент времени  $t$ :  $v_1(t) = s'_1(t) = 2t$ ,  $v_2(t) = s'_2(t) = 8t^3$ . Отсюда получаем  $v_1(0) = v_2(0)$ ;  $v_1(1/2) = v_2(1/2)$ ;  $v_1(t) > v_2(t)$  при  $0 < t < 1/2$ ;  $v_1(t) < v_2(t)$  при  $t > 1/2$ . Средняя скорость первой точки на отрезке времени  $0 \leq t \leq 1$  равна  $v_{1cp} = \frac{s_1(1) - s_1(0)}{1} = 1$ . Аналогично,  $v_{2cp} = \frac{s_2(1) - s_2(0)}{1} = 2$ . Таким образом,  $v_{1cp} < v_{2cp}$ .  $\blacktriangle$

3. Составить уравнение касательной к графику функции  $y = \cos x$  в точке с абсциссой  $x = \pi/6$ .

Δ Имеем  $x_0 = \pi/6$ ,  $f(x_0) = \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ ,  $f'(x_0) = -\sin(\pi/6) = -1/2$ . Поэтому искомое уравнение касательной запишется в виде

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} \left( x - \frac{\pi}{6} \right). \blacksquare$$

**4.** Найти односторонние производные функции  $f(x) = |x - x_0|g(x)$  в точке  $x_0$ , где  $g(x)$  — непрерывная в точке  $x_0$  функция. Имеет ли функция  $f(x)$  производную в точке  $x_0$ ?

Δ При  $\Delta x > 0$  приращение функции в точке  $x_0$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \\ &= |x_0 + \Delta x - x_0| g(x_0 + \Delta x) - 0 = g(x_0 + \Delta x) \Delta x, \end{aligned}$$

откуда  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = g(x_0 + \Delta x)$ . Так как  $g(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то  $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = g(x_0)$ . Итак,  $f'(x_0 + 0) = g(x_0)$ .

Аналогично, при  $\Delta x < 0$  получаем  $\Delta y = -g(x_0 + \Delta x) \Delta x$ , откуда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} (-g(x_0 + \Delta x)) = -g(x_0),$$

т. е.  $f'(x_0 - 0) = -g(x_0)$ .

Если  $g(x_0) \neq 0$ , то  $f'(x_0 + 0) \neq f'(x_0 - 0)$ , и, значит, функция  $f(x)$  не имеет производной в точке  $x_0$ . Если же  $g(x_0) = 0$ , то  $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = 0$ , и, следовательно, функция  $f(x)$  имеет производную в точке  $x_0$ , причем  $f'(x_0) = 0$ . ▲

**5.** Вычислить производную функции:

а)  $y = \frac{x^2 \sin x}{\ln x}$  ( $x > 0$ ,  $x \neq 1$ ); б)  $y = \cos(2^x - x^3)$  ( $-\infty < x < \infty$ ).

Δ а) Пользуясь правилами дифференцирования произведения и частного и таблицей производных, получаем

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{(x^2 \sin x)' \ln x - x^2 \sin x (\ln x)'}{\ln^2 x} = \\ &= \frac{(x^2 \cos x + 2x \sin x) \ln x - x^2 \sin x \cdot 1/x}{\ln^2 x} = \\ &= \frac{x(x \cos x + 2 \sin x) \ln x - x \sin x}{\ln^2 x} \quad (x > 0, x \neq 1). \end{aligned}$$

б) Функцию  $y = \cos(2^x - x^3)$  можно представить в виде  $y = \cos t$ , где  $t = 2^x - x^3$ . Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, получаем

$$\begin{aligned} y'(x) &= (\cos t)'|_{t=2^x-x^3} (2^x - x^3)' = \\ &= -\sin(2^x - x^3)(2^x \ln 2 - 3x^2) \quad (-\infty < x < \infty). \blacksquare \end{aligned}$$

**6.** Найти производную  $y'(x)$  функции

$$y = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

и исследовать, является ли  $y'(x)$  непрерывной в точке  $x = 0$ .

Δ При  $x \neq 0$  производную  $y'(x)$  можно найти дифференцированием функции  $x^2 \sin(1/x)$  по правилу дифференцирования произведения. Это дает

$$y'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) \quad (x \neq 0).$$

Полученное выражение не определено при  $x = 0$ . Это не означает, однако, что  $y'(0)$  не существует, поскольку выражение для  $y'(x)$  было получено при условии  $x \neq 0$ . Для нахождения  $y'(0)$  воспользуемся определением производной. Приращение  $\Delta y$  функции  $y(x)$  в точке  $x = 0$  равно  $(\Delta x)^2 \sin(1/\Delta x)$ , поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} = 0,$$

т. е.  $y'(0) = 0$ . Итак,  $y'(x)$  существует во всех точках.

$$y'(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Для исследования непрерывности  $y'(x)$  в точке  $x = 0$  рассмотрим  $\lim_{x \rightarrow 0} y'(x)$ . Ясно, что  $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin(1/x) = 0$ , а  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(1/x)$  не существует.

Поэтому и  $\lim_{x \rightarrow 0} y'(x)$  не существует. Таким образом,  $y'(x)$  разрывна в точке  $x = 0$ , которая является точкой разрыва II рода функции  $y'(x)$ . ▲

7. Доказать, что уравнения  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$  ( $0 \leq t \leq \pi$ ) задают параметрически некоторую функцию  $y = f(x)$ . Найти производную  $f'(x)$  этой функции.

Δ Функция  $x = \cos t$  является строго монотонной (убывающей) на отрезке  $0 \leq t \leq \pi$  и, следовательно, имеет обратную. Подставляя эту обратную функцию в уравнение  $y = \sin t$ , получаем функцию вида  $y = f(x)$ . В данном случае обратная функция находится в явном виде:  $t = \arccos x$ , и поэтому для  $f(x)$  получаем выражение  $f(x) = \sin(\arccos x)$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ). Эту же функцию можно записать в виде  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) (объясните, почему). Вычислим производную  $f'(x)$  двумя способами: а) используя явное выражение; б) используя формулу для производной функции, заданной параметрически. Имеем:

$$\text{а) } f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1);$$

$$\text{б) } f'(x) = \frac{\cos t}{-\sin t} \quad (t \neq 0, t \neq \pi).$$

Так как  $\cos t = x$ ,  $\sin t = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - x^2}$  при  $0 \leq t \leq \pi$ , то из второго выражения для  $f'(x)$  получаем первое:  $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  ( $x \neq \pm 1$  или  $-1 < x < 1$ ). ▲

8. Доказать, что если вектор-функции  $\mathbf{r}_1(t)$  и  $\mathbf{r}_2(t)$  имеют производные, то для производной скалярного произведения  $(\mathbf{r}_1(t) \mathbf{r}_2(t))$

справедлива формула

$$(\mathbf{r}_1(t) \mathbf{r}_2(t))' = (\mathbf{r}'_1(t) \mathbf{r}_2(t)) + (\mathbf{r}_1(t) \mathbf{r}'_2(t))$$

Δ Пусть  $\mathbf{r}_1(t) = x_1(t)\mathbf{i} + y_1(t)\mathbf{j} + z_1(t)\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{r}_2(t) = x_2(t)\mathbf{i} + y_2(t)\mathbf{j} + z_2(t)\mathbf{k}$ . Тогда  $(\mathbf{r}_1(t) \mathbf{r}_2(t)) = x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t) + z_1(t)z_2(t)$ . Воспользуемся тем, что если  $\mathbf{r}_i(t)$  ( $i = 1, 2$ ) имеет производную, то  $x_i(t)$ ,  $y_i(t)$ ,  $z_i(t)$  также имеют производные, причем  $\mathbf{r}'_i(t) = x'_i(t)\mathbf{i} + y'_i(t)\mathbf{j} + z'_i(t)\mathbf{k}$  (см. упр. 25). Получаем

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_1(t) \mathbf{r}_2(t))' &= x'_1(t)x_2(t) + x_1(t)x'_2(t) + y'_1(t)y_2(t) + y_1(t)y'_2(t) + \\ &+ z'_1(t)z_2(t) + z_1(t)z'_2(t) = \{x'_1(t)x_2(t) + y'_1(t)y_2(t) + z'_1(t)z_2(t)\} + \\ &+ \{x_1(t)x'_2(t) + y_1(t)y'_2(t) + z_1(t)z'_2(t)\} = (\mathbf{r}'_1(t) \mathbf{r}_2(t)) + (\mathbf{r}_1(t) \mathbf{r}'_2(t)). \blacksquare \end{aligned}$$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Запишите выражение для  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x)$  и найдите область определения функции  $\Delta y$ , если
  - $f(x) = \arcsin x$ ,  $x_0 = 1/2$ ,
  - $f(x) = \arccos x$ ,  $x_0 = 0$ ,
  - $f(x) = \ln x$ ,  $x_0 = 2$ ,
  - $f(x) = \sin x$ ,  $x_0 = 2\pi$
2. Пользуясь определением производной, найдите производную функции
  - $y = x$  в точке  $x = 1$ ,
  - $y = x^2$  в точке  $x = x_0$ ,
  - $y = \sqrt{x}$  в точке  $x = 4$ ,
  - $y = x|x|$  в точке  $x = 0$ ,
  - $y = \begin{cases} (1 - \cos x)/x & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$  в точке  $x = 0$
3. Функция  $y = f(x)$  имеет производную в точке  $a$ . Вычислите пределы последовательностей
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} n(f(a + 1/n) - f(a))$ ,
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} n(f(a) - f(a - 2/n))$ ,
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} n(f(a - 1/n) - f(a + 1/n))$ ,
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} n(f(a + 1/n) + f(a + 2/n) + \dots + f(a + k/n) - kf(a))$
4. Уравнения прямолинейного движения двух точек имеют вид а)  $s_1 = t$ ,  $s_2 = t^2$  ( $t \geq 0$ ), б)  $s_1 = t^2$ ,  $s_2 = t^3$  ( $t \geq 0$ ), в)  $s_1 = \ln t$ ,  $s_2 = \sqrt{t}$  ( $t \geq 1$ ) ( $t$  — время,  $s_1$  и  $s_2$  — расстояния, пройденные первой и второй точками за время  $t$ ). Сравните мгновенные скорости этих двух точек, а также их средние скорости на отрезках времени  $0 \leq t \leq 1$  и  $1 \leq t \leq 2$  для случаев а) и б) и на отрезках  $1 \leq t \leq 4$  и  $1 \leq t \leq 25$  для случая в)
5. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ , если
  - $f(x) = \sin x$ ,  $x_0 = 0$ ,
  - $f(x) = x^2$ ,  $x_0 = 1$ ,
  - $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $x_0 = 0$ ,
  - $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ,  $x_0 = 1$
6. Найдите точку пересечения касательных к графику функции  $y = f(x)$  в точках с абсциссами  $x_1$  и  $x_2$ , если
  - $f(x) = \cos x$ ,  $x_1 = \pi/6$ ,  $x_2 = \pi/2$ ,
  - $f(x) = e^x$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,
  - $f(x) = \arcsin x$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1/2$
7. Составьте уравнения касательных к графику функции  $y = \sqrt{x}$ , проходящих через точку  $(2, 3/2)$

8. Найдите односторонние производные  $f'(x_0 + 0)$  и  $f'(x_0 - 0)$  и сравните их, если

- а)  $f(x) = |x|$ ,  $x_0 = 0$ , б)  $f(x) = |x|$ ,  $x_0 = 1$ ,
- в)  $f(x) = x^2 \operatorname{sgn} x$ ,  $x_0 = 0$ , г)  $f(x) = \sqrt{\sin^2 x}$ ,  $x_0 = 0$ ,
- д)  $f(x) = |x| \sin x$ ,  $x_0 = 0$ , е)  $f(x) = |x - \pi/2| \cos x$ ,  $x_0 = \pi/2$ ,
- ж)  $f(x) = |x - 1| e^x$ ,  $x_0 = 1$

Существует ли в каждом случае производная  $f'(x_0)$ ?

9. Найдите  $y'(x)$ , если

- а)  $y = x^2$ , б)  $y = \sqrt{x}$ , в)  $y = 1/x$ , г)  $y = 2\sqrt[3]{x^2} - 3/\sqrt{x}$ ,
- д)  $y = \log_2 x^3 + \log_3 x^2$  (вычислите  $y'(1)$ ), е)  $y = 2^x + (1/2)^x$ ,
- ж)  $y = \sin x - \cos x$  (вычислите  $y'(0)$  и  $y'(\pi/4)$ ), з)  $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$ ,
- и)  $y = \arcsin x + \arccos x$  (объясните полученный результат),
- к)  $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$  (объясните полученный результат)

10. Докажите, что если  $u(x)$  и  $v(x)$  имеют производные в точке  $x$  и  $u(x) > 0$ , то функция  $[u(x)]^{v(x)}$  также имеет производную в точке  $x$ , причем

$$[u(x)^{v(x)}]' = v(x)u(x)^{v(x)-1}u'(x) + u(x)^{v(x)}\ln u(x)v'(x)$$

11. Найдите  $y'(x)$ , если (везде  $a > 0$ )

- а)  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ,  $y = \sqrt{x^2 - a^2}$ ,  $y = x\sqrt[3]{x^2 + 1}$ ,
- б)  $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ ,  $y = \sin^2(\cos x) + \cos^2(\sin x)$ ,
- в)  $y = \sin[\sin(\sin x)]$ ,  $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x}$ ,  $y = 2^{\cos x + \operatorname{tg} x}$ ,
- г)  $y = e^x \sin x$ ,  $y = e^{x^2} \cos 2x$ ,  $y = e^{e^x} + x^{e^x}$ ,
- д)  $y = x^x$ ,  $y = \ln[\ln(\ln x)]$ ,  $y = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}$ ,
- е)  $y = \ln|x|$ ,  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$ ,  $y = \ln \sin x$ ,
- ж)  $y = \sin(\ln x)$ ,  $y = \arcsin \frac{x}{a}$ ,  $y = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$ ,
- з)  $y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$  (сравните с производной функции  $y = \operatorname{arctg} x$  и объясните результат),
- и)  $y = \arccos(1/x)$ ,  $y = \arcsin(\sin x)$ ,  $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ ,
- к)  $y = \sin(\arcsin x)$ ,  $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$ ,
- л)  $y = \ln \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{a}{b} \operatorname{arctg} \frac{x}{b}$ ,  $y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}$ ,
- м)  $y = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}}$ ,  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ,
- н)  $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$ ,  $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$ ,
- о)  $y = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1+x^2})$ ,  $y = (\sin x)^{\cos x}$ ,  $y = \operatorname{sh}(\operatorname{tg} x)$ ,  $y = \operatorname{th}(\cos x)$
- п)  $y = \ln(\operatorname{sh} x)$ ,  $y = \lg(\operatorname{ch} x)$ ,  $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x)$ ,  $y = \ln \left( \operatorname{cth} \frac{x}{2} \right)$

12. Известно, что  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  и  $f(x)$  имеют производные. Найдите  $y'(x)$ , если

- а)  $y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$ ,
- б)  $y = \log_{\varphi(x)} \psi(x)$  ( $\varphi(x) > 0$ ,  $\varphi(x) \neq 1$ ,  $\psi(x) > 0$ ),
- в)  $y = f(x^2) + f(x^{-2})$ , г)  $y = f(f(x))$

13. Функция  $y = f(x)$  имеет в точке  $x = 0$  производную, отличную от нуля  
Вычислите пределы
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)e^x - f(0)}{f(x)\cos x - f(0)}$ ,
  - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)\sin x}{f(x)\operatorname{ch} x - f(0)}$
14. Функция  $y = f(x)$  имеет производную в точке  $x = a$  Вычислите пределы
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(a+x)}{f(a)} \right)^{1/x}$ ,
  - $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{f(a)} \right)^{1/(\sqrt{x} - \sqrt{a})} \quad (a > 0)$
15. Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют производные в точке  $a$  Вычислите пределы
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x - a} \quad (n \in \mathbb{N}),$
  - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a},$
  - $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)\ln a - f(a)\ln x}{g(x) - g(a)} \quad (a > 0, g'(a) \neq 0)$
16. Докажите (методом математической индукции), что если  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  имеют производные в точке  $x$ , то сумма  $\sum_{i=1}^n f_i(x)$  и произведение  $f_1(x)f_2(x) \dots f_n(x)$  также имеют производные в точке  $x$ , причем
- $$\left( \sum_{i=1}^n f_i(x) \right)' = \sum_{i=1}^n f'_i(x), \quad (f_1(x)f_2(x) \dots f_n(x))' = \sum_{i=1}^n f_1(x) \dots f'_i(x) \dots f_n(x)$$
17. Докажите, что имеет место следующее правило дифференцирования определителей  $n$ -го порядка
- $$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{1n}(x) \\ f_{k1}(x) & f_{kn}(x) \\ f_{n1}(x) & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{1n}(x) \\ f'_{k1}(x) & f'_{kn}(x) \\ f_{n1}(x) & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$
18. Можно ли применить правило дифференцирования произведения двух функций  $u(x)$  и  $v(x)$  в точке  $x_0$ , если
- $u(x) = x, v(x) = |x|, x_0 = 0$ ,
  - $u(x) = x, v(x) = |x|, x_0 = 1$ ,
  - $u(x) = \sin x, v(x) = \operatorname{sgn} x, x_0 = 1$ ,
  - $u(x) = x^2, v(x) = \operatorname{sgn} x, x_0 = 0$ ,
  - $u(x) = x^3, v(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases} x_0 = 0$ ,
  - $u(x) = [x], v(x) = \sin^2(\pi x), x_0 = n \in \mathbb{Z}$ ,
  - $u(x) = x - [x], v(x) = \sin^2(\pi x), x_0 = n \in \mathbb{Z}$ ?
- Существует ли в каждом случае производная произведения  $u(x)v(x)$  в точке  $x_0$ ?
19. Справедливы ли следующие утверждения?
- I Если  $u(x)$  имеет производную в точке  $x_0$ , а  $v(x)$  не имеет производной в точке  $x_0$ , то
- $u(x) + v(x)$  не имеет производной в точке  $x_0$ ,
  - $u(x)v(x)$  не имеет производной в точке  $x_0$
- II Если  $u(x)$  и  $v(x)$  не имеют производных в точке  $x_0$ , то
- $u(x) + v(x)$  не имеет производной в точке  $x_0$ ,
  - $u(x)v(x)$  не имеет производной в точке  $x_0$
- (Если утверждение не справедливо, то приведите соответствующий пример)

20. Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют производные во всех точках  $x \in \mathbf{R}$ . В каких точках не имеет производной функция:

- а)  $|f(x)|$ ; б)  $\max(f(x), g(x))$ ; в)  $\max_{a \leq t \leq x} f(t)$ ?

21. Справедливо ли утверждение: если  $f(x) < g(x)$ , то  $f'(x) < g'(x)$ ?

22. Вынайдите формулы для сумм

$$P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}, \quad Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \dots + n^2x^{n-1},$$

$$R_n = x + 3x^3 + 5x^5 + \dots + (2n+1)x^{2n+1}, \quad S_n = \sum_{k=1}^n k \cos kx.$$

23. Изобразите траекторию точки, движение которой на плоскости  $(x, y)$  задается уравнениями:

- а)  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $-\infty < t < \infty$ ; б)  $x = \cos^2 t$ ,  $y = \sin^2 t$ ,  $0 \leq t < \infty$ ;  
 в)  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ ,  $0 \leq t < \infty$ ;  
 г)  $x = a \operatorname{ch} t$ ,  $y = b \operatorname{sh} t$ ,  $-\infty < t < \infty$ ;  
 д)  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ ;  
 е)  $x = e^t$ ,  $y = e^{2t}$ ,  $-\infty < t < \infty$ .

В каждом из случаев укажите такой промежуток изменения параметра  $t$ , на котором уравнения определяют функцию  $y = f(x)$ , и найдите производную этой функции по формуле (4). В случаях а), б), в), г), е) выразите  $f(x)$  в явном виде и сравните явное выражение для  $f'(x)$  с выражением, полученным по формуле (4). В случаях в) и г) составьте уравнения касательной и нормали к кривой в точке  $t = 0$ .

24. Пусть  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$  — постоянный вектор. Докажите утверждение: для того чтобы  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{a}$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a_1$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = a_2$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = a_3$ .

25. Пользуясь результатом предыдущей задачи, докажите утверждение: для того чтобы вектор-функция  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$  имела производную  $\mathbf{r}'(t)$  в точке  $t$ , необходимо и достаточно, чтобы скалярные функции  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  имели производные в точке  $t$ . При этом  $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$ .

26. Докажите, что для вектор-функций имеют место следующие правила дифференцирования:

$$(\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}'_1(t) + \mathbf{r}'_2(t),$$

$$(f(t)\mathbf{r}(t))' = f'(t)\mathbf{r}(t) + f(t)\mathbf{r}'(t),$$

$$[\mathbf{r}_1(t)\mathbf{r}_2(t)]' = [\mathbf{r}'_1(t)\mathbf{r}_2(t)] + [\mathbf{r}_1(t)\mathbf{r}'_2(t)],$$

где  $[\mathbf{r}_1(t)\mathbf{r}_2(t)]$  — векторное произведение векторов  $\mathbf{r}_1(t)$  и  $\mathbf{r}_2(t)$ .

27. Движение точки в пространстве задается уравнениями:

- а)  $x = t$ ,  $y = t$ ,  $z = t^2$ ,  $t \geq 0$ ;

- б)  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$ ,  $z = ht$ ,  $t \geq 0$ ,  $R > 0$ ,  $h > 0$  (винтовая линия);

- в)  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^3$ ,  $t \geq 0$ ;

- г)  $x = \ln t$ ,  $y = t^2/2$ ,  $z = \sqrt{2}t$ ,  $t \geq 1$ .

Найдите модуль и направляющие косинусы вектора скорости в момент времени: а)  $t = 2$ ; б)  $t = \pi$ ; в)  $t = 1$ ; г)  $t = 2,5$ .

## § 2. Дифференциал функции

### Основные понятия и теоремы

#### 1. Дифференцируемость функции.

**Определение.** Функция  $y = f(x)$  называется *дифференцируемой* в точке  $x_0$ , если ее приращение  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = A \Delta x + \alpha \Delta x, \quad (1)$$

где  $A$  — некоторое число, а  $\alpha$  — функция аргумента  $\Delta x$ , бесконечно малая и непрерывная в точке  $\Delta x = 0$  (т. е.  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = \alpha(0) = 0$ ).

**Теорема 5.** Для того чтобы функция  $y = f(x)$  была дифференцируемой в точке  $x_0$ , необходимо и достаточно, чтобы существовала производная  $f'(x_0)$ .

Отметим, что при этом  $A = f'(x_0)$ .

*Дифференциалом* (или *первым дифференциалом*) функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  (дифференцируемой в этой точке) называется функция аргумента  $\Delta x$ :  $dy = f'(x_0)\Delta x$ .

При  $f'(x_0) \neq 0$  дифференциал является главной (линейной относительно  $\Delta x$ ) частью приращения функции в точке  $x_0$ .

*Дифференциалом независимой переменной*  $x$  называется приращение этой переменной:  $dx = \Delta x$ . Таким образом, дифференциал функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  имеет вид

$$dy = f'(x_0)dx, \quad (2)$$

откуда

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx},$$

т. е. производная функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  равна отношению дифференциала функции в этой точке к дифференциальному независимой переменной.

**2. Геометрический и физический смысл дифференциала.** Геометрический смысл дифференциала функции нетрудно уяснить из рис. 4, на котором изображены график функции  $y = f(x)$  (жирная линия) и касательная  $MP$  к графику в точке  $M(x_0, f(x_0))$ . Дифференциал  $dy$  равен приращению линейной функции, графиком которой является касательная  $MP$ .

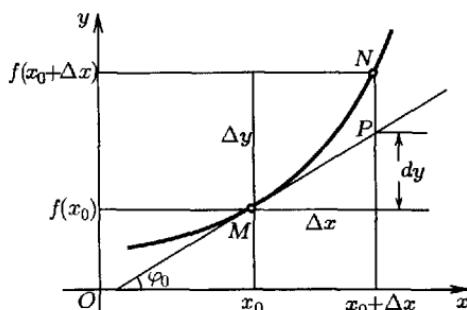


Рис. 4

Если  $x$  — время, а  $y = f(x)$  — координата точки на прямой в момент  $x$ , то дифференциал  $dy = f'(x_0)\Delta x$  равен тому изменению координаты, которое получила бы точка за время  $\Delta x$ , если бы скорость точки на отрезке времени  $[x_0, x_0 + \Delta x]$  была постоянной и равной  $f'(x_0)$ . Изменение скорости на этом отрезке приводит к тому, что, вообще говоря,  $\Delta y \neq dy$ . Однако на малых промежутках времени  $\Delta x$  изменение скорости незначительно и  $\Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x$ .

**3. Инвариантность формы первого дифференциала.** Пусть аргумент  $x$  дифференцируемой в точке  $x_0$  функции  $y = f(x)$  является не независимой переменной, а функцией некоторой независимой переменной  $t$ :  $x = \varphi(t)$ , причем  $x_0 = \varphi(t_0)$ , а  $\varphi(t)$  дифференцируема в точке  $t_0$ . Тогда дифференциал функции  $y = f(x)$  по-прежнему имеет вид (2):  $dy = f'(x_0)dx$ , но только теперь  $dx$  является не произвольным приращением аргумента  $x$  (как в случае, когда  $x$  — независимая переменная), а дифференциалом функции  $x = \varphi(t)$  в точке  $t_0$ , т. е.  $dx = \varphi'(t_0)dt$ . Это свойство (сохранение формулы (2) и в том случае, когда  $x = \varphi(t)$ ) называется *инвариантностью формы первого дифференциала*.

**4. Использование дифференциала для приближенных вычислений.** Так как  $\Delta y \cong dy$  при малых  $\Delta x$ , т. е.  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cong f'(x_0)\Delta x$ , то

$$f(x_0 + \Delta x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \quad (3)$$

Эта формула позволяет находить приближенные значения  $f(x_0 + \Delta x)$  при малых  $\Delta x$ , если известны  $f(x_0)$  и  $f'(x_0)$ . При этом погрешность при замене  $f(x_0 + \Delta x)$  правой частью формулы (3) тем меньше, чем меньше  $\Delta x$ , и, более того, эта погрешность при  $\Delta x \rightarrow 0$  является бесконечно малой более высокого порядка, чем  $\Delta x$ .

### Контрольные вопросы и задания

- 1 Дайте определение дифференцируемости функции в данной точке
- 2 Докажите теорему о связи между дифференцируемостью функции в точке и существованием в этой точке производной
- 3 Что такое дифференциал функции в данной точке? От какого аргумента он зависит?
- 4 Может ли дифференциал функции в данной точке быть постоянной величиной?
- 5 Для каких функций дифференциал равен приращению функции? Приведите примеры
- 6 Каков геометрический смысл дифференциала?
- 7 Каков физический смысл дифференциала?
- 8 Что понимается под инвариантностью формы первого дифференциала? Докажите, что форма первого дифференциала инвариантна
- 9 Как можно использовать дифференциал функции для приближенных вычислений?

### Примеры решения задач

**1.** Найти дифференциал функции  $y = x^2 - x + 3$  в точке  $x = 2$  двумя способами а) выделяя линейную относительно  $\Delta x$  часть  $\Delta y$ , б) по формуле (2)

$$\Delta \text{a}) \Delta y = f(2 + \Delta x) - f(2) = [(2 + \Delta x)^2 - (2 + \Delta x) + 3] - [2^2 - 2 + 3] = 3\Delta x + (\Delta x)^2 \text{ Отсюда следует, что } dy = 3\Delta x$$

б)  $f'(x) = 2x - 1$ ,  $f'(2) = 3$  Следовательно, по формуле (2) получаем  $dy = 3dx = 3\Delta x$  ▲

**2.** Найти дифференциал функции  $y = \sin(x^2)$ . а) в точке  $x = x_0$ , б) в точке  $x = \sqrt{\pi}$ ; в) в точке  $x = \sqrt{\pi}$  при  $dx = -2$

$$\Delta \text{a}) \text{Согласно формуле (2)} \quad dy|_{x=x_0} = f'(x_0)dx = \cos(x_0^2)2x_0 dx$$

б) Полагая в последнем равенстве  $x = \sqrt{\pi}$ , получаем  $dy|_{x=\sqrt{\pi}} = -2\sqrt{\pi} dx$ .

$$\text{в) Имеем } dy|_{\substack{x=\sqrt{\pi} \\ dx=-2}} = 4\sqrt{\pi} \quad \blacktriangle$$

**3.** Заменяя приращение функции ее дифференциалом, найти приближенное значение а)  $\sqrt{0,98}$ , б)  $\sin 31^\circ$

Δ а) Рассмотрим функцию  $y(x) = \sqrt{1+x}$ . Так как  $y(0) = 1$ ,  $y(-0,02) = \sqrt{0,98}$ ,  $y'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$ ,  $y'(0) = \frac{1}{2}$ , то по формуле (3) получаем

$$y(-0,02) \approx y(0) + y'(0)(-0,02) = 1 - 0,01 = 0,99.$$

Итак,  $\sqrt{0,98} \approx 0,99$ .

б) Рассмотрим функцию  $y = \sin x$ . Так как  $y(30^\circ) = \sin 30^\circ = 1/2$ ,  $y'(30^\circ) = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$ ,  $1^\circ = 2\pi/360$  (радиан)  $\approx 0,0175$  (радиан), то по формуле (3), получаем

$$\sin 31^\circ \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\pi}{360} \approx 0,5151. \quad \blacktriangle$$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

**28.** Представьте в виде (1) приращение функции

- а)  $y = e^x$  в точке  $x = 0$ , б)  $y = \sin x$  в точке  $x = \pi/2$ ,  
в)  $y = \operatorname{arctg} x$  в точке  $x = 0$

Запишите выражение для функции  $\alpha(\Delta x)$

**29.** Найдите приращение и дифференциал функции  $y = x^3 - x^2 + 1$  в точке  $x = 1$  и вычислите их значения при

- а)  $\Delta x = 0,01$ , б)  $\Delta x = 0,1$ , в)  $\Delta x = 1$ , г)  $\Delta x = 3$

**30.** Прямолинейное движение точки задано уравнением  $s = 2t^2 + t + 1$ , где  $t$  выражается в секундах, а  $s$  — в метрах. Найдите приращение и дифференциал пути  $s$  в момент времени  $t = 1$  с и сравните их при

- а)  $\Delta t = 0,1$  с, б)  $\Delta t = 0,2$  с, в)  $\Delta t = 1$  с

31. Найдите дифференциал функции  $y$  в точке  $x$ , если:

- а)  $y = \sqrt{x}$ ; б)  $y = \frac{1}{x}$ ; в)  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ; г)  $y = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$ ;  
 д)  $y = \arcsin \frac{x}{a}$ ; е)  $y = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$ ; ж)  $y = xe^{2x}$ ; з)  $y = x \sin x + \cos x$ .

32. Найдите  $dy|_{x=0}$  и  $dy|_{x=1}$ , если:

- а)  $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$ ; б)  $y = \ln(1+x)$ ; в)  $y = e^x$ ;  
 г)  $y = \sin \frac{\pi x}{2}$ ; д)  $y = \cos \frac{\pi x}{2}$ .

33. Постройте график функции  $y = \ln(1+x)$  и изобразите на графике  $dy$  при: а)  $x = 0$ ,  $dx = 1$ ; б)  $x = 1$ ,  $dx = 1$ ; в)  $x = 1$ ,  $dx = 2$ .

34. Пусть  $y = \sin x$ , где  $x = \cos t$ . Какие из следующих равенств справедливы:

- а)  $dy|_{t=\pi/2} = 0$ ; б)  $dy|_{t=\pi/2} = dx$ ; в)  $dy|_{t=\pi/2} = -dt$ ?

35. Используя формулу (3) и выбирая подходящее значение  $x_0$ , найдите приближенные значения:

- а)  $\cos 151^\circ$ ; б)  $\arcsin 0,49$ ; в)  $\lg 11$ ; г)  $\sqrt[3]{1,01}$ ; д)  $\operatorname{arctg} 1,1$ ; е)  $e^{0,2}$ .

36. Докажите приближенную формулу (для малых  $x$ )

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} \quad (a > 0).$$

С помощью этой формулы найдите приближенные значения:

- а)  $\sqrt[3]{9}$ ; б)  $\sqrt[4]{255}$ ; в)  $\sqrt[5]{130}$ .

37. Функция  $y = f(x)$  имеет производную в точке  $x = a$ . Вычислите предел последовательности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( f\left(a + \frac{1}{n^2}\right) + f\left(a + \frac{2}{n^2}\right) + \dots + f\left(a + \frac{n}{n^2}\right) - nf(a) \right).$$

### § 3. Производные и дифференциалы высших порядков

#### Основные понятия и формулы

**1. Определение производных высших порядков.** Если производная  $f'(x)$  функции  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$  и имеет в этой точке производную, то эта производная от  $f'(x)$  называется *второй производной* (или *производной второго порядка*) функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  и обозначается одним из следующих символов:  $f''(x_0)$ ,  $f^{(2)}(x_0)$ ,  $y''(x_0)$ ,  $y^{(2)}(x_0)$ .

Третья производная определяется как производная от второй производной и т. д. Если функция  $y = f(x)$  имеет  $(n-1)$ -ю производную в окрестности точки  $x_0$  и если  $(n-1)$ -я производная имеет производную в точке  $x_0$ , то эта производная называется *n-й производной* (или *производной n-го порядка*) функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  и обозначается  $f^{(n)}(x_0)$  или  $y^{(n)}(x_0)$ .

Таким образом, производные высших порядков определяются индуктивно по формуле

$$y^{(n)}(x) = [y^{(n-1)}(x)]'.$$

Функция, имеющая  $n$ -ю производную в точке  $x_0$ , называется *n раз дифференцируемой* в этой точке. Функция, имеющая в точке  $x_0$  производные всех порядков, называется *бесконечно дифференцируемой* в этой точке.

Производные высших порядков вектор-функции  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  также вводятся индуктивно:

$$\mathbf{r}^{(n)}(t) = [\mathbf{r}^{(n-1)}(t)]'.$$

Если  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ , то

$$\mathbf{r}^{(n)}(t) = x^{(n)}(t)\mathbf{i} + y^{(n)}(t)\mathbf{j} + z^{(n)}(t)\mathbf{k}.$$

Если функция  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  описывает движение точки ( $t$  — время), то вторая производная  $\mathbf{r}''(t)$  есть вектор ускорения в момент времени  $t$ .

## 2. Основные правила вычисления n-х производных.

1.  $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$ .

2. *Формула Лейбница:*

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^n C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)},$$

где  $u^{(0)} = u$ ,  $v^{(0)} = v$ ,  $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ ,  $0! = 1$ .

## 3. Формулы для n-х производных некоторых функций.

1.  $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)x^{\alpha-n}$  ( $x > 0$ ,  $\alpha$  — любое число).

2.  $(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n$  ( $0 < a \neq 1$ ); в частности,  $(e^x)^{(n)} = e^x$ .

3.  $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ .

4.  $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ .

**4. Дифференциалы высших порядков.** Пусть  $x$  — независимая переменная и функция  $y = f(x)$  дифференцируема в некоторой окрестности точки  $x_0$ . Первый дифференциал  $dy = f'(x)dx$  является функцией двух переменных:  $x$  и  $dx$ .

*Второй дифференциал*  $d^2y$  функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  определяется как дифференциал функции  $dy = f'(x)dx$  в точке  $x_0$  при следующих условиях:

1°)  $dy$  рассматривается как функция только независимой переменной  $x$  (иными словами, при вычислении дифференциала от  $f'(x)dx$  нужно вычислить дифференциал от  $f'(x)$ , рассматривая  $dx$  как постоянный множитель);

2°) приращение независимой переменной  $x$  при вычислении дифференциала от  $f'(x)$  считается равным первоначальному приращению аргумента, т. е. тому же самому значению  $dx$ , которое входит множителем в выражение  $dy = f'(x)dx$ .

Пользуясь этим определением, получаем

$$\begin{aligned} d^2y|_{x=x_0} &= d(dy)|_{x=x_0} = d[f'(x)]|_{x=x_0} dx = \\ &= \{[f'(x)]'|_{x=x_0} dx\} dx = f''(x_0)(dx)^2, \end{aligned}$$

или (записывая  $(dx)^2$  в виде  $dx^2$ )

$$d^2y|_{x=x_0} = f''(x_0) dx^2.$$

Дифференциал произвольного  $n$ -го порядка функции  $y = f(x)$  определяется индуктивно по формуле

$$d^n y = d(d^{n-1} y)$$

при таких же двух условиях, что и дифференциал второго порядка. При этом справедлива формула

$$d^n y|_{x=x_0} = f^{(n)}(x_0) dx^n \quad (dx^n = (dx)^n), \quad (1)$$

откуда

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n y}{dx^n}. \quad (2)$$

Если  $x$  является не независимой переменной, а функцией какой-то переменной  $t$ , то формулы (1) и (2) становятся неверными (неинвариантность формы дифференциалов высших порядков). В частности, при  $n = 2$  имеем

$$d^2 y = f''(x) dx^2 + f'(x) d^2 x.$$

### Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение второй производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ .
  2. Может ли существовать вторая производная  $f''(x_0)$ , если не существует первая производная  $f'(x_0)$ ?
  3. Приведите пример функции, у которой существует  $f'(x_0)$ , но не существует  $f''(x_0)$ .
  4. Дайте определение  $n$ -й производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ .
  5. Известно, что  $n$ -я производная функции в точке  $x_0$  существует. Что можно сказать о существовании производных меньшего порядка в точке  $x_0$  и в окрестности этой точки?
  6. Дайте определение  $n$ -й производной вектор-функции. Каков физический смысл второй производной вектор-функции, описывающей движение точки?
  7. Методом математической индукции докажите правило нахождения  $n$ -й производной суммы и разности двух функций.
  8. Выведите формулу Лейбница.
  9. Выведите формулы для  $n$ -х производных функций  $x^\alpha$ ,  $a^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\ln x$ .
  10. Докажите, что если  $f(x)$   $n$  раз дифференцируема, то
- $$\frac{d^n f(ax+b)}{dx^n} = a^n f^{(n)}(t)|_{t=ax+b}.$$
11. Вычислите производные  $n$ -го порядка:  $(e^{5x})^{(n)}$ ,  $(\sin(3x+2))^{(n)}$ ,  $(\sqrt{1-x})^{(n)}$ .

12. Дайте определение дифференциала  $n$ -го порядка функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ .
13. Докажите справедливость формулы (1) для дифференциала  $n$ -го порядка в случае, когда  $x$  — независимая переменная.
14. Справедлива ли формула (1), если  $x$  — функция некоторой переменной  $t$ ? Выведите в этом случае формулы для  $d^2y$  и  $d^3y$ . Докажите, что формула (1) сохраняется, если  $x$  — линейная функция независимой переменной  $t$ , т. е.  $x = at + b$  ( $a$  и  $b$  — числа).

### Примеры решения задач

1. Найти  $y^{(10)}$ , если  $y = x^2 e^{3x}$ .

Δ Данная функция является произведением двух функций:  $x^2$  и  $e^{3x}$ . Применяя формулу Лейбница, получаем

$$(x^2 e^{3x})^{(10)} = x^2 (e^{3x})^{(10)} + C_{10}^1 (x^2)' (e^{3x})^{(9)} + \\ + C_{10}^2 (x^2)^{(2)} (e^{3x})^{(8)} + \dots + (x^2)^{(10)} e^{3x}.$$

Так как  $(x^2)^{(n)} = 0$  при  $n \geq 3$ ,  $(e^{3x})^{(k)} = e^{3x} 3^k$ , то

$$(x^2 e^{3x})^{(10)} = x^2 e^{3x} 3^{10} + 10 \cdot 2x e^{3x} 3^9 + 45 \cdot 2e^{3x} 3^8 = \\ = 3^9 e^{3x} (3x^2 + 20x + 30). \blacksquare$$

Рассмотренный пример показывает, что формулу Лейбница наиболее удобно применять в тех случаях, когда один из сомножителей является многочленом невысокой степени  $p$ . В этом случае все члены формулы Лейбница начиная с  $(p+2)$ -го равны нулю.

2. Найти  $n$ -ю производную функции  $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ .

Δ Данную функцию можно представить в виде  $y = 1 + \frac{2}{x^2 - 1}$ .

Поэтому  $y^{(n)} = 1^{(n)} + \left(\frac{2}{x^2 - 1}\right)^{(n)} = \left(\frac{2}{x^2 - 1}\right)^{(n)}$ . В свою очередь  $\frac{2}{x^2 - 1}$  можно разложить на простейшие дроби:

$$\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}.$$

Следовательно,

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{x - 1}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x + 1}\right)^{(n)}.$$

Вычислим последовательно первую, вторую и третью производные функции  $\frac{1}{x - 1}$ :

$$\left(\frac{1}{x - 1}\right)' = [(x - 1)^{-1}]' = -1 \cdot (x - 1)^{-2},$$

$$\left(\frac{1}{x - 1}\right)^{(2)} = (-1)(-2)(x - 1)^{-3} = (-1)^2 \cdot 2!(x - 1)^{-3},$$

$$\left(\frac{1}{x - 1}\right)^{(3)} = (-1)^2 2!(-3)(x - 1)^{-4} = (-1)^3 \cdot 3!(x - 1)^{-4}.$$

Далее по индукции нетрудно доказать, что

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} = (-1)^n n! (x-1)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}.$$

Аналогично,

$$\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}.$$

Итак,

$$y^{(n)} = (-1)^n n! \left[ \frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right]. \blacksquare$$

**3.** Функция  $y = f(x)$  задана параметрически уравнениями  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $0 < t < \pi$ . Найти  $f''(x)$ .

Δ Выведем формулу для второй производной функции  $y = f(x)$ , заданной параметрически уравнениями  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ , считая, что функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  дважды дифференцируемы и  $\varphi'(t) \neq 0$ .

В силу инвариантности формы первого дифференциала  $df'(x) = f''(x) dx$ , откуда  $f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$ . Так как  $f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ , то  $df'(x) = \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)' dt$ . Учитывая, что  $dx = \varphi'(t)dt$ , получаем

$$f''(x) = \left. \left( \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right)' \frac{1}{\varphi'(t)} \right|_{t=\varphi^{-1}(x)} = \left. \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\psi'^3(t)} \right|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \quad (3)$$

Положив в этой формуле  $\psi = a \sin t$ ,  $\varphi = a \cos t$ ,  $\varphi^{-1}(x) = \arccos(x/a)$ , получим

$$f''(x) = -\left. \frac{1}{a \sin^3 t} \right|_{t=\arccos(x/a)} = -\frac{1}{a(1-x^2/a^2)^{3/2}} = -\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}.$$

В данном примере можно найти явное выражение для  $f(x)$ :  $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$  ( $-a < x < a$ ). Вычисляя  $f''(x)$ , получим, разумеется, тоже самое выражение, что и по формуле (3).  $\blacktriangle$

**4.** Движение точки в пространстве задано уравнениями  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$ ,  $z = ht^2/2$ ,  $t \geq 0$ . Найти модули векторов скорости и ускорения в момент  $t = 1$ .

Δ С помощью вектор-функции движение можно задать уравнением

$$\mathbf{r} = R \cos t \cdot \mathbf{i} + R \sin t \cdot \mathbf{j} + \frac{ht^2}{2} \cdot \mathbf{k}, \quad t \geq 0.$$

Дифференцируя, находим

$$\mathbf{r}'(t) = -R \sin t \cdot \mathbf{i} + R \cos t \cdot \mathbf{j} + ht \cdot \mathbf{k} \quad (\text{скорость}),$$

$$\mathbf{r}''(t) = -R \cos t \cdot \mathbf{i} - R \sin t \cdot \mathbf{j} + h \cdot \mathbf{k} \quad (\text{ускорение}).$$

Отсюда получаем  $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{R^2 + h^2 t^2}$ ,  $|\mathbf{r}'(1)| = \sqrt{R^2 + h^2}$ ,  $|\mathbf{r}''(t)| = \sqrt{R^2 + h^2}$  (абсолютная величина ускорения является постоянной).  $\blacksquare$

5. Найти второй дифференциал функции  $y = \cos 2x$ , если: а)  $x$  — независимая переменная; б)  $x = \varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  — дважды дифференцируемая функция независимой переменной  $t$ .

$$\Delta \text{ а) } d^2y = y''(x)(dx)^2 = -4 \cos 2x(dx)^2;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } d^2y &= y''(x)(dx)^2 + y'(x)d^2x = \\ &= -4 \cos(2\varphi(t))(\varphi'(t)dt)^2 - 2 \sin(2\varphi(t))\varphi''(t)(dt)^2 = \\ &= -2[2 \cos(2\varphi(t))\varphi'^2(t) + \sin(2\varphi(t))\varphi''(t)](dt)^2. \blacksquare \end{aligned}$$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

38. Найдите производные указанного порядка.

$$\begin{array}{llll} \text{а) } (e^{-x^2})^{(3)}; & \text{б) } (\sin ax)^{(10)}; & \text{в) } (e^{kx})^{(4)}; & \text{г) } (f(x^2))^{(3)}, \\ \text{д) } (f(e^x))^{(2)}; & \text{е) } (f(\varphi(x)))^{(3)}; & \text{ж) } (\sqrt{x})^{(10)}; & \text{з) } \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^{(6)}; \\ \text{и) } (x^2 \sin 2x)^{(20)}; & \text{к) } (x^3 \cos 5x)^{(15)}; & \text{л) } \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{(8)}; \\ \text{м) } \left(\frac{x}{x^2-1}\right)^{(30)}; & \text{н) } (xe^{5x})^{(11)}; & \text{o) } (\ln 3x)^{(10)}. \end{array}$$

39. Найдите  $y^{(n)}$ , если:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } y = \sqrt{ax+b}; & \text{б) } y = \frac{ax+b}{cx+d}; & \text{в) } y = \sin^2 x; \\ \text{г) } y = \cos^2 x; & \text{д) } y = \sin^3 x; & \text{е) } y = \cos^3 x; \\ \text{ж) } y = \sin \alpha x \sin \beta x; & \text{з) } y = \cos \alpha x \cos \beta x; & \text{и) } y = x \sin ax; \\ \text{к) } y = x^2 \cos ax; & \text{л) } y = (ax^2 + bx + c)e^{kx}; & \\ \text{м) } y = \ln \frac{ax+b}{ax-b}; & \text{н) } y = x \operatorname{sh} x; & \text{o) } y = x^2 \operatorname{ch} x; \\ \text{п) } y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \quad (a_i \text{ — числа}). \end{array}$$

40. Методом математической индукции докажите равенства:

$$\text{а) } (e^x \sin x)^{(n)} = 2^{n/2} e^x \sin \left(x + \frac{n\pi}{4}\right);$$

$$\text{б) } (x^n \ln x)^{(n)} = n! \left( \ln x + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right);$$

$$\text{в) } (x^{n-1} e^{1/x})^{(n)} = (-1)^n \frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}.$$

41. Для функций из упр. 23, заданных параметрически, найдите  $f''(x)$  и  $f'''(x)$ .

42. Выразите производные обратной функции  $x = f^{-1}(y)$  до третьего порядка включительно через производные функции  $y = f(x)$ .

43. Движение точки в пространстве задается уравнениями из упр. 27. Найдите модуль и направляющие косинусы вектора ускорения в указанные моменты времени.

44. Найдите дифференциалы указанного порядка, если  $x$  — независимая переменная:

$$\text{а) } d^3(x^3), \quad \text{б) } d^4(\sqrt{x-1}); \quad \text{в) } d^5(x \ln x); \quad \text{г) } d^{10}(x \sin x).$$

45. Найдите  $d^n y$ , если:
- $y = \operatorname{sh} x$ ;
  - $y = \operatorname{ch} (ax)$ ;
  - $y = x^2 \ln x$ .
46. В каждом из следующих случаев проверьте, что функция  $y(x)$  удовлетворяет соответствующему уравнению ( $C_1, C_2$  — произвольные числа):
- $y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$ ,  $y'' + k^2 y = 0$ ;
  - $y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}$ ,  $y'' - k^2 y = 0$ ;
  - $y = e^{-\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ ,  $y'' + 2\alpha y' + (\alpha^2 + \beta^2) y = 0$ ;
  - $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 e^x + C_4 e^{-x}$ ,  $y^{(4)} - y = 0$ .
47. Найдите  $f^{(n)}(x_0)$ , если  $f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x)$ , где  $\varphi(x)$  имеет непрерывную производную  $(n - 1)$ -го порядка в точке  $x_0$ .
48. Докажите, что функция  $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$  бесконечно дифференцируема в точке  $x = 0$ .

# ГЛАВА V

## НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### § 1. Первообразная и неопределенный интеграл

Основные понятия и формулы

#### 1. Определение первообразной и неопределенного интеграла.

Определение. Функция  $F(x)$  называется *первообразной* для функции  $f(x)$  на промежутке  $X$ , если  $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in X$ .

Теорема 1. Если  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  — две любые первообразные для  $f(x)$  на  $X$ , то  $F_1(x) - F_2(x) = C = \text{const}$ .

Следствие. Если  $F(x)$  — одна из первообразных для  $f(x)$  на  $X$ , то любая другая первообразная  $\Phi(x)$  для функции  $f(x)$  на  $X$  имеет вид  $\Phi(x) = F(x) + C$ , где  $C$  — некоторая постоянная.

Определение. Совокупность всех первообразных для функции  $f(x)$  на  $X$  называется *неопределенным интегралом* от функции  $f(x)$  на промежутке  $X$  и обозначается  $\int f(x) dx$ .

В силу следствия из теоремы 1  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , где  $F(x)$  — одна из первообразных для  $f(x)$ ,  $C$  — произвольная постоянная. (Иногда символом  $\int f(x) dx$  обозначается не вся совокупность первообразных, а какая-либо одна из них.)

#### 2. Основные свойства неопределенного интеграла.

$$1^\circ. d \int f(x) dx = f(x) dx.$$

$$2^\circ. \int dF(x) = F(x) + C.$$

3°. *Линейность интеграла.* Если существуют первообразные функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , а  $\alpha$  и  $\beta$  — любые вещественные числа, то существует первообразная функции  $\alpha f(x) + \beta g(x)$ , причем

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$

### Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение первообразной для функции  $f(x)$  на промежутке  $X$ .
2. Приведите примеры функций, имеющих первообразные.
3. Приведите примеры двух различных первообразных для одной и той же функции  $f(x)$ .

4. Всякая ли функция имеет первообразную? Рассмотрите пример:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ -2 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

5. Найдите первообразную для функции  $f(x) = \sin x$ , которая в точке  $x = \pi/2$  принимает значение, равное 10.

6. Известно, что две первообразные для функции  $f(x) = e^x$  в точке  $x = 1$  отличаются на 2. На сколько отличаются эти же первообразные в точке  $x = 100$ ?

7. График какой первообразной для функции  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  проходит через точку с координатами  $(1, 2\pi)$ ?

### Примеры решения задач

1. Доказать, что функция

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

имеет первообразную на любом промежутке, не содержащем точку  $x = 0$ , и не имеет первообразной на любом промежутке, содержащем точку  $x = 0$ .

На любом промежутке, не содержащем точку  $x = 0$ , функция  $\operatorname{sgn} x$  постоянна. Например, на сегменте  $[1, 2]$   $\operatorname{sgn} x = 1$  и любая первообразная для функции  $\operatorname{sgn} x$  на этом сегменте имеет вид  $F(x) = x + C$ , где  $C$  — некоторая постоянная.

Рассмотрим теперь промежуток, содержащий точку  $x = 0$ , например, сегмент  $[-1, 3]$ . На полусегменте  $[-1, 0)$  любая первообразная для функции  $\operatorname{sgn} x$  имеет вид  $-x + C_1$ , а на полусегменте  $(0, 3]$  первообразная для  $\operatorname{sgn} x$  равна  $x + C_2$ . При любом выборе произвольных постоянных  $C_1$  и  $C_2$  мы получаем на сегменте  $[-1, 3]$  функцию, не имеющую производной в точке  $x = 0$ . Если выбрать  $C_1 = C_2$ , то получим непрерывную функцию  $y = |x| + C$  ( $C = C_1 = C_2$ ), которая также не дифференцируема в точке  $x = 0$ . Таким образом, функция  $\operatorname{sgn} x$  не имеет первообразной на сегменте  $[-1, 3]$ .

Данной пример показывает, что вопрос о существовании первообразной для функции существенно связан с тем промежутком, на котором эта функция рассматривается. ▲

2. Важный физический пример первообразной дает задача восстановления закона прямолинейного движения материальной точки по заданной скорости. Мгновенная скорость  $v(t)$  является производной функции  $s(t)$ , определяющей закон движения материальной точки. Поэтому отыскание функции  $s(t)$  по заданной скорости  $v(t)$  сводится к нахождению первообразной для функции  $v(t)$ . Любая первообразная для  $v(t)$  имеет вид

$$s(t) = \int v(t) dt + C.$$

Постоянная  $C$  определяется из дополнительных условий. Пусть,

например,  $v(t) = a(t - t_0) + v_0$  (движение с ускорением  $a = \text{const}$ ),  $s(t_0) = s_0$ . Тогда  $s(t) = \frac{a(t-t_0)^2}{2} + v_0(t-t_0) + C$ . Из дополнительного условия  $s(t_0) = s_0$  находим  $C = s_0$ , поэтому

$$s(t) = \frac{a(t-t_0)^2}{2} + v_0(t-t_0) + s_0.$$

## § 2. Простейшие неопределенные интегралы

### Таблица основных неопределенных интегралов.

I.	$\int 0 dx = C.$
II.	$\int 1 dx = x + C.$
III.	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$
IV.	$\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C \quad (x \neq 0).$
V.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1), \quad \int e^x dx = e^x + C.$
VI.	$\int \sin x dx = -\cos x + C.$
VII.	$\int \cos x dx = \sin x + C.$
VIII.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\right).$
IX.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad \left(x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}\right).$
X.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C \end{cases} \quad (-1 < x < 1).$
XI.	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C. \end{cases}$
XII.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm 1}  + C.$
XIII.	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left  \frac{1+x}{1-x} \right  + C.$
XIV.	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$
XV.	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$
XVI.	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$
XVII.	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

### Примеры решения задач

Следующие интегралы сводятся к табличным путем тождественного преобразования подынтегрального выражения.

$$1. \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{2x^{3/2}}{3} + 2x^{1/2} + C.$$

$$2. \int (x^4 + 1)x^3 dx = \frac{1}{4} \int (x^4 + 1) d(x^4 + 1) = \frac{1}{8} \int d(x^4 + 1)^2 = \\ = \frac{1}{8}(x^4 + 1)^2 + C.$$

$$3. \int \frac{x^2 dx}{1-x^2} = \int \frac{(x^2 - 1) + 1}{1-x^2} dx = \int \left( -1 + \frac{1}{1-x^2} \right) dx = \\ = -x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$$

$$4. \int \operatorname{tg}^2 x dx = \int [(1 + \operatorname{tg}^2 x) - 1] dx = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \\ = \operatorname{tg} x - x + C.$$

$$5. \int \frac{2x+3}{3x+2} dx = \int \frac{2(x+3/2)}{3(x+2/3)} dx = \frac{2}{3} \int \frac{[(x+2/3)+5/6]}{(x+2/3)} dx = \\ = \frac{2}{3}x + \frac{5}{9} \ln \left| x + \frac{2}{3} \right| + C.$$

$$6. \int \sqrt{1 - \sin 2x} dx = \int \sqrt{\sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x} dx = \\ = \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} dx = \int |\cos x - \sin x| dx = \\ = (\sin x + \cos x) \cdot \operatorname{sgn}(\cos x - \sin x) + C.$$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Найдите следующие интегралы.

$$1. \int \frac{\sqrt{x}+1}{x} dx. \quad 2. \int (x^3 + 1)^3 x^2 dx. \quad 3. \int \frac{3-x^2}{3+x^2} dx. \quad 4. \int (3-x^2)^3 dx.$$

$$5. \int \frac{dx}{(2+3x)^{20}}. \quad 6. \int 3^x \cdot 5^x dx. \quad 7. \int \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x} \sqrt[3]{x} dx.$$

$$8. \int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3} dx. \quad 9. \int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx. \quad 10. \int \operatorname{ctg}^2 x dx. \quad 11. \int \frac{3x+2}{2x+3} dx.$$

$$12. \int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} dx. \quad 13. \int \operatorname{th}^2 x dx. \quad 14. \int \operatorname{sh} 2x dx. \quad 15. \int \operatorname{ch}(2x+3) dx.$$

$$16. \int (2^x + 3^x)^2 dx. \quad 17. \int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx. \quad 18. \int (2x-3)^{10} dx.$$

$$19. \int \sqrt{1+\sin 2x} dx. \quad 20. \int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}. \quad 21. \int \frac{dx}{2+3x^2}. \quad 22. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}.$$

$$23. \int \frac{dx}{\sin^2(2x+\pi/4)}. \quad 24. \int \frac{dx}{1+\cos x}. \quad 25. \int \frac{dx}{1+\sin x}.$$

### § 3. Метод замены переменной

#### Основные понятия и теоремы

Теорема 2. Пусть функция  $y = \varphi(t)$  определена и дифференцируема на промежутке  $T$ , а промежуток  $X$  — множество ее значений. Пусть функция  $y = f(x)$  определена на  $X$  и имеет на этом промежутке первообразную  $F(x)$ .

Тогда на промежутке  $T$  функция  $F(\varphi(t))$  является первообразной для функции  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ .

Из теоремы 2 следует, что

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C, \quad (1)$$

а так как  $F(\varphi(t)) + C = (F(x) + C)|_{x=\varphi(t)} = \int f(x) dx|_{x=\varphi(t)}$ , то равенство (1) можно записать в виде

$$\int f(x) dx|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt. \quad (2)$$

Равенство (2) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Если функция  $x = \varphi(t)$  имеет обратную функцию  $t = \varphi^{-1}(x)$ , то из равенства (2) следует

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt|_{t=\varphi^{-1}(x)}. \quad (3)$$

Эта формула является основной рабочей формулой при вычислении интеграла  $\int f(x) dx$  методом замены переменной.

#### Контрольные вопросы и задания

- Запишите формулу (2) замены переменной в неопределенном интеграле. При каких условиях эта формула справедлива?
- При каком условии из формулы (2) следует формула (3)?
- Требуется найти  $\int \sqrt{4-x^2} dx$  для  $-2 \leq x \leq 2$ . Допустима ли для этой цели замена переменной.
  - $x = \sin t$ ,  $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ ;
  - $x = 2 \sin t$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ ;
  - $x = 2 \sin t$ ,  $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ ;
  - $x = 2 \cos t$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ ;
  - $x = 2 \cos t$ ,  $\pi \leq t \leq 2\pi$ ?

#### Примеры решения задач

Рассмотрим некоторые приемы вычисления интегралов с помощью замены переменной.

1°. *Тождественное преобразование подынтегрального выражения с выделением дифференциала новой переменной интегрирования* (простейшая замена переменной).

$$1. \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\frac{1}{2} d(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-\frac{1}{2} d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) = -\frac{1}{2} 2(1-x^2)^{1/2} + C.$$

$$2. \int \frac{x^3 dx}{x^8 - 2} = \int \frac{\frac{1}{4} d(x^4)}{(x^4)^2 - 2} = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} d\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)}{-2[1-(x^4/\sqrt{2})^2]} = \\ = -\frac{\sqrt{2}}{8} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+x^4}{\sqrt{2}-x^4} \right| + C.$$

$$3. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+1/x^2}} = \int \frac{-d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+(1/x)^2}} = \\ = -\ln \left| \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} \right| + C \quad (x > 0).$$

$$4. \int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x} = \int \frac{d(\ln \ln x)}{\ln \ln x} = \ln |\ln \ln x| + C.$$

$$5. \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x (\operatorname{tg}^2 x + 2)} = \\ = \int \frac{\sqrt{2} d\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)}{2[1+(\operatorname{tg} x/\sqrt{2})^2]} = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctg \left( \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) + C.$$

2°. Некоторые подстановки.

1.  $I = \int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx$ . Положим  $t = (1-x)^{1/3}$ , тогда  $x = 1-t^3$ ,  $dx = -3t^2 dt$ . Имеем

$$I = \int (1-t^3)^2 t (-3t^2) dt = -3 \int (1-t^3)^2 t^3 dt = \\ = -3 \int (t^3 - 2y^6 + t^9) dt = -3 \left( \frac{t^4}{4} - \frac{2}{7} t^7 + \frac{1}{10} t^{10} \right) + C, \\ t = (1-x)^{1/3}.$$

2.  $I = \int x^5 (2-5x^3)^{2/3} dx$ . Положим  $t = 2-5x^3$ , тогда  $x = \left(\frac{2-t}{5}\right)^{1/3}$ ,  $dt = -15x^2 dx$ . Находим

$$I = \int \frac{1}{5} (2-t) t^{2/3} \left( -\frac{dt}{15} \right) = -\frac{1}{75} \int (2t^{2/3} - t^{5/3}) dt = \\ = -\frac{1}{75} \cdot 2 \cdot \frac{3}{5} t^{5/3} + \frac{1}{75} \cdot \frac{3}{8} t^{8/3} + C, \quad t = 2-5x^3.$$

$$3. I = \int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x \cos x [(\cos^2 x + 1) - 1]}{1+\cos^2 x} dx.$$

Положим  $t = 1 + \cos^2 x$ , откуда  $dt = -2 \cos x \sin x dx$ . Значит,

$$I = -\frac{1}{2} \int \frac{t-1}{t} dt = -\frac{t}{2} + \frac{1}{2} \ln |t| + C, \quad t = 1 + \cos^2 x.$$

**3°. Тригонометрические подстановки при интегрировании некоторых иррациональных функций.**

1.  $I = \int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$ . Положим  $x = \sin t$ ,  $-\pi/2 < t < \pi/2$ ; тогда  $dx = \cos t dt$ . Следовательно,

$$I = \int \frac{\cos t dt}{\cos^3 t} = \operatorname{tg} t + C, \quad t = \arcsin x.$$

2.  $I = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$ . Положим  $x = a \operatorname{tg} t$ ,  $-\pi/2 < t < \pi/2$ ; тогда  $dx = \frac{a dt}{\cos^2 t}$ . Поэтому

$$I = \int \frac{a \cos^3 t dt}{a^3 \cos^2 t} = \frac{1}{a^2} \sin t + C, \quad t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

3.  $I = \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^{3/2}}$ . Положим  $x = 1/\sin t$ ,  $-\pi/2 < t < 0$  и  $0 < t < \pi/2$ ; тогда  $dx = -\frac{\cos t dt}{\sin^2 t}$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} I = \int \frac{-\cos t dt}{\sin^2 t \left( \frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right)^{3/2}} &= - \int \frac{\sin t dt}{\cos^2 t} = \int \frac{d(\cos t)}{\cos^2 t} = \\ &= -\frac{1}{\cos t} + C, \quad t = \arcsin \left( \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Выделяя дифференциал новой переменной, найдите следующие интегралы.

26.  $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx$ .    27.  $\int \sin(2x+3) dx$ .    28.  $\int \frac{x dx}{4+x^4}$ .  
 29.  $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ .    30.  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$ .    31.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ .    32.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}}$ .  
 33.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ .    34.  $\int xe^{-x^2} dx$ .    35.  $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ .    36.  $\int \frac{dx}{x(2+\ln x)}$ .  
 37.  $\int \sqrt[9]{1+27x} dx$ .    38.  $\int \sqrt[3]{\frac{\ln x}{x^3}} dx$ .    39.  $\int \sin^5 x \cos x dx$ .  
 40.  $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx$ .    41.  $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos 2x}}$ .    42.  $\int \frac{dx}{\sin x}$ .  
 43.  $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$ .    44.  $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$ .    45.  $\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx$ .

Используя различные подстановки, найдите следующие интегралы.

46.  $\int x^3(1-5x^2)^{10} dx.$
47.  $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$
48.  $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx.$
49.  $\int \frac{dx}{e^{x/2} + e^x}.$
50.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$
51.  $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{dx}{1+x}.$
52.  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$
53.  $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$  ( $\star x = a \cos 2t$ ).
54.  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$
55.  $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx$  ( $\star x = \frac{a}{\cos 2t}$ ).
56.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$
57.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$

### § 4. Метод интегрирования по частям

#### Основные понятия и теоремы

**Теорема 3.** Пусть на промежутке  $X$  функции  $u(x)$  и  $v(x)$  дифференцируемы и существует  $\int v(x)u'(x) dx$  (т. е. функция  $v(x)u'(x)$  имеет первообразную на  $X$ ).

Тогда  $\int u(x)v'(x) dx$  также существует на  $X$  и

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx.$$

Это равенство называется *формулой интегрирования по частям*. Так как  $u'(x) dx = du$ ,  $v'(x) dx = dv$ , то эту формулу можно записать в виде

$$\int u dv = u(x)v(x) - \int v du.$$

Метод интегрирования по частям удобно применять в следующих случаях.

1. Подынтегральное выражение содержит в виде множителя функции  $\ln x$ ,  $\ln \varphi(x)$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\operatorname{arctg} x$ . Если в качестве  $u(x)$  выбрать эти функции, то подынтегральное выражение  $v du$  нового интеграла обычно получается проще исходного.

2. Подынтегральная функция имеет вид  $P(x)e^{ax}$ ,  $P(x)\sin ax$ ,  $P(x)\cos ax$ , где  $P(x)$  — многочлен относительно переменной  $x$ . Если в качестве  $u(x)$  выбрать  $P(x)$ , то в новом интеграле подынтегральная функция снова принадлежит одному из указанных типов, но степень многочлена окажется уже на единицу меньше. Выбирая этот многочлен снова в качестве  $u(x)$ , понижаем степень еще на единицу и т. д.

3. Подынтегральная функция имеет вид  $e^{ax}\sin bx$ ,  $e^{ax}\cos bx$ ,  $\sin(\ln x)$ ,  $\cos(\ln x)$  и т. п. После двукратного интегрирования по частям получается снова исходный интеграл с некоторым коэффициентом. Полученное равенство является линейным алгебраическим уравнением относительно искомого интеграла.

### Контрольные вопросы и задания

- Напишите формулу интегрирования по частям неопределенного интеграла. При каких условиях эта формула справедлива?
- Какие функции удобно интегрировать по частям?

### Примеры решения задач

**1.**  $I = \int \operatorname{arctg} x dx$ . Положим  $u = \operatorname{arctg} x$ ,  $dv = dx$ . Тогда  $du = \frac{dx}{1+x^2}$ ,  $v = x$ . Следовательно,

$$I = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

**2.**  $I = \int x^2 e^{-x} dx$ . Положим  $u = x^2$ ,  $dv = e^{-x} dx$ . Тогда  $du = 2x dx$ ,  $v = -e^{-x}$ . Значит,

$$I = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2 \left( -xe^{-x} + \int e^{-x} dx \right) = -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C.$$

**3.**  $I = \int \sin(\ln x) dx$ . Положим  $u = \sin \ln x$ ,  $dv = dx$ . Тогда  $du = \frac{1}{x} \cos \ln x dx$ ,  $v = x$ . Имеем

$$I = x \sin \ln x - \int \cos \ln x dx = x \sin \ln x - (x \cos \ln x + \int \sin \ln x dx).$$

Мы получили линейное относительно  $I$  уравнение

$$I = x(\sin \ln x - \cos \ln x) - I,$$

откуда находим

$$I = \frac{x}{2}(\sin \ln x - \cos \ln x) + C.$$

**4.**  $K_\alpha = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^\alpha}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots$ ). Положим  $u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^\alpha}$ ,  $dv = dx$ . Тогда

$$\begin{aligned} K_\alpha &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^\alpha} - \int x d\left(\frac{1}{(x^2 + a^2)^\alpha}\right) = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^\alpha} + 2\alpha \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(x^2 + a^2)^{\alpha+1}} dx = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^\alpha} + 2\alpha \left[ \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^\alpha} - a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\alpha+1}} \right] = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^\alpha} + 2\alpha [K_\alpha - a^2 K_{\alpha+1}], \end{aligned}$$

откуда

$$K_{\alpha+1} = \frac{1}{2\alpha a^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^\alpha} + \frac{2\alpha - 1}{2\alpha a^2} K_\alpha.$$

Мы получили рекуррентную формулу, с помощью которой  $K_{\alpha+1}$  выражается через  $K_\alpha$ . При  $\alpha = 1$  интеграл  $K_\alpha$  есть “почти” табличный интеграл

$$K_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

Полагая в рекуррентной формуле  $\alpha = 1$  и зная  $K_1$ , найдем  $K_2$ . Полагая  $\alpha = 2$  и зная  $K_2$ , найдем  $K_3$  и т. д.

**Замечание** С помощью методов замены переменной и интегрирования по частям получаются следующие часто употребляемые формулы

1.  $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$
2.  $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0)$
3.  $\int \frac{x dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln |a^2 \pm x^2| + C$
4.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$
5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$
6.  $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C$
7.  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$
8.  $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Найдите следующие интегралы

58.  $\int \ln x dx$
59.  $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx$
60.  $\int x^3 e^{-x^2} dx$
61.  $\int x^2 \sin 2x dx$
62.  $\int \arcsin x dx$
63.  $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$
64.  $\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x) dx$
65.  $\int x (\operatorname{arctg} x)^2 dx$
66.  $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} dx$
67.  $\int e^x \sqrt{e^{2x} + 1} dx$
68.  $\int \cos(\ln x) dx$
69.  $\int e^{ax} \sin bx dx$
70.  $\int e^{2x} \sin^2 x dx$

## § 5. Интегрирование рациональных функций

### Основные понятия и теоремы

**1. Разложение рациональной дроби на сумму простейших дробей.** Рассмотрим рациональную функцию (или рациональную дробь)  $P_n(x)/Q_m(x)$ . Здесь  $P_n(x)$  и  $Q_m(x)$  — многочлены степеней  $n$  и  $m$  относительно переменной  $x$ .

Если  $n \geq m$ , т. е. дробь неправильная, то ее можно представить в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)} \quad (k < m),$$

или, как говорят, выделить из нее целую часть  $P_{n-m}(x)$

В результате интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию правильной дроби  $R_k(x)/Q_m(x)$

**Теорема 4** Пусть  $P_n(x)/Q_m(x)$  — правильная рациональная дробь ( $n < m$ ), а разложение  $Q_m(x)$  на произведение неприводимых вещественных множителей имеет вид

$$Q_m(x) = (x - a)^\alpha (x - b)^\beta (x^2 + px + q)^\gamma (x^2 + rx + s)^\delta,$$

где  $a, b$  — вещественные корни,  $x^2 + px + q, x^2 + rx + s$  — квадратные трехчлены, не разложимые на вещественные множители

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \frac{A_\alpha}{(x - a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x - a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1}{x - a} + \\ &+ \frac{B_\beta}{(x - b)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x - b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_1}{x - b} + \frac{M_\gamma x + N_\gamma}{(x^2 + px + q)^\gamma} + \\ &+ \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \dots + \frac{K_\delta x + L_\delta}{(x^2 + rx + s)^\delta} + \dots + \frac{K_1 x + L_1}{x^2 + rx + s}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $A_i, B_i, M_i, N_i, K_i, L_i$  — вещественные числа

Дроби, входящие в правую часть (1), называются простейшими, а само равенство (1) называется *разложением правильной рациональной дроби  $P_n(x)/Q_m(x)$  на сумму простейших дробей с вещественными коэффициентами*

**2. Интегрируемость простейших дробей в элементарных функциях.** Каждая из простейших дробей интегрируется в элементарных функциях

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{A}{x - a} dx &= A \ln|x - a| + C, \\ 2) \int \frac{B}{(x - a)^\alpha} dx &= \frac{B}{1 - \alpha} \frac{1}{(x - a)^{\alpha-1}} + C \quad (a > 1), \\ 3) \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \\ &+ \frac{2N - Mp}{2\sqrt{q - p^2/4}} \operatorname{arctg} \frac{x + p/2}{\sqrt{q - p^2/4}} + C, \\ 4) \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\alpha} dx &= \frac{M}{2(1 - \alpha)} \frac{1}{(t^2 + a^2)^{\alpha-1}} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) K_\alpha \end{aligned}$$

( $\alpha > 1$ ), где

$$K_\alpha = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^\alpha}, \quad t = x + \frac{p}{2}, \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4}$$

Интеграл  $K_\alpha$  вычисляется по рекуррентной формуле (см. § 4).

### 3. Практические приемы разложения правильной дроби на сумму простейших дробей.

1°. *Метод неопределенных коэффициентов.* Разберем этот метод на следующем примере. Разложение правильной дроби  $\frac{x}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)}$  на сумму простейших дробей согласно теореме 4 имеет вид

$$\frac{x}{(x+1)(2x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители получившихся дробей, приходим к равенству

$$x = A(2x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + Cx(x+1)(2x-1) + D(x+1)(2x-1). \quad (2)$$

Два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ . Приравнивая коэффициенты, получаем систему уравнений для определения  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ :

$$\begin{array}{lll} \text{при } x^0 & -A+B-D=0; \\ \text{при } x^1 & 2A+B-C+D=1; \\ \text{при } x^2 & -A+B+C+2D=0; \\ \text{при } x^3 & 2A+B+2C=0. \end{array}$$

Решив эту систему, найдем коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ .

Такой общий подход даже в примере с четырьмя неопределенными коэффициентами приводит к весьма громоздкой системе.

Вместе с тем, используя тождество (2), можно найти искомые коэффициенты проще:

- а) полагая в (2)  $x = \frac{1}{2}$ , получаем  $\frac{1}{2} = B \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}$ , откуда  $B = \frac{4}{15}$ ;
- б) полагая в (2)  $x = -1$ , получаем  $-1 = A \cdot (-3) \cdot 2$ , откуда  $A = \frac{1}{6}$ ;
- в) полагая в (2)  $x = 0$ , получаем  $0 = -A + B - D$ , откуда  $D = B - A = \frac{1}{10}$ ;
- г) сравнивая коэффициенты при  $x^3$ , получаем  $0 = 2A + B + 2C$ , откуда  $C = -\frac{1}{2}(2A + B) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{15}\right) = -\frac{3}{10}$ .

2°. *Метод вычеркивания.* Отметим полезный прием вычисления некоторых из неопределенных коэффициентов. Пусть

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-a)^\alpha \varphi(x)}, \quad \varphi(a) \neq 0,$$

т. е. вещественное число  $a$  — корень кратности  $\alpha$  многочлена  $Q_m(x)$ .

Кратному вещественному корню  $x = a$  соответствует в разложении дроби  $P_n(x)/Q_m(x)$  цепочка простых дробей:

$$\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a}.$$

Для отыскания коэффициента  $A_\alpha$  при старшей степени знаменателя надо в знаменателе исходной дроби  $\frac{P_n(x)}{(x-a)^\alpha \varphi(x)}$  вычеркнуть  $(x-a)^\alpha$  и в оставшейся дроби положить  $x = a$ , т. е.  $A_\alpha = \frac{P_n(a)}{\varphi(a)}$ .

Указанный метод особенно удобен, если все корни знаменателя вещественные и простые. Тогда этим методом находятся все неопределенные коэффициенты. Например,

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x(x-1)(x+1)(x-2)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-2}, \\ A &= \left. \frac{x+2}{(x-1)(x+1)(x-2)} \right|_{x=0} = 1, \\ B &= \left. \frac{x+2}{x(x+1)(x-2)} \right|_{x=1} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

И т. д.

### Контрольные вопросы и задания

1. Всякая ли рациональная дробь интегрируема в элементарных функциях?
2. Почему исследуется вопрос об интегрировании только правильной дроби?
3. Что значит “выделить целую часть неправильной дроби”?
4. На какие простейшие вещественные множители можно разложить многочлен с вещественными коэффициентами?
5. Известно, что число  $2 - i$  является корнем многочлена с вещественными коэффициентами. Верно ли, что число  $2 + i$  есть корень того же многочлена?
6. На какие простейшие дроби разлагается дробь  $\frac{x+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)}$ ?
7. Что такое метод неопределенных коэффициентов при разложении дроби на сумму простейших дробей?
8. Что такое метод вычеркивания при вычислении неопределенных коэффициентов?
9. Найдите методом вычеркивания неопределенные коэффициенты в разложении дроби  $\frac{x}{(x+2)(x-3)}$ .
10. Найдите методом вычеркивания неопределенные коэффициенты в разложении дроби  $\frac{x^2}{(x^2-2)(x^2+3)}$ . ★ Положите  $x^2 = y$  и затем примените метод вычеркивания.

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Найдите следующие интегралы

- $$\begin{array}{lll} 71. \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx & 72. \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx & 73. \int \left( \frac{x}{x^2-3x+2} \right)^2 dx \\ 74. \int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4} dx & 75. \int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} & \\ 76. \int \frac{dx}{x^3+1} & 77. \int \frac{dx}{x^4-1} & 78. \int \frac{dx}{x^4+1} & 79. \int \frac{dx}{x^4+x^2+1} \\ 80. \int \frac{x^2 dx}{x^4+3x^3+4,5x^2+3x+1} & 81. \int \frac{dx}{x^6+1} & 82. \int \frac{x^3 dx}{(x-1)^{100}} \\ 83. \int \frac{x^2+x}{x^6+1} dx & 84. \int \frac{x^{11} dx}{x^8+3x^4+2} & 85. \int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)} dx \\ 86. \int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} dx & 87. \int \frac{x^5-x}{x^8+1} dx & 88. \int \frac{x^4+1}{x^6+1} dx \end{array}$$

### § 6. Интегрирование иррациональных функций

#### Основные рационализирующие подстановки

В этом и следующем параграфах через  $R(x, y)$  обозначается рациональная функция двух аргументов  $x$  и  $y$

#### 1. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей.

Интеграл вида  $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$  ( $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ ) рационализируется, т.е. сводится к интегралу от рациональной функции, подстановкой

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

**2. Подстановки Эйлера.** Вопрос об интегрировании в элементарных функциях интегралов вида  $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$  ( $a \neq 0$ ) решается с помощью подстановок Эйлера, которые рационализируют интегралы такого вида

Если квадратный трехчлен  $ax^2 + bx + c$  имеет комплексные корни (в этом случае знак  $a$  совпадает со знаком трехчлена, стоящего под корнем, т.е.  $a > 0$ ), то применяется *первая подстановка Эйлера*

$$t = \sqrt{ax^2+bx+c} + x\sqrt{a}$$

Если  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , где  $x_1$  и  $x_2$  — вещественные корни, то для рационализации интеграла применяется *вторая подстановка Эйлера*

$$t = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1}$$

**3. Другие приемы интегрирования квадратичных иррациональностей.** Подстановки Эйлера, играя важную теоретическую

роль, на практике приводят обычно к громоздким выкладкам, поэтому прибегать к ним надо в крайних случаях, когда не удается более просто вычислить интеграл другим способом. Одним из таких способов является следующий. Если в квадратном трехчлене  $ax^2 + bx + c$  выделить полный квадрат, то ее привести к виду  $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$  и положить

$$t = \sqrt{\left|\frac{a}{c - b^2/(4a)}\right|} \left(x + \frac{b}{2a}\right),$$

то интеграл  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$  приводится к одному из трех видов

$$\int R_1(t, \sqrt{1 - t^2}) dt, \quad \int R_2(t, \sqrt{t^2 - 1}) dt, \quad \int R_3(t, \sqrt{1 + t^2}) dt$$

Сделав в первом из этих интегралов подстановку  $t = \sin u$ , во втором  $1/t = \sin u$ , в третьем  $t = \operatorname{tg} u$ , получаем интегралы вида  $\int R(\sin u, \cos u) du$  (см. § 7).

Рассмотрим еще один способ вычисления интегралов вида  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$  (без применения подстановок Эйлера и тригонометрических подстановок). Для этого преобразуем подынтегральную функцию к некоторому специальному виду.

Так как четные степени выражения  $\sqrt{ax^2 + bx + c}$  являются многочленами, то функция  $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$  представима в виде

$$R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) = \frac{P(x) + Q(x)\sqrt{ax^2 + bx + c}}{S(x) + T(x)\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

где  $P, Q, S$  и  $T$  — многочлены. Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе, умножим числитель и знаменатель этой дроби на  $S(x) - T(x)\sqrt{ax^2 + bx + c}$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) &= \frac{A(x) + B(x)\sqrt{ax^2 + bx + c}}{C(x)} = \\ &= \frac{A(x)}{C(x)} + \frac{B(x)(ax^2 + bx + c)}{C(x)\sqrt{ax^2 + bx + c}} = R_1(x) + \frac{R_2(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \end{aligned}$$

где  $A, B$  и  $C$  — многочлены,  $R_1(x)$  и  $R_2(x)$  — рациональные функции. Вычисление интеграла от  $R_1(x)$  описано в § 5.

Выделяя в рациональной дроби  $R_2(x)$  целую часть  $P_n(x)$  и разлагая оставшуюся правильную дробь на сумму простейших дробей, приходим к следующим трем типам интегралов

$$\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \tag{1}$$

$$\int \frac{dx}{(x-\beta)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (2)$$

$$\int \frac{(Mx+N) dx}{(x^2+px+q)^\alpha \sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (3)$$

Эти интегралы можно вычислить следующим образом

1 Для интеграла (1) справедлива формула

$$\int \frac{P_n(x) dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad (4)$$

где  $Q_{n-1}(x)$  — многочлен степени  $n-1$ , а  $\lambda$  — некоторое число. Для определения коэффициентов  $Q_{n-1}(x)$  и числа  $\lambda$  продифференцируем тождество (4). После приведения к общему знаменателю получим равенство двух многочленов. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, находим неизвестные коэффициенты. Входящий в правую часть равенства (4) интеграл сводится к табличному выделению полного квадрата в подкоренном выражении

2 Интеграл (2) сводится к интегралу типа (1) подстановкой  $t = 1/(x-\beta)$

3 Интеграл (3) в случае, когда

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{p} = \frac{c}{q}, \quad (5)$$

т.е. когда квадратные трехчлены совпадают с точностью до множителя ( $ax^2+bx+c=a(x^2+px+q)$ ,  $a>0$ ), можно представить в виде суммы двух интегралов

$$\frac{M}{2\sqrt{a}} \int \frac{(2x+p) dx}{(x^2+px+q)^{(2\alpha+1)/2}} + \frac{1}{\sqrt{a}} \left( N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{(2\alpha+1)/2}}$$

Первый из них рационализируется подстановкой  $t = x^2+px+q$ , а второй — подстановкой  $t = (\sqrt{x^2+px+q})' = \frac{2x+p}{2\sqrt{x^2+px+q}}$

Если соотношение (5) не выполняется, то интеграл (3) сводится сначала к виду

$$\int \frac{P_{2m-1}(y) dy}{(y^2+\gamma)^m \sqrt{ry^2+s}} \quad (\gamma > 0) \quad (6)$$

Так, если  $\frac{a}{1} = \frac{b}{p} \neq \frac{c}{q}$ , то вид (6) достигается подстановкой  $x = y - \frac{p}{2}$

Если  $\frac{a}{1} \neq \frac{b}{p}$ , то для приведения интеграла (3) к виду (6) используется подстановка  $x = \frac{\mu y + \nu}{y + 1}$ . Коэффициенты  $\mu$  и  $\nu$  подбираются так, чтобы в полученных квадратных трехчленах отсутствовали члены первой степени относительно  $y$

В интеграле (6) дробь  $\frac{P_{2m-1}(y)}{(y^2 + \gamma)^m}$  является правильной, и после ее разложения на простейшие дроби получаются интегралы типа

$$\int \frac{y dy}{(y^2 + \gamma)^k \sqrt{ry^2 + s}}, \quad \int \frac{dy}{(y^2 + \gamma)^k \sqrt{ry^2 + s}} \quad (7)$$

Первый из них рационализируется подстановкой  $t = \sqrt{ry^2 + s}$ , второй — подстановкой  $t = (\sqrt{ry^2 + s})' = \frac{ry}{\sqrt{ry^2 + s}}$

### Контрольные вопросы и задания

- 1 Какая подстановка рационализирует интеграл от дробно-линейной иррациональности?
- 2 Какого типа интегралы вычисляются с помощью подстановок Эйлера?
- 3 Какова теоретическая роль подстановок Эйлера?
- 4 С помощью каких тригонометрических подстановок вычисляются интегралы  $\int \sqrt{1-x^2} dx$ ,  $\int \sqrt{x^2-3} dx$ ,  $\int \sqrt{x^2+3} dx$ ,  $\int \sqrt{x^2-2x+2} dx$ ,  $\int \sqrt{2+2x-x^2} dx$ ?

### Примеры решения задач

$$1. I = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x+1} \quad \text{Положим } t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}, \text{ откуда } dx = -\frac{6t^2 dt}{(t^3-1)^2} \quad \text{Следовательно,}$$

$$I = -3 \int \frac{dt}{t^3-1} = -\frac{1}{2} \ln \frac{(1-t)^2}{1+t+t^2} + \sqrt{3} \arctg \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C,$$

где  $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$

$$2. I = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\frac{5\sqrt{5}}{4} \left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{3}{5}\right] \sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1}}$$

Положим  $t = \frac{2x+1}{\sqrt{5}}$ , тогда  $\sqrt{5} dt = 2 dx$  и, значит,

$$I = \frac{4}{5} \int \frac{dt}{(t^2 + 3/5)\sqrt{t^2 - 1}}$$

Положим теперь  $\frac{1}{t} = \sin u$ , откуда  $-\frac{dt}{t^2} = \cos u du$ . Поэтому

$$\begin{aligned} I &= -\frac{4}{5} \int \frac{\cos u \sin u du}{\left(1 + \frac{3}{5} \sin^2 u\right) \cos u} = -\frac{4}{5} \int \frac{\sin u du}{\frac{8}{5} - \frac{3}{5} \cos^2 u} = \\ &= \frac{4}{3} \int \frac{d(\cos u)}{8/3 - \cos^2 u} = \frac{4}{3} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{8}} \ln \left| \frac{\sqrt{8} + \sqrt{3} \cos u}{\sqrt{8} - \sqrt{3} \cos u} \right| + C, \end{aligned}$$

где  $u = \arcsin \frac{\sqrt{5}}{2x+1}$ . Окончательно получим

$$I = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{(2x+1)\sqrt{2} + \sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2} - \sqrt{3(x^2+x-1)}} \right| + C.$$

**3.** Вычислим интеграл примера 2 без применения тригонометрических подстановок. Интеграл имеет вид (3), где  $p = 1$ ,  $q = 1$ ,  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = -1$ , т. е. выполнены условия  $a/1 = b/p \neq c/q$

Полагая  $x = y - \frac{1}{2}$ , приходим к интегралу  $I = \int \frac{dy}{(y^2 + 3/4)\sqrt{y^2 - 5/4}}$  типа (7), который рационализируется подстановкой

$$t = \left( \sqrt{y^2 - \frac{5}{4}} \right)' = \frac{y}{\sqrt{y^2 - 5/4}} \quad (8)$$

Из соотношения (8) получаем  $t^2(y^2 - 5/4) = y^2$ , откуда

$$y^2 + \frac{3}{4} = \frac{2t^2 - 3/4}{t^2 - 1}. \quad (9)$$

Записывая формулу (8) в виде  $t\sqrt{y^2 - 5/4} = y$  и дифференцируя, получаем  $dt\sqrt{y^2 - 5/4} + t(y^2 - 5/4)'dy = dy$ , или, с учетом (8),  $dt\sqrt{y^2 - 5/4} + t \cdot t dy = dy$ , откуда

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - 5/4}} = \frac{dt}{1 - t^2}. \quad (10)$$

Подставляя выражения (9) и (10) в интеграл  $I$ , имеем

$$I = \int \frac{dt}{3/4 - 2t^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + \sqrt{8}t}{\sqrt{3} - \sqrt{8}t} \right| + C,$$

где  $t = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$ , т. е

$$I = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{(2x+1)\sqrt{2} + \sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2} - \sqrt{3(x^2+x-1)}} \right| + C$$

4.  $I = \int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{x^2+3x+1}}$  Положим  $t = \frac{1}{x-1}$ , тогда  $dx = -\frac{1}{t^2} dt$   
и  $I = -\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}$  Далее воспользуемся формулой (1)·

$$\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}} = (At+B)\sqrt{5t^2+5t+1} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}.$$

Дифференцируя это тождество, получаем

$$\frac{t^2}{\sqrt{5t^2+5t+1}} = A\sqrt{5t^2+5t+1} + \frac{(At+B)(10t+5)}{2\sqrt{5t^2+5t+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{5t^2+5t+1}}$$

Приводя к общему знаменателю и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $t$ , находим  $A = 1/10$ ,  $B = -3/20$ ,  $\lambda = 11/40$ . Далее,

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{d(t+1/2)}{\sqrt{(t+1/2)^2 - 1/20}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 + t + \frac{1}{5}} \right| + C. \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$I = -\left(\frac{1}{10}t - \frac{3}{20}\right)\sqrt{5t^2+5t+1} - \frac{11}{40\sqrt{5}} \ln \left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 + t + \frac{1}{5}} \right| + C,$$

где  $t = \frac{1}{x-1}$ , или

$$I = \frac{3x-5}{20(x-1)^2} \sqrt{x^2+3x+1} - \frac{11}{40\sqrt{5}} \ln \left| \frac{(x+1)\sqrt{5} + 2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1} \right| + C$$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Найдите следующие интегралы

89.  $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$     90.  $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx$
91.  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$     92.  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$     93.  $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$
94.  $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} dx$     95.  $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$     96.  $\int \frac{x^{10} dx}{\sqrt{1+x^2}}$
97.  $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$     98.  $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$     99.  $\int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$
100.  $\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}$     101.  $\int \frac{x dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$
102.  $\int \frac{(x+1) dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$     103.  $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$

$$104. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}. \quad 105. \int \frac{dx}{[1 + \sqrt{x(1+x)}]^2}.$$

$$106. \int \frac{(x^2 - 1) dx}{(x^2 + 1)\sqrt{(x^4 + 1)}}. \quad 107. \int \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^2 - 1)\sqrt{(x^4 + 1)}}.$$

## § 7. Интегрирование тригонометрических функций

Основные рационализирующие подстановки

Интеграл вида  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  рационализируется с помощью универсальной тригонометрической подстановки  $t = \operatorname{tg}(x/2)$ . На практике она приводит часто к громоздким выкладкам. В ряде случаев более удобны другие подстановки:

- а)  $t = \cos x$ , если  $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ ;
- б)  $t = \sin x$ , если  $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ ;
- в)  $t = \operatorname{tg} x$ , если  $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ .

Примеры решения задач

1.  $I = \int \cos^5 x dx$ . Подынтегральная функция относится к случаю б). Поэтому положим  $t = \sin x$ . Тогда  $dt = \cos x dx$ ,  $\cos^4 x = (1 - \sin^2 x)^2 = (1 - t^2)^2$  и

$$I = \int (1 - t^2)^2 dt = t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C,$$

где  $t = \sin x$ .

2.  $I = \int \sin 5x \cos x dx$ . В данном случае проще вычислить интеграл, не прибегая к подстановкам и представив подынтегральную функцию в виде  $\frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 6x)$ . Тогда

$$I = \frac{1}{2} \int (\sin 4x + \sin 6x) dx = -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{12} \cos 6x + C.$$

3.  $I = \int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x}$ . Здесь можно сделать универсальную подстановку  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ . Тогда  $x = 2 \operatorname{arctg} t$ ,  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ ,  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  и интеграл  $I$  сводится к интегралу от рациональной функции. Однако проще сначала преобразовать подынтегральную функцию:

$$\frac{1}{a \cos x + b \sin x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)},$$

где  $\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $\cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , и положить далее  $t = \operatorname{tg} \frac{x+\varphi}{2}$ . Тогда  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ ,  $\sin(x+\varphi) = \frac{2t}{1+t^2}$  и, следовательно,

$$I = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dt}{t} \Big|_{t=\operatorname{tg} \frac{x+\varphi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x+\varphi}{2} \right| + C.$$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Найдите следующие интегралы.

$$108. \int \sin^6 x \, dx. \quad 109. \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx. \quad 110. \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} \, dx.$$

$$111. \int \operatorname{tg}^5 x \, dx. \quad 112. \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}. \quad 113. \int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}.$$

$$114. \int \cos x \cos 2x \cos 3x \, dx. \quad 115. \int \sin^3 2x \cos^2 3x \, dx.$$

$$116. \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}. \quad 117. \int \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x} \text{ при: а) } 0 < \varepsilon < 1; \text{ б) } \varepsilon > 1.$$

$$118. \int \frac{\sin^2 x \, dx}{1 + \sin^2 x}. \quad 119. \int \frac{\sin x \, dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}. \quad 120. \int \frac{dx}{\cos^6 x + \sin^6 x}.$$

## ГЛАВА VI

# ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О НЕПРЕРЫВНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

## § 1. Теоремы об ограниченности непрерывных функций

### Основные понятия и теоремы

**1. Определение ограниченной функции.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена на множестве  $X$ .

Определение. Функция  $y = f(x)$  называется *ограниченной сверху (снизу)* на множестве  $X$ , если существует число  $M(m)$  такое, что  $\forall x \in X$  выполняется неравенство  $f(x) \leq M$  ( $f(x) \geq m$ ).

Число  $M(m)$  называется *верхней (нижней) гранью* функции на множестве  $X$ . Функция  $y = f(x)$  называется *ограниченной на множестве X* (или ограниченной с обеих сторон), если она ограничена сверху и снизу на этом множестве.

### 2. Теоремы об ограниченности непрерывных функций.

Теорема 1 (о локальной ограниченности функции, непрерывной в точке). *Если функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то существует окрестность точки  $x_0$ , в которой эта функция ограничена.*

Теорема 2 (об устойчивости знака непрерывной функции). *Если функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  и  $f(x_0) \neq 0$ , то существует окрестность точки  $x_0$ , в которой  $f(x)$  имеет тот же знак, что и  $f(x_0)$ .*

Теорема 3 (первая теорема Вейерштрасса). *Непрерывная на сегменте функция ограничена на этом сегменте.*

### 3. Точные грани функции.

Определение. Число  $M$  называется *точной верхней гранью* функции  $y = f(x)$  на множестве  $X$ , если:

- 1°)  $\forall x \in X$  выполняется неравенство  $f(x) \leq M$ ;
- 2°)  $\forall M' < M \exists x' \in X$  такое, что  $f(x') > M'$ .

Замечание. Условие 1°) означает, что число  $M$  является одной из верхних граней функции  $y = f(x)$  на множестве  $X$ . Условие 2°) означает, что  $M$  — наименьшая из верхних граней функции  $y = f(x)$  на множестве  $X$ , т. е. никакое число  $M'$ , меньшее  $M$ , не является верхней гранью.

Точная верхняя грань функции  $y = f(x)$  на множестве  $X$  обозначается так:  $\sup_X f(x)$ . Если функция  $y = f(x)$  не является ограниченной сверху на множестве  $X$ , то пишут  $\sup_X f(x) = +\infty$ .

Аналогично определяется точная нижняя грань функции:  $\inf_X f(x)$ . Разность  $\sup_X f(x) - \inf_X f(x)$  называется *колебанием* функции  $y = f(x)$  на множестве  $X$ .

**Теорема 4** (вторая теорема Вейерштрасса). *Непрерывная на сегменте  $[a, b]$  функция  $f(x)$  достигает на этом сегменте своих точных граней, т. е.  $\exists x', x'' \in [a, b]$  такие, что  $f(x') = \inf_{[a,b]} f(x)$ ,  $f(x'') = \sup_{[a,b]} f(x)$ .*

Если функция  $y = f(x)$  достигает на множестве  $X$  своей точной верхней (нижней) грани, то она имеет на  $X$  *максимальное (минимальное) значение*, причем  $\max_X f(x) = \sup_X f(x)$  (соответственно  $\min_X f(x) = \inf_X f(x)$ ). В противном случае функция не имеет на множестве  $X$  максимального (минимального) значения.

### Контрольные вопросы и задания

- Дайте определение ограниченной сверху (снизу) на множестве  $X$  функции.
- Используя правило построения отрицаний предложений с кванторами, сформулируйте определение неограниченной сверху (снизу) на множестве  $X$  функции.
- Докажите, что определение ограниченной функции эквивалентно следующему: функция  $y = f(x)$  называется ограниченной на множестве  $X$ , если существует число  $A > 0$  такое, что  $\forall x \in X$  выполняется неравенство  $|f(x)| \leq A$ .
- Сформулируйте определение неограниченной на множестве  $X$  функции с помощью отрицания определения, приведенного в задании 3.
- Сформулируйте теорему о локальной ограниченности непрерывной функции.
- Докажите, что теорема о локальной ограниченности функции остается в силе, если условие непрерывности функции в точке  $x_0$  заменить условием существования  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .
- Сформулируйте теорему об устойчивости знака непрерывной функции.
- Известно, что  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  и  $f(x_0) = 0$ . Можно ли утверждать, что  $f(x)$ :
  - имеет определенный знак в некоторой окрестности точки  $x_0$  (кроме самой точки  $x_0$ );
  - не имеет определенного знака ни в какой окрестности точки  $x_0$ ?
- Сформулируйте первую теорему Вейерштрасса.
- Справедливо ли утверждение: непрерывная на интервале функция ограничена на этом интервале?
- Может ли неограниченная на множестве  $X$  функция быть непрерывной на этом множестве, если: а)  $X$  — сегмент; б)  $X$  — интервал?
- Дайте определение точной верхней и точной нижней грани функции. В каком случае полагают  $\inf_X f(x) = -\infty$ ?

- 13 Справедливо ли утверждение ограниченная сверху (снизу) на множестве  $X$  функция имеет на этом множестве точную верхнюю (нижнюю) грань?
- 14 Сформулируйте вторую теорему Вейерштрасса
- 15 Справедливо ли утверждение непрерывная и ограниченная на интервале функция достигает на этом интервале своих точных граней?
- 16 Справедливо ли утверждение если функция не достигает на сегменте  $[a, b]$  своей точной верхней (или нижней) грани, то она разрывна на этом сегменте?
- 17 Справедливо ли утверждение разрывная на сегменте  $[a, b]$  функция не достигает на этом сегменте своих точных граней?
- 18 Справедливы ли следующие утверждения
- ограниченная на сегменте  $[a, b]$  функция  $y = f(x)$  имеет  $\max_{[a,b]} f(x)$  и  $\min_{[a,b]} f(x)$ ,
  - непрерывная на сегменте  $[a, b]$  функция имеет  $\max_{[a,b]} f(x)$  и  $\min_{[a,b]} f(x)$ ?
- 19 Справедливы ли утверждения задания 18, если сегмент  $[a, b]$  заменить интервалом  $(a, b)$ ?

### Примеры решения задач

1. Доказать, что функция  $y = \frac{1}{1+x^2}$  ограничена на числовой прямой  $(-\infty, +\infty)$

$\Delta$  Так как  $x^2 \geq 0$ , то  $1+x^2 \geq 1$  и, следовательно,  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$  выполняются неравенства

$$0 < \frac{1}{1+x^2} < 1. \quad (1)$$

Отсюда следует, что функция  $y = \frac{1}{1+x^2}$  ограничена на  $(-\infty, +\infty)$ .  $\blacktriangleleft$

2. Найти точные грани функций из примера 1 и установить, имеет ли она максимальное и минимальное значения

$\Delta$  Из неравенств (1) следует, что числа  $m = 0$  и  $M = 1$  — соответственно нижняя и верхняя грань функции  $y = \frac{1}{1+x^2}$ . Докажем, что эти числа и являются точными гранями данной функции. Так как  $\frac{1}{1+x^2} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ , то  $\forall m' > 0 \exists x'$  такое, что  $\frac{1}{1+x'^2} < m'$ . Таким образом, никакое положительное число  $m'$  не является нижней гранью функции, а значит, число  $m = 0$  — наибольшая из нижних граней, т. е.  $\inf_{(-\infty, +\infty)} \frac{1}{1+x^2} = 0$

При  $x = 0$  значение функции равно 1. Следовательно, никакое число, меньшее 1, не является верхней гранью функции. Иначе говоря, наименьшая верхняя грань функции равна 1. Итак,  $\sup_{(-\infty, +\infty)} f(x) = 1$

Заметим теперь, что, в отличие от значения 1, которое функция принимает при  $x = 0$ , значение 0 не принимается функцией ни при

каком  $x$  ( $\forall x \frac{1}{1+x^2} > 0$ ) Поэтому данная функция имеет на числовой прямой  $(-\infty, +\infty)$  максимальное значение  $\max_{(-\infty, +\infty)} \frac{1}{1+x^2} = 1$ , но не имеет минимального значения. ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Докажите ограниченность функции

а)  $y = \frac{1+x}{1+x^2}$  на полупрямой  $[0, +\infty)$ ,

б)  $y = \frac{2x}{1+x^2}$  на числовой прямой  $(-\infty, +\infty)$ ,

в)  $y = x \sin \frac{1}{x}$  на  $(-\infty, +\infty)$ , г)  $y = \operatorname{arctg} 2^x$  на  $(-\infty, +\infty)$ ,

д)  $y = xe^{-x}$  на  $(0, +\infty)$

2. Ограничены ли следующие функции

а)  $y = x^2$  на  $[-5, 10]$ , б)  $y = x$  на  $[-5, +\infty)$ ,

в)  $y = x \cos(1/x)$  на  $(-\infty, +\infty)$ ,

г)  $y = \begin{cases} 2^{1/(x-1)} & \text{при } x \neq 1, \\ 0 & \text{при } x = 1 \end{cases}$  на  $(0, 2)$ ,

д)  $y = 2^{1/(x-1)}$  на  $(0, 1)$ ?

3. Приведите пример функции, которая на некотором множестве  $X$

а) ограничена сверху, но не ограничена снизу,

б) ограничена снизу, но не ограничена сверху,

в) не ограничена снизу и сверху

4. Пусть функция  $f(x)$  определена на множестве  $X$  и пусть  $\forall x \in X$  существует окрестность, в которой  $f(x)$  ограничена. Следует ли отсюда ограниченность  $f(x)$  на  $X$ , если

а)  $X$  — интервал, б)  $X$  — сегмент?

5. Приведите пример функции  $f(x)$ , которая непрерывна и равна нулю в некоторой точке  $x_0$  и

а) имеет определенный знак в некоторой окрестности точки  $x_0$  (кроме самой точки  $x_0$ ),

б) не сохраняет знака ни в какой окрестности точки  $x_0$

6. Приведите пример функции, непрерывной на интервале, но не ограниченной на нем

а) сверху, б) снизу, в) с обеих сторон

7. Постройте пример функций, определенной на  $[a, b]$ , но не ограниченной на  $[a, b]$

а) сверху, б) снизу, в) с обеих сторон

Может ли такая функция быть непрерывной на  $[a, b]$ ?

8. Найдите точные грани функции

а)  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$  на  $(0, +\infty)$ , б)  $f(x) = x^2$  на  $[-5, 10]$ ,

в)  $f(x) = \operatorname{arctg} 2^x$  на  $(-\infty, +\infty)$ , г)  $f(x) = \sin x + \cos x$  на  $[0, \pi]$ ,

д)  $f(x) = 2^{1/(x-1)}$  на  $(0, 1)$

Достигает ли  $f(x)$  своих точных граней на указанном множестве?

9. Приведите пример функции  $f(x)$ , у которой  
 а)  $\sup_x f(x) = +\infty$ , б)  $\inf_x f(x) = -\infty$
10. Постройте пример непрерывной и ограниченной на интервале функции, которая на этом интервале  
 а) достигает  $\sup$ , но не достигает  $\inf$ ,  
 б) достигает  $\inf$ , но не достигает  $\sup$ ,  
 в) не достигает  $\sup$  и  $\inf$
11. Постройте пример ограниченной на сегменте функции, которая на этом сегменте  
 а) достигает  $\sup$ , но не достигает  $\inf$ ,  
 б) достигает  $\inf$ , но не достигает  $\sup$ ,  
 в) не достигает  $\sup$  и  $\inf$   
 Может ли такая функция быть непрерывной на сегменте?
12. Постройте пример функции, которая на некотором множестве  $X$  имеет  $\sup$  и  $\inf$ , но не имеет  $\max$  и  $\min$
13. Найдите колебания функции  
 а)  $f(x) = x^2$  на  $(-1, 2)$ ,  
 б)  $f(x) = \sin(1/x)$  на  $(0, \varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  — произвольное число,  
 в)  $f(x) = x \sin(1/x)$  на  $(0, 1)$ ,  
 г)  $f(x) = x |\sin(1/x)|$  на  $(0, 1)$
14. Обозначим через  $m[f]$  и  $M[f]$  соответственно точную нижнюю и точную верхнюю грани функции  $f(x)$  на множестве  $X$ . Пусть  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  определены и ограничены на  $X$ . Докажите, что

$$m[f_1 + f_2] \geq m[f_1] + m[f_2], \quad M[f_1 + f_2] \leq M[f_1] + M[f_2]$$

Постройте примеры функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ , для которых в указанных соотношениях имеет место а) знак равенства, б) знак неравенства

## § 2. Равномерная непрерывность функции

### Основные понятия и теоремы

**1. Определение равномерной непрерывности функции.**  
 Пусть множество  $X$  является промежутком или состоит из нескольких промежутков.

Определение Функция  $f(x)$  называется *равномерно непрерывной* на множестве  $X$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что  $\forall x, x' \in X$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - x'| < \delta$  выполняется неравенство  $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ .

**Замечание** Из определения следует, что если функция равномерно непрерывна на множестве  $X$ , то она непрерывна на этом множестве, т. е. непрерывна в каждой его точке. Отличие равномерной непрерывности функции на множестве  $X$  от “обычной” непрерывности на этом множестве (т. е. непрерывности в каждой его точке) состоит в том, что при равномерной непрерывности  $\forall \varepsilon > 0$  найдется “нужное” (такое, какое требуется по определению)  $\delta(\varepsilon) > 0$ , общее для всех  $x \in X$  ( $\delta$  зависит только от  $\varepsilon$  и не зависит от  $x$ ), а при “обычной” непрерывности  $\forall \varepsilon > 0$  и  $\forall x \in X$  найдется “пунктное”  $\delta$

(т. е.  $\delta$  зависит и от  $\varepsilon$ , и от  $x$ ), но для каких-то  $\varepsilon$  может не существовать “нужного”  $\delta(\varepsilon) > 0$ , общего для всех  $x \in X$ . Ясно, что в этом случае  $\delta$  изменяется в зависимости от  $x$  так (при указанных фиксированных значениях  $\varepsilon$ ), что может принимать сколь угодно малые значения.

**2. Геометрическая иллюстрация равномерной непрерывности функции.** Если  $f(x)$  равномерно непрерывна на  $X$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что прямоугольник со сторонами  $\delta(\varepsilon)$  и  $\varepsilon$ , параллельными осям  $Ox$  и  $Oy$ , можно так переместить вдоль графика (сохраняя параллельность сторон осям координат), что график не пересечет горизонтальных сторон прямоугольника, а будет пересекать только вертикальные стороны (рис. 5).

### 3. Теоремы о равномерной непрерывности функции.

Теорема 5 (теорема Кантора).

*Непрерывная на сегменте функция равномерно непрерывна на этом сегменте*

Теорема 6 (достаточное условие равномерной непрерывности функций). *Если функция  $f(x)$  имеет на промежутке  $X$  ограниченную производную, то  $f(x)$  равномерно непрерывна на этом промежутке<sup>\*</sup>.*

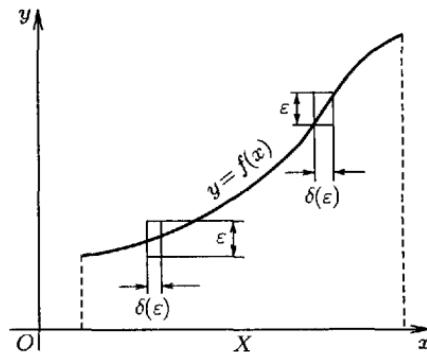


Рис. 5

### Контрольные вопросы и задания

- 1 Дайте определение равномерной непрерывности функции
- 2 Пользуясь кванторами, сформулируйте отрицание равномерной непрерывности функции
- 3 Справедливы ли следующие утверждения
  - а) если  $f(x)$  непрерывна на множестве  $X$ , то она равномерно непрерывна на этом множестве;
  - б) если  $f(x)$  равномерно непрерывна на  $X$ , то она непрерывна на  $X$ ?
- 4 Какова геометрическая иллюстрация равномерной непрерывности функций?
- 5 Сформулируйте теорему Кантора
- 6 Справедливо ли утверждение непрерывная на интервале функция равномерно непрерывна на этом интервале?
- 7 Сформулируйте теорему, выражющую достаточное условие равномерной непрерывности функции
- 8 Является ли ограниченность производной необходимым условием равномерной непрерывности функции?

<sup>\*</sup>) Напомним, что *промежутком* называется любое из следующих множеств сегмент, интервал, полуинтервал, полупрямая, числовая прямая

### Примеры решения задач

**1.** Исследовать на равномерную непрерывность функцию  $y = x^2$  на интервале  $(-l, l)$ , где  $l > 0$  — любое фиксированное число.

Докажем, что функция  $y = x^2$  равномерно непрерывна на интервале  $(-l, l)$ , причем сделаем это тремя способами. 1) пользуясь определением равномерной непрерывности; 2) используя теорему Кантора; 3) используя достаточное условие равномерной непрерывности.

1) Составим разность  $y(x_1) - y(x_2)$ :

$$y(x_1) - y(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2). \quad (1)$$

Если  $x_1, x_2 \in (-l, l)$ , то модуль суммы  $|x_1 + x_2|$  ограничен числом  $2l$ . Поэтому модуль разности  $|y(x_1) - y(x_2)|$  будет сколь угодно малым для любых  $x_1, x_2 \in (-l, l)$ , если только модуль разности  $|x_1 - x_2|$  достаточно мал. Эти качественные рассуждения показывают уже, что функция  $y = x^2$  равномерно непрерывна на интервале  $(-l, l)$ .

Проведем теперь более строгие рассуждения, пользуясь определением равномерной непрерывности. Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$  и положим  $\delta = \varepsilon/(2l)$ . Тогда  $\forall x_1, x_2 \in (-l, l)$ , удовлетворяющих неравенству  $|x_1 - x_2| < \delta$ , выполняется неравенство

$$|y(x_1) - y(x_2)| = |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2| < \delta \cdot 2l = \varepsilon$$

Это и означает по определению, что функция  $y = x^2$  равномерно непрерывна на интервале  $(-l, l)$ .

2) Рассмотрим функцию  $y = x^2$  на сегменте  $[-l, l]$ . Она непрерывна на этом сегменте и, следовательно, по теореме Кантора равномерно непрерывна на нем. Отсюда следует, что функция  $y = x^2$  равномерно непрерывна на интервале  $(-l, l)$ . В самом деле,  $(-l, l) \subset [-l, l]$ , и так как неравенство  $|y(x_1) - y(x_2)| < \varepsilon$  выполняется  $\forall x_1, x_2 \in [-l, l]$ , удовлетворяющих неравенству  $|x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)$ , то оно выполняется и для любых  $x_1, x_2 \in (-l, l)$ , удовлетворяющих тому же неравенству

3) Производная  $y'(x) = 2x$  ограничена на интервале  $(-l, l)$ :  $|y'(x)| = 2|x| \leqslant 2l$ . Отсюда по теореме 6 следует, что функция  $y = x^2$  равномерно непрерывна на  $(-l, l)$ . ▲

**2.** Исследовать на равномерную непрерывность функцию  $y = x^2$  на всей числовой прямой

Δ Из выражения (1) видно, что если  $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$ , то при сколь угодно малом модуле разности  $|x_1 - x_2|$  модуль разности  $|y(x_1) - y(x_2)|$  не будет мал при достаточно больших  $x_1$  и  $x_2$  из-за множителя  $(x_1 + x_2)$ . Это качественное рассуждение наводит на мысль, что функция  $y = x^2$  не является равномерно непрерывной на всей прямой  $(-\infty, +\infty)$ . Докажем это, пользуясь отрицанием определения равномерной непрерывности. Нужно доказать, что  $\exists \varepsilon > 0$  такое, что  $\forall \delta > 0 \ \exists x_1, x_2$ , удовлетворяющие неравенству  $|x_1 - x_2| < \delta$ , для которых  $|y(x_1) - y(x_2)| \geqslant \varepsilon$

Возьмем  $\varepsilon = 1$  и  $\forall \delta > 0$  положим  $x_1 = 1/\delta + \delta/2$ ,  $x_2 = 1/\delta$ . Тогда  $|x_1 - x_2| = \delta/2 < \delta$ , но при этом

$$|y(x_1) - y(x_2)| = |x_1 - x_2||x_1 + x_2| = \frac{\delta}{2} \left( \frac{2}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right) = 1 + \frac{\delta^2}{4} \geqslant 1 = \varepsilon.$$

Это доказывает, что функция  $y = x^2$  не является равномерно непрерывной на  $(-\infty, +\infty)$ . ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

15. Пользуясь определением равномерной непрерывности и его отрицанием, докажите, что функция  $y = 1/x$ 
  - а) равномерно непрерывна на полупрямой  $[1, +\infty)$ ,
  - б) не является равномерно непрерывной на полупрямой  $(0, +\infty)$
16. Приведите пример функции, которая непрерывна на некотором интервале, но не является на нем равномерно непрерывной
17. Докажите равномерную непрерывность следующих функций, пользуясь только определением равномерной непрерывности (т. е. выбирая по заданному произвольному  $\varepsilon$  нужное  $\delta = \delta(\varepsilon)$ )
  - а)  $f(x) = kx + b$  на  $(-\infty, +\infty)$ ,  $k \neq 0$ ,
  - б)  $f(x) = x^3$  на  $(-3, 5)$ ,
  - в)  $f(x) = \sin x$  на  $(-\infty, +\infty)$ ,
  - г)  $f(x) = e^x$  на  $[0, 10]$
18. Исследуйте на равномерную непрерывность следующие функции (любым способом)
  - а)  $f(x) = \ln(x)$  на  $(0, 1)$  и на  $(1, 2)$ ,
  - б)  $f(x) = \sin(1/x)$  на  $(0, 1)$  и на  $(0, 01, 1)$ ,
  - в)  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  на  $(-\infty, +\infty)$ ,
  - г)  $f(x) = \arcsin x$  на  $(-1, 1)$ ,
  - д)  $f(x) = \sqrt{x}$  на  $[0, +\infty)$ ,
  - е)  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  на  $(0, 1)$ ,
  - ж)  $f(x) = e^{-1/x}$  на  $(0, 1)$ ,
  - з)  $f(x) = x \sin x$  на  $(-\infty, +\infty)$ ,
  - и)  $f(x) = \sin^2 x$  на  $(-\infty, +\infty)$ ,
  - к)  $f(x) = \sin(x^2)$  на  $(-\infty, +\infty)$ ,
  - л)  $f(x) = e^{-x}$  на  $(0, +\infty)$
19. Докажите, что функция  $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$  равномерно непрерывна на интервалах  $I_1 = (-1 < x < 0)$  и  $I_2 = (0 < x < 1)$ , но не является равномерно непрерывной на их сумме  $I_1 + I_2 = \{0 < |x| < 1\}$
20. Докажите, что если функция  $f(x)$  равномерно непрерывна на каждом из сегментов  $[a, c]$  и  $[c, b]$ , то она равномерно непрерывна на сегменте  $[a, b]$
21. а) Докажите, что если функция  $f(x)$  определена и непрерывна на полуправой  $[a, +\infty)$  и существует  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , то  $f(x)$  равномерно непрерывна на  $[a, +\infty)$   
 б) Приведите пример функции, равномерно непрерывной на полуправой  $[a, +\infty)$ , у которой  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  не существует
22. Приведите пример функции, которая имеет неограниченную производную на множестве  $X$ , но является равномерно непрерывной на этом множестве
23. Докажите, что равномерно непрерывная на интервале функция ограничена на этом интервале. Верно ли обратное утверждение?
24. Докажите, что сумма и произведение двух равномерно непрерывных на интервале функций равномерно непрерывны на этом интервале

25. Модулем непрерывности функции  $f(x)$  на промежутке  $(a, b)$  ( $a$  и  $b$  могут быть соответственно равны  $-\infty$  и  $+\infty$ ) называется следующая функция аргумента  $\delta$  ( $\delta > 0$ )

$$\omega_f(\delta) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in (a, b) \\ |x_1 - x_2| \leq \delta}} |f(x_1) - f(x_2)|$$

(если  $|f(x_1) - f(x_2)|$  является неограниченной функцией при  $\{|x_1 - x_2| \leq \delta, x_1, x_2 \in (a, b)\}$ , то пишут  $\omega_f(\delta) = +\infty$ )

а) Докажите, что для равномерной непрерывности функции  $f(x)$  на промежутке  $(a, b)$  необходимо и достаточно, чтобы  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_f(\delta) = 0$

б) Приведите пример функции  $f(x)$ ,  $x \in (a, b)$ , для которой  $\omega_f(\delta) = +\infty$

26. Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на множестве  $X$ , т. е. непрерывна в каждой точке  $x \in X$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0$  и  $\forall x \in X$   $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$  такое, что из неравенства  $|x' - x| < \delta(\varepsilon, x)$  ( $x' \in X$ ) следует неравенство  $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ . Докажите, что для равномерной непрерывности функции  $f(x)$  на множестве  $X$  необходимо и достаточно, чтобы существовала функция  $\delta(\varepsilon, x)$  такая, что  $\inf_X \delta(\varepsilon, x) > 0$  ( $\forall \varepsilon > 0$ )

### § 3. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях

#### Основные понятия и теоремы

##### 1. Возрастание функции в точке.

Определение Говорят, что функция  $f(x)$  возрастает в точке  $x_0$ , если существует такая окрестность точки  $x_0$ , в которой  $f(x) > f(x_0)$  при  $x > x_0$ ,  $f(x) < f(x_0)$  при  $x < x_0$ .

Аналогично определяется убывание функции в точке

Теорема 7 (достаточное условие возрастания функции в точке)  
Если функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$  и  $f'(x_0) > 0$  ( $f'(x_0) < 0$ ), то  $f(x)$  возрастает (убывает) в точке  $x_0$

##### 2. Теоремы о возрастании и убывании функции на промежутке.

Определение Говорят, что функция  $f(x)$  возрастает (не убывает) на промежутке  $X$ , если  $\forall x_1, x_2 \in X$  из условия  $x_1 < x_2$  следует неравенство  $f(x_1) < f(x_2)$  (соответственно  $f(x_1) \leq f(x_2)$ )

Аналогично определяется убывание (невозрастание) функции на промежутке

Теорема 8 Для того чтобы дифференцируемая на промежутке  $X$  функция  $f(x)$  не убывала (не возрасала) на этом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы  $\forall x \in X$  выполнялось неравенство  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ )

Теорема 9 (достаточное условие строгой монотонности функции) Если  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ )  $\forall x \in X$ , то  $f(x)$  возрастает (убывает) на промежутке  $X$

### 3. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши.

**Теорема 10 (теорема Ролля)** Пусть функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям

- 1°)  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ ,
- 2°)  $f(x)$  дифференцируема в  $(a, b)$ ,
- 3°)  $f(a) = f(b)$

Тогда существует точка  $c \in (a, b)$  такая, что  $f'(c) = 0$

**Физическая интерпретация теоремы Ролля** Пусть  $x$  — время,  $f(x)$  — координата точки, движущейся по прямой, в момент времени  $x$ . В начальный момент  $x = a$  точка имеет координату  $f(a)$ , далее движется определенным образом со скоростью  $f'(x)$  и в момент времени  $x = b$  возвращается в точку с координатой  $f(a)$  ( $f(b) = f(a)$ ). Ясно, что для возвращения в точку  $f(a)$  она должна остановиться в некоторый момент времени (прежде чем “повернуть назад”), т. е. в некоторый момент  $x = c$  скорость  $f'(c) = 0$ .

**Геометрическая интерпретация теоремы Ролля** Существует точка  $c \in (a, b)$  такая, что касательная к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $(c, f(c))$  параллельна оси  $Ox$ .

**Теорема 11 (теорема Лагранжа)** Пусть функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям

- 1°)  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ ,
- 2°)  $f(x)$  дифференцируема в  $(a, b)$

Тогда существует точка  $c \in (a, b)$  такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad (1)$$

Формула (1) называется *формулой Лагранжа* (или *формулой конечных приращений*)

**Физическая интерпретация теоремы Лагранжа** Пусть  $x$  — время,  $f(x)$  — координата точки, движущейся по прямой, в момент времени  $x$ . Запишем формулу Лагранжа в виде

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Величина в левой части равенства является очевидно, средней скоростью движения точки по прямой за промежуток времени от  $a$  до  $b$ . Формула Лагранжа показывает, что существует такой момент времени  $x = c$ , в который мгновенная скорость равна средней скорости на временном отрезке  $[a, b]$ .

**Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа** Число  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  является угловым коэффициентом прямой, проходящей через концы графика функции  $y = f(x)$  — точки  $(a, f(a))$  и  $(b, f(b))$ , а  $f'(c)$  — угловым коэффициентом касательной к графику в точке  $(c, f(c))$ . Формула Лагранжа показывает, что касательная к графику в некоторой точке  $(c, f(c))$  параллельна прямой, проходящей через концы графика (или совпадает с ней).

**Теорема 12 (теорема Коши).** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  удовлетворяют условиям:

- 1°)  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на  $[a, b]$ ;
- 2°)  $f(x)$  и  $g(x)$  дифференцируемы в  $(a, b)$ ;
- 3°)  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ .

Тогда существует точка  $c \in (a, b)$  такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (2)$$

Формула (2) называется *формулой Коши*.

### Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение возрастания (убывания) функции в точке.
2. Сформулируйте теорему, выражающую достаточное условие возрастания функции в точке.
3. Справедливы ли следующие утверждения:
  - а) если функция возрастает в точке  $x_0$ , то она имеет в этой точке положительную производную;
  - б) если дифференцируемая в точке  $x_0$  функция  $f(x)$  возрастает в этой точке, то  $f'(x_0) > 0$ ?
4. Сформулируйте теорему, выражающую необходимое и достаточное условие монотонности дифференцируемой функции на промежутке.
5. Сформулируйте теорему, выражающую достаточное условие строгой монотонности дифференцируемой функции на промежутке.
6. Справедливо ли утверждение: если дифференцируемая на промежутке  $X$  функция  $f(x)$  возрастает на этом промежутке, то  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in X$ ?
7. Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности каждой точки множества  $X$ . Справедливы ли утверждения:
  - а) если  $f(x)$  возрастает на множестве  $X$ , то она возрастает в каждой точке  $x_0 \in X$ ;
  - б) если  $f(x)$  возрастает в каждой точке  $x_0 \in X$ , то она возрастает на множестве  $X$ ? (Рассмотрите функцию  $f(x) = -1/x$ .)
8. Сформулируйте теорему Ролля.
9. Останется ли справедливой теорема Ролля, если опустить условие:
  - а)  $f(a) = f(b)$ ;
  - б)  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ ?
 Приведите соответствующие примеры.
10. Сформулируйте теорему Лагранжа.
11. Сформулируйте теорему Коши.

### Примеры решения задач

1. Найти промежутки монотонности функции  $f(x) = 3x - x^3$ .

Δ Имеем  $f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2)$ . Так как  $f'(x) > 0$  при  $x \in (-1, 1)$ ,  $f'(x) < 0$  при  $x \in (-\infty, -1)$  и  $x \in (1, \infty)$ , то функция  $f(x) = 3x - x^3$  возрастает на интервале  $(-1, 1)$  и убывает на полупрямых  $(-\infty, -1)$  и  $(1, +\infty)$ ; можно также сказать, что  $f(x)$  возрастает на сегменте  $[-1, 1]$  и убывает на полупрямых  $(-\infty, -1]$  и  $[1, +\infty)$ . ▲

**2.** Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin(2/x) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

возрастает в точке  $x = 0$ , но не является возрастающей ни на каком интервале  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  ( $\varepsilon > 0$  — произвольное число).

△ Имеем

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 2x \sin(2/x) - 2 \cos(2/x) & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

(по поводу вычисления  $f'(0)$  см. пример 6 из § 1 гл. IV).

Так как  $f'(0) = 1 > 0$ , то по теореме 7 функция  $f(x)$  возрастает в точке  $x = 0$ .

Если бы  $f(x)$  возрасала на некотором интервале  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ , то согласно теореме 8 выполнялось бы условие  $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Покажем, что это не так. Положим  $x_n = 1/(\pi n)$  ( $n$  — натуральное число). Очевидно, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists n$  такое, что  $1/(\pi n) < \varepsilon$ , т. е.  $x_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Подставляя  $x = x_n = 1/(\pi n)$  в выражение для  $f'(x)$  при  $x \neq 0$ , получим  $f'(x_n) = -1 < 0$ . Это доказывает, что функция  $f(x)$  не является возрастающей ни на каком интервале  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ . ▲

**3.** Пусть функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям: 1)  $f(x)$  имеет непрерывную производную на  $[a, b]$ ; 2)  $f(x)$  имеет вторую производную в  $(a, b)$ ; 3)  $f(a) = f'(a) = 0, f(b) = 0$ . Доказать, что существует точка  $c \in (a, b)$  такая, что  $f''(c) = 0$ .

Очевидно, что для функции  $f(x)$  на сегменте  $[a, b]$  выполнены все условия теоремы Ролля. Поэтому существует точка  $d \in (a, b)$  такая, что  $f'(d) = 0$ .

Рассмотрим функцию  $f'(x)$  на сегменте  $[a, d]$ . Имеем: 1)  $f'(x)$  непрерывна на  $[a, d]$ ; 2)  $f'(x)$  имеет производную  $(f'(x))' = f''(x)$  в  $(a, d)$ ; 3)  $f'(a) = f'(d) = 0$ . В силу теоремы Ролля существует точка  $c \in (a, d)$  (и, следовательно,  $c \in (a, b)$ ) такая, что  $(f'(x))'|_{x=c} = f''(c) = 0$ . ▲

**4.** Доказать, что  $|\cos x - \cos y| \leq |x - y| \quad \forall x, y$ .

△ По формуле Лагранжа

$$\cos x - \cos y = \sin \xi \cdot (x - y),$$

где  $\xi$  — некоторая точка из интервала  $(x, y)$ . Так как  $|\sin \xi| \leq 1$ , то  $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$ . ▲

**5.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены и дифференцируемы при  $x \geq x_0$ , причем  $f(x_0) = g(x_0)$ ,  $f'(x) > g'(x)$  при  $x > x_0$ . Доказать, что  $f(x) > g(x)$  при  $x > x_0$ .

△ Рассмотрим функцию  $\varphi(x) = f(x) - g(x)$  на произвольном сегменте  $[x_0, x]$  ( $x > x_0$ ). По формуле Лагранжа

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x)(x - x_0), \tag{3}$$

где  $\xi$  — некоторая точка из интервала  $(x_0, x)$ . Так как

$$\varphi(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0, \quad \varphi'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi) > 0, \quad x - x_0 > 0,$$

то из равенства (3) получаем  $\varphi(x) > 0$ , т. е.  $f(x) - g(x) > 0$  при  $x > x_0$ . Таким образом,  $f(x) > g(x)$  при  $x > x_0$ .  $\blacktriangle$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

27. Найдите промежутки монотонности функций

а)  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a > 0$ ), б)  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ ,

в)  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ , г)  $f(x) = x + \sin x$ , д)  $f(x) = x + 2 \sin x$ ,

е)  $f(x) = \sin(\pi/x)$ , ж)  $f(x) = x^2 2^{-x}$ , з)  $f(x) = x^n e^{-x}$  ( $n > 0$ ,  $x \geq 0$ )

28. При каких значениях  $a$  функция  $f(x) = ax + \sin x$  возрастает (убывает) на числовой прямой?

29. Докажите, что если функция возрастает в каждой точке интервала, то она возрастает на этом интервале. Останется ли верным это утверждение, если интервал заменить произвольным множеством?

30. Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  удовлетворяют на  $[a, b]$  условиям теоремы Ролля и, кроме того,  $f'(x) \neq 0$  и  $g'(x) \neq 0$  на  $[a, b]$ . Докажите, что существуют точки  $c_1, c_2 \in (a, b)$  такие, что

$$\frac{f'(c_1)}{f(c_1)} = \frac{g'(c_1)}{g(c_1)}, \quad \frac{f'(c_2)}{f(c_2)} = -\frac{g'(c_2)}{g(c_2)}$$

31. Пусть функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям

1)  $f(x)$  имеет непрерывную  $(n-1)$ -ю производную на  $[x_0, x_n]$ ,

2)  $f(x)$  имеет  $n$ -ю производную в  $(x_0, x_n)$ ,

3)  $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n)$ , где  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ .

Докажите, что существует точка  $\xi \in (x_0, x_n)$  такая, что  $f^{(n)}(\xi) = 0$ .

32. Используя теорему Ролля, докажите, что если все корни многочлена

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

с вещественными коэффициентами  $a_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) вещественны, то его производные  $P'_n(x), P''_n(x), \dots, P_{n-1}^{(n-1)}(x)$  также имеют лишь вещественные корни.

33. Докажите, что все корни многочлена Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2 - 1)^n\}$$

вещественны и лежат в интервале  $(-1, 1)$ .

34. Найдите точку  $c$  в формуле конечных приращений (1) для функции

$$f(x) = \begin{cases} 0,5(3-x^2) & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 1/x & \text{при } 1 < x < +\infty \end{cases}$$

на сегменте  $[0, 2]$ .

35. Используя формулу Лагранжа, докажите справедливость неравенств

а)  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \quad \forall x, y$ ,

б)  $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq |x - y| \quad \forall x, y$ ,

в)  $\frac{x-y}{x} < \ln \frac{x}{y} < \frac{x-y}{y}$  при  $0 < y < x$

36. Докажите, что если производная функции во всех точках промежутка равна нулю, то функция является постоянной на этом промежутке. Используя это утверждение, докажите тождества

$$\text{a) } 2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \text{ при } x \geq 1,$$

$$\text{б) } \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2} \arcsin x = \frac{\pi}{4} \text{ при } -1 < x < 1,$$

$$\text{в) } \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} - 2 \operatorname{arctg} x = 0 \text{ при } x \geq 0$$

37. Докажите справедливость неравенств

$$\text{а) } e^x > 1 + x \text{ при } x \neq 0,$$

$$\text{б) } x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x \text{ при } x > 0,$$

$$\text{в) } \ln(1+x) > \frac{x}{1+x} \text{ при } x > 0,$$

$$\text{г) } x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x \text{ при } x > 0,$$

$$\text{д) } x + \frac{x^3}{3} < \operatorname{tg} x \text{ при } 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{е) } bx^a - ax^b < b - a \text{ при } x > 1, \quad 0 < a < b$$

Проиллюстрируйте эти неравенства геометрически

38. Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены и  $n$  раз дифференцируемы при  $x \geq x_0$ , причем  $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ),  $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$  при  $x > x_0$ . Докажите, что  $f(x) > g(x)$  при  $x > x_0$

39. Докажите утверждения

а) если функция имеет на интервале ограниченную производную, то и сама функция ограничена на этом интервале,

б) если функция дифференцируема, но не ограничена на интервале, то ее производная также не ограничена на этом интервале

Приведите пример, показывающий, что обратное утверждение неверно

40. Пусть функции  $f(x)$ ,  $g(x)$  и  $h(x)$  непрерывны на  $[a, b]$  и дифференцируемы в  $(a, b)$ , а

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}$$

Докажите, что существует точка  $c \in (a, b)$  такая, что  $F'(c) = 0$ . Используя это утверждение, выведите формулы Лагранжа и Коши

41. Справедлива ли формула Коши для функций  $f(x) = x^2$  и  $g(x) = x^3$  на сегменте  $[-1, 1]$ ? Какое условие теоремы Коши не выполнено для этих функций?

42. Пусть функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям 1)  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , 2)  $f(x)$  дифференцируема в  $(a, b)$ , 3)  $f(x)$  не является линейной функцией. Докажите, что существует точка  $c \in (a, b)$  такая, что  $|f(b) - f(a)| < |f'(c)| |b - a|$

43. Пусть функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям 1)  $f(x)$  дважды дифференцируема на  $[a, b]$ , 2)  $f'(a) = f'(b) = 0$ . Докажите, что существует точка  $c \in (a, b)$  такая, что  $|f(b) - f(a)| \leq (1/4)(b - a)^2 |f''(c)|$

44. За время  $t$  с точка прошла по прямой расстояние  $s$  м. В начальный и конечный моменты времени скорость точки равна нулю. Докажите, что в некоторый момент времени абсолютная величина ускорения точки была не меньше  $4s/t^2$  м/с<sup>2</sup>

## § 4. Правило Лопитала

**Основные понятия и теоремы**

**Теорема 13.** Пусть выполнены условия:

1°) функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки  $a$  (кроме, быть может, самой точки  $a$ );

2°)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ;

3°)  $g'(x) \neq 0$  в указанной окрестности точки  $a$  (кроме, быть может, самой точки  $a$ );

4°) существует  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Тогда существует  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ , и он равен  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

**Замечание** Если все условия теоремы 13 выполнены в правой (левой) полуокрестности точки  $a$ , то теорема верна в отношении правого (левого) предела функции  $f(x)/g(x)$  в точке  $a$ .

**Теорема 14.** Пусть выполнены условия:

1°) функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены и дифференцируемы на полу-прямой  $(a, +\infty)$ ;

2°)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ,

3°)  $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, +\infty)$ ,

4°) существует  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Тогда существует  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ , и он равен  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

**Замечание** Если условие 4°) в теоремах 13 и 14 заменить условием  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$  ( $a$  — число или символ  $+\infty$ ), то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

Теоремы 13 и 14 позволяют раскрывать неопределенности типа  $0/0$ .

**Теорема 15.** Если выполнены условия 1°), 3°), 4°) теорем 13 и 14, а вместо условия 2°) выполнено условие  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$

( $a$  — число или символ  $+\infty$ ), то существует  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ , и он равен  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

Теорема 15 позволяет раскрывать неопределенности типа  $\infty/\infty$ . Она справедлива также в отношении односторонних пределов.

Каждая из теорем 13–15 называется *правилом Лопитала*. Неопределенности других типов ( $0 \cdot \infty; \infty - \infty; 1^\infty; 0^0; \infty^0$ ) можно свести к неопределенностям типа  $0/0$  или  $\infty/\infty$  и затем применять правило Лопитала.

### Контрольные вопросы и задания

- Сформулируйте правило Лопитала раскрытия неопределенности типа  
а) 0/0 при  $x \rightarrow a$ , б) 0/0 при  $x \rightarrow +\infty$ ,  
в)  $\infty/\infty$  при  $x \rightarrow a$ , г)  $\infty/\infty$  при  $x \rightarrow +\infty$
- Пусть выполнены условия 1°)-3°) теоремы 13 (или теоремы 14, или теоремы 15) и пусть не существует  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Следует ли отсюда, что не существует  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ ?

Рассмотрите примеры а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{2x + \sin x}$

### Примеры решения задач

1. Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\operatorname{tg} \beta x}$ .

Δ Данный предел является неопределенностью типа 0/0. Проверим, выполнимость условий теоремы 13:

1°) функции  $\sin \alpha x$  и  $\operatorname{tg} \beta x$  определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки  $x = 0$ ;

2°)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \alpha x = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta x = 0$ ;

3°)  $(\operatorname{tg} \beta x)' = \frac{\beta}{\cos^2 \beta x} \neq 0$  в окрестности точки  $x = 0$ ;

4°)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin \alpha x)'}{(\operatorname{tg} \beta x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \cos \alpha x}{\beta / (\cos^2 \beta x)} = \frac{\alpha}{\beta}$

Следовательно, по теореме 13  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\operatorname{tg} \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$  ▲

Иногда для раскрытия неопределенности приходится применять правило Лопитала последовательно несколько раз, как в следующем примере.

2. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}. \quad (1)$$

Δ Этот предел является неопределенностью типа 0/0. Условия 1°)-3°) теоремы 13 выполнены, а предел отношения производных

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{tg} x - x)'}{(x^3)'} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/\cos^2 x - 1}{3x^2} \quad (2)$$

также является неопределенностью типа 0/0

Для предела (2) выполнены условия 1°)-3°) теоремы 13, а предел отношения производных

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1/\cos^2 x - 1)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos^{-3} x \sin x}{6x} \quad (3)$$

снова является неопределенностью типа 0/0

Для раскрытия этой неопределенности также можно воспользоваться правилом Лопитала, поскольку для предела (3) условия 1°)–3°) теоремы 13 выполнены и предел отношения производных есть

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \cos^{-3} x \sin x)'}{(6x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \cos^{-4} x \sin^2 x + 2 \cos^{-2} x}{6} = \frac{1}{3}. \quad (4)$$

Итак, в силу (2)–(4) искомый предел (1) равен 1/3. ▲

3. Найти  $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$ .

Δ Данный предел является неопределенностью типа 0<sup>0</sup>. Представим  $x^x$  в виде  $e^{x \ln x}$  и рассмотрим  $\lim_{x \rightarrow +0} (x \ln x)$ . Этот предел является неопределенностью типа 0 · ∞. Записав  $x \ln x$  в виде  $\frac{\ln x}{1/x}$  приходим к неопределенности типа ∞/∞. Нетрудно проверить, что для  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{1/x}$  выполнены все условия теоремы 15 для односторонних пределов (проверьте это самостоятельно). Применив правило Лопитала, получим

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0$$

Отсюда следует, что  $\lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \ln x} = e^0 = 1$ . ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Найдите следующие пределы

45.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$  ( $\alpha > 0$ )    46.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x}$  ( $\alpha > 0$ ,  $a > 1$ )
47.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$     48.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}$     49.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$
50.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{ctg} 2x$     51.  $\lim_{x \rightarrow 3\pi/4} \frac{1 + \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{1 - 2 \cos^2 x}$
52.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$     53.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arccos x}$     54.  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(\sin \alpha x)}{\ln(\sin \beta x)}$  ( $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ )
55.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$     56.  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-1/x}}{x^\alpha}$  ( $\alpha > 0$ )
57.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$     58.  $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$     59.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$
60.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$     61.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$     62.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{1/x^2}$
63.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$     64.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$     65.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$
66.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$     67.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^x}{x - a}$     68.  $\lim_{x \rightarrow 1-0} (\arccos x)^{1-x}$

## § 5. Формула Тейлора

### Основные понятия и теоремы

**1. Многочлен Тейлора.** Пусть функция  $f(x)$   $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0$ . Многочлен

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

называется *многочленом Тейлора* для функции  $f(x)$  (с центром в точке  $x_0$ ). Он обладает следующим свойством:

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Роль многочлена Тейлора раскрывает следующая теорема.

**Теорема 16.** Если функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$  и  $n$  раз дифференцируема в точке  $x_0$ , то

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x), \quad (1)$$

где  $R_{n+1}(x) = o((x - x_0)^n)$ .

Формула (1) называется *формулой Тейлора* для функции  $f(x)$  с центром в точке  $x_0$  и остаточным членом  $R_{n+1}(x)$  в форме Пеано.

### 2. Различные формы остаточного члена.

**Теорема 17.** Пусть функция  $f(x)$  определена и  $n+1$  раз дифференцируема в некоторой окрестности точки  $x_0$ . Пусть  $x$  — произвольное значение аргумента из этой окрестности,  $p > 0$  — произвольное число. Тогда существует точка  $\xi \in (x_0, x)$  такая, что

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{(x - \xi)^{n+1}}{n! p} \left( \frac{x - x_0}{x - \xi} \right)^p f^{(n+1)}(\xi). \quad (2)$$

Выражение (2) называется *общей формой остаточного члена*.

Наиболее важны следующие частные случаи общей формы остаточного члена:

а) *форма Лагранжа* ( $p = n+1$ )

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) \quad (0 < \theta < 1);$$

б) *форма Коши* ( $p = 1$ )

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1} (1 - \theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) \quad (0 < \theta < 1).$$

**3. Основные разложения.** Если  $x_0 = 0$ , то формулу Тейлора принято называть *формулой Маклорена*. Важную роль играют сле-

дующие разложения по формуле Маклорена.

$$\text{I. } e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x).$$

$$\text{II. } \sin x = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2n+1}(x).$$

$$\text{III. } \cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+2}(x).$$

$$\text{IV. } \ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + R_{n+1}(x).$$

$$\text{V. } (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + R_{n+1}(x).$$

### Контрольные вопросы и задания

- Что такое многочлен Тейлора для функции  $f(x)$  с центром в точке  $x_0$ ? Каким свойством он обладает?
- Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом: а) в форме Пеано; б) в общей форме. Как отличаются условия этих теорем? Условия какой теоремы следуют из условий другой?
- Выведите из общей формы остаточного члена формулы Лагранжа и Коши. Получите формулу Пеано остаточного члена из формулы Лагранжа.
- Напишите формулу Маклорена для функции  $f(x)$  и остаточные члены этой формулы в формах Пеано, Лагранжа и Коши.
- Напишите основные разложения и остаточные члены этих разложений в формах Пеано, Лагранжа и Коши.

### Примеры решения задач

- Разложить функцию  $\operatorname{tg} x$  по формуле Маклорена до члена с  $x^3$  включительно.

$\Delta$  Найдем производные функции  $f(x) = \operatorname{tg} x$  до третьего порядка включительно:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \cos^{-2} x;$$

$$f''(x) = 2 \cos^{-3} x \sin x;$$

$$f'''(x) = 6 \cos^{-4} x \sin^2 x + 2 \cos^{-2} x.$$

Отсюда получаем  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f''(0) = 0$ ,  $f'''(0) = 2$ . По формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано имеем

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Заметим, что вычисление  $f^{(4)}(x)$  дает  $f^{(4)}(0) = 0$ . Поэтому остаточный член можно записать в виде  $o(x^4)$ .  $\blacktriangle$

**2.** Разложить функцию  $f(x) = \ln \cos x$  по формуле Маклорена до члена с  $x^4$  включительно.

Δ Здесь нет надобности вычислять производные  $f(x)$  до четвертого порядка, а можно воспользоваться основными разложениями III и IV. Пользуясь разложением III, получим

$$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = \ln(1 + t),$$

$$\text{где } t = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Теперь воспользуемся основным разложением IV:

$$\begin{aligned} \ln \cos x &= \ln(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) = \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + \\ &+ o\left(\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2\right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4). \blacksquare \end{aligned}$$

**3.** Оценить абсолютную погрешность приближенной формулы

$$e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = P_n(x) \quad (3)$$

при  $0 \leq x \leq 1$ .

Δ Для получения оценки абсолютной погрешности нужно оценить остаточный член  $R_{n+1}(x) = e^x - P_n(x)$ . Остаточный член  $R_{n+1}(x)$  в форме Лагранжа для функции  $e^x$  имеет вид  $R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$  ( $0 < \theta < 1$ ). Отсюда получаем

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{e}{(n+1)!} \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1. \quad (4)$$

Это и есть искомая оценка абсолютной погрешности приближенной формулы (3) при  $0 \leq x \leq 1$ .  $\blacktriangle$

**4.** С помощью оценки (4) решить следующую задачу: сколько членов нужно взять в формуле (3) при  $x = 1$ , чтобы вычислить число  $e$  с точностью  $10^{-6}$ ?

Δ Нетрудно подсчитать, что  $10! > 3 \cdot 10^6$ . Поэтому  $\frac{e}{10!} < \frac{3}{3 \cdot 10^6} = 10^{-6}$ . Таким образом, достаточно в формуле (3) при  $x = 1$  положить  $n = 9$ , чтобы получить число  $e$  с точностью  $10^{-6}$ .  $\blacktriangle$

**5.** Используя основные разложения, найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + 2 \sin x - 3x}{x^4}.$$

△ Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + 2 \sin x - 3x}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) + 2\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) - 3x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^4)}{x^4} = 0 \quad \blacktriangle$$

6. Найти числа  $a$  и  $b$  такие, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + ax} - \sqrt[3]{x^3 - bx^2}) = 3$$

△ Используя формулу Маклорена для  $(1+x)^\alpha$  при  $\alpha = 1/3$ , получаем

$$x(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + ax} - \sqrt[3]{x^3 - bx^2}) = x^2 \left[ \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2}\right)^{1/3} - \right.$$

$$\left. - \left(1 - \frac{b}{x}\right)^{1/3} \right] = x^2 \left[ \left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{a}{x^2}\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x} + \frac{a}{x^2}\right)^2 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\frac{b}{x} - \frac{1}{9}\frac{b^2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \right] =$$

$$= x^2 \left[ \frac{1+b}{3x} + \frac{3a-1+b^2}{9x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right] = \frac{1+b}{3}x + \frac{3a-1+b^2}{9} + \frac{o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}$$

Чтобы предел этой функции при  $x \rightarrow \infty$  был равен 3, должны быть выполнены равенства

$$1 + b = 0, \quad \frac{3a - 1 + b^2}{9} = 3$$

Отсюда находим  $b = -1$ ,  $a = 9$  ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

69. Разложите функцию  $f(x)$  по формуле Маклорена до члена указанного порядка включительно
- $f(x) = e^{-x}$  до члена с  $x^n$ ,
  - $f(x) = e^{2x-x^2}$  до члена с  $x^5$ ,
  - $f(x) = \sin \sin x$  до члена с  $x^3$ ,
  - $f(x) = \cos \sin x$  до члена с  $x^4$ ,
  - $f(x) = \ln \frac{\sin x}{x}$  до члена с  $x^6$ ,
  - $f(x) = \sqrt[3]{\sin x^3}$  до члена с  $x^{13}$ ,
  - $f(x) = \sqrt[n]{a^n + x}$  до члена с  $x^2$  ( $a > 0$ ),
  - $f(x) = \sqrt{1-x+2x^2}$  до члена с  $x^3$
70. Напишите разложение по формуле Тейлора с центром в точке  $x = 1$  функции
- $f(x) = x^2$ ,
  - $f(x) = \sqrt{x}$  до члена с  $(x-1)^3$ ,
  - $f(x) = \sin(\pi x/2)$  до члена с  $(x-1)^4$

71. Оцените абсолютную погрешность приближенных формул

а)  $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$  при  $|x| \leq \frac{1}{2}$ , б)  $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}$  при  $|x| \leq 0,1$ ,  
 в)  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$  при  $0 \leq x \leq 1$

72. С помощью формулы Тейлора найдите приближенные значения

а)  $\sqrt[3]{9}$  с точностью до  $10^{-3}$ , б)  $\sqrt[4]{90}$  с точностью до  $10^{-4}$ ,  
 в)  $\sin 18^\circ$  с точностью до  $10^{-1}$ , г)  $\sin 1^\circ$  с точностью до  $10^{-8}$ ,  
 д)  $\ln 1,1$  с точностью до  $10^{-3}$ , е)  $e^{0.2}$  с точностью до  $10^{-5}$ ,  
 ж)  $\cos 6^\circ$  с точностью до  $10^{-5}$

73. Используя основные разложения, найдите пределы

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$ , б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \operatorname{tg} x}{\ln(1+x^3)}$ ,  
 в)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{e^x}(\sqrt{e^x+1} - \sqrt{e^x-1})$ ,  
 г)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$ ,  
 д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x^2}$ , е)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$ ,  
 ж)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right)$ , з)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sin x - x \sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$

74. Найдите числа  $a$  и  $b$  такие, что

а)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-x} + ax + b) = 2$ ,  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax - \operatorname{tg} bx}{x^3} = 4$ , в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - \sqrt{1+bx}}{x^2} = 1$

75. Найдите  $f'(0)$  и  $f''(0)$ , если  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

76. Докажите, что

а)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} = f''(x)$  (если  $f''(x)$  существует),  
 б)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+3\Delta x) - 3f(x+2\Delta x) + 3f(x+\Delta x) - f(x)}{(\Delta x)^3} = f'''(x)$  (если  
 $f'''(x)$  существует)

## ГЛАВА VII

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

## § 1. Построение графиков явных функций

### Основные понятия и теоремы

**1. Асимптоты графика функции.** Функцию, заданную соотношением  $y = f(x)$ ,  $x \in D(f)$ , принято называть *явной* функцией.

**Определение.** Прямая  $x = c$  называется *вертикальной асимптотой* графика функции  $y = f(x)$ , если хотя бы один из пределов  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$  или  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$  равен  $+\infty$  или  $-\infty$ .

**Определение.** Прямая  $y = kx + b$  называется *наклонной асимптотой* графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , если эта функция представима в виде  $f(x) = kx + b + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

**Теорема 1.** Для того чтобы прямая  $y = kx + b$  была *наклонной асимптотой* графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b.$$

Аналогично вводится понятие *наклонной асимптоты* графика функции при  $x \rightarrow -\infty$ .

### 2. Четные, нечетные, периодические функции.

**Определение.** Функция  $y = f(x)$  называется *четной*, если  $\forall x \in D(f)$ :  $f(x) = f(-x)$ .

**Определение.** Функция  $y = f(x)$  называется *нечетной*, если  $\forall x \in D(f)$ :  $f(x) = -f(-x)$ .

**Определение.** Функция  $y = f(x)$  называется *периодической*, если существует число  $T \neq 0$ , называемое *периодом* функции  $y = f(x)$ , такое, что

$$\forall x \in D(f): \quad f(x) = f(x + T) = f(x - T).$$

Обычно под периодом функции понимают наименьший из положительных периодов, если такой период существует.

**3. Локальный экстремум функции.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ .

**Определение.** Говорят, что функция  $y = f(x)$  имеет в точке  $x_0$  *локальный максимум (минимум)*, если существует такая окрестность точки  $x_0$ , в которой при  $x \neq x_0$  выполняется неравенство  $f(x) < f(x_0)$  (соответственно  $f(x) > f(x_0)$ ).

Локальный максимум и локальный минимум объединяются общим названием *локальный экстремум* (или просто *экстремум*).

**Теорема 2** (необходимое условие экстремума). *Если функция  $y = f(x)$  имеет в точке  $x_0$  экстремум, то производная  $f'(x)$  в точке  $x_0$  или равна нулю, или не существует.*

Значения аргумента функции  $y = f(x)$ , при которых либо производная функции равна нулю, либо производная не существует, но сама функция непрерывна, принято называть *точками возможного экстремума*.

**Теорема 3** (первое достаточное условие экстремума). *Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема в некоторой окрестности точки  $x_0$  возможного экстремума (за исключением, быть может, самой точки  $x_0$ ). Тогда если при переходе через точку  $x_0$  (в сторону возрастания  $x$ ) производная  $f'(x)$  меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то в точке  $x_0$  функция  $y = f(x)$  имеет локальный максимум (минимум). Если при переходе через точку  $x_0$  производная функции не меняет знака, то в точке  $x_0$  функция  $y = f(x)$  не имеет экстремума.*

**Теорема 4** (второе достаточное условие экстремума). *Пусть в точке  $x_0$  возможного экстремума функция  $y = f(x)$  имеет вторую производную. Тогда если  $f''(x_0) < 0$  ( $f''(x_0) > 0$ ), то функция  $y = f(x)$  имеет в точке  $x_0$  локальный максимум (минимум).*

**4. Направление выпуклости и точки перегиба графика функции.** Пусть функция  $y = f(x)$  имеет в каждой точке интервала  $(a, b)$  конечную производную. Тогда в каждой точке  $M(x, f(x))$ ,  $x \in (a, b)$ , график функции  $y = f(x)$  имеет касательную, не параллельную оси  $Oy$ .

**Определение.** Говорят, что график функции имеет на интервале  $(a, b)$  *выпуклость, направленную вниз (вверх)*, если в пределах интервала  $(a, b)$  график лежит не ниже (не выше) любой касательной.

**Теорема 5.** *Если на интервале  $(a, b)$  существует вторая производная функции  $y = f(x)$  и если эта производная неотрицательна (неположительна) всюду на этом интервале, то график функции  $y = f(x)$  имеет на интервале  $(a, b)$  выпуклость, направленную вниз (вверх).*

**Определение.** Точка  $M(c, f(c))$  графика функции  $y = f(x)$  называется *точкой перегиба* этого графика, если в этой точке график функции имеет касательную и существует такая окрестность точки  $c$ , в пределах которой слева и справа от точки с направления выпуклости графика функции  $y = f(x)$  различны.

Говорят также, что в точке  $M(c, f(c))$  график функции имеет *перегиб*.

**Теорема 6** (необходимое условие перегиба). *Если график функции  $y = f(x)$  имеет перегиб в точке  $M(c, f(c))$  и вторая производная  $f''(x)$  непрерывна в точке  $c$ , то  $f''(c) = 0$ .*

**Теорема 7** (достаточное условие перегиба). *Если в некоторой*

*окрестности точки с существует вторая производная функции  $y = f(x)$ , причем  $f''(c) = 0$ , и в пределах этой окрестности слева и справа от точки с знаки  $f''(x)$  различны, то график функции имеет перегиб в точке  $M(c, f(c))$ .*

### 5. Схема построения графика функции $y = f(x)$ .

1°. Найти область определения функции и значения этой функции в точках разрыва и граничных точках области определения.

Если в точке с функция имеет разрыв, причем  $f(c+0)$  или  $f(c-0)$  обращается в бесконечность, то  $x = c$  — вертикальная асимптота графика функции  $y = f(x)$ .

Если функция определена на полуправой или на всей числовой прямой, то следует установить (с помощью теоремы 1), имеет ли график функции наклонные асимптоты. Если наклонных асимптот нет, то нужно исследовать, является функция ограниченной при  $x \rightarrow \infty$  или неограниченной (в последнем случае — является ли она бесконечно большой при  $x \rightarrow \infty$  и какого знака).

2°. Установить, является ли функция четной, нечетной, периодической.

Назначение этого пункта — сократить выкладки. Действительно, если функция четная или нечетная, то вместо всей области определения достаточно рассмотреть лишь ту ее часть, которая принадлежит положительной полусоси абсцисс. На этой части области определения нужно провести полное исследование функции и построить ее график, а затем, пользуясь симметрией, достроить его на всей области определения.

Если функция периодическая, то достаточно провести исследование функции на любом отрезке, длина которого равна периоду функции, а затем, построив график на этом отрезке, распространить его на всю область определения функции.

3°. Найти нули функции, т. е. решить уравнение  $f(x) = 0$ . Эти решения и точки разрыва функции разбивают ее область определения на промежутки знакопостоянства функции.

4°. Найти локальные экстремумы и промежутки возрастания и убывания функции (на графике экстремальные точки будем обозначать символом  $\circ$ ).

5°. Найти промежутки сохранения направления выпуклости и точки перегиба графика функции (на графике точки перегиба будем обозначать символом  $\times$  или  $+$ ).

### Контрольные вопросы и задания

- Дайте определение и приведите пример вертикальной асимптоты графика функции.
- Сформулируйте определение и приведите пример наклонной асимптоты графика функции при  $x \rightarrow +\infty$  (при  $x \rightarrow -\infty$ ).
- Сформулируйте теорему, выражающую необходимые и достаточные условия существования наклонной асимптоты графика функции.

4. Приведите примеры функции, у которой существуют наклонные асимптоты графика при  $x \rightarrow +\infty$  и при  $x \rightarrow -\infty$ , причем эти асимптоты: а) совпадают; б) не совпадают.
5. Дайте определение локального экстремума функции.
6. Что такое точки возможного экстремума функции?
7. Сформулируйте теорему, выражающую необходимое условие экстремума: а) произвольной функции; б) дифференцируемой функции. Покажите на примере, что это условие не является достаточным.
8. Сформулируйте теоремы, выражающие достаточные условия экстремума функции.
9. Дайте определение направления выпуклости графика функции.
10. Дайте определение точки перегиба графика функции.
11. Может ли меняться направление выпуклости графика функции при переходе через точку, не являющуюся точкой перегиба? Приведите примеры.
12. Сформулируйте необходимое условие перегиба графика функции. Покажите на примере, что это условие не является достаточным.
13. Сформулируйте достаточное условие перегиба графика функции.
14. Приведите схему построения графика функции  $y = f(x)$ .

### Примеры решения задач

1. Построить график функции  $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ .

$\Delta$  1°. Функция определена при тех значениях  $x$ , для которых, как следует из определения арксинуса, выполнено неравенство  $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leqslant 1$ . Оно равносильно неравенству  $(1-|x|)^2 \geqslant 0$ . Последнее верно для любых вещественных  $x$ . Итак,  $D(f) = \mathbf{R}$ . Функция  $\frac{2x}{1+x^2}$  непрерывна в любой точке (как частное двух непрерывных функций). Поэтому функция  $\arcsin \frac{2x}{1+x^2}$  также непрерывна в любой точке (как суперпозиция непрерывных функций), и, следовательно, график функции не имеет вертикальных асимптот. Для нахождения наклонной асимптоты при  $x \rightarrow \infty$  вычислим следующие пределы:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \arcsin 0 = 0.$$

Отсюда следует, что прямая  $y = 0$  является асимптотой при  $x \rightarrow +\infty$  (ее правильно называть горизонтальной, а не наклонной). Аналогично можно установить, что та же прямая  $y = 0$  является асимптотой при  $x \rightarrow -\infty$ .

2°. Очевидно, что функция непериодическая и является нечетной. Поэтому вместо всей области определения достаточно рассмотреть полупрямую  $[0, +\infty)$ .

3° Имеем  $y = 0$  при  $x = 0$ . Других нулей, а также точек разрыва функция не имеет. На полупрямой  $(0, +\infty)$  функция является положительной.

4° Найдем точки возможного экстремума на полупрямой  $[0, +\infty)$ . Вычислим производную функцию при  $x \neq 1$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2}{|1-x^2|} \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{2 \operatorname{sgn}(1-x^2)}{1+x^2}$$

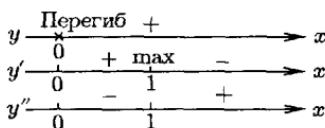
Отсюда видно, что производная не обращается в нуль ни в одной точке. Так как  $y'(1+0) = -1$ ,  $y'(1-0) = 1$ , то в точке  $x = 1$  производная не существует. Знак производной при переходе через точку  $x = 1$  меняется с плюса на минус. Поэтому в точке  $x = 1$  функция имеет локальный максимум, причем  $y(1) = \arcsin 1 = \pi/2$ . Отметим, что в точке  $x = 1$  функция непрерывна, а ее производная имеет разрыв I рода. В таком случае соответствующая точка графика (в данном примере точка  $(1, \pi/2)$ ) называется *угловой точкой*. Промежутки монотонности функции определяются знаком производной  $y' > 0$  при  $0 \leq x < 1$ ,  $y' < 0$  при  $x > 1$ .

5° Так как вторая производная

$$y'' = \frac{-4x \operatorname{sgn}(1-x^2)}{(1+x^2)^2}, \quad x \neq 1,$$

обращается в нуль лишь при  $x = 0$  и при переходе через точку  $x = 0$ ,  $y''$  меняет знак, то в точке  $(0, y(0)) = (0, 0)$  график функции имеет перегиб. Направление выпуклости определяется знаком второй производной  $y'' < 0$  при  $0 \leq x < 1$ ,  $y'' > 0$  при  $x > 1$ .

Исследование функции закончено. Перед тем как строить график, удобно изобразить на схеме результаты исследования, в частности, промежутки знакопостоянства функции, первой производной  $y'$  и второй производной  $y''$ .



Теперь, считывая информацию со схемы, строим график функции на промежутке  $[0, +\infty)$ . На отрезке  $[0, 1]$  а) функция возрастает от значения  $y = 0$  при  $x = 0$  до значения  $y = \pi/2$  при  $x = 1$ , б) выпуклость направлена вверх. Далее, на полупрямой  $[1, +\infty)$  а) функция убывает, оставаясь положительной, б) выпуклость направлена вниз, в) при  $x \rightarrow +\infty$  график приближается к асимптоте — оси  $Ox$ . Отметим, что при переходе через точку  $x = 1$  изменяется направление выпуклости графика, но точка  $(1, \pi/2)$  не является точкой перегиба — это угловая точка (рис. 6).

Наконец, используя нечетность функции, достраиваем ее график на всей области определения (рис. 7) ▲

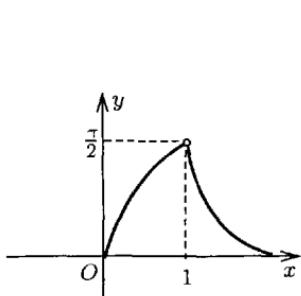


Рис. 6

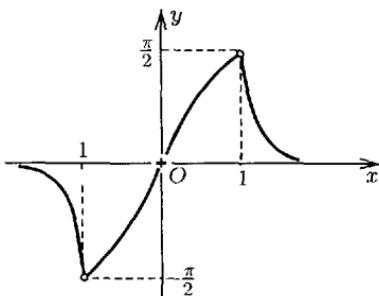


Рис. 7

**Замечание** Если кривая задана уравнением  $\Phi(x, y) = 0$  и если это уравнение удается разрешить относительно  $y$  или относительно  $x$ , то построение кривой сводится к построению графиков явных функций

## 2. Построить кривую, заданную уравнением $y^2 - \sin^4 x = 0$

△ Это уравнение  $\forall x \in \mathbf{R}$  имеет два решения относительно  $y$ :  $y = \sin^2 x$  и  $y = -\sin^2 x$ , которые являются явными функциями, определенными на всей числовой прямой. Графики этих функций симметричны относительно оси  $Ox$ . Поэтому достаточно построить график первой функции, а затем, воспользовавшись симметрией, построить всю кривую. Итак, задача свелась к построению графика явной функции  $y = \sin^2 x$ , которую запишем в виде

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

Эту функцию исследуем по вышеизложенной схеме

1° Имеем  $D(y) = \mathbf{R}$

2° Функция  $y(x)$  периодическая с периодом  $T = \pi$ . Поэтому чтобы построить график функции, достаточно рассмотреть отрезок оси  $Ox$  длины  $\pi$ , например  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Так как  $y(x)$ , кроме того, является четной, то можно ограничиться сегментом  $[0, \pi/2]$

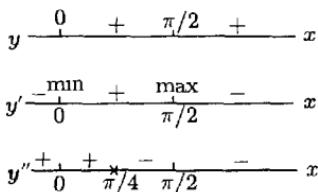
3° Найдем нули функции на сегменте  $[0, \pi/2]$ , имеем

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x = 0$$

при  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , но из всех этих решений сегменту  $[0, \pi/2]$  принадлежит только  $x = 0$ . Функция не имеет точек разрыва. На промежутке  $(0, \pi/2]$  функция положительна

4° Находим  $y' = \sin 2x$ . На сегменте  $[0, \pi/2]$  производная равна нулю при  $x = 0$  и  $x = \pi/2$ . Далее,  $y' > 0$  при  $0 < x < \pi/2$ ,  $y' < 0$  при  $x < 0$  и  $x > \pi/2$ . По теореме 3 функция имеет локальный максимум в точке  $\pi/2$ , причем  $y(\pi/2) = 1$ , и локальный минимум в точке  $x = 0$ , причем  $y(0) = 0$ . Весь сегмент  $[0, \pi/2]$  является промежутком возрастания функции

5°. Имеем  $y'' = 2 \cos 2x$ . На сегменте  $[0, \pi/2]$  вторая производная обращается в нуль при  $x = \pi/4$ . При переходе через эту точку  $y''$  меняет знак. Значит, по теореме 7 график функции имеет в точке  $(\pi/4, y(\pi/4)) = (\pi/4, 1/2)$  перегиб. Таким образом, можно построить следующую схему.



Считывая информацию со схемы, строим график функции на сегменте  $[0, \pi/2]$  (рис. 8). Используя четность функции, достраиваем ее

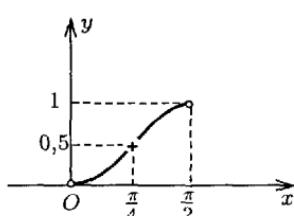


Рис. 8

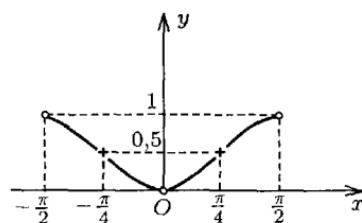


Рис. 9

график на сегменте  $[-\pi/2, \pi/2]$  (рис. 9). Учитывая периодичность функции, строим ее график на всей области определения (рис. 10)

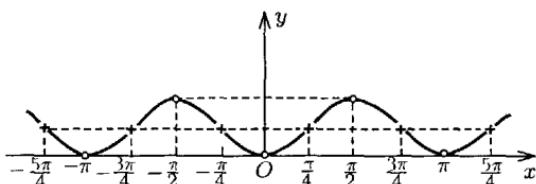


Рис. 10

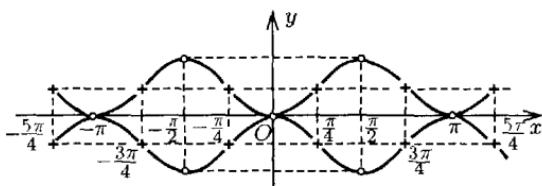


Рис. 11

Наконец, учитывая симметричность исходной кривой относительно оси  $Ox$ , получаем всю кривую (рис. 11) ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Постройте графики следующих явных функций

1.  $y = 1 + x^2 - 0,5x^4$
2.  $y = (x+1)(x-2)^2$
3.  $y = 0,4x - 0,5x^3 + 0,1x^5$
4.  $y = (1-x^2)^{-1}$
5.  $y = x^4(1+x)^{-3}$
6.  $y = (1+x)^4(1-x)^{-4}$
7.  $y = x^2(x-1)(x+1)^{-2}$
8.  $y = x(1-x^2)^{-2}$
9.  $y = 2x - 1 + (x+1)^{-1}$
10.  $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$
11.  $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$
12.  $y = \arcsin(\sin x)$
13.  $y = \sin(\arcsin x)$
14.  $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$
15.  $y = \operatorname{arctg}(1/x)$
16.  $y = (x+2)e^{1/x}$
17.  $y = 0,5(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1})$
18.  $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$
19.  $y = (x+2)^{2/3} - (x-2)^{2/3}$
20.  $y = (x+1)^{2/3} + (x-1)^{2/3}$

Постройте кривые, заданные следующими уравнениями

21.  $y^2 = 8x^2 - x^4$
22.  $y^2 = (x-1)(x-2)(x-3)$
23.  $y^2 = (x-1)(x+1)^{-1}$
24.  $y^2 = x^2(1-x)(1+x)^{-2}$
25.  $y^2 = x^4(x+1)$
26.  $x^2(y-2)^2 + 2xy - y^2 = 0$

### § 2. Исследование плоских кривых, заданных параметрически

#### Схема исследования кривой

Параметрические уравнения плоской кривой имеют вид

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in T \quad (1)$$

Исследование и построение такой кривой можно провести по следующей схеме.

1° Найти множество  $T$  — общую часть областей определения функций  $x(t)$ ,  $y(t)$  (если множество  $T$  не задано), — отметив, в частности, те значения параметра  $t_i$  (включая  $t_i = \pm\infty$ ), для которых хотя бы один из односторонних пределов  $\lim_{t \rightarrow t_i, \pm 0} x(t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_i, \pm 0} y(t)$  равен  $+\infty$  или  $-\infty$ .

2° Установить, обладает ли кривая симметрией, позволяющей сократить выкладки

3°. Найти нули функций  $x(t)$ ,  $y(t)$  и области знакопостоянства этих функций

4° Найти точки  $t_k$ , в которых хотя бы одна из производных  $x'(t)$ ,  $y'(t)$  равна нулю или разрывна. Заметим, что точки  $t_i$ , отмеченные в п 1°, и точки  $t_k$ , найденные в этом пункте, разбивают множество  $T$  на промежутки знакопостоянства производных  $x'(t)$ ,  $y'(t)$ . Поэтому на каждом таком промежутке  $(t_p, t_{p+1})$  функция  $x(t)$  строго монотонна, и, следовательно, система уравнений (1) на интервале  $(t_p, t_{p+1})$

задает параметрически функцию вида  $y = f(x)$  (см. § 1 из гл IV). Производные этой функции выражаются по формулам

$$f' = \frac{y(t)}{x(t)}, \quad f'' = \frac{\frac{d}{dt}(f')}{x(t)}.$$

Часть кривой, соответствующую изменению параметра  $t$  от  $t_p$  до  $t_{p+1}$ , будем называть *ветвью* кривой. Каждая ветвь кривой является графиком функции вида  $y = f(x)$ .

5° Найти точки  $t_j$ , в которых  $f'' = 0$ .

6°. Составить таблицу следующего вида:

$(t_p, t_{p+1})$			
$(x_p, x_{p+1})$			
$(y_p, y_{p+1})$			
Знак $f''$			

Здесь в первой строке записываются промежутки изменения параметра  $t$ , граничными точками которых  $t_p$  и  $t_{p+1}$  служат точки, найденные в пп. 1°, 4° и 5°. Во второй и третьей строках таблицы приводятся соответствующие промежутки изменения переменных  $x$  и  $y$ . В последней строке таблицы указывается знак  $f''$ , определяющий направление выпуклости графика соответствующей ветви кривой.

7° Пользуясь таблицей, построить ветви кривой, соответствующие промежуткам  $(t_p, t_{p+1})$ .

**Замечание 1** В п 1° схемы можно найти асимптоты кривой (если они имеются). Для этого надо иметь в виду следующее

- а) если при  $t \rightarrow t_p$  ( $t \rightarrow t_p + 0$  или  $t \rightarrow t_p - 0$ )  $x \rightarrow x_0$ , а  $y \rightarrow \infty$ , то  $x = x_0$  — вертикальная асимптота кривой,  
 б) если при  $t \rightarrow t_p$  ( $t \rightarrow t_p + 0$  или  $t \rightarrow t_p - 0$ )  $x \rightarrow \infty$ , а  $y \rightarrow y_0$ , то  $y = y_0$  — горизонтальная асимптота кривой,

в) если при  $t \rightarrow t_p$  ( $t \rightarrow t_p + 0$  или  $t \rightarrow t_p - 0$ )  $x \rightarrow \infty$  и  $y \rightarrow \infty$ , то возможна наклонная асимптота, нахождение которой надо провести в соответствии с теоремой 1

**Замечание 2** При изучении симметрии кривой (п 2° схемы) следует иметь в виду четыре случая, когда вместо всей области определения  $T$  достаточно рассмотреть лишь неотрицательную ее часть

а)  $\forall t \in T \quad x(t) = x(-t), \quad y(t) = -y(-t)$  (симметрия относительно оси  $Ox$ ).

б)  $\forall t \in T \quad x(t) = -x(-t), \quad y(t) = y(-t)$  (симметрия относительно оси  $Oy$ ),

в)  $\forall t \in T \quad x(t) = -x(-t), \quad y(t) = -y(-t)$  (симметрия относительно начала координат),

г)  $\forall t \in T \quad x(t) = x(-t), \quad y(t) = y(-t)$  (напложение)

**Замечание 3** Если  $t_p$  — точка, найденная в п 4° схемы, и если на интервале  $(t_{p-1}, t_{p+1})$   $x(t)$  сохраняет знак, то на этом интервале система уравнений (1) задает параметрически функцию вида  $y = f(x)$ , для которой точка  $x(t_p)$  является точкой возможного экстремума. Является ли  $x(t_p)$  точкой экстремума функции  $y = f(x)$ , можно определить, рассмотрев изменение  $y$  на интервалах  $(t_{p-1}, t_p)$  и  $(t_p, t_{p+1})$

**Замечание 4** В процессе исследования кривой можно обнаружить одну из характерных особых точек кривой, заданной параметрически, — точку возврата (см. пример 2 на с. 140).

### Контрольные вопросы и задания

1. Как вычисляются производные функций, заданной параметрически?
2. Кривая задана параметрически  $x = \sin^2 t$ ,  $y = \cos^2 t$ . Какой промежуток достаточно рассмотреть, чтобы при изменении параметра  $t$  на этом промежутке точка  $(x(t), y(t))$  оказалась в каждой точке кривой только один раз?
3. Как найти асимптоты кривой, заданной параметрически?
4. Как исследовать и использовать симметрию кривой, заданной параметрически?
5. Сформулируйте необходимое условие локального экстремума функции, заданной параметрически.
6. Приведите схему исследования и построения кривой, заданной параметрически.

### Примеры решения задач

1. Построить кривую, заданную параметрически.

$$x = \frac{t}{1-t^2}, \quad y = \frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}.$$

Δ 1°. Имеем

$$\begin{aligned} t &\in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty), \\ x &\in (0, +\infty) \cup (-\infty, +\infty) \cup (-\infty, 0), \\ y &\in (-\infty, -\infty) \cup (+\infty, -\infty) \cup (+\infty, +\infty). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $x = 0$  — вертикальная асимптота кривой, а при  $t \rightarrow -1$  и  $t \rightarrow 1$  возможны наклонные асимптоты. Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow 1 \pm 0} (1-2t^2) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y+x) = \lim_{t \rightarrow 1 \pm 0} 2t = 2$$

Аналогично находятся пределы при  $t \rightarrow -1$ :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y+x) = -2.$$

Итак, кривая имеет две асимптоты.  $y = -x + 2$  и  $y = -x - 2$ .

2°. Так как  $x(t) = -x(-t)$ ,  $y(t) = -y(-t)$ , то кривая обладает симметрией относительно точки  $O(0, 0)$ . Поэтому достаточно рассмотреть далее множество  $M = [0, 1] \cup (1, +\infty)$

3°. На множестве  $M$   $x(t) = 0$  при  $t = 0$ ,  $y(t) = 0$  при  $t = 1/\sqrt{2}$

4°.  $\dot{x}(t) = \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}$ ,  $\dot{y}(t) = \frac{2t^4 - 5t^2 + 1}{(1-t^2)^2}$ . На множестве  $M$   $x(t) > 0$ ,

а  $\dot{y}(t) = 0$  при  $t_1 = 0,5\sqrt{5-\sqrt{17}} \approx 0,47$  и  $t_2 = 0,5\sqrt{5+\sqrt{17}} \approx 1,51$ .

5°.  $f' = \frac{\dot{y}}{x} = \frac{2t^4 - 5t^2 + 1}{1+t^2}$ ,  $f'' = \frac{d}{dt} \left( \frac{f'}{x} \right) = \frac{-4t(1-t^2)^3(3+t^2)}{(1+t^2)^3}$ . Отсюда  $f'' \leq 0$  при  $t \in [0, 1)$ ,  $f'' > 0$  при  $t \in (1, \infty)$ .

6° Составим таблицу

$(t_p, t_{p+1})$	$(0, 0,47)$	$(0,47, 1)$	$(1, 1,51)$	$(1,51, +\infty)$
$(x_p, x_{p+1})$	$(0, 0,6)$	$(0,6, +\infty)$	$(-\infty, -0,7)$	$(-0,7, 0)$
$(y_p, y_{p+1})$	$(0, 0,3)$	$(0,3, -\infty)$	$(+\infty, 2,3)$	$(2,3, +\infty)$
Знак $f''$	+	+	-	-

7°. Строим часть кривой, соответствующую множеству  $M$  (рис. 12).

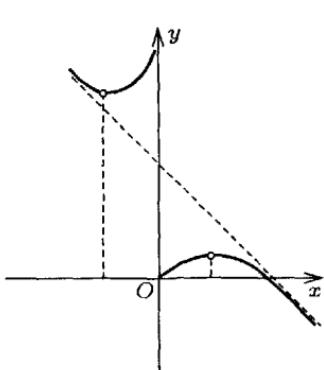


Рис 12

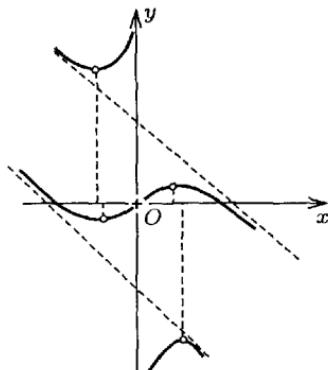


Рис 13

Далее, используя симметрию кривой, построим всю кривую (рис. 13). ▲

2. Построить кривую, заданную параметрически.

$$x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3. \quad (2)$$

△ 1°. Имеем

$$t \in (-\infty, +\infty),$$

$$x \in (-\infty, -\infty),$$

$$y \in (+\infty, -\infty).$$

Таким образом, при  $x \rightarrow -\infty$  ( $t \rightarrow \pm\infty$ ) возможны наклонные асимптоты. Однако  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{3t - t^3}{2t - t^2} = \infty$ , т. е. асимптот нет.

2°. Свойствами симметрии и периодичности кривая не обладает.

3°. Имеем  $x = 0$  при  $t = 0$  и  $t = 2$ ;  $y = 0$  при  $t = 0, t = -\sqrt{3}$  и  $t = \sqrt{3}$ .

4°. Находим  $x(t) = 2(1-t) = 0$  при  $t = 1$ ,  $y(t) = 3(1-t^2) = 0$  при  $t = -1$  и  $t = 1$ .

5° Так как  $f'' = \frac{3}{4(1-t)}$ , то  $f'' > 0$  при  $t < 1$ ,  $f'' < 0$  при  $t > 1$ .

6°. Составим таблицу

$(t_p, t_{p+1})$	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$(x_p, x_{p+1})$	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, -\infty)$
$(y_p, y_{p+1})$	$(+\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, -\infty)$
Знак $f''$	+	+	-

7°. Строим кривую.

Заметим, что если  $t$  рассматривать как время, а кривую, заданную системой уравнений (2), — как траекторию движения точки на плоскости  $(x, y)$ , то  $\{g, y\}$  есть вектор скорости движения этой точки. При  $t = 1$  в данном примере  $x(t) = y(t) = 0$ , т. е. скорость равна нулю, причем при переходе через  $t = -1$   $x(t)$  и  $y(t)$  меняют знак. Это означает, что при  $t \rightarrow 1 - 0$  точка, движущаяся по траектории, приближается к точке  $W(1, 2)$  (рис. 14), в момент  $t = 1$  останавливается в точке  $W$ , а далее движется в обратном направлении. Так как  $\lim_{t \rightarrow 1-0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow 1+0} \frac{y(t)}{x(t)}$ , то ветви траектории, соответствующие  $t \leq 1$  и  $t \geq 1$ , имеют при  $t = 1$ ,

т. е. в точке  $W(1, 2)$ , одну и ту же одностороннюю касательную. Точка  $W(1, 2)$  называется *точкой возврата* (такое название, очевидно, соответствует рассмотренной выше физической интерпретации). ▲

Замечание 1 Для кривой, заданной уравнением вида

$$F(g, y) = 0, \quad (3)$$

иногда удается получить параметрические уравнения. Обычно это делается так. Положим  $y = \alpha(t)x^n$ , где  $\alpha(t)$  и  $n$  — выбранные подходящим образом функция и число. Подставляя выражение для  $y$  в уравнение (3), получим  $F(x, \alpha(t)x^n) = 0$ . Пусть  $x = \varphi(t)$  — решение этого уравнения. Тогда

$$x = \varphi(t), \quad y = \alpha(t)\varphi^n(t) \equiv \psi(t)$$

— параметрические уравнения кривой. На практике выбор функции  $\alpha(t)$  определяется видом функции  $F(x, y)$ .

Рассмотрим кривую, заданную уравнением

$$x^4 + y^4 = 2xy \quad (4)$$

Этому уравнению могут удовлетворять координаты  $x, y$  только тех точек, которые лежат в I и III квадрантах или на осях координат, т. е. должно быть выполнено неравенство  $xy \geq 0$ . Для перехода к параметрическим уравнениям кривой положим  $y = x\sqrt[4]{\operatorname{tg} t}$ . Подставляя это выражение в уравнение (4), получим

$$x^4(1 + \operatorname{tg}^2 t) = 2x^2\sqrt{\operatorname{tg} t},$$

откуда  $x = 0$  и  $x = \sqrt[4]{4\operatorname{tg} t} \cos t$ . Первое решение  $x = 0$  содержится во втором при  $t = 0$ . Таким образом, параметрические уравнения кривой имеют вид

$$x = \sqrt[4]{4\operatorname{tg} t} \cos t, \quad y = \sqrt[4]{4(\operatorname{tg} t)^3} \cos t$$

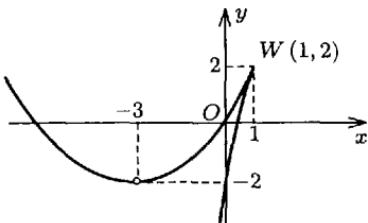


Рис. 14

Однако параметр  $t$  можно ввести и иначе, полагая, например,  $y = xt$ . Тогда приходим к следующим параметрическим уравнениям кривой:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{2t}{1+t^4}}, & y &= \sqrt{\frac{2t^3}{1+t^4}}; \\ x &= -\sqrt{\frac{2t}{1+t^4}}, & y &= -\sqrt{\frac{2t^3}{1+t^4}}. \end{aligned}$$

Дальнейшее исследование кривой проведите самостоятельно для обоих случаев введения параметра  $t$ .

**Замечание 2.** Кривую, заданную в полярных координатах, можно исследовать, используя схему, изложенную в этом параграфе. Действительно, пусть в полярной системе координат  $(\varphi, \rho)$  кривая задана уравнением  $\rho = f(\varphi)$ . Тогда, выражая декартовы координаты через полярные:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$$

получим параметрические уравнения кривой ( $\varphi$  — параметр)

$$x = f(\varphi) \cos \varphi, \quad y = f(\varphi) \sin \varphi.$$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Постройте кривые, заданные следующими уравнениями.

- |                                                                |                                                              |
|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| 27. $x = \frac{1}{4}(t+1)^2, \quad y = \frac{1}{4}(t-1)^2$     | 28. $x = \frac{t^2}{1-t^2}, \quad y = \frac{1}{1+t^2}$       |
| 29. $x = \frac{t^2}{t-1}, \quad y = \frac{t}{t^2-1}$           | 30. $x = -5t^2 + 2t^5, \quad y = -3t^2 + 2t^3$               |
| 31. $x = \frac{t^2+1}{4(1-t)}, \quad y = \frac{t}{t+1}$        | 32. $x = \frac{(t+2)^2}{t+1}, \quad y = \frac{(t-2)^2}{t-1}$ |
| 33. $x = \frac{t-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{t^2-t^3}{1+t^2}$ |                                                              |

Переходя к параметрическим уравнениям, постройте кривые, заданные следующими уравнениями

34.  $x^3 + y^3 = 3axy$ , где  $a > 0$  (лист Декарта).  
 35.  $(x-a)^2(x^2+y^2) = b^2x^2$ , где  $a > 0$ ,  $b > 0$  (конхоида Никомеда)  
 Рассмотрите случаи: а)  $a > b$ ; б)  $a = b$ ; в)  $a < b$ . установите в каждом из них, каков характер особой точки кривой  $O(0,0)$
36.  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ , где  $a > 0$  (астроида).  
 37.  $x^6 + 2x^3y = y^3$ . ★ Положите  $y = x^2t$   
 38.  $4y^2 = 4x^2y + x^5$ . ★ Положите  $y = x^2t$       39.  $x^4 + 2y^3 = 4x^2y$ .  
 40.  $x^3 - 2x^2y - y^2 = 0$ .      41.  $x^2y^2 + y = 1$ . ★ Положите  $y = t/x$ .  
 42.  $x^3 + y^3 = 3x^2$ .      43.  $y^5 + x^4 = xy^2$ .  
 44.  $x^4 - y^4 + xy = 0$       45.  $x^5 + y^5 = xy^2$ .

Постройте кривые, заданные в полярной системе координат следующими уравнениями.

46.  $\rho = 5/\varphi$  ( $0 < \varphi < +\infty$ ).      47.  $\rho^2 = 2a^2 \cos^2 \varphi$   
 48.  $\rho = a \cos \varphi + b$  ( $b \geq a > 0$ ).      49.  $\rho = a \sin 3\varphi$  ( $a > 0$ )      50.  $\rho = 2/\sqrt{\cos 3\varphi}$ .

# ГЛАВА VIII

## ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### § 1. Интегрируемость функции (по Риману) и определенный интеграл

#### Основные понятия и теоремы

**1. Интегральные суммы и определенный интеграл.** Пусть функция  $f(x)$  определена на сегменте  $[a, b]$  (где  $a < b$ ). Произвольное разбиение сегмента  $[a, b]$  точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  на  $n$  частичных сегментов  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) будем обозначать символом  $T[a, b]$  или просто  $T$ . Положим  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Выберем на каждом сегменте  $[x_{i-1}, x_i]$  произвольную точку  $\xi_i$  и составим сумму:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = I(x_i, \xi_i).$$

Число  $I(x_i, \xi_i)$  называется *интегральной суммой* функции  $f(x)$ , соответствующей данному разбиению  $T[a, b]$  и данному выбору промежуточных точек  $\xi_i$  на сегментах  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Введем обозначение  $\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ .

**Определение.** Число  $I$  называется *пределом интегральных сумм*  $I(x_i, \xi_i)$  при  $\Delta \rightarrow 0$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$  такое, что для всякого разбиения  $T[a, b]$ , у которого  $\Delta < \delta$ , выполняется неравенство  $|I(x_i, \xi_i) - I| < \varepsilon$  при любом выборе промежуточных точек  $\xi_i$  на  $[x_{i-1}, x_i]$ .

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется *интегрируемой (по Риману)* на сегменте  $[a, b]$ , если существует  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} I(x_i, \xi_i) = I$ .

При этом число  $I$  называется *определенным интегралом* от функции  $f(x)$  по сегменту  $[a, b]$  и обозначается так:

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

**2. Суммы Дарбу.** Пусть  $f(x)$  определена и ограничена на  $[a, b]$ . Для произвольного разбиения  $T[a, b]$  введем обозначения  $m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$ ,  $M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$  и составим суммы:

$$s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad S = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

Числа  $s$  и  $S$  называются *нижней* и *верхней суммами (суммами Дарбу)*, соответствующими данному разбиению  $T[a, b]$ .

Очевидно, что для фиксированного разбиения  $T[a, b]$  и любого выбора промежуточных точек на этом разбиении  $s \leq I(x_i, \xi_i) \leq S$ .

Приведем свойства сумм Дарбу.

1°. Для любого фиксированного разбиения

$$s = \inf_{\substack{\text{по всем} \\ \text{наборам} \\ \text{точек } \xi}} \{I(x_i, \xi_i)\}, \quad S = \sup_{\substack{\text{по всем} \\ \text{наборам} \\ \text{точек } \xi}} \{I(x_i, \xi_i)\}.$$

2°. Если разбиение  $T_2$  получено из разбиения  $T_1$  добавлением нескольких новых точек (т. е. получено измельчением  $T_1$ ), то нижняя сумма  $s_2$  разбиения  $T_2$  не меньше нижней суммы  $s_1$  разбиения  $T_1$ , а верхняя сумма  $S_2$  разбиения  $T_2$  не больше верхней суммы  $S_1$  разбиения  $T_1$ :  $s_1 \leq s_2, S_2 \leq S_1$ .

3°. Нижняя сумма произвольного разбиения не превосходит верхней суммы любого другого разбиения.

4°. Пусть  $\{s\}$  и  $\{S\}$  — множества всевозможных нижних и верхних сумм для любых разбиений  $[a, b]$ . Числа

$$\bar{I} = \inf_{\substack{\text{по всем} \\ \text{разбиениям}}} \{S\}, \quad \underline{I} = \sup_{\substack{\text{по всем} \\ \text{разбиениям}}} \{s\}$$

называются соответственно *верхним* и *нижним интегралами Дарбу*.

Нижний интеграл Дарбу не превосходит верхнего:  $\underline{I} \leq \bar{I}$ .

5°. *Лемма Дарбу*:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} S = \bar{I}, \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} s = \underline{I}.$$

### 3. Необходимые и достаточные условия интегрируемости.

Теорема 1. Для того чтобы ограниченная на сегменте  $[a, b]$  функция  $f(x)$  была интегрируемой на этом сегменте, необходимо и достаточно, чтобы  $\underline{I} = \bar{I}$ .

Теорема 2. Для того чтобы ограниченная на сегменте  $[a, b]$  функция была интегрируемой на этом сегменте, необходимо и достаточно, чтобы  $\forall \varepsilon > 0$  нашлось такое разбиение  $T[a, b]$  (хотя бы одно), для которого

$$S - s < \varepsilon. \tag{1}$$

Напомним, что число  $\omega_i = M_i - m_i$  называется *колебанием функции* на сегменте  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Условие (1) можно записать в виде

$$S - s = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

#### 4. Некоторые классы интегрируемых функций.

**Теорема 3.** *Непрерывная на сегменте  $[a, b]$  функция  $f(x)$  интегрируема на этом сегменте.*

**Следствие.** *Всякая элементарная функция интегрируема на любом сегменте, целиком лежащем в области определения этой функции (так как она непрерывна на этом сегменте).*

**Теорема 4.** *Пусть  $f(x)$  ограничена на сегменте  $[a, b]$ . Если  $\forall \varepsilon > 0$  существует конечное число интервалов, покрывающих все точки разрыва  $f(x)$  и имеющих сумму длин, меньшую  $\varepsilon$ , то  $f(x)$  интегрируема на сегменте  $[a, b]$ .*

**Следствие.** *Кусочно непрерывная функция (т. е. имеющая на сегменте  $[a, b]$  конечное число точек разрыва I рода) интегрируема на этом сегменте.*

**Замечание.** Если выполнены условия теоремы 4, то значение интеграла  $\int_a^b f(x) dx$  не зависит от значений  $f(x)$  в точках разрыва. Поэтому часто ставят и решают задачу вычисления интеграла от функции, которая не определена либо в конечном числе точек сегмента  $[a, b]$ , либо на множестве точек, которое можно покрыть конечным числом интервалов сколь угодно малой длины. При этом считают, что функция  $f(x)$  доопределена в этих точках произвольно, но остается, конечно, ограниченной на сегменте  $[a, b]$  и, следовательно, интегрируемой.

Например, строго говоря, интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \quad (2)$$

не существует, так как в точке  $x = 0$  функция  $\frac{\sin x}{x}$  не определена. Однако интеграл  $\int_0^1 f(x) dx$ , где

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ C & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

( $C$  — произвольное число), существует и не зависит от выбора  $C$ . Поэтому считают, что интеграл (2) также существует и равен  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**Теорема 5.** *Монотонная на сегменте  $[a, b]$  функция  $f(x)$  интегрируема на этом сегменте.*

#### Контрольные вопросы и задания

- Что такое разбиение сегмента  $[a, b]$ ?
- Что такое интегральная сумма функции  $f(x)$  на сегменте  $[a, b]$ ?
- Дайте определение предела интегральных сумм при измельчении разбиений ( $\Delta \rightarrow 0$ ) сегмента  $[a, b]$ .

4. Что такое определенный интеграл?
5. Какая функция называется интегрируемой?
6. Докажите, что неограниченная функция неинтегрируема.
7. Интегрируема ли функция  $f(x) = 1/x$ : на сегменте  $[1, 2]$ , на сегменте  $[-1, 1]$ ?
8. Интегрируема ли функция  $f(x) = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$ : на сегменте  $[\pi/6, \pi/4]$ ; на сегменте  $[-1, 1]$ ?
9. Интегрируема ли функция  $f(x) = e^{-1/x}$ : на сегменте  $[-3, -2]$ ; на сегменте  $[-1, 0]$ ; на сегменте  $[-1, 1]$ ?
10. Всякая ли ограниченная функция интегрируема? Обоснуйте ответ примерами
11. Что такое нижняя и верхняя суммы (суммы Дарбу)?
12. Перечислите свойства сумм Дарбу.
13. Сформулируйте необходимые и достаточные условия интегрируемости (два варианта).
14. Назовите известные вам классы интегрируемых функций. Приведите примеры функций из этих классов
15. Придумайте пример монотонной на сегменте  $[a, b]$  функции, имеющей бесконечно много точек разрыва. Интегрируема ли такая функция на  $[a, b]$ ?

### Примеры решения задач

**1.** Постоянная функция  $f(x) = C$  интегрируема на  $[a, b]$ , так как для любых разбиений и любого выбора точек  $\xi_i$  интегральные суммы имеют одно и то же значение

$$I(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta \zeta_i = C \sum_{i=1}^n \Delta x_i = C(b - a).$$

Отсюда  $\int_a^b C dx = \lim_{\Delta \rightarrow 0} I(x_i, \xi_i) = C(b - a)$ .

**2.** Доказать, что функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \\ 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \end{cases}$$

не интегрируема на любом сегменте  $[a, b]$ .

В самом деле, на любом сколь угодно малом сегменте  $[x_{i-1}, x_i]$  найдутся как рациональная, так и иррациональная точка. Если на всех сегментах выбрать рациональные  $\xi_i$ , то  $I(x_i, \xi_i) = b - a$ ; если же все  $\xi_i$  иррациональны, то  $I(x_i, \xi_i) = 0$ . Чередуя такие выборы при  $\Delta \rightarrow 0$ , получаем, что предел  $I$  не существует. Значит, функция Дирихле не интегрируема. ▲

**3.** Проверить, что для функции  $f(x) = 1 + x$  на сегменте  $[-1, 4]$  выполнено условие (1) теоремы 2, и вычислить  $I = \int_{-1}^4 (1 + x) dx$  как

предел интегральных сумм.

Δ Согласно теореме 2 для произвольного  $\varepsilon > 0$  нужно указать такое разбиение сегмента  $[-1, 4]$ , при котором  $S - s < \varepsilon$ .

Разобьем сегмент  $[-1, 4]$  на  $n$  равных частей. На каждом сегменте  $[x_{i-1}, x_i] = \left[-1 + \frac{5(i-1)}{n}, -1 + \frac{5i}{n}\right]$  непрерывная функция  $1+x$  достигает точной нижней грани на левом конце сегмента, а точной верхней — на правом. Поэтому

$$\begin{aligned} s &= \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f\left(-1 + \frac{5(i-1)}{n}\right) \cdot \frac{5}{n} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{5}{n} (i-1) \frac{5}{n} = \frac{25}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1), \end{aligned}$$

$$S = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f\left(-1 + \frac{5i}{n}\right) \cdot \frac{5}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{5}{n} \cdot i \cdot \frac{5}{n} = \frac{25}{n^2} \sum_{i=1}^n i.$$

Отсюда

$$S - s = \frac{25}{n^2} \left( \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n (i-1) \right) = \frac{25}{n^2} n = \frac{25}{n} < \varepsilon,$$

если  $n > 25/\varepsilon$ , т. е. при таком числе  $n$  точек разбиения сегмента  $[-1, 4]$  выполнено неравенство (1). Значит, по теореме 2 интеграл

$$I = \int_{-1}^4 (1+x) dx$$

существует.

Чтобы вычислить его как предел интегральных сумм, можно рассмотреть любую последовательность интегральных сумм, у которой  $\Delta \rightarrow 0$ , поскольку из существования интеграла следует, что предел любой последовательности интегральных сумм при измельчении разбиения существует и равен  $I$ .

Возьмем, например, последовательность интегральных сумм, соответствующую разбиениям сегмента  $[-1, 4]$  на  $n$  равных частей ( $n = 1, 2, \dots$ ) и выбору в качестве точек  $\xi_i$  правых концов частичных сегментов. В этом случае для возрастающей функции  $f(x) = 1+x$  интегральная сумма равна верхней сумме  $S = \sum_{i=1}^n \frac{25}{n^2} i$ , откуда получаем

$$I = \int_{-1}^4 (1+x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{25}{n^2} i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{25n(n+1)}{2n^2} = \frac{25}{2}.$$

Итак,  $\int_{-1}^4 (1+x) dx = 25/2$ . ▲

4. Доказать, что функция Римана

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \\ 1/n, & \text{если } x = m/n, \end{cases}$$

где  $m$  и  $n$  ( $n \geq 1$ ) — взаимно простые целые числа, интегрируема на любом сегменте  $[a, b]$ .

Δ Снова воспользуемся теоремой 2. Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$ . Тогда функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет неравенствам

$$\frac{\varepsilon}{2(b-a)} < \varphi(x) < 1$$

только в некотором конечном числе  $N$  точек.

Это вытекает из следующих соображений. Все рациональные точки сегмента  $[a, b]$ , т. е. точки вида  $m/n$ , можно занумеровать в таком порядке: сначала точки вида  $m/1$ , затем  $m/2$ , затем  $m/3$  и т. д. Соответствующие значения функции  $\varphi(x)$  в этих точках равны  $1/1, 1/2, 1/3, \dots$ , т. е. уменьшаются с переходом к каждой следующей группе точек, причем точек каждого вида имеется конечное число. Таким образом, в число указанных  $N$  точек попадут такие, для которых  $\frac{1}{n} > \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ , откуда  $n < \frac{2(b-a)}{\varepsilon}$ . Ясно, что таких точек конечное число (пусть оно равно  $N$ ).

Покроем эти  $N$  точек конечной системой попарно пересекающихся сегментов с общей суммой длин, меньшей  $\varepsilon/2$ . Длины этих сегментов обозначим  $\Delta x'_i$ . Получилось некоторое разбиение  $[a, b]$ . На сегментах с длинами  $\Delta x'_i$  колебания  $\omega'_i$  функции  $\varphi(x)$  не больше 1, поскольку  $\forall x \in [a, b] \quad 0 \leq \varphi(x) \leq 1$ . Имеется также некоторое конечное число остальных сегментов (обозначим их длины  $\Delta x''_i$ ). Колебания  $\omega''_i$  функции  $\varphi(x)$  на этих сегментах не превышают  $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ . Поэтому для полученного разбиения справедливы оценки

$$\begin{aligned} S - s = \sum \omega_i \Delta x_i &= \sum \omega'_i \Delta x'_i + \sum \omega''_i \Delta x''_i < 1 \cdot \sum \Delta x'_i + \\ &+ \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum \Delta x''_i < 1 \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, по заданному  $\varepsilon > 0$  нашлось разбиение сегмента  $[a, b]$ , для которого  $S - s < \varepsilon$ ; следовательно, по теореме 2 функция Римана  $\varphi(x)$  интегрируема на любом сегменте  $[a, b]$ . ▲

5. Вычислить  $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)}$ .

Δ Этот интеграл принадлежит к типу интегралов, рассмотренных в замечании к теореме 4, поскольку

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x (1 + \operatorname{tg}^2 x)} = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x < \pi/2, \quad \pi/2 < x \leq \pi, \\ \text{не определена} & \text{при } x = \pi/2. \end{cases}$$

Доопределив эту функцию в точке  $\pi/2$ , например, по непрерывности, т. е. полагая  $f(\pi/2) = 1$ , мы получим  $f(x) \equiv 1 \quad \forall x \in [0, \pi]$ , и, следовательно, искомый интеграл равен  $\pi$ . ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

- Для данных функций на указанных сегментах найдите верхнюю  $S$  и нижнюю  $s$  суммы Дарбу при разбиении сегментов на  $n$  равных частей:  
а)  $f(x) = x^3$ ,  $2 \leq x \leq 3$ ; б)  $f(x) = 2^x$ ,  $0 \leq x \leq 10$ .
- Вычислите определенные интегралы как пределы интегральных сумм:  
а)  $\int_{-1}^2 x^2 dx$  (удобно разбить сегмент  $[-1, 2]$  на равные части);  
б)  $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$  (удобно выбрать  $\xi_i = \sqrt{x_{i-1} \cdot x_i}$ );  
в)  $\int_2^3 x^m dx$  (удобно выбрать точки деления  $x$ , так, чтобы они образовали геометрическую прогрессию).
- Докажите, что функция  $f(x) = 1/x - [1/x]$  при  $x \neq 0$  и  $f(0) = 0$  интегрируема на сегменте  $[0, 1]$ .
- Докажите, что функция  $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin(\pi/x))$  интегрируема на сегменте  $[0, 1]$ .

## § 2. Свойства определенного интеграла

### Основные понятия и теоремы

#### 1. Свойства определенного интеграла.

1°. По определению  $\int_a^a f(x) dx = 0$ .

2°. По определению  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ .

3°. *Линейность интеграла.* Если  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $[a, b]$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  — любые вещественные числа, то функция  $\alpha f(x) + \beta g(x)$  также интегрируема на  $[a, b]$ , причем

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

4°. Если  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , то функция  $|f(x)|$  также интегрируема на  $[a, b]$ , причем

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b).$$

5° Если  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $[a, b]$ , то функция  $f(x)g(x)$  также интегрируема на  $[a, b]$

6° Если  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , то она интегрируема также на любом отрезке  $[c, d] \subset [a, b]$

7° *Аддитивность интеграла* Если  $f(x)$  интегрируема на  $[a, c]$  и  $[c, b]$ , то она интегрируема также на  $[a, b]$ , причем

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

При этом точка  $c$  может быть произвольно расположена относительно  $a$  и  $b$

В дальнейших свойствах 8°–10° полагаем  $a < b$

8° Если  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$  и  $f(x) \geq 0$ , то  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

9° Если  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $[a, b]$  и  $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ , то  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

10° Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ ,  $f(x) \geq 0$ ,  $f(x) \neq 0$  на  $[a, b]$ , то  $\exists K > 0$  такое, что  $\int_a^b f(x) dx \geq K$

## 2. Формулы среднего значения.

**Теорема 6** Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $[a, b]$ ,  $g(x) \geq 0$  ( $g(x) \leq 0$ )  $\forall x \in [a, b]$ ,  $M = \sup_{[a, b]} f(x)$ ,  $m = \inf_{[a, b]} f(x)$

Тогда существует число  $\mu \in [m, M]$  такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx \tag{1}$$

**Следствие 1** Если в формуле (1) положить  $g(x) = 1$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b - a), \quad \mu \in [m, M] \tag{2}$$

Число  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  называется *средним значением* функции  $f(x)$  на сегменте  $[a, b]$

**Следствие 2** Если выполнены условия теоремы 6 и функция  $f(x)$  непрерывна, то  $\exists \xi \in [a, b]$  такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx \tag{3}$$

**Следствие 3** Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то  $\exists \xi \in [a, b]$  такое, что

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a) \quad (4)$$

### Контрольные вопросы и задания

- 1 Перечислите свойства определенного интеграла
- 2 Следует ли из интегрируемости суммы интегрируемость слагаемых? Ответ обоснуйте примерами
- 3 Рассмотрите аналогичные вопросы для разности, произведения и частного двух функций
- 4 Интегрируема ли сумма двух функций, если одно слагаемое интегрируемо, а другое нет?
- 5 Рассмотрите аналогичные вопросы для разности, произведения и частного двух функций
- 6 Интегрируема ли сумма двух неинтегрируемых функций? Ответ обоснуйте примерами
- 7 Рассмотрите аналогичные вопросы для разности, произведения и частного двух неинтегрируемых функций
- 8 Известно, что  $|f(x)|$  — интегрируемая функция. Что можно сказать об интегрируемости  $f(x)$ ? Приведите примеры
- 9 Пусть  $f(x)$  интегрируема на  $[a, c]$  и не интегрируема на  $[c, b]$ . Что можно сказать о ее интегрируемости на  $[a, b]$ ?
- 10 Известно, что  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ . Следует ли отсюда, что  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ ? Приведите примеры
- 11 Известно, что  $\int_a^b f(x) dx > \int_a^b g(x) dx$ . Следует ли отсюда, что  $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ ? Приведите примеры
- 12 Приведите несколько вариантов формулы среднего значения. При каких условиях они справедливы?

### Примеры решения задач

1. Доказать, что сумма, произведение и частное двух неинтегрируемых функций могут быть интегрируемы

Δ Пусть  $f(x) = 2 + D(x)$ ,  $g(x) = 2 + D(x)$ , где

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \\ 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число} \end{cases}$$

(т. е.  $D(x)$  — функция Дирихле)

Напомним, что функция  $D(x)$  неинтегрируема (см. пример 2 из § 1). Функция  $f(x) = 2 + D(x)$  также неинтегрируема. В самом деле,

если допустить, что  $f(x)$  интегрируема, то разность двух интегрируемых функций  $f(x) - 2 = D(x)$  согласно свойству 3° должна быть интегрируемой, но это противоречит тому, что  $D(x)$  неинтегрируема. Так как  $g(x) = f(x)$ , то  $g(x)$  неинтегрируема. Рассмотрим функцию

$$h(x) = \frac{1}{g(x)} = \begin{cases} 1/2, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \\ 1/3, & \text{если } x \text{ — рациональное число} \end{cases}$$

Эта функция также неинтегрируема. Доказательство аналогично доказательству неинтегрируемости функции Дирихле.

Составим сумму, произведение и частное неинтегрируемых функций

$$\begin{aligned} F_1(x) &= f(x) + (-g(x)) \equiv 0, & F_2(x) &= f(x)h(x) \equiv 1, \\ F_3(x) &= f(x)/g(x) \equiv 1 \end{aligned}$$

Функции  $F_1, F_2, F_3$  как постоянные интегрируемы на любом сегменте  $[a, b]$ . Таким образом, из интегрируемости суммы или произведения не следует интегрируемость слагаемых или сомножителей. ▲

**2.** Доказать, что произведение интегрируемой функции  $f(x)$  на неинтегрируемую функцию  $g(x)$  может быть а) интегрируемой функцией, б) неинтегрируемой функцией.

Δ а) Рассмотрим, например, интегрируемую функцию  $f(x) \equiv 0$  и неинтегрируемую функцию Дирихле  $D(x)$  на  $[a, b]$ . Так как  $f(x)D(x) \equiv 0$ , то  $f(x)D(x)$  — интегрируемая функция на  $[a, b]$ .

б) Пусть  $f(x) \equiv 2, g(x) = D(x)$  на  $[a, b]$ . Тогда  $f(x)g(x) = 2D(x)$  — неинтегрируемая на  $[a, b]$  функция. ▲

**3.** Найти среднее значение функции на заданном сегменте  
а)  $f(x) = \cos x$  на  $[0, 3\pi/2]$     б)  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  на  $[-1, 2]$

Δ Находим средние значения  $\mu$ , пользуясь формулой (2)

а)  $\mu = \frac{2}{3\pi} \int_0^{3\pi/2} \cos x dx = -\frac{2}{3\pi}$  Отметим, что непрерывная функция

$\cos x$  принимает на сегменте  $[0, 3\pi/2]$  значение  $\mu = -2/(3\pi)$ , а именно  $\cos \xi = -2/(3\pi)$ , в точке  $\xi = \arccos(-2/(3\pi)) \in [0, 3\pi/2]$

б)  $\mu = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 \operatorname{sgn} x dx = \frac{1}{3}$  В данном случае разрывная функция  $\operatorname{sgn} x$

не принимает на сегменте  $[-1, 3]$  значение  $\mu = 1/3$ . ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

5. Докажите, что сумма интегрируемой и неинтегрируемой функций есть функция неинтегрируемая
6. Интегрируемы ли на сегменте  $[0, 1]$  функции
  - а)  $f_1(x) = x$ ,
  - б)  $g_1(x) = 1/x$ ,
  - в)  $f_1(x) + g_1(x)$ ,
  - г)  $f_1(x)g_1(x)$ ,
  - д)  $f_2(x) = \sqrt{x}$ ,
  - е)  $f_2(x)g_1(x)$ ,

7. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -2 \leq x \leq 0, \\ D(x) & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

где  $D(x)$  — функция Дирихле. Интегрируема ли функция  $f(x)$  на сегментах  $[-2, 2]$ ,  $[-2, -1]$ ,  $[-1, 1]$ ,  $[1, 2]$ ?

8. Пусть существует  $\int_a^b |f(x)| dx$ . Следует ли отсюда интегрируемость функции  $f(x)$  на сегменте  $[a, b]$ ? Рассмотрите пример

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ -1, & \text{если } x \text{ — иррациональное число} \end{cases}$$

9. Пусть  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = 0,5 \sin x$ , и пусть а)  $0 \leq x \leq \pi$ , б)  $0 \leq x \leq 3\pi/2$ . В каком из этих случаев выполнены условия свойства  $9^\circ$ ?

10. Найдите среднее значение функции на указанных сегментах

а)  $f(x) = \sin x$  на  $[0, \pi]$ ,  $[0, 2\pi]$ ,  $[\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi]$ ,  $[\varphi_0, \varphi_0 + \pi]$ ,

б)  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  на  $[-2, -1]$ ,  $[-2, 1]$ ,  $[-1, 3]$ ,  $[-2, 2]$ ,  $[1, 2]$

Является ли среднее значение функции на каждом сегменте одним из значений этой функции на этом сегменте? Объясните почему в одних случаях ответ положительный, а в других — отрицательный

11. Найдите среднее значение функции на указанных сегментах

а)  $f(x) = \sqrt{x}$  на  $[0, 1]$ ,  $[0, 10]$ ,  $[0, 100]$ ,

б)  $f(x) = 10 + 2 \sin x + 3 \cos x$  на  $[-\pi, \pi]$ ,

в)  $f(x) = \sin x \sin(x + \varphi)$  на  $[0, 2\pi]$

12. Найдите среднее значение скорости свободно падающего с высоты  $h$  тела, начальная скорость которого равна  $v_0$

13. Сила переменного тока меняется по закону

$$i = i_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right),$$

где  $i_0$  — амплитуда,  $t$  — время,  $T$  — период,  $\varphi$  — начальная фаза

Найдите среднее значение квадрата силы тока

а) на промежутке времени  $[0, T]$ ,

б) на промежутке  $[0, T/2]$  (период функции  $i^2(t)$ ),

в) на произвольном промежутке  $[0, t_0]$  и предел этого среднего при  $t_0 \rightarrow \infty$

### § 3. Формула Ньютона–Лейбница

#### Основные понятия и теоремы

**1. Первообразная непрерывной и кусочно непрерывной функции.** Пусть функция  $f(x)$  интегрируема на сегменте  $[a, b]$ . Функция

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b)$$

называется *интегралом с переменным верхним пределом*

**Теорема 7.** Непрерывная на сегменте  $[a, b]$  функция  $f(x)$  имеет первообразную на этом сегменте. Одной из первообразных является функция

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (1)$$

**Замечание.** Интеграл с переменным верхним пределом определен для любой интегрируемой на  $[a, b]$  функции  $f(x)$ . Однако для того чтобы функция  $F(x)$  вида (1) оказалась первообразной для  $f(x)$ , существенно, чтобы функция  $f(x)$  была непрерывна.

Приведем пример, показывающий, что интегрируемая функция может не иметь первообразной. Пусть

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad x \in [-1, 1]$$

Эта функция интегрируема на сегменте  $[-1, 1]$ , поскольку является кусочно непрерывной, но, как уже отмечалось в гл V, не имеет первообразной. В самом деле, любая функция вида

$$f(x) = \begin{cases} -x + C_1 & \text{при } x < 0, \\ x + C_2 & \text{при } x \geq 0, \end{cases}$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные числа, имеет производную, равную  $\operatorname{sgn} x$ , при всех  $x \neq 0$ . Но даже “самая хорошая” из этих функций — непрерывная функция  $F(x) = |x| + C$  (если  $C_1 = C_2 = C$ ) — не имеет производной при  $x = 0$ . Поэтому функция  $\operatorname{sgn} x$  (и вообще всякая кусочно непрерывная функция) не имеет первообразной на любом промежутке, содержащем точку разрыва.

Дадим теперь расширенное определение первообразной, пригодное и для кусочно непрерывных функций.

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется *первообразной* функции  $f(x)$  на сегменте  $[a, b]$ , если

- 1°)  $F(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ ,
- 2°)  $F'(x) = f(x)$  в точках непрерывности  $f(x)$ .

**Замечание.** Непрерывная на  $[a, b]$  функция  $f(x)$  является частным случаем кусочно непрерывной (“кусок ее непрерывности” совпадает со всем сегментом  $[a, b]$ ). Поэтому для непрерывной функции расширенное определение первообразной совпадает со старым, так как  $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$ , а непрерывность  $F(x)$  следует из ее дифференцируемости.

Приведем пример функции, имеющей первообразную в “новом” смысле и не имеющей в “старом”. Функция  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  на  $[-1, 1]$  в “старом” смысле не имела первообразной. В “новом” смысле ее первообразной является функция  $F(x) = |x|$ , поскольку она непрерывна на  $[-1, 1]$  и  $F'(x) = f(x)$  для  $x \neq 0$ , т. е. всюду, кроме точки разрыва,  $x = 0$ .

Ценность расширенного определения первообразной ясна из следующего результата, сохраняющего для кусочно непрерывных функций теорему 7 с “новым” определением первообразной.

**Теорема 8** Кусочно непрерывная на сегменте  $[a, b]$  функция  $f(x)$  имеет первообразную на этом сегменте в смысле расширенного определения Одной из первообразных является функция  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

## 2. Формула Ньютона–Лейбница.

**Теорема 9** Для кусочно непрерывных функций справедлива формула Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

где  $F(x)$  — первообразная функции  $f(x)$  на  $[a, b]$  в смысле расширенного определения

$$\text{Например, } \int_1^2 \operatorname{sgn} x dx = |x| \Big|_{-1}^2 = 2 - 1 = 1$$

## 3. Метод замены переменной.

**Теорема 10** Пусть.

- 1)  $f(x)$  определена и непрерывна на  $[a, b]$ ,
- 2)  $x = g(t)$  определена и непрерывна вместе с производной на  $[\alpha, \beta]$ , где  $g(\alpha) = a$ ,  $g(\beta) = b$  и  $a \leq g(t) \leq b$

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t) dt$$

## 4. Метод интегрирования по частям.

**Теорема 11** Если  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют непрерывные производные на  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

## Контрольные вопросы и задания

- 1 Что такое интеграл с переменным верхним пределом? Для каких подынтегральных функций он является первообразной?
- 2 Дайте расширенное определение первообразной, пригодное для кусочно непрерывных функций
- 3 При каких условиях справедлива формула Ньютона–Лейбница?
- 4 Известно, что функция  $f(x)$  имеет первообразную на  $[a, b]$ . Интегрируема ли  $f(x)$  на  $[a, b]$ ? Рассмотрите пример  $f(x) = F'(x)$ , где

$$F(x) = \begin{cases} x^{3/2} \sin(1/x) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases} \quad x \in [0, 1]$$

- 5 Перечислите условия, при выполнении которых справедливы а) формула замены переменной, б) формула интегрирования по частям

6. С помощью каких подстановок вычисляются интегралы, содержащие:  
а) дробно-линейные иррациональности; б) квадратичные иррациональности?
7. Для вычисления каких типов интегралов удобны тригонометрические подстановки? Приведите примеры.
8. Для вычисления каких типов интегралов удобен метод интегрирования по частям? Приведите примеры.

### Примеры решения задач

**1.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos(t^2) dt}{x}$ .

△ Данный предел представляет собой неопределенность вида  $0/0$ .

Интеграл с переменным верхним пределом  $\int_0^x \cos(t^2) dt$  есть первообразная непрерывной функции  $\cos x^2$ , т. е.  $\left( \int_0^x \cos(t^2) dt \right)' = \cos(x^2)$ .

Поэтому, применяя правило Лопитала, получим

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos(t^2) dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2)}{1} = 1.$$

Отметим, что первообразная для  $\cos(x^2)$  не является элементарной функцией, т. е.  $\int_0^x \cos(t^2) dt$  не выражается через элементарные функции. Это, однако, не помешало вычислению искомого предела. ▲

**2.** Найти первообразную кусочно непрерывной функции

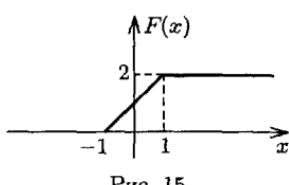


Рис. 15

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < 1, \\ 0 & \text{при } |x| \geq 1; \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}.$$

△ Одной из первообразных является интеграл с переменным верхним пределом, причем в качестве нижнего предела интегрирования можно взять любое число, например  $x = -2$ . Итак,

$$F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1, \\ x + 1 & \text{при } -1 \leq x \leq 1, \\ 2 & \text{при } x \geq 1 \end{cases}$$

(рис. 15). ▲

**3.** Вычислить  $I = \int_0^\pi \frac{\cos x dx}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$ .

△ I способ. Подынтегральная функция  $f(x)$  не определена в точке

$x = \pi/2$ . Разобьем сегмент  $[0, \pi]$  на два:  $[0, \pi/2]$  и  $[\pi/2, \pi]$ . Полагая на первом сегменте  $f(\pi/2) = 1$ , получим интеграл от непрерывной функции  $f \equiv 1$ :

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

На втором сегменте положим  $f(\pi/2) = -1$  и снова получим интеграл от непрерывной функции  $f \equiv -1$ :

$$I_2 = \int_{\pi/2}^{\pi} (-1) \, dx = -x \Big|_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{\pi}{2}.$$

Окончательно имеем  $I_1 + I_2 = 0$ .

II способ. Воспользуемся расширенным определением первообразной. Функция  $F(x)$ , удовлетворяющая этому определению, имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leq x \leq \pi/2, \\ \pi - x & \text{при } \pi/2 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

В самом деле,  $F(x)$  непрерывна на  $[0, \pi]$  и  $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, \pi]$ ,  $x \neq \pi/2$ , т. е.  $F'(x) = f(x)$  в точках непрерывности  $f(x)$ . (Напомним, что  $x = \pi/2$  — точка разрыва  $f(x)$ .)

Согласно формуле Ньютона–Лейбница, справедливой для кусочно непрерывных функций и расширенного определения первообразной, получаем

$$I = \int_0^{\pi} f(x) \, dx = F(x) \Big|_0^{\pi} = \pi - x \Big|_{x=\pi} - x \Big|_{x=0} = 0. \blacksquare$$

Следующие два примера показывают, что формальное применение формулы Ньютона–Лейбница (т. е. использование этой формулы без учета условий ее применимости) может привести к неверному результату.

4. Рассмотрим интеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ . Взяв в качестве первообразной подынтегральной функции  $f(x) = 1/(2\sqrt{x})$  функцию  $F(x) = \sqrt{x}$  и формально применив формулу Ньютона–Лейбница, получим

$$\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Big|_0^1 = 1.$$

Однако этот результат неверен, так как функция  $f(x) = 1/(2\sqrt{x})$  не ограничена на  $[0, 1]$ , и, следовательно, интеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}}$  не существует.

5. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right) dx.$$

На первый взгляд может показаться, что функция  $\operatorname{arctg}(1/x)$  является первообразной подынтегральной функции  $\frac{d}{dx} \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right)$ , и тогда по формуле Ньютона–Лейбница получаем

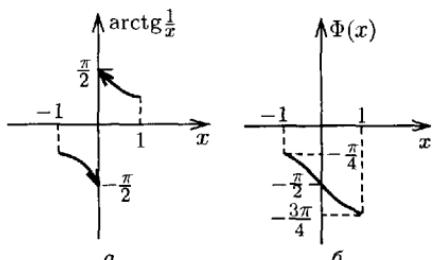


Рис. 16

$$I = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \left( -\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Однако этот результат неверен, поскольку функция  $\operatorname{arctg}(1/x)$  не является первообразной для  $\frac{d}{dx} \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right)$  на сегменте  $[-1, 1]$ .

В самом деле, на рис. 16, а изображен график функции  $\operatorname{arctg}(1/x)$ . Наглядно видно, что эта функция имеет в точке  $x = 0$  разрыв I рода, в то время как первообразная по самому определению должна быть непрерывной во всех точках.

Чтобы вычислить интеграл  $I$ , заметим, что

$$\frac{d}{dx} \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right) = \begin{cases} -\frac{1}{1+x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ \text{не определена} & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Доопределяя эту функцию в точке  $x = 0$  по непрерывности, получим непрерывную функцию

$$f(x) = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Первообразной для  $f(x)$  является  $F(x) = -\operatorname{arctg} x$ , поэтому по формуле Ньютона–Лейбница имеем

$$I = -\operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^1 = -\frac{\pi}{4} + \left( -\frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Отметим, что первообразную для  $f(x)$  можно построить также с помощью функции  $\operatorname{arctg}(1/x)$ , а именно:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(1/x) & \text{при } -1 \leq x < 0, \\ -\pi/2 & \text{при } x = 0, \\ \operatorname{arctg}(1/x) - \pi & \text{при } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

График  $\Phi(x)$  изображен на рис. 16, б. По формуле Ньютона–Лейбница

снова получаем

$$I = \Phi(x) \Big|_{-1}^1 = -\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

**6.** Применяя подходящую замену переменной, вычислить

$$I = \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Δ Положим  $x = a \sin t$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ . Такая замена переменной удовлетворяет всем условиям теоремы 4. Так как  $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$ ,  $dx = a \cos t dt$ , то

$$\begin{aligned} I &= a^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \frac{a^4}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = \\ &= \frac{a^4}{8} \left( t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{16}. \blacksquare \end{aligned}$$

Следующий пример показывает, что формальное применение формулы замены переменной (без учета условий ее применимости) может привести к неверному результату.

**7.** Если в интеграле  $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$  сделать формально замену переменной  $x = 1/t$  и написать

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+1/t^2} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = - \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{\pi}{2}, \quad (2)$$

то получается, очевидно, неверный результат.

Ошибка связана с тем, что изменению  $x$  сегменте  $[-1, 1]$  соответствует изменение  $t = 1/x$  не на сегменте  $[-1, 1]$ , как написано в равенстве (2), а на объединении полупрямых  $(-\infty, -1)$  и  $(1, +\infty)$ . Тем самым указанная замена переменной не удовлетворяет требованиям теоремы 4.

**8.** Вычислить  $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0,5 \cos x}$ .

Δ Подынтегральная функция  $f(x) = \frac{1}{1+0,5 \cos x}$  непрерывна на сегменте  $[0, 2\pi]$  и, следовательно, имеет первообразную. Для нахождения первообразной функции  $f(x)$  подходящей заменой переменной является  $t = \operatorname{tg}(x/2)$  (см. гл. V). Однако для определенного интеграла  $I$  такая замена не удовлетворяет условиям теоремы 4, поскольку изменению  $x$  на сегменте  $[0, 2\pi]$  не соответствует изменение  $t$  на некотором сегменте:  $t = \operatorname{tg}(x/2) \rightarrow +\infty$  ( $-\infty$ ) при  $x \rightarrow \pi - 0$  ( $\pi + 0$ ). Поэтому воспользуемся указанной заменой переменной для нахождения

первообразной подынтегральной функции. Рассмотрим неопределенный интеграл  $\int \frac{dx}{1 + 0,5 \cos x}$ . На каждом из промежутков  $0 \leq x < \pi$  и  $\pi < x \leq 2\pi$  для него допустима замена переменной  $t = \operatorname{tg}(x/2)$ .

В первом случае обратной функцией является  $x = 2\arctg t$  ( $0 \leq t < +\infty$ ), во втором  $x = 2(\pi + \arctg t)$  ( $-\infty < t \leq 0$ ). В каждом случае  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ , и мы получаем

$$\Phi(x) = \int \frac{dx}{1 + 0,5 \cos x} = 4 \int \frac{dt}{3 + t^2} \Big|_{t=\operatorname{tg}(x/2)} + C = \\ = \frac{4}{\sqrt{3}} \arctg \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$$

При любой постоянной  $C$  функция  $\Phi(x)$  является первообразной для  $f(x) = \frac{1}{1 + (1/2) \cos x}$  на промежутках  $[0, \pi]$  и  $(\pi, 2\pi]$ . Так как она имеет в точке  $x = \pi$  разрыв I рода:  $\Phi(\pi + 0) - \Phi(\pi - 0) = -\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$ , то  $\Phi(x)$  не является первообразной для  $f(x) = \frac{1}{1 + 0,5 \cos x}$  на всем сегменте  $[0, 2\pi]$ . Однако с помощью  $\Phi(x)$  теперь уже легко построить первообразную для  $f(x)$  на всем сегменте  $[0, 2\pi]$ . Положим

$$F(x) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}} \arctg \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) & \text{при } 0 \leq x < \pi, \\ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} & \text{при } x = \pi, \\ \frac{4}{\sqrt{3}} \arctg \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + \frac{4\pi}{\sqrt{3}} & \text{при } \pi < x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Тем самым на  $[0, \pi)$  мы взяли  $C = 0$ , в точке  $x = \pi$  доопределили  $\Phi(x)$  (при  $C = 0$ ) по непрерывности слева, а на  $(\pi, 2\pi]$  взяли  $C = 4\pi/\sqrt{3}$ . Получилась функция  $F(x)$ , производная которой во всех точках сегмента  $[0, 2\pi]$ , в том числе и в точке  $x = \pi$ , равна функции  $f(x)$  (для точки  $x = \pi$  докажите этот факт самостоятельно), т. е.  $F(x)$  — первообразная для  $f(x)$  на  $[0, 2\pi]$ . По формуле Ньютона–Лейбница

$$I = F(x)|_0^{2\pi} = F(2\pi) - F(0) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} - 0 = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}. \blacksquare$$

**Замечание.** Можно было бы разбить интеграл  $I$  на два интеграла:  $I = \int_0^\pi f(x) dx + \int_\pi^{2\pi} F(x) dx$ , и воспользоваться тем, что первообразной для  $f(x)$  на  $[0, \pi]$  является функция

$$F_1(x) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}} \arctg \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) & \text{при } 0 \leq x < \pi, \\ \frac{2\pi}{\sqrt{3}} & \text{при } x = \pi, \end{cases}$$

а на  $[\pi, 2\pi]$  — функция

$$F_2(x) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) & \text{при } \pi < x \leq 2\pi, \\ -\frac{2\pi}{\sqrt{3}} & \text{при } x = \pi \end{cases}$$

( $F_1(x)$  получается из  $\Phi(x)$  при  $C = 0$  с помощью доопределения  $\Phi(x)$  в точке  $x = \pi$  по непрерывности слева, а  $F_2(x)$  — справа). В этом случае, применяя формулу Ньютона–Лейбница к каждому из интегралов, получаем

$$\begin{aligned} I = F_1(x)|_0^\pi + F_2(x)|_\pi^{2\pi} &= F_1(\pi) - F_1(0) + F_2(2\pi) - F_2(\pi) = \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} - 0 + 0 - \left( -\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \right) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

**9.** Вычислить  $I = \int_{1/e}^e |\ln x| dx$ .

△ Разбивая интеграл  $I$  на сумму интегралов по сегментам  $[1/e, 1]$  и  $[1, e]$  (чтобы “освободиться от модуля”) и применяя в каждом интеграле формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} I &= - \int_{1/e}^1 \ln x dx + \int_1^e \ln x dx = -x \ln x|_{1/e}^1 + \int_{1/e}^1 dx + x \ln x|_1^e - \int_1^e dx = \\ &= -\frac{1}{e} + \left( 1 - \frac{1}{e} \right) + e - (e - 1) = 2 \left( 1 - \frac{1}{e} \right). \blacksquare \end{aligned}$$

**10.** Вычислить  $I = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ .

△ Применим формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} I &= - \int_0^\pi x \frac{d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} = - \int_0^\pi x d(\operatorname{arctg}(\cos x)) = \\ &= -x \operatorname{arctg}(\cos x)|_0^\pi + \int_0^\pi \operatorname{arctg}(\cos x) dx = -\pi \left( -\frac{\pi}{4} \right) - 0 + I_1 = \frac{\pi^2}{4} + I_1, \end{aligned}$$

где  $I_1 = \int_0^\pi \operatorname{arctg}(\cos x) dx$ .

Чтобы найти  $I_1$ , заметим, что график функции  $f(x) = \operatorname{arctg}(\cos x)$  центрально симметричен относительно точки  $(\pi/2, f(\pi/2)) = (\pi/2, 0)$ . Поэтому интегралы от этой функции по сегментам  $[0, \pi/2]$  и  $[\pi/2, \pi]$  равны по модулю и противоположны по знаку, а значит, в сумме равны нулю, т. е.  $I_1 = 0$ . Этот же факт можно установить таким образом: разобьем  $I_1$  на два интеграла по сегментам  $[0, \pi/2]$  и  $[\pi/2, \pi]$  соответственно и во втором интеграле сделаем замену переменной

$x = \pi - t$ . Получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(\cos x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{arctg}(\cos x) dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(\cos x) dx + \int_{\pi/2}^0 \operatorname{arctg}(-\cos t) (-dt) = \\ &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(\cos x) dx - \int_0^{\pi/2} \operatorname{arctg}(\cos t) dt = 0. \end{aligned}$$

Итак,  $I_1 = 0$ , поэтому  $I = \pi^2/4$ . ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

14. Найдите производные.

а)  $\frac{d}{dx} \int_a^b \sin(x^2) dx$ ;    б)  $\frac{d}{db} \int_a^b \sin(x^2) dx$ ,    в)  $\frac{d}{da} \int_a^{x^2} \sin(x^2) dx$ ;

г)  $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$ ;    д)  $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+x^2} dx$ ;    е)  $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ ,

ж)  $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ ;    з)  $\frac{d}{dx} \int_{t^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ ;    и)  $\frac{d}{dt} \int_{x^2}^{t^3} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ ;

к)  $\frac{d}{dt} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ ;    л)  $\frac{d}{dx} \int_{t^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{x^2-t^4}}$ .

15. Вычислите интегралы:

а)  $\int_{\operatorname{sh} 1}^{\operatorname{sh} 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ ;    б)  $\int_0^2 |1-x| dx$ ,    в)  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}$  ( $0 < \alpha < \pi$ ).

16. Объясните, почему формальное применение формулы Ньютона–Лейбница приводит к неверным результатам, и вычислите, используя первообразную для кусочно непрерывной функции или разбивая на части промежуток интегрирования, следующие интегралы:

а)  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos^2 x (2 + \operatorname{tg}^2 x)}$ ;    б)  $\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1+2^{1/x}} \right) dx$ .

17. Вычислите  $\int_0^2 f(x) dx$ , где  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x & \text{при } 1 < x \leq 2, \end{cases}$  двумя способами: а) используя первообразную для  $f(x)$ , построенную на всем сегменте  $[0, 2]$ ; б) разбивая сегмент  $[0, 2]$  на сегменты  $[0, 1]$  и  $[1, 2]$ .

18. Применяя формулу интегрирования по частям, вычислите следующие интегралы:

а)  $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx$ ;    б)  $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$ ;    в)  $\int_0^1 \arccos x dx$ .

19. Применяя подходящую замену переменной, вычислите следующие интегралы:

а)  $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}$ ; б)  $\int_0^{0.75} \frac{d\tau}{(x+1)\sqrt{\tau^2+1}}$ ; в)  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ ; г)  $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ .

20. Можно ли вычислить интеграл  $\int_0^3 x \sqrt[3]{1-x^2} dx$  с помощью замены переменной  $x = \sin t$ ?

21. Можно ли, вычисляя интеграл  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$  с помощью замены переменной  $x = \sin t$ , взять в качестве новых пределов интегрирования числа а)  $\pi$  и  $\pi/2$ ; б)  $2\pi$  и  $5\pi/2$ ; в)  $\pi$  и  $5\pi/2$ ? Вычислите интеграл в каждом случае, когда указанная замена допустима.

22. Докажите, что для непрерывной на  $[-l, l]$  функции  $f(x)$  справедливо равенство:

а)  $\int_{-l}^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx$ , если  $f(x)$  — четная функция;  
 б)  $\int_{-l}^l f(x) dx = 0$ , если  $f(x)$  — нечетная функция.

Дайте геометрическую иллюстрацию этих фактов. Справедливы ли эти равенства, если  $f(x)$  — интегрируемая на  $[-l, l]$ , но не обязательно непрерывная функция?

23. Докажите, что одна из первообразных четной функции есть функция нечетная, а всякая первообразная нечетной функции есть функция четная.

24. Вычислите интегралы

а)  $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{x^2 + x + 1}$ ; б)  $\int_1^e (x \ln x)^2 dx$ , в)  $\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$ ;  
 г)  $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$ ; д)  $\int_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x \sin 3x dx$ ; е)  $\int_0^\pi (x \sin x)^2 dx$ .

25. Пользуясь формулой Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

( $i$  — мнимая единица), покажите, что

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} \cdot e^{-imx} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ 2\pi & \text{при } m = n \end{cases}$$

(используйте равенство  $\int_a^b [f(x) + ig(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + i \int_a^b g(x) dx$ ).

26. Покажите, что

$$\int_a^b e^{(\alpha+i\beta)x} dx = \frac{e^{b(\alpha+i\beta)} - e^{a(\alpha+i\beta)}}{\alpha + i\beta}$$

(используйте равенство  $e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}$ ).

27. Пользуясь формулами Эйлера

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}),$$

вычислите интегралы

$$\begin{aligned} \text{а)} & \int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx, \quad \text{б)} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx, \\ \text{в)} & \int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx dx, \quad \text{г)} \int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx dx \end{aligned}$$

## § 4. Вычисление длин плоских кривых

### Основные понятия и формулы

**1. Длина кривой.** Рассмотрим на плоскости кривую  $L$ , заданную параметрически:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (1)$$

где  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  — непрерывные на сегменте  $[\alpha, \beta]$  функции, причем различным значениям  $t \in [\alpha, \beta]$  соответствуют различные точки  $(x, y)$  (т. е. нет кратных точек). Такую кривую назовем *простой (плоской) незамкнутой кривой*.

Если точки  $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$  и  $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$  совпадают, а остальные точки не являются кратными, то кривая  $L$  называется *простой замкнутой кривой*.

Пусть  $L$  — простая (замкнутая или незамкнутая) кривая, заданная уравнениями (1). Рассмотрим произвольное разбиение сегмента  $[\alpha, \beta]$  точками  $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$ . Ему соответствует разбиение кривой  $L$  точками  $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_n = B$ , где  $M_i = M(\varphi(t_i), \psi(t_i))$ . Впишем в кривую  $L$  ломаную  $AM_1M_2\dots B$ . Обозначим длину ломаной через  $l(M_i)$  и положим  $\Delta t = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$ .

**Определение.** Число  $l$  называется *пределом длин ломаных*  $l(M_i)$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что для любого разбиения сегмента  $[\alpha, \beta]$ , у которого  $\Delta t < \delta$ , выполняется неравенство  $0 \leq l - l(M_i) < \varepsilon$ .

**Определение.** Если существует предел длин ломаных при  $\Delta t \rightarrow 0$ , то кривая  $L$  называется *спрямляемой*, а число  $l$  — *длиной кривой*  $L$  (или *длиной дуги кривой*  $L$ ).

### 2. Длина кривой, заданной параметрически.

**Теорема 12** Пусть простая кривая  $L$  задана параметрическими уравнениями  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , причем функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  имеют на сегменте  $[\alpha, \beta]$  непрерывные производные. Тогда кривая  $L$

спрямляема, а ее длина вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (2)$$

Функция

$$l(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (3)$$

называется *переменной дугой*.

**3. Длина кривой в декартовых координатах.** Если кривая задана уравнением  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , причем функция  $f(x)$  имеет на сегменте  $[a, b]$  непрерывную производную, то длина кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (4)$$

**4. Длина кривой в полярных координатах.** Если кривая задана уравнением  $r = r(\varphi)$ ,  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ , причем функция  $r(\varphi)$  имеет на сегменте  $[\varphi_1, \varphi_2]$  непрерывную производную, то длина кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi.$$

Если кривая задана уравнением  $\varphi = \varphi(r)$ ,  $r_1 \leq r \leq r_2$ , причем функция  $\varphi(r)$  имеет на сегменте  $[r_1, r_2]$  непрерывную производную, то длина кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + r^2 \varphi'^2(r)} dr.$$

### Контрольные вопросы и задания

- 1 Что такое простая незамкнутая (замкнутая) кривая?
- 2 Дайте определение предела длии ломаных при  $\Delta t \rightarrow 0$
- 3 Что такое спрямляемая кривая?
- 4 Что такое длина кривой?
- 5 По каким формулам вычисляется длина кривой а) заданной параметрически, б) в декартовых координатах, в) в полярных координатах?
- 6 Приведите примеры спрямляемых кривых
- 7 Является ли прямая спрямляемой кривой?
- 8 Является ли окружность простой кривой?

### Примеры решения задач

**1.** Найти длину параболы  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 2$

Δ По формуле (4) получаем

$$l = \int_0^2 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \sqrt{17} + \frac{1}{4} \ln(4 + \sqrt{17}) \quad \blacktriangle$$

**2.** Найти длину одной “арки” циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$

Δ По формуле (2) находим

$$l = a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = 8a \quad \blacktriangle$$

**3.** Найти переменную дугу эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b$ ) между точкой  $(0, b)$  и любой точкой эллипса в первой четверти

Δ Полагая  $x = a \sin t$ ,  $y = b \cos t$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ , по формуле (3) получаем (считая от верхнего конца малой полуоси)

$$l(t) = a \int_0^t \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 t} dt = a \int_0^t \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt,$$

где  $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$  — эксцентриситет эллипса

Таким образом, переменная дуга эллипса выражается интегралом

$$l(t) = a \int_0^t \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt = aE(\varepsilon, t),$$

который называется *эллиптическим интегралом II рода*

Этот интеграл не выражается в элементарных функциях. Он широко используется в математике. Его название объясняется как раз связью с рассмотренной задачей

Если  $t = \pi/2$ , то интеграл выражает  $1/4$  длины эллипса. В этом случае эллиптический интеграл  $E(\varepsilon, \pi/2)$  называют *полным эллиптическим интегралом* и обозначают  $E(\varepsilon)$ . ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

**28.** Найдите длины кривых, заданных уравнениями

а)  $y = x^{3/2}$  ( $0 \leq x \leq 4$ ), б)  $x = \frac{y^2}{4} - \frac{1}{2} \ln y$  ( $1 \leq y \leq e$ ),

в)  $y = \ln \cos x$  ( $0 \leq x \leq a < \pi/2$ ), г)  $y^2 = x^3/(2a - x)$  ( $0 \leq x \leq 5a/3$ ),

д)  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ , е)  $x = \cos^4 t$ ,  $y = \sin^4 t$ ,

ж)  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  ( $0 \leq t \leq 8\pi$ , обратите внимание на пределы интегрирования),

з)  $\rho = a\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) (спираль Архимеда),

и)  $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ , к)  $\rho = a \sin^3(\varphi/3)$ , л)  $\varphi = \sqrt{\rho}$  ( $0 \leq \rho \leq 5$ )

29. Докажите, что длина эллипса  $x = a \sin t$ ,  $y = b \cos t$  равна длине синусоиды  $y = c \sin(x/b)$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi b$ ,  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ . Дайте геометрическую иллюстрацию этого результата, связав длины эллипса и синусоиды с сечением цилиндра  $x^2 + y^2 = b^2$  плоскостью  $z = (c/b)x$ .

## § 5. Вычисление площадей плоских фигур

### Основные понятия и формулы

**1. Площадь плоской фигуры.** *Плоской фигурой* будем называть любое ограниченное множество точек плоскости.

Пусть в данную фигуру вписана многоугольная фигура и около данной фигуры описана многоугольная фигура, т. е. фигура, состоящая из конечного числа треугольников.

Множество площадей всех вписанных многоугольных фигур ограничено сверху (площадью любой описанной фигуры), а множество площадей всех описанных многоугольных фигур ограничено снизу (например, нулем).

**Определение** Плоская фигура называется *квадрируемой*, если точная верхняя грань  $\underline{P}$  множества площадей всех вписанных многоугольных фигур равна точной нижней грани  $\bar{P}$  множества площадей всех описанных многоугольных фигур.

Число  $P = \underline{P} = \bar{P}$  называется *площадью плоской фигуры* (по Жордану).

**Теорема 13** (достаточное условие квадрируемости) Для того чтобы плоская фигура была квадрируемой, достаточно, чтобы ее граница была спрямляемой кривой.

**2. Площадь плоской фигуры в декартовых координатах.** Пусть плоская фигура представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную непрерывными кривыми  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  (где  $f_1(x) \leq f_2(x)$ ), и двумя отрезками прямых  $x = a$ ,  $x = b$ .

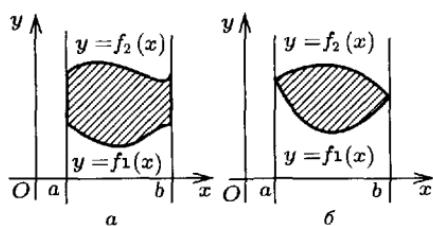


Рис. 17, а

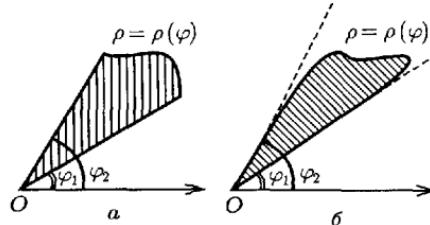


Рис. 17, б

(рис. 17, а) Отрезки прямых могут вырождаться в точку (рис. 17, б)

Тогда площадь фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx \quad (1)$$

**3. Площадь плоской фигуры в случае параметрического задания ее границы.** Пусть граница плоской фигуры  $G$  — простая замкнутая кривая, заданная параметрически уравнениями  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , причем точка  $(\varphi(t), \psi(t))$  при изменении  $t$  от 0 до  $T$  пробегает границу  $G$  так, что фигура  $G$  остается слева от движущейся точки. Тогда площадь фигуры  $G$  может быть вычислена по любой из следующих формул:

$$S = - \int_0^T \psi(t) \varphi'(t) dt, \quad (2)$$

$$S = \int_0^T \varphi(t) \psi'(t) dt, \quad (3)$$

$$S = \frac{1}{2} \int_0^T [\varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t)] dt. \quad (4)$$

**4. Площадь плоской фигуры в полярных координатах.** Пусть плоская фигура представляет собой криволинейный сектор, ограниченный непрерывной кривой  $\rho = \rho(\varphi)$ ,  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ ,  $0 < \varphi_2 - \varphi_1 \leq 2\pi$ , и отрезками лучей  $\varphi = \varphi_1$  и  $\varphi = \varphi_2$  (рис. 18, а). Отрезки лучей могут вырождаться в точку  $O$  (рис. 18, б). Тогда площадь фигуры вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) d\varphi \quad (5)$$

### Контрольные вопросы и задания

- 1 Что такое плоская фигура?
- 2 Что такое квадрируемая фигура?
- 3 Что такое площадь плоской фигуры?
- 4 По каким формулам вычисляется площадь фигуры а) в декартовых координатах, б) в случае параметрического задания границы, в) в полярных координатах?
- 5 Приведите примеры квадрируемых фигур
- 6 Является ли плоскость квадрируемой фигурой?
- 7 Является ли прямая квадрируемой фигурой?

### Примеры решения задач

**1.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми  $y = |x - 1|$ ,  $y = 3 - |x|$ .

Δ Данные кривые пересекаются в двух точках (рис. 19). Решив

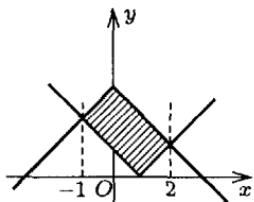


Рис. 19

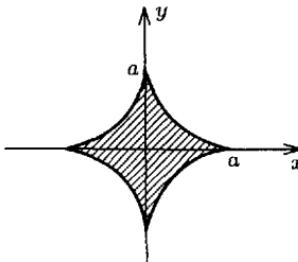


Рис. 20

уравнение  $3 - |x| = |x - 1|$ , найдем абсциссы этих точек,  $t = -1$ ,  $x = 2$ . Поэтому

$$S = \int_{-1}^2 (3 - |x| - |x - 1|) dx$$

Разобьем интеграл на три интеграла соответственно по сегментам  $[-1, 0]$ ,  $[0, 1]$ ,  $[1, 2]$ . Получим

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 [(3 + x) - (1 - x)] dx + \int_0^1 [(3 - x) - (1 - x)] dx + \\ &\quad + \int_1^2 [(3 - x) - (x - 1)] dx = 1 + 2 + 1 = 4. \blacksquare \end{aligned}$$

**2.** Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  (рис. 20)

Δ Полагая  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , приходим к параметрическим уравнениям астроиды (параметр  $t$  играет роль полярного угла точки  $(x, y)$  на астроиде). По формуле (4) получаем

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos^3 t \cdot 3a \sin^2 t \cos t + 3a \cos^2 t \sin t \cdot a \sin^3 t) dt = \\ &= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3}{8} \pi a^2. \blacksquare \end{aligned}$$

**Замечание 1.** Симметричная формула (4) привела здесь к более простому интегралу, чем тот, который получился бы в результате применения формул (2) или (3).

**Замечание 2** Отметим, что интеграл по сегменту  $[0, \pi/2]$

$$\frac{3a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3}{32} \pi a^2$$

дает площадь той части фигуры, которая лежит в I квадранте (рис 21), хотя в этом случае вся граница фигуры уже не описывается уравнениями  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ , поскольку содержит отрезки осей координат. Почему же получился правильный результат? Дело в том, что параметрически отрезок  $[a, 0]$  оси  $Oy$  можно задать уравнениями  $x = 0$ ,  $y = 2a(1 - t/\pi)$ ,  $\pi/2 \leq t \leq \pi$ , а отрезок  $[0, a]$  оси  $Ox$  — уравнениями  $x = 2a(t/\pi - 1)$ ,  $y = 0$ ,  $\pi \leq t \leq 3\pi/2$ . На этих отрезках параметр  $t$  не играет роли полярного угла.

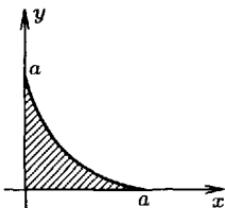


Рис 21

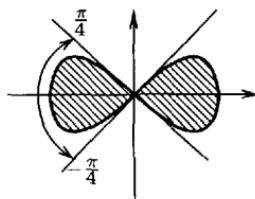


Рис 22

Используя теперь полную параметризацию границы фигуры (параметр  $t$  изменяется от 0 до  $3\pi/2$ ) и разбивая интеграл по сегменту  $[0, 3\pi/2]$  на три интеграла, соответствующих криволинейному и двум прямолинейным участкам границы, получаем, что интегралы по отрезкам координатных осей обращаются в нуль, так как на каждом из них одна координата и ее производная по параметру равны нулю.

По той же причине формула (2) остается справедливой для криволинейной трапеции, ограниченной отрезком оси  $Ox$ , двумя вертикальными отрезками и кривой, заданной параметрически уравнениями  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , если при изменении  $t$  от 0 до  $T$  точка  $(\varphi(t), \psi(t))$  пробегает кривую так, что трапеция остается слева от точки. В противном случае в формуле (2) перед интегралом нужно поставить знак плюс.

**Замечание 3** Найти площадь фигуры, ограниченной циклоидой  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , и осью  $Ox$ .

Δ По формуле (2) (где в силу замечания 2 перед интегралом взят знак плюс) имеем

$$S = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = 3\pi a^2 \quad \blacktriangle$$

**Замечание 4** Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах уравнением  $\rho = 2a^2 \cos 2\varphi$  (лемниската Бернулли).

Δ Учитывая неотрицательность  $\rho$ , находим, что  $-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$  и  $3\pi/4 \leq \varphi \leq 5\pi/4$  (рис 22). По формуле (5) вычисляем площадь одной из двух равных частей фигуры и удваиваем результат.

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = 2a^2 \quad \blacktriangle$$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

30. Найдите площадь фигуры, граница которой задана уравнениями в декартовых координатах
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = x_0, \quad x = x_1, \quad y \geq 0 \quad (-a < x_0 < x_1 < a)$
  - $y = x^2, \quad x + y = 2, \quad$  в)  $y = (x+1)^2, \quad x = \sin \pi y, \quad y = 0 \quad (0 \leq y \leq 1),$
  - $y^2 = x^2(a^2 - x^2), \quad$  д)  $y = e^{-x} |\sin x|, \quad y = 0 \quad (x \geq 0)$  (за площадь этой неограниченной фигуры примите предел при  $A \rightarrow +\infty$  площадей криволинейных трапеций, соответствующих изменению  $x$  от 0 до  $A$ )
31. Найдите площадь фигуры, граница которой задана параметрически (предварительно нарисуйте эскиз фигуры)
- $x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad x = a, \quad y \leq 0$  (развертка круга),
  - $x = a(2 \cos t - \cos 2t), \quad y = a(2 \sin t - \sin 2t)$
32. Найдите площадь фигуры, граница которой задана уравнением в полярных координатах
- $\rho = a(1 + \cos \varphi)$  (кардиоида),
  - $\rho = a \sin 3\varphi$  (трилистник),
  - $\rho = 3 + 2 \cos \varphi, \quad$  г)  $\rho^2 + \varphi^2 = 1$
33. Переходя к полярным координатам, найдите площадь фигуры граница которой задана уравнением
- $x^3 + y^3 = 3axy$  (лист Декарта),
  - $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$  (лемниската Бернулли)

## § 6. Вычисление объемов тел

### Основные понятия и формулы

1. **Объем тела (по Жордану).** Телом будем называть любое ограниченное множество точек пространства

Пусть в данное тело вписан многогранник и около данного тела описан многогранник, т. е. тело, состоящее из конечного числа треугольных пирамид

Множество объемов всех вписанных многогранников ограничено сверху (объемом любого описанного многогранника), а множество объемов всех описанных многогранников ограничено снизу (например, нулем).

Определение Тело называется *кубируемым*, если точная верхняя грань  $V$  множества объемов всех вписанных многогранников равна точной нижней грани  $\bar{V}$  множества объемов всех описанных многогранников.

Число  $V = V = \bar{V}$  называется *объемом тела* (по Жордану)

2. **Объем тела с известными поперечными сечениями.** Пусть каждое сечение кубируемого тела плоскостью  $x = \text{const}$  есть квадрируемая фигура, причем ее площадь  $S(x)$  является непрерывной функцией  $x$  ( $a \leq x \leq b$ ). Тогда объем этого тела вычисляется по

формуле

$$V = \int_a^b S(x) dx \quad (1)$$

В частном случае, когда тело получено вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, заданной непрерывной функцией  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (2)$$

### Контрольные вопросы и задания

- 1 Что называется телом?
- 2 Что такое кубируемое тело?
- 3 Что такое объем тела?
- 4 По какой формуле вычисляется а) объем тела с известными поперечными сечениями, б) объем тела вращения?
- 5 Приведите примеры кубируемых тел
- 6 Является ли плоскость кубируемым телом?
- 7 Является ли прямая кубируемым телом?

### Примеры решения задач

1. Найти объем тела, полученного вращением эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  вокруг оси  $Ox$

$\Delta$  По формуле (2) имеем

$$V = \pi \int_{-a}^a \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi ab^2. \blacksquare$$

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $z = \sqrt{3}y$ ,  $z = 0$  ( $y \geq 0$ )

$\Delta$  I способ Рассмотрим сечения этого тела плоскостями  $x = \text{const}$ . В сечениях получаются прямоугольные треугольники с площадями

$$S(x) = \frac{1}{2} y(x) z(x) = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{3} \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} (a^2 - x^2).$$

По формуле (1) находим

$$V = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-a}^b (a^2 - x^2) dx = \frac{2\sqrt{3}}{3} a^3.$$

II способ Рассекая это же тело плоскостями  $y = \text{const}$ , в сечениях получаем прямоугольники с площадями

$$S(y) = 2x(y)z(y) = 2\sqrt{a^2 - y^2} \sqrt{3}y.$$

Поэтому

$$V = 2\sqrt{3} \int_0^a y \sqrt{a^2 - y^2} dy = \frac{2\sqrt{3}}{3} a^3 \quad \blacktriangle$$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

34. Найдите объем усеченного конуса, основания которого ограничены эллипсами с полуосами  $A, B$  и  $a, b$ , а высота равна  $h$
35. Тело представляет собой множество точек  $M(x, y, z)$ , где  $0 \leq z \leq 1$ . При этом  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , если  $z$  — рациональное число, и  $-1 \leq x \leq 0$ ,  $-1 \leq y \leq 0$ , если  $z$  — иррациональное число. Докажите, что объем этого тела не существует, хотя  $\int_0^1 S(z) dz = 1$
36. Найдите объемы тел, поверхности которых заданы уравнениями
- а)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $z = \frac{c}{a}x$ ,  $z = 0$ , б)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,
- в)  $\frac{r^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,  $z = \pm c$ , г)  $x^2 + z^2 = a^2$ ,  $y^2 + z^2 = a^2$ ,
- д)  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x^2 + y^2 = ax$  (пересечение указанных сферы и цилиндра образует два тела. Найдите объем так называемого тела Вивиани, вырезаемого цилиндром из сферы. Получив ответ, обратите внимание на его структуру: если из полусферы удалить тело Вивиани, то объем оставшейся части выражается через радиус сферы без иррациональных коэффициентов, в частности без  $\pi$ )
37. Найдите объемы тел, ограниченных поверхностями, полученными вращением следующих кривых
- а)  $y = b(x/a)^{2/3}$  ( $0 \leq x \leq a$ ) вокруг оси  $Ox$ ,
- б)  $y = 2x - x^2$ ,  $y = 0$  вокруг оси  $Ox$ ,
- в)  $y = 2x - x^2$ ,  $y = 0$  вокруг оси  $Oy$ ,
- г)  $y = \sin x$ ,  $y = 0$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) вокруг оси  $Ox$ ,
- д)  $y = \sin x$ ,  $y = 0$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) вокруг оси  $Oy$ ,
- е)  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) вокруг оси  $Ox$ ,
- ж)  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) вокруг оси  $Oy$

### § 7. Физические приложения определенного интеграла

#### Основные понятия и формулы

**1. Вычисление массы плоской кривой.** Пусть простая кривая  $L$  задана параметрически уравнениями  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , и пусть  $\rho(x, y)$  — линейная плотность массы в точке  $(x, y) \in L$ . Тогда масса кривой  $L$  вычисляется по формуле

$$M = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

Пусть простая кривая задана уравнением в декартовых координатах  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ . Тогда масса кривой  $L$  вычисляется по формуле

$$M = \int_a^b \rho(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

В частности, при  $\rho \equiv 1$  числовое значение массы совпадает с длиной кривой.

**2. Вычисление моментов и координат центра тяжести плоской кривой.** Статические моменты (или моменты первого порядка) кривой  $L$  относительно координатных осей в случае постоянной линейной плотности  $\rho \equiv 1$  (геометрические моменты) вычисляются по следующим формулам ( $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , — уравнения кривой):

$$M_x = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (\text{момент относительно оси } Ox),$$

$$M_y = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (\text{момент относительно оси } Oy).$$

Если кривая задана в декартовых координатах:  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , то

$$M_x = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \quad M_y = \int_a^b x \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Координаты  $x_0$  и  $y_0$  центра тяжести кривой  $L$  вычисляются по формулам

$$x_0 = M_y/l, \quad y_0 = M_x/l,$$

где  $l$  — длина кривой  $L$ .

Моменты инерции (или моменты второго порядка) кривой  $L$  относительно координатных осей ( $\rho \equiv 1$ ) вычисляются по формулам

$$I_x = \int_{\alpha}^{\beta} \psi^2(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (\text{относительно оси } Ox),$$

$$I_y = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(t) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (\text{относительно оси } Oy),$$

или (в декартовых координатах)

$$I_x = \int_a^b f^2(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \quad I_y = \int_a^b x^2 \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

**3. Вычисление моментов и координат центра тяжести плоской фигуры.** Статические моменты фигуры  $G$ , ограниченной непрерывными кривыми  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  (где  $f_1(x) \leq f_2(x)$ ), и отрезками прямых  $x = a$ ,  $x = b$ , в случае постоянной поверхностной плотности  $\rho \equiv 1$  вычисляются по формулам

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx \quad (\text{относительно оси } Ox), \quad (1)$$

$$M_y = \int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)] dx \quad (\text{относительно оси } Oy). \quad (2)$$

Координаты  $x_0$  и  $y_0$  центра тяжести фигуры вычисляются по формулам

$$x_0 = \frac{M_y}{S}, \quad y_0 = \frac{M_x}{S}, \quad (3)$$

где  $S$  — площадь фигуры  $G$ .

Моменты инерции фигуры  $G$  относительно координатных осей  $\rho \equiv 1$  вычисляются по формулам

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b [f_2^3(x) - f_1^3(x)] dx \quad (\text{относительно оси } Ox),$$

$$I_y = \int_a^b x^2[f_2(x) - f_1(x)] dx \quad (\text{относительно оси } Oy).$$

### Примеры решения задач

1. Найти статические моменты и координаты центра тяжести криволинейной трапеции, ограниченной параболой  $y^2 = f_2^2(x) = 2px$  и прямыми  $y = f_1(x) = 0$  и  $x = 1$ .

Δ По формулам (1) и (2) находим

$$M_x = \frac{1}{2} \int_0^1 f_2^2(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 2p \int_0^1 x dx = \frac{p}{2},$$

$$M_y = \int_0^1 x f_2(x) dx = \sqrt{2p} \int_0^1 x^{3/2} dx = \frac{2\sqrt{2p}}{5}.$$

Вычислим площадь этой криволинейной трапеции:

$$S = \sqrt{2p} \int_0^1 x^{1/2} dx = \frac{2\sqrt{2p}}{3}.$$

Теперь по формулам (3) находим координаты центра тяжести:

$$x_0 = \frac{M_y}{S} = \frac{3}{5}, \quad y_0 = \frac{M_x}{S} = \frac{3}{8} \sqrt{2p}. \blacksquare$$

**2.** Применяя вторую теорему Гульдена (см ниже упр 44), найти координаты центра тяжести плоской фигуры  $G$ , ограниченной одной аркой циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , и осью  $Ox$

Δ Объем тела, полученного от вращения фигуры вокруг оси  $Ox$ , равен

$$V = \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = 5\pi^2 a^3$$

Площадь фигуры  $G$  равна

$$S = \int_0^{2\pi a} y dx = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = 3\pi a^2$$

Пусть  $y_0$  — ордината центра тяжести. Согласно второй теореме Гульдена  $S \cdot 2\pi y_0 = V$ , откуда  $y_0 = 5a/6$ . Из симметрии фигуры  $G$  относительно прямой  $x = \pi a$  следует, что абсцисса центра тяжести есть  $x_0 = \pi r$ . ▲

#### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

38. Найдите статистический момент и момент инерции полуокружности радиуса  $a$  относительно диаметра этой полуокружности
39. Найдите статический момент дуги параболы  $y^2 = 2px$  ( $0 \leq x \leq p/2$ ) относительно прямой  $x = p/2$
40. Найдите статический момент и момент инерции однородной треугольной пластинки с основанием  $b$  и высотой  $h$  относительно основания
41. Найдите моменты инерции однородной эллиптической пластинки с полуосами  $a$  и  $b$  относительно ее главных осей
42. Найдите момент инерции однородного круга радиуса  $R$  и массы  $M$  относительно его диаметра
43. Докажите первую теорему Гульдена площадь поверхности, образованной вращением плоской кривой вокруг не пересекающей ее оси, лежащей в плоскости кривой, равна произведению длины этой кривой на длину окружности, описываемой центром тяжести кривой
44. Докажите вторую теорему Гульдена объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг не пересекающей ее оси лежащей в плоскости фигуры, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описываемой центром тяжести этой фигуры
45. Найдите объем “баранки”, полученной вращением окружности  $(x - 2)^2 + y^2 = 1$  вокруг оси  $Oy$
46. Найдите координаты центра тяжести дуги окружности  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = a \sin \varphi$  ( $|\varphi| \leq \alpha \leq \pi$ )
47. Найдите координаты центра тяжести фигуры, ограниченной параболами  $ax = y^2$ ,  $ay = x^2$  ( $a > 0$ )
48. Найдите координаты центра тяжести однородного полушара  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ ,  $z \geq 0$
49. Найдите координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кривой  $r = a(1 + \cos \varphi)$

# ГЛАВА IX

## МЕРА И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

### § 1. Мера множества

#### Основные понятия и теоремы

**1. Некоторые сведения о множествах.** Говорят, что между элементами двух множеств установлено *взаимно однозначное соответствие*, если каждому элементу первого множества поставлен в соответствие некоторый элемент второго множества так, что при этом каждый элемент второго множества соответствует только одному элементу первого множества

Два множества называются *эквивалентными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие. Если два множества эквивалентны, то говорят, что они имеют *одинаковую мощность*.

Множество называется *счетным*, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел (иными словами, множество называется счетным, если его элементы можно занумеровать с помощью натуральных чисел).

Например, множество всех рациональных чисел сегмента  $[0, 1]$  счетно, а множество всех вещественных чисел этого же сегмента не счетно.

Если множество эквивалентно множеству всех вещественных чисел сегмента  $[0, 1]$ , то говорят, что оно имеет *мощность континуума*.

*Объединением (суммой)* множеств  $E_1, E_2, \dots, E_n$  называется множество  $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$ , которое состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств  $E_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )

Объединение множеств  $E_1$  и  $E_2$  будем обозначать также символом  $E_1 \cup E_2$  или  $E_1 + E_2$

*Пересечением* множеств  $E_1, E_2, \dots, E_n$  называется множество  $G = \bigcap_{k=1}^n E_k$ , которое состоит из всех элементов, принадлежащих каждому из множеств  $E_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )

Пересечение множеств  $E_1$  и  $E_2$  будем обозначать также символом  $E_1 \cap E_2$  или  $E_1 E_2$

Точно так же определяются объединение  $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$  и пересечение

$\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$  счетного числа множеств.

Разностью множеств  $E_1$  и  $E_2$  называется множество  $E = E_1 \setminus E_2$ , которое состоит из всех элементов множества  $E_1$ , не содержащихся в  $E_2$ .

Пусть  $E$  — произвольное числовое множество. Точка  $x$  называется внутренней точкой  $E$ , если существует окрестность точки  $x$ , целиком принадлежащая  $E$ .

Множество  $E$  называется открытым, если все его точки внутренние. Множество  $E$  называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.

Например, интервал  $(a, b)$  — открытое множество, а сегмент  $[a, b]$  — замкнутое множество.

Объединение конечного или счетного числа открытых множеств является открытым множеством.

Теорема 1 (о структуре открытых множеств). Любое открытое множество является объединением конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов.

**2. Понятие числового ряда.** Пусть  $\{a_n\}$  — числовая последовательность. Образуем формально выражение

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

и назовем его числовым рядом (или просто рядом).

Числа  $a_k$  называются членами ряда, а число  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  — его  $n$ -й частичной суммой.

Рассмотрим последовательность  $\{S_n\}$ .

Определение. Если существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ , то говорят, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  сходится, а число  $S$  называется суммой ряда.

**3. Мера множества.** Мерой интервала  $(\alpha, \beta)$  (где  $\beta > \alpha$ ) назовем его длину  $\beta - \alpha$ .

Пусть  $G$  — ограниченное открытое множество. По теореме 1 его можно представить в виде  $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\alpha_k, \beta_k)$ , где  $(\alpha_k, \beta_k)$  — попарно непересекающиеся интервалы.

Мерой  $\mu G$  открытого ограниченного множества  $G$  назовем сумму длин его интервалов:  $\mu G = \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k)$ .

Отметим, что если число интервалов  $(\alpha_k, \beta_k)$  счетно, то сумма длин интервалов является числовым рядом  $\sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k)$  с положительными членами  $(\beta_k - \alpha_k)$ . В силу ограниченности множества  $G$  этот ряд сходится.

Пусть  $E$  — произвольное ограниченное множество. Рассмотрим всевозможные ограниченные открытые множества  $G$ , содержащие  $E$ . Множество  $\{\mu G\}$  мер этих множеств ограничено снизу (например, числом 0) и, следовательно, имеет  $\inf \{\mu G\}$ .

Число  $\bar{\mu}E = \inf \{\mu G\}$  называется *внешней мерой* множества  $E$ .

**Определение.** Множество  $E$  называется *измеримым* (по Лебегу), если  $\forall \varepsilon > 0$  существует открытое множество  $G$ , содержащее  $E$ , для которого  $\bar{\mu}(G \setminus E) < \varepsilon$ . При этом внешняя мера множества  $E$  называется его *мерой* (Лебега) и обозначается  $\mu E$ , т. е.  $\mu E = \bar{\mu}E$ .

**Замечание.** Для открытого множества  $E$  это определение эквивалентно данному выше (в качестве  $G$  достаточно взять само  $E$ ).

Понятие меры множества обобщает понятие длины. Для достаточно простых множеств (интервал, сегмент) мера совпадает с длиной. Для более сложных множеств, не имеющих длины в обычном смысле, роль длины играет мера.

Любое замкнутое ограниченное множество измеримо.

Если  $E$  — измеримое множество, причем  $E \subset [a, b]$ , то множество  $\bar{E} = [a, b] \setminus E$  (дополнение множества  $E$  до сегмента  $[a, b]$ ) измеримо.

Объединение (если оно ограничено) и пересечение конечного или счетного числа измеримых множеств являются измеримыми множествами. При этом мера объединения счетного (или конечного) числа попарно непересекающихся множеств равна сумме мер этих множеств, т. е. если

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \quad E_i \cap E_j = \emptyset \quad (i \neq j),$$

то

$$\mu E = \sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k.$$

Это свойство называется *счетной аддитивностью* (или  $\sigma$ -аддитивностью) меры Лебега.

### Контрольные вопросы и задания

- Что такое взаимно однозначное соответствие между элементами двух множеств?
- Какие множества называются эквивалентными?
- Какое множество называется счетным?
- Является ли счетным: а) множество  $Q$  всех рациональных чисел; б) множество  $R$  всех вещественных чисел?
- Что такое множество мощности континуума? Имеет ли множество  $R$  всех вещественных чисел мощность континуума?
- Что такое объединение множеств? Может ли объединение множеств совпадать с одним из них? Может ли объединение непустых множеств быть пустым множеством?

- 7 Что такое пересечение множеств? Может ли пересечение множеств совпадать с одним из них? Может ли пересечение непустых множеств быть пустым множеством?
- 8 Что такое разность двух множеств? Может ли разность  $E_1 \setminus E_2$  непустых множеств совпадать а) с  $E_1$ , б) с  $E_2$ ?
- 9 Что такое а) внутренняя точка множества, б) открытое множество, в) предельная точка множества, г) замкнутое множество?
- 10 Является ли множество  $Q$  всех рациональных чисел а) открытым, б) замкнутым?
- 11 Является ли множество  $R$  всех вещественных чисел а) открытым, б) замкнутым?
- 12 Докажите что объединение конечного или счетного числа открытых множеств является открытым множеством
- 13 Докажите что пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством, а пересечение счетного числа открытых множеств может не быть открытым множеством
- 14 Докажите, что пересечение конечного или счетного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством
- 15 Докажите, что объединение конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством, а объединение счетного числа замкнутых множеств может не быть замкнутым множеством
- 16 Сформулируйте теорему о структуре открытых множеств
- 17 Когда говорят, что числовой ряд сходится? Что такое сумма ряда?
- 18 Пусть все члены ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  неотрицательны. Докажите, что в этом случае а) необходимым и достаточным условием сходимости ряда является ограниченность последовательности  $\{S_n\}$  его частичных сумм, б) если переставить члены ряда произвольным образом, то сумма ряда не изменится
- 19 Что такое мера а) интервала, б) ограниченного открытого множества?
- Докажите сходимость ряда  $\mu G = \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k)$ , где  $(\alpha_k, \beta_k)$  -- попарно непересекающиеся интервалы, из которых состоит открытое ограниченное множество  $G$
- 20 Что такое внешняя мера множества? Всякое ли ограниченное множество имеет внешнюю меру?
- 21 Дайте определение измеримого множества и его меры
- 22 Пользуясь определением измеримого множества, докажите, что сегмент  $[a, b]$  измерим, причем его мера  $\mu[a, b] = b - a$  ( $a < b$ )
- 23 Пусть измеримое множество  $E \subset [a, b]$ . Докажите, что множество  $\bar{E} = [a, b] \setminus E$  измеримо, причем  $\mu \bar{E} = \mu[a, b] - \mu E$
- 24 Докажите, что замкнутое ограниченное множество измеримо
- 25 Что такое счетная аддитивность меры? Докажите, что объединение (если оно ограничено) счетного числа измеримых множеств является измеримым множеством

### Примеры решения задач

**1.** Доказать, что интервал  $(0, 1) = I$  и числовая прямая  $\mathbf{R}$  — эквивалентные множества.  $\mathbf{R} \sim I$ .

△ Чтобы доказать эквивалентность множеств  $I$  и  $\mathbf{R}$ , нужно установить между их элементами взаимно однозначное соответствие. Такое соответствие осуществляется функция

$$y = \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right), \quad x \in I.$$

В самом деле, каждому  $x \in I$  эта функция ставит в соответствие некоторое  $y \in \mathbf{R}$ , а так как она непрерывна и возрастает на  $I$  и, кроме того,  $\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1-0} \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = +\infty$ , то

$\forall y \sim \mathbf{R}$  существует единственное  $x \in I$  такое, что  $y = \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$

Это и означает, что между элементами множеств  $I$  и  $\mathbf{R}$  установлено взаимно однозначное соответствие. Итак,  $\mathbf{R} \sim I$ . ▲

**2.** Доказать, что интервал  $(0, 1) = I$  и сегмент  $[0, 1] = S$  — эквивалентные множества:  $I \sim S$ .

△ Пусть  $Q$  — множество всех рациональных чисел сегмента  $S$ . Это множество счетное (см. § 6 из гл. II). Положим  $\bar{Q} = S \setminus Q$ . Тогда  $S = Q + \bar{Q}$ . Удалим из множества  $Q$  точки 0 и 1. Получим счетное множество  $Q_1$  рациональных чисел интервала  $I$ . Очевидно,  $I = Q_1 + \bar{Q}$ . Так как  $Q$  и  $Q_1$  — счетные множества, то  $\bar{Q} \sim Q_1$ . Отсюда следует, что  $Q + \bar{Q} \sim Q_1 + \bar{Q}$ , т. е.  $S \sim I$ . ▲

**Замечание** Из утверждений примеров 1 и 2 следует, что числовая прямая  $\mathbf{R}$  (множество всех вещественных чисел) имеет мощность континуума

**3.** Пусть открытое множество  $E \subset [a, b]$ . Доказать, что  $G = [a, b] \setminus E$  — замкнутое множество.

△ Нужно доказать, что  $G$  содержит все свои предельные точки. Из определения разности множеств следует, что  $\forall x \in [a, b]$  либо  $x \in E$ , либо  $x \in G$ . Пусть  $x$  — предельная точка множества  $G$ , т. е. в любой окрестности точки  $x$  имеются точки множества  $G$ , отличные от  $x$ . Очевидно,  $x \in [a, b]$ . Докажем, что  $x \in G$ . Предположим противное. Тогда  $x \in E$ , и так как  $E$  — открытое множество, то существует окрестность точки  $x$ , целиком принадлежащая  $E$ . Следовательно, в этой окрестности точки  $x$  нет ни одной точки из множества  $G$ , но это противоречит тому, что  $x$  — предельная точка  $G$ . Полученное противоречие доказывает, что  $x \in G$ , и, значит,  $G$  — замкнутое множество. ▲

**4.** Доказать, что множество  $Q$  всех рациональных чисел произвольного сегмента  $[a, b]$  измеримо, причем  $\mu Q = 0$ .

△ Множество  $Q$  счетно, поэтому его точки можно занумеровать с

помощью натуральных чисел. Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$  и заключим первую точку множества  $Q$  в интервал длины  $\varepsilon/2$ , вторую — в интервал длины  $\varepsilon/2^2, \dots, n$ -ю — в интервал длины  $\varepsilon/2^n$  и т. д. Объединение этих интервалов является открытым множеством  $G$ , мера которого

$$\mu G < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

В силу того, что  $\varepsilon$  произвольно мало, отсюда следует, что  $\bar{\mu}G = 0$ . Так как  $(G \setminus Q) \subset G$ , то  $\bar{\mu}(G \setminus Q) \leq \bar{\mu}G = \mu G < \varepsilon$ . Это означает по определению, что  $Q$  измеримо, причем  $\mu Q = \bar{\mu}Q = 0$ . В таком случае говорят, что множество  $Q$  имеет *меру нуль*. ▲

5. Пусть  $a$  — произвольное число такое, что  $0 < a < 1$ . Построим два множества,  $D$  и  $E$ , с помощью счетного числа шагов следующим образом. На первом шаге удалим из сегмента  $[0, 1]$  интервал  $E_1$  длины  $a/2$ , расположенный симметрично относительно середины сегмента  $[0, 1]$  (назовем такой интервал *средним интервалом*). На втором шаге из оставшихся двух равных сегментов удалим средние интервалы длины  $a/8$  каждый. Обозначим объединение этих интервалов  $E_2$ ; длина  $E_2$  равна  $a/4$ . На третьем шаге из оставшихся четырех равных сегментов удалим средние интервалы длины  $a/32$  каждый. Обозначим объединение этих четырех интервалов  $E_3$ ; длина  $E_3$  равна  $a/8$ . На четвертом шаге из оставшихся восьми равных сегментов удалим средние интервалы длины  $a/128$  каждый и т. д. Пусть

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k, \quad D = [0, 1] \setminus E.$$

Доказать, что:

- а)  $E$  — открытое, а  $D$  — замкнутое множество;
- б)  $\mu E = a$ ,  $\mu D = 1 - a$ ;
- в) множество  $D$  не содержит целиком ни одного сегмента;
- г) множество  $D$  не содержит изолированных точек;
- д)  $\forall \varepsilon > 0$  найдется множество  $D'$  такое, что  $D \subset D'$  и  $0 < \mu D' - \mu D < \varepsilon$ ;
- е) множество  $D$  несчетно.

Δ а) Множество  $E$  открытое, так как оно является объединением интервалов — открытых множеств; множество  $D$  замкнутое, поскольку является дополнением открытого множества до сегмента.

б) Так как множества  $E_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) не пересекаются, то в силу  $\sigma$ -аддитивности меры

$$\mu E = \sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{2^k} = a.$$

Множества  $D$  и  $E$  не пересекаются, поэтому

$$\mu D = \mu[0, 1] - \mu E = 1 - a.$$

в) Предположим, что множество  $D$  содержит целиком некоторый сегмент длины  $l$ . Заметим, что в процессе построения множества  $D$  после  $n$ -го шага удаления средних интервалов оставшаяся часть сегмента  $[0, 1]$  состоит из  $2^n$  равных непересекающихся сегментов. Длину каждого из них обозначим  $d_n$ . Очевидно,  $d_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . При любом  $n$  множество  $D$  содержится в объединении указанных  $2^n$  сегментов. Поэтому сегмент длины  $l$ , целиком содержащийся в  $D$ , должен целиком содержаться в одном из указанных сегментов длины  $d_n$ , т. е.  $l \leq d_n$ . Но это противоречит тому, что  $d_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Итак, множество  $D$  не содержит целиком ни одного сегмента.

г) Если бы множество  $D$  содержало изолированную точку, то отсюда следовало бы, что при построении  $D$  из сегмента  $[0, 1]$  удалены два смежных интервала (разделенных этой точкой). Однако любые два удаленных интервала разделены некоторым отрезком, а не точкой.

д) Положим  $D' = [0, 1] \setminus \bigcup_{k=1}^n E_k$ . Очевидно,  $D \subset D'$ , причем

$$D' \setminus D = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} E_k, \quad \mu D' - \mu D = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu E_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a}{2^k} = \frac{a}{2^n}.$$

Отсюда следует, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists n$  такое, что выполняется неравенство

$$0 < \mu D' - \mu D = \frac{a}{2^n} < \varepsilon.$$

е) Счетное множество имеет меру нуль (см. пример 4). Так как  $\mu D = 1 - a \neq 0$ , то  $D$  — несчетное множество. ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Докажите эквивалентность следующих множеств:
  - $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$  и  $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ ;
  - сегментов  $[0, 1]$  и  $[a, b]$ ;
  - интервала  $(a, b)$  и числовой прямой  $\mathbf{R}$ .
2. Докажите, что:
  - бесконечное подмножество счетного множества также счетно;
  - объединение конечного или счетного числа счетных множеств есть счетное множество;
  - множество всех многочленов с рациональными коэффициентами счетно;
  - множество точек разрыва монотонной функции конечно или счетно.
3. Докажите, что множество всех вещественных чисел сегмента  $[0, 1]$  несчетно.
4. Докажите, что:
  - если  $A$  — бесконечное множество,  $B$  — конечное или счетное множество, то  $A + B \sim A$ ;
  - если  $A$  — бесконечное множество,  $B$  — конечное или счетное множество,  $A \setminus B$  — бесконечное множество, то  $A \setminus B \sim A$ ;
  - множество всех иррациональных чисел сегмента  $[0, 1]$  имеет мощность континуума;
  - всякое бесконечное множество содержит часть, эквивалентную всему множеству.

5. Докажите, что для любых множеств  $A, B, C$
- $(A + B)C = AC + BC$ ,
  - $A + A = A$ ,
  - $AA = A$ ,
  - $A + BC = (A + B)(A + C)$ ,
  - $A = (A \setminus B) + (AB)$ , в частности,  $A = (A \setminus B) + (B)$ , если  $B \subset A$
6. Пусть  $\forall k A_k \subset E$ ,  $\overline{A}_k = E \setminus A_k$  — дополнение  $A_k$  до  $E$  (число множеств  $A_k$  конечно или счетно). Докажите, что  $\overline{\bigcup_k A_k} = \bigcap_k \overline{A}_k$
7. Пусть замкнутое множество  $E \subset (a, b)$ . Докажите, что  $G = (a, b) \setminus E$  — открытое множество
8. Докажите, что множество  $\overline{Q}$  всех иррациональных чисел сегмента  $[a, b]$  измеримо, и найдите его меру
9. Пусть  $E$  ограниченное множество такое, что  $\bar{\mu}E = 0$ . Докажите, что  $E$  измеримо, причем  $\mu E = 0$
10. Докажите, что всякое подмножество множества меры нуль имеет меру нуль

## § 2. Измеримые функции

### Основные понятия и теоремы

**1. Определение измеримой функции.** Пусть функция  $f(x)$  определена на измеримом множестве  $E$ . Символом  $\{x \in E : f(x) \leq c\}$  будем обозначать множество всех таких значений аргумента  $x$ , принадлежащих множеству  $E$ , для которых  $f(x) \leq c$  ( $c$  — число).

Определение. Функция  $f(x)$  называется *измеримой на множестве  $E$* , если для любого числа  $c$  множество  $\{x \in E : f(x) \leq c\}$  измеримо.

Теорема 2. Для измеримости функции  $f(x)$  на множестве  $E$  необходимо и достаточно, чтобы для любого числа  $c$  было измеримо любое из следующих множеств:  $\{x \in E : f(x) > c\}$ ,  $\{x \in E : f(x) \geq c\}$ ,  $\{x \in E : f(x) < c\}$ .

### 2. Некоторые свойства измеримых функций.

1°. Если функция  $f(x)$  измерима на множестве  $E$ , то она измерима на любом измеримом подмножестве множества  $E$ .

2°. Если функция  $f(x)$  измерима на множествах  $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ , то она измерима на их объединении  $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$  и пересечении  $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ .

3°. Если функция  $f(x)$  определена на множестве  $E$  меры нуль, то она измерима на этом множестве.

4°. Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  измеримы на множестве  $E$ , то функции  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x) - g(x)$ ,  $f(x)g(x)$  и  $f(x)/g(x)$  (при условии  $g(x) \neq 0$ ) также измеримы на множестве  $E$ .

5°. Непрерывная на сегменте функция измерима на этом сегменте.

Говорят, что некоторое свойство справедливо *почти всюду* на множестве  $E$ , если множество точек из  $E$ , на котором оно не справедливо, имеет меру нуль.

Функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , определенные на измеримом множестве, называются **эквивалентными** на этом множестве, если они равны почти всюду на нем.

Обозначение эквивалентности.  $f(x) \approx g(x)$  на  $E$ .

Например, функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \\ 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число;} \end{cases} \quad x \in [a, b], \quad (1)$$

эквивалентна на  $[a, b]$  непрерывной функции  $g(x) \equiv 0$ , так как множество точек  $x$  сегмента  $[a, b]$ , в которых  $D(x) \neq g(x)$ , является множеством  $Q$  всех рациональных чисел сегмента  $[a, b]$ , мера которого  $\mu Q = 0$ . Заметим, что функция  $D(x)$  разрывна во всех точках  $[a, b]$ .

Приведем еще два свойства измеримых функций.

6°. Если  $g(x)$  измерима на  $E$ ,  $f(x) \approx g(x)$  на  $E$ , то  $f(x)$  измерима на  $E$ .

7°. Теорема 3 (теорема Лузина, или  $C$ -свойство измеримых функций). Для того чтобы функция  $f(x)$  была измерима на  $[a, b]$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\forall \varepsilon > 0$  существовала непрерывная на  $[a, b]$  функция  $g(x)$  такая, что  $\mu \{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\} \leq \varepsilon$ .

Теорема Лузина означает, что любая измеримая на  $[a, b]$  функция может быть сделана непрерывной путем изменения ее на множестве сколь угодно малой меры, т. е. измеримые функции в этом смысле близки к непрерывным функциям.

### Контрольные вопросы и задания

- 1 Дайте определение измеримой функции
- 2 Пользуясь определением, докажите измеримость функций
  - a)  $f(x) = c = \text{const}$ ,  $x \in [a, b]$ ,
  - b)  $f(x) = x$ ,  $x \in [a, b]$ ,
- 3 Сформулируйте теорему, выражающую необходимое и достаточное условие измеримости функции на множестве  $E$
- 4 Сформулируйте свойства 1°–5° измеримых функций. Докажите свойства 1°–3°
- 5 Когда говорят, что некоторое свойство справедливо почти всюду на множестве  $E$ ?
- 6 Какие функции называются эквивалентными на множестве  $E$ ? Докажите, что функция Дирихле эквивалентна на  $[a, b]$  непрерывной функции. Чему равна мера множества точек разрыва функции Дирихле на  $[a, b]$ ?
- 7 Сформулируйте и докажите свойство 6° измеримых функций
- 8 Пользуясь свойствами 5° и 6°, докажите, что если функция  $f(x)$  эквивалентна на  $[a, b]$  непрерывной функции, то  $f(x)$  измерима на  $[a, b]$
- 9 Сформулируйте теорему Лузина. Проиллюстрируйте ее на примере функции  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1 & \text{при } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$

### Примеры решения задач

1. Доказать, что функция Дирихле  $D(x)$  (см. формулу (1)) измерима на  $[a, b]$ .

Δ По определению измеримой функции нужно доказать, что  $\forall c$  множество  $\{x \in [a, b] : f(x) \leq c\} \equiv E_c$  измеримо. Рассмотрим три случая.

Если  $c \geq 1$ , то  $E_c = [a, b]$  — измеримое множество.

Если  $0 \leq c < 1$ , то  $E_c = \overline{Q}$ , где  $\overline{Q}$  — множество всех иррациональных чисел  $[a, b]$  — измеримое множество.

Если  $c < 0$ , то  $E_c = \emptyset$ , где  $\emptyset$  — пустое множество. Пустое множество считается измеримым:  $\mu\emptyset = 0$ .

Итак,  $D(x)$  — измеримая функция. ▲

2. Доказать свойство 5°: непрерывная на  $[a, b]$  функция  $f(x)$  измерима на  $[a, b]$ .

Δ Докажем, что  $\forall c$  множество  $\{x \in [a, b] : f(x) \leq c\} \equiv E_c$  измеримо. Если  $E_c = \emptyset$ , то  $E_c$  измеримо:  $\mu E_c = \mu\emptyset = 0$ . Пусть  $E_c$  не пусто. Докажем, что  $E_c$  — замкнутое множество. Отсюда будет следовать, что  $E_c$  измеримо. Пусть  $x_0$  — предельная точка множества  $E_c$ . Нужно доказать, что  $x_0 \in E_c$ . Ясно, что  $x_0 \in [a, b]$ . Согласно определению предельной точки  $\exists\{x_n\} \rightarrow x_0$ , причем  $\forall n \quad x_n \in E_c$ . Из непрерывности  $f(x)$  в точке  $x_0$  следует, что  $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x_0)$ , а так как  $x_n \in E_c$ , то  $f(x_n) \leq c$ . Значит,  $f(x_0) \leq c$ , т. е.  $x_0 \in E_c$ , что и требовалось доказать. ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

11. Докажите теорему, выражающую необходимое и достаточное условие измеримости функции на множестве  $E$ .

12. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in E, \\ 1 & \text{при } x \in D = [0, 1] \setminus E, \end{cases}$$

где  $E$  и  $D$  — множества из примера 5 из § 1. Докажите, что:

а)  $f(x)$  — измеримая функция на  $[0, 1]$ ;

б)  $D$  является множеством всех точек разрыва  $f(x)$ ;

в)  $\forall \varepsilon > 0$  существует непрерывная на  $[0, 1]$  функция  $g(x)$  такая, что  $\mu\{x \in [0, 1] : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$ .

13. Докажите, что функция  $\varphi(x) = x$ ,  $x \in D$ , где  $D$  — множество из упр. 12, измерима на множестве  $D$ .

14. Пользуясь теоремой Лузина, докажите, что сумма, разность и произведение измеримых на  $[a, b]$  функций являются измеримыми на  $[a, b]$  функциями.

### § 3. Интеграл Лебега

#### Основные понятия и теоремы

1. Определение интеграла Лебега от ограниченной функции. Пусть  $E$  — произвольное измеримое множество. Разбиением множества  $E$  назовем любую совокупность  $T = \{E_k\}$  конечного чис-

ла измеримых множеств  $E_1, E_2, \dots, E_n$  такую, что  $\bigcup_{k=1}^n E_k = E$ ;  $E_i \cap E_j = \emptyset$  при  $i \neq j$ .

Пусть на множестве  $E$  определена ограниченная функция  $f(x)$ . Для произвольного разбиения  $T = \{E_k\}$  положим  $M_k = \sup_{E_k} f(x)$ ,  $m_k = \inf_{E_k} f(x)$  и составим две суммы:

$$S_T = \sum_{k=1}^n M_k \mu E_k, \quad s_T = \sum_{k=1}^n m_k \mu E_k.$$

Числа  $S_T$  и  $s_T$  называются *верхней и нижней суммами* разбиения  $T$ . Очевидно,  $s_T \leq S_T$ .

Рассмотрим числовые множества  $\{s_T\}$  и  $\{S_T\}$  всевозможных нижних и верхних сумм. Они ограничены снизу числом  $m\mu E$ , а сверху — числом  $M\mu E$ , где  $m = \inf_E f(x)$ ,  $M = \sup_E f(x)$ , и, следовательно, имеют точные грани. Числа  $\underline{I} = \sup \{s_T\}$  и  $\overline{I} = \inf \{S_T\}$  называются *нижним и верхним интегралами Лебега*.

**Определение.** Ограниченнная на измеримом множестве  $E$  функция  $f(x)$  называется *интегрируемой по Лебегу* на этом множестве, если  $\underline{I} = \overline{I}$ .

При этом число  $\underline{I} = \overline{I}$  называется *интегралом Лебега* от функции  $f(x)$  по множеству  $E$  и обозначается  $\int_E f(x) d\mu(x)$ .

## 2. Связь между интегралами Римана и Лебега.

**Теорема 4.** Всякая функция, интегрируемая по Риману на  $[a, b]$ , является интегрируемой на  $[a, b]$  по Лебегу, причем интегралы Римана и Лебега от такой функции равны.

**Замечание.** Обратное утверждение неверно (см. пример на с. 189).

## 3. Класс интегрируемых по Лебегу ограниченных функций.

**Теорема 5.** Для того чтобы ограниченная на измеримом множестве  $E$  функция  $f(x)$  была интегрируема по Лебегу на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы  $f(x)$  была измеримой на  $E$ .

**4. Интеграл Лебега как предел лебеговских интегральных сумм.** Пусть  $f(x)$  — ограниченная измеримая функция на множестве  $E$ ,  $m = \inf_E f(x)$ ,  $M = \sup_E f(x)$ , и пусть  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  — произвольные числа такие, что  $m = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = M$ .

Лебеговским разбиением множества  $E$  называется разбиение  $T = \{E_k\}$ , где  $E_1 = \{x \in E : y_0 \leq f(x) \leq y_1\}$ ,  $E_k = \{x \in E : y_{k-1} < f(x) \leq y_k\}$ ,  $k = 2, 3, \dots, n$ .

Пусть  $\xi_k$  — произвольная точка из  $E_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Число

$I(E_k, \xi_k) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \mu E_k$  называется лебеговской интегральной суммой

(если какое-то  $E_k = \emptyset$ , то  $E_k$  не содержит ни одной точки  $\xi_k$ , и соответствующее слагаемое в сумме считаем равным нулю). Положим  $\delta = \max_{1 \leq k \leq n} \delta_k$ , где  $\delta_k = y_k - y_{k-1}$

Теорема 6 Предел лебеговских интегральных сумм при  $\delta \rightarrow 0$  равен интегралу Лебега, т. е.  $\lim_{\delta \rightarrow 0} I(E_k, \xi_k) = \int_E f(x) d\mu(x)$

Из этой теоремы следует, что интеграл Лебега можно определить как предел лебеговских интегральных сумм при  $\delta \rightarrow 0$ . Такое определение интеграла Лебега аналогично определению интеграла Римана с той разницей, что при составлении лебеговских интегральных сумм на частичные сегменты разбивается не область определения, а множество значений функции

### 5. Свойства интеграла Лебега.

$$1^\circ \int_E d\mu(x) = \mu E.$$

2° *Линейность интеграла.* Если  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $E$ , а  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные числа, то функция  $\alpha f(x) + \beta g(x)$  интегрируема на  $E$ , причем

$$\int_E [\alpha f(x) + \beta g(x)] d\mu(x) = \alpha \int_E f(x) d\mu(x) + \beta \int_E g(x) d\mu(x)$$

3° *Аддитивность интеграла.* Если  $f(x)$  интегрируема на  $E_1$  и  $E_2$ , причем  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ , то  $f(x)$  интегрируема на  $E_1 \cup E_2$  и выполняется равенство

$$\int_{E_1 \cup E_2} f(x) d\mu(x) = \int_{E_1} f(x) d\mu(x) + \int_{E_2} f(x) d\mu(x)$$

4°. Если  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $E$ , причем  $f(x) \geq g(x) \forall x \in E$ , то

$$\int_E f(x) d\mu(x) \geq \int_E g(x) d\mu(x)$$

### Контрольные вопросы и задания

- Что называется разбиением измеримого множества  $E$ ?
- Что такое верхняя и нижняя суммы данного разбиения?
- Докажите, что если разбиение  $T_2$  получено из разбиения  $T_1 = \{E_k\}$  с помощью разбиений каких-то  $E_k$  (т. е. путем измельчения разбиения  $T_1$ ), то  $s_{T_1} \leq s_{T_2}$ ,  $S_{T_1} \geq S_{T_2}$
- Докажите, что  $s_{T_1} \leq S_{T_2}$ ,  $s_{T_2} \leq S_{T_1}$  для любых разбиений  $T_1$  и  $T_2$
- Что такое верхний и нижний интегралы Лебега? Докажите, что  $\underline{I} \leq \overline{I}$

- 6 Дайте определения интегрируемой по Лебегу функции и интеграла Лебега
- 7 Какова связь между интегралами Лебега и Римана?
- 8 Что представляет собой класс интегрируемых по Лебегу ограниченных функций?
- 9 Что такое лебеговское разбиение?
- 10 Что такое лебеговская интегральная сумма?
- 11 Можно ли определить интеграл Лебега как предел лебеговских интегральных сумм? В чем состоят общность и отличие такого определения интеграла Лебега по сравнению с определением интеграла Римана?
- 12 Перечислите свойства интеграла Лебега

### Пример решения задачи

Доказать, что функция Дирихле  $D(x)$  (см. формулу (1) из § 2) интегрируема по Лебегу на  $[a, b]$ , и найти  $\int_{[a,b]} D(x) d\mu(x)$

**Δ I способ** Так как  $D(x) \geq 0$ , то для любого разбиения  $T$  имеем  $s_T \geq 0$ ,  $S_T \geq 0$ . Рассмотрим разбиение  $T^*$  сегмента  $[a, b]$  на множество  $Q$  рациональных чисел и множество  $\bar{Q}$  иррациональных чисел. Для этого разбиения

$$S_{T^*} = \sup_Q D(x)\mu Q + \sup_{\bar{Q}} D(x)\mu \bar{Q} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (b - a) = 0$$

Таким образом, множество  $\{S_T\}$  содержит число 0. Поэтому  $\bar{I} = \inf \{S_T\} = 0$

Так как все  $s_T \geq 0$ , то  $\underline{I} = \sup \{s_T\} \geq 0$ , а поскольку  $\underline{I} \leq \bar{I}$ , получаем  $\underline{I} = 0$

Итак,  $\underline{I} = \bar{I} = 0$ . Отсюда следует, что функция  $D(x)$  интегрируема по Лебегу на  $[a, b]$ , причем  $\int_{[a,b]} D(x) d\mu(x) = 0$

**II способ** Для любого лебеговского разбиения  $T = \{E_k\}$  имеем

$$\begin{aligned} \mu E_1 &= \mu \{x \in [a, b] \mid 0 \leq D(x) \leq y_1 < 1\} = \\ &\quad = \mu \bar{Q} = b - a, \quad f(\xi_1) = 0 \quad \forall \xi_1 \in E_1, \\ \mu E_2 &= \mu E_3 = \dots = \mu E_{n-1} = \mu \emptyset = 0, \\ \mu E_n &= \mu \{x \in [a, b] \mid 0 < y_{n-1} < D(x) \leq 1\} = \\ &\quad = \mu Q = 0, \quad f(\xi_n) = 1 \quad \forall \xi_n \in E_n \end{aligned}$$

Поэтому  $I(E_k, \xi_k) = f(\xi_1)\mu \bar{Q} + f(\xi_n)\mu Q = 0$ , т. е. любая лебеговская интегральная сумма равна нулю. Следовательно,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} I(E_k, \xi_k) = 0$ , т. е. функция  $D(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , причем  $\int_{[a,b]} D(x) d\mu(x) = 0$  ▲

**Замечание.** Известно, что функция  $D(x)$  неинтегрируема по Риману на  $[a, b]$ . Таким образом, интегрируемая по Лебегу функция может быть неинтегрируемой по Риману.

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

15. Пусть  $f(x)$  — функция из упр. 12. Докажите, что  $f(x)$  интегрируема по Лебегу, но неинтегрируема по Риману на  $[0, 1]$ .
16. Для функции из упр. 15 составьте лебеговские интегральные суммы и вычислите  $\int_{[0,1]} f(x) d\mu(x)$ .
17. Докажите, что функция  $\varphi(x)$  из упр. 13 интегрируема по Лебегу на множестве  $D$ , и вычислите  $\int_D \varphi(x) d\mu(x)$ .
18. Докажите, что если функция  $f(x) = 0$  почти всюду на измеримом множестве  $E$ , то она интегрируема, причем  $\int_E f(x) d\mu(x) = 0$ .
19. Докажите, что если ограниченные функции  $f(x)$  и  $g(x)$  эквивалентны на множестве  $E$  и функция  $f(x)$  интегрируема на  $E$ , то функция  $g(x)$  также интегрируема на  $E$ , причем  $\int_E g(x) d\mu(x) = \int_E f(x) d\mu(x)$ .
20. Докажите, что всякая функция, интегрируемая по Риману на  $[a, b]$ , является интегрируемой на  $[a, b]$  по Лебегу, причем интегралы Римана и Лебега от такой функции равны.
21. Докажите достаточность в теореме 5, т. е. докажите, что ограниченная измеримая на множестве  $E$  функция интегрируема по Лебегу на этом множестве.
22. Докажите, что имеет место следующий критерий интегрируемости функций по Лебегу (аналогичный критерию интегрируемости по Риману): для того чтобы ограниченная на измеримом множестве  $E$  функция была интегрируема по Лебегу на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы  $\forall \varepsilon > 0$  существовало такое лебеговское разбиение  $T$  множества  $E$ , для которого справедливо неравенство  $S_T - s_T < \varepsilon$ .
23. Докажите, что если функция  $f(x)$  ограничена и измерима на множестве  $E$ , то предел ее лебеговских интегральных сумм при  $\delta \rightarrow 0$  ( $\delta = \max_{1 \leq k \leq n} (y_k - y_{k-1})$ ) равен интегралу Лебега от функции  $f(x)$  по множеству  $E$ .

# ГЛАВА X

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

### § 1. Последовательности точек в $m$ -мерном евклидовом пространстве

#### Основные понятия и теоремы

**1. Понятие  $m$ -мерного евклидова пространства.** Совокупность  $m$  чисел называется *упорядоченной*, если указано, какое из этих чисел считается первым, какое — вторым и т. д. Произвольную упорядоченную совокупность  $m$  чисел часто записывают в виде  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , где  $x_1$  — первое число из совокупности  $m$  чисел,  $x_2$  — второе число и т. д.

Множество всевозможных упорядоченных совокупностей  $m$  чисел называется  *$m$ -мерным координатным пространством* и обозначается  $\mathbf{R}^m$ . Каждая упорядоченная совокупность  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  называется *точкой* этого пространства и обозначается так:  $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ . При этом числа  $x_1, x_2, \dots, x_m$  называются *координатами* точки  $M$ .

*Расстоянием* между двумя произвольными точками  $M_1(x_1, x_2, \dots, x_m)$  и  $M_2(y_1, y_2, \dots, y_m)$  координатного пространства  $\mathbf{R}^m$  называется число  $\rho(M_1, M_2)$ , определяемое формулой

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_m - x_m)^2}. \quad (1)$$

**Определение.** Координатное пространство  $\mathbf{R}^m$  с введенным по формуле (1) расстоянием между точками называется  *$m$ -мерным евклидовым пространством* и обозначается  $E^m$ .

Отметим, что евклидово пространство  $E^1$  представляет собой чистовую прямую (т. е. множество всех вещественных чисел) и геометрически изображается координатной прямой. Аналогично, евклидовы пространства  $E^2$  и  $E^3$  геометрически представляют собой соответственно плоскость и трехмерное пространство, в которых введены прямоугольные системы координат. Формула (1) обобщает известную из аналитической геометрии формулу расстояния между точками на случай  $m$ -мерного пространства.

**2. Множества точек пространства  $E^m$ .** Пусть точка  $A$  принадлежит  $E^m$ ,  $R$  — некоторое положительное число.

Множество точек  $\{M : \rho(M, A) \leq R\}$  (т. е. множество всех точек евклидова пространства  $E^m$ , удовлетворяющих условию  $\rho(M, A) \leq R$ ), называется  *$m$ -мерным шаром радиуса  $R$  с центром в точке  $A$* .

Множество точек  $\{M : \rho(M, A) < R\}$  называется *открытым m-мерным шаром радиуса R с центром в точке A*.

Множество точек  $\{M : \rho(M, A) = R\}$  называется *m-мерной сферой радиуса R с центром в точке A*.

Отметим, что при  $m = 2$  (т. е. на евклидовой плоскости) эти множества представляют собой соответственно круг, открытый круг и окружность радиуса  $R$  с центром в точке  $A$ .

Открытый шар радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $A$  называется  $\varepsilon$ -окрестностью точки  $A$ .

Пусть точка  $A$  имеет координаты  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ , а  $d_1, d_2, \dots, d_m$  — положительные числа. Множество точек  $\{M(x_1, x_2, \dots, x_m) : |x_1 - a_1| \leq d_1, |x_2 - a_2| \leq d_2, \dots, |x_m - a_m| \leq d_m\}$  называется *m-мерным параллелепипедом*. При  $m = 2$  это множество представляет собой прямоугольник.

Пусть  $\{M\}$  — некоторое множество точек пространства  $E^m$ .

**Определение.** Точка  $A$  называется *внутренней точкой* множества  $\{M\}$ , если существует  $\varepsilon$ -окрестность точки  $A$ , целиком принадлежащая множеству  $\{M\}$ , (т. е. все точки этой  $\varepsilon$ -окрестности принадлежат множеству  $\{M\}$ ); рис. 23)

**Определение.** Точка  $A$  называется *границей* множества  $\{M\}$ , если в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $A$  содержатся точки,

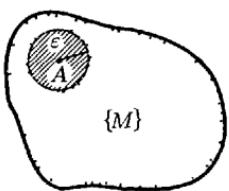


Рис. 23

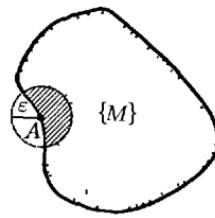


Рис. 24

как принадлежащие множеству  $\{M\}$ , так и не принадлежащие ему (рис. 24).

Отметим, что граничная точка множества может как принадлежать этому множеству, так и не принадлежать ему.

**Определение.** Множество  $\{M\}$  называется *открытым*, если все его точки внутренние.

**Определение.** Множество  $\{M\}$  называется *замкнутым*, если оно содержит все свои граничные точки

Множество всех граничных точек множества  $\{M\}$  называется его *границей*.

**Определение.** Точка  $A$  называется *предельной точкой* множества  $\{M\}$ , если в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки содержатся точки множества  $\{M\}$ , отличные от  $A$ .

Образно говоря, точка  $A$  называется предельной точкой множества  $\{M\}$ , если “к точке  $A$  можно подойти сколь угодно близко, идя по точкам множества  $\{M\}$  и не наступая на саму точку  $A$ ”. Отметим,

что предельная точка множества может принадлежать, а может не принадлежать этому множеству.

Множество  $\{M\}$  называется *ограниченным*, если все его точки содержатся в некотором шаре

Множество  $L = \{M(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \dots, x_m = \varphi_m(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$ , где  $\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t)$  — непрерывные функции на сегменте  $[\alpha, \beta]$ , называется *непрерывной кривой* в пространстве  $E^m$ . Точки  $A(\varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_m(\alpha))$  и  $B(\varphi_1(\beta), \dots, \varphi_m(\beta))$  называются *концами кривой L*. Говорят также, что *непрерывная кривая L* соединяет точки  $A$  и  $B$ .

Множество  $\{M(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_1 = x_1^0 + \alpha_1 t, x_2 = x_2^0 + \alpha_2 t, \dots, x_m = x_m^0 + \alpha_m t, -\infty < t < \infty\}$ , где  $x_1^0, \dots, x_m^0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  — числа, называется *прямой* в пространстве  $E^m$ . Очевидно, эта прямая проходит через точку  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  (точка  $M_0$  соответствует  $t = 0$ ).

Множество  $\{M\}$  называется *связным*, если любые две точки его множества можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей этому множеству.

*Окрестностью* точки  $A$  называется любое открытое связное множество, содержащее точку  $A$ .

Открытое связное множество называют также *областью*, а объединение области и ее границы — *замкнутой областью*.

**3. Последовательности точек в пространстве  $E^m$ .** Если каждому натуральному числу  $n$  поставлена в соответствие точка  $M_n \in E^m$ , то говорят, что определена *последовательность точек пространства  $E^m$* .  $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$  Ее обозначают  $\{M_n\}$ .

**Определение.** Точка  $A$  называется *пределом последовательности* точек  $\{M_n\}$ , если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(M_n, A) = 0$ .

Обозначение  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = A$  или  $M_n \rightarrow A$  при  $n \rightarrow \infty$ . Последовательность  $\{M_n\}$  называется при этом *сходящейся к точке A* (или просто *сходящейся*). Отметим, что определение предела последовательности  $\{M_n\}$  точек пространства  $E^m$  основано на понятии предела числовой последовательности. Условие  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(M_n, A) = 0$  означает, что числовая последовательность  $\{\rho(M_n, A)\}$  сходится к нулю. Согласно определению предела числовой последовательности отсюда следует, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists N$  такое, что  $\forall n > N \cdot \rho(M_n, A) < \varepsilon$ . Геометрически это означает, что в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $A$  находятся все точки последовательности  $\{M_n\}$ , начиная с некоторого номера  $N$  (зависящего, вообще говоря, от  $\varepsilon$ ).

**Лемма 1** *Если*

$$\{M_n(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\} \rightarrow A(a_1, a_2, \dots, a_m) \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

*то*

$$\{x_1^{(n)}\} \rightarrow a_1, \{x_2^{(n)}\} \rightarrow a_2, \dots, \{x_m^{(n)}\} \rightarrow a_m \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

*Обратно из (3) следует (2).*

Эта лемма показывает, что сходимость последовательности точек  $\{M_n(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$  эквивалентна *покоординатной сходимости*, т. е. сходимости  $m$  последовательностей координат  $\{x_1^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ .

**Определение.** Последовательность  $\{M_n\}$  называется *фундаментальной*, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N$  такое, что  $\forall n > N$  и любого натурального числа  $p$  выполняется неравенство  $\rho(M_n, M_{n+p}) < \varepsilon$ .

**Теорема 1** (критерий Коши сходимости последовательности). Для того чтобы последовательность  $\{M_n\}$  сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

**Определение.** Последовательность  $\{M_n\}$  называется *ограниченной*, если существует число  $R > 0$  такое, что  $\forall n: \rho(M_n, O) \leq R$ , где  $O$  — точка, все координаты которой равны нулю.

С геометрической точки зрения это означает, что все точки последовательности  $\{M_n\}$  содержатся в шаре радиуса  $R$  с центром в точке  $O$  (начале координат).

**Теорема 2** (теорема Больцано–Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности точек пространства  $E^m$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

### Контрольные вопросы и задания

- Дайте определения: а) упорядоченной совокупности  $m$  чисел; б)  $m$ -мерного координатного пространства; в)  $m$ -мерного евклидова пространства.
- Дайте определения: а)  $m$ -мерного шара, б) открытого  $m$ -мерного шара; в)  $m$ -мерной сферы; г)  $m$ -мерного параллелепипеда; д)  $\varepsilon$ -окрестности точки. Докажите, что во всяком  $m$ -мерном параллелепипеде содержится некоторый  $m$ -мерный шар. Каков максимальный радиус такого шара?
- Дайте определение внутренней точки множества. Может ли внутренняя точка множества не принадлежать этому множеству?
- Дайте определение граничной точки множества. Может ли точка быть одновременно внутренней и граничной точкой какого-то множества? Может ли точка множества быть одновременно не внутренней и не граничной точкой этого множества?
- Дайте определение открытого множества. Являются ли открытыми следующие множества:  
а)  $m$ -мерный шар; б)  $m$ -мерная сфера; в)  $\varepsilon$ -окрестность точки?
- Дайте определение замкнутого множества. Может ли множество быть одновременно: а) открытым и замкнутым; б) не открытым и не замкнутым? Являются ли замкнутыми следующие множества:  
а)  $m$ -мерный шар, б)  $m$ -мерная сфера; в)  $\varepsilon$ -окрестность точки, г)  $m$ -мерный параллелепипед?
- Что представляет собой граница: а)  $m$ -мерного шара; б) открытого  $m$ -мерного шара; в)  $m$ -мерной сферы?
- Дайте определение предельной точки множества. Докажите, что любая внутренняя точка множества является предельной точкой этого множества. Может ли граничная точка множества: а) быть предельной точкой этого множества, б) не быть предельной точкой этого множества?

9. Дайте определения: а) ограниченного множества; б) непрерывной кривой; в) прямой в пространстве  $E^m$ . Может ли непрерывная кривая быть неограниченным множеством? Является ли прямая замкнутым множеством?
10. Дайте определение связного множества. Являются ли связными следующие множества а)  $m$ -мерный шар; б)  $m$ -мерная сфера, в) прямая в пространстве  $E^m$ ?
11. Дайте определение окрестности точки. Докажите, что в любой окрестности точки  $A$  содержится некоторая  $\varepsilon$ -окрестность этой точки.
12. Какое множество точек называют областью; замкнутой областью?
13. Сформулируйте определения: а) последовательности точек пространства  $E^m$ ; б) предела последовательности  $\{M_n\}$ . Дайте геометрическую интерпретацию определения предела последовательности  $\{M_n\}$ .
14. Сформулируйте лемму об эквивалентности сходимости последовательности  $\{M_n(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$  и сходимости  $m$  числовых последовательностей  $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ . Пользуясь определением предела, докажите эту лемму.
15. Сформулируйте определения а) фундаментальной последовательности  $\{M_n\}$  точек пространства  $E^m$ ; б) нефундаментальной последовательности  $\{M_n\}$  (пользуясь правилом построения отрицаний). Дайте геометрическую интерпретацию этих определений.
16. Сформулируйте критерий Коши сходимости последовательности  $\{M_n\}$ .
17. Сформулируйте определения: а) ограниченной последовательности  $\{M_n\}$ ; б) неограниченной последовательности  $\{M_n\}$ . Дайте геометрическую интерпретацию этих определений.
18. Дайте определение подпоследовательности последовательности  $\{M_n\}$  и сформулируйте теорему Больцано–Вейерштрасса. Верно ли утверждение из неограниченной последовательности  $\{M_n\}$  можно выделить сходящуюся подпоследовательность?

### Примеры решения задач

1. Доказать, что для любых точек  $M_1, M_2, M_3$  пространства  $E^m$  справедливо неравенство треугольника

$$\rho(M_1, M_2) \leq \rho(M_1, M_3) + \rho(M_3, M_2). \quad (4)$$

△ Пусть точки  $M_1, M_2, M_3$  имеют следующие координаты:  $M_1(x_1, x_2, \dots, x_m), M_2(y_1, y_2, \dots, y_m), M_3(z_1, z_2, \dots, z_m)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \rho(M_1, M_2) &= \left[ \sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}, & \rho(M_1, M_3) &= \left[ \sum_{i=1}^m (x_i - z_i)^2 \right]^{1/2}, \\ \rho(M_3, M_2) &= \left[ \sum_{i=1}^m (z_i - y_i)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Для доказательства справедливости неравенства (4) нам понадо-

бится неравенство Буняковского для сумм \*)

$$\sum_{i=1}^m a_i b_i \leq \left[ \sum_{i=1}^m a_i^2 \right]^{1/2} \left[ \sum_{i=1}^m b_i^2 \right]^{1/2}.$$

Используя это неравенство, получаем

$$\begin{aligned} \rho^2(M_1, M_2) &= \sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^m [(x_i - z_i) + (z_i - y_i)]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^m (x_i - z_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^m (x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^m (z_i - y_i)^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m (x_i - z_i)^2 + 2 \left[ \sum_{i=1}^m (x_i - z_i)^2 \right]^{1/2} \left[ \sum_{i=1}^m (z_i - y_i)^2 \right]^{1/2} + \sum_{i=1}^m (z_i - y_i)^2 = \\ &= \rho^2(M_1, M_3) + 2\rho(M_1, M_3)\rho(M_3, M_2) + \rho^2(M_3, M_2) = \\ &= [\rho(M_1, M_3) + \rho(M_3, M_2)]^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\rho(M_1, M_2) \leq \rho(M_1, M_3) + \rho(M_3, M_2)$ . ▲

**2.** Доказать, что открытый шар  $\Omega = \{M : \rho(M, A) < R\}$  является открытым множеством.

Δ Согласно определению открытого множества нужно доказать, что любая точка шара  $\Omega$  является внутренней точкой этого шара, т. е. что для любой точки  $M_0 \in \Omega$  существует некоторая  $\varepsilon$ -окрестность этой точки, целиком принадлежащая  $\Omega$ . Пусть  $M_0$  — произвольная точка шара  $\Omega$  и пусть  $\rho(M_0, A) = r$ . Так как  $M_0 \in \Omega$ , то  $r < R$ . Положим  $\varepsilon = R - r$  и рассмотрим  $\varepsilon$ -окрестность точки  $M_0$ . Любая точка  $M$  из этой  $\varepsilon$ -окрестности удовлетворяет условию  $\rho(M, M_0) < \varepsilon$ . Используя неравенство треугольника, получаем

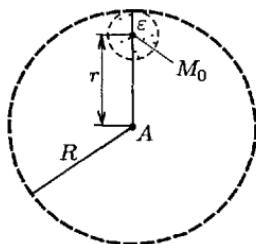


Рис. 25

Таким образом,  $\rho(M, A) < R$ , т. е. любая точка  $M$  из указанной  $\varepsilon$ -окрестности точки  $M_0$  принадлежит шару  $\Omega$ , что и требовалось доказать. Отметим, что в случаях трехмерного пространства и плоскости доказанный факт является наглядно очевидным (рис. 25). ▲

**3.** Доказать, что сфера  $S = \{M : \rho(M, A) = R\}$  является замкнутым множеством.

Δ Согласно определению замкнутого множества нужно доказать, что

\*) Доказательство справедливости неравенства Буняковского для сумм приведено в учебнике В. А. Ильина и Э. Г. Позняка "Основы математического анализа", ч. I (М., Наука, 1982), с. 349.

сфера содержит все свои граничные точки. Докажем сначала, что любая точка  $M_0$  сферы является граничной, т. е. что в любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $M_0$  содержатся точки, как принадлежащие сфере, так и не принадлежащие ей. Пусть точки  $A$  и  $M_0$  имеют следующие координаты:  $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$ ,  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ . Так как  $M_0 \in S$ , то  $\rho(M_0, A) = \sqrt{(x_1^0 - a_1)^2 + \dots + (x_m^0 - a_m)^2} = R$ .

Рассмотрим точку  $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , где  $x_i = x_i^0 + \frac{x_i^0 - a_i}{R} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$ . Поскольку

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{\left(\frac{x_1^0 - a_1}{R} \cdot \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_m^0 - a_m}{R} \cdot \frac{\varepsilon}{2}\right)^2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

точка  $M$  содержится в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $M_0$ . Кроме того, точка  $M$  не лежит на сфере  $S$ , так как

$$\rho(M, A) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_m - a_m)^2} = R + \frac{\varepsilon}{2} > R.$$

Таким образом, в произвольной  $\varepsilon$ -окрестности точки  $M_0$  сферы содержатся точки, как принадлежащие сфере (например, сама точка  $M_0$ ), так и не принадлежащие ей (например, точка  $M$ ). Заметим, что в случае сферы в трехмерном пространстве этот факт наглядно очевиден. Итак, любая точка сферы является ее граничной точкой.

Если же точка  $M_0$  не лежит на сфере, то она не является граничной точкой этой сферы. В самом деле, если, например,  $\rho(M_0, A) = r < R$ , то, взяв  $\varepsilon = R - r$ , получим, что ни одна точка  $M$  из  $\varepsilon$ -окрестности точки  $M_0$  не лежит на сфере ( $\rho(M, A) \leq \rho(M, M_0) + \rho(M_0, A) < \varepsilon + r = R$ ). Это и означает, что точка  $M_0$  не является граничной точкой сферы.

Мы доказали, что множество всех граничных точек сферы совпадает с самой сферой. Значит, сфера содержит все свои граничные точки, т. е. является замкнутым множеством. ▲

4. Доказать, что если  $A$  — предельная точка множества  $\{M\}$ , то существует последовательность  $\{M_n\}$ , сходящаяся к  $A$ , каждая точка которой принадлежит множеству  $\{M\}$  и не совпадает с  $A$ .

Δ Рассмотрим  $\varepsilon_1$ -окрестность точки  $A$ , где  $\varepsilon_1 = 1$ . Согласно определению предельной точки множества в  $\varepsilon_1$ -окрестности точки  $A$  содержатся точки множества  $\{M\}$ , отличные от  $A$ . Возьмем одну из этих точек и обозначим ее  $M_1$ . Пусть  $\rho(M_1, A) = \delta_1$ . Очевидно,  $\delta_1 < 1$ .

Положим  $\varepsilon_2 = \min(\delta_1, 1/2)$ . В  $\varepsilon_2$ -окрестности точки  $A$  также содержатся точки множества  $\{M\}$ , отличные от  $A$ . Одну из этих точек обозначим  $M_2$ . Пусть  $\rho(M_2, A) = \delta_2$ . Очевидно,  $\delta_2 < 1/2$ .

Далее, положим  $\varepsilon_3 = \min(\delta_2, 1/3)$  и аналогичным образом выберем точку  $M_3 \in \{M\}$ . При этом  $\rho(M_3, A) = \delta_3 < 1/3$ .

Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность  $\{M_n\}$ , каждая точка которой принадлежит  $\{M\}$  и не совпадает с  $A$ , причем  $\rho(M_n, A) < 1/n$ . Отсюда следует, что  $\{M_n\} \rightarrow A$  при  $n \rightarrow \infty$ . ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Докажите, что  $m$ -мерный шар  $\{M \mid \rho(M, A) \leq R\}$  является замкнутым множеством
2. Докажите, что если множество  $\{M\}$  точек пространства  $E^m$  ограничено, то оно содержится в некотором  $m$ -мерном шаре с центром в точке  $O(0, 0, \dots, 0)$
3. Докажите, что ограниченность множества  $\{M(x_1, x_2, \dots, x_m)\}$  эквивалентна ограниченности  $m$  числовых множеств  $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_m\}$
4. Докажите, что в пространстве  $E^m$  непрерывная кривая — ограниченное множество, а прямая — неограниченное множество
5. Составьте уравнения прямой, проходящей через точки  $M_1(y_1, y_2, \dots, y_m)$  и  $M_2(z_1, z_2, \dots, z_m)$
6. Докажите, что  $m$ -мерный шар  $\{M \mid \rho(M, A) \leq R\}$  является связным множеством
7. Найдите множество всех предельных точек а)  $m$ -мерного шара, б) открытого  $m$ -мерного шара, в)  $m$ -мерной сферы
8. Докажите утверждение для того чтобы множество  $\{M\}$  было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы оно содержало все свои предельные точки
9. Докажите, что если последовательность  $\{M_n\}$  граничных точек множества  $\{M\}$  сходится к точке  $A$ , то  $A$  — также граничная точка множества  $\{M\}$
10. Докажите, что если все точки последовательности  $\{M_n\}$  принадлежат замкнутому множеству  $\{M\}$  и  $\{M_n\} \rightarrow A$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $A \in \{M\}$
11. Докажите, что фундаментальность последовательности  $M_n(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})$  эквивалентна фундаментальности  $m$  числовых последовательностей  $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$

## § 2. Предел функции

### Основные понятия и теоремы

**1. Понятие функции  $m$  переменных.** Пусть  $\{M\}$  — множество точек пространства  $E^m$ . Если каждой точке  $M(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \{M\}$  поставлено в соответствие некоторое число  $u$ , то говорят, что на множестве  $\{M\}$  определена *функция  $m$  переменных*, и пишут  $u = f(M)$  или  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ . Числовые переменные  $x_1, x_2, \dots, x_m$  называются *независимыми переменными* (или *аргументами*) функции. Множество  $\{M\}$  называется *областью определения функции*  $f(M)$ , а число  $u$ , соответствующее данной точке  $M$ , — *частным значением функции в точке  $M$* . Совокупность  $\{u\}$  всех частных значений функции  $u = f(M)$  называется *множеством значений* этой функции.

Функции двух и трех переменных часто обозначают так:  $u = f(x, y)$  и  $u = f(x, y, z)$ .

**2. Предел функции. Теоремы о пределах.** Пусть функция  $u = f(M)$  определена на множестве  $\{M\}$  и точка  $A$  — предельная точка множества  $\{M\}$ .

**Определение 1** (по Коши). Число  $b$  называется *пределом функции*  $f(M)$  в точке  $A$  (при  $M \rightarrow A$ ), если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что  $\forall M$ , удовлетворяющей условиям  $M \in \{M\}$ ,  $0 < \rho(M, A) < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(M) - b| < \varepsilon$ .

**Определение 2** (по Гейне). Число  $b$  называется *пределом функции*  $f(M)$  в точке  $A$ , если для любой сходящейся к  $A$  последовательности  $\{M_n\}$  такой, что  $M_n \in \{M\}$ ,  $M_n \neq A$ , соответствующая последовательность значений функции  $\{f(M_n)\}$  сходится к  $b$ .

Обозначение:  $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = b$  или  $\lim_{x_1 \rightarrow a_1, \dots, x_m \rightarrow a_m} f(x_1, \dots, x_m) = b$ , где  $a_1, \dots, a_m$  — координаты точки  $A$ .

Теорема 3. Определения 1 и 2 предела функции эквивалентны.

Теорема 4. Пусть функции  $f(M)$  и  $g(M)$  определены на множестве  $\{M\}$  и пусть  $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = b$ ,  $\lim_{M \rightarrow A} g(M) = c$ . Тогда

$$\lim_{M \rightarrow A} (f(M) + g(M)) = b + c,$$

$$\lim_{M \rightarrow A} (f(M) - g(M)) = b - c,$$

$$\lim_{M \rightarrow A} f(M)g(M) = bc,$$

$$\lim_{M \rightarrow A} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{b}{c} \text{ при условии } c \neq 0.$$

Функция  $u = f(M)$  называется *бесконечно малой* при  $M \rightarrow A$  (в точке  $A$ ), если  $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = 0$ . Если  $f(M)$  и  $g(M)$  — бесконечно малые функции при  $M \rightarrow A$  и если  $\lim_{M \rightarrow A} \frac{f(M)}{g(M)} = 0$ , то говорят, что функция  $f(M)$  является *бесконечно малой более высокого порядка* при  $M \rightarrow A$  (в точке  $A$ ), чем  $g(M)$ , и пишут  $f = o(g)$  при  $M \rightarrow A$ .

Пусть функция  $u = f(M)$  определена на множестве  $\{M\}$ , которое содержит точки, сколь угодно удаленные от точки  $O(0, 0, \dots, 0)$ .

**Определение** Число  $b$  называется *пределом функции*  $f(M)$  при  $M \rightarrow \infty$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists R > 0$  такое, что  $\forall M$ , удовлетворяющей условиям  $M \in \{M\}$ ,  $\rho(M, O) > R$ , выполняется неравенство  $|f(M) - b| < \varepsilon$ .

Обозначение:  $\lim_{M \rightarrow \infty} f(M) = b$  или  $\lim_{x_1 \rightarrow \infty, \dots, x_m \rightarrow \infty} f(x_1, \dots, x_m) = b$ .

**3. Повторные пределы.** Для функций многих переменных наряду с обычным понятием предела вводится понятие повторного предела. Оно связано с изучением предела функции при изменении только одной независимой переменной и фиксированных значениях остальных. Рассмотрим это понятие на примере функции двух переменных.

Пусть функция  $u = f(x, y)$  определена в прямоугольнике  $Q = \{(x, y) : |x - x_0| < d_1, |y - y_0| < d_2\}$ , кроме, быть может, отрезков прямых  $x = x_0$  и  $y = y_0$ . При фиксированном значении переменной  $y$  функция  $f(x, y)$  становится функцией одной переменной  $x$ . Пусть

для любого фиксированного значения  $y$ , удовлетворяющего условию  $0 < |y - y_0| < d_2$ , существует предел функции  $f(x, y)$  при  $x \rightarrow x_0$  (этот предел зависит, вообще говоря, от  $y$ ):

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y - \text{фикс}}} f(x, y) = \varphi(y).$$

Пусть, далее, предел функции  $\varphi(y)$  при  $y \rightarrow y_0$  существует и равен  $b$ :

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = b$$

Тогда говорят, что в точке  $M_0(x_0, y_0)$  существует *повторный предел* функции  $f(x, y)$ , и пишут

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = b$$

При этом  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y - \text{фикс} \\ 0 < |y - y_0| < d_2}} f(x, y)$  называется *внутренним пределом в повторном*.

аналогично определяется другой повторный предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ , в котором внутренним является  $\lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ x - \text{фикс} \\ 0 < |x - x_0| < d_1}} f(x, y)$ .

**Теорема 5.** Пусть в точке  $M_0(x_0, y_0)$  существует предел функции  $f(x, y)$ , равный  $b$  ( $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = b$ ), а также внутренние пределы в двух повторных пределах этой функции. Тогда существуют повторные пределы  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$  и  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ , причем каждый из них равен  $b$ .

Отметим, что обратное утверждение неверно (см. примеры 3 и 7). Понятие повторных пределов функции можно ввести и для того случая, когда  $x_0$  (либо  $y_0$ , либо  $x_0$  и  $y_0$ ) равно  $+\infty$  (или  $-\infty$ , или  $\infty$ )

### Контрольные вопросы и задания

- Сформулируйте два определения предела функции  $f(M)$  в точке  $A$ . Что означает эквивалентность этих определений?
- Для каждого из двух определений предела функции  $f(M)$  в точке  $A$  сформулируйте отрицание определения
- Может ли быть так, что  $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = b$ ,  $\lim_{M \rightarrow A} g(M) = c$ , где  $b$  и  $c$  — числа, но равенство  $\lim_{M \rightarrow A} (f(M) + g(M)) = b + c$  не выполняется?
- Дайте определение бесконечно малой функции при  $M \rightarrow A$ . Приведите пример бесконечно малой функции при  $M \rightarrow O(0, 0, \dots, 0)$
- Сформулируйте определение бесконечно малой функции  $f(M)$  более высокого порядка при  $M \rightarrow A$ , чем  $g(M)$ . Приведите пример таких функций
- Дайте определение предела функции  $f(M)$  при  $M \rightarrow \infty$ . Приведите пример непостоянной функции  $f(M)$ , у которой  $\lim_{M \rightarrow \infty} f(M) = 1$

- 7 Дайте определение повторного предела функции  $f(x, y)$  в точке  $M_0(x_0, y_0)$
- 8 Известно, что функция  $f(x, y)$  имеет в данной точке предел и повторные пределы. Могут ли какие-то два из них быть неравными?
- 9 Сформулируйте определение повторного предела
- а)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y)$ , б)  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ , в)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lim_{y \rightarrow -\infty} f(x, y)$

### Примеры решения задач

**1.** Доказать, что функция  $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$  является бесконечно малой в точке  $O(0, 0)$ .

Согласно определению бесконечно малой функции требуется доказать, что  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$ . Отметим, что функция  $f(x, y)$  не определена

на осях координат, но точка  $O(0, 0)$  является предельной точкой области определения  $f(x, y)$ , и, значит, можно рассмотреть вопрос о пределе функции в точке  $O$ .

Воспользуемся определением предела функции по Коши. Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$  и положим  $\delta = \varepsilon/2$ . Тогда если  $\rho(M(x, y), O(0, 0)) = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ , то  $|x| < \delta$  и  $|y| < \delta$ . Следовательно,

$$|f(x, y) - 0| = \left| (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x| + |y| < 2\delta = \varepsilon$$

Это и означает, что  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$ .  $\blacktriangle$

**2.** Вычислить предел  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1 + xy)^{2/(x^2+xy)}$ .

Представим функцию в виде  $[(1 + xy)^{1/(xy)}]^{2y/(x+y)}$ . Так как  $z = xy \rightarrow 0$  при  $(\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2})$ , то  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1 + xy)^{1/(xy)} = \lim_{z \rightarrow 0} (1 + z)^{1/z} = e$ . Далее,  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{2y}{x+y} = 2$  (в силу теоремы 4). Поэтому искомый предел равен  $e^2$ .  $\blacktriangle$

**3.** Существует ли предел  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ ?

Пусть точка  $M(x, y)$  стремится к точке  $O(0, 0)$  по прямой  $y = kx$ , проходящей через точку  $O$ . Тогда получим

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ (y=kx)}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

Таким образом, приближаясь к точке  $O(0, 0)$  по различным прямым, соответствующим разным значениям  $k$ , получаем разные

пределные значения Отсюда следует, что предел данной функции в точке  $O(0,0)$  не существует  $\blacktriangle$

4. Вычислить предел  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+2y}{x^2 - 2xy + 2y^2}$

$\Delta$  Перейдем к полярным координатам  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ . Тогда

$$\frac{x+2y}{x^2 - 2xy + 2y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\cos \varphi + 2 \sin \varphi}{\cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi \sin \varphi + 2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{f(\varphi)}{g(\varphi)},$$

а условие  $M(x,y) \rightarrow \infty$  эквивалентно условию  $\rho \rightarrow \infty$ . При  $\rho \rightarrow \infty$  первый сомножитель  $1/\rho$  стремится к нулю. Докажем ограниченность второго сомножителя — функции  $f(\varphi)/g(\varphi)$  при  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Отсюда будет следовать, что искомый предел равен нулю

Очевидно,  $|f(\varphi)| \leq 3$ , а для функции  $g(\varphi)$  нетрудно установить, что ее минимальное значение положительно. Это можно сделать, используя известные методы исследования на экстремум функций одной переменной, а можно и проще, а именно запишем  $g(\varphi)$  в виде  $g(\varphi) = (\cos \varphi - \sin \varphi)^2 + \sin^2 \varphi$ . Ясно, что  $g(\varphi) > 0$  при  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , а так как  $g(\varphi)$  — непрерывная функция, то она имеет на сегменте  $[0, 2\pi]$  минимальное значение, причем  $m = \min_{[0, 2\pi]} g(\varphi) > 0$ . Итак,  $g(\varphi) \geq m > 0$ . Следовательно,  $|f(\varphi)/g(\varphi)| \leq 3/m$ , т. е. функция  $f(\varphi)/g(\varphi)$  ограничена при  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .  $\blacktriangle$

5. Вычислить повторные пределы функции  $f(x,y) = \frac{ax+by}{cx+dy}$  в точке  $O(0,0)$  при условии  $c \neq 0$ ,  $d \neq 0$

$\Delta$  Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x-\text{фикс}}} \frac{ax+by}{cx+dy} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x-\text{фикс}}} \frac{a+b(y/x)}{c+d(y/x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{c} = \frac{a}{c} \end{aligned}$$

Аналогично получаем  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = \frac{b}{d}$ .  $\blacktriangle$

6. Существуют ли повторные пределы функции  $f(x,y) = (x+y) \times \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$  в точке  $O(0,0)$ ?

$\Delta$  Рассмотрим внутренний предел  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y-\text{фикс}}} f(x,y)$  в повторном пре-

деле  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y)$ . Представим функцию  $f(x,y)$  в виде суммы двух слагаемых  $f(x,y) = x \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ . При фиксированном  $y \neq 0$  первое слагаемое  $x \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$  стремится к нулю при  $x \rightarrow 0$ . Во

втором слагаемом произведение  $y \sin \frac{1}{y}$  является постоянным, отличным от нуля, если  $y \neq \frac{1}{\pi n}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), а сомножитель  $\sin \frac{1}{x}$  не имеет предела при  $x \rightarrow 0$  в сколь угодно малой окрестности точки  $x = 0$ . Функция  $\sin \frac{1}{x}$  принимает все значения от  $-1$  до  $1$ . Следовательно, второе слагаемое  $y \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ , а значит, и вся функция  $f(x, y)$  не имеет предела при  $x \rightarrow 0$  и фиксированном  $y$ , не равном  $0$  и  $\frac{1}{\pi n}$ . Таким образом, указанный внутренний предел не существует, а поэтому не существует повторный предел  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ . Аналогично можно доказать, что не существует другой повторный предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ . ▲

**Замечание.** В примере 1 было доказано, что предел функции  $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$  в точке  $O(0, 0)$  существует и равен нулю. Таким образом на основании примеров 1 и 6 можно сделать вывод из существования предела функции в точке не следует существование повторных пределов функции в этой точке (сравните этот вывод с утверждением теоремы 5).

**7.** Вычислить повторные пределы функции  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  в точке  $O(0, 0)$ .

Δ Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x \text{ фикс}}} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{0}{x^2} \right) = 0$$

Аналогично получаем  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ . ▲

**Замечание.** В примере 3 было доказано, что предел функции  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  в точке  $O(0, 0)$  не существует. Таким образом, на основании примеров 3 и 7 можно сделать вывод из существования и равенства повторных пределов функции в данной точке не следует существование предела функции в этой точке.

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

12. Докажите, что функция  $f(x, y)$  является бесконечно малой в точке  $O(0, 0)$ , если а)  $f(x, y) = \frac{x^2}{|x| + |y|}$ , б)  $f(x, y) = \sin(x + y) \ln(x^2 + y^2)$
13. Вычислите пределы
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin xy}{x}$ , б)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg} 2xy}{x^2 y}$ , в)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} (1 + xy)^{y/(x^7 y + xy^2)}$ ,
  - $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + by}{x^2 + xy + y^2}$ , д)  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$ , е)  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{|x^3| + |y^3|}$ ,
  - $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x + y)e^{-(x^2 + y^2)}$ , з)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{|x|}$

14. Докажите, что следующие пределы не существуют

а)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}$ , б)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x+y)}{y}$ , в)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin|x-y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

15. Докажите, что функция  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$  обладает следующими свойствами

а) при стремлении точки  $M(x, y)$  к точке  $O(0, 0)$  по любой прямой, проходящей через точку  $O(0, 0)$ , предел функции равен нулю, б) предел функции в точке  $O$  не существует

16. Вычислите повторные пределы  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$  и  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ , если

а)  $f(x, y) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,

б)  $f(x, y) = \frac{\sin(x+y)}{2x+3y}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$

в)  $f(x, y) = \frac{\cos x - \cos y}{x^2 + y^2}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,

г)  $f(x, y) = \frac{\sin|x| - \sin|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,

д)  $f(x, y) = \frac{\sin 3x - \operatorname{tg} 2y}{6x+3y}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$

е)  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}$ ,  $x_0 = \infty$ ,  $y_0 = \infty$ ,

ж)  $f(x, y) = \frac{x^y}{1+x^y}$ ,  $x_0 = +\infty$ ,  $y_0 = +0$ ,

з)  $f(x, y) = \sin \frac{\pi(x+y)}{2x+3y}$ ,  $x_0 = \infty$ ,  $y_0 = \infty$

17. Существуют ли предел и повторные пределы функции  $f(x, y)$  в точке  $(x_0, y_0)$  если

а)  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,

б)  $f(x, y) = \log_x(x+y)$ ,  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 0$ ,

в)  $f(x, y) = \frac{\sin x + \sin y}{x+y}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ?

### § 3. Непрерывность функции

#### Основные понятия и теоремы

**1. Определение непрерывности.** Пусть функция  $m$  переменных  $u = f(M)$  определена на множестве  $\{M\}$  и пусть  $A$  — предельная точка множества  $\{M\}$ , принадлежащая этому множеству

Определение. Функция  $u = f(M)$  называется *непрерывной в точке  $A$* , если  $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = f(A)$

*Приращением* (или *полным приращением*) функции  $u = f(M)$  в точке  $A$  называется функция  $\Delta u = f(M) - f(A)$ ,  $M \in \{M\}$

Пусть точка  $A$  имеет координаты  $(a_1, \dots, a_m)$ , а точка  $M$  — координаты  $(x_1, \dots, x_m)$ . Если ввести обозначения  $x_1 - a_1 = \Delta x_1, \dots, x_m - a_m = \Delta x_m$ , то

$-a_m = \Delta x_m$ , то приращение функции  $\Delta u$  можно записать в виде  $\Delta u = f(a_1 + \Delta x_1, \dots, a_m + \Delta x_m) - f(a_1, \dots, a_m)$

Очевидно, условие непрерывности функции в точке  $A$  ( $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = f(A)$ ) эквивалентно условию  $\lim_{M \rightarrow A} \Delta u = 0$  или  $\lim_{\Delta x_m \rightarrow 0} \Delta u = 0$ . Это равенство называется *разностной формой условия непрерывности* функции в точке  $A$ .

Предельные точки области определения функции  $u = f(M)$ , в которых функция не является непрерывной, называются *точками разрыва* этой функции.

**2. Непрерывность по отдельным переменным.** Зафиксируем все аргументы функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$ , кроме одного из них, например,  $x_k$ , положив  $x_i = a_i$  ( $i \neq k$ ). Аргументу  $x_k$  дадим произвольное приращение  $\Delta x_k$ . Функция  $u = f(r_1, \dots, x_m)$  получит приращение

$$\Delta_{x_k} u = f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \Delta x_k, a_{k+1}, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_m),$$

которое называется *частным приращением* функции в точке  $A$ , соответствующим приращению  $\Delta x_k$  аргумента  $x_k$ . Отметим что,  $\Delta_{x_k} u$  является функцией одной переменной  $\Delta x_k$ .

Определение 1 Функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  называется *непрерывной в точке  $A(a_1, \dots, a_m)$  по переменной  $x_k$* , если  $\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \Delta_{x_k} u = 0$ .

Можно дать другое, эквивалентное определение непрерывности по переменной  $x_k$ :

Определение 2 Функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  называется *непрерывной в точке  $A(a_1, \dots, a_m)$  по переменной  $x_k$* , если функция  $f(a_1, \dots, x_k, \dots, a_m)$  одной переменной  $x_k$  непрерывна в точке  $x_k = a_k$ .

В отличие от непрерывности по отдельным переменным обычную непрерывность функции (определение п. 1) называют иногда *непрерывностью по совокупности переменных*.

Теорема 6 *Если функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  определена в некоторой окрестности точки  $A$  и непрерывна в точке  $A$ , то она непрерывна в этой точке по каждой из переменных  $x_1, \dots, x_m$*

Обратное утверждение неверно (см. пример 2 на с. 208).

### 3. Основные теоремы о непрерывных функциях.

Теорема 7 (об арифметических операциях над непрерывными функциями) *Если функции  $f(M)$  и  $g(M)$  определены на множестве  $\{M\}$  и непрерывны в точке  $A \in \{M\}$ , то функции  $f(M) + g(M)$ ,  $f(M) - g(M)$ ,  $f(M)g(M)$  и  $\frac{f(M)}{g(M)}$  (частное при условии  $g(A) \neq 0$ ) непрерывны в точке  $A$ .*

Пусть функции

$$x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), x_2 = \varphi_2(t_1, \dots, t_k), \dots, x_m = \varphi_m(t_1, \dots, t_k)$$

определенны на множестве  $\{T(t_1, \dots, t_k)\} \subset E^k$ . Тогда каждой точке  $T(t_1, \dots, t_k) \in \{T\}$  ставится в соответствие точка  $M(x_1, \dots, x_k) \in E^m$ .

Множество всех таких точек  $M$  обозначим  $\{M\}$ . Пусть на множестве  $\{M\}$  определена функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$ . Тогда говорят, что на множестве  $\{T\}$  определена *сложная функция*  $u = f(\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, \dots, t_k))$ .

**Теорема 8** (о непрерывности сложной функции) *Пусть функции  $x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_m = \varphi_m(t_1, \dots, t_k)$  непрерывны в точке  $A(a_1, \dots, a_k)$ , а функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  непрерывна в точке  $B(b_1, \dots, b_m)$ , где  $b_i = \varphi_i(a_1, \dots, a_k)$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Тогда сложная функция  $u = f(\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, \dots, t_k))$  непрерывна в точке  $A$*

Функция  $u = f(M)$  называется *непрерывной на множестве  $\{M\}$* , если она непрерывна в каждой точке этого множества

Функция  $u = f(M)$  называется *ограниченной на множестве  $\{M\}$* , если существуют числа  $c$  и  $C$  такие, что  $\forall M \in \{M\}$  выполняются неравенства  $c \leq f(M) \leq C$ .

**Теорема 9** (первая теорема Вейерштрасса). *Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция ограничена на этом множестве*

Определение Число  $U$  называется *точной верхней гранью функции  $u = f(M)$  на множестве  $\{M\}$* , если.

$$1) \forall M \in \{M\} \text{ выполняется неравенство } f(M) \leq U,$$

$$2) \forall U' < U \exists M' \in \{M\} \text{ такая, что } f(M') > U'$$

Обозначение  $U = \sup_{\{M\}} f(M)$

Аналогично определяется точная нижняя грань функции

$$\inf_{\{M\}} f(M).$$

**Теорема 10** (вторая теорема Вейерштрасса). *Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция достигает на этом множестве своих точных граней*

Пусть каждая точка  $M$  множества  $\{M\}$  является его предельной точкой и пусть на множестве  $\{M\}$  определена функция  $u = f(M)$ .

Определение Функция  $u = f(M)$  называется *равномерно непрерывной на множестве  $\{M\}$* , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что  $\forall M_1, M_2 \in \{M\}$ , удовлетворяющих неравенству  $\rho(M_1, M_2) < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$ .

**Теорема 11** (теорема Кантора). *Непрерывная на замкнутом ограниченном множестве функция равномерно непрерывна на этом множестве.*

**Замечание** Обе теоремы Вейерштрасса и теорема Кантора имеют место для функций, непрерывных на замкнутом ограниченном множестве. В случае функций одной переменной эти теоремы были справедливы для функций, непрерывных на сегменте. Таким образом, аналогом сегмента в многомерном случае является замкнутое ограниченное множество

## Контрольные вопросы и задания

- 1 Дайте определение непрерывности функции в точке
- 2 Что такое полное приращение функции  $u = f(M)$  в точке  $A$ ? Как записать условие непрерывности функции в точке  $A$ , используя ее приращение в этой точке? Выразите приращение функции  $u = xy$  в точке  $A(1, 2)$  через приращения  $\Delta x$  и  $\Delta y$  ее аргументов
- 3 Какие точки называются точками разрыва функции  $u = f(M)$ ? Приведите примеры точек разрыва функций двух и трех переменных
- 4 Что называется частным приращением функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  в данной точке  $A(a_1, \dots, a_m)$ ? Как получить частное приращение функции из ее полного приращения? Напишите частные приращения функции  $u = xy$  в точке  $A(1, 2)$
- 5 Сформулируйте два определения непрерывности функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  в точке  $A$  по отдельным переменным и докажите их эквивалентность
- 6 Как связаны непрерывность функции в точке по совокупности аргументов и непрерывность в этой точке по отдельным переменным?
- 7 Сформулируйте теорему об арифметических действиях над непрерывными функциями. Докажите эту теорему, опираясь на теорему 4
- 8 Сформулируйте понятие сложной функции и теорему о непрерывности сложной функции
- 9 Дайте определение непрерывной на данном множестве функции. Является ли функция

$$u = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{x+y}, & x+y \neq 0, \\ 1, & x+y = 0, \end{cases}$$

непрерывной на всей плоскости?

- 10 Дайте определение ограниченной на данном множестве функции. Является ли функция

$$u = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ограниченной а) в круге  $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ , б) на оси  $Ox$ ?

- 11 Сформулируйте определение неограниченной на данном множестве функции
- 12 Сформулируйте первую теорему Вейерштрасса
- 13 Справедливо ли утверждение непрерывная в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $A$  функция  $u = f(M)$  ограничена в этой  $\varepsilon$ -окрестности?
- 14 Может ли неограниченная на множестве  $\{M\}$  функция быть непрерывной на этом множестве, если а)  $\{M\}$  —  $m$ -мерная сфера, б)  $\{M\} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$  в)  $\{M\} = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$
- 15 Дайте определения точной верхней и точной нижней граней функции на данном множестве. Имеет ли функция  $u = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  точные грани на всей плоскости?
- 16 Сформулируйте вторую теорему Вейерштрасса
- 17 Справедливо ли утверждение если функция достигает на множестве  $\{M\}$  своих точных граней, то она непрерывна на этом множестве?
- 18 Справедливо ли утверждение непрерывная в параллелепипеде функция имеет в этом параллелепипеде максимальное и минимальное значения?

- 19 Дайте определение равномерной непрерывности функции. Как связаны между собой непрерывность и равномерная непрерывность функции на данном множестве?
- 20 Пользуясь квантограми, сформулируйте отрицание равномерной непрерывности функции.
- 21 Сформулируйте теорему Кантора.
- 22 Верно ли утверждение непрерывная в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $A$  функция  $u = f(M)$  равномерно непрерывна в этой  $\varepsilon$ -окрестности?

### Примеры решения задач

1. Найти точки разрыва функции  $u = \frac{x-y}{x^3-y^3}$

Δ Данная функция не определена в тех точках, где знаменатель дроби равен нулю  $x^3 - y^3 = 0$ , т. е. функция не определена на прямой  $y = x$ . В остальных точках плоскости функция определена, поэтому каждая точка прямой  $y = x$  является предельной точкой области определения функции. В любой точке  $A$  прямой  $y = x$  функция не является непрерывной, так как  $u(A)$  не существует. Таким образом, любая точка прямой  $y = x$  есть точка разрыва данной функции.

В любой точке  $B$ , не лежащей на прямой  $y = x$  функция  $u = \frac{x-y}{x^3-y^3}$  непрерывна. Это следует например, из теоремы 7, поскольку функции  $x, y, x^3, y^3$ , очевидно, непрерывны в любой точке и  $x^3 - y^3 \neq 0$  в точке  $B$ . Итак, множество точек разрыва данной функции есть прямая  $y = x$ .

Отметим, что в любой точке  $A(a, a)$ , лежащей на прямой  $y = x$  и не совпадающей с точкой  $O(0, 0)$  (т. е.  $a \neq 0$ ), существует предел функции  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow a}} \frac{x-y}{x^3-y^3} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow a}} \frac{1}{x^2-xy+y^2} = \frac{1}{a^2}$

Поэтому точки  $A(a, a)$  при  $a \neq 0$  можно назвать точками устранимого разрыва функции, если положить  $u(a, a) = \frac{1}{a^2}$ , то функция станет непрерывной в точке  $A(a, a)$ . В точке же  $O(0, 0)$  имеем  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} u(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{x^2-xy+y^2} = \infty$ , т. е.  $O(0, 0)$  – точка неустранимого разрыва данной функции. ▲

2. Доказать, что функция

$$u = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

непрерывна в точке  $O(0, 0)$  по каждой переменной  $x$  и  $y$ , но не является непрерывной в этой точке по совокупности переменных.

Δ Рассмотрим частное приращение функции  $f(x, y)$  в точке  $O(0, 0)$ , соответствующее приращению  $\Delta x$  аргумента  $x$ :

$$\Delta_x u = f(\Delta x, 0) - f(0, 0) = 0 - 0 = 0$$

Очевидно,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta_x u = 0$ , а это и означает, что  $f(x, y)$  непрерывна в точке  $O(0, 0)$  по переменной  $x$

Этот же факт легко обосновать, пользуясь другим определением непрерывности функции по отдельным переменным. Рассмотрим функцию  $f(x, y)$  при  $y = 0$ , т. е.  $f(x, 0)$ . Поскольку  $f(x, 0) = 0$  во всех точках  $x$ , функция  $f(x, 0)$  непрерывна на всей оси  $Ox$ , в частности в точке  $x = 0$ . Согласно второму определению непрерывности функции в точке это и означает, что функция  $f(x, y)$  непрерывна в точке  $O(0, 0)$  по переменной  $x$

Аналогично можно доказать непрерывность  $f(x, y)$  в точке  $O(0, 0)$  по переменной  $y$ .

Чтобы доказать, что функция  $f(x, y)$  не является непрерывной в точке  $O(0, 0)$  по совокупности переменных, используем результат примера 3 из § 2. В этом примере было доказано, что предел функции  $\frac{xy}{x^2 + y^2}$  в точке  $O(0, 0)$  не существует. Отсюда следует, что функция  $f(x, y)$  не является непрерывной в точке  $O(0, 0)$ . ▲

### 3. Исследовать функцию

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2xy}, & xy \neq 0, \\ 1, & xy = 0, \end{cases}$$

на непрерывность по отдельным переменным и по совокупности переменных в точках  $O(0, 0)$  и  $A(1, 0)$ .

Δ Применяя известную формулу для разности косинусов, запишем функцию  $u(x, y)$  в виде

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \frac{\sin y}{y}, & xy \neq 0, \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$$

1) Так как

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} u(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1 = u(0, 0),$$

то функция  $u(x, y)$  непрерывна в точке  $O(0, 0)$  и, следовательно, непрерывна в этой точке по отдельным переменным.

2) Рассмотрим функцию  $u(x, 0)$ . Согласно определению имеем  $u(x, 0) = 1$  для всех  $x$ , и, следовательно, эта функция непрерывна в точке  $x = 1$ . Это означает, что функция  $u(x, y)$  непрерывна в точке  $A(1, 0)$  по переменной  $x$ .

Рассмотрим теперь функцию

$$u(1, y) = \begin{cases} \sin 1 \frac{\sin y}{y}, & y \neq 0, \\ 1, & y = 0 \end{cases}$$

Так как  $\lim_{y \rightarrow 0} u(1, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \sin 1 \frac{\sin y}{y} = \sin 1 \neq 1 = u(1, 0)$ , то функция

$u(1, y)$  не является непрерывной в точке  $y = 0$ . Это означает, что функция  $u(x, y)$  не является непрерывной по переменной  $y$  в точке  $A(1, 0)$ . Отсюда следует, что функция  $u(x, y)$  не является непрерывной в точке  $A(1, 0)$  по совокупности переменных, так как в противном случае в силу теоремы 6 она была бы непрерывной в этой точке и по переменной  $y$ . ▲

4. Доказать, что функция  $u(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$  ограничена на множестве  $\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ , и найти ее точные грани на этом множестве.

Δ Для исследования функции удобно перейти к полярным координатам  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ . Тогда

$$u = \rho^2(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) = \rho^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi\right)$$

Так как  $\forall M(x, y) \in \Omega$  выполняются неравенства  $0 < \rho^2 \leq 1$ ,  $0 < 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi \leq 1$ , то  $0 < u \leq 1$ , т. е. функция  $u(x, y)$  ограничена на множестве  $\Omega$ .

При  $\rho = 1$ ,  $\varphi = 0$ , т. е. в точке  $x = 1$ ,  $y = 0$ , функция  $u(x, y)$  принимает максимальное свое значение, равное 1. Таким образом,  $\sup_{\Omega} u(x, y) = 1$

Ω Так как, очевидно,  $u \rightarrow 0$  при  $\rho \rightarrow 0$ , то  $u(x, y)$  принимает сколь угодно малые положительные значения, т. е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists (x_0, y_0) \in \Omega$  такая, что  $u(x_0, y_0) < \varepsilon$ . Отсюда из неравенства  $u(x, y) > 0$  следует, что  $\inf_{\Omega} u(x, y) = 0$ .

Отметим, что функция  $u(x, y)$  не достигает на множестве  $\Omega$  своей точной нижней грани, т. е. ни в одной точке ее значение не равно нулю. Следовательно, функция  $u(x, y)$  не имеет на множестве  $\Omega$  минимального значения. ▲

5. Доказать, что функция  $u = x + 2y + 3$  равномерно непрерывна на всей плоскости.

Δ Воспользуемся определением равномерной непрерывности функции. Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$  и положим  $\delta = \varepsilon/3$ . Тогда  $\forall M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ , удовлетворяющих неравенству  $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$ , будут выполнены неравенства  $|x_1 - x_2| < \delta$ ,  $|y_1 - y_2| < \delta$  и, следовательно,  $|u(M_1) - u(M_2)| = |x_1 + 2y_1 - x_2 - 2y_2| \leq |x_1 - x_2| + 2|y_1 - y_2| < \delta + 2\delta = 3\delta = \varepsilon$ . Это по определению и означает, что функция  $u(x, y)$  равномерно непрерывна на всей плоскости. ▲

6. Исследовать на равномерную непрерывность функцию  $u = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$  на множестве  $\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

Δ Данная функция имеет более сложный вид, чем функция в примере 5. Поэтому исследование ее на основании определения равномерной

непрерывности представляет большие трудности. Проведем исследование другим способом.

Отметим, что функция  $u(x, y)$  непрерывна на множестве  $\Omega$ , так как числитель  $x^3 + y^3$  и знаменатель  $x^2 + y^2$  являются непрерывными функциями и  $x^2 + y^2 \neq 0$  на множестве  $\Omega$ . Но множество  $\Omega$  не является замкнутым (поскольку не содержит точку  $O(0, 0)$ ), поэтому теорема Кантора непосредственно здесь не применима.

Однако функцию  $u(x, y)$  можно доопределить в точке  $O(0, 0)$  так, что она будет непрерывной в этой точке. В самом деле, переходя к полярным координатам  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , получим  $u = \rho(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)$ , откуда следует, что  $u \rightarrow 0$  при  $\rho \rightarrow 0$  т. е.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} u(x, y) = 0$ .

Таким образом, если доопределить функцию  $u(x, y)$  в точке  $O(0, 0)$ , положив  $u(0, 0) = 0$ , то функция  $u(x, y)$  будет непрерывной в точке  $O(0, 0)$  и, следовательно, непрерывной в круге  $\bar{\Omega} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ . Круг  $\bar{\Omega}$  — ограниченное замкнутое множество. По теореме Кантора функция  $u(x, y)$  равномерно непрерывна в этом круге, а значит, равномерно непрерывна и в круге  $\bar{\Omega}$  с выброшенным центром  $O(0, 0)$ , т. е. на множестве  $\Omega$ . ▲

**Замечание.** Оказывается что функция  $u(x, y)$  является равномерно непрерывной на всей плоскости. Однако обосновать это с помощью теоремы Кантора уже нельзя, так как плоскость — неограниченное множество, и теорема Кантора неприменима. Равномерная непрерывность  $u(x, y)$  на всей плоскости будет доказана в § 5 (см. пример 8 на с. 233), где будет получено достаточное условие равномерной непрерывности функции.

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

18. Найдите точки разрыва следующих функций

$$\begin{array}{lll} \text{а)} & u = \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{б)} & u = \ln(4 - x^2 - y^2), & \text{в)} & u = \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2}, \\ \text{г)} & u = \sin \frac{x}{y}, & \text{д)} & u = \frac{\sin x \sin y}{xy}, \\ \text{е)} & u = \frac{1}{\cos^2 x - \cos^2 y}, & \text{ж)} & u = \operatorname{tg}(x^2 + y^2 + z^2) \end{array}$$

19. Исследуйте следующие функции на непрерывность по отдельным переменным и по совокупности переменных

$$\begin{array}{ll} \text{а)} & u = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}, & x^4 + y^4 \neq 0, \\ 0, & x^4 + y^4 = 0, \end{cases} \quad \text{в точках } O(0, 0) \text{ и } A(1, 2), \\ \text{б)} & u = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^4 + y^4}, & x^4 + y^4 \neq 0, \\ 0, & x^4 + y^4 = 0 \end{cases} \quad \text{в точках } O(0, 0) \text{ и } A(10^{-4}, 10^{-5}), \end{array}$$

- в)  $u = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x + y}, & x + y \neq 0, \\ 0, & x + y = 0, \end{cases}$  в точках  $O(0, 0)$  и  $A(1, -1)$ ,
- г)  $u = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 1 & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$  в точках  $O(0, 0)$  и  $A(0, 1)$
- д)  $u = \begin{cases} \frac{\sin x + \sin y}{x + y}, & x + y \neq 0, \\ 1 & x + y = 0, \end{cases}$  в точках  $O(0, 0)$  и  $A\left(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right)$ ,
- е)  $u = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos y}{x - y}, & x - y \neq 0 \\ 0, & x - y = 0, \end{cases}$  в точках  $O(0, 0)$  и  $A_1\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$  и  $A_2(\pi, \pi)^2$

20. Ограничены ли следующие функции

- а)  $u = x^2 - y^2$  в круге  $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 25\}$ ,
- б)  $u = x^2 - y^2$  вне круга  $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 25\}$
- в)  $u = \frac{ax^2 + by^2}{x^2 + y^2}$  при  $x^2 + y^2 \neq 0$  ( $a$  и  $b$  — числа),
- г)  $u = \frac{\cos(x+y) - \cos(x-y)}{xy}$  при  $xy \neq 0$ ,
- д)  $u = \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{xy}$  при  $xy \neq 0$ ,
- е)  $u = \frac{\ln x - \ln y}{x - y}$  при  $x \neq y^2$

21. Докажите ограниченность функции на указанном множестве, найдите ее точные грани и установите, достигает ли функция своих точных граней

- а)  $u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  при  $x^2 + y^2 \neq 0$
- б)  $u = \frac{x^6 + y^6}{x^2 + y^2}$  на множестве  $\{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 \leq 9\}$ ,
- в)  $u = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$  при  $x^4 + y^4 \neq 0$
- г)  $u = xye^{-xy}$  на множестве  $\{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ ,
- д)  $u = \frac{a(x^2 + y^2) + bz^2}{x^2 + y^2 + z^2}$  при  $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$  ( $a > 0$ )

22. Пользуясь определением равномерной непрерывности, докажите равномерную непрерывность функции на указанном множестве

- а)  $u = ax + by + c$  на всей плоскости  $E^2$  ( $a \neq 0, b \neq 0$ ),
- б)  $u = x^2 + y^2$  в круге  $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,
- в)  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  во всем пространстве  $E^3$ ,
- г)  $u = x^3 - y^3$  в квадрате  $\{(x, y) | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$

23. Исследуйте функцию на равномерную непрерывность на указанном множестве

- а)  $u = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$  на множестве  $\{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 < 25\}$ ,

- б)  $u = \frac{\sqrt{x^4 + y^4}}{x^2 + y^2}$  на множестве  $\{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,  
 в)  $u = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}$  на множествах  $\Omega_1 = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$  и  $\Omega_2 = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ ,  
 г)  $u = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$  на множествах  $\Omega_1 = \{(x, y, z) \mid 10^{-2} < x^2 + y^2 + z^2 < 100\}$  и  $\Omega_2 = \{(x, y, z) \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 < 10^{-2}\}$ ,  
 д)  $u = x \sin \frac{1}{y}$  на множестве  $\{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ ,  
 е)  $u = xy \sin \frac{1}{y}$  на множестве  $\{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$

#### § 4. Частные производные и дифференцируемость функции

Основные понятия и теоремы

**1. Определение частной производной.** Пусть  $M(x_1, \dots, x_m)$  — внутренняя точка области определения функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$ . Рассмотрим частное приращение этой функции в точке  $M(x_1, \dots, x_m)$ , соответствующее приращению  $\Delta x_k$  аргумента  $x_k$

$$\Delta_{x_k} u = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m)$$

Отношение  $\frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}$  является функцией одного аргумента  $\Delta x_k$  (при фиксированной точке  $M(x_1, \dots, x_m)$ )

Определение Частной производной функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  по аргументу  $x_k$  в точке  $M$  называется  $\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}$  (если он существует)

Эта частная производная обозначается любым из следующих символов  $\frac{\partial u}{\partial x_k}(M)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(M)$ ,  $u_{x_k}(M)$ ,  $f_{x_k}(M)$ . Отметим, что при фиксированных значениях всех аргументов, кроме  $x_k$ , функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  становится функцией одной переменной. Производная этой функции одной переменной есть частная производная функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  по аргументу  $x_k$ . Поэтому вычисление частных производных производится по тем же правилам, что и вычисление производных функций одной переменной

Физический смысл частной производной  $\frac{\partial u}{\partial x_k}(M)$  — это скорость изменения функции в точке  $M$  в направлении оси  $Ox_k$ .

**Замечание** Если  $M$  — граничная точка области определения функции, то для такой точки введенное определение частной производной

может быть непригодным. Например, если функция  $u = f(x, y)$  определена

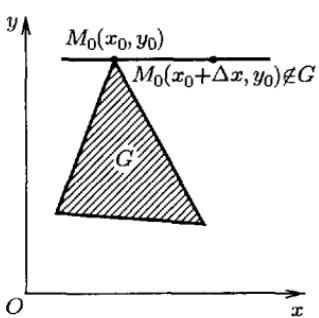


Рис. 26

в треугольнике  $G$  (рис. 26), то для граничной точки  $M_0(x_0, y_0)$  не определено частное приращение  $\Delta_x u$ , так как при любом  $\Delta x \neq 0$  точка  $M(x_0 + \Delta x, y_0)$  лежит вне области  $G$ .

Поэтому нельзя определить  $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)$ , пользуясь данным выше определением частной производной. В таком случае, если существует частная производная  $\frac{\partial u}{\partial x}$  во внутренних точках  $M$  области  $G$ , то по определению полагают  $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\partial u}{\partial x}(M)$  (если этот предел существует).

**2. Определение дифференцируемости функции.** Рассмотрим полное приращение функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  во внутренней точке  $M(x_1, \dots, x_m)$  области определения функции

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, \dots, x_m).$$

Оно является функцией аргументов  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ .

**Определение.** Функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  называется *дифференцируемой* в точке  $M(x_1, \dots, x_m)$ , если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m, \quad (1)$$

где  $A_i$  — некоторые числа,  $\alpha_i (i = 1, \dots, m)$  — функции аргументов  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ , бесконечно малые при  $\Delta x_1 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$  и равные нулю при  $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_m = 0$ .

Условие дифференцируемости (1) можно записать в другой, эквивалентной форме

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha(\rho), \quad (2)$$

где  $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}$  — расстояние между точками  $M(x_1, \dots, x_m)$  и  $M'(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m)$ ,  $\alpha(\rho) = o(\rho)$  при  $\rho \rightarrow 0$ ,  $\alpha(0) = 0$ .

**Теорема 12.** Если функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  дифференцируема в точке  $M$ , то она непрерывна в этой точке.

Обратная теорема неверна, т. е. непрерывность является только необходимым, но не достаточным условием дифференцируемости функции (см. замечание к примеру 1, б) на с. 219).

**3. Связь между дифференцируемостью и существованием частных производных.** Напомним, что для функции одной переменной  $y = f(x)$  существование производной в точке  $x_0$  является необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции

в этой точке. Для функции нескольких переменных дифференцируемость и существование частных производных не являются эквивалентными свойствами функции.

**Теорема 13** (необходимое условие дифференцируемости). *Если функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  дифференцируема в точке  $M$ , то она имеет в точке  $M$  частные производные по каждому аргументу  $x_1, \dots, x_m$ .*

При этом  $\frac{\partial u}{\partial x_k}(M) = A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), где  $A_k$  — числа из равенства (1). Поэтому условие дифференцируемости (1) можно записать в виде

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M)\Delta x_m + \alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_m\Delta x_m. \quad (3)$$

Обратная теорема неверна, т. е. существование частных производных не является достаточным условием дифференцируемости функции (см. пример 2 на с. 219).

**Теорема 14** (достаточное условие дифференцируемости). *Если функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  имеет частные производные по каждому аргументу  $x_1, \dots, x_m$  в некоторой окрестности точки  $M$  и эти частные производные непрерывны в точке  $M$ , то функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  дифференцируема в точке  $M$ .*

Отметим, что непрерывность частных производных является только достаточным, но не необходимым условием дифференцируемости функции (см. пример 3 на с. 220).

**4. Геометрический смысл дифференцируемости функции.** Напомним, что для функции одной переменной  $y = f(x)$  из дифференцируемости функции в точке  $x_0$  следует существование касательной к графику функции в точке  $M(x_0, f(x_0))$ .

Рассмотрим непрерывную функцию двух переменных  $u = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in G$ . График

этой функции, т. е. множество точек  $S = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in G\}$ , представляет собой поверхность в пространстве  $E^3$ . Пусть плоскость  $P$  проходит через точку  $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  поверхности  $S$ ;  $N(x, y, f(x, y))$  — произвольная точка на поверхности  $S$ ;  $N_1$  — основание перпендикуляра, проведенного из точки  $N$  к плоскости  $P$  (рис. 27).

**Определение.** Плоскость  $P$ , проходящая через точку  $N_0$  поверхности  $S$ , называется *касательной плоскостью* к поверхности  $S$ .

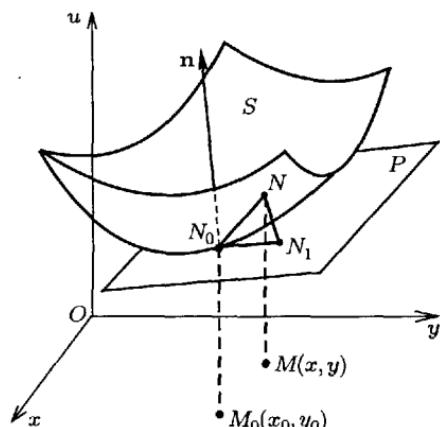


Рис. 27

в этой точке, если при  $N \rightarrow N_0$  ( $N \in S$ ) величина  $\rho(N, N_1)$  является бесконечно малой более высокого порядка, чем  $\rho(N, N_0)$ , т. е.

$$\lim_{\substack{N \rightarrow N_0 \\ N \in S}} \frac{\rho(N, N_1)}{\rho(N, N_0)} = 0.$$

**Теорема 15.** Если функция  $u = f(x, y)$  дифференцируема в точке  $M_0(x_0, y_0)$ , то в точке  $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  существует касательная плоскость к поверхности  $S$  (графику этой функции), причем уравнение касательной плоскости имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)(y - y_0) - (u - f(x_0, y_0)) = 0.$$

Вектор  $\mathbf{n}$  нормали к касательной плоскости, т. е.  $\mathbf{n} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}(M_0), \frac{\partial u}{\partial y}(M_0), -1 \right\}$ , называется *вектором нормали* (или *нормалью*) к поверхности  $S$  в точке  $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

### 5. Дифференцируемость сложной функции.

**Теорема 16.** Пусть функции  $x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k)$ , ...,  $x_m = \varphi_m(t_1, \dots, t_k)$  дифференцируемы в точке  $A(a_1, \dots, a_k)$ , а функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  дифференцируема в точке  $B(b_1, \dots, b_m)$ , где  $b_i = \varphi_i(a_1, \dots, a_k)$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Тогда сложная функция  $u = f(\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, \dots, t_k))$  дифференцируема в точке  $A$  и ее частные производные в этой точке выражаются формулой

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t_i}(A) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(B) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}(A) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(B) \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_i}(A) = \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(B) \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i}(A), \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (4)$$

**6. Дифференциал функции.** Пусть функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  дифференцируема в точке  $M(x_1, \dots, x_m)$ , т. е. ее приращение в этой точке можно представить в виде (3):

$$\Delta u = \left[ \frac{\partial u}{\partial x_1}(M) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M) \Delta x_m \right] + (\alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m).$$

Выражение в квадратных скобках является линейной относительно  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$  частью приращения функции, а выражение в круглых скобках — бесконечно малой функцией при  $\Delta x_1 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$  более высокого порядка, чем  $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_m)^2}$ .

Дифференциалом (или первым дифференциалом) функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  в точке  $M$  называется линейная функция аргументов  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ :

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M) \Delta x_m.$$

Дифференциалом независимой переменной  $x_i$  будем называть приращение этой переменной:  $dx_i = \Delta x_i$ . Тогда дифференциал функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  в точке  $M$  можно записать в виде

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M) dx_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M) dx_m. \quad (5)$$

Если аргументы дифференцируемой в точке  $M(b_1, \dots, b_m)$  функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  являются не независимыми переменными, а дифференцируемыми функциями каких-либо независимых переменных  $t_1, \dots, t_k$ :

$$x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_m = \varphi_m(t_1, \dots, t_k), \quad (6)$$

причем  $b_1 = \varphi_1(a_1, \dots, a_k), \dots, b_m = \varphi_m(a_1, \dots, a_k)$ , то дифференциал сложной функции  $u = f(\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, \dots, t_k))$  в точке  $A(a_1, \dots, a_k)$  по-прежнему имеет вид (5), но  $dx_1, \dots, dx_m$  являются не приращениями переменных  $x_1, \dots, x_m$  (как в случае, когда  $x_1, \dots, x_m$  — независимые переменные), а дифференциалами функций (6) в точке  $A$ , т. е.

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial t_1}(A) dt_1 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial t_k}(A) dt_k, \quad i = 1, \dots, m.$$

Это свойство называется *инвариантностью формы первого дифференциала*.

### Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение частной производной функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  по аргументу  $x_k$  во внутренней точке области определения функции. Каков физический смысл частной производной?
2. Пользуясь определением частной производной, найдите  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , если  $u = xy^2$ .
3. Почему для граничной точки определение частной производной может быть непригодным? Как определяются частные производные функции в граничных точках области определения функции?
4. Дайте определение дифференцируемости функции в данной точке. Докажите эквивалентность условий дифференцируемости (1) и (2). Докажите дифференцируемость функции  $u = x_1 x_2$  в точке  $O(0, 0)$ , представив ее приращение в этой точке в виде (1).
5. Докажите, что дифференцируемая в данной точке функция непрерывна в этой точке. Приведите пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.
6. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом условии дифференцируемости.
7. Сформулируйте теорему о достаточном условии дифференцируемости.
8. Пусть дана функция

$$u(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{на осах координат,} \\ 1 & \text{в остальных точках плоскости.} \end{cases}$$

Она обладает следующими свойствами  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = 0$ , в любой точке  $M(x, 0)$  ( $x \neq 0$ ) оси  $Ox$   $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ , а  $\frac{\partial u}{\partial y}$  не существует, в любой точке  $M(0, y)$  ( $y \neq 0$ ) оси  $Oy$   $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ , а  $\frac{\partial u}{\partial x}$  не существует, во всех остальных точках плоскости  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  (обоснуйте эти свойства). Отсюда следует, что частные производные  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$  непрерывны в точке  $O(0, 0)$ .

Вместе с тем функция  $u(x, y)$  разрывна в точке  $O(0, 0)$  (объясните, почему), и, следовательно, недифференцируема в этой точке. Объясните кажущееся противоречие этого примера с теоремой о достаточном условии дифференцируемости.

- 9 Каков геометрический смысл дифференцируемости функции  $u = f(x, y)$  в точке  $M_0(x_0, y_0)$ ? Дайте определение касательной плоскости к поверхности  $u = f(x, y)$  в точке  $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  и запишите уравнение касательной плоскости в этой точке.
- 10 Сформулируйте теорему о дифференцируемости сложной функции и запишите формулу для вычисления частных производных сложной функции.
- 11 Что такое дифференциал функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  в данной точке? От каких аргументов он зависит?
- 12 Что понимается под инвариантностью формы первого дифференциала? Докажите инвариантность формы первого дифференциала, пользуясь правилом дифференцирования сложной функции.

### Примеры решения задач

#### 1. Найти частные производные функции:

а)  $u = x^y$  ( $x > 0$ ), б)  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

$\Delta$  а) При вычислении частной производной функции  $u = x^y$  по аргументу  $x$  рассматриваем функцию  $u$  как функцию только одной переменной  $x$ , т. е. считаем, что  $y$  имеет фиксированное значение. При фиксированном  $y$  функция  $u = x^y$  является степенной функцией аргумента  $x$ . По формуле дифференцирования степенной функции получаем  $\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}$ .

Аналогично, при вычислении частной производной  $\frac{\partial u}{\partial y}$  считаем, что фиксировано значение  $x$ , и рассматриваем функцию  $u = x^y$  как показательную функцию аргумента  $y$ . Получаем  $\frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x$ .

б) При фиксированных значениях  $y$  и  $z$  функция  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  является сложной функцией аргумента  $x$ . Вычисляя производную этой функции аргумента  $x$ , получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Аналогично,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Отметим, что полученные формулы теряют смысл в точке  $O(0,0,0)$ . Покажем, что в этой точке частные производные функции  $u(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  не существуют. В самом деле,  $u(x,0,0) = \sqrt{x^2} = |x|$ . Эта функция аргумента  $x$ , как известно, не имеет производной в точке  $x = 0$ . Последнее и означает, что частная производная  $\frac{\partial u}{\partial x}$  в точке  $O$  не существует. Аналогично можно показать, что частные производные  $\frac{\partial u}{\partial y}$  и  $\frac{\partial u}{\partial z}$  в точке  $O$  также не существуют. ▲

**Замечание** Функция  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , очевидно, непрерывна в точке  $O(0,0,0)$ , но не дифференцируема в этой точке (поскольку не имеет частных производных в точке  $O$ ). Это доказывает, что непрерывность является только необходимым (теорема 12), но не достаточным условием дифференцируемости функции

2. Доказать, что функция

$$u = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

имеет в точке  $O(0,0)$  частные производные, но не дифференцируема в этой точке.

△ Так как  $u(x,0) = \begin{cases} x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$  т. е.  $u(x,0) = x$ , то  $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx} u(x,0)|_{x=0} = 1$ . Аналогично получаем  $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 1$ . Итак, функция  $u(x,y)$  имеет в точке  $O$  частные производные

Докажем, что функция  $u(x,y)$  не дифференцируема в точке  $O$ . Предположим противное. Тогда приращение функции в этой точке, равное  $\Delta u = u(\Delta x, \Delta y) - u(0,0) = \frac{\Delta x^3 + \Delta y^3}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ , можно представить в виде

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) \Delta y + o(\rho),$$

где  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ . Так как  $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 1$ , то из условия дифференцируемости получаем  $\frac{\Delta x^3 + \Delta y^3}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x + \Delta y + o(\rho)$ , или  $-\frac{\Delta x \Delta y^2 + \Delta x^2 \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$ , т. е.

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x \Delta y^2 + \Delta x^2 \Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{3/2}} = 0$$

Покажем, что на самом деле этот предел не существует. Пусть  $\Delta x$  и  $\Delta y$  стремятся к нулю так, что  $\Delta y = k\Delta x$  ( $k \neq 0$ ). Тогда получим

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ (\Delta y = k\Delta x)}} \frac{\Delta x \Delta y^2 + \Delta x^2 \Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{3/2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^3(k^2 + k)}{\Delta x^3(1 + k^2)^{3/2}} = \frac{k^2 + k}{(1 + k^2)^{3/2}}.$$

Так как величина  $\frac{k^2 + k}{(1 + k^2)^{3/2}}$  принимает разные значения при разных  $k$ , то указанный предел не существует. Отсюда следует, что сделанное предположение неверно, и, значит, функция  $u(x, y)$  не дифференцируема в точке  $O$ . ▲

3. Доказать, что функция

$$u = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

имеет частные производные в окрестности точки  $O(0, 0)$  и дифференцируема в точке  $O$ , но частные производные не являются непрерывными в точке  $O$ .

Во всех точках, кроме точки  $O$ , частные производные функции  $u(x, y)$  можно найти, вычисляя по обычным правилам производные функции  $(x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . Например,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \\ &= 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2 + y^2)^{-3/2} 2x = \\ &= 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{при } x^2 + y^2 \neq 0. \end{aligned}$$

В точке  $O(0, 0)$  эта формула теряет смысл. Однако это не означает, что  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0)$  не существует, поскольку выражение для  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$  было получено при условии  $x^2 + y^2 \neq 0$ . Для нахождения  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0)$  воспользуемся определением частной производной. Так как

$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

то  $\Delta_x u = u(\Delta x, 0) - u(0, 0) = \Delta x^2 \sin \frac{1}{|\Delta x|}$ . Отсюда  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \sin \frac{1}{|\Delta x|} = 0$ , т. с.  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = 0$ . Аналогично можно доказать,

что  $\frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = 0$ . Итак, функция  $u(x, y)$  имеет частные производные в окрестности точки  $O$ .

Докажем, что функция  $u(x, y)$  дифференцируема в точке  $O$ . Для этого нужно доказать, что  $\Delta u = u(\Delta x, \Delta y) - u(0, 0) = (\Delta x^2 + \Delta y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$  можно представить в виде

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}),$$

т. е. справедливо равенство (учитываем, что  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = 0$ )

$$(\Delta x^2 + \Delta y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

Но это равенство очевидно, поскольку

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{(\Delta x^2 + \Delta y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

Таким образом, функция  $u(x, y)$  дифференцируема в точке  $O$ .

Докажем, наконец, что частная производная  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$  не является непрерывной в точке  $O$ . Очевидно, первое слагаемое  $2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  стремится к нулю при  $M(x, y) \rightarrow O(0, 0)$ . Второе же слагаемое  $\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$  не имеет предела при  $M(x, y) \rightarrow O(0, 0)$ . В самом деле, если точка  $M(x, y)$  стремится к точке  $O(0, 0)$  по линии  $y = kx$  ( $k \neq 0, x > 0$ ), то на этом линии указанное слагаемое равно  $-\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \cos \frac{1}{x\sqrt{1+k^2}}$  и, очевидно, не имеет предела при  $x \rightarrow 0$ . Итак, предел  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$  при  $M(x, y) \rightarrow O(0, 0)$  не существует. Следовательно,  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$  не является непрерывной в точке  $O$ . Аналогично можно показать, что  $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$  не является непрерывной в точке  $O$ .

Рассмотренный пример показывает, что непрерывность частных производных является только достаточным (теорема 13), но не необходимым условием дифференцируемости функции. ▲

4. Составить уравнение касательной плоскости к параболоиду  $u = x^2 + y^2$  в точке  $N_0(1, 2, 5)$  и найти нормаль к параболоиду в этой точке.

△ Пусть  $M_0(1, 2)$  — точка на плоскости  $Oxy$ . Так как  $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$ , то  $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = 2$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = 4$ . Учитывая также, что  $u(M_0) = 5$ , получаем искомое уравнение касательной плоскости

$$2(x - 1) + 4(y - 2) - (u - 5) = 0, \text{ или } 2x + 4y - u - 5 = 0.$$

Вектор  $\mathbf{n} = \{2, 4, -1\}$  является нормалью к параболоиду в точке  $N_0$ . ▲

5. Найти частные производные функции  $u = f(x, xy, xyz)$  по аргументам  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

△ Данная функция является сложной функцией переменных  $x$ ,  $y$  и  $z$ :  $u = f(x_1, x_2, x_3)$ , где  $x_1 = x$ ,  $x_2 = xy$ ,  $x_3 = xyz$ . Обозначим частную производную функции  $u = f(x_1, x_2, x_3)$  по аргументу  $x_i$ , через  $f'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) (функции  $f'_i$  зависят от тех же аргументов, что и функция  $f$ , т. е.  $f'_i = f'_i(x, xy, xyz)$ ). Применяя формулу (4), получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 \cdot 1 + f'_2 \cdot y + f'_3 \cdot yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f'_2 \cdot x + f'_3 \cdot xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = f'_3 \cdot xy. \blacksquare$$

6. Найти дифференциал функции: а)  $u = e^{x^2+y^2+z^2}$  в точке  $M(0, 1, 2)$ ; б)  $u = f(x + y^2, y + x^2)$  в точке  $M(-1, 1)$ .

△ а) Имеем  $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2+y^2+z^2} \cdot 2x$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}(M) = 0$ ;  $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2+y^2+z^2} \cdot 2y$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}(M) = 2e^5$ ;  $\frac{\partial u}{\partial z} = e^{x^2+y^2+z^2} \cdot 2z$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z}(M) = 4e^5$ . Следовательно,

$$du|_M = \frac{\partial u}{\partial x}(M) dx + \frac{\partial u}{\partial y}(M) dy + \frac{\partial u}{\partial z}(M) dz = 2 \cdot e^5 dy + 4e^5 dz.$$

б) Запишем функцию  $u = f(x + y^2, y + x^2)$  в виде  $u = f(t, v)$ , где  $t = x + y^2$ ,  $v = y + x^2$ . Вычисляя частные производные  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$  по формуле (4), получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_t(x + y^2, y + x^2) \cdot 1 + f_v(x + y^2, y + x^2) \cdot 2x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M) = f_t(0, 2) - 2f_v(0, 2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_t(x + y^2, y + x^2) \cdot 2y + f_v(x + y^2, y + x^2) \cdot 1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(M) = 2f_t(0, 2) + f_v(0, 2).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} du|_M &= \frac{\partial u}{\partial x}(M) dx + \frac{\partial u}{\partial y}(M) dy = \\ &= [f_t(0, 2) - 2f_v(0, 2)] dx + [2f_t(0, 2) + f_v(0, 2)] dy. \end{aligned} \quad (7)$$

Это же выражение для  $du|_M$  можно получить другим способом, используя инвариантность формы первого дифференциала. В силу инвариантности формы первого дифференциала имеем

$$du|_M = f_t(0, 2)dt + f_v(0, 2)dv, \quad (8)$$

где  $dt$  и  $dv$  — дифференциалы функций  $t = x + y^2$  и  $v = y + x^2$  в точке  $M(-1, 1)$ . Так как  $\frac{\partial t}{\partial x}(M) = 1$ ,  $\frac{\partial t}{\partial y}(M) = 2$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}(M) = -2$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}(M) = 1$ , то  $dt|_M = dx + 2dy$ ,  $dv|_M = -2dx + dy$ , и из равенства (8) получаем  $du|_M = f_t(0, 2)(dx + 2dy) + f_v(0, 2)(-2dx + dy) =$

$$= [f_t(0, 2) - 2f_v(0, 2)]dx + [2f_t(0, 2) + f_v(0, 2)]dy,$$

что совпадает с равенством (7). ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

24. Найдите частные производные следующих функций:

а)  $u = x^2 + y^3 + 3x^3y^3$ ; б)  $u = xyz + \frac{x}{yz}$ ;

в)  $u = \sin(xy + yz)$ ; г)  $u = \frac{\cos x}{\cos y}$ ; д)  $u = \operatorname{tg}(x + y) \cdot e^{x/y}$ ;

е)  $u = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ; ж)  $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ ; з)  $u = xy \ln(xy)$ ;

и)  $u = \left(\frac{y}{x}\right)^z$ ; к)  $u = z^{x/y}$ ; л)  $u = x^{y^z}$ ; м)  $u = x^y y^z z^x$ .

25. Существует ли частная производная  $\frac{\partial u}{\partial x}$  функции  $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  в точке  $(0, 1)$ ?

26. Исследуйте, имеет ли функция  $u(x, y)$  частные производные в точке  $O(0, 0)$  и дифференцируема ли она в этой точке, если:

а)  $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ ; б)  $u = \sqrt{x^4 + y^4}$ ; в)  $u = \sqrt[3]{xy}$ ; г)  $u = \sqrt[3]{x^2 y^2}$ ;

д)  $u = \sqrt[4]{x^4 + y^4}$ ; е)  $u = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ ; ж)  $u = \sqrt[3]{x^4 + y^4}$ ;

з)  $u = \begin{cases} e^{-1/(x^2+y^2)}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$

и)  $u = \sqrt[3]{x} \cdot \sin y$ ; к)  $u = \sqrt[3]{y} \cdot \operatorname{tg} x$ ;

л)  $u = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$  м)  $u = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{|x| + |y|}, & |x| + |y| \neq 0, \\ 0, & |x| + |y| = 0. \end{cases}$

27. Для функций из упр. 26 исследуйте вопрос о существовании частных производных в окрестности точки  $O(0, 0)$  и их непрерывности в точке  $O$ .

28. Докажите, что если функции  $f(x)$  и  $g(y)$  имеют производные соответственно в точках  $x_0$  и  $y_0$ , то функции  $u(x, y) = f(x) + g(y)$  и  $v(x, y) = f(x) \cdot g(y)$  дифференцируемы в точке  $(x_0, y_0)$ .

29. Составьте уравнение касательной плоскости к поверхности:

а)  $u = xy$  в точке  $N_0(1, 0, 0)$ ;

б)  $u = x + y^2$  в точке  $A(0, 1, 1)$ ; в)  $u = x^3 + y^3$  в точке  $B(1, -1, 0)$ ;

г)  $u = \sin(xy)$  в точке  $C(1, \pi/3, \sqrt{3}/2)$ ; д)  $u = e^{x+y}$  в точке  $D(1, -1, 1)$ .

30. Является ли плоскость  $u = 0$  касательной в точке  $O(0, 0, 0)$ :
- к параболоиду вращения  $u = x^2 + y^2$ ;
  - к конусу  $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;
  - к гиперболическому параболоиду  $u = xy$ ?
31. Найдите частные производные следующих сложных функций (функции  $f$  и  $g$  считаются дифференцируемыми):
- $u = f(x + y, x^2 + y^2)$ ;
  - $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$ ;
  - $u = f(x - y, xy)$ ;
  - $u = f(xy) \cdot g(yz)$ ;
  - $u = [f(x - y)]^{g(xy)}$ ;
  - $u = f(x - y^2, y - x^2, xy)$ ;
  - $u = f(\sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{y^2 + z^2}, \sqrt{z^2 + x^2})$ .
32. В каждом из следующих случаев проверьте, что функция  $u(x, y)$  удовлетворяет соответствующему уравнению, если  $f$  — произвольная дифференцируемая функция.
- $u = f(x^2 + y^2)$ ,  $y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ,
  - $u = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$ ,  $x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} = nu$ ,
  - $u = yf(x^2 - y^2)$ ,  $y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = xu$ ;
  - $u = \frac{y^2}{3x} + f(xy)$ ,  $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - xy \frac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0$ ;
  - $u = x^n f\left(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta}\right)$ ,  $x \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial u}{\partial y} + \beta z \frac{\partial u}{\partial z} = nu$ ;
  - $u = \frac{xy}{z} \ln x + xf\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ ,  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}$
33. Вычисляя частные производные  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$  и исключая производные функций  $f$  и  $g$  ( $f$  и  $g$  — произвольные дифференцируемые функции), составьте уравнение, которому удовлетворяет функция  $u(x, y)$ , если.
- $u = x + f(xy)$ ;
  - $u = xf\left(\frac{x}{y^2}\right)$ ;
  - $u = f(x - y, y - z)$ ;
  - $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$ ;
  - $u = xf\left(\frac{x}{y}\right) + yg\left(\frac{x}{y}\right)$ .
34. Найдите решение  $u = u(x, y)$  уравнения:
- $\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x + xy$ , удовлетворяющее условию  $u(0, y) = y^2$ ;
  - $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2$ , удовлетворяющее условию  $u(x, x) = 0$ ;
  - $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{xy} + y$ , удовлетворяющее условию  $u\left(x, \frac{1}{x}\right) = 1$ .
35. Найдите дифференциал функции:
- $u = x^2 y^3$  в точках  $M(x, y)$  и  $M_0(2, 1)$ ;
  - $u = \frac{yz}{x}$  в точках  $M(x, y, z)$  и  $N(1, 2, 3)$ ;
  - $u = \cos(xy + xz)$  в точках  $M(x, y, z)$  и  $N(1, \pi/6, \pi/6)$ ;
  - $u = e^{xy}$  в точках  $M(x, y)$  и  $O(0, 0)$ ,
  - $u = x^y$  в точках  $M(x, y)$  и  $M_0(2, 3)$ ;
  - $u = x \ln(xy)$  в точках  $M(x, y)$  и  $M_0(-1, -1)$ .

36. Найдите дифференциалы следующих сложных функций в указанных точках, если  $f$  — дифференцируемая функция,  $x, y, z$  — независимые переменные:
- $u = f(x - y, x + y)$  в точках  $M(x, y)$  и  $M_0(1, -1)$ ;
  - $u = f\left(xy, \frac{x}{y}\right)$  в точках  $M(x, y)$  и  $M_0(0, 1)$ ,
  - $u = f(x^2 - y^2, y^2 - z^2, z^2 - x^2)$  в точках  $M(x, y, z)$  и  $N(1, 1, 1)$ ;
  - $u = f(\sin x + \sin y, \cos x - \cos z)$  в точках  $M(x, y, z)$  и  $O(0, 0, 0)$ .
37. Пусть  $u$  и  $v$  — дифференцируемые функции каких-либо независимых переменных. Докажите, что справедливы следующие правила дифференцирования:
- $d(cu) = c du$  ( $c$  — число);
  - $d(u + v) = du + dv$ ;
  - $d(u - v) = du - dv$ ;
  - $d(uv) = u dv + v du$ ;
  - $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$  ( $v \neq 0$ ).

## § 5. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Основные понятия и теоремы

**1. Частные производные высших порядков.** Пусть функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  имеет частную производную  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  (она называется также *частной производной первого порядка*) в каждой точке некоторой окрестности точки  $M$ . Если  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  имеет в точке  $M$  частную производную по аргументу  $x_k$ , то эта производная называется *частной производной второго порядка* (или *второй частной производной*) функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  по аргументам  $x_i, x_k$  в точке  $M$  и обозначается одним из следующих символов:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}(M), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(M), \quad u_{x_i x_k}(M), \quad f_{x_i x_k}(M).$$

Если  $k \neq i$ , то частная производная второго порядка называется *смешанной*. Если  $k = i$ , то частная производная второго порядка обозначается  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$  или  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ , или  $u_{x_i^2}$ , или  $f_{x_i^2}$ .

Частные производные третьего порядка определяются как частные производные от частных производных второго порядка и т. д. *Частная производная  $n$ -го порядка* (или  *$n$ -я частная производная*) функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  по аргументам  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$  обозначается  $\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}}$  и определяется формулой

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left( \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_{n-1}} \dots \partial x_{i_1}} \right).$$

Если не все индексы  $i_1, i_2, \dots, i_n$  равны друг другу, то частная производная  $n$ -го порядка называется *смешанной*.

**Теорема 17.** *Если в некоторой окрестности точки  $M_0(x_0, y_0)$  функция  $u = f(x, y)$  имеет смешанные частные производные  $f_{xy}(x, y)$  и  $f_{yx}(x, y)$ , причем эти смешанные частные производные непрерывны в точке  $M_0$ , то они равны в этой точке:*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0). \quad (1)$$

Если равенство (1) выполняется, то говорят, что смешанные частные производные второго порядка функции  $u = f(x, y)$  не зависят от порядка дифференцирования в точке  $M_0(x_0, y_0)$ .

Обобщением теоремы 17 является следующая теорема.

**Теорема 18.** *Если все смешанные частные производные  $n$ -го порядка функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  существуют в некоторой окрестности точки  $M_0$  и непрерывны в точке  $M_0$ , то они не зависят в точке  $M_0$  от порядка дифференцирования.*

**Определение.** Функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  называется *дифференцируемой  $n$  раз* в точке  $M_0$ , если все ее частные производные  $(n - 1)$ -го порядка дифференцируемы в этой точке.

Следующая теорема дает другое, нежели в теореме 17, достаточное условие для выполнения равенства (1).

**Теорема 19.** *Если функция  $u = f(x, y)$  дважды дифференцируема в точке  $M_0(x_0, y_0)$ , то  $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$ .*

**2. Дифференциалы высших порядков.** Пусть функция  $u(x, y)$  независимых переменных  $x$  и  $y$  дифференцируема в окрестности точки  $M_0(x_0, y_0)$  и дважды дифференцируема в точке  $M_0$ . Первый дифференциал функции

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) dy$$

является функцией четырех переменных:  $x$ ,  $y$ ,  $dx$  и  $dy$ , причем  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$  — дифференцируемые в точке  $M_0$  функции.

*Второй дифференциал  $d^2u$  (или дифференциал второго порядка) функции  $u(x, y)$  в точке  $M_0$  определяется как дифференциал в точке  $M_0$  от первого дифференциала  $du$  при следующих условиях:*

1°)  $du$  рассматривается как функция только независимых переменных  $x$  и  $y$  (иными словами, при вычислении дифференциала от  $du$  нужно рассматривать  $dx$  и  $dy$  как постоянные множители);

2°) при вычислении дифференциалов от  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)$  приращения независимых переменных  $x$  и  $y$  берутся такими же, как и в выражении для  $du$ , т. е. равными  $dx$  и  $dy$ . На основании этого определения получается формула

$$d^2u|_{M_0} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0) dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(M_0) dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0) dy^2, \quad (2)$$

где  $dx^2 = (dx)^2$ ,  $dy^2 = (dy)^2$ . Формулу (2) можно записать в более компактном виде. Для этого введем следующие понятия. Символ  $\frac{\partial}{\partial x}$  будем называть *оператором частной производной по переменной  $x$* . При действии этого оператора на функцию  $u(x, y)$  получается новая функция — частная производная  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$ . Аналогично определяется оператор  $\frac{\partial}{\partial y}$  частной производной по  $y$ .

Определим степени и произведения степеней операторов  $\frac{\partial}{\partial x}$  и  $\frac{\partial}{\partial y}$  следующим образом:

$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  — оператор второй частной производной по  $x$ ; при действии его на функцию  $u$  получается  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ;

$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$  — оператор смешанной второй производной по  $y, x$ ;

$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^l = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}$  — оператор смешанной производной  $(k+l)$ -го порядка  $l$  раз по  $y$  и  $k$  раз по  $x$ .

Символ  $d = \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$  назовем *оператором дифференциала*.

При действии этого оператора на функцию  $u(x, y)$  получается дифференциал функции:  $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ . Определим  $n$ -ю степень оператора дифференциала как  $n$ -ю степень двучлена  $\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$ . В частности, при  $n = 2$  получаем

$$d^2 = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} dx + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2} dy^2.$$

При действии оператора  $d^2$  на функцию  $u$  получится, очевидно, второй дифференциал функции. Таким образом, формулу (2) можно записать теперь в операторном виде:

$$d^2 u|_{M_0} = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 u|_{M_0}.$$

*Дифференциал  $d^n u$  произвольного  $n$ -го порядка* функции  $u(x, y)$  определяется индуктивно по формуле

$$d^n u = d(d^{n-1} u) \tag{3}$$

при таких же двух условиях, что и дифференциал второго порядка. Для  $d^n u$  справедлива операторная формула

$$d^n u = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n u. \tag{4}$$

Если  $x$  и  $y$  являются не независимыми переменными, а дифференцируемыми (нужное число раз) функциями каких-либо независимых переменных  $t_1, \dots, t_k$ , то формула (4) при  $n \geq 2$  становится, вообще говоря, неверной (неинвариантность формы дифференциалов высших порядков). В частности, при  $n = 2$  имеем

$$d^2u = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 u + \left( \frac{\partial u}{\partial x} d^2x + \frac{\partial u}{\partial y} d^2y \right), \quad (5)$$

где  $dx, dy, d^2x, d^2y$  — дифференциалы первого и второго порядка функции  $x(t_1, \dots, t_k)$  и  $y(t_1, \dots, t_k)$ .

В случае функции  $m$  независимых переменных  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  дифференциал  $n$ -го порядка определяется индуктивно по формуле (3) при условиях, аналогичных условиям 1°) и 2°). Оператор дифференциала имеет вид

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m,$$

и справедлива операторная формула, аналогичная (4):

$$d^n u = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n u. \quad (6)$$

### 3. Формула Тейлора.

Теорема 20. Если функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  дифференцируема  $n+1$  раз в некоторой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $M_0(x_0^1, \dots, x_0^m)$ , то для любой точки  $M(x_0^1 + \Delta x_1, \dots, x_0^m + \Delta x_m)$  из этой  $\varepsilon$ -окрестности справедливо равенство

$$\begin{aligned} f(x_0^1 + \Delta x_1, \dots, x_0^m + \Delta x_m) - f(x_0^1, \dots, x_0^m) &= \\ &= du|_{M_0} + \frac{1}{2!} d^2u|_{M_0} + \dots + \frac{1}{n!} d^n u|_{M_0} + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} u|_N, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $N$  — некоторая точка, лежащая на отрезке  $M_0M$ , а дифференциалы  $d^k u$  вычисляются по формуле (6), причем  $dx_i = \Delta x_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

Формула (7) называется *формулой Тейлора* для функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  с центром разложения в точке  $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ .

Если положить  $\Delta x_i = x_i - x_i^0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) и раскрыть выражения для  $d^k u|_{M_0}$ , то формулу (7) можно записать в виде

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_m) &= f(x_1^0, \dots, x_m^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)(x_1 - x_1^0) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0)(x_m - x_m^0) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(M_0)(x_1 - x_1^0)^2 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x_m^n}(M_0)(x_m - x_m^0)^n + R_{n+1} \equiv P_n(x_1, \dots, x_m) + R_{n+1}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $P_n(x_1, \dots, x_m)$  — многочлен степени  $n$  от переменных  $x_1, \dots, x_m$ , а  $R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} u|_N$  — остаточный член.

Многочлен  $P_n(x_1, \dots, x_m)$  называется *многочленом Тейлора*; он обладает тем свойством, что значения его и всех его частных производных до  $n$ -го порядка включительно в точке  $M_0$  соответственно равны значениям функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  и ее частных производных в точке  $M_0$ .

При  $n = 0$  из формулы (7) получаем *формулу Лагранжа конечных приращений* для функции многих переменных:

$$\begin{aligned} f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, \dots, x_m^0) &= \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(N) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(N) \Delta x_m. \end{aligned}$$

Введем обозначение  $\rho = \rho(M_0, M) = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2}$ . Тогда остаточный член в формуле (8) можно записать в виде  $R_{n+1} = o(\rho^n)$  (*остаточный член в форме Пеано*).

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано справедлива при более слабых требованиях, чем в теореме 20, а именно функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  должна быть дифференцируемой  $n - 1$  раз в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $M_0$  и дифференцируемой  $n$  раз в самой точке  $M_0$ .

### Контрольные вопросы и задания

- Дайте определение частной производной второго порядка функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  по аргументам  $x_i, x_k$  в точке  $M$ . В каком случае частная производная второго порядка называется смешанной?
- Покажите, что смешанная частная производная  $f_{xy}(x, y)$  функции  $u = f(x, y)$  представляет собой повторный предел
 
$$f_{xy}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x, y)}{\Delta x \cdot \Delta y}.$$
- Дайте определение частной производной  $n$ -го порядка функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  по аргументам  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ . В каком случае эта частная производная называется смешанной?
- Известно, что функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  имеет все частные производные  $n$ -го порядка в точке  $M$ . Что можно сказать о существовании частных производных меньшего порядка этой функции в точке  $M$  и в окрестности точки  $M$ ?
- Сформулируйте теорему о равенстве смешанных частных производных второго порядка функции  $u = f(x, y)$ . Пользуясь этой теоремой, обоснуйте равенство смешанных частных производных второго порядка функции  $u = [\sin(x + y)]^{\cos xy}$  в любой точке  $M(x, y)$ , в которой  $\sin(x + y) > 0$  (не вычисляя самих производных).
- Сформулируйте теорему о независимости  $n$ -х смешанных частных производных функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  от порядка дифференцирования. Опираясь на теорему о равенстве смешанных частных производных второго порядка, докажите, что  $\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_3 \partial x_2 \partial x_1}$ .

- 7 Дайте определение  $n$ -кратной дифференцируемости функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  в данной точке. Докажите, что если функция дифференцируема  $n$  раз в точке  $M_0$ , то эта функция и все ее частные производные до  $(n-1)$ -го порядка включительно дифференцируемы в точке  $M_0$ .
- 8 Докажите, что если функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  имеет в некоторой окрестности точки  $M_0$  все частные производные  $n$ -го порядка и эти частные производные непрерывны в точке  $M_0$ , то функция дифференцируема  $n$  раз в этой точке.
- 9 Сформулируйте вторую теорему о равенстве смешанных частных производных второго порядка функции  $u = f(x, y)$ .
- 10 Дайте определение дифференциала второго порядка функции  $u = f(x, y)$  ( $x$  и  $y$  — независимые переменные) в данной точке  $M_0$  и, пользуясь этим определением, выведите формулу (2).
- 11 Напишите операторную формулу для дифференциала второго порядка функции  $u = f(x, y)$  ( $x$  и  $y$  — независимые переменные).
- 12 Дайте определение дифференциала  $n$ -го порядка функции  $u = f(x, y)$ . Методом математической индукции докажите справедливость операторной формулы (4) для дифференциала  $n$ -го порядка.
- 13 Выберите формулу (5) для дифференциала второго порядка функции  $u = f(x, y)$  в случае, когда  $x$  и  $y$  — дважды дифференцируемые функции каких-либо независимых переменных.
- 14 Напишите выражение для оператора дифференциала и операторную формулу для дифференциала  $n$ -го порядка функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$ , где  $x_1, \dots, x_m$  — независимые переменные. Докажите, что эта формула справедлива и в том случае, когда  $x_1, \dots, x_m$  — линейные функции независимых переменных  $t_1, \dots, t_k$ .
- 15 Сформулируйте теорему о формуле Тейлора и запишите формулу Тейлора в двух видах (формулы (7) и (8)).
- 16 Что такое многочлен Тейлора? Каким свойством он обладает? Докажите это свойство.
- 17 Напишите формулу Лагранжа конечных приращений для функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$ . При каких условиях эта формула верна?
- 18 При условиях теоремы 20 (т. е. пользуясь формулой (7)) выведите формулу для остаточного члена в форме Пеано. При каких более слабых требованиях справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано?

### Примеры решения задач

1. Найти частные производные второго порядка функции  $u = x^y$ .

$\Delta$  Сначала находим частные производные первого порядка.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x$$

Затем, вычисляя частные производные от частных производных первого порядка, получаем производные второго порядка данной функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= y(y-1)x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x = x^{y-1}(1 + y \ln x), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= yx^{y-1} \ln x + x^y \frac{1}{x} = x^{y-1}(1 + y \ln x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y (\ln x)^2 \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**Замечание** В рассмотренном примере  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ . Вообще, если функция  $u = f(x, y)$  является суперпозицией элементарных функций, то ее частные производные любого порядка также являются суперпозициями элементарных функций, а так как элементарная функция непрерывна в любой точке, в окрестности которой она определена, то частные производные любого порядка функции  $u = f(x, y)$  не зависят от порядка дифференцирования.

**2.** Доказать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

имеет в точке  $O(0, 0)$  смешанные частные производные второго порядка, но при этом  $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ .

Δ Вычислим сначала частную производную первого порядка  $f_x(x, y)$ . Во всех точках, кроме точки  $O(0, 0)$ , это можно сделать, дифференцируя по  $x$  функцию  $xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ . Получаем

$$f_x(x, y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)'_x \quad \text{при } x^2 + y^2 \neq 0 \quad (9)$$

Чтобы найти  $f_x(0, 0)$ , воспользуемся тем, что  $f(x, 0) = 0$ . Отсюда имеем  $f_x(0, 0) = 0$ .

Для нахождения смешанной производной второго порядка  $f_{xy}(0, 0)$  нужно найти производную по  $y$  функции  $f_x(0, y)$  в точке  $y = 0$ . Из (9) следует, что  $f_x(0, y) = -y$  при  $y \neq 0$ , а так как  $f_x(0, 0) = 0$ , то  $\forall y. f_x(0, y) = -y$ . Следовательно,  $f_{xy}(0, 0) = \frac{d}{dy} f_x(0, y) \Big|_{y=0} = -1$ .

Аналогично получаем  $f_y(x, y) = x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)'_y$  при  $x^2 + y^2 \neq 0$ ,  $f_y(0, 0) = 0$ , откуда  $\forall x. f_y(x, 0) = x$ . Следовательно,

$$f_{yx}(0, 0) = \frac{d}{dx} f_y(x, 0) \Big|_{x=0} = 1.$$

Таким образом,  $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ . ▲

**3.** Найти  $\frac{\partial^{10} u}{\partial x^2 \partial y^8}$ , если  $u = e^{xy}$ .

Δ Указанная частная производная десятого порядка не зависит от порядка дифференцирования (см. замечание после примера 1). Очевидно,  $\frac{\partial^8 u}{\partial y^8} = x^8 e^{xy}$ . Вычисляя теперь по формуле Лейбница вторую производную по  $x$  от  $\frac{\partial^8 u}{\partial y^8}$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^8 u}{\partial y^8} \right) &= \frac{\partial^{10} u}{\partial x^2 \partial y^8} = (x^8)'' e^{xy} + 2(x^8)' (e^{xy})'_x + x^8 (e^{xy})''_{xx} = \\ &= 56x^6 e^{xy} + 16x^7 y e^{xy} + x^8 y^2 e^{xy} = e^{xy} (56x^6 + 16x^7 y + x^8 y^2). \end{aligned}$$

▲

**4.** Найти второй дифференциал функции  $u = x^y$  в точке  $M_0(1, 0)$ .  
 $\Delta$  Полагая  $x = 1$ ,  $y = 0$  в выражениях для частных производных второго порядка данной функции (см. пример 1), получим  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0) = 0$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(M_0) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(M_0) = 1$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0) = 0$ . Подставляя эти значения в формулу (2), находим  $d^2u|_{M_0} = 2dx dy$ .  $\blacktriangle$

**5.** Найти второй дифференциал функции  $u = f(x + y, xy)$  в точке  $M(x, y)$ , если  $x$  и  $y$  — независимые переменные.

$\Delta$  Запишем данную функцию в виде  $u = f(t, v)$ , где  $t = x + y$ ,  $v = xy$ . Используя эти обозначения, находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_t(x + y, xy) + f_v(x + y, xy) \cdot y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_t(x + y, xy) + f_v(x + y, xy) \cdot x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_{tt} + f_{vt} \cdot y + f_{tv} \cdot y + f_{vv} \cdot y^2 = f_{tt} + 2yf_{tv} + y^2 f_{vv},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= f_{tt} + f_{vt} \cdot x + f_{tv} \cdot y + f_{vv} \cdot xy + f_v = \\ &= f_{tt} + (x + y)f_{tv} + xyf_{vv} + f_v, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f_{tt} + f_{vt} \cdot x + f_{tv} \cdot x + f_{vv} \cdot x^2 = f_{tt} + 2xf_{tv} + x^2 f_{vv}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (2), получаем

$$\begin{aligned} d^2u &= (f_{tt} + 2yf_{tv} + y^2 f_{vv}) dx^2 + 2(f_{tt} + (x + y)f_{tv} + xyf_{vv} + \\ &\quad + f_v) dx dy + (f_{tt} + 2xf_{tv} + x^2 f_{vv}) dy^2. \blacktriangle \end{aligned}$$

**6.** Разложить функцию  $f(x, y) = e^{x/y}$  по формуле Тейлора (8) с центром разложения в точке  $M_0(0, 1)$  до членов второго порядка включительно.

$\Delta$  Сначала находим частные производные функции  $f(x, y)$  до второго порядка включительно:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x/y} \cdot \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x/y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x/y} \cdot \frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{x/y} \cdot \left(-\frac{x}{y^3}\right) + e^{x/y} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{x/y} \cdot \frac{x^2}{y^4} + e^{x/y} \cdot \frac{2x}{y^3}.$$

В точке  $M_0(0, 1)$  имеем  $f(M_0) = 1$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 1$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) = 1$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M_0) = -1$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) = 0$ . Подставляя эти выражения в формулу (8), получаем

жения в формулу (8), получаем

$$e^{x/y} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - x(y-1) + R_3 = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 - xy + R_3.$$

В форме Пеано  $R_3 = o(x^2 + (y-1)^2)$ . ▲

7. Доказать, что если функция  $f(x, y)$  дифференцируема в выпуклой \*) области  $G$  и ее частные производные  $f_x(x, y)$  и  $f_y(x, y)$  ограничены в этой области, то  $f(x, y)$  равномерно непрерывна в области  $G$ . △ Пусть  $|f_x(x, y)| \leq c$ ,  $|f_y(x, y)| \leq c$  в выпуклой области  $G$  ( $c > 0$  — некоторое число). Зададим произвольное  $\varepsilon > 0$  и положим  $\delta = \frac{\varepsilon}{2c}$ .

Пусть  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$  — любые точки области  $G$ , для которых  $\rho(M_1, M_2) < \delta$ . Так как область  $G$  выпуклая, то отрезок прямой, соединяющий точки  $M_1$  и  $M_2$ , целиком лежит в области  $G$ , и поэтому к разности  $f(M_1) - f(M_2)$  можно применить формулу Лагранжа:

$$f(M_1) - f(M_2) = f_x(N)(x_1 - x_2) + f_y(N)(y_1 - y_2). \quad (10)$$

Далее, так как  $\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta$ , то  $|x_1 - x_2| < \delta$ ,  $|y_1 - y_2| < \delta$ , и поскольку  $|f_x(N)| \leq c$ ,  $|f_y(N)| \leq c$ , из равенства (10) следует, что

$$|f(M_1) - f(M_2)| \leq |f_x(N)||x_1 - x_2| + |f_y(N)||y_1 - y_2| < 2c\delta = \varepsilon.$$

Согласно определению это и означает, что функция  $f(x, y)$  равномерно непрерывна в области  $G$ . ▲

8. Доказать, что функция

$$u = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

равномерно непрерывна на всей плоскости.

△ Докажем сначала, что данная функция имеет ограниченные частные производные  $u_x$  и  $u_y$  на всей плоскости. В самом деле,  $u_x = \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$  при  $x^2 + y^2 \neq 0$  и  $u_x(0, 0) = 1$  (см. пример 2 § 4).

Переходя к полярным координатам  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , получим  $u_x = \cos^4 \varphi + 3 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - 2 \cos \varphi \sin^3 \varphi$  (при  $\rho \neq 0$ ) и  $u_x(0, 0) = 1$ . Отсюда непосредственно видно, что  $u_x(x, y)$  — ограниченная функция на всей плоскости. Аналогично доказывается ограниченность  $u_y(x, y)$ .

Казалось бы, теперь можно воспользоваться установленным в примере 7 достаточным условием равномерной непрерывности функции.

\*) Область  $G$  называется *выпуклой*, если для любых точек  $M_1$  и  $M_2$  этой области отрезок прямой, соединяющий точки  $M_1$  и  $M_2$ , целиком принадлежит области  $G$ . Например, круг и прямоугольник — выпуклые области на плоскости.

Однако этому мешает тот факт, что функция  $u(x, y)$  не дифференцируема на всей плоскости, а именно не дифференцируема в точке  $O(0, 0)$  (см. пример 2 § 4). Тем не менее простые рассуждения позволяют обойти это препятствие. Если точки  $M_1$  и  $M_2$  таковы, что точка  $O$  не лежит на отрезке  $M_1M_2$ , то разность  $u(M_1) - u(M_2)$  можно оценить с помощью формулы Лагранжа точно так же, как и в примере 7. Если же точка  $O$  лежит на отрезке  $M_1M_2$ , то разность  $u(M_1) - u(M_2)$  следует заменить суммой двух разностей  $[u(M_1) - u(M_3)] + [u(M_3) - u(M_2)]$ , причем точку  $M_3$  выбрать так, чтобы точка  $O$  не лежала на отрезках  $M_1M_3$  и  $M_3M_2$ . Далее, каждую из этих разностей можно оценить с помощью формулы Лагранжа. В любом случае получим  $|u(M_1) - u(M_2)| < \varepsilon$ , если  $\rho(M_1, M_2) < \delta = \frac{\varepsilon}{4c}$ , где  $c$  — верхняя грань  $|u_x|$  и  $|u_y|$ . Это доказывает равномерную непрерывность функции  $u(x, y)$  на всей плоскости. ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

38. Найдите частные производные второго порядка следующих функций
- $u = x^3 + y^4 + 2x^3y^4$ ,
  - $u = xy^2z^3 + \frac{x}{y^2z^3}$ ,
  - $u = \cos(xy)$ ,
  - $u = \sin(x + yz)$ ,
  - $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ ,
  - $u = \sqrt{x^2 + y^2} e^{x+y}$ ,
  - $u = x^{yz}$ ,
  - $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$ ,
  - $u = \sum_{k=1}^m a_k x_k + \sum_{i, k=1}^m b_{ik} x_i x_k$  ( $a_k, b_{ik}$  — числа)
39. Докажите, что функция  $u(x, y) = \begin{cases} xy & \text{при } |y| \leq |x|, \\ -xy & \text{при } |y| > |x| \end{cases}$  имеет в точке  $O(0, 0)$  смешанные частные производные второго порядка, но  $u_{xy}(0, 0) \neq u_{yx}(0, 0)$
40. Докажите, что если функция  $u = f(x, y)$  имеет в некоторой окрестности точки  $M_0(x_0, y_0)$  частные производные  $f_x(x, y)$ ,  $f_y(x, y)$ ,  $f_{xy}(x, y)$  и смешанная частная производная  $f_{xy}(x, y)$  непрерывна в  $M_0$ , то в этой точке существует смешанная частная производная  $f_{yx}$  и справедливо равенство  $f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$
41. Найдите частные производные указанного порядка
- $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$  и  $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$ , если  $u = \sin xy$ ,
  - $\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^4}$ , если  $u = x^4 \cos y + y^4 \cos x$ ,
  - $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ , если  $u = e^{xyz}$ ,
  - $\frac{\partial^{10} u}{\partial x^4 \partial y^6}$ , если  $u = \sin x \cos 2y$ ,
  - $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$ , если  $u = x^m y^n$ ,
  - $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$ , если  $u = e^{2x} \sin y + e^x \cos \frac{y}{2}$ ,
  - $\frac{\partial^{10} u}{\partial x \partial y^9}$ , если  $u = (x^2 + y)^{10} \operatorname{tg} x$ ,
  - $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$ , если  $u = \frac{x+y}{x-y}$
42. Найдите частные производные второго порядка следующих функций (функции  $f$  и  $g$  считаются дважды дифференцируемыми)

а)  $u = f(x + y, x^2 + y^2)$ , б)  $u = f\left(xy, \frac{x}{y}\right)$ , в)  $u = f(xy) g(xz)$ ,

г)  $u = \ln f(x, x + y)$ , д)  $u = f(\sin x + \cos y)$ , е)  $u = [f(x)]^{g(y)}$

43. Докажите, что функция

$$u = \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0, \end{cases}$$

имеет в точке  $O(0, 0)$  частные производные любого порядка, которые не зависят от порядка дифференцирования, но при этом функция  $u$  разрывна в точке  $O$

44. а) Докажите, что функция  $u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}$  ( $a$  и  $x_0$  — числа) удовлетворяет уравнению теплопроводности  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

б) Докажите, функция  $u = \frac{1}{r}$ , где  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ , удовлетворяет при  $r \neq 0$  уравнению Лапласа  $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

45. В каждом из следующих случаев проверьте, что данная функция удовлетворяет заданному уравнению, если  $f$  и  $g$  — произвольные дважды дифференцируемые функции

а)  $u = f(x - at) + g(x + at)$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,

б)  $u = xf(x + y) + yg(x + y)$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ,

в)  $u = f\left(\frac{y}{x}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$ ,  $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ,

г)  $u = x^n f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{1-n} g\left(\frac{y}{x}\right)$ ,  $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n - 1)u$ ,

д)  $u = f(x + g(y))$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

46. Вычисляя частные производные первого и второго порядков и исключая производные функции  $f$  и  $g$  ( $f$  и  $g$  — произвольные дважды дифференцируемые функции), составьте уравнение, которому удовлетворяет функция  $u(x, y)$ , если

а)  $u = f(x) + g(y)$ , б)  $u = f(x)g(y)$ ,

в)  $u = f(x + y) + g(x - y)$ , г)  $u = f(xy) + g\left(\frac{x}{y}\right)$

47. Найдите решение  $u = u(x, y)$  уравнения

а)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y$ , удовлетворяющее условиям  $u(0, y) = y^2$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = y$ ,

б)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\sin x$ , удовлетворяющее условиям  $u(0, y) = 0$ ,  $u(x, 0) = x$ ,

в)  $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 1$ , удовлетворяющее условиям  $u(x, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = x + 1$ ,  $u(0, y) = y$

48. Для функций из упр. 35 найдите дифференциалы второго порядка в указанных точках

49. Найдите дифференциалы второго порядка следующих функций в указанных точках, если  $f$  — дважды дифференцируемая функция,  $x, y, z$  — независимые переменные:
- $u = f(x - y, x + y)$  в точках  $M(x, y)$  и  $M_0(1, 1)$ ;
  - $u = f(x + y, z^2)$  в точках  $M(x, y, z)$  и  $M_0(1, -1, 0)$ ;
  - $u = f(xy, x^2 + y^2)$  в точках  $M(x, y)$  и  $O(0, 0)$ ;
  - $u = \sin f(x) \cdot e^{f(y)}$  в точках  $M(x, y)$  и  $O(0, 0)$ .
50. Найдите  $d^n u$ , если: а)  $u = f(ax + by + cz)$ ; б)  $u = f(ax, by, cz)$ ;  $x, y, z$  — независимые переменные.
51. Разложите данную функцию по формуле Тейлора с центром разложения в данной точке  $M_0$ :
- $u = (x - 1)^2 + (x + y)^2$ ,  $M_0(0, 0)$ ;
  - $u = x - 2y + x^2 - 3xy + 4y^2$ ,  $M_0(1, 2)$ ;
  - $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ ,  $M_0(1, 1, 1)$ .
52. Разложите данную функцию по формуле Тейлора с центром разложения в данной точке  $M_0$  до членов указанного порядка включительно:
- $u = \sqrt{1 - x - y}$ ,  $M_0(0, 0)$ , до членов второго порядка;
  - $u = \ln(1 + x + y)$ ,  $M_0(0, 0)$ , до членов третьего порядка;
  - $u = (x + y) \sin(x - y)$ ,  $M_0(0, 0)$ , до членов третьего порядка;
  - $u = e^x \cos y$ ,  $M_0(0, 0)$ , до членов четвертого порядка;
  - $u = x^y$ ,  $M_0(1, 1)$ , до членов второго порядка;
  - $u = x^{y/z}$ ,  $M_0(1, 2, 1)$ , до членов второго порядка.
53. Исследуйте на равномерную непрерывность на всей плоскости следующие функции:
- $u = \sin x \cos y$ ;
  - $u = e^{-(x^2 + y^2)}$ ;
  - $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;
  - $u = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$
  - $u = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{\sqrt{x^4 + y^4}}, & x^4 + y^4 \neq 0, \\ 0, & x^4 + y^4 = 0. \end{cases}$

## § 6. Локальный экстремум функции

### Основные понятия и теоремы

**1. Определение и необходимые условия локального экстремума.** Пусть функция  $u = f(M) = f(x_1, \dots, x_m)$  определена в некоторой окрестности точки  $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ .

Определение. Говорят, что функция  $u = f(M)$  имеет в точке  $M_0$  локальный максимум (минимум), если существует такая окрестность точки  $M_0$ , в которой при  $M \neq M_0$  выполняется неравенство  $f(M) < f(M_0)$  ( $f(M) > f(M_0)$ ).

Если функция имеет в точке  $M_0$  локальный максимум или локальный минимум, то говорят также, что она имеет в этой точке локальный экстремум (или просто экстремум).

Теорема 21 (необходимое условие экстремума). Если функция  $u = f(M) = f(x_1, \dots, x_m)$  имеет в точке  $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$  локальный

экстремум и в этой точке существует частная производная функции по аргументу  $x_k$ , то  $\frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0) = 0$ .

**Следствие.** Если функция  $u = f(M) = f(x_1, \dots, x_m)$  имеет в точке  $M_0$  локальный экстремум и дифференцируема в этой точке, то

$$du|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0) dx_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0) dx_m = 0$$

(при любых значениях дифференциалов независимых переменных  $dx_1, \dots, dx_m$ ).

Точки, в которых первый дифференциал функции равен нулю, принято называть *точками возможного экстремума* этой функции. Для отыскания точек возможного экстремума функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  нужно решить систему уравнений  $f_{x_1}(x_1, \dots, x_m) = 0, \dots, f_{x_m}(x_1, \dots, x_m) = 0$  (это система  $m$  уравнений с  $m$  неизвестными  $x_1, \dots, x_m$ ).

**2. Некоторые сведения о квадратичных формах.** Функция вида

$$Q(x_1, \dots, x_m) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1m}x_1x_m + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{mm}x_m^2$$

(или, в краткой записи,  $Q = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}x_i x_j$ ), где  $a_{ij}$  — числа, причем

$a_{ij} = a_{ji}$ , называется *квадратичной формой* от переменных  $x_1, \dots, x_m$ . Числа  $a_{ij}$  называются *коэффициентами квадратичной формы*, а составленная из этих коэффициентов симметричная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

— *матрицей квадратичной формы*.

Определители

$$\delta_1 = a_{11}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad \dots$$

$$\dots, \quad \delta_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

называются *угловыми минорами* матрицы  $A$ .

Квадратичная форма  $Q(x_1, \dots, x_m)$  называется *положительно определенной* (*отрицательно определенной*), если для любых значений переменных  $x_1, \dots, x_m$ , одновременно не равных нулю, она принимает положительные (отрицательные) значения.

Отметим, что  $Q(0, 0, \dots, 0) = 0$ .

Например,  $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$  — положительно определенная квадратичная форма, так как  $Q(x_1, x_2) > 0$  во всех точках  $(x_1, x_2)$ , кроме точки  $(0, 0)$ .

Квадратичная форма называется *знакоопределенной*, если она является либо положительно определенной, либо отрицательно определенной.

Квадратичная форма  $Q(x_1, \dots, x_m)$  называется *квазизнакоопределенной*, если она принимает либо только неотрицательные, либо только неположительные значения, но при этом обращается в нуль не только при  $x_1 = \dots = x_m = 0$ .

Например,  $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$  — квазизнакоопределенная квадратичная форма, поскольку  $Q(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 \geq 0$  во всех точках  $(x_1, x_2)$ , но  $Q(x_1, x_2) = 0$  не только в точке  $(0, 0)$ ; так,  $Q(1, -1) = 0$ .

Квадратичная форма  $Q(x_1, \dots, x_m)$  называется *знакопеременной*, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Например,  $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$  — знакопеременная квадратичная форма, поскольку она принимает как положительные, так и отрицательные значения:  $Q(1, 0) = 1 > 0$ ,  $Q(0, 1) = -1 < 0$ .

**Критерий Сильвестра** знакоопределенности квадратичной формы.

1°. Для того чтобы квадратичная форма  $Q(x_1, \dots, x_m)$  была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры ее матрицы были положительны:  $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \dots, \delta_m > 0$ .

2°. Для того чтобы квадратичная форма  $Q(x_1, \dots, x_m)$  была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров ее матрицы чередовались следующим образом:  $\delta_1 < 0, \delta_2 > 0, \delta_3 < 0, \delta_4 > 0, \dots$

**3. Достаточные условия локального экстремума.** Второй дифференциал функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$ , где  $x_1, \dots, x_m$  — независимые переменные, в точке  $M_0$  можно записать в виде

$$d^2 u|_{M_0} = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) dx_i dx_j.$$

Это выражение показывает, что второй дифференциал функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  в данной точке  $M_0$  является квадратичной формой от переменных  $dx_1, \dots, dx_m$ , а частные производные второго порядка  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$  — коэффициентами этой квадратичной формы.

**Теорема 22** (достаточные условия экстремума). Пусть функция  $u = f(M) = f(x_1, \dots, x_m)$  дифференцируема в некоторой окрестности точки  $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$  и дважды дифференцируема в самой точке  $M_0$ , причем  $M_0$  — точка возможного экстремума данной функции, т. е.  $du|_{M_0} = 0$ . Тогда если второй дифференциал  $d^2 u|_{M_0}$  является положительно определенной (отрицательно определенной) квадратичной

формой от переменных  $dx_1, \dots, dx_m$ , то функция  $u = f(M)$  имеет в точке  $M_0$  локальный минимум (максимум). Если же  $d^2u|_{M_0}$  является знакопеременной квадратичной формой, то в точке  $M_0$  функция  $u = f(M)$  не имеет локального экстремума.

**Замечание.** Если  $du|_{M_0} = 0$ , а  $d^2u|_{M_0}$  является квазизнакоопределенной квадратичной формой, то функция  $u = f(M)$  может иметь в точке  $M_0$  локальный экстремум, а может и не иметь его. Например, для каждой из функций  $u = x^4 + y^4$  и  $u = x^3y^3$  в точке  $O(0,0)$  выполнены условия  $du = 0$ ,  $d^2u = 0$  (т. е. второй дифференциал является квазизнакоопределенной квадратичной формой). Но при этом первая функция имеет, очевидно, в точке  $O$  локальный минимум, а вторая функция не имеет экстремума в точке  $O$ .

**4. Случай функции двух переменных.** Пусть функция  $u = f(x, y)$  дифференцируема в окрестности точки  $M_0(x_0, y_0)$  и дважды дифференцируема в самой точке  $M_0$ , причем  $M_0$  — точка возможного экстремума данной функции, т. е.  $du|_{M_0} = 0$ . Введем обозначения:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0), \quad a_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(M_0), \quad a_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0).$$

Тогда из теоремы 22 и критерия Сильвестра знакопределенности квадратичной формы следуют утверждения:

- 1) если  $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ , то в точке  $M_0$  функция  $u = f(x, y)$  имеет локальный экстремум (максимум при  $a_{11} < 0$  и минимум при  $a_{11} > 0$ );
- 2) если  $D < 0$ , то в точке  $M_0$  функция  $u = f(x, y)$  не имеет экстремума;
- 3) если  $D = 0$ , то в точке  $M_0$  функция  $u = f(x, y)$  может иметь локальный экстремум, а может и не иметь его.

### Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение локального экстремума функции.
2. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом условии экстремума и следствие этой теоремы. Приведите пример функции  $u = f(x, y)$ , удовлетворяющей в некоторой точке  $M_0$  условиям  $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = 0$ , но не имеющей в точке  $M_0$  локального экстремума.
3. Какие точки называются точками возможного экстремума функции? Приведите пример функции  $u = f(x, y)$ , имеющей в некоторой точке  $M_0$  локальный экстремум и такой, что  $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = 0$ , а  $\frac{\partial u}{\partial y}$  в точке  $M_0$  не существует.
4. Какая функция называется квадратичной формой? Что такое матрица квадратичной формы? Выпишите матрицу квадратичной формы  $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2$  и вычислите ее главные миоры.

- 5 Какая квадратичная форма называется а) положительно определенной, б) отрицательно определенной, в) знакопределенной, г) квазизнакопределенной, д) знакопеременной? Приведите примеры каждого типа квадратичных форм.
- 6 Сформулируйте критерий Сильвестра знакопределенности квадратичной формы. Пользуясь этим критерием, установите, является ли знакопределенной квадратичная форма  $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 8x_3^2$ .
- 7 Напишите выражение для второго дифференциала функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  в точке  $M_0$ , если  $x_1, \dots, x_m$  — независимые переменные. Квадратичной формой от каких переменных является  $d^2u|_{M_0}$ ?
- 8 Сформулируйте теорему о достаточных условиях экстремума функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$ . Являются ли условия этой теоремы необходимыми условиями экстремума?
- 9 Сформулируйте достаточные условия локального максимума, локального минимума и отсутствия экстремума функции  $u = f(x, y)$  в точке  $M_0(x_0, y_0)$ .
- 10 Приведите пример функции  $u = f(x, y)$ , удовлетворяющей в некоторой точке  $M_0$  условиям  $du = 0$ ,  $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$  причем эта функция в точке  $M_0$  а) имеет локальный экстремум, б) не имеет локального экстремума.

### Примеры решения задач

1. Найдите точки локального экстремума функции

$$u = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$$

Для нахождения точек возможного экстремума данной функции вычисляем ее частные производные и приравниваем их нулю:

$$u_x = 4x - y + 2z = 0, \quad u_y = -x - 1 + 3y^2 = 0, \quad u_z = 2x + 2z = 0$$

Решая эту систему трех уравнений, находим две точки возможного экстремума:  $M_1(1/3, 2/3, -1/3)$  и  $M_2(-1/4, -1/2, 1/4)$ .

Далее воспользуемся достаточными условиями экстремума. Для этого вычислим частные производные второго порядка данной функции  $u_{xx} = 4$ ,  $u_{xy} = u_{yx} = -1$ ,  $u_{xz} = u_{zx} = 2$ ,  $u_{yy} = 6y$ ,  $u_{yz} = u_{zy} = 0$ ,  $u_{zz} = 2$ .

Значения этих частных производных в точке  $M_1$  являются коэффициентами  $d^2u|_{M_1}$  — квадратичной формы от переменных  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Матрица этой квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вычисляя главные миноры матрицы  $A$ , получаем

$$\delta_1 = 4 > 0, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 15 > 0, \quad \delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0$$

Согласно критерию Сильвестра  $d^2u|_{M_1}$  является положительно определенной квадратичной формой от переменных  $dx, dy, dz$ . Следовательно, в точке  $M_1$  функция имеет локальный минимум.

Исследуем теперь точку  $M_2$ . Матрица квадратичной формы  $d^2u|_{M_2}$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем  $\delta_1 = 4 > 0$ ,  $\delta_2 = -13 < 0$ ,  $\delta_3 = -14 < 0$ . Следовательно,  $d^2u|_{M_2}$  не является знакоопределенной квадратичной формой от  $dx, dy, dz$ . Нетрудно видеть, что эта квадратичная форма знакопеременная. В самом деле, если положить  $dx \neq 0$ ,  $dy = dz = 0$ , то получим

$d^2u|_{M_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_2) dx^2 = 4 dx^2 > 0$ , а если положить  $dx = dz = 0$ ,  $dy \neq 0$ ,

то получим  $d^2u|_{M_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_2) dy^2 = -3 dy^2 < 0$ . Следовательно, в точке  $M_2$  функция не имеет локального экстремума. ▲

2. Найти точки локального экстремума функции  $u = x^2 - 2xy + 4y^3$ .

Δ Вычисляем частные производные функции и приравниваем их нулю:

$$u_x = 2x - 2y = 0, \quad u_y = -2x + 12y^2 = 0.$$

Решая эту систему уравнений, получаем две точки возможного экстремума:  $M_1(0, 0)$  и  $M_2(1/6, 1/6)$ .

Далее находим частные производные второго порядка:  $u_{xx} = 2$ ,  $u_{xy} = -2$ ,  $u_{yy} = 24y$ .

В точке  $M_1$ :  $a_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_1) = 2$ ,  $a_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(M_1) = -2$ ,  $a_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_1) = 0$ . Следовательно,  $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -4 < 0$ , и, значит, в точке  $M_1$  функция не имеет локального экстремума.

В точке  $M_2$ :  $a_{11} = 2$ ,  $a_{12} = -2$ ,  $a_{22} = 4$ . Следовательно,  $D = 2 \cdot 4 - (-2)^2 = 4 > 0$  и так как  $a_{11} = 2 > 0$ , то в точке  $M_2$  функция имеет локальный минимум. ▲

3. Найти точки локального экстремума функции  $u = 3x^2y - x^3 - y^4$ .

Δ Вычисляем частные производные функции и приравниваем их нулю:

$$u_x = -3x^2 + 6xy = 0, \quad u_y = 3x^2 - 4y^3 = 0$$

Решая эту систему, находим две точки возможного экстремума:  $M_1(0, 0)$  и  $M_2(6, 3)$ .

Вычисляем частные производные второго порядка данной функции:  $u_{xx} = -6x + 6y$ ,  $u_{xy} = 6x$ ,  $u_{yy} = -12y^2$ .

В точке  $M_1$ :  $a_{11} = 0$ ,  $a_{12} = 0$ ,  $a_{22} = 0$ , и, значит,  $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ . Поэтому точка  $M_1(0, 0)$  требует дополнительного исследования.

Значение функции  $u(x, y)$  в этой точке равно нулю:  $u(0, 0) = 0$ . Далее, при  $x < 0$ ,  $y = 0$  имеем  $u(x, y) = -x^3 > 0$ , а при  $x = 0$ ,  $y \neq 0$  имеем  $u(x, y) = -y^4 < 0$ . Следовательно, в любой окрестности точки  $M_1(0, 0)$  функция  $u(x, y)$  принимает значения, как большие  $u(0, 0)$ , так и меньшие  $u(0, 0)$ , и, значит, в точке  $M_1$  функция  $u(x, y)$  не имеет локального экстремума.

В точке  $M_2$ :  $a_{11} = -18$ ,  $a_{12} = 36$ ,  $a_{22} = -108$ , и, значит,  $D = -648 > 0$ . Так как  $a_{11} < 0$ , то в точке  $M_2$  функция имеет локальный максимум. ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

54. Найдите точки локального экстремума следующих функций двух переменных:

- а)  $u = x^2 - xy + y^2$ ;    б)  $u = x^2 - xy - y^2$ ;
- в)  $u = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$ ;    г)  $u = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$ ;
- д)  $u = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$ ;    е)  $u = x^3 - 2x^2y^2 + y^4$ ;
- ж)  $u = xy + \frac{1}{2(x+y)}$ ;    з)  $u = e^{x+2y}(x^2 - y^2)$ ;
- и)  $u = e^{x-y}(x^2 - 2xy + 2y^2)$ ;    к)  $u = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ ;
- л)  $u = (x - 2y)e^{-(x^2+y^2)}$ ;    м)  $u = xy \ln(x^2 + y^2)$ ;    н)  $u = \frac{x}{y} + \frac{1}{x} + y$ .

55. Найдите точки локального экстремума следующих функций трех переменных:

- а)  $u = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1$ ;
- б)  $u = 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 4z - x$ ;
- в)  $u = x^3 + xy + y^2 - 2zx + 2z^2 + 3y - 1$ ;
- г)  $u = xyz(1 - x - y - z)$ ;    д)  $u = 2 \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} - 4x + 2z^2$ ;
- е)  $= (x + y + 2z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ .

56. Докажите, что функция  $u = (x - y^2)(2x - y^2)$ :

- а) имеет в точке  $O(0, 0)$  локальный минимум вдоль каждой прямой, проходящей через эту точку;
- б) не имеет локального минимума в точке  $O(0, 0)$ .

# ГЛАВА XI

## НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

### § 1. Неявные функции

Основные понятия и теоремы

**1. Понятие неявной функции.** Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0. \quad (1)$$

Пусть для любого  $x$  из некоторого множества  $X$  это уравнение имеет решение относительно  $y$ . Тем самым каждому  $x \in X$  ставится в соответствие определенное число — решение уравнения (1) (заметим, что уравнение (1) может иметь несколько решений относительно  $y$ , но мы выбираем какое-то одно из них). Это означает, что на множестве  $X$  определена функция  $y = f(x)$ . При этом правило  $f$ , ставящее в соответствие каждому  $x$  некоторое число, не указано здесь явно, а задано с помощью уравнения (1) (“спрятано” в этом уравнении). Такой способ задания функции  $y = f(x)$  называется *неявным*, а сама функция  $y = f(x)$  — *неявной функцией*. Итак, неявная функция  $y = f(x)$  — это решение уравнения (1) относительно  $y$ , т. е.  $\forall x \in X: F(x, f(x)) = 0$ .

Например, уравнение  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ , рассматриваемое в области  $y \geq 0$ , определяет неявную функцию  $y = \sqrt{1 - x^2}$ . Таким образом, здесь неявная функция найдена в явном виде. Во многих случаях этого сделать не удается.

Аналогично уравнению (1) можно рассмотреть уравнение с большим числом переменных:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0, \quad (2)$$

и ввести понятие неявной функции  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , определяемой уравнением (2).

**2. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявной функции.**

Теорема 1. Пусть: 1°) функция  $F(x, y)$  непрерывна в прямоугольнике  $Q = \{(x, y): a < x < b, c \leq y \leq d\}$ ;

2°)  $\forall x \in (a, b): F(x, c)F(x, d) < 0$  (т. е. на нижней и верхней сторонах прямоугольника  $Q$  функция  $F(x, y)$  имеет значения разных знаков);

3°)  $\forall x \in (a, b)$  функция  $F(x, y)$  является строго монотонной функцией аргумента  $y$  на сегменте  $[c, d]$ .

Тогда на  $(a, b)$  существует единственная неявная функция, определяемая уравнением (1), и эта функция непрерывна на  $(a, b)$ .

Следующая теорема в отличие от теоремы 1 носит локальный характер: утверждается существование, единственность и дифференцируемость неявной функции в некоторой окрестности точки.

**Теорема 2.** Пусть: 1°) функция  $F(x, y)$  дифференцируема в некоторой окрестности  $\omega$  точки  $M_0(x_0, y_0)$ ;

2°) частная производная  $F_y$  непрерывна в точке  $M_0$ ;

3°)  $F(x_0, y_0) = 0$ ,  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

Тогда существует такой прямоугольник  $\{(x, y) : |x - x_0| < d, |y - y_0| \leq c, d > 0, c > 0\} \subset \omega$ , в котором уравнение (1) определяет единственную неявную функцию вида  $y = f(x)$ , причем  $f(x_0) = y_0$ , функция  $f(x)$  дифференцируема на интервале  $(x_0 - d, x_0 + d)$ , и ее производная вычисляется по формуле

$$f'(x) = -\left.\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}\right|_{y=f(x)} = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}. \quad (3)$$

**Замечание 1.** Обратите внимание на порядок действий при вычислении  $F_x(x, f(x))$  — числителя в формуле (3): сначала берется частная производная по  $x$  функции  $F(x, y)$ , а затем вместо  $y$  подставляется  $f(x)$  (но не наоборот).

**Замечание 2.** Если функция  $F(x, y)$  дифференцируема  $n$  раз в  $\omega$ , то неявная функция  $y = f(x)$  дифференцируема  $n$  раз на интервале  $(x_0 - d, x_0 + d)$ . Ее вторая производная может быть вычислена с помощью дифференцирования по  $x$  правой части равенства (3):

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left[ -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \right]. \quad (4)$$

Производные более высокого порядка вычисляются аналогично.

**Замечание 3.** Если условие  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$  не выполняется, т. е.  $F_y(x_0, y_0) = 0$ , то уравнение (1) может иметь не единственное решение относительно  $y$  в окрестности точки  $M_0$  и может не иметь ни одного решения. Например, для уравнения  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  выполнены условия  $F(1, 0) = 0$ ,  $F_y(1, 0) = 0$ . Очевидно, что в окрестности точки  $M_0(1, 0)$  при  $x > 1$  уравнение не имеет решений (вещественных) относительно  $y$ , а при  $x < 1$  имеет два непрерывных решения:  $y = \sqrt{1 - x^2}$  и  $y = -\sqrt{1 - x^2}$ . Уравнение  $F(x, y) = x^2 + y^2 = 0$ , для которого  $F(0, 0) = F_y(0, 0) = 0$ , не имеет решений относительно  $y$  при любом  $x \neq 0$ .

Вместе с тем условие  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$  является лишь достаточным (в совокупности с остальными условиями теоремы 2), но не необходимым для существования в некоторой окрестности точки  $M_0$  единственной неявной функции вида  $y = f(x)$ , определяемой уравнением (1). Например, для уравнения  $F(x, y) = x^3 - y^3 = 0$  это условие не выполнено в точке  $M_0(0, 0)$ :  $F(0, 0) = F_y(0, 0) = 0$ , но тем не менее данное уравнение определяет в окрестности точки  $M_0(0, 0)$  единственную неявную функцию вида  $y = f(x)$ :  $y = x$ .

**Теорема 3.** Пусть: 1°) функция  $F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = F(M)$  дифференцируема в некоторой окрестности  $\omega$  точки  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y^0)$ ;

2°) частная производная  $F_y$  непрерывна в точке  $M_0$ ;

3°)  $F(M_0) = 0$ ,  $F_y(M_0) \neq 0$ .

Тогда существует такой параллелепипед

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_m, y) : |x_i - x_i^0| < d_i \ (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$|y - y^0| \leq c, \ d_i > 0, \ c > 0\} \subset \omega,$$

в котором уравнение (2) определяет единственную неявную функцию вида  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , причем  $f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = y^0$ , функция  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  дифференцируема при  $|x_i - x_i^0| < d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), и ее частные производные вычисляются по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_m) = -\frac{F_{xi}(x_1, x_2, \dots, x_m, f(x_1, x_2, \dots, x_m))}{F_y(x_1, x_2, \dots, x_m, f(x_1, x_2, \dots, x_m))} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (5)$$

### 3. Неявные функции, определяемые системой уравнений.

Рассмотрим систему  $n$  уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \\ \dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Решение этой системы относительно  $y_1, y_2, \dots, y_n$

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m), \ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \ \dots$$

$$\dots, \ y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (7)$$

называется совокупностью неявных функций, определяемых системой уравнений (6).

Определитель

$$\left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{array} \right|,$$

составленный из частных производных, называется определителем Якоби (или якобианом) функций  $F_1, F_2, \dots, F_n$  по переменным  $y_1, y_2, \dots, y_n$  и обозначается символом

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}.$$

Теорема 4. Пусть: 1°) функции  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , входящие в систему (6), дифференцируемы в некоторой окрестности  $\omega$  точки  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ ;

2°) частные производные  $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) непрерывны в точке  $M_0$ ;

3°)  $F_1(M_0) = 0, F_2(M_0) = 0, \dots, F_n(M_0) = 0, \left. \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} \right|_{M_0} \neq 0$ .

Тогда существует такой параллелепипед

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) : |x_i - x_i^0| < d_i \ (i = 1, 2, \dots, m), \\ |y_j - y_j^0| < c_j, \ (j = 1, 2, \dots, n), d_i > 0, c_j > 0\} \subset \omega,$$

в котором система уравнений (6) определяет единственную совокупность неявных функций вида (7), и эти функции дифференцируемы при  $|x_i - x_i^0| < d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

Формулы для вычисления частных производных неявных функций (7) можно получить следующим образом. Предположим, что в систему (6) подставлены функции (7). Тогда получатся тождества, дифференцирование которых по переменной  $x_i$  дает систему  $n$  линейных уравнений относительно  $\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \frac{\partial f_2}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_i} = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_i} + \frac{\partial F_n}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_n}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_i} = 0. \end{array} \right.$$

Определителем этой системы является якобиан  $\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}$ . В силу условий 2° и 3° теоремы 4 он отличен от нуля в некоторой окрестности точки  $M_0$ . Поэтому из этой системы однозначно получаются (например, по формулам Крамера) выражения для частных производных неявных функций (7).

### Контрольные вопросы и задания

1. Какая функция называется неявной? Приведите пример уравнения вида  $F(x, y) = 0$ , определяющего неявную функцию, и пример уравнения, не определяющего неявную функцию.
2. Сколько непрерывных неявных функций вида  $y = f(x)$  определяет уравнение  $x^2 - y^2 = 0$  в окрестности точки  $O(0, 0)$ ?
3. Сформулируйте теорему о существовании, единственности и непрерывности неявной функции, определяемой уравнением  $F(x, y) = 0$  (теорему 1). Докажите существование и единственность этой функции.
4. Докажите, что уравнение  $x^2 + y^2 - 5 = 0$  не определяет неявную функцию в прямоугольнике  $\{(x, y) : -1 < x < 1, 0 \leq y \leq 2\}$ . Какое условие теоремы 1 не выполнено в данном случае?
5. Сформулируйте локальную теорему о существовании, единственности и дифференцируемости неявной функции, определяемой уравнением  $F(x, y) = 0$  (теорему 2). Докажите, что при условиях теоремы 2 существует такой прямоугольник, в котором выполнены условия теоремы 1.

6. Выведите формулу (3) для производной неявной функции, дифференцируя по  $x$  тождество  $F(x, f(x)) = 0$ . Является ли такой вывод доказательством дифференцируемости неявной функции?
7. Приведите примеры, когда невыполнение условия  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ .
  - а) приводит к неразрешимости уравнения  $F(x, y) = 0$  относительно  $y$  в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  или к неединственности решения;
  - б) не нарушает существования и единственности неявной функции вида  $y = f(x)$ , определяемой уравнением  $F(x, y) = 0$  в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ .
8. Докажите, что уравнение  $x + y = 0$  не определяет неявной функции в достаточно малой окрестности точки  $(1, 1)$ . Какое условие теоремы 2 не выполнено в данном случае?
9. Уравнение  $|x| + y = 0$  определяет в окрестности точки  $O(0, 0)$  недифференцируемую в точке  $x = 0$  функцию  $y = -|x|$ . Какое условие теоремы 2 не выполнено в данном случае?
10. Уравнение  $(y - x)(y - 2x)(y + 3x) = 0$  определяет в любой окрестности точки  $O(0, 0)$  три дифференцируемые функции  $y = x$ ,  $y = 2x$ ,  $y = -3x$ . Какое условие теоремы 2 не выполнено в данном случае?
11. Вычислите производные  $f'(0)$  и  $f''(0)$  неявной функции  $y = f(x)$ , определяемой уравнением  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  и удовлетворяющей условию  $f(0) = 1$ , двумя способами: а) используя формулы (3) и (4); б) используя явное выражение для функции  $f(x)$ .
12. Сформулируйте теорему о существовании, единственности и дифференцируемости неявной функции, определяемой уравнением  $F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0$  (теорему 3).
13. Сформулируйте теорему о существовании, единственности и дифференцируемости совокупности неявных функций, определяемых системой уравнений (теорему 4).

### Примеры решения задач

#### 1. Доказать, что уравнение

$$y + 0,5 \sin y - x = 0 \quad (8)$$

определяет единственную неявную функцию вида  $y = f(x)$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ , и найти  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ ,  $f'(\pi)$ ,  $f''(\pi)$ .

△ Введем обозначение  $F(x, y) = y + 0,5 \sin y - x$ . Так как  $F_y = 1 + 0,5 \cos y > 0$ , то при любом фиксированном значении  $x$  функция  $F(x, y)$  является возрастающей функцией аргумента  $y$ . Кроме того, для любого фиксированного значения  $x$  при достаточно больших значениях  $|y|$ , очевидно, выполняются неравенства  $F(x, y) < 0$  при  $y < 0$ ,  $F(x, y) > 0$  при  $y > 0$ . Поскольку  $F(x, y)$  — непрерывная функция, отсюда следует, что  $\forall x$  существует единственное  $y$  такое, что  $F(x, y) = 0$ , т. е.  $\forall x$  уравнение (8) имеет единственное решение относительно  $y$ . Это и означает, что уравнение (8) определяет единственную неявную функцию вида  $y = f(x)$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ .

Так как  $F(x, y)$  — дифференцируемая функция и  $F_y(x, y) \neq 0$ , то и функция  $y = f(x)$  дифференцируема на всей числовой прямой. Для

нахождения  $f'(x)$  воспользуемся формулой (3):

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \Big|_{y=f(x)} = \frac{1}{1 + 0,5 \cos f(x)}.$$

Дифференцируя  $f'(x)$ , найдем

$$f''(x) = \frac{0,5 \sin f(x) \cdot f'(x)}{[1 + 0,5 \cos f(x)]^2} = \frac{\sin f(x)}{2[1 + 0,5 \cos f(x)]^3}.$$

Чтобы найти значения  $f'(x)$  и  $f''(x)$  в какой-либо точке  $x$ , нужно сначала вычислить соответствующее значение  $f(x)$ . Пусть  $x = \pi$ . Нетрудно проверить, что решением уравнения (8) при  $x = \pi$  является  $y = \pi$ , т. е.  $f(\pi) = \pi$ . Подставляя  $x = \pi$ ,  $f(x) = \pi$  в формулы для  $f'(x)$  и  $f''(x)$ , получаем  $f'(\pi) = 2$ ,  $f''(\pi) = 0$ . ▲

**2.** Найти производные  $f'(0)$  и  $f''(0)$  неявной функции  $y = f(x)$ , заданной уравнением

$$x^2 - xy + 2y^2 + x - y = 1 \quad (9)$$

и удовлетворяющей условию  $f(0) = 1$ .

△ Функция  $F(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1$  дифференцируема в любой окрестности точки  $(0, 1)$ . Производная  $F_y = -x + 4y - 1$  непрерывна в точке  $(0, 1)$ . Наконец,  $F(0, 1) = 0$ ,  $F_y(0, 1) = 3 \neq 0$ , т. е. выполнены все условия теоремы 2. Поэтому в некоторой окрестности точки  $(0, 1)$  уравнение (9) определяет единственную дифференцируемую неявную функцию вида  $y = f(x)$ , причем  $f(0) = 1$ . Более того, так как функция  $F(x, y)$  дважды дифференцируема в любой окрестности точки  $(0, 1)$ , то и функция  $y = f(x)$  дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки  $x = 0$ .

Производные  $f'(x)$  и  $f''(x)$  можно найти по формулам (3) и (4), а затем, полагая  $x = 0$ ,  $f(0) = 1$ , вычислить  $f'(0)$  и  $f''(0)$ . Однако удобнее поступить следующим образом. Предполагая, что функция  $y = f(x)$  подставлена в уравнение (9), продифференцируем полученное тождество по  $x$ :

$$2x - y - xy' + 4yy' + 1 - y' = 0. \quad (10)$$

Полагая в равенстве (10)  $x = 0$ ,  $y = 1$ , получаем  $-1 + 4y'(0) + 1 - y'(0) = 0$ , откуда  $y'(0) = 0$ . Чтобы найти вторую производную, продифференцируем тождество (10) по  $x$ :

$$2 - 2y' - xy'' + 4(y')^2 + 4yy'' - y'' = 0. \quad (11)$$

Полагая  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $y' = 0$ , получаем  $2 + 3y''(0) = 0$ , откуда  $y''(0) = -2/3$ . Итак,  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) = -2/3$ . ▲

**3.** Найти производные первого и второго порядков неявной функции  $y = f(x)$ , заданной уравнением

$$y - 2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0. \quad (12)$$

Δ Левая часть уравнения (12) не определена при  $x = 0$ . Будем считать, что  $x \neq 0$ . Предположим, что уравнение (12) определяет дважды дифференцируемую неявную функцию  $y = f(x)$ . Подставляя ее в уравнение (12) и дифференцируя полученное тождество по  $x$ , приходим к равенству

$$y' - 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{2x}{x^2 + y^2} (xy' - y) = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) можно упростить, если воспользоваться исходным уравнением (12). А именно, из уравнения (12) следует,  $2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{y}{x}$ . Поэтому уравнение (13) можно записать так:

$$y' - \frac{y}{x} - \frac{2x}{x^2 + y^2} (xy' - y) = 0. \quad (14)$$

Из уравнения (14) находим

$$y' = \frac{y}{x}, \quad (15)$$

где  $y = f(x)$ . Для вычисления второй производной можно, как и в примере 2, продифференцировать тождество (14) по  $x$  и, получив линейное относительно  $y''$  уравнение, найти вторую производную. Однако в данном случае удобнее воспользоваться равенством (15), из которого следует

$$y'' = \frac{xy' - y}{x^2}.$$

Подставляя в последнее равенство выражение (15) для  $y'$ , окончательно находим  $y'' = 0$ .

Задача решена в предположении, что уравнение (12) определяет дважды дифференцируемую функцию  $y = f(x)$ . Исследовать вопрос о существовании такой функции можно, как это было сделано в примере 2, с помощью теоремы 2. Однако здесь мы воспользуемся другим способом. Равенство нулю второй производной функции во всей области определения означает, что уравнение (12) может задавать только линейные функции. Если ввести переменную  $t = y/x$ , то уравнение (12) запишется в виде  $t = 2 \operatorname{arctg} t$ .

Это уравнение имеет три решения:  $t = -t_0$ ,  $t = 0$ ,  $t = t_0$  (рис. 28). Следовательно, уравнение (12) определяет линейные функции  $y = -t_0 x$ ,  $y = 0$  и  $y = t_0 x$  при  $x \neq 0$ . ▲

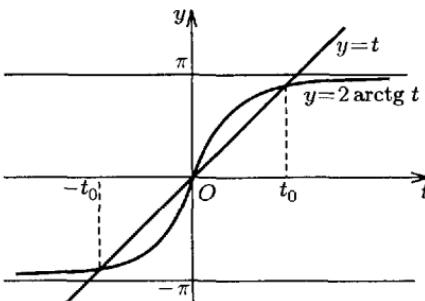


Рис. 28

**4.** Доказать, что уравнение

$$z^3 - xyz + y^2 = 16 \quad (16)$$

определяет в некоторой окрестности точки  $(1, 4, 2)$  единственную неявную функцию вида  $z = f(x, y)$ . Найти ее частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y)$ ,  $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 4)$  и  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, 4)$ .

Δ Функция  $F(x, y, z) = z^3 - xyz + y^2 - 16$  дифференцируема в любой окрестности точки  $M_0(1, 4, 2)$ . Производная  $F_z = 3z^2 - xy$  непрерывна в точке  $M_0$ . Наконец,  $F(1, 4, 2) = 0$ ,  $F_z(1, 4, 2) = 8 \neq 0$ , т. е. выполнены все условия теоремы 3. Поэтому в некоторой окрестности точки  $M_0$  уравнение (16) определяет единственную дифференцируемую неявную функцию вида  $z = f(x, y)$ , причем  $f(1, 4) = 2$ . Более того, так как функция  $F(x, y, z)$  дважды дифференцируема в любой окрестности точки  $M_0$ , то и функция  $z = f(x, y)$  дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки  $(1, 4)$ .

Для нахождения  $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$  воспользуемся формулой (5):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\left. \frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \right|_{z=f(x, y)} = \frac{yf(x, y)}{3f^2(x, y) - xy}. \quad (17)$$

Дифференцируя  $\frac{\partial z}{\partial x}$  по  $x$ , найдем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy^3f(x, y)}{[3f^2(x, y) - xy]^3}. \quad (18)$$

Теперь, подставляя в выражения (17) и (18) вместо  $x, y, f(x, y)$  соответственно значения 1, 4, 2, найдем значения  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$  в точке  $(1, 4)$ .

Рассмотрим другой (эквивалентный) способ решения задачи. Предполагая, что функция  $z = f(x, y)$  подставлена в уравнение (16), продифференцируем полученное тождество по  $x$ :

$$3z^2 z_x - yz - xyz_x = 0. \quad (19)$$

Решая уравнение (19) относительно  $z_x$ , приходим к соотношению (17). Если же в равенстве (19) положить  $x = 1, y = 4, z = 2$ , то получим  $z_x(1, 4) = 1$ .

Чтобы найти  $z_{xx}$ , продифференцируем тождество (19) по  $x$ :

$$6z(z_x)^2 + 3z^2 z_{xx} - 2yz_x - xyz_{xx} = 0. \quad (20)$$

Отсюда следует равенство (18). Если же в равенстве (20) положить  $x = 1, y = 4, z = 2, z_x = 1$ , то получим  $z_{xx}(1, 4) = -0,5$ . ▲

**5.** Доказать, что уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (21)$$

определяет единственную неявную функцию вида  $z = f(x, y)$  в некоторой окрестности точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , где

$$z_0 = \sqrt{a^2 - x_0^2 - y_0^2} \neq 0, \quad (22)$$

и найти: а) частные производные  $z_x$  и  $z_{xy}$ ; б) дифференциалы  $dz$  и  $d^2z$  этой функции.

Δ Функция  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$  дифференцируема в любой окрестности точки  $M_0$ . Производная  $F_z = 2z$  непрерывна в точке  $M_0$ , причем  $F_z(x_0, y_0, z_0) = 2z_0 \neq 0$  в силу соотношения (22). Из того же соотношения следует, что  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ .

Итак, выполнены все условия теоремы 3. Поэтому в некоторой окрестности точки  $M_0$  уравнение (21) определяет единственную дифференцируемую функцию вида  $z = f(x, y)$ . Более того, так как функция  $F(x, y, z)$  дважды дифференцируема в любой окрестности точки  $M_0$ , то и функция  $z = f(x, y)$  дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$ .

а) Предполагая, что функция  $z = f(x, y)$  подставлена в уравнение (21), продифференцируем полученное тождество по  $x$ :

$$2x + 2zz_x = 0. \quad (23)$$

Отсюда имеем  $z_x = -x/z$ , где  $z = f(x, y)$ . Дифференцируя (23) по  $y$ , получаем

$$2z_y z_x + 2zz_{xy} = 0. \quad (24)$$

Из равенства (24) можно найти смешанную производную, если известна производная  $z_y$ . Чтобы найти  $z_y$ , продифференцируем тождество (21) по  $y$ :  $2y + 2zz_y = 0$ . Отсюда  $z_y = -y/z$ , где  $z = f(x, y)$ . Теперь из (24) находим  $z_{xy} = -xy/z^3$ , где  $z = f(x, y)$ .

б) Предполагая, что функция  $z = f(x, y)$  подставлена в уравнение (21), вычислим дифференциалы от обеих частей полученного тождества:

$$2x dx + 2y dy + 2z dz = 0. \quad (25)$$

Отсюда имеем

$$dz = -\frac{x}{z} dx - \frac{y}{z} dy, \quad (26)$$

где  $z = f(x, y)$ . Чтобы найти второй дифференциал функции  $z = f(x, y)$ , вычислим дифференциалы от обеих частей тождества (25):

$$2(dx)^2 + 2(dy)^2 + 2(dz)^2 + 2z d^2z = 0. \quad (27)$$

Из равенства (27) получаем

$$d^2z = -\frac{x^2 + z^2}{z^3} (dx)^2 - \frac{2xy}{z^3} dx dy - \frac{y^2 + z^2}{z^3} (dy)^2, \quad (28)$$

где  $z = f(x, y)$ .

Заметим, что из равенств (26) и (28) находятся все частные производные первого и второго порядков функции  $z = f(x, y)$ :

$$z_x = -\frac{x}{z}, \quad z_y = -\frac{y}{z}, \quad z_{xx} = -\frac{x^2 + z^2}{z^3}, \quad z_{xy} = -\frac{xy}{z^3}, \quad z_{yy} = -\frac{y^2 + z^2}{z^3},$$

где  $z = f(x, y)$ . ▲

**6.** Найти производные первого и второго порядков неявных функций  $x(z), y(z)$  в точке  $z = 2$ , если эти функции заданы системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 0,5z^2, \\ x + y + z = 2 \end{cases} \quad (29)$$

и удовлетворяют условиям  $x(2) = 1, y(2) = -1$ .

Δ Функции  $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 0,5z^2$  и  $F_2(x, y, z) = x + y + z - 2$  дифференцируемы в любой окрестности точки  $M_0(1, -1, 2)$ . Частные производные  $\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x, \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y, \frac{\partial F_2}{\partial x} = 1, \frac{\partial F_2}{\partial y} = 1$  непрерывны в точке  $M_0$ . Далее, имеют место равенства  $F_1(1, -1, 2) = 0$  и  $F_2(1, -1, 2) = 0$ .

Наконец, якобиан  $\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, y)}$  равен  $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$  и, значит, отличен от нуля в точке  $M_0$ . Таким образом, выполнены все условия теоремы 4. Следовательно, в некоторой окрестности точки  $M_0$  система уравнений (21) определяет единственную пару дифференцируемых функций  $x(z)$  и  $y(z)$ . Более того, так как функции  $F_1(x, y, z)$  и  $F_2(x, y, z)$  дважды дифференцируемы в любой окрестности точки  $M_0$ , то и функции  $x(z), y(z)$  дважды дифференцируемы в некоторой окрестности точки  $z = 2$ .

Предполагая, что в систему уравнений (29) подставлены функции  $x(z)$  и  $y(z)$ , продифференцируем полученное тождество по  $z$ :

$$\begin{cases} 2xx' + 2yy' = z, \\ x' + y' + 1 = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Полагая в равенствах (30)  $x = 1, y = -1, z = 2$ , получим систему уравнений относительно  $x'(2), y'(2)$ :

$$\begin{cases} x'(2) - y'(2) = 1, \\ x'(2) + y'(2) = -1. \end{cases}$$

Отсюда находим  $x'(2) = 0, y'(2) = -1$ .

Теперь продифференцируем по  $z$  тождества (30):

$$\begin{cases} 2(x')^2 + 2xx'' + 2(y')^2 + 2yy'' = 1, \\ x'' + y'' = 0. \end{cases}$$

Полагая  $x = 1, y = -1, z = 2, x' = 0, y' = -1$ , получим систему уравнений относительно  $x''(2), y''(2)$ :

$$\begin{cases} x''(2) - y''(2) = -0,5, \\ x''(2) + y''(2) = 0. \end{cases}$$

Отсюда имеем  $x''(2) = -0,25$ ,  $y''(2) = 0,25$ . ▲

7. Доказать, что неявная функция  $z = f(x, y)$ , определяемая уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = yg\left(\frac{y}{z}\right), \quad (31)$$

где  $g(u)$  — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению

$$(x^2 - y^2 - z^2)z_x + 2xyz = 2xz. \quad (32)$$

△ Пусть  $x_0, y_0, z_0$  — решение уравнения (31). Рассмотрим функцию  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - yg\left(\frac{y}{z}\right)$  в некоторой окрестности точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . Пусть  $F_z(M_0) \neq 0$ . Тогда в некоторой окрестности точки  $M_0$  выполнены условия теоремы 3, и, следовательно, уравнение (31) определяет дифференцируемую неявную функцию  $z = f(x, y)$ . Подставляя эту функцию в уравнение (31), получим тождество

$$x^2 + y^2 + f^2(x, y) = yg\left(\frac{y}{f(x, y)}\right). \quad (33)$$

Вычислим дифференциалы от обеих частей тождества (33):

$$2x dx + 2y dy + 2z dz = g\left(\frac{y}{z}\right) dy + g'\left(\frac{y}{z}\right)\left(\frac{y}{z} dy - \frac{y^2}{z^2} dz\right), \quad (34)$$

где  $z = f(x, y)$ . Решая равенство (34) относительно  $dz$ , получим

$$dz = \frac{-2x dx + \left[g\left(\frac{y}{z}\right) + \frac{y}{z} g'\left(\frac{y}{z}\right) - 2y\right] dy}{2z + \frac{y^2}{z^2} g'\left(\frac{y}{z}\right)} \Bigg|_{z=f(x, y)}$$

Следовательно,

$$z_x = \frac{-2x}{2z + \frac{y^2}{z^2} g'\left(\frac{y}{z}\right)} \Bigg|_{z=f(x, y)}, \quad z_y = \frac{g\left(\frac{y}{z}\right) + \frac{y}{z} g'\left(\frac{y}{z}\right) - 2y}{2z + \frac{y^2}{z^2} g'\left(\frac{y}{z}\right)} \Bigg|_{z=f(x, y)}$$

Подставляя полученные выражения для частных производных в уравнение (32), приходим к тождеству (33). Таким образом, неявная функция  $z = f(x, y)$ , определяемая уравнением (31), удовлетворяет уравнению (32). ▲

8. Найти локальные экстремумы неявных функций вида  $z = f(x, y)$ , заданных уравнением

$$F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0. \quad (35)$$

△ Предполагая, что дифференцируемая неявная функция  $z = f(x, y)$  подставлена в уравнение (35), вычислим дифференциалы от обеих частей полученного тождества:

$$2x dx + 2y dy + 2z dz - 2dx + 2dy - 4dz = 0. \quad (36)$$

Отсюда (при  $z \neq 2$ ) находим

$$dz = \frac{x-1}{2-z} dx + \frac{y+1}{2-z} dy$$

Используя необходимое условие экстремума  $dz = 0$ , приходим к системе уравнений для координат точек возможного экстремума

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2-z} = 0, \\ \frac{y+1}{2-z} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-1 = 0, \\ y+1 = 0, \end{cases}$$

откуда  $x = 1$ ,  $y = -1$ . Подставив значения  $x = 1$ ,  $y = -1$  в уравнение (35), найдем соответствующие значения  $z$ , имеем  $z^2 - 4z - 12 = 0$ , откуда  $z_1 = -2$  и  $z_2 = 6$ . Таким образом, получили две точки  $M_1(1, -1, -2)$  и  $M_2(1, -1, 6)$ .

Заметим, что  $F_z(M_1) = -8 \neq 0$ ,  $F_z(M_2) = 8 \neq 0$ , и, следовательно, в окрестностях точек  $M_1$  и  $M_2$  выполнены все условия теоремы 3 для уравнения (35). Так как функция  $F(x, y, z)$  дважды дифференцируема, то в некоторой окрестности точки  $M_i$  ( $i = 1, 2$ ) существует единственная дважды дифференцируемая неявная функция  $z = f_i(x, y)$ . При этом  $f_1(1, -1) = -2$ ,  $f_2(1, -1) = 6$ . Точка  $(1, -1)$  является точкой возможного экстремума для каждой из функций  $f_1(x, y)$  и  $f_2(x, y)$ .

Чтобы применить достаточное условие экстремума, надо найти вторые дифференциалы этих функций. Для этого вычислим дифференциалы от обеих частей тождества (36)

$$(dx)^2 + (dy)^2 + z d^2 z + (dz)^2 - 2 d^2 z = 0$$

Отсюда имеем

$$d^2 z = \frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{2-z}$$

Учитывая, что  $dz|_{(1, -1)} = 0$ , получаем  $d^2 f_1|_{(1, -1)} = 0,25[(dx)^2 + (dy)^2]$ ,  $d^2 f_2|_{(1, -1)} = -0,5[(dx)^2 + (dy)^2]$ . Таким образом,  $d^2 f_1|_{(1, -1)}$  является положительно определенной квадратичной формой, а  $d^2 f_2|_{(1, -1)}$  — отрицательно определенной квадратичной формой. Следовательно, функция  $z = f_1(x, y)$  имеет в точке  $(1, -1)$  локальный минимум, равный  $-2$ , а функция  $z = f_2(x, y)$  имеет в точке  $(1, -1)$  локальный максимум, равный  $6$ . ▲

**Замечание** Уравнение (35) приводится к виду

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 16$$

Это — уравнение сферы радиуса 4 с центром в точке  $(1, -1, 2)$ . Точка  $M_1(1, -1, -2)$  — самая нижняя, а точка  $M_2(1, -1, 6)$  — самая верхняя точка этой сферы. Очевидно, неявная функция  $z = f_1(x, y)$  является уравнением нижней полусферы (в точке  $(1, -1)$  эта функция имеет минимум, равный  $-2$ ), а неявная функция  $z = f_2(x, y)$  — уравнением верхней полусферы (в точке  $(1, -1)$  эта функция имеет максимум, равный  $6$ ).

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

- Пользуясь теоремой 1 докажите, что уравнение  $x^3 + y^3 + x + y = 12$  определяет единственную неявную функцию вида  $y = f(x)$  в прямоугольнике  $\{(x, y) \mid -1 < x < 1,5, 1 \leq y \leq 3\}$ . Найдите  $f(1)$ .
- Пользуясь теоремой 2, докажите, что уравнение  $x^3 + y^3 - \frac{1}{5}x + 4y = -4,2$  определяет единственную дифференцируемую неявную функцию вида  $y = f(x)$  в некоторой окрестности точки  $(1, -1)$ . Вычислите  $f'(1)$  и  $f''(1)$ .
- Пусть функция  $F(x, y)$  дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки  $M_0(x_0, y_0)$  и пусть  $F(M_0) = 0$ ,  $F_y(M_0) \neq 0$ . Докажите, что в некоторой окрестности точки  $M_0$  уравнение  $F(x, y) = 0$  определяет единственную дважды дифференцируемую неявную функцию вида  $y = f(x)$ , причем справедлива формула

$$f''(x) = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

- Найдите первую и вторую производные неявной функции вида  $y = f(x)$ , заданной уравнением
  - $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ ,
  - $y - \varepsilon \cos y = x$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ),
  - $x^y = y^x$  ( $y \neq x$ ),
  - $\sin xy = 1 - 0,2xy$
- Найдите первую, вторую и третью производные неявной функции вида  $y = f(x)$ , заданной уравнением  $x^2 + xy + y^2 = 3$ .
- Найдите  $f'(0)$ ,  $f''(0)$ ,  $f'''(0)$  для неявной функции  $y = f(x)$ , удовлетворяющей условию  $f(0) = 1$  и заданной уравнением
  - $x^2 + xy + y^2 = 1$
  - $y \sin x + x^2 + y^3 = 1$
- Пользуясь теоремой 3, докажите, что уравнение  $z^3 - 3xyz = 8$  определяет единственную дифференцируемую неявную функцию вида  $z = f(x, y)$  в некоторой окрестности точки  $(0, -1, 2)$ . Вычислите  $z_x(0, -1)$  и  $z_y(0, -1)$ .
- Найдите частные производные первого и второго порядков неявной функции вида  $z = f(x, y)$ , заданной уравнением
  - $z = \sqrt{x^2 - y^2} \operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ ,
  - $z^3 - 3xyz = a^3$ ,
  - $x + y + z = e^z$
- Найдите дифференциалы первого и второго порядков неявной функции вида  $z = f(x, y)$ , заданной уравнением
  - $x + y + z = e^{-x-y-z}$ ,
  - $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$ ,
  - $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ ,
  - $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
- Найдите все частные производные второго порядка функции  $z = f(x, y)$  в точке  $(1, -2)$ , если эта функция удовлетворяет условию  $f(1, -2) = 1$  и задана уравнением
  - $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z = 9$ ,
  - $3xyz + x^2z^2 = 5(x + y)$
- Докажите, что неявная функция  $z = f(x, y)$ , определяемая уравнением  $F(x - az, y - bz) = 0$ , где  $F(u, v)$  — произвольная дифференцируемая функция ( $a, b$  — постоянные), является решением уравнения  $a z_x + b z_y = 1$ .

12. Докажите, что неявная функция  $z = f(x, y)$ , заданная уравнением  $F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ , где  $F(u, v)$  — произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяет уравнению  $xz_x + yz_y = z - xy$

13. Система уравнений

$$\begin{cases} x \cos u + y \sin u + \ln z = g(u), \\ -x \sin u + y \cos u = g'(u), \end{cases}$$

где  $g(u)$  — произвольная дифференцируемая функция, определяет неявные функции  $z = f_1(x, y)$ ,  $u = f_2(x, y)$ . Докажите, что функция  $z = f_1(x, y)$  удовлетворяет уравнению  $(z_x)^2 + (z_y)^2 = z^2$

14. Найдите производные первого и второго порядков неявных функций  $x(z)$  и  $y(z)$ , заданных системой уравнений

$$\text{а) } \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z = 1, \\ x + xy + y + z = 1. \end{cases}$$

15. Найдите производные  $y'(0)$ ,  $z'(0)$ ,  $y''(0)$ ,  $z''(0)$  неявных функций  $y(x)$  и  $z(x)$ , удовлетворяющих условиям  $y(0) = -1$ ,  $z(0) = 1$  и заданных системой уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2, \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 + 2 = 0, \\ x^2 + xy + y^2 + z = 2 \end{cases}$$

16. Найдите дифференциалы  $dz$  и  $d^2z$  в точке  $(3, -2)$  неявной функции  $z = f(x, y)$ , заданной уравнением  $z^3 - xz + y = 0$  и удовлетворяющей условию  $f(3, -2) = 2$

17. Найдите дифференциалы первого и второго порядков неявных функций  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , заданных системой уравнений

$$\begin{cases} u + v = x + y, \\ \frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y} \end{cases}$$

18. Найдите  $du$ ,  $dv$ ,  $d^2u$ ,  $d^2v$  в точке  $(1, 1)$ , если неявные функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  заданы системой уравнений

$$\begin{cases} e^{u/x} \cos \frac{v}{y} = \frac{x}{\sqrt{2}}, \\ e^{u/x} \sin \frac{v}{y} = \frac{y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

и удовлетворяют условиям  $u(1, 1) = 0$ ,  $v(1, 1) = \pi/4$

19. Исследуйте на экстремум неявную функцию  $y = f(x)$ , заданную уравнением  $y - \varepsilon \sin y = x^2$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ).

20. Исследуйте на экстремум неявные функции вида  $z = f(x, y)$ , заданные уравнением

$$\begin{aligned} \text{а) } & z^3 - xyz + y^2 = 16, \quad \text{б) } z^3 - xyz + y^2 + 4x^2 = 16, \\ \text{в) } & x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z = 2; \\ \text{г) } & (x^2 + y^2 - z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 + z^2) \quad (a > 0) \end{aligned}$$

## § 2. Зависимость функций

Основные понятия и теоремы

**1. Понятие зависимости и независимости функций.** Пусть  $n$  функций

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m), \\ \dots \\ y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{cases} \quad (1)$$

определенны и дифференцируемы в некоторой области  $D \subset E^m$ .

**Определение.** Функция  $y_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_m) = f_k(M)$  называется *зависимой* в области  $D$  от остальных функций из совокупности (1), если ее можно представить в виде

$$y_k = \Phi(y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n), \quad (2)$$

где  $\Phi$  — дифференцируемая функция своих аргументов.

Равенство (2) нужно понимать следующим образом: если в правую часть вместо  $y_i$  подставить  $f_i(M)$  ( $i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ ), то получится  $f_k(M)$ , т. е.  $\Phi(f_1(M), f_2(M), \dots, f_{k-1}(M), f_{k+1}(M), \dots, f_n(M)) = f_k(M)$  для всех точек  $M \in D$ .

**Определение.** Функции (1) называются *зависимыми* в области  $D$  если одна из них (безразлично, какая) зависит в области  $D$  от остальных функций. Если же ни одна из функций (1) не зависит от остальных, то функции (1) называются *независимыми* в области  $D$ .

Например, функции  $y_1 = x_1^2$ ,  $y_2 = x_2^2$ ,  $y_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$  зависимы в круге  $D = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ , так как для всех точек этого круга выполняется равенство  $y_3 = \sqrt{1 - y_1 - y_2}$ . Примеры независимых функций рассмотрены ниже (см. пример 1 на с. 258).

**2. Достаточные условия независимости и зависимости функций.**

**Теорема 5.** Пусть функции  $y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , ...,  $y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , где  $n \leq m$ , дифференцируемы в окрестности  $\omega$  точки  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  и пусть якобиан этих функций по каким-либо переменным не равен нулю в точке  $M_0$ . Тогда эти функции независимы в  $\omega$ .

**Следствие.** Если функции  $y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , ...,  $y_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$  зависимы в  $\omega$ , то все якобианы  $\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_m)}$  равны нулю в  $\omega$ .

Составим матрицу из частных производных функций (1):

$$A = \left( \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{array} \right).$$

Она называется *функциональной матрицей*.

Сформулируем общую теорему о зависимости и независимости функций.

**Теорема 6.** Пусть: 1°) функции (1) дифференцируемы в окрестности  $\omega$  точки  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ , а частные производные  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$ ) непрерывны в точке  $M_0$ ;

2°) функциональная матрица  $A$  имеет минор  $r$ -го порядка, не равный нулю в точке  $M_0$ ;

3°) все миноры  $(r+1)$ -го порядка матрицы  $A$  (если такие имеются) равны нулю в  $\omega$ .

Тогда  $r$  функций, представленных в указанном миноре  $r$ -го порядка, независимы в  $\omega$ , а каждая из остальных функций зависит в некоторой окрестности точки  $M_0$  от этих  $r$  функций.

### Контрольные вопросы и задания

- Дайте определение функции, зависимой от других функций в некоторой области. Зависит ли функция  $y_1 = x^2$  от функции  $y_2 = x$  на интервале  $-1 < x < 1$ ? Зависит ли функция  $y_2$  от  $y_1$  на том же интервале?
- Дайте определение зависимости и независимости функций. Приведите пример зависимых функций. Зависимы ли функции  $y_1 = x_1, y_2 = x_2$  в окрестности точки  $O(0, 0)$ ?
- Сформулируйте теорему о достаточном условии независимости функций (теорему 5). Является ли это условие (отличие от нуля какого-либо якобиана этих функций в точке  $M_0$ ) необходимым условием независимости функций в окрестности точки  $M_0$ ? (Рассмотрите функции  $y_1 = x_1^2$  и  $y_2 = x_2^2$  в окрестности точки  $M_0(0, 0)$ .)
- Сформулируйте необходимое условие зависимости функций.
- Сформулируйте общую теорему о зависимости и независимости функций (теорему 6).

### Примеры решения задач

1. Доказать, что функции  $y_1 = x_1 + x_2$  и  $y_2 = x_1 x_2$  независимы в любой окрестности точки  $O(0, 0)$ .

Δ Решим задачу двумя способами: 1) пользуясь определением зависимости и независимости функций; 2) используя теорему 5 о достаточном условии независимости функций.

I способ. Предположим, что  $y_1$  и  $y_2$  зависимы в некоторой окрестности точки  $O(0, 0)$ . Тогда в этой окрестности либо  $y_1$  зависит от  $y_2$ , либо  $y_2$  зависит от  $y_1$ . Допустим, что  $y_1$  зависит от  $y_2$ , т. е.  $y_1 = \Phi(y_2)$ , и, значит,  $x_1 + x_2 = \Phi(x_1 x_2)$  для всех точек  $(x_1, x_2)$  из указанной окрестности.

Отсюда для точек  $(x_1, 0)$  этой окрестности (т. е. точек, лежащих на оси  $Ox_1$ ) получаем  $x_1 = \Phi(0) = \text{const}$ , а это противоречит тому, что  $x_1$  изменяется вдоль оси  $Ox_1$ . Следовательно,  $y_1$  не зависит от  $y_2$ .

Допустим, что  $y_2$  зависит от  $y_1$ , т. е.  $y_2 = \Phi(y_1)$ , и, значит,  $x_1 x_2 = \Phi(x_1 + x_2)$  для всех точек  $(x_1, x_2)$  из указанной окрестности. Отсюда для точек  $(x_1, -x_1)$  (т. е. точек, лежащих на прямой  $x_2 = -x_1$ ) получаем  $-x_1^2 = \Phi(0) = \text{const}$ , а это противоречит тому, что  $x_1$  изменяется вдоль этой прямой. Таким образом,  $y_2$  также не зависит от  $y_1$ , т. е. функции  $y_1$  и  $y_2$  независимы в любой окрестности точки  $O(0, 0)$ .

II способ. Составим якобиан функций  $y_1, y_2$  по переменным  $x_1, x_2$ :

$$\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_2.$$

В точке  $O(0, 0)$  этот якобиан, очевидно, равен нулю. Однако в любой окрестности  $\omega$  точки  $O(0, 0)$  имеется точка  $M_0(x_1, x_2)$ , у которой  $x_1 \neq x_2$ , и, следовательно,  $\left. \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} \right|_{M_0} \neq 0$ . Окрестность  $\omega$  точки  $O(0, 0)$  является также окрестностью точки  $M_0$ . Таким образом, для окрестности  $\omega$  точки  $M_0$  выполнены условия теоремы 5, и, значит, функции  $y_1$  и  $y_2$  независимы в  $\omega$ . ▲

## 2. Даны функции

$$y_1 = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases} \quad y_2 = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & -1 < x < 0, \\ (x+1)^2, & x \leq -1. \end{cases}$$

Доказать, что  $y_1$  зависит от  $y_2$  в некоторой окрестности любой точки числовой прямой, но  $y_1$  не зависит от  $y_2$  на всей числовой прямой.

△ Для любой точки  $x$  можно указать такую окрестность, в которой зависимость  $y_1$  от  $y_2$  при  $x > -1$  выражается формулой  $y_1 = \Phi_1(y_2) \equiv \equiv y_2$ , а при  $x \leq -1$  — формулой  $y_1 = \Phi_2(y_2) = 0$ . Таким образом,  $y_1$  зависит от  $y_2$  в некоторой окрестности любой точки  $x$ .

Вместе с тем  $y_1$  не зависит от  $y_2$  на всей числовой прямой  $E^1$ . В самом деле, предположим, что это не так, т. е.  $y_1$  зависит от  $y_2$  на  $E^1$ . Тогда существует такая дифференцируемая функция  $\Phi(y_2)$ , что сразу для всех  $x$  выполняется равенство  $y_1 = \Phi(y_2)$ , т. е. это равенство обращается в тождество относительно  $x$  при подстановке  $y_1 = y_1(x)$ ,  $y_2 = y_2(x)$ :  $y_1(x) \equiv \Phi(y_2(x))$ . Положим в этом тождестве  $x = -2$ . Учитывая, что  $y_1(-2) = 0$ ,  $y_2(-2) = 1$ , получим  $\Phi(1) = 0$ . Положим теперь  $x = 1$ . Так как  $y_1(1) = 1$ ,  $y_2(1) = 1$ , то  $\Phi(1) = 1$ . Равенства  $\Phi(1) = 0$  и  $\Phi(1) = 1$  противоречат друг другу. Следовательно, функция  $y_1(x)$  не зависит от  $y_2(x)$  на всей числовой прямой. ▲

3. Исследовать вопрос о зависимости функций  $y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ ,  $y_2 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$ ,  $y_3 = (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2$ .

△ Составим функциональную матрицу из частных производных

функций  $y_1, y_2, y_3$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2(x_1 + x_3) & 2(x_2 + x_4) & 2(x_1 + x_3) & 2(x_2 + x_4) \end{pmatrix}.$$

Матрица  $A$  имеет минор второго порядка, отличный от нуля, например,  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ , а все миноры третьего порядка тождественно равны нулю, поскольку каждый такой минор содержит два одинаковых столбца. Отсюда по теореме 6 следует, что функции  $y_1$  и  $y_2$  независимы в любой окрестности каждой точки  $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$  и, значит, независимы во всем пространстве  $E^4$ , а функция  $y_3$  зависит от  $y_1$  и  $y_2$  в некоторой окрестности каждой точки  $M$ . Вместе с тем это не означает, что  $y_3$  зависит от  $y_1$  и  $y_2$  во всем пространстве  $E^4$  (см. пример 2). Однако в данном случае нетрудно проверить, что  $y_1, y_2$  и  $y_3$  связаны соотношением  $y_3 = 0,5(y_1^2 + y_2^2)$ , следовательно,  $y_3$  зависит от  $y_1$  и  $y_2$  во всем пространстве  $E^4$ . Поэтому  $y_1, y_2, y_3$  зависимы в  $E^4$ . ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

21. Докажите, что функции  $u_1 = xy$ ,  $u_2 = x$ ,  $u_3 = y$  зависимы на всей плоскости  $Oxy$
22. Зависимы ли функции  $y_1 = \frac{x_1 x_2}{x_3}$ ,  $y_2 = x_1 x_2 x_3$ ,  $y_3 = x_3$ :  
а) в окрестности точки  $(0, 0, 1)$ ; б) в полупространстве  $x_3 > 0$ ?
23. Пользуясь определением зависимости и независимости функции, докажите, что:  
а) функции  $u_1 = xy$  и  $u_2 = \frac{x}{y}$  независимы в окрестности точки  $(0, 1)$ ;  
б) функции  $u_1 = \frac{x_1 x_2}{x_3}$  и  $u_2 = \frac{x_3}{x_2}$  независимы в окрестности точки  $(1, 1, 1)$ .
24. Пользуясь теоремой 5, докажите, что функции  $y_1 = \sin(x_1 x_2 x_3)$ ,  $y_2 = x_1 \cos x_2$  независимы в окрестности точки  $(1, 0, 1)$ . Зависимы ли эти функции в какой-нибудь окрестности точки  $(0, 0, 0)$ ?
25. Пользуясь теоремой 6, докажите, что функции  $u_1 = \sin(xyz)$ ,  $u_2 = x \cos y$ ,  $u_3 = x^2 \sin(xyz) - x^2 \sin(xyz) \sin^2 y$  зависимы в некоторой окрестности точки  $(1, 0, 1)$ , а любые две из них независимы в любой окрестности этой точки. Зависимы ли функции  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  во всем пространстве  $E^3$ ?
26. Пользуясь теоремой 6, докажите, что функции  $u_1 = xy + yz + zx$ ,  $u_2 = x + y + z$ ,  $u_3 = x^2 + y^2 + z^2$  зависимы в некоторой окрестности точки  $(1, 2, 3)$ , а любые две из них независимы в любой окрестности этой точки. Зависимы ли функции  $u_1, u_2, u_3$  во всем пространстве  $E^3$ ?
27. Докажите, что  $n$  линейных функций  $m$  переменных  $y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{im}x_m$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $a_{ij}$  — числа):  
а) зависимы при  $n > m$  во всем пространстве  $E^m$ ;  
б) независимы, если  $n = m$  и  $\det \|a_{ij}\| \neq 0$ .

### § 3. Условный экстремум

Основные понятия и теоремы

**1. Понятие условного экстремума.** Рассмотрим функцию

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(M) \quad (1)$$

при условии, что ее аргументы являются не независимыми переменными, а связаны между собой  $k$  соотношениями ( $k < m$ ):

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (2)$$

Эти соотношения называются *условиями связи*. Пусть координаты точки  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  удовлетворяют уравнениям (2).

**Определение.** Говорят, что функция (1) имеет в точке  $M_0$  *условный минимум (максимум)* при условиях связи (2), если существует такая окрестность точки  $M_0$ , что для любой точки  $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$  ( $M \neq M_0$ ) этой окрестности, координаты которой удовлетворяют уравнениям (2), выполняется неравенство  $f(M) > f(M_0)$  ( $f(M) < f(M_0)$ ).

Иначе говоря, условный максимум (минимум) — это наибольшее (наименьшее) значение функции в точке  $M_0$  по отношению ко всем точкам из некоторой окрестности точки  $M_0$ , а только к тем из них, которые связаны между собой условиями связи.

Рассмотрим два метода решения задачи об условном экстремуме функции.

**2. Метод исключения части переменных.** Пусть в окрестности  $\omega$  точки  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  для уравнений связи (2) выполнены условия теоремы 4 о неявных функциях, так что в некотором параллелепипеде  $Q \subset \omega$  эти уравнения имеют единственное решение относительно каких-то  $k$  переменных, например, относительно  $x_1, x_2, \dots, x_k$ :

$$x_i = \varphi_i(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m) \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (3)$$

Тогда в параллелепипеде  $Q$  условия связи (2) эквивалентны соотношениям (3), в которых естественно рассматривать  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m$  как независимые переменные.

Если функции (3) удается найти в явном виде, то, подставляя их в (1), получим функцию  $m - k$  независимых переменных:

$$\begin{aligned} u = f(\varphi_1(x_{k+1}, \dots, x_m), \dots, \varphi_k(x_{k+1}, \dots, x_m), x_{k+1}, \dots, x_m) \equiv \\ \equiv F(x_{k+1}, \dots, x_m) = F(M'). \end{aligned}$$

В пределах  $Q$  значение функции  $F(M')$  в любой точке  $M'(x_{k+1}, \dots, x_m)$  совпадает со значением функции  $f(M)$  в соответствующей точке  $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , удовлетворяющей уравнениям (3), или, что то же самое, уравнениям связи (2). Поэтому вопрос об условном экстремуме функции (1) при условиях связи (2) в параллелепипеде  $Q$  сводится к вопросу о безусловном экстремуме функции  $F(M')$ .

Если нахождение функций (3) в явном виде затруднительно (или невозможно), то можно поступить следующим образом. Предположим, что функции (3) подставлены в (1), в результате чего получается функция  $F(M')$ , и в уравнения (2), которые после этой подстановки обращаются в тождества. Дифференциал функции  $F(M')$  в силу инвариантности формы первого дифференциала можно записать в виде

$$dF = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \quad (4)$$

где  $dx_{k+1}, dx_{k+2}, \dots, dx_m$  — дифференциалы независимых переменных, а  $dx_1, dx_2, \dots, dx_k$  — дифференциалы неявных функций (3). Дифференцируя указанные выше тождества, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_m} dx_m = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F_k}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial F_k}{\partial x_m} dx_m = 0. \end{array} \right. \quad (5)$$

Из этой линейной системы выразим дифференциалы  $dx_1, dx_2, \dots, dx_k$  неявных функций (3) через дифференциалы независимых переменных  $dx_{k+1}, dx_{k+2}, \dots, dx_m$ . Подставляя полученные выражения для  $dx_1, dx_2, \dots, dx_k$  в (4), приходим к равенству

$$dF = \sum_{i=k+1}^m A_i(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_i, \quad (4')$$

где  $x_j = \varphi_j(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m)$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ).

Если в точке  $M'_0(x_{k+1}^0, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0)$  функция  $F(M')$  имеет экстремум, то  $dF|_{M'_0} = 0$ , т. е.

$$\sum_{i=k+1}^m A_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0, x_{k+1}^0, \dots, x_m^0) dx_i = 0, \quad (6)$$

где  $x_j^0 = \varphi_j(x_{k+1}^0, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0) = \varphi_j(M'_0)$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ). Так как  $dx_i$  ( $i = k+1, k+2, \dots, m$ ) — дифференциалы независимых переменных, то из (6) получаем

$$A_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0, x_{k+1}^0, \dots, x_m^0) = 0 \quad (i = k+1, \dots, m). \quad (7)$$

Равенства (7) являются, таким образом, необходимыми условиями экстремума функции  $F(M')$  в точке  $M'_0$ , или, что то же самое, необходимыми условиями условного экстремума функции  $f(M)$  в точке  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  при условиях связи (2).

Отсюда следует, что для отыскания точки  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  возможного экстремума нужно решить систему  $m$  уравнений относительно  $m$  неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_m$ .

$$\begin{cases} F_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 & (i = 1, 2, \dots, k), \\ A_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 & (i = k+1, k+2, \dots, m). \end{cases} \quad (8)$$

Если точка  $M_0$  возможного экстремума найдена, то ее дальнейшее исследование связано с рассмотрением второго дифференциала  $d^2 f|_{M'_0}$ . Его можно вычислить (предполагаем, что функции (1) и (2) дважды дифференцируемы), дифференцируя равенство (4') для  $dF$  и используя выражения для дифференциалов  $dx_1, dx_2, \dots, dx_k$  неявных функций (3), найденные из системы (5). В итоге находим  $d^2 f|_{M'_0}$  — квадратичную форму от переменных  $dx_{k+1}, dx_{k+2}, \dots, dx_m$ . Если эта квадратичная форма положительно (отрицательно) определена, то функция (1) имеет в точке  $M_0$  условный минимум (максимум) при условиях связи (2). Применение описанного метода, использующего систему (8), к конкретной функции рассмотрено в примере 2 на с. 265.

**3. Метод Лагранжа.** Задача об условном экстремуме функции (1) при условиях связи (2) эквивалентна задаче об условном экстремуме функции Лагранжа

$$\Phi(M) = f(M) + \lambda_1 F_1(M) + \lambda_2 F_2(M) + \dots + \lambda_k F_k(M)$$

( $\lambda_i$  — произвольные числа) при тех же условиях связи (2), поскольку в точках  $M$ , удовлетворяющих уравнениям связи, справедливо равенство  $\Phi(M) = f(M)$ .

Теорема 7 (необходимое условие Лагранжа условного экстремума). Пусть:

1°) функция  $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  дифференцируема в точке  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  и имеет в этой точке условный экстремум при условиях связи (2);

2°) уравнения (2) удовлетворяют в некоторой окрестности точки  $M_0$  условиям теоремы 4 о неявных функциях вида (3).

Тогда существуют числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  такие, что все частные производные первого порядка функции Лагранжа равны нулю в точке  $M_0$ .

Из теоремы 7 следует, что для отыскания точек возможного условного экстремума функции (1) при условиях связи (2) нужно решить систему  $m+k$  уравнений

$$\begin{cases} F_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 & (i = 1, 2, \dots, k), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_m, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = 0 & (i = 1, 2, \dots, m) \end{cases} \quad (9)$$

относительно  $m+k$  неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_m, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ . Если  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_k^0$  — решение системы (9) (таких решений может быть несколько), то  $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  является точкой возможного условного экстремума функции (1) при условиях связи (2). Дальнейшее исследование этой точки связано, как и в методе исключения части переменных, с рассмотрением второго дифференциала  $d^2 F|_{M'_0}$  функции  $F(M') = F(x_{k+1}, \dots, x_m) = \Phi(\varphi_1(x_{k+1}, \dots, x_m), \dots, \varphi_k(x_{k+1}, \dots, x_m), x_{k+1}, \dots, x_m)$ , где  $\Phi = f + \lambda_1^0 F_1 + \lambda_2^0 F_2 + \dots + \lambda_k^0 F_k$ . Его можно

вычислить по формуле

$$d^2F|_{M'_0} = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(M_0) dx_i dx_j, \quad (10)$$

где  $dx_{k+1}, dx_{k+2}, \dots, dx_m$  — дифференциалы независимых переменных, а  $dx_1, dx_2, \dots, dx_k$  — дифференциалы неявных функций (3) в точке  $M'_0$ . Формула (10) показывает, что для нахождения  $d^2F|_{M'_0}$  сначала вычисляется второй дифференциал функции Лагранжа в точке  $M_0$ , причем так, как если бы все аргументы  $x_1, x_2, \dots, x_m$  были независимыми переменными, а затем  $dx_1, dx_2, \dots, dx_k$  заменяются дифференциалами неявных функций (3) в точке  $M'_0$ . В результате получается  $d^2F|_{M'_0}$  — квадратичная форма от  $dx_{k+1}, dx_{k+2}, \dots, dx_m$ . Если эта квадратичная форма положительно (отрицательно) определена, то в точке  $M_0$  функция (1) имеет условный минимум (максимум) при условиях связи (2), а если  $d^2F|_{M'_0}$  — знакопеременная квадратичная форма, то в точке  $M_0$  функция (1) не имеет условного экстремума.

### Контрольные вопросы и задания

- Сформулируйте определение условного экстремума функции.
- Объясните, в чем состоит метод исключения части переменных. Сведите задачу об условном экстремуме функции  $u = x^2 + y^2$  при условии связи  $x + y = 2$  к задаче о безусловном экстремуме.
- Изложите схему метода исключения части переменных, не связанную с нахождением в явном виде каких-то переменных через остальные.
- Что такое функция Лагранжа? Напишите выражение для функции Лагранжа в задаче об условном экстремуме из задания 2.
- Сформулируйте теорему о необходимых условиях Лагранжа условного экстремума. Составьте систему уравнений (9) для задачи об условном экстремуме из задания 2 и решите ее.
- Объясните, как исследовать далее точку возможного условного экстремума, найденную методом Лагранжа. Проведите такое исследование для точки, найденной в задании 5.

### Примеры решения задач

- Методом исключения части переменных найти экстремум функции

$$u = x + y + z^2 \quad (11)$$

при условиях связи

$$\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1. \end{cases} \quad (12)$$

Δ Решая систему уравнений (12) относительно  $y$  и  $z$ , находим

$$y = x^2 + x + 1, \quad z = x + 1. \quad (13)$$

Подставляя выражения (13) в равенство (11), приходим к функции одной переменной  $x$ :  $u(x) = 2x^2 + 4x + 2$ , для которой рассмотрим задачу о безусловном экстремуме. Так как  $u' = 4(x+1) = 0$  при  $x = -1$ , то функция  $u(x)$  имеет единственную точку возможного экстремума. Но  $u''(-1) = 4 > 0$ , поэтому при  $x = -1$  функция  $u(x)$  имеет минимум. Из системы (13) находим соответствующие  $x = -1$  значения  $y$  и  $z$ :  $y = 1, z = 0$ . Итак, функция (11) при условиях связи (12) имеет в точке  $(-1, 1, 0)$  минимум, причем  $u(-1, 1, 0) = 0$ . ▲

2. Методом исключения части переменных найти экстремум функции

$$u = x + y - z \quad (14)$$

при условиях связи

$$\begin{cases} 4x^3 + 4y^3 + 4z^3 + 12x + 12y + 12z = 13, \\ x + y = 1. \end{cases} \quad (15)$$

Δ Воспользуемся схемой метода исключения части переменных, не связанной с нахождением в явном виде каких-либо двух переменных через третью из уравнений связи (15). Предполагая, что система (15) определяет дважды дифференцируемые неявные функции  $y(x)$  и  $z(x)$ , и считая, что они подставлены в уравнения связи, будем рассматривать равенства (15) как систему тождеств. Вычисляя дифференциалы от обеих частей тождеств (15), получим

$$\begin{cases} (x^2 + 1) dx + (y^2 + 1) dy + (z^2 + 1) dz = 0, \\ dx + dy = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} dy = -dx, \\ dz = \frac{-2x + 1}{z^2 + 1} dx. \end{cases} \quad (16)$$

Подставляя эти выражения для  $dy$  и  $dz$  в выражение для дифференциала функции (14), которое имеет вид  $du = dx + dy - dz$ , получим

$$du = \frac{2x - 1}{z^2 + 1} dx \equiv A dx. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь систему уравнений, состоящую из уравнений (15) и уравнения  $A = 0$  (это и есть система (8) в данном случае). Она имеет единственное решение  $x = 1/2, y = 1/2, z = 0$ , т. е.  $M_0(1/2, 1/2, 0)$  — единственная точка возможного экстремума функции (14) при условиях связи (15). Дифференцируя выражение (17) для  $du$ , получаем

$$d^2 u = \frac{2(z^2 + 1) dx - (2x - 1)2z dz}{(z^2 + 1)^2} dx,$$

откуда, используя уравнения (16), находим  $d^2 u|_{M_0} = 2(dx)^2$ . Так как  $2(dx)^2$  — положительно определенная квадратичная форма (одной переменной  $dx$ ), то функция (14) имеет в точке  $M_0$  минимум при условиях связи (15). ▲

**Замечание.** Задача решена в предположении, что система (15) определяет дважды дифференцируемые функции  $y(x)$  и  $z(x)$ . Теперь можно уточнить, что это условие должно выполняться в некоторой окрестности точки  $M_0(1/2, 1/2, 0)$ . Покажем, что данное требование выполнено. Воспользуемся теоремой 4. Функции  $F_1(x, y, z) = 4x^3 + 4y^3 + 4z^3 + 12x + 12y + 12z - 13$  и  $F_2(x, y, z) = x + y - 1$  дифференцируемы в любой окрестности точки  $M_0$ . Частные производные  $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 12(y^2 + 1)$ ,  $\frac{\partial F_1}{\partial z} = 12(z^2 + 1)$ ,  $\frac{\partial F_2}{\partial y} = 1$ ,  $\frac{\partial F_2}{\partial z} = 0$  непрерывны в точке  $M_0$ . Функции  $F_1(x, y, z)$  и  $F_2(x, y, z)$  равны нулю в точке  $M_0$ . Наконец,  $\left. \frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)} \right|_{M_0} = -12 \neq 0$ . Поэтому в силу теоремы 4 система (15) в некоторой окрестности точки  $M_0$  определяет единственную пару дифференцируемых функций  $y(x), z(x)$ . Более того, так как функции  $F_1(x, y, z)$  и  $F_2(x, y, z)$  дважды дифференцируемы в любой окрестности точки  $M_0$ , то и функции  $y(x), z(x)$  дважды дифференцируемы.

**3.** Методом Лагранжа найти экстремум функции (11) при условиях связи (12).

△ Составим функцию Лагранжа

$$\Phi = x + y + z^2 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - xz - 1)$$

и рассмотрим систему уравнений (9):

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 z = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1 + \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 x = 0, \\ F_1 = z - x - 1 = 0, \\ F_2 = y - xz - 1 = 0. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение:  $x = -1$ ,  $y = 1$ ,  $z = 0$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$ , т. е.  $M_0(-1, 1, 0)$  — единственная точка возможного экстремума функции (11) при условиях связи (12). Отметим, что в окрестности точки  $M_0$  система (12) определяет единственную пару неявных функций  $y(x), z(x)$ . Хотя в данном случае их легко найти в явном виде, нам эти явные выражения не понадобятся. Предполагая, что в систему (12) подставлено ее решение  $y(x), z(x)$ , и дифференцируя полученные тождества, приходим к равенствам

$$\begin{cases} dz - dx = 0, \\ dy - x dz - z dx = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} dz = dx, \\ dy = (x + z) dx. \end{cases} \quad (18)$$

Теперь вычисляем второй дифференциал функции Лагранжа:

$$d^2\Phi = 2(dx)^2 - 2\lambda_2 dx dz,$$

и, подставляя  $\lambda_2 = -1$  и выражение (18) для  $dz$ , получаем положительно определенную квадратичную форму от одной переменной  $dx$ :  $4(dx)^2$ . Отсюда следует, что функция (11) при условиях связи (12) имеет в точке  $M_0$  условный минимум. ▲

4. На эллипсоиде  $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$  найти точку, наиболее удаленную от точки  $(0, 0, 3)$ .

Δ Расстояние  $\rho$  между точками  $(x, y, z)$  и  $(0, 0, 3)$  определяется формулой  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 3)^2}$ . Поэтому исходная задача равносильна задаче об условном максимуме функции

$$u = \rho^2 = x^2 + y^2 + (z - 3)^2 \quad (19)$$

при условии связи

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8. \quad (20)$$

Составим функцию Лагранжа

$$\Phi = x^2 + y^2 + (z - 3)^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 8)$$

и рассмотрим систему уравнений (9):

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2y + 4\lambda y = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 2z - 6 + 8\lambda z = 0, \\ x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8. \end{cases} \quad (21)$$

Так как эллипсоид (20) более всего вытянут вдоль оси  $Ox$ , то абсцисса искомой точки не может быть равна нулю, т. е.  $x \neq 0$ . Поэтому из первого уравнения системы (21) следует, что  $\lambda = -1$ . Тогда из второго и третьего уравнений системы (21) имеем  $y = 0, z = -1$ . Наконец, из последнего уравнения системы (21) находим  $x = \pm 2$ . Итак, функция (19) имеет две точки возможного условного максимума,  $M_1(2, 0, -1)$  и  $M_2(-2, 0, -1)$ . Предполагая, что в уравнение (20) подставлено его решение  $z = z(x, y)$ , и дифференцируя полученное тождество, находим

$$x dx + 2y dy + 4z dz = 0,$$

откуда

$$dz = -\frac{x}{4z} dx - \frac{y}{2z} dy. \quad (22)$$

Теперь вычисляем второй дифференциал функции Лагранжа

$$d^2\Phi = 2(1 + \lambda)(dx)^2 + 2(1 + 2\lambda)(dy)^2 + 2(1 + 8\lambda)(dz)^2,$$

и, подставляя  $\lambda = -1$ , координаты точки  $M_1$  или  $M_2$  и выражение (22) для  $dz$ , получаем в каждом случае отрицательно определенную квадратичную форму от двух переменных  $dx, dy$   $-2(dy)^2 - 3,5(dx)^2$ . Отсюда следует, что функция (19) имеет в точках  $M_1$  и  $M_2$  условный максимум при условиях связи (20), т.е. на эллипсоиде (20) имеются две точки,  $M_1(2, 0, -1)$  и  $M_2(-2, 0, -1)$ , наиболее удаленные от точки  $(0, 0, 3)$ .  $\blacktriangle$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

28. Исследуйте на условный экстремум методом исключения части переменных функцию
- $u = x^2 + y^2$  при условии связи  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ,
  - $u = x + y$  при условии связи  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$  ( $a > 0$ ),
  - $u = xy$  при условии связи  $x^2 + y^2 = 1$ ,
  - $u = x^2 + y^2 + 2z^2$  при условии связи  $x - y + z = 1$ ,
  - $u = x^3 + y^2 - z^3 + 5$  при условии связи  $x + y - z = 0$ ,
  - $u = x - 2y + z$  при условии связи  $x + y^2 - z^2 = 1$ ,
  - $u = xy^2z^3$  при условии связи  $x + 2y + 3z = 6$  ( $x > 0, y > 0, z > 0$ ),
  - $u = x - 2y + 2z$  при условии связи  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,
  - $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$  при условии связи  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  ( $a > b > c > 0$ ),
  - $u = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  при условии связи  $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \dots + \frac{x_n}{a_n} = 1$  ( $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ )
29. Исследуйте на условный экстремум методом Лагранжа
- функцию  $u = xyz$  при условии связи  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$
  - функцию  $u = xyz$  при условиях связи  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$
30. При каких значениях диаметра основания  $d$  и высоты  $h$  цилиндрическая банка, объем которой равен  $54\pi$ , имеет наименьшую поверхность?
31. При каких размерах прямоугольная банка объемом  $32 \text{ см}^3$ , открытая сверху (т.е. без верхней грани), имеет наименьшую поверхность?
32. При каких размерах открытая цилиндрическая ванна с полукруглым поперечным сечением, поверхность которой равна  $3\pi \text{ м}^2$ , имеет наибольшую вместимость?
33. Найдите измерения прямоугольного параллелепипеда наибольшего объема, вписанного в эллипсоид  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
34. Найдите наименьшее из расстояний между точкой  $(x_0, y_0, z_0)$  и точками плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$
35. Найдите наименьшее из расстояний между точками параболы  $y = x^2$  и прямой  $x - y - 2 = 0$
36. Найдите наибольшую площадь треугольника, у которого заданы стороны  $a$  и противолежащий угол  $A$
37. Известны стороны  $a, b$  треугольника и величина угла  $C$  между ними. Разделите этот треугольник на две равновеликие части отрезком прямой, пересекающим заданные стороны и имеющим наименьшую длину

## § 4. Замена переменных

Основные понятия

**1. Замена переменных в выражении, содержащем обыкновенные производные.** Пусть в выражении

$$A = \Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}), \quad (1)$$

где  $y$  является функцией аргумента  $x$ , требуется перейти к новым переменным  $t$ ,  $u$ , где  $t$  — независимая переменная а  $u$  — функция аргумента  $t$ , причем переменные  $x$ ,  $y$  связаны с переменными  $t$ ,  $u$  уравнениями

$$\begin{cases} g_1(x, y, t, u) = 0, \\ g_2(x, y, t, u) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

которые будем называть *формулами замены переменных*. Будем считать, что система (2) определяет (в некоторой области) дифференцируемые достаточное число раз неявные функции  $x = f_1(t, u)$ ,  $y = f_2(t, u)$ . Так как  $u$  есть функция аргумента  $t$ , то  $x = f_1(t, u(t)) = x(t)$  и  $y = f_2(t, u(t)) = y(t)$  — сложные функции аргумента  $t$ .

**Схема решения**

1 Предполагая, что в систему (2) подставлено ее решение  $x(t), y(t)$ , получим тождества

$$\begin{cases} g_1(x(t), y(t), t, u(t)) \equiv 0, \\ g_2(x(t), y(t), t, u(t)) \equiv 0 \end{cases}$$

Дифференцируя по  $t$  обе части этих тождеств, приходим к системе уравнений, линейных относительно производных

$$x = \frac{dx}{dt}, \quad y = \frac{dy}{dt}, \quad u = \frac{du}{dt}$$

2 Решаем полученную систему относительно  $x$ ,  $y$

3 Выражение  $y'$  в новых переменных  $t$ ,  $u$  находим по формуле

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (3)$$

4 Чтобы найти выражения старших производных, пользуемся операторной формулой

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{x} \frac{d}{dt} \quad (4)$$

Например, чтобы найти выражение второй производной  $y''$ , в левую часть формулы (4) подставляем  $y'$ , а в правую — представление для  $y'$  по формуле (3). Получим

$$y'' = \frac{1}{x} \frac{d}{dt} \left( \frac{y}{x} \right) = \frac{yx - yx}{x^3}$$

5 В исходном выражении (1) переходим к переменным  $t$ ,  $u$

**Замечание.** Если формулы замены переменных (2) даны в форме, разрешенной относительно  $x, y$  ( $t, u$ ), то изложенная схема упрощается (см. пример 2 на с. 273).

**2. Замена переменных в выражении, содержащем частные производные.** Ради простоты изложения ограничимся случаем функций двух переменных. Пусть в выражении

$$B = \Phi(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots), \quad (5)$$

где  $z$  является функцией аргументов  $x$  и  $y$ , надо перейти к новым переменным  $u, v, w$ , где  $u, v$  — независимые переменные, а  $w$  — функция аргументов  $u, v$ , причем переменные  $x, y, z$  связаны с переменными  $u, v, w$  уравнениями

$$g_i(x, y, z, u, v, w) = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6)$$

которые будем называть *формулами замены переменных*.

Обычно формулы замены переменных (6) даются в форме, разрешенной относительно либо старых переменных  $x, y, z$ , либо новых переменных  $u, v, w$ .

Рассмотрим в отдельности оба эти случая.

1°. Пусть формулы замены переменных имеют вид

$$\begin{cases} x = f_1(u, v, w), \\ y = f_2(u, v, w), \\ z = f_3(u, v, w), \end{cases} \quad (7)$$

где  $f_i(u, v, w)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — функции, дифференцируемые достаточное число раз.

**Схема решения.**

1. Из равенств (7) получаем

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial f_1}{\partial u} du + \frac{\partial f_1}{\partial v} dv + \frac{\partial f_1}{\partial w} dw, \\ dy = \frac{\partial f_2}{\partial u} du + \frac{\partial f_2}{\partial v} dv + \frac{\partial f_2}{\partial w} dw, \\ dz = \frac{\partial f_3}{\partial u} du + \frac{\partial f_3}{\partial v} dv + \frac{\partial f_3}{\partial w} dw. \end{cases} \quad (8)$$

Так как  $w$  — функция аргументов  $u, v$ , то  $dw = w_u du + w_v dv$ . Подставляя это выражение для  $dw$  в равенства (8), приходим к равенствам

$$\begin{cases} dx = \frac{Df_1}{Du} du + \frac{Df_1}{Dv} dv, \\ dy = \frac{Df_2}{Du} du + \frac{Df_2}{Dv} dv, \\ dz = \frac{Df_3}{Du} du + \frac{Df_3}{Dv} dv, \end{cases} \quad (9)$$

где  $\frac{Df_i}{Du} = \frac{\partial f_i}{\partial u} + \frac{\partial f_i}{\partial w} w_u$  и  $\frac{Df_i}{Dv} = \frac{\partial f_i}{\partial v} + \frac{\partial f_i}{\partial w} w_v$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

2. Если  $\Delta = \begin{vmatrix} Df_1 & Df_1 \\ Du & Dv \\ Df_2 & Df_2 \\ Dw & Dv \end{vmatrix} \neq 0$ , то первые два уравнения системы (9) однозначно разрешимы относительно  $du$  и  $dv$ :

$$\begin{cases} du = \frac{1}{\Delta} \left( \frac{Df_2}{Dv} dx - \frac{Df_1}{Dv} dy \right), \\ dv = \frac{1}{\Delta} \left( -\frac{Df_2}{Du} dx + \frac{Df_1}{Du} dy \right). \end{cases} \quad (10)$$

3. Подставляя выражения (10) в последнее уравнение системы (9), получаем

$$dz = \frac{1}{\Delta} \left( \frac{Df_3}{Du} \frac{Df_2}{Dv} - \frac{Df_3}{Dv} \frac{Df_2}{Du} \right) dx + \frac{1}{\Delta} \left( -\frac{Df_3}{Du} \frac{Df_1}{Dv} + \frac{Df_3}{Dv} \frac{Df_1}{Du} \right) dy.$$

Сопоставляя полученное представление для  $dz$  с равенством  $dz = z_x dx + z_y dy$ , находим выражения частных производных  $z_x$  и  $z_y$  в новых переменных  $u, v, w$ :

$$z_x = \frac{1}{\Delta} \left( \frac{Df_3}{Du} \frac{Df_2}{Dv} - \frac{Df_3}{Dv} \frac{Df_2}{Du} \right), \quad z_y = \frac{1}{\Delta} \left( -\frac{Df_3}{Du} \frac{Df_1}{Dv} + \frac{Df_3}{Dv} \frac{Df_1}{Du} \right). \quad (11)$$

4. Чтобы получить выражения вторых производных функции  $z(x, y)$  в новых переменных, вычислим дифференциалы от первых производных  $z_x$  и  $z_y$ , представленных в виде (11). Запишем первую из формул (11) в кратком виде:

$$z_x = F(u, v, w, w_u, w_v).$$

Отсюда  $d(z_x) = dF$  или  $z_{xx} dx + z_{xy} dy = F_u du + F_v dv + F_w dw + F_{w_u} dw_u + F_{w_v} dw_v$ . Подставив сюда выражения  $dw = w_u du + w_v dv$ ,  $dw_u = w_{uu} du + w_{uv} dv$ ,  $dw_v = w_{vu} du + w_{vv} dv$ , а затем выражения (10) для  $du$ ,  $dv$ , и приравняв коэффициенты соответственно при  $dx$  и  $dy$  в обеих частях полученного равенства, найдем выражения  $z_{xx}$  и  $z_{xy}$  в новых переменных.

Выражение  $z_{yy}$  получим аналогично, вычислив дифференциал производной  $z_y$ , представленной второй формулой (11).

Таким же образом можно найти далее выражения для производных более высокого порядка.

5. В исходном выражении (5) переходим к новым переменным  $u, v, w$ .

2°. Пусть теперь формулы замены переменных имеют вид

$$\begin{cases} u = f_1(x, y, z), \\ v = f_2(x, y, z), \\ w = f_3(x, y, z), \end{cases} \quad (12)$$

где  $f_i(x, y, z)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — функции, дифференцируемые достаточное число раз.

**Схема решения.**

1. Из равенств (12) получаем

$$\begin{cases} du = \frac{\partial f_1}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial y} dy + \frac{\partial f_1}{\partial z} dz, \\ dv = \frac{\partial f_2}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial y} dy + \frac{\partial f_2}{\partial z} dz, \\ dw = \frac{\partial f_3}{\partial x} dx + \frac{\partial f_3}{\partial y} dy + \frac{\partial f_3}{\partial z} dz. \end{cases}$$

Подставляя сюда выражение  $dz = z_x dx + z_y dy$ , приходим к равенствам

$$\begin{cases} du = \frac{Df_1}{Dx} dx + \frac{Df_1}{Dy} dy, \\ dv = \frac{Df_2}{Dx} dx + \frac{Df_2}{Dy} dy, \\ dw = \frac{Df_3}{Dx} dx + \frac{Df_3}{Dy} dy, \end{cases} \quad (13)$$

где  $\frac{Df_i}{Dx} = \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial z} z_x$  и  $\frac{Df_i}{Dy} = \frac{\partial f_i}{\partial y} + \frac{\partial f_i}{\partial z} z_y$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

2. Так как  $w$  — функция аргументов  $u, v$ , то  $dw = w_u du + w_v dv$ . Подставляя в это равенство выражения (13) для  $du, dv$  и  $dw$ , приходим к равенству

$$\frac{Df_3}{Dx} dx + \frac{Df_3}{Dy} dy = w_u \left( \frac{Df_1}{Dx} dx + \frac{Df_1}{Dy} dy \right) + w_v \left( \frac{Df_2}{Dx} dx + \frac{Df_2}{Dy} dy \right).$$

Приравнивая в обеих частях равенства коэффициенты соответственно при  $dx$  и  $dy$ , получаем систему двух линейных уравнений относительно  $z_x$  и  $z_y$ .

3. Коэффициенты этой системы зависят от  $w_u, w_v$  и старых переменных  $x, y, z$ . Поэтому для  $z_x$  и  $z_y$  получаются выражения

$$z_x = F(x, y, z, w_u, w_v), \quad z_y = G(x, y, z, w_u, w_v). \quad (14)$$

4. Чтобы получить выражения вторых производных функции  $z(x, y)$ , вычислим дифференциалы от первых производных  $z_x$  и  $z_y$ , представленных в виде (14). Из первого равенства (14) имеем  $dz_x = dF$  или  $z_{xx} dx + z_{xy} dy = F_x dx + F_y dy + F_z dz + F_{w_u} dw_u + F_{w_v} dw_v$ . Подставив сюда выражения  $dz = z_x dx + z_y dy$ ,  $dw_u = w_{uu} du + w_{uv} dv$ ,  $dw_v = w_{vu} du + w_{vv} dv$ , а затем выражения (13) для  $du, dv$  и выражения (14) для  $z_x, z_y$ , и приравняв коэффициенты соответственно при  $dx$  и  $dy$  в обеих частях полученного равенства, найдем выражения  $z_{xx}$  и  $z_{xy}$  в новых переменных.

Выражение  $z_{yy}$  получим аналогично, вычислив дифференциал производной  $z_y$ , представленной второй формулой (14).

Таким же образом можно найти далее выражения для производных более высокого порядка.

5. В исходном выражении (5) переходим к новым переменным  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

### Примеры решения задач

1. В уравнении  $yy' + xy^2 + x^3 = 0$  перейти к новым переменным  $t, u$ , где  $u = u(t)$ , если формулы замены переменных имеют вид

$$\begin{cases} u^2 - y^2 - x^2 = 0, \\ x^2 - t^2 + u^2 = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Δ В соответствии со схемой, описанной в п. 1°, сначала нужно установить, что система (15) разрешима относительно  $x, y$ . Это можно сделать, используя результаты § 1, но здесь мы не будем этим заниматься. Учитывая, что  $u = u(t)$ , и предполагая, что в систему (15) подставлено ее решение  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , продифференцируем полученные тождества по переменной  $t$ :

$$\begin{cases} u\ddot{u} - y\dot{y} - x\dot{x} = 0, \\ x\dot{x} - t + u\dot{u} = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\dot{x} = \frac{t - u\dot{u}}{x}, \quad \dot{y} = \frac{2u\dot{u} - t}{y}.$$

По формуле (3) получаем  $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{x(2u\dot{u} - t)}{y(t - u\dot{u})}$ . Подставляя это выражение для  $y'$  в исходное уравнение и используя формулы замены переменных (15), приходим к уравнению в переменных  $t, u$

$$u\ddot{u} = \frac{t(1 - u^2)}{2 - u^2}. \blacksquare$$

2. Решить уравнение  $(1 + x^2)^2 y'' = y$ , переходя к новым переменным  $t, u$ , где  $u = u(t)$ , если  $x = \operatorname{tg} t$ ,  $y = \frac{u}{\cos t}$ .

Δ Продифференцируем по  $t$  выражения для  $x, y$ , заданные формулами замены переменных; тогда получим

$$\dot{x} = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad \dot{y} = \frac{\dot{u} \cos t + u \sin t}{\cos^2 t}.$$

Производную  $y'$  находим по формуле (3):  $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dot{u} \cos t + u \sin t$ . Используя операторную формулу (4), находим выражение второй производной

$$y'' = \frac{1}{\dot{x}} \frac{d}{dt} (\dot{u} \cos t + u \sin t) = \cos^3 t \cdot (\ddot{u} + u).$$

Переходя к новым переменным в исходном уравнении, получим  $\ddot{u} = 0$ . Очевидно, решением этого уравнения является линейная функция  $u = At + B$ , где  $A, B$  — произвольные постоянные. Возвращаясь

в равенстве  $u = At + B$  к старым переменным, получаем решение исходного уравнения  $y = (A \operatorname{arctg} x + B) \sqrt{1+x^2}$ . ▲

**3.** Решить уравнение  $y''(y')^{-3} - x = 0$ , приняв  $y$  за новую независимую переменную, а  $x$  — за новую функцию.

△ Чтобы воспользоваться стандартной схемой решения задачи, введем новые переменные  $t$  и  $u$  ( $u = u(t)$ ) по формулам  $t = y$ ,  $u = x$ . Продифференцируем эти равенства по  $t$ :  $1 = \dot{y}$ ,  $\dot{u} = \dot{x}$ . Используя полученные соотношения, по формулам (3) и (4) находим

$$y' = \frac{1}{\dot{u}}, \quad y'' = \frac{1}{\dot{x}} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\dot{u}} \right) = -\frac{\ddot{u}}{\dot{u}^3}.$$

В результате исходное уравнение примет вид  $\ddot{u} + u = 0$ . Возвращаясь к прежним обозначениям, т. е. заменяя  $u$  на  $x$ , а  $t$  на  $y$ , получаем уравнение  $\frac{d^2x}{dy^2} + x = 0$ , решением которого является функция  $x = A \sin(y + \varphi)$ , где  $A$ ,  $\varphi$  — произвольные постоянные. Выражая из последнего равенства  $y$ , находим решение исходного уравнения:  $y = \arcsin(x/A) - \varphi$  или  $y = \arcsin(Bx) + C$ , где  $B$  и  $C$  — произвольные постоянные,  $B \neq 0$ . ▲

**4.** В выражении  $B = xz_x + yz_y - 2z$  перейти к новым переменным  $u, v, w$ , где  $w = w(u, v)$ , если формулы замены переменных имеют вид

$$u = \frac{x}{y}, \quad v = \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad w = \frac{xy}{z}. \quad (16)$$

△ Так как формулы замены переменных (16) заданы в форме, разрешенной относительно новых переменных  $u, v, w$ , т. е. имеют вид (12), то воспользуемся схемой решения, изложенной в п. 2°. Из равенств (16), учитывая, что  $dz = z_x dx + z_y dy$ , получаем

$$\begin{cases} du = \frac{dx}{y} - \frac{x}{y^2} dy, \\ dv = x dx + y dy, \\ dw = \frac{y}{z} dx + \frac{x}{z} dy - \frac{xy}{z^2} (z_x dx + z_y dy). \end{cases} \quad (17)$$

Так как  $w$  — функция аргументов  $u, v$ , то  $dw = w_u du + w_v dv$ . Подставляя в это равенство выражения (17) для  $du$ ,  $dv$  и  $dw$ , приходим к равенству

$$w_u \left( \frac{dx}{y} - \frac{x}{y^2} dy \right) + w_v (x dx + y dy) = \frac{y}{z} dx + \frac{x}{z} dy - \frac{xy}{z^2} (z_x dx + z_y dy).$$

Приравнивая в обеих частях равенства коэффициенты соответственно при  $dx$  и  $dy$ , получаем систему двух линейных уравнений относительно  $z_x$  и  $z_y$

$$\begin{cases} \frac{1}{y} w_u + x w_v = \frac{y}{z} - \frac{xy}{z^2} z_x, \\ -\frac{x}{y^2} w_u + y w_v = \frac{x}{z} - \frac{xy}{z^2} z_y. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$z_x = \frac{z}{x} - \frac{z^2}{xy^2} w_u - \frac{z^2}{y} w_v,$$

$$z_y = \frac{z}{y} + \frac{z^2}{y^3} w_u - \frac{z^2}{xy^2} w_v.$$

Подставляя эти выражения для первых производных в исходное выражение, получим

$$B = -\frac{z}{y} \left( xz + \frac{1}{x} \right) w_v.$$

Используя формулы замены переменных (16), переходим к новым переменным  $u, v, w$  в выражении  $B$ :

$$B = -\frac{4uv^2}{w^2(1+u^2)} w_v. \blacksquare$$

**5.** Решить уравнение  $z_y - z_x = 0$ , перейдя к новым независимым переменным  $u = x + y, v = x - y$ .

Дифференцируя выражения для  $u, v$ , заданные формулами замены переменных, имеем

$$\begin{cases} du = dx + dy, \\ dv = dx - dy. \end{cases} \quad (18)$$

Так как в данной задаче заменяются только независимые переменные, а переменная  $z$  (функция) не заменяется, то  $dz = z_x dx + z_y dy$ , аналогично,  $dz = z_u du + z_v dv$ . Отсюда, используя равенства (18), получаем

$$dz = z_x dx + z_y dy = z_u(dx + dy) + z_v(dx - dy).$$

Приравнивая в обеих частях последнего равенства коэффициенты соответственно при  $dx$  и  $dy$ , находим выражения для  $z_x$  и  $z_y$ :  $z_x = z_u + z_v, z_y = z_u - z_v$ . Следовательно, исходное уравнение примет вид  $z_v = 0$ . Решением этого уравнения является произвольная дифференцируемая функция переменной  $u$ , т. е.  $z = f(u)$ . Возвращаясь к старым переменным, получаем, что  $z = f(x+y)$  — решение исходного уравнения.  $\blacktriangle$

**6.** В уравнении  $z_{xx} + z_{xy} + z_x = z$  перейти к переменным  $u, v, w$ , где  $w = w(u, v)$ , если

$$x = u + v, \quad y = u - v, \quad z = we^{v-u}. \quad (19)$$

Так как формулы замены переменных (19) заданы в форме, разрешенной относительно старых переменных  $x, y, z$ , т. е. имеют вид (7), то воспользуемся схемой решения, изложенной в п. 1°. Из равенств (19), учитывая, что  $dw = w_u du + w_v dv$ , получаем

$$\begin{cases} dx = du + dv, \\ dy = du - dv, \\ dz = e^{u-v}(w_u du + w_v dv) + we^{v-u}(dv - du). \end{cases} \quad (20)$$

Из первых двух уравнений системы (20) находим

$$\begin{cases} du = 0,5(dx + dy), \\ dv = 0,5(dx - dy). \end{cases} \quad (21)$$

Подставляя выражения (21) для  $du$ ,  $dv$  и  $dz = z_x dx + z_y dy$  в третье уравнение системы (20), приходим к равенству

$$z_x dx + z_y dy = 0,5e^{v-u}[w_u(dx + dy) + w_v(dx - dy)] - we^{v-u}dy.$$

Приравнивая в обеих частях равенства коэффициенты при  $dx$ , имеем  $z_x = 0,5e^{v-u}(w_u + w_v)$ . Чтобы найти выражения вторых производных функции  $z(x, y)$  в новых переменных, вычислим дифференциал от первой производной  $z_x$ :

$$\begin{aligned} dz_x &= z_{xx}dx + z_{xy}dy = 0,5e^{v-u}(dv - du)(w_u + w_v) + \\ &\quad + 0,5e^{v-u}(w_{uu}du + w_{uv}dv + w_{vu}du + w_{vv}dv). \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражения (21) для  $du$  и  $dv$ , получаем равенство

$$\begin{aligned} z_{xx}dx + z_{xy}dy &= -0,5e^{v-u}(w_u + w_v)dy + \\ &\quad + 0,25e^{v-u}[w_{uu}(dx + dy) + 2w_{uv}dx + w_{vv}(dx - dy)]. \end{aligned}$$

Приравнивая в обеих частях равенства коэффициенты соответственно при  $dx$  и  $dy$ , находим

$$\begin{aligned} z_{xx} &= 0,25e^{v-u}(w_{uu} + 2w_{uv} + w_{vv}), \\ z_{xy} = z_{yx} &= -0,5e^{v-u}(w_u + w_v) + 0,25e^{v-u}(w_{uu} - w_{vv}). \end{aligned}$$

Подставив выражения первых и вторых производных в исходное уравнение, получим  $w_{uu} + w_{vv} = 2w$ . ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

38. Решите дифференциальное уравнение, вводя новую независимую переменную:
- $x^2y'' + xy' + y = 0$ , если  $x = e^t$ ;
  - $(4x^2 + 1)y'' + 4xy' + y = 0$ , если  $x = \frac{1}{2} \sin 2t$ ;
  - $4(1 - x^2)y'' - 4xy' + \omega^2y = 0$ , если  $x = \sin 2t$ .
39. Преобразуйте дифференциальное уравнение, приняв  $y$  за новую независимую переменную, а  $x$  — за новую функцию:
- $y'y''' - 3(y'')^2 - (y')^5y = 0$ ;
  - $(y')^3y'' - 10y'y''y''' + 15(y'')^3 = (y')^7$ .
40. Введя новые переменные  $t, u$ , где  $u = u(t)$ , преобразуйте дифференциальное уравнение:
- $x^3y'' + xyy' - y^2 = 0$ , если  $x = e^t$ ,  $y = u \cdot e^t$ ;
  - $y''' - x^3y'' + xy' - y = 0$ , если  $x = 1/t$ ,  $y = u/t$ ;
  - $\frac{x^2}{1 - \ln x}y' + y = 1$ , если  $y = u + 1$ ,  $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln t}{t}$ ;
  - $xyy'' - x(y')^2 + yy' = 0$ , если  $t = y$ ,  $u = \ln(y/x)$ .

41. В уравнении  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  перейдите к новой функции  $u = u(x)$ , если  $y = \exp\left\{-0,5 \int\limits_{x_0}^x p(t)dt\right\} \cdot u$ .
42. Преобразуйте дифференциальное уравнение, перейдя к полярным координатам  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , где  $\rho = \rho(\varphi)$ :
- $y' = \frac{x+y}{x-y}$ ;
  - $(xy' - y)^2 = 2xy(1+y'^2)$ .
43. В системе уравнений
- $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + kx(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} = -x + ky(x^2 + y^2) \end{cases}$$
- перейдите к новым функциям  $\rho = \rho(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$  по формулам  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ .
44. Введя новые независимые переменные  $u, v$ , преобразуйте дифференциальное уравнение:
- $xz_x + yz_y = z$ , если  $u = x$ ,  $v = y/x$ ;
  - $yz_x - xz_y = ye^{x^2+y^2}$ , если  $u = x^2 + y^2$ ,  $v = y$ ;
  - $(x+y)z_x - (x-y)z_y = 0$ , если  $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $v = \operatorname{arctg}(y/x)$ ;
  - $(xz_z)^2 + ayzz_y = bz^2$ , если  $u = \ln x$ ,  $v = \ln y$ .
45. Решите уравнение с частными производными, введя новые независимые переменные  $u, v$ :
- $az_x + bz_y = 0$ , если  $u = ax + by$ ,  $v = bx - ay$ ;
  - $yz_x - xz_y = 0$ , если  $u = x$ ,  $v = x^2 + y^2$ ;
  - $xz_x + yz_y = z$ , если  $u = 4x - 7y$ ,  $v = 8y/x$ .
46. Решите дифференциальное уравнение, введя новые переменные  $u, v, w$ , где  $w = w(u, v)$ :
- $xz_x + (y+1)z_y = 0$ , если  $x = u + v$ ,  $y = v/u$ ,  $z = w/u$ ;
  - $yz_x - xz_y = (y-x)z$ , если  $u = x^2 + y^2$ ,  $v = 1/x + 1/y$ ,  $w = \ln z - x - y$ .
47. Преобразуйте дифференциальное уравнение, перейдя к новым переменным  $u, v, w$ , где  $w = w(u, v)$ :
- $\frac{x^2 + y^4}{y} z_x + x(1 + y^2)z_y = \frac{y^3}{x} - xy$ , если  $u^2 + v^2 + x^2 - y^2 = 0$ ,  $x = vy$ ,  $\sin(w - z) = u$ ;
  - $(xy + z)z_x + (1 - y^2)z_y = x + yz$ , если  $u = yz - x$ ,  $v = xz - y$ ,  $w = xy - z$ ;
  - $(xz_x)^2 + (yz_y)^2 = z^2 z_x z_y$ , если  $x = ue^w$ ,  $y = ve^w$ ,  $z = we^w$ .
48. Преобразуйте выражение  $B = (z_x)^2 + (z_y)^2$ , приняв  $x$  за функцию, а  $u = xz$  и  $v = yz$  — за независимые переменные.
49. Введя новые независимые переменные, преобразуйте выражение:
- $B = (z_x)^2 + (z_y)^2$ , если  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ;
  - $B = z_{xx} + z_{yy}$ , если  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ;
  - $B = x^2 z_{xx} + 2xyz_{xy} + y^2 z_{yy}$ , если  $u = \ln x$ ,  $v = \ln y$ ;
  - $B = x^2 z_{xx} + 2xyz_{xy} + y^2 z_{yy}$ , если  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ .

50. Введя новые независимые переменные, преобразуйте уравнение:

a)  $z_{xx} + z_{yy} = 0$ , если  $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ,  $v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ ;

б)  $x^2 z_{xx} - 2x \sin y z_{xy} + \sin^2 y z_{yy} = 0$ , если  $u = x \operatorname{tg} \frac{y}{2}$ ,  $v = x$ ;

в)  $z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = 0$ , если  $u = x + z$ ,  $v = y + z$ .

51. Решите уравнение, введя новые переменные  $u, v, w$ , где  $w = w(u, v)$ :

а)  $z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} = 0$ , если  $u = x + y$ ,  $xv = y$ ,  $xw = z$ ;

б)  $z_{xx} = a^2 z_{yy}$ , если  $u = y - ax$ ,  $v = y + ax$ ,  $w = z$ .

52. Преобразуйте уравнение  $xyR_{zy} + yzR_{yz} + xzR_{xz} = 0$ , введя новые независимые переменные  $u, v, w$  по формулам  $x = vw$ ,  $y = uw$ ,  $z = vu$ .

53. Введя новые переменные  $u, v, w$ , где  $w = w(u, v)$ , преобразуйте уравнение:

а)  $yz_{yy} + 2z_y = 2/x$ , если  $yu = x$ ,  $v = x$ ,  $w = xz - y$ ;

б)  $z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = 0$ , если  $u = x + y$ ,  $v = x - y$ ,  $w = xy - z$ ;

в)  $z_{xx} - 2z_{xy} + (1 + y/x)z_{yy} = 0$ , если  $u = x$ ,  $v = x + y$ ,  $w = x + y + z$ ;

г)  $(1 - x^2)z_{xx} + (1 - y^2)z_{yy} = xz_x + yz_y$ , если  $x = \sin u$ ,  $y = \sin v$ ,  $z = e^w$ ;

д)  $z_{xx} + z_{xy} + z_{yy} = 1 + z - xy$ , если  $v + x + y + u = 1$ ,  $v - x + y - u = 0$ ,  $xy - z = w$ .

54. Докажите, что вид уравнения  $z_{xx}z_{yy} = (z_{xy})^2$  не меняется при любом распределении ролей между переменными  $x, y, z$ .

55. Докажите, что уравнение  $z_{xx} = z_y$  не изменит своего вида при замене

переменных  $u = \frac{x}{y}$ ,  $v = -\frac{1}{y}$ ,  $z = \frac{w}{\sqrt{y}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4y} \right\}$ , где  $w = w(u, v)$ .

## ГЛАВА XII

### КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

#### § 1. Двойные интегралы

##### Основные понятия и теоремы

**1. Определение двойного интеграла.** Пусть  $G$  — квадрируемая (и, следовательно, ограниченная) область (открытая или замкнутая) на плоскости и пусть в области  $G$  определена ограниченная функция  $u = f(M) = f(x, y)$ . Разобьем область  $G$  на  $n$  квадрируемых частей  $G_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) так, чтобы любые две части не имели общих внутренних точек, в каждой части  $G_i$  возьмем произвольную точку  $M_i(\xi_i, \eta_i)$  и составим сумму

$$I(G_i, M_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i,$$

где  $\Delta s_i$  — площадь  $G_i$ . Эта сумма называется *интегральной суммой* функции  $f(x, y)$ , соответствующей данному разбиению области  $G$  на части  $G_i$  и данному выбору промежуточных точек  $M_i$ .

*Диаметром* ограниченного множества  $G$  точек назовем точную верхнюю грань расстояний между двумя произвольными точками этого множества:  $\sup_{\substack{M' \in G \\ M'' \in G}} \rho(M', M'')$ .

Пусть  $d_i$  — диаметр  $G_i$ ,  $d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$ .

**Определение.** Число  $I$  называется *пределом интегральных сумм*  $I(G_i, M_i)$  при  $d \rightarrow 0$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$  такое, что для любого разбиения области  $G$ , у которого  $d < \delta$ , и для любого выбора промежуточных точек  $M_i$  выполняется неравенство

$$|I(G_i, M_i) - I| < \varepsilon.$$

Если существует  $\lim_{d \rightarrow 0} I(G_i, M_i) = I$ , то он называется *двойным интегралом* от функции  $f(x, y)$  по области  $G$  и обозначается  $\iint_G f(x, y) dx dy$

или  $\iint_G f(M) ds$ , а функция  $f(x, y)$  называется *интегрируемой* в области  $G$ .

**Теорема 1.** *Функция, непрерывная в замкнутой квадрируемой области, интегрируема в этой области.*

**Теорема 2.** Функция, ограниченная в квадрируемой области и непрерывная всюду, кроме некоторого множества точек площади нуль<sup>\*</sup>), интегрируема в этой области.

Двойные интегралы обладают такими же свойствами, как и определенные интегралы (линейность, аддитивность, формулы среднего значения и т. д.).

**2. Вычисление двойных интегралов с помощью повторного интегрирования.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена в области

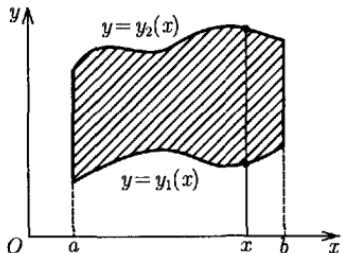


Рис. 29

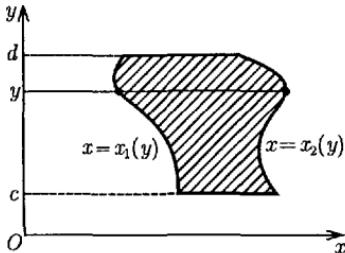


Рис. 30

$G = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ , где  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  — непрерывные функции на сегменте  $[a, b]$  (рис. 29). Такую область  $G$  назовем  $y$ -трапециевидной.

**Теорема 3.** Пусть:

1°) существует двойной интеграл  $\iint_G f(x, y) dx dy$ ;

2°)  $\forall x \in [a, b]$  существует определенный интеграл

$$I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

Тогда существует определенный интеграл

$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

(он называется повторным) и справедливо равенство

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy, \quad (1)$$

т. е. двойной интеграл равен повторному.

Если область  $G$  является  $x$ -трапециевидной (рис. 30), то при соответствующих условиях справедлива формула, аналогичная (1):

\* ) Говорят, что множество точек плоскости имеет площадь нуль, если  $\forall \varepsilon > 0$  существует многоугольник, содержащий это множество и имеющий площадь, меньшую  $\varepsilon$  (иными словами, если это множество можно заключить в многоугольник сколь угодно малой площади).

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (2)$$

Область более сложного вида часто удается разбить на трапециевидные части, к которым применима формула (1) или (2) (рис. 31).

**3. Замена переменных в двойном интеграле.** Рассмотрим двойной интеграл  $\iint_G f(x, y) dx dy$ . Замена переменных в двойном интеграле состоит в переходе переменных  $x$  и  $y$  к новым переменным  $u$  и  $v$  по формулам

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v), \\ y &= \psi(u, v), \\ (u, v) &\in g. \end{aligned} \quad (3)$$

При этом каждая точка  $(x, y)$  области  $G$  соответствует некоторой точке  $(u, v)$  области  $g$ , а каждая точка  $(u, v)$  области  $g$  переходит в некоторую точку  $(x, y)$  области  $G$  (рис. 32). Иными словами, когда точка  $(u, v)$  “пробегает” область  $g$ , соответствующая ей точка  $(x, y) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$  “пробегает” область  $G$ . Функции (3) называют

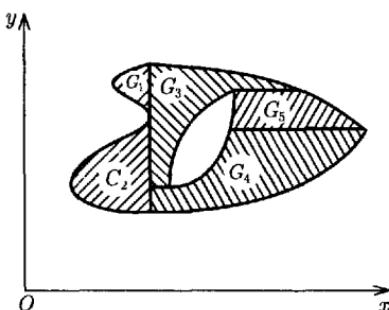


Рис. 31

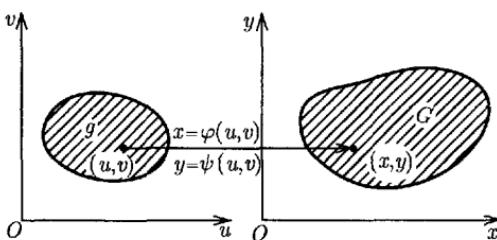


Рис. 32

также *отображением* области  $g$  плоскости  $(u, v)$  на область  $G$  плоскости  $(x, y)$ . Область  $G$  называется *образом* области  $g$ , а область  $g$  — *прообразом* области  $G$  при отображении (3).

Пусть отображение (3) удовлетворяет следующим условиям.

I. *Отображение (3) взаимно однозначно, т. е. различным точкам  $(u, v)$  области  $g$  соответствуют различные точки  $(x, y)$  области  $G$ .*

II. *Функции  $\varphi(u, v)$  и  $\psi(u, v)$  имеют в области  $g$  непрерывные частные производные первого порядка.*

III. *Якобиан отображения  $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}$  отличен от нуля во всех точках области  $g$ .*

**Теорема 4.** Пусть  $g$  и  $G$  — замкнутые квадрируемые области, функция  $f(x, y)$  ограничена в области  $G$  и непрерывна всюду, кроме, быть может, некоторого множества точек площади нуль, а отображение (3) удовлетворяет условиям I–III.

Тогда справедливо равенство

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_G f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv. \quad (4)$$

Формула (4) называется *формулой замены переменных в двойном интеграле*.

**Замечание.** Если условие I (взаимная однозначность отображения (3)) или условие III (отличие от нуля якобиана отображения) нарушается на множестве точек площади нуль (например, в отдельных точках или на отдельных кривых), то формула (4) остается в силе.

**4. Криволинейные координаты.** Формулам (3), которые рассматривались как отображение области  $g$  на область  $G$ , можно придать другой смысл. Рассмотрим в области  $g$  отрезок прямой  $u = u_0 = \text{const}$  (рис. 33). В области  $G$  ему соответствует параметрически заданная кривая

$$x = \varphi(u_0, v), \quad y = \psi(u_0, v), \quad (5)$$

где роль параметра играет переменная  $v$ . Точно так же отрезку прямой  $v = v_0$  в области  $g$  соответствует в области  $G$  кривая

$$x = \varphi(u, v_0), \quad y = \psi(u, v_0), \quad (6)$$

где роль параметра играет  $u$ . Точке  $(u_0, v_0)$  области  $g$  соответствует некоторая точка  $M_0(x_0, y_0)$  области  $G$  ( $x_0 = \varphi(u_0, v_0), y_0 = \psi(u_0, v_0)$ ),

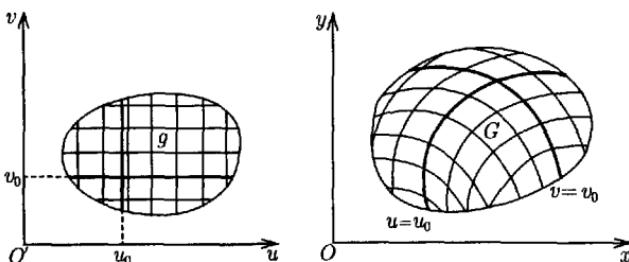


Рис. 33

причем в силу взаимной однозначности отображения (3) точке  $M_0$  соответствует единственная точка  $(u_0, v_0)$  области  $g$ , т. е. точка  $M_0$  однозначно определяется парой чисел  $(u_0, v_0)$ . Поэтому числа  $u_0$  и  $v_0$  можно рассматривать как координаты точки  $M_0$  (но уже не прямоугольные, а какие-то другие), а кривые (5) и (6), на которых одна из координат  $u$  или  $v$  постоянна, естественно назвать координатными линиями  $v$  и  $u$ . Так как эти координатные линии представляют собой.

вообще говоря, кривые, то числа  $(u_0, v_0)$  называются *криволинейными координатами* точки  $M_0$ . При отображении (3) сетка прямых координатных линий в области  $g$  переходит в сетку кривых координатных линий в области  $G$  (рис. 33). Итак, формулы (3) можно рассматривать как формулы перехода от прямоугольных координат  $(x, y)$  к новым, криволинейным координатам  $(u, v)$  в области  $G$ .

Примером криволинейных координат являются полярные координаты  $(\rho, \varphi)$ , связанные с прямоугольными координатами  $(x, y)$  формулами

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Иногда в качестве промежутка изменения  $\varphi$  берется промежуток  $-\pi < \varphi \leq \pi$ . Якобиан перехода к полярным координатам имеет вид

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

### 5. Геометрические приложения двойных интегралов.

а) Площадь  $S$  квадрируемой области  $G$  на плоскости  $(x, y)$  выражается формулой

$$S = \iint_G dx dy. \quad (7)$$

Если  $G = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$  — криволинейная трапеция, то, сведя двойной интеграл (7) к повторному, придем к известному выражению площади криволинейной трапеции с помощью определенного интеграла

$$S = \iint_G dx dy = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b [y]_0^{f(x)} dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Переходя в (7) к новым переменным по формулам (3), получим выражение площади области  $G$  в криволинейных координатах

$$S = \iint_g \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv. \quad (8)$$

Величину  $ds = dx dy$ , представляющую собой площадь прямоугольника со сторонами  $dx$  и  $dy$ , естественно назвать *элементом площади в прямоугольных координатах  $x$  и  $y$* , а величину  $ds = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv$  — *элементом площади в криволинейных координатах  $u$  и  $v$* . Модуль якобиана  $\left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right|$  представляет собой *коэффициент растяжения площади* в точке  $(u, v)$  при отображении области  $g$  плоскости  $(u, v)$  на область  $G$  плоскости  $(x, y)$ .

Если  $G$  — криволинейный сектор на плоскости  $(x, y)$ , ограниченный лучами  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \beta$  и кривой  $\rho = \rho(\varphi)$ , где  $\rho$  и  $\varphi$  — полярные

координаты (рис. 34), то, переходя в формуле (7) к полярным коорди-

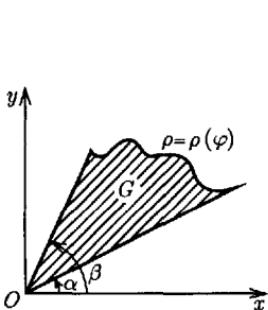


Рис. 34.

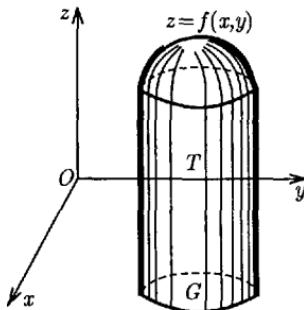


Рис. 35.

натам, учитывая, что  $\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \rho$ , а  $g = \{(\rho, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq \rho \leq \rho(\varphi)\}$ , и сводя двойной интеграл к повторному, получаем известное выражение площади криволинейного сектора через определенный интеграл

$$S = \iint_G dx dy = \iint_g \rho d\rho d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} \rho d\rho = \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{\rho(\varphi)} \right] d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

б) Объем  $V$  тела  $T = \{(x, y, z) : (x, y) \in G, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$  (рис. 35), где  $G$  — квадрируемая замкнутая область, а  $f(x, y)$  — непрерывная неотрицательная в области  $G$  функция, выражается формулой

$$V = \iint_G f(x, y) dx dy. \quad (9)$$

**6. Физические приложения двойных интегралов.** Пусть  $G$  — материальная бесконечно тонкая пластинка (квадрируемая область на плоскости  $Oxy$ ) с плотностью  $\rho(x, y)$ . Тогда справедливы следующие формулы:

а)  $m = \iint_G \rho(x, y) dx dy$  — масса пластинки;

б)  $M_x = \iint_G y \rho(x, y) dx dy, M_y = \iint_G x \rho(x, y) dx dy$  — статические моменты пластинки относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ ;

в)  $x_0 = \frac{M_y}{m}, y_0 = \frac{M_x}{m}$  — координаты центра тяжести пластинки;

г)  $I_x = \iint_G y^2 \rho(x, y) dx dy, I_y = \iint_G x^2 \rho(x, y) dx dy$  — моменты инерции пластинки относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ ;

д)  $I_0 = I_x + I_y = \iint_G (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy$  — момент инерции пластинки относительно начала координат.

## Контрольные вопросы и задания

- Что такое интегральная сумма? Составьте интегральную сумму функции  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , соответствующую разбиению области  $G = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  на прямоугольники  $G_{ij} = \{(x, y): x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$  ( $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$ ) и выбору левых вершин этих прямоугольников в качестве промежуточных точек.
- Что называется диаметром ограниченного множества точек? Чему равен диаметр: а) квадрата со стороной 1; б) области, ограниченной эллипсом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b$ )?
- Дайте определение предела интегральных сумм и двойного интеграла. Докажите, что неограниченная в области функция не интегрируема в этой области.
- Сформулируйте теорему об интегрируемости непрерывных функций. Верно ли утверждение: непрерывная в открытой квадрируемой области функция интегрируема в этой области?
- Сформулируйте теорему об интегрируемости некоторых разрывных функций (теорему 2). Для каких областей (открытых, замкнутых) верна эта теорема?
- Напишите формулы, выражающие линейность и аддитивность двойных интегралов.
- Сформулируйте теорему о формуле среднего значения для двойного интеграла, аналогичную теореме для определенного интеграла.
- Сформулируйте теорему о сведении двойного интеграла к повторному по формуле (1) (теорему 3) и аналогичную теорему о сведении двойного интеграла к повторному по формуле (2).
- Сведите двойной интеграл  $\iint_G f(x, y) dx dy$  к повторному двумя способами, если  $G$  — круг, ограниченный окружностью  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ .
- Напишите формулы перехода к новым переменным в двойном интеграле и сформулируйте условия I–III, которым должно удовлетворять отображение.
- Используя теорему о неявных функциях, докажите, что в силу условия III некоторая окрестность произвольной точки  $(u_0, v_0)$  области  $g$  взаимно однозначно отображается на некоторую окрестность точки  $(x_0, y_0) = (\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0))$  области  $G$ , т. е. локально из условия III следует условие I. Следует ли в целом (т. е. для всей области  $g$ ) из условия III условие I? (Рассмотрите пример:  $x = u \cos v, y = u \sin v, 1 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 4\pi$ .)
- Изобразите на плоскости  $(x, y)$  образ прямоугольника  $g = \{(\rho, \varphi): 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$  при отображении  $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$ . Является ли это отображение взаимно однозначным?
- Сформулируйте теорему о замене переменных в двойном интеграле.
- Что такое криволинейные координаты? Изобразите на плоскости  $(x, y)$  координатные линии полярных координат  $\rho$  и  $\varphi$ .
- Напишите формулы для вычисления площади плоской фигуры с помощью двойного интеграла. Получите из этих формул выражения площадей криволинейной трапеции и криволинейного сектора с помощью определенного интеграла. Что такое элемент площади в прямоугольных и криволинейных координатах? Каков геометрический смысл якобиана отображения?

16. Напишите формулу для вычисления объема тела с помощью двойного интеграла.  
 17. Напишите формулы для вычисления координат центра тяжести и моментов инерции материальной плоской пластины.

### Примеры решения задач

1. Свести двойной интеграл  $\iint_G f(x, y) dx dy$  к повторному двумя

способами (по формуле (1) и по формуле (2)), если  $G$  — область, ограниченная кривыми  $x = 1$ ,  $y = x^2$ ,  $y = 2x$  ( $x \leq 1$ ).

Δ I способ. Область  $G$  изображена на рис. 36, а. При каждом значении  $x$  из отрезка  $[0, 1]$  переменная  $y$  изменяется от  $x^2$  до  $2x$ , т. е. область  $G$  можно представить в виде  $G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2x\}$ . По формуле (1) получаем

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2x} f(x, y) dy.$$

II способ. Чтобы воспользоваться формулой (2), нужно разбить область  $G$  на две части,  $G_1$  и  $G_2$ , как показано на рис. 36, б.

В области  $G_1$  переменная  $y$  изменяется от 0 до 1, а при каждом значении  $y$  переменная  $x$  изменяется от  $y/2$  (значение  $x$  на прямой  $y = 2x$ ) до  $\sqrt{y}$  (значение  $x$  на параболе  $y = x^2$ ). Поэтому по формуле (2) получаем

$$\iint_{G_1} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

В области  $G_2$  переменная  $y$  изменяется от 1 до 2, а при каждом значении  $y$  переменная  $x$  изменяется от  $y/2$  до 1. По формуле (2) имеем

$$\iint_{G_2} f(x, y) dx dy = \int_1^2 dy \int_{y/2}^1 f(x, y) dx.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) dx dy &= \iint_{G_1} f(x, y) dx dy + \iint_{G_2} f(x, y) dx dy = \\ &= \int_0^1 dy \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y/2}^1 f(x, y) dx. \end{aligned}$$

2. Вычислить двойной интеграл  $\iint_G (x + y^2) dx dy$  по области  $G$ ,

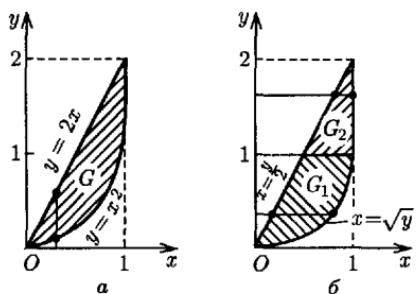
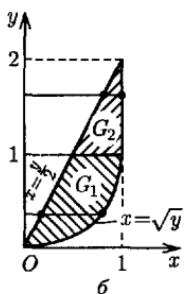


Рис. 36



ограниченной кривыми  $y = x$  и  $y = x^2$ .

Δ Область  $G$  изображена на рис. 37. Сводим двойной интеграл к повторному по формуле (1):

$$\iint_G (x + y^2) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x + y^2) dy.$$

Вычисляем внутренний интеграл в повторном, пользуясь формулой Ньютона–Лейбница:

$$\int_{x^2}^x (x + y^2) dy = \left( xy + \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{x^2}^x = x^2 - \frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{3} x^6.$$

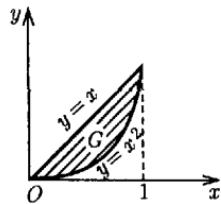


Рис. 37

Теперь вычисляем повторный интеграл:

$$\int_0^1 \left( x^2 - \frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{3} x^6 \right) dx = \left( \frac{x^3}{3} - \frac{1}{6} x^4 - \frac{1}{21} x^7 \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{42}. \blacksquare$$

### 3. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy.$$

Δ Кривые  $y = \sqrt{2x - x^2}$ ,  $y = \sqrt{2x}$  и отрезок прямой  $x = 2$  ограничивают область  $G$ , изображенную на рис. 38, а. Данный повторный

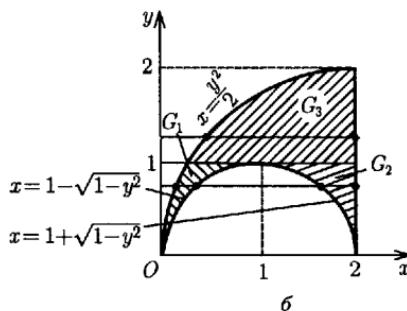
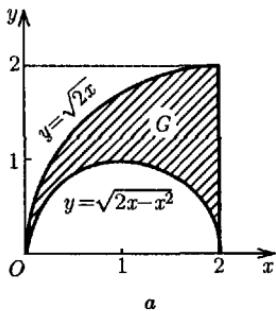


Рис. 38

интеграл равен двойному интегралу по этой области. Чтобы изменить порядок интегрирования в повторном интеграле, нужно разбить область  $G$  на три части, как показано на рис. 38, б. Кривая  $y = \sqrt{2x - x^2}$  является верхней полуокружностью окружности  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ . Разрешая это уравнение относительно  $x$ , получим два решения:  $x = 1 \pm \sqrt{1 - y^2}$ . В областях  $G_1$  и  $G_2$  переменная  $y$  изменяется от 0 до 1, а при каждом значении  $y$  переменная  $x$  изменяется в области  $G_1$  от  $y^2/2$  (значение  $x$  на кривой  $y = \sqrt{2x}$ ) до  $1 - \sqrt{1 - y^2}$  (значение  $x$  на окружности), а в области  $G_2$  — от  $1 + \sqrt{1 - y^2}$  до 2. Поэтому по

формуле (2) получаем

$$\begin{aligned} \iint_{G_1} f(x, y) dx dy + \iint_{G_2} f(x, y) dx dy &= \int_0^1 dy \int_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \\ &+ \int_0^1 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x, y) dx = \int_0^1 dy \left[ \int_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 f(x, y) dx \right]. \end{aligned}$$

Аналогично для области  $G_3$  имеем

$$\iint_{G_3} f(x, y) dx dy = \int_1^2 dy \int_{y^2/2}^2 f(x, y) dx.$$

Таким образом, окончательно находим

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) dx dy &= \int_0^1 dy \left[ \int_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^2 f(x, y) dx \right] + \\ &+ \int_1^2 dy \int_{y^2/2}^2 f(x, y) dx. \blacksquare \end{aligned}$$

4. В двойном интеграле  $I = \iint_G (x^2 + y^2) dx dy$ , где  $G$  — круг, ограниченный окружностью  $x^2 + y^2 = 2x$ , перейти к полярным координатам с полюсом в точке  $O(0, 0)$  и вычислить полученный интеграл.

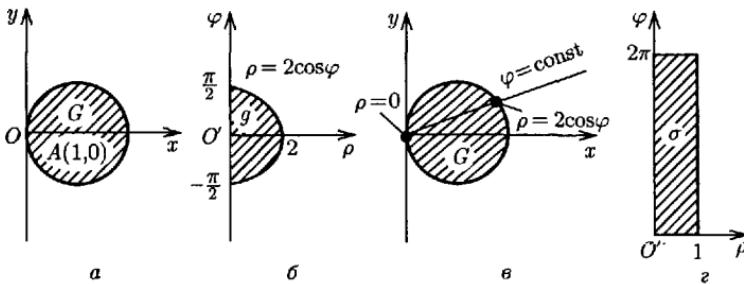


Рис. 39

△ Круг  $G$  изображен на рис. 39, а. Уравнения, связывающие  $(x, y)$  и полярные координаты  $(\rho, \varphi)$  с полюсом в точке  $O(0, 0)$ , имеют вид

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad (10)$$

причем наглядно видно, что в качестве промежутка изменения  $\varphi$  можно взять сегмент  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ . Подставляя выражения (10) в уравнение окружности, получим  $\rho^2 = 2\rho \cos \varphi$ , откуда  $\rho = 0$  или

$\rho = 2 \cos \varphi$ . Эти две кривые на плоскости  $(\rho, \varphi)$  при  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$  ограничивают область  $g$  (рис. 39, б), являющуюся прообразом области  $G$  при отображении (10). Якобиан  $\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)}$  отображения (10) равен  $\rho$ . Отметим, что  $\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = 0$  на границе  $\rho = 0$  области  $g$ , однако формула (4) замены переменных применима (см. замечание после теоремы 4). Подынтегральная функция  $x^2 + y^2$  в новых переменных равна  $\rho^2$ . По формуле (4) имеем

$$I = \iint_g \rho^3 d\rho d\varphi.$$

Полученный двойной интеграл по области  $g$  сводим к повторному:

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \rho^3 d\rho, \quad (11)$$

и вычисляем повторный интеграл, применяя формулу Ньютона–Лейбница:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{2 \cos \varphi} d\varphi = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( 1 + 2 \cos 2\varphi + \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \right) d\varphi = \\ &= \left( \frac{3}{2} \varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{3}{2} \pi. \blacksquare \end{aligned}$$

**Замечание 1.** Расстановку пределов интегрирования в повторном интеграле (11) можно произвести, рассматривая не область  $g$ , а изменение полярных координат в исходной области  $G$ . На рис. 39, в видно, что при каждом значении  $\varphi$  из промежутка  $[-\pi/2, \pi/2]$  переменная  $\rho$  изменяется от 0 (значение  $\rho$  в полюсе) до  $2 \cos \varphi$  (значение  $\rho$  на окружности, уравнение которой в полярных координатах имеет вид  $\rho = 2 \cos \varphi$ ). Таким образом, пределы интегрирования по  $\varphi$  — от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ , а по  $\rho$  — от 0 до  $2 \cos \varphi$ .

**Замечание 2.** Обычно замена переменных в двойном интеграле производится с целью упрощения области интегрирования. Если в данном примере перейти к полярным координатам с полюсом не в точке  $O(0, 0)$ , а в точке  $A(1, 0)$  (центре круга), т. е. по формулам  $x - 1 = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , то прообразом круга  $G$  окажется прямоугольник (наиболее простая область)  $\sigma = \{(\rho, \varphi) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$  (рис. 39, г). Выражение для подынтегральной функции примет вид  $x^2 + y^2 = 1 + 2\rho \cos \varphi + \rho^2$ . В этом случае, используя формулу (4) и сводя двойной интеграл к повторному, получим

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\sigma} (1 + 2\rho \cos \varphi + \rho^2) \rho d\rho d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho + 2\rho^2 \cos \varphi + \rho^3) d\rho = \int_0^{2\pi} \left( \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cos \varphi \right) d\varphi = \frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

5. Вычислить двойной интеграл  $I = \iint_G x^2 y^2 dx dy$ , где  $G = \{(x, y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

Δ Область  $G$  представляет собой кольцо (рис. 40, а). Его можно разбить на трапециевидные части, к которым применима формула свертывания двойного интеграла к повторному, например так, как пока-

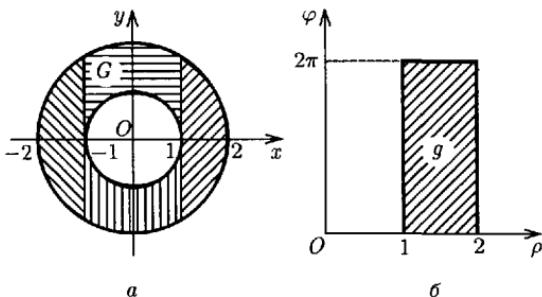


Рис. 40

зано на рис. 40, а. Однако удобнее сделать замену переменных — перейти к полярным координатам:  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . При этом отображении прообразом кольца является прямоугольник  $g = \{(\rho, \varphi): 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$  (рис. 40, б). Применяя формулу (4) и сводя двойной интеграл к повторному, получаем

$$I = \int_1^2 d\rho \int_0^{2\pi} \rho^5 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \int_1^2 \rho^5 d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2\varphi}{4} d\varphi = \frac{63}{6} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{21\pi}{8}. \blacksquare$$

6. Найти площадь фигуры  $G$ , ограниченной кривой

$$\left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^4 = 4xy \quad (a > 0, \quad b > 0). \quad (12)$$

Δ Так как левая часть уравнения кривой неотрицательна при любых  $x$  и  $y$ , то и правая часть должна быть неотрицательной, а значит,  $x$  и  $y$  должны иметь одинаковые знаки. Следовательно, кривая расположена в I и III квадрантах, причем она симметрична относительно начала координат. В самом деле, если точка  $M(x, y)$  лежит на кривой, т. е.  $x$  и  $y$  удовлетворяют уравнению (12), то  $-x$  и  $-y$  также удовлетворяют этому уравнению, т. е. точка  $M'(-x, -y)$ , симметричная точке  $M$  относительно начала координат, также лежит на кривой. Поэтому и вся фигура  $G$  состоит из двух частей, симметричных друг другу относительно начала координат. Найдем площадь  $S_1$  части фигуры, расположенной в I квадранте. Для этого удобно перейти к новым переменным — обобщенным полярным координатам. Они вводятся по формулам

$$x - x_0 = a\rho^\beta \cos^\alpha \varphi, \quad y - y_0 = b\rho^\beta \sin^\alpha \varphi, \quad (13)$$

где  $x_0, y_0, a, b, \alpha, \beta$  — некоторые числа, выбираемые в каждом конкретном случае из соображений удобства. Якобиан отображения (13) равен  $ab\alpha\beta\rho^{2\beta-1}\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{\alpha-1}\varphi$ .

В данном случае удобно взять  $x_0 = y_0 = 0, \alpha = 2, \beta = 1$ . Тогда левая часть уравнения (12) будет равна  $\rho^4$  и уравнение примет вид

$$\rho^4 = 4ab\rho^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi,$$

откуда  $\rho = 0$  или  $\rho = 2\sqrt{ab}\sin\varphi\cos\varphi$ , причем  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$  (I квадрант). Кривые  $\rho = 0$  и  $\rho = 2\sqrt{ab}\sin\varphi\cos\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ) на плоскости  $(\rho, \varphi)$  ограничивают область  $g$  — прообраз части фигуры  $G$ , лежащей в I квадранте. Якобиан отображения (13) в данном случае равен  $2ab\rho\sin\varphi\cos\varphi$ . По формуле (8) получаем

$$\begin{aligned} S_1 &= \iint_g 2ab\rho\sin\varphi\cos\varphi d\rho d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\sqrt{ab}\sin\varphi\cos\varphi} 2ab\rho\sin\varphi\cos\varphi d\rho = \\ &= 4a^2b^2 \int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi\cos^3\varphi d\varphi = 4a^2b^2 \int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi(1 - \sin^2\varphi) d(\sin\varphi) = \frac{a^2b^2}{3}. \end{aligned}$$

Искомая площадь фигуры  $G$  равна  $2S_1$ , т. е.  $\frac{2}{3}a^2b^2$ . ▲

7. Найти объем тела  $T$ , ограниченного поверхностями  $z = 0, z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1$ .

Δ Данное тело можно представить в виде  $T = \{(x, y, z) : (x, y) \in G, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$ , где  $G$  — область на плоскости  $(x, y)$ , ограниченная кривыми  $y = x^2$  и  $y = 1$ , т. е.  $G = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$ . Применяя формулу (9) и сводя двойной интеграл к повторному, получим

$$\begin{aligned} V &= \iint_G (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy = \\ &= \int_{-1}^1 \left[ x^2(1 - x^2) + \frac{1}{3}(1 - x^6) \right] dx = \frac{88}{105}. \end{aligned}$$

8. Найти моменты инерции  $I_x$  и  $I_y$  относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  пластины с плотностью  $\rho = 1$ , ограниченной кривыми  $xy = 1, xy = 2, y = 2x, x = 2y$  и расположенной в I квадранте.

Δ Данная пластинка  $G$  изображена на рис. 41. По формулам для  $I_x$  и  $I_y$  имеем

$$I_x = \iint_G y^2 dx dy, \quad I_y = \iint_G x^2 dx dy.$$

Чтобы свести каждый из этих двойных интегралов к повторному, нужно область  $G$  разбить на три части. Удобнее перейти к полярным координатам:  $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$ . Тогда  $\varphi$  изменяется от

$\varphi_1 = \arctg \frac{1}{2}$  до  $\varphi_2 = \arctg 2$  (см. рис. 41), а при каждом значении  $\varphi$

из сегмента  $[\varphi_1, \varphi_2]$  переменная  $\rho$  изменяется от  $\rho_1(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi \cos \varphi}}$  (значение  $\rho$  на кривой  $xy = 1$ , уравнение которой в полярных координатах в I квадранте имеет вид  $\rho = \frac{1}{\sqrt{\sin \varphi \cos \varphi}}$ ) до  $\rho_2(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\sin \varphi \cos \varphi}}$  (значение  $\rho$  на кривой  $xy = 2$ ) Следовательно,

$$I_x = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho^3 \sin^2 \varphi d\rho =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin^2 \varphi [\rho_2^4(\varphi) - \rho_1^4(\varphi)] d\varphi = \frac{3}{4} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{3}{4} \operatorname{tg} \varphi \Big|_{\varphi_1=\arctg \frac{1}{2}}^{\varphi_2=\arctg 2} = \frac{9}{8}.$$

Аналогично получаем  $I_y = \frac{9}{8}$  ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

- Сведите двойной интеграл  $\iint_G f(x, y) dx dy$  к повторному двумя способами, если
  - $G$  — треугольник с вершинами  $(1, 1)$ ,  $(4, 1)$ ,  $(4, 4)$ ,
  - $G$  — треугольник с вершинами  $(2, 1)$ ,  $(5, 2)$ ,  $(3, 7)$ ,
  - $G$  — область, ограниченная кривыми  $y = 3x^2$ ,  $y = 6 - 3x$ ,
  - $G$  — круг  $x^2 + y^2 \leqslant 2x - 4y + 4$ ,
  - $G$  — треугольник со сторонами, лежащими на прямых  $y = 2x$ ,  $y = 3x$ ,  $x = 4$ ,
  - $G$  — трапеция с вершинами  $(-1, 4)$ ,  $(5, 4)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(4, 1)$ ,
  - $G$  — трапеция с вершинами  $(-2, 0)$ ,  $(0, 6)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(-1, 0)$ ,
  - $G$  — трапеция с вершинами  $(-2, 3)$ ,  $(0, 6)$ ,  $(3, -3)$ ,  $(0, -3)$ ,
  - $G$  — кольцо  $1 \leqslant (x - 1)^2 + y^2 \leqslant 4$ ,
  - $G$  — область, ограниченная кривыми  $x^2 - 2x + y^2 = 0$  и  $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 2$
- Измените порядок интегрирования в повторных интегралах
  - $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3\sqrt{y}} f(x, y) dx$ ,
  - $\int_e^2 dx \int_{\ln x}^{\ln x^2} f(x, y) dy$ ,
  - $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$ ,
  - $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy$ ,
  - $\int_{-1}^0 dy \int_{-2y-1}^{y^2} f(x, y) dx$ ,

2. Измените порядок интегрирования в повторных интегралах

$$\text{а) } \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3\sqrt{y}} f(x, y) dx, \quad \text{б) } \int_e^2 dx \int_{\ln x}^{\ln x^2} f(x, y) dy, \quad \text{в) } \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy,$$

$$\text{г) } \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy, \quad \text{д) } \int_{-1}^0 dy \int_{-2y-1}^{y^2} f(x, y) dx,$$

$$\text{e) } \int_0^{1/2} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2-x}} f(x, y) dy, \quad \text{ж) } \int_{1/2}^1 dy \int_{-\sqrt{3/4+y-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$$

3. Вычислите двойные интегралы

$$\text{а) } \iint_G (x - y) dx dy, \text{ где } G \text{ — треугольник с вершинами } (1, 1), (4, 1), (4, 4),$$

$$\text{б) } \iint_G x dx dy, \text{ где } G \text{ — область, ограниченная кривыми } y = 3x^2, y = 6 - 3x,$$

$$\text{в) } \iint_G 2|x| dx dy, \text{ где } G \text{ — трапеция с вершинами } (-1, 4), (5, 4), (1, 1), (4, 1)$$

4. Перейдите к полярным координатам в двойном интеграле  $\iint_G f(x, y) dx dy$  и сведите его к повторному двумя способами, если

$$\text{а) } G \text{ — круг } x^2 + y^2 \leq a^2, \quad \text{б) } G \text{ — круг } x^2 + y^2 \leq 2y,$$

$$\text{в) } G \text{ — кольцо } a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2,$$

$$\text{г) } G \text{ — область, ограниченная кривой } (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), x \geq 0,$$

$$\text{д) } G \text{ — треугольник со сторонами, лежащими на прямых } x = 0, y = 0, y = 1 - x,$$

$$\text{е) } G \text{ — область, ограниченная кривыми } x^2 = ay, y = a \ (a > 0)$$

5. В следующих интегралах перейдите к полярным координатам, а затем сведите интеграл к повторному двумя способами

$$\text{а) } \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy, \quad \text{б) } \int_0^2 dy \int_y^{\sqrt{3}y} f(x^2 + y^2) dx, \quad \text{в) } \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$$

6. Перейдите к новым переменным  $u, v$  в интеграле

$$\text{а) } \int_0^3 dy \int_{2-y}^{3-y} f(x + y, x - y) dx, \text{ если } u = x + y, v = x - y,$$

$$\text{б) } \int_2^3 dx \int_{3x}^{4x} f\left(\frac{y}{x}\right) dy, \text{ если } u = x, v = \frac{y}{x}$$

7. Докажите, что замена переменных  $x + y = u, y = uv$  переводит треугольник, стороны которого лежат на прямых  $x = 0, y = 0, y = 1 - x$ , в квадрат  $\{(u, v) | 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$

8. Найдите замену переменных  $x = x(u, v), y = y(u, v)$ , при которой область  $G$ , ограниченная кривыми  $xy = 1, xy = 4, x - 2y - 2 = 0, x - 2y + 1 = 0$  ( $x > 0, y > 0$ ), является образом прямоугольника, стороны которого параллельны осям координат на плоскости  $(u, v)$

9. Вычислите двойные интегралы, введя обобщенные полярные координаты

$$\text{а) } \iint_G \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy, \text{ где } G \text{ — область, ограниченная эллипсом}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\text{б) } \iint_G \left( \sqrt{\frac{x-1}{3}} + \sqrt{\frac{y+1}{7}} \right)^3 dx dy, \text{ где } G \text{ — область, ограниченная кри-}$$

выми  $x = 1$ ,  $y = -1$ ,  $\sqrt{\frac{x-1}{3}} + \sqrt{\frac{y+1}{7}} = 1$ ;

в)  $\iint_G x \, dx \, dy$  и  $\iint_G x^2 \, dx \, dy$ , где  $G$  — область, ограниченная астроидой  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

10. Вычислите двойные интегралы:

а)  $\iint_G x \, dx \, dy$ , где  $G$  — область, ограниченная кривой  $x^2 + y^2 = 4x - 2y + 4$ ,

б)  $\iint_G (|x| + |y|) \, dx \, dy$ , где  $G = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ ;

в)  $\iint_G xy \, dx \, dy$ , где  $G = \{(x, y) : x^4 + y^4 \leq 1\}$ ;

г)  $\iint_G (x + y) \, dx \, dy$ , где  $G$  — область, ограниченная кривыми  $y^2 = 2x$ ,  $x + y = 4$ ,  $x + y = 12$ .

11. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

а)  $xy = a^2$ ,  $x + y = 2,5a$  ( $a > 0$ ), б)  $(2x - 3y)^2 + x^2 = 3$ ;

в)  $xy = a^2$ ,  $xy = 2a^2$ ,  $y = x$ ,  $y = 2x$  ( $x > 0$ ,  $y > 0$ ).

12. Введя полярные координаты, найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

а)  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ ,  $x^2 + y^2 = a^2$  ( $x^2 + y^2 \geq a^2$ );

б)  $(x^2 + y^2)^2 = 8a^2xy$ ,  $x^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ,  $x^2 + y^2 \leq a^2$ )

13. Введя обобщенные полярные координаты, найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

а)  $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$ ; б)  $(x + y)^5 = 6x^2y^2$ ;

в)  $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = x^2 + y^2$ ; г)  $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = \frac{x}{3} + \frac{y}{2}$ ;

д)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{y+1} = \sqrt{2}$ ,  $x = 1$ ,  $y = -1$

14. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями:

а)  $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$ ,  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 = 2$ ,

б)  $z = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 = \pi^2$ ;

в)  $z = xy$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^2 = 2y$ ,  $y^2 = x$ ,  $y^2 = 2x$ ,  $z = 0$ .

15. Найдите координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной кривыми:

а)  $x + y = 4$ ,  $y = 0,5x^2$ ; б)  $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = \frac{x}{3} + \frac{y}{2}$ ;

в)  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$  ( $x > 0$ ,  $y > 0$ ).

16. Найдите координаты центра тяжести круглой пластинки  $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ , если ее плотность в точке  $M(x, y)$  пропорциональна расстоянию от точки  $M$  до точки  $A(a, 0)$ .

17. Найдите моменты инерции  $I_x$  и  $I_y$  относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  однородной пластинки с плотностью  $\rho = \rho_0$ , ограниченной кривыми:

а)  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = b$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ );

б)  $y = 0$ ,  $y = x$ ,  $y = 2 - x$ ;

в)  $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ , ( $0 \leq x \leq a$ );

г)  $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ .

18. Найдите моменты инерции  $I_x$  и  $I_y$  относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  пластинки с плотностью  $\rho = xy$ , ограниченной кривыми:  
а)  $x = 0, y = 0, x = a, y = b$  ( $a > 0, b > 0$ ), б)  $y = 0, y = x, y = 2 - x$ .
19. Шар радиуса  $a$  погружен в жидкость постоянной плотности  $\rho$ , причем центр шара находится на расстоянии  $h$  от уровня жидкости и  $h \geq a$ . Найдите силы давления  $p_{\text{в}}$  и  $p_{\text{н}}$  на верхнюю и нижнюю полусферы этого шара.
20. Докажите, что если в плоскости, где расположена пластинка  $G$  массы  $m$ , взяты две параллельные оси  $x$  и  $x'$  на расстоянии  $a$  друг от друга, причем первая из них проходит через центр тяжести пластинки  $G$ , то моменты инерции пластинки  $G$  относительно этих осей связаны соотношением  $I_{x'} = I_x + ma^2$

## § 2. Тройные интегралы

### Основные понятия и формулы

**1. Определение тройного интеграла.** Основные понятия и теоремы для тройных интегралов аналогичны соответствующим понятиям и теоремам для двойных интегралов. Пусть  $T$  — кубируемая область (открытая или замкнутая) в трехмерном евклидовом пространстве и пусть в области  $T$  определена ограниченная функция  $u = f(M) = f(x, y, z)$ . Разобьем область  $T$  на  $n$  кубируемых частей  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) так, чтобы любые две части не имели общих внутренних точек, в каждой части  $T_i$  возьмем произвольную точку  $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  и составим интегральную сумму

$$I(T_i, M_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i,$$

где  $\Delta V_i$  — объем  $T_i$ .

Пусть  $d_i$  — диаметр  $T_i$ ,  $d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$ .

**Определение.** Число  $I$  называется *пределом интегральных сумм*  $I(T_i, M_i)$  при  $d \rightarrow 0$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$  такое, что для любого разбиения области  $T$ , у которого  $d < \delta$ , и для любого выбора промежуточных точек  $M_i$ , выполняется неравенство

$$|I(T_i, M_i) - I| < \varepsilon.$$

Если существует  $\lim_{d \rightarrow 0} I(T_i, M_i) = I$ , то он называется *тройным интегралом* от функции  $f(x, y, z)$  по области  $T$  и обозначается  $\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$  или  $\iiint_T f(M) dV$ , а функция  $f(x, y, z)$  называется *интегрируемой* в области  $T$ .

**Теорема 5.** *Функция, непрерывная в замкнутой кубируемой области, интегрируема в этой области.*

**Теорема 6.** *Функция, ограниченная в кубируемой области и непрерывная всюду, кроме некоторого множества точек объема нуль, интегрируема в этой области.*

Тройные интегралы обладают такими же свойствами, как определенные и двойные интегралы (линейность, аддитивность, формулы среднего значения и т. д.).

**2. Вычисление тройных интегралов с помощью повторного интегрирования.** Пусть функция  $f(x, y, z)$  определена в области

$T = \{(x, y, z) : (x, y) \in G, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$ ,  
где  $z_1(x, y)$  и  $z_2(x, y)$  — непрерывные функции в квадрируемой области  $G$  (рис. 42).

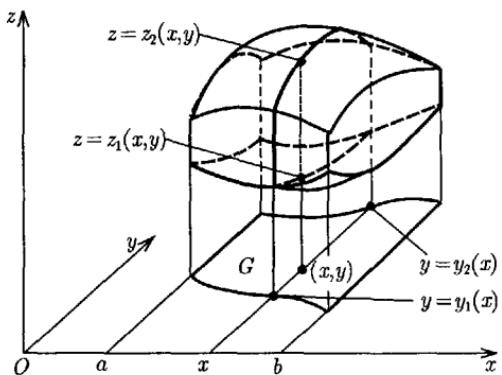


Рис. 42

**Теорема 7.** Пусть:

1°) существует тройной интеграл

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz;$$

2°)  $\forall (x, y) \in G$  существует определенный интеграл

$$I(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Тогда существует двойной интеграл

$$\iint_G I(x, y) dx dy = \iint_G dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

(он называется повторным) и справедливо равенство

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iint_G dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz, \quad (1)$$

т. е. тройной интеграл равен повторному.

Если область  $G$  является  $y$ -трапециевидной (см. рис. 42), т. е.  $G = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ , то двойной интеграл  $\iint_G I(x, y) dx dy$  в свою очередь можно свести к повторному:

$$\iint_G I(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} I(x, y) dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Таким образом, вычисление тройного интеграла сводится в этом случае к последовательному вычислению трех определенных (однократных) интегралов:

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

В формуле (1) повторный интеграл представляет собой двойной интеграл, а внутренний интеграл в повторном является определенным интегралом. Возможно и иное сведение тройного интеграла к повторному, когда повторный интеграл представляет собой определенный интеграл, а внутренний интеграл в повторном является двойным интегралом.

Пусть функция  $f(x, y, z)$  определена и ограничена в области  $T$ , которая заключена между плоскостями  $x = a$  и  $x = b$ , причем каждое сечение области  $T$  плоскостью  $x = \text{const}$  ( $a \leqslant x \leqslant b$ ) представляет собой квадрируемую фигуру  $G(x)$  (рис. 43).

**Теорема 8. Пусть:**

1°) существует тройной интеграл  $\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$ ;

2°)  $\forall x \in [a, b]$  существует двойной интеграл

$$I(x) = \iint_{G(x)} f(x, y, z) dy dz.$$

Тогда существует определенный интеграл

$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \iint_{G(x)} f(x, y, z) dy dz$$

(он называется повторным) и справедливо равенство

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{G(x)} f(x, y, z) dy dz. \quad (2)$$

**3. Замена переменных в тройном интеграле.** Аналогично случаю двойного интеграла замена переменных в тройном интеграле  $\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$  состоит в переходе от переменных  $x, y, z$  к новым переменным  $u, v, w$  по формулам

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \chi(u, v, w), \quad (u, v, w) \in \tau. \quad (3)$$

При этом каждая точка  $(x, y, z)$  области  $T$  соответствует по формулам (3) некоторой точке  $(u, v, w)$  области  $\tau$ , а каждая точка  $(u, v, w)$  области  $\tau$  переходит в некоторую точку  $(x, y, z)$  области  $T$ . Иными словами, функции (3) осуществляют отображение области  $\tau$  пространства  $(u, v, w)$  на область  $T$  пространства  $(x, y, z)$ . Пусть отображение (3) удовлетворяет таким же условиям, как и в § 1.

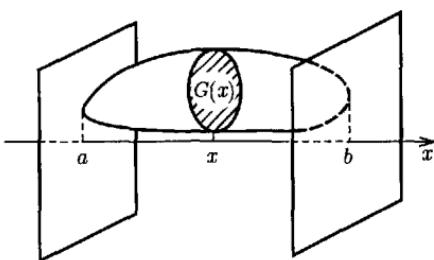


Рис. 43

I Отображение (3) взаимно однозначно

II Функции  $\varphi(u, v, w)$ ,  $\psi(u, v, w)$  и  $\chi(u, v, w)$  имеют в области  $T$  непрерывные частные производные первого порядка

III Якобиан отображения  $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$  отличен от нуля в области  $T$

**Теорема 9** Пусть  $T$  и  $T'$  — замкнутые кубируемые области, функция  $f(x, y, z)$  ограничена в области  $T$  и непрерывна всюду, кроме, быть может, некоторого множества точек объема нуль, а отображение (3) удовлетворяет условиям I-III

Тогда справедливо равенство (формула замены переменных в тройном интеграле)

$$\begin{aligned} \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{T'} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw \end{aligned}$$

**Замечание** Формула замены переменных остается в силе, если условия I и III нарушаются на множестве точек объема нуль

**4. Криволинейные координаты.** Формулы (3) можно рассматривать как формулы перехода к новым, криволинейным координатам  $(u, v, w)$  в области  $T$ . Поверхности  $u = \text{const}$ ,  $v = \text{const}$  и  $w = \text{const}$  представляют собой координатные поверхности (вообще говоря, криволинейные) в пространстве  $(x, y, z)$ . Кривые, на которых две криволинейные координаты имеют постоянные значения и изменяется только одна из координат, представляют собой координатные линии

Рассмотрим два примера наиболее употребительных криволинейных координат

**Цилиндрические координаты** Пусть  $M(x, y, z)$  — произвольная точка в пространстве  $(x, y, z)$ ,  $M'$  — проекция точки  $M$  на плоскость

( $x, y$ ) (рис. 44). Точка  $M$  однозначно задается тройкой чисел  $(\rho, \varphi, z)$ , где  $(\rho, \varphi)$  — полярные координаты точки  $M'$  на плоскости  $(x, y)$ ,  $z$  — аппликата точки  $M$ . Тройка чисел  $(\rho, \varphi, z)$  называется **цилиндрическими координатами** точки  $M$ . Переход от прямоугольных координат  $(x, y, z)$  к цилиндрическим  $(\rho, \varphi, z)$  задается формулами

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, & y &= \rho \sin \varphi, & z &= z \\ (0 \leq \rho < +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty) \end{aligned} \tag{4}$$

(Иногда в качестве промежутка изменения  $\varphi$  берется промежуток

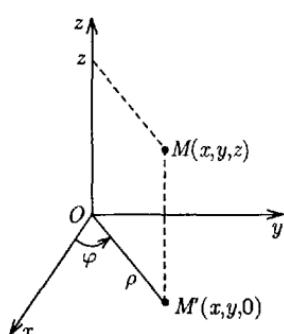


Рис. 44

$-\pi < \varphi \leq \pi$ ) Якобиан отображения (4) есть

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, z)} = \rho$$

Координатная поверхность  $\rho = \text{const}$  представляет собой цилиндрическую поверхность — отсюда и название “цилиндрические координаты”

**Сферические координаты** Пусть  $M(x, y, z)$  — произвольная точка в пространстве  $(x, y, z)$ ,  $M'$  — проекция точки  $M$  на плоскость  $(x, y)$  (рис. 45). Точка  $M$  однозначно задается тройкой чисел  $(r, \theta, \varphi)$ , где  $r$  — расстояние точки  $M$  от точки  $O$  (начала координат),  $\theta$  — угол между лучами  $OM$  и  $Oz$ ,  $\varphi$  — полярный угол точки  $M'$  на плоскости  $(x, y)$ . Тройка чисел  $(r, \theta, \varphi)$  называется *сферическими координатами* точки  $M$ . Переход от прямоугольных координат  $(x, y, z)$  к сферическим  $(r, \theta, \varphi)$  задается формулами

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, & y &= r \sin \theta \sin \varphi, & z &= r \cos \theta \\ (0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi) \end{aligned} \tag{5}$$

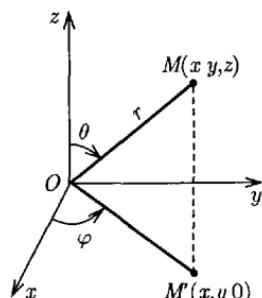


Рис. 45

(Иногда в качестве угла  $\theta$  берется угол между лучами  $OM$  и  $OM'$  со знаком плюс, если  $z > 0$ , и со знаком минус, если  $z < 0$ . В этом случае  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ , а в формулах (5) нужно заменить  $\sin \theta$  на  $\cos \theta$ , а  $\cos \theta$  на  $\sin \theta$ )

Якобиан отображения (5) есть  $\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta$  (в случае второго способа выбора угла  $\theta$  якобиан равен  $r^2 \cos \theta$ ). Координатная поверхность  $r = \text{const} > 0$  представляет собой сферу — отсюда и название “сферические координаты”

Иногда используются так называемые *обобщенные сферические координаты*. Они связаны с прямоугольными координатами  $(x, y, z)$  формулами

$$\begin{aligned} x - x_0 &= ar^n \sin^\alpha \theta \cos^\beta \varphi, & y - y_0 &= br^n \sin^\alpha \theta \sin^\beta \varphi, \\ z - z_0 &= cr^n \cos^\alpha \theta \end{aligned}$$

$$(0 \leq r < +\infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi),$$

где  $x_0, y_0, z_0, a, b, c, n, \alpha, \beta$  — некоторые числа, выбираемые в каждом конкретном случае из соображений удобства

Якобиан перехода к обобщенным сферическим координатам имеет вид

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = abc n \alpha \beta r^{3n-1} \sin^{2\alpha-1} \theta \cos^{\alpha-1} \theta \sin^{\beta-1} \varphi \cos^{\beta-1} \varphi \tag{6}$$

**5. Вычисление объемов с помощью тройных интегралов.** Объем  $V$  кубируемой области  $T$  (кубируемого тела) в пространстве  $(x, y, z)$  выражается формулой

$$V = \iiint_T dx dy dz. \quad (7)$$

Если  $T = \{(x, y, z) : (x, y) \in G, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ , где  $G$  — квадрируемая область на плоскости  $(x, y)$ , а  $f(x, y)$  — непрерывная в области  $G$  функция (см. рис. 35), то, сводя тройной интеграл к повторному, придем к формуле (9) из § 1, выражающей объем тела  $T$  через двойной интеграл:

$$V = \iint_G dx dy \int_0^{f(x, y)} dz = \iint_G [z]_0^{f(x, y)} dx dy = \iint_G f(x, y) dx dy$$

Если область  $T$  заключена между плоскостями  $x = a$  и  $x = b$  и каждое сечение области  $T$  плоскостью  $x = \text{const}$  представляет собой квадрируемую фигуру  $G(x)$  с площадью  $S(x)$  (см. рис. 43), то, сводя тройной интеграл (7) к повторному по формуле (2) и учитывая, что,

$\iint_{G(x)} dy dz = S(x)$ , придем к известному выражению объема тела с помощью определенного интеграла

$$V = \int_a^b dx \iint_{G(x)} dy dz = \int_a^b S(x) dx. \quad (8)$$

Переходя в равенстве (7) к новым переменным  $u, v, w$  по формулам (3), получим выражение объема области  $T$  в криволинейных координатах:

$$V = \iiint_{\tau} \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw.$$

Величину  $dV = dx dy dz$ , представляющую собой объем прямоугольного параллелепипеда с ребрами  $dx, dy$  и  $dz$ , естественно называть *элементом объема в прямоугольных координатах  $x, y, z$* , а величину  $dV = \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| du dv dw$  — *элементом объема в криволинейных координатах  $u, v, w$* . Модуль якобиана  $\left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right|$  представляет собой

*коэффициент растяжения объема* в точке  $(u, v, w)$  при отображении области  $\tau$  пространства  $(u, v, w)$  на область  $T$  пространства  $(x, y, z)$ .

**6. Физические приложения тройных интегралов.** Пусть  $T$  — материальное тело (кубируемая область в пространстве  $Oxyz$ ) с плотностью  $\rho(x, y, z)$ . Тогда справедливы следующие формулы:

а)  $m = \iiint_T \rho(x, y, z) dx dy dz$  — масса тела,

б)  $M_{yz} = \iiint_T x \rho(x, y, z) dx dy dz, M_{zx} = \iiint_T y \rho(x, y, z) dx dy dz,$

$M_{xy} = \iiint_T z \rho(x, y, z) dx dy dz$  — статические моменты тела относительно координатных плоскостей  $Oyz, Ozx, Oxy$ ;

в)  $x_0 = \frac{M_{yz}}{m}, y_0 = \frac{M_{zx}}{m}, z_0 = \frac{M_{xy}}{m}$  — координаты центра тяжести тела;

г)  $I_{yz} = \iiint_T x^2 \rho(x, y, z) dx dy dz, I_{zx} = \iiint_T y^2 \rho(x, y, z) dx dy dz,$

$I_{xy} = \iiint_T z^2 \rho(x, y, z) dx dy dz$  — моменты инерции тела относительно координатных плоскостей  $Oyz, Ozx, Oxy$ ,

д)  $I_x = I_{zx} + I_{xy}, I_y = I_{ry} + I_{yz}, I_z = I_{yz} + I_{zx}$  — моменты инерции тела относительно осей координат  $Ox, Oy, Oz$ ;

е)  $I_0 = I_{yz} + I_{zx} + I_{xy} = \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$  — момент инерции тела относительно начала координат;

ж)  $U(x_0, y_0, z_0) = \gamma \iiint_T \rho(x, y, z) \frac{1}{r} dx dy dz$  — ньютоновский потенциал поля тяготения тела  $T$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ ; здесь  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$  — расстояние между точками  $M(x, y, z)$  и  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $\gamma$  — гравитационная постоянная,

з)  $\mathbf{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$  — сила притяжения материальной точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  массы  $m_0$  телом  $T$ , где

$$F_x = \gamma m_0 \frac{\partial U}{\partial x_0} = \gamma m_0 \iiint_T \rho(x, y, z) \frac{x - x_0}{r^3} dx dy dz,$$

$$F_y = \gamma m_0 \frac{\partial U}{\partial y_0} = \gamma m_0 \iiint_T \rho(x, y, z) \frac{y - y_0}{r^3} dx dy dz,$$

$$F_z = \gamma m_0 \frac{\partial U}{\partial z_0} = \gamma m_0 \iiint_T \rho(x, y, z) \frac{z - z_0}{r^3} dx dy dz.$$

### Контрольные вопросы и задания

- 1 Что такое интегральная сумма? Составьте интегральную сумму функции  $f(x, y, z) = x^2 + xyz$ , соответствующую разбиению области  $T\{(x, y, z) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq g\}$  на параллелепипеды  $T_{ijk} = \{(x, y, z) | x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j, z_{k-1} \leq z \leq z_k\}$  ( $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b, c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d, e = z_0 < z_1 < \dots < z_l = g$ ) и выбору вершин  $(x_{i-1}, y_j, z_{k-1})$  этих параллелепипедов в качестве промежуточных точек

- 2 Дайте определения предела интегральных сумм и тройного интеграла  
Докажите, что неограниченная в пространственной области функция не  
интегрируема в этой области
- 3 Сформулируйте теоремы об интегрируемости непрерывных и некото-  
рых разрывных функций (теоремы 5 и 6) В какой из этих теорем су-  
щественна замкнутость области и почему?
- 4 Напишите формулы, выражающие линейность и аддитивность тройных  
интегралов
- 5 Сформулируйте теорему о формуле среднего значения для тройного ин-  
теграла
- 6 Сформулируйте теорему о сведении тройного интеграла к повторному,  
в котором внутренний интеграл является определенным интегралом
- 7 Сформулируйте теорему о сведении тройного интеграла к повторному,  
в котором внутренний интеграл является двойным
- 8 Тройной интеграл  $\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$ , где  $T$  — шар, ограниченный  
сферой  $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 9$ , сведите к повторному двумя  
способами а) так, чтобы внутренний интеграл в повторном был опре-  
деленным интегралом, б) так, чтобы внутренний интеграл в повтор-  
ном был двойным интегралом
- 9 Сведите тройной интеграл из предыдущего задания к последовательно-  
му вычислению трех определенных интегралов
- 10 Напишите формулы перехода к новым переменным в тройном интег-  
рале и сформулируйте условия I III которым должно удовлетворять  
отображение
- 11 Что представляет собой образ параллелепипеда  $\tau = \{(\rho, \varphi, z) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq z \leq 1\}$  при отображении  $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z$ ? Является ли это отображение взаимно однозначным?
- 12 Что представляет собой образ параллелепипеда  $\tau = \{(r, \theta, \varphi) | 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$  при отображении  $x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$ ? Является ли это отображение взаимно однозначным?
- 13 Сформулируйте теорему о замене переменных в тройном интеграле
- 14 Что такое криволинейные координаты? Напишите формулы перехода  
от прямоугольных координат  $(x, y, z)$  к цилиндрическим координатам  
 $(\rho, \varphi, z)$ . Вычислите якобиан перехода. Что представляют собой коор-  
динатные поверхности  $\rho = \text{const}, \varphi = \text{const}, z = \text{const}$  и координатные  
линии  $\rho, \varphi, z$ ?
- 15 Напишите формулы перехода от прямоугольных координат  $(x, y, z)$  к  
сферическим координатам  $(r, \theta, \varphi)$ . Вычислите якобиан перехода. Что  
представляют собой координатные поверхности  $r = \text{const}, \theta = \text{const},$   
 $\varphi = \text{const}$  и координатные линии  $r, \theta, \varphi$ ?
- 16 Напишите формулы перехода от прямоугольных координат к обобщен-  
ным сферическим координатам. Вычислите якобиан перехода
- 17 Напишите формулу для вычисления объема тела с помощью тройного  
интеграла. Получите из этой формулы выражения объема тела с по-  
мощью двойного интеграла и определенного интеграла. Что такое эле-  
мент объема в прямоугольных координатах?
- 18 Напишите формулу для вычисления объема тела в криволинейных ко-  
ординатах. Что такое элемент объема в криволинейных координатах?  
Каков геометрический смысл якобиана отображения?

- 19 Напишите формулы для вычисления координат центра тяжести и моментов инерции материального тела  
 20 Напишите выражения для ньютонаского потенциала поля тяготения материального тела и составляющих силы притяжения этим телом материальной точки

### Примеры решения задач

1. Дан тройной интеграл  $\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$ , где  $T$  — область,

ограниченная поверхностями  $z = 0$ ,  $z = xy$ ,  $y = x$ ,  $x = 1$ . Свести данный интеграл к повторному двумя способами а) так, чтобы внутренний интеграл был определенным интегралом с переменной интегрирования  $z$ , б) так, чтобы внутренний интеграл был двойным интегралом с переменными интегрирования  $y$  и  $z$ . В каждом случае свести тройной интеграл к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

Δ а) Область  $T$  представляет собой “криволинейную пирамиду”  $AOBC$  (рис. 46, а), основанием которой является треугольник  $OBC$

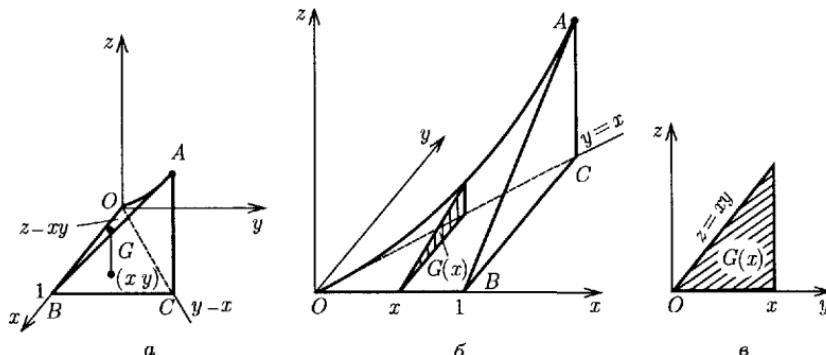


Рис. 46

в плоскости  $(x, y)$  (обозначим этот треугольник буквой  $G$ ). Для каждой точки  $(x, y)$  области  $G$  переменная  $z$  изменяется от 0 (значение  $z$  в области  $G$ ) до  $xy$  (значение  $z$  на поверхности  $z = xy$ ), т. е. область  $T$  можно представить в виде

$$T = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in G, 0 \leq z \leq xy\}$$

По формуле (1) имеем

$$I = \iint_G dx dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz$$

Сводя двойной интеграл по области  $G$  к повторному, получим

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz \quad (9)$$

б) Область  $T$  заключена между плоскостями  $x = 0$  и  $x = 1$ . Сечение области  $T$  плоскостью  $x = \text{const}$  (рис. 46, б) представляет собой треугольник  $G(x)$ . Проекция этого треугольника на плоскость  $Oyz$  изображена на рис. 46, в. По формуле (2) имеем

$$I = \int_0^1 dx \iint_{G(x)} f(x, y, z) dy dz.$$

Сводя двойной интеграл по области  $G(x)$  к повторному, получим

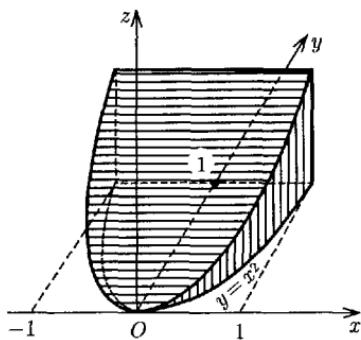


Рис. 47

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz,$$

что совпадает с равенством (9). ▲

2. Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint_T xy\sqrt{z} dx dy dz,$$

где  $T$  — область, ограниченная поверхностями

$$z = 0, \quad z = y, \quad y = x^2, \quad y = 1.$$

△ Область  $T$  изображена на рис. 47. Ее можно представить в виде

$$T = \{(x, y, z): (x, y) \in G, 0 \leq z \leq y\},$$

где  $G = \{(x, y): -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$ . Сводя тройной интеграл к повторному, получим

$$\begin{aligned} I &= \iint_G dx dy \int_0^y xy\sqrt{z} dz = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^y xy\sqrt{z} dz = \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 \frac{2}{3} xy^{5/2} dy = \frac{4}{21} \int_{-1}^1 x(1 - |x|^7) dx = \\ &= \frac{4}{21} \left( \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^0 x^8 dx - \int_0^1 x^8 dx \right) = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

3. Вычислить интеграл  $I = \iiint_T [(x+y)^2 - z] dx dy dz$ , если область  $T$  ограничена поверхностями  $z = 0$  и  $(z-1)^2 = x^2 + y^2$ .

△ Область  $T$  представляет собой конус (рис. 48, а). Уравнение конической поверхности, ограничивающей область  $T$ , можно записать в виде  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ , а саму область  $T$  представить следующим образом:  $T \{(x, y, z): (x, y) \in G, 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$ , где  $G$  — круг

радиуса 1 с центром в начале координат. Поэтому данный тройной интеграл можно свести к последовательному вычислению трех определенных интегралов в прямоугольных координатах:

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} [(x+y)^2 - z] dz.$$

Однако удобнее перейти к цилиндрическим координатам  $(\rho, \varphi, z)$ :  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $z = z$ . Тогда прообраз круга  $G$  есть прямоугольник  $\{(\rho, \varphi) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ , прообраз конической поверхности — плоская поверхность  $z = 1 - \rho$ , а прообраз области  $T$  — область

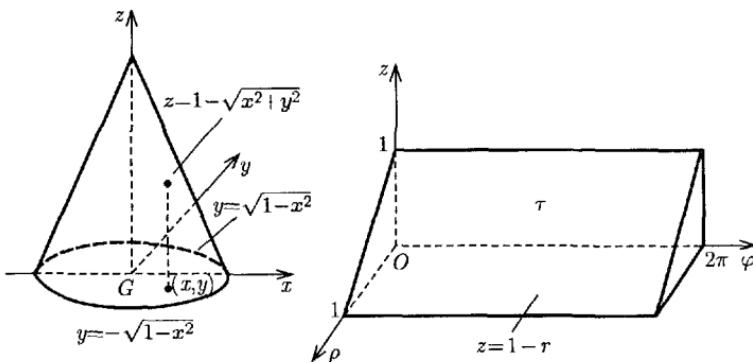


Рис. 48

$\tau$ , изображенная на рис. 48, б. Якобиан перехода к цилиндрическим координатам равен  $\rho$ , подынтегральная функция в цилиндрических координатах равна  $\rho^2(1 + \sin 2\varphi) - z$ . Сводя тройной интеграл по области  $\tau$  к последовательному вычислению трех определенных интегралов, получим

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\tau} [\rho^2(1 + \sin 2\varphi) - z] \rho d\rho d\varphi dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_0^{1-\rho} [\rho^2(1 + \sin 2\varphi) - z] \rho dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left[ \rho^3(1 - \rho)(1 + \sin 2\varphi) - \frac{1}{2} \rho(1 - \rho)^2 \right] d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{20} (1 + \sin 2\varphi) - \frac{1}{24} \right] d\varphi = \frac{\pi}{60}. \quad (10) \end{aligned}$$

Отметим, что расстановку пределов интегрирования в цилиндрических координатах можно произвести, рассматривая не область  $\tau$ , а

изменение цилиндрических координат в области  $T$ . Наглядно видно, что в области  $G$  переменная  $\varphi$  изменяется от 0 до  $2\pi$ , при каждом значении  $\varphi$  переменная  $\rho$  изменяется от 0 до 1, а для каждой точки  $(\rho, \varphi)$  области  $G$  переменная  $z$  изменяется в области  $T$  от 0 (значение  $z$  в области  $G$ ) до  $1 - \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - \rho$  (значение  $z$  на конической поверхности). Это позволяет расставить пределы интегрирования так, как сделано в равенстве (10). ▲

4. Вычислить интеграл  $I = \iiint_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , где  $T$  —

область, ограниченная поверхностью  $x^2 + y^2 + z^2 = z$ .

△ Область  $T$  представляет собой шар, ограниченный сферой, урав-

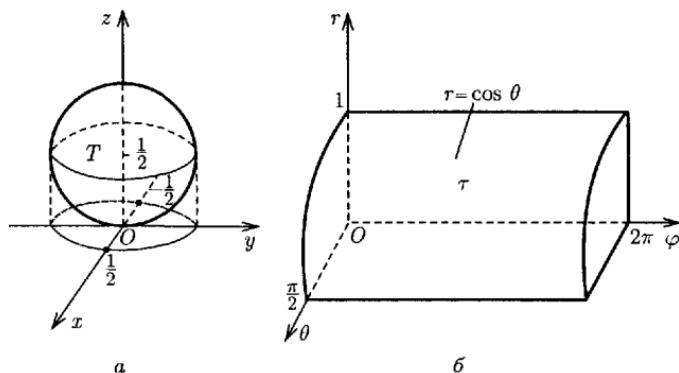


Рис. 49

нение которой удобно записать в виде  $x^2 + y^2 + (z - 1/2)^2 = 1/4$  (рис. 49, a). Данный тройной интеграл можно вычислить с помощью повторного интегрирования в прямоугольных координатах:

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{-\sqrt{1/4-x^2}}^{\sqrt{1/4-x^2}} dy \int_{1/2-\sqrt{1/2-x^2-y^2}}^{1/2+\sqrt{1/2-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz.$$

Однако удобнее перейти к сферическим координатам  $(r, \theta, \varphi)$ :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad (11)$$

причем переменная  $\varphi$  изменяется от 0 до  $2\pi$ , а при каждом значении  $\varphi$  переменная  $\theta$  изменяется от 0 до  $\pi/2$ . Подставляя выражения (11) в уравнение сферы, получим  $r^2 = r \cos \theta$ , откуда  $r = 0$  или  $r = \cos \theta$ . Эти две поверхности в пространстве  $(r, \theta, \varphi)$  при  $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi/2$  ограничивают снизу и сверху область  $\tau$  (рис. 49, б), являющуюся прообразом области  $T$  при отображении (11). Якобиан отображения (11) равен  $r^2 \sin \theta$ , а подынтегральная функция в сферических координатах равна  $r$ . Вычисляя тройной интеграл по области  $\tau$  с помощью

повторного интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\tau} r^3 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\cos \theta} r^3 \sin \theta \, dr = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} \cos^4 \theta \sin \theta \, d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

Отметим, что расстановку пределов интегрирования для переменной  $r$  можно произвести, рассматривая не область  $\tau$ , а изменение  $r$  при фиксированных значениях  $\varphi$  и  $\theta$  в области  $T$ . Наглядно видно, что на каждом луче  $\varphi = \text{const}$ ,  $\theta = \text{const}$  переменная  $r$  изменяется в шаре  $T$  от 0 (значение  $r$  в начале координат) до  $\cos \theta$  (значение  $r$  на сфере). ▲

5. Найти объем тела  $T$ , ограниченного поверхностью  $S$ :  $\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} + \sqrt{\frac{z}{15}} = 1$  и координатными плоскостями.

Δ Тело  $T$  изображено на рис. 50. Для вычисления его объема удобно перейти к обобщенным сферическим координатам  $(r, \theta, \varphi)$  по формулам

$$\begin{aligned} x &= 2r^2 \sin^4 \theta \cos^4 \varphi, \\ y &= 3r^2 \sin^4 \theta \sin^4 \varphi, \\ z &= 15r^2 \cos^4 \theta. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда уравнение поверхности  $S$  примет простой вид:  $r = 1$ . В пределах тела  $T$  переменная  $\varphi$  изменяется от 0 до  $\pi/2$ , при каждом значении  $\varphi \in [0, \pi/2]$  переменная  $\theta$  изменяется также от 0 до  $\pi/2$ , а на каждом луче  $\varphi = \text{const}$ ,  $\theta = \text{const}$  переменная  $r$  изменяется от 0 (значение  $r$  в начале координат) до 1 (значение  $r$  на поверхности  $S$ ). Итак, прообразом тела  $T$  при отображении (12) является прямоугольный параллелепипед в пространстве  $(r, \theta, \varphi)$ :

$$\tau = \{(r, \theta, \varphi) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}.$$

Якобиан отображения (12) равен  $2880r^5 \sin^7 \theta \cos^3 \theta \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi$  (см. формулу (6)).

Используя формулу (8) для объема тела в криволинейных координатах и вычисляя интеграл по области  $\tau$  с помощью повторного интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 2880r^5 \sin^7 \theta \cos^3 \theta \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi \, dr = \\ &= 480 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi \, d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^7 \theta \cos^3 \theta \, d\theta = \end{aligned}$$

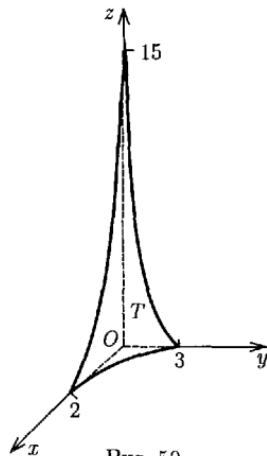


Рис. 50

$$= 480 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi (1 - \sin^2 \varphi) d(\sin \varphi) \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^7 \theta (1 - \sin^2 \theta) d(\sin \theta) = \\ = 480 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{40} = 1. \blacksquare$$

6. Найти моменты инерции относительно координатных плоскостей однородного тела  $T$  с плотностью  $\rho = 1$ , ограниченного поверхностями  $x^2 = 2pz$ ,  $y^2 = 2px$ ,  $x = p/2$ ,  $z = 0$  ( $p > 0$ ).

Δ Тело  $T$  изображено на рис. 51. Его можно представить в виде

$$T = \left\{ (x, y, z) : -p \leq y \leq p, \frac{y^2}{2p} \leq x \leq \frac{p}{2}, 0 \leq z \leq \frac{x^2}{2p} \right\}.$$

Используя формулу для момента инерции тела относительно координатной плоскости  $Oxz$ , с помощью повторного интегрирования получаем

$$I_{zx} = \iiint_T y^2 dx dy dz = \int_{-p}^p dy \int_{y^2/(2p)}^{p/2} dx \int_0^{x^2/(2p)} y^2 dz = \\ = \int_{-p}^p dy \int_{y^2/(2p)}^{p/2} \frac{y^2 x^2}{2p} dx = \int_{-p}^p \left[ \frac{p^2 y^2}{48} - \frac{y^8}{48p^4} \right] dy = \frac{p^5}{108}.$$

Аналогично находим

$$I_{yz} = \iiint_T x^2 dx dy dz = \frac{p^5}{176}, \quad I_{xy} = \iiint_T z^2 dx dy dz = \frac{p^5}{11520}. \blacksquare$$

7. Найти ньютоновский потенциал поля тяготения однородного шара  $T$  радиуса  $R$  с плотностью  $\rho$  в точке  $A$ , находящейся на расстоянии  $d$  от центра шара ( $d > R$ ).

Δ Введем прямоугольную систему координат так, чтобы начало координат совпало с центром шара, а точка  $A$  лежала на положительной полуоси  $Oz$ . Тогда уравнение сферы, ограничивающей шар, примет вид  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , а точка  $A$  имеет координаты  $(0, 0, d)$ . По формуле для ньютоновского потенциала имеем

$$U(0, 0, d) = \gamma \iiint_T \rho \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}}.$$

Так как тело  $T$  — шар, то для вычисления тройного интеграла удобно перейти к сферическим координатам:  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,

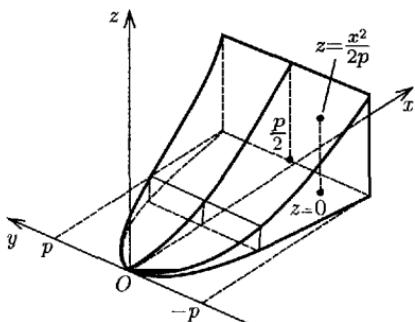


Рис. 51

$z = r \cos \theta$ . Прообразом шара  $T$  при этом отображении является прямоугольный параллелепипед  $\tau = \{(r, \theta, \varphi) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ . Учитывая, что якобиан отображения равен  $r^2 \sin \theta$ , а  $\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2} = \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}$ , и сводя тройной интеграл по области  $\tau$  к повторному, получим

$$\begin{aligned} U(0, 0, d) &= \gamma \iiint_{\tau} \rho \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} dr d\theta d\varphi = \\ &= \gamma \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} = \\ &= \gamma \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{r}{d} (\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta} \Big|_0^\pi) dr = \frac{2}{d} \gamma \rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 dr = \\ &= \gamma \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{\rho}{d} = \frac{\gamma m}{d}, \end{aligned}$$

где  $m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$  — масса шара.

Таким образом, однородный шар массы  $m$  создает в пространстве вне шара такое же поле тяготения, что и точечная масса  $m$ , помещенная в центр шара. ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

21. Сведите тройной интеграл  $\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$  к последовательному вычислению трех определенных интегралов шестью способами, если:

- а)  $T$  — область, ограниченная эллипсоидом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ;
- б)  $T$  — область, ограниченная поверхностями  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  ( $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ );
- в)  $T$  — четырехугольная пирамида с вершинами  $(-2, 0, 0)$ ,  $(0, -2, 0)$ ,  $(2, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$ ,  $(0, 0, 4)$ ,

- г)  $T$  — область, ограниченная поверхностями  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ ,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $z = 0$  ( $b > a > 0$ ).

22. Измените порядок интегрирования (различными способами) в интегралах:

- а)  $\int_0^{1/a} dx \int_0^{1-ax} dy \int_0^{ax+y} f(x, y, z) dz$ ;    б)  $\int_0^1 dy \int_0^1 dx \int_0^{2x^2+3y^2} f(x, y, z) dz$ ;
- в)  $\int_{-1}^1 dz \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} dy \int_{-\sqrt{1-z^2}}^1 f(x, y, z) dx$ ;    г)  $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} f(x, y, z) dz$ .

23. Вычислите интегралы:

- а)  $\iiint_T xz \, dx \, dy \, dz$ , если  $T$  — область, ограниченная поверхностями  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $z = 0$  ( $z \geq 0$ );  
 б)  $\iiint_T (x + y + z) \, dx \, dy \, dz$ , если  $T$  — область, ограниченная поверхностями  $x + y + z = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

24. Перейдите к сферическим координатам в интеграле

$$\iiint_T f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \, dx \, dy \, dz,$$

где  $T$  — область, ограниченная поверхностиами  $z = x^2 + y^2$ ,  $x = y$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ , и сведите полученный интеграл к последовательному вычислению трех определенных интегралов шестью способами.

25. Перейдите к сферическим координатам и вычислите интегралы:

- а)  $\iiint_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$ , где  $T$  — область, ограниченная поверхностью  $x^2 + y^2 + z^2 = x$ ;  
 б)  $\int_{-3}^3 x^2 \, dx \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} y^2 \, dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} z \, dz$ .

26. Перейдите к цилиндрическим координатам и вычислите интегралы:

- а)  $\iiint_T \sqrt{x^2 + y^2} z \, dx \, dy \, dz$ , где  $T$  — область, ограниченная поверхностями  $x^2 + y^2 = z$ ,  $z = 1$ ;  
 б)  $\int_0^3 z \, dz \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} y^2 \, dy \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} x^2 \, dx$ .

27. Выбрав подходящую замену переменных, вычислите интегралы:

- а)  $\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$ , где  $T$  — область, ограниченная сферой  $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$ ;  
 б)  $\iiint_T \left( \frac{8z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \, dx \, dy \, dz$ , где  $T$  — область, ограниченная эллипсоидом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ;  
 в)  $\iiint_T y \, dx \, dy \, dz$ , где  $T$  — область, ограниченная поверхностями  $z = y^2$ ,  $z = 4y^2$ ,  $z = x$ ,  $z = 3x$ ,  $z = 3$  ( $y > 0$ ).

28. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями:

- а)  $x + y + z = 1$ ,  $x + y - z = -1$ ,  $-x + y + z = 1$ ,  $x - y + z = 1$ ,  $z = 0$ ;  
 б)  $\sqrt{\frac{x}{2}} + \sqrt{\frac{y}{3}} + \sqrt{\frac{z}{5}} = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ;  
 в)  $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z$ ,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $z = 0$  ( $b > a > 0$ ).

29. Перейдите к цилиндрическим координатам и вычислите объем тела, ограниченного поверхностями:
- $2z = 2x^2 + \frac{y^2}{3}$ ,  $4x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ ,  $z = 0$ ;
  - $y^2 + z^2 = a^2$ ,  $y^2 + z^2 = x^2$ ,  $x = b$  ( $b > a > 0$ ).
30. Перейдите к сферическим координатам и вычислите объем тела, ограниченного поверхностями:
- $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ,  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $y = x$  ( $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ );
  - $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$ .
31. Перейдите к обобщенным сферическим координатам и вычислите объем тела, ограниченного поверхностями:
- $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) \frac{z}{c}$ ;
  - $\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{\sqrt{y}}{3} + \frac{\sqrt{z}}{4} = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 1$  ( $z > 1$ );
  - $\left(\frac{x}{5} + 6y + \frac{z}{2}\right)^2 = 3z$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  ( $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ ).
32. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями  $2z = x^2 + y^2$ ,  $x + y + z = 1$ , если плотность тела изменяется по закону:
- $\rho = \rho_0$ ;
  - $\rho = \rho_0|1 + x|$ ;
  - $\rho = \rho_0 y^2 |1 + x|$  ( $\rho_0 = \text{const}$ ).
33. Найдите координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями:
- $x^2 + z^2 = a^2$ ,  $y = 1$ ,  $y = 3$ ,  $z = 0$  ( $z \geq 0$ );
  - $z = 4 - x^2 - y^2$ ,  $z = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  ( $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ );
  - $x^2 = 2pz$ ,  $y^2 = 2px$ ,  $x = p/2$ ,  $z = 0$  ( $p > 0$ );
  - $z = x^2 + y^2$ ,  $z = (x^2 + y^2)/2$ ,  $x + y = 1$ ,  $x + y = -1$ ,  $x - y = 1$ ,  $x - y = -1$ .
34. Найдите координаты центра тяжести тела, ограниченного поверхностями  $2z = x^2 + 4x + y^2 - 2y + 5$ ,  $z = 2$ , если плотность тела изменяется по закону:
- $\rho = \rho_0$ ;
  - $\rho = \rho_0[(x + 2)^2 + (y - 1)^2]$ ;
  - $\rho = \rho_0 z(x^2 + y^2)$  ( $\rho_0 = \text{const}$ ).
35. Найдите моменты инерции относительно координатных плоскостей однородного тела плотности  $\rho_0$ , ограниченного поверхностями:
- $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = 2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - 1$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ );
  - $z = (x^2 + y^2 + z^2)^3$ ;
  - $z = 4 - x^2 - y^2$ ,  $z = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  ( $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ).
36. Найдите моменты инерции относительно координатных плоскостей тела:
- плотности  $\rho = \frac{\rho_0}{x^2 + y^2 + z^2}$  ( $\rho_0 = \text{const}$ ), ограниченного поверхностью  $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = 2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - 1$ ;
  - плотности  $\rho = \frac{35}{128} z^2$ , ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $y^2 + z^2 = a^2$ .
37. Найдите моменты инерции относительно осей координат и начала координат однородного тела плотности  $\rho_0$ , ограниченного поверхностями:
- $z = (x^2 + y^2 + z^2)^3$ ;
  - $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

38. Определите момент инерции относительно начала координат тела плотности  $\rho = \rho_0(x^2 + y^2 + z^2)$ , где  $\rho_0 = \text{const}$ , ограниченного поверхностью  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2$ .
39. Пусть  $T$  — однородный цилиндр плотности  $\rho_0$  с высотой  $h$  и радиусом основания  $R$ . Найдите силу притяжения этим цилиндром материальной точки массы  $m_0$ , находящейся в центре основания цилиндра.

### § 3. $m$ -кратные интегралы

#### Основные понятия и теоремы

**1. Определение  $m$ -кратного интеграла.** При  $m > 3$  понятие  $m$ -кратного интеграла вводится аналогично понятиям двойного и тройного интеграла. Предварительно нужно ввести понятие объема тела в  $m$ -мерном евклидовом пространстве  $E^m$ . *Объемом  $m$ -мерного параллелепипеда*  $Q = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) : |x_1 - a_1| \leq d_1, \dots, |x_m - a_m| \leq d_m\}$  назовем число  $V(Q) = 2d_1 2d_2 \dots 2d_m$  (при  $m = 3$  получается известная формула для объема прямоугольного параллелепипеда в трехмерном пространстве). Пусть  $T$  — произвольное ограниченное множество точек в пространстве  $E^m$  (для краткости будем называть его *телом*). Рассмотрим всевозможные многогранники  $Q_{\text{вп}}$  и  $Q_{\text{оп}}$ , вписанные в тело  $T$  и описанные около него и составленные из  $m$ -мерных параллелепипедов. Объем каждого такого многогранника положим равным сумме объемов составляющих его параллелепипедов. Числа

$$\underline{V} = \sup_{Q_{\text{вп}} \subset T} \{V(Q_{\text{вп}})\} \quad \text{и} \quad \overline{V} = \inf_{T \subset Q_{\text{оп}}} \{V(Q_{\text{оп}})\}$$

называются соответственно *нижним и верхним объемом тела*  $T$ . Тело  $T$  называется *кубируемым*, если  $\underline{V} = \overline{V}$ , а число  $V = \underline{V} = \overline{V}$  называется *объемом тела*  $T$ .

Пусть на кубирующем множестве  $T \subset E^m$  задана ограниченная функция  $u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ . Разобьем тело  $T$  на кубируемые части  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) так, чтобы любые две части не имели общих внутренних точек, в каждой части возьмем произвольную точку  $M_i(\xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_m^i)$  и составим интегральную сумму

$$I(T_i, M_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_1^i, \xi_2^i, \dots, \xi_m^i) \Delta V_i,$$

где  $\Delta V_i$  — объем  $T_i$ . Пусть  $d_i$  — диаметр  $T_i$ ,  $d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$ . Предел интегральных сумм при  $d \rightarrow 0$  (его определение в точности такое же, как и для двойных и тройных интегралов) называется  *$m$ -кратным интегралом* от функции  $f(x_1, \dots, x_m)$  по множеству  $T$  и обозначается

$$\iint_T f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m. \quad (1)$$

Как и в случае двойных и тройных интегралов, справедливы следующие утверждения:

1) функция, непрерывная в замкнутой кубируемой области  $T \subset E^m$ , интегрируема в этой области;

2) функция, ограниченная в кубируемой области  $T \subset E^m$  и непрерывная всюду, кроме некоторого множества точек объема нуль, интегрируема в этой области.

Если  $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1$ , то интеграл (1) равен объему тела  $T$ :

$$V(T) = \iint_T dx_1 dx_2 \dots dx_m. \quad (2)$$

## 2. Вычисление *m*-кратных интегралов с помощью повторного интегрирования.

Теорема 10. Пусть:

1°) функция  $f(x_1, \dots, x_m)$  интегрируема в области  $T = \{(x_1, \dots, x_m) : (x_1, \dots, x_{m-1}) \in G, y_1(x_1, \dots, x_{m-1}) \leq x_m \leq y_2(x_1, \dots, x_{m-1})\}$ , где  $y_1(x_1, \dots, x_{m-1})$  и  $y_2(x_1, \dots, x_{m-1})$  — непрерывные функции в кубируемой области  $G \subset E^{m-1}$ ;

2°)  $\forall (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) \in G$  существует определенный интеграл

$$I(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) = \int_{y_1(x_1, \dots, x_{m-1})}^{y_2(x_1, \dots, x_{m-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_m.$$

Тогда существует  $(m - 1)$ -кратный интеграл от функции  $I(x_1, \dots, x_m)$  по области  $G$  (повторный интеграл) и справедливо равенство

$$\begin{aligned} \iint_T f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m &= \\ &= \iint_G \int_{y_1(x_1, \dots, x_{m-1})}^{y_2(x_1, \dots, x_{m-1})} f(x_1, \dots, x_m) dx_m. \end{aligned}$$

В свою очередь интеграл по области  $G$  при соответствующих условиях можно также свести к повторному и т. д. В конечном итоге при определенных условиях, которым должна удовлетворять область  $T$ ,  $m$ -кратный интеграл сводится к последовательному вычислению  $m$  определенных интегралов (см. пример 1 на с. 314).

**3. Замена переменных в *m*-кратном интеграле.** Замена переменных в *m*-кратном интеграле (1) состоит в переходе от переменных  $x_1, \dots, x_m$  к новым переменным  $u_1, \dots, u_m$  по формулам

$$x_1 = \varphi_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_m = \varphi_m(u_1, \dots, u_m), \quad (u_1, \dots, u_m) \in \tau. \quad (3)$$

Функции (3) осуществляют отображение области  $\tau$  пространства  $(u_1, \dots, u_m)$  на область  $T$  пространства  $(x_1, \dots, x_m)$ . На это отображение накладываются такие же условия I–III, как и в случае двойных и тройных интегралов.

**Теорема 11.** Пусть  $\tau$  и  $T$  — замкнутые кубирируемые области, функция  $f(x_1, \dots, x_m)$  ограничена в области  $T$  и непрерывна всюду, кроме, быть может, некоторого множества точек объема нуль, а отображение (3) удовлетворяет условиям I–III.

Тогда справедливо равенство (формула замены переменных в  $m$ -кратном интеграле)

$$\iint_T \int f(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 dx_2 \dots dx_m = \iint_{\tau} \int f(\varphi_1(u_1, \dots, u_m), \dots, \varphi_m(u_1, \dots, u_m)) \left| \frac{D(x_1, \dots, x_m)}{D(u_1, \dots, u_m)} \right| du_1 \dots du_m. \quad (4)$$

При  $f(x_1, \dots, x_m) = 1$  из формулы (4) получаем выражение для объема тела  $T$  в криволинейных координатах

$$V(T) = \iint_{\tau} \int \left| \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_m)}{D(u_1, u_2, \dots, u_m)} \right| du_1 du_2 \dots du_m.$$

### Контрольные вопросы и задания

- Дайте определения кубирируемого тела в  $m$ -мерном евклидовом пространстве и объема тела.
- Дайте определения интегральных сумм и  $m$ -кратного интеграла.
- Сформулируйте теорему о сведении  $m$ -кратного интеграла к повторному. Сведите интеграл по параллелепипеду  $Q = \{(x_1, \dots, x_m) : |x_1 - a_1| \leq d_1, \dots, |x_m - a_m| \leq d_m\}$  к последовательному вычислению  $m$  определенных интегралов.
- Сведите интеграл по  $m$ -мерному шару  $T = V\{(x_1, \dots, x_m) : x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq R^2\}$  к последовательному вычислению  $m$  определенных интегралов.
- Сформулируйте теорему о замене переменных в  $m$ -кратном интеграле.
- Докажите, что если отображение (3) линейное, т. е.  $\varphi_i(u_1, \dots, u_m) = \sum_{j=1}^m a_{ij} u_j$  и  $\det \|a_{ij}\| \neq 0$ , то это отображение удовлетворяет условиям I–III.
- Напишите формулы для вычисления объема тела в пространстве  $E^m$  с помощью  $m$ -кратного интеграла.

### Примеры решения задач

- Вычислить объем тела  $T$ , заданного неравенствами  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0, x_1 + x_2 + \dots + x_m \leq 1$ .

△ Согласно формуле (2)  $V(T) = \iint_T \int dx_1 dx_2 \dots dx_m$ . Тело  $T$  можно

представить в виде  $T = \{(x_1, \dots, x_m) : (x_1, \dots, x_{m-1}) \in G_{m-1}, 0 \leq x_m \leq 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{m-1}\}$ , где  $G_{m-1}$  — область в пространстве  $E^{m-1}$ , заданная неравенствами  $x_1 \geq 0, \dots, x_{m-1} \geq 0, x_1 + \dots + x_{m-1} \leq 1$ .

Сводя *m*-кратный интеграл по телу  $T$  к повторному, получим

$$\begin{aligned} V(T) &= \iint_{G_{m-1}} \dots \int_{G_{m-1}} dx_1 \dots dx_{m-1} \int_0^{1-x_1-\dots-x_{m-1}} dx_m = \\ &= \iint_{G_{m-1}} \dots \int_{G_{m-1}} (1 - x_1 - \dots - x_{m-1}) dx_1 \dots dx_{m-1}. \end{aligned}$$

Так как область  $G_{m-1}$  можно представить в виде  $G_{m-1} = \{(x_1, \dots, x_{m-1}) : (x_1, \dots, x_{m-2}) \in G_{m-2}, 0 \leq x_{m-1} \leq 1 - x_1 - \dots - x_{m-2}\}$ , где  $G_{m-2}$  — область в пространстве  $E^{m-2}$ , которая задается аналогично  $G_{m-1}$ , то ( $m-1$ )-кратный интеграл по области  $G_{m-1}$  можно свести к повторному таким же образом, как и интеграл по телу  $T$ :

$$\begin{aligned} &\iint_{G_{m-1}} \dots \int_{G_{m-1}} (1 - x_1 - \dots - x_{m-1}) dx_1 \dots dx_{m-1} = \\ &= \iint_{G_{m-2}} \dots \int_{G_{m-2}} dx_1 \dots dx_{m-2} \int_0^{1-x_1-\dots-x_{m-2}} (1 - x_1 - \dots - x_{m-1}) dx_{m-1} = \\ &= \iint_{G_{m-2}} \dots \int_{G_{m-2}} \frac{1}{2!} (1 - x_1 - \dots - x_{m-2})^2 dx_1 \dots dx_{m-2}. \end{aligned}$$

Далее, аналогичным образом можно свести ( $m-2$ )-кратный интеграл по области  $G_{m-2}$  к повторному и т. д. Через  $m-1$  шагов придем к следующему определенному интегралу:

$$\int_0^1 \frac{(1 - x_1)^{m-1}}{(m-1)!} dx_1 = \frac{1}{m!}.$$

Итак,  $V(T) = \frac{1}{m!}$ . ▲

**2.** Даны два материальных тела:  $T_1$  с плотностью  $\rho_1(x, y, z)$  и  $T_2$  с плотностью  $\rho_2(x, y, z)$ . Найти силу  $\mathbf{F}$  притяжения тела  $T_1$  телом  $T_2$ . △ Пусть  $M(x, y, z)$  — произвольная точка тела  $T_1$ , а  $M'(x', y', z')$  — произвольная точка тела  $T_2$ . Введем (бесконечно малые) элементы объема  $dV = dx dy dz$  и  $dV' = dx' dy' dz'$  с центрами в точках  $M$

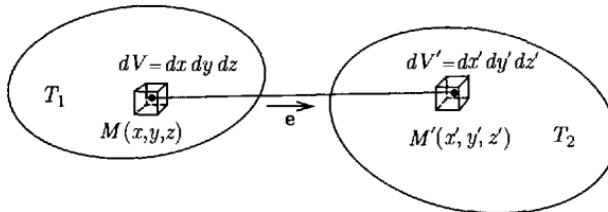


Рис. 52

и  $M'$  (рис. 52). Масса элемента объема  $dV$  равна  $\rho_1(x, y, z) dx dy dz$ , а масса элемента объема  $dV'$  равна  $\rho_2(x', y', z') dx' dy' dz'$ . Силу, с которой первая из этих масс притягивается второй, можно представить в

виде

$$d\mathbf{F} = \gamma \frac{\rho_1(x, y, z) dx dy dz \rho_2(x', y', z') dx' dy' dz'}{\rho^2(M, M')} \mathbf{e},$$

где  $\mathbf{e}$  — единичный вектор, сонаправленный с вектором  $\overrightarrow{MM'}$ . Координаты вектора  $\mathbf{e}$  равны  $\left\{ \frac{x' - x}{\rho(M, M')}; \frac{y' - y}{\rho(M, M')}; \frac{z' - z}{\rho(M, M')} \right\}$ .

Так как  $\rho(M, M') = [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{1/2}$ , то составляющую силы  $d\mathbf{F}$  по оси  $Ox$  можно записать в виде

$$dF_x = \gamma \frac{\rho_1(x, y, z) \rho_2(x', y', z') (x' - x)}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} dx dy dz dx' dy' dz'. \quad (5)$$

Чтобы найти составляющую по оси  $Ox$  силы, с которой тело  $T_1$  притягивается телом  $T_2$ , нужно просуммировать выражения (5) по всем элементам объемов тел  $T_1$  и  $T_2$ , или, более точно, нужно проинтегрировать по телам  $T_1$  и  $T_2$ . Таким образом, составляющая  $F_x$  искомой силы  $\mathbf{F}$  выражается 6-кратным интегралом:

$$F_x = \gamma \iiint_{T_1 \times T_2} \frac{\rho_1(x, y, z) \rho_2(x', y', z') (x' - x)}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{3/2}} dx dy dz dx' dy' dz'.$$

Говорят, что этот интеграл берется по произведению тел  $T_1$  и  $T_2$ . Аналогично выражаются составляющие  $F_y$  и  $F_z$  силы  $\mathbf{F}$ .  $\blacktriangle$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

40. Вычислите  $m$ -кратный интеграл:

a)  $\iint_T \int (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2) dx_1 dx_2 \dots dx_m$ , где  $T$  —  $m$ -мерный куб, заданный неравенствами  $0 \leq x_k \leq 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ ;

b)  $\iint_T \int \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_m} dx_1 dx_2 \dots dx_m$ , где  $T$  —  $m$ -мерная пирамида, заданная неравенствами  $x_1 + x_2 + \dots + x_m \leq 1$ ,  $x_k \geq 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

41. Найдите объем  $m$ -мерного параллелепипеда, ограниченного плоскостями  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = \pm h_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), если  $\Delta = \det \|a_{ki}\|_{m,m} \neq 0$ .

42. Найдите объем  $m$ -мерной пирамиды, заданной неравенствами  $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \dots + \frac{x_m}{a_m} \leq 1$ ,  $x_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ),  $a_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

43. Найдите объем 5-мерного шара радиуса  $R$ .

# ГЛАВА XIII

## КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

### § 1. Криволинейные интегралы первого рода

Основные понятия и теоремы

#### 1. Определение криволинейного интеграла первого рода.

Пусть кривая  $L$  на координатной плоскости  $Oxy$  задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (1)$$

Напомним, что  $L$  называется *простой* (плоской) *незамкнутой кривой*, если функции  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$  непрерывны на  $[\alpha, \beta]$  и различным значениям параметра  $t$  из сегмента  $[\alpha, \beta]$  соответствуют различные точки  $M(\varphi(t), \psi(t))$ . Если точка  $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$  совпадает с точкой  $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ , а остальные точки не являются кратными, то  $L$  называется *простой замкнутой кривой*. Простая кривая  $L$  называется *спрямляемой*, если существует предел длин ломаных, вписанных в кривую, при  $\Delta t \rightarrow 0$  (этот предел называется *длиной кривой  $L$* ). Аналогичные определения имеют место для пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями в координатном пространстве  $Oxyz$ .

Пусть  $L$  — простая, спрямляемая (замкнутая или незамкнутая) кривая, заданная уравнениями (1), и пусть на кривой  $L$  определена функция  $f(x, y)$ . Разобьем сегмент  $[\alpha, \beta]$  на  $n$  частей точками  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ . При этом кривая  $L$  разобьется на  $n$  частей точками  $M_0, M_1, \dots, M_n$ . Обозначим через  $\Delta l_k$  длину дуги  $M_{k-1}M_k$ , выберем на каждой дуге  $M_{k-1}M_k$  некоторую точку  $N_k(\xi_k, \eta_k)$  и составим *интегральную сумму*

$$I(M_k, N_k) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta l_k.$$

Пусть  $\Delta l = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta l_k$ .

**Определение.** Число  $I$  называется *пределом интегральных сумм* при  $\Delta l \rightarrow 0$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что для любого разбиения кривой  $L$ , у которого  $\Delta l < \delta$ , и для любого выбора промежуточных точек  $N_k$  выполняется неравенство

$$|I(M_k, N_k) - I| < \varepsilon.$$

Если существует  $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} I(M_k, N_k) = I$ , то число  $I$  называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции  $f(x, y)$  по кривой  $L$ .

и обозначается

$$\int_L f(x, y) dl. \quad (2)$$

Если кривая  $L$  — незамкнутая и точки  $A$  и  $B$  — ее концы, то криволинейный интеграл первого рода обозначается также следующим образом:  $\int_{AB} f(x, y) dl$ .

Из определения следует, что криволинейный интеграл первого рода не зависит от того, в каком направлении (от  $A$  к  $B$  или от  $B$  к  $A$ ) пробегается кривая  $L$ , т. е.

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl.$$

Если  $f(x, y) = 1$ , то  $\int_{AB} dl$  равен длине  $l$  кривой  $AB$ :  $\int_{AB} dl = l$ .

Аналогично вводится криволинейный интеграл первого рода для пространственной кривой  $L$ , заданной параметрически уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (3)$$

**2. Вычисление криволинейного интеграла первого рода с помощью определенного интеграла.** Простая кривая  $L$ , заданная уравнениями (1), называется *гладкой* (*кусочно гладкой*), если функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  имеют непрерывные (кусочно непрерывные) производные, одновременно не обращающиеся в нуль на  $[\alpha, \beta]$  (на  $[\alpha, \beta]$ , за исключением конечного числа точек). Функция  $f(M) = f(x, y)$ , определенная на кривой  $L$ , называется *непрерывной вдоль кривой  $L$* , если  $\forall M_0 \in L$

$$\lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in L}} f(M) = f(M_0).$$

Если это условие выполнено в каждой точке кривой, за исключением конечного числа точек, в которых функция имеет разрывы первого рода, то функция  $f(M)$  называется *кусочно непрерывной вдоль кривой  $L$* .

**Теорема 1.** Если  $L$  — кусочно гладкая кривая, заданная уравнениями (1), и функция  $f(x, y)$  кусочно непрерывна вдоль кривой  $L$ , то существует криволинейный интеграл (2) и справедливо равенство

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \quad (4)$$

**Замечание.** Предположим, что  $f(x, y)$  непрерывна вдоль кривой  $L$ . Тогда имеют место следующие утверждения.

1°. Если кривая  $L$  задана уравнением  $y = y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , и  $y(x)$  имеет непрерывную производную на  $[a, b]$ , то существует интеграл (2) и справедливо равенство

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx. \quad (5)$$

2°. Если кривая  $L$  задана в полярных координатах уравнением  $r = r(\varphi)$ ,  $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$ , и  $r(\varphi)$  имеет непрерывную производную на  $[\varphi_1, \varphi_2]$ , то существует интеграл (2) и имеет место равенство

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi. \quad (6)$$

3°. Для гладкой пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями (3), справедлива формула

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_a^\beta f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt. \quad (7)$$

4°. Криволинейные интегралы первого рода обладают свойствами, аналогичными свойствам определенного интеграла: линейность; аддитивность; модуль интеграла не превосходит интеграла от модуля функции. Справедлива также формула среднего значения.

**3. Физические приложения криволинейных интегралов первого рода.** Пусть  $L$  — материальная плоская кривая с линейной плотностью  $\rho(x, y)$ . Тогда справедливы следующие формулы:

а)  $m = \int_L \rho(x, y) dl$  — масса кривой;

б)  $M_x = \int_L y \rho(x, y) dl$ ,  $M_y = \int_L x \rho(x, y) dl$  — статические моменты кривой  $L$  относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ ;

в)  $x_0 = \frac{M_y}{m}$ ,  $y_0 = \frac{M_x}{m}$  — координаты центра тяжести кривой;

г)  $I_0 = \int_L (x^2 + y^2) \rho(x, y) dl$  — момент инерции кривой относительно начала координат (полярный момент инерции кривой);

д)  $I_x = \int_L y^2 \rho(x, y) dl$ ,  $I_y = \int_L x^2 \rho(x, y) dl$  — моменты инерции кривой относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ ;

е)  $\mathbf{F} = \{F_x, F_y\}$  — сила притяжения материальной точки  $M_0(x_0, y_0)$  массы  $m_0$  материальной кривой  $L$ , где

$$F_x = \gamma m_0 \int_L \frac{\rho(x, y) \cos \varphi}{r^2} dl, \quad F_y = \gamma m_0 \int_L \frac{\rho(x, y) \sin \varphi}{r^2} dl,$$

$\mathbf{r} = \{x_0 - x, y_0 - y\}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $\varphi$  — угол между вектором  $\mathbf{r}$  и осью  $Ox$ ,  $\gamma$  — гравитационная постоянная.

В случае пространственной материальной кривой справедливы аналогичные формулы для вычисления координат центра тяжести, статических моментов, полярного момента инерции, а также силы притяжения материальной точки.

### Контрольные вопросы и задания

- 1 Какая плоская (пространственная) кривая называется а) простой незамкнутой (замкнутой), б) спрямляемой, в) гладкой, г) кусочно гладкой?
- 2 Является ли кривая  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 3\pi$ , простой? Является ли кривая  $x = 2t - t^2$ ,  $y = 3t - t^3$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ , гладкой, кусочно гладкой?
- 3 Напишите параметрические уравнения плоской кривой, заданной а) в декартовых координатах, б) в полярных координатах
- 4 Дайте определение функции а) непрерывной вдоль кривой, б) кусочно непрерывной вдоль кривой
- 5 Сформулируйте определения а) интегральных сумм для криволинейного интеграла первого рода, б) предела этих интегральных сумм, в) криволинейного интеграла первого рода
- 6 Зависит ли от направления обхода кривой а) криволинейный интеграл первого рода, б) какая-нибудь его интегральная сумма?
- 7 Составьте интегральную сумму функции  $f(x, y) = x + y$ , соответствующую разбиению отрезка прямой  $y = x$  при  $0 \leq x \leq 1$  на  $n$  равных частей и выбору промежуточных точек  $N_k \left( \frac{\sqrt{2}k}{n}, \frac{\sqrt{2}k}{n} \right)$ . Вычислите предел этих интегральных сумм при  $n \rightarrow \infty$
- 8 Сформулируйте теорему о существовании криволинейного интеграла первого рода и вычислении его с помощью определенного интеграла. Напишите соответствующие формулы для а) плоской кривой, заданной параметрически, в декартовых координатах, в полярных координатах, б) пространственной кривой, заданной параметрически
- 9 Вычислите интеграл  $\int_L (x + y) dl$ , где  $L$  — отрезок прямой  $y = x$  при  $0 \leq x \leq 1$ , и сравните результат с пределом интегральных сумм задания 7
- 10 Какие физические приложения криволинейного интеграла первого рода вы знаете?
- 11 В случае плоской (пространственной) материальной кривой напишите формулы для вычисления а) координат центра тяжести, б) моментов инерции относительно осей координат, в) силы притяжения точки  $M_0$  массы  $m_0$  материальной кривой
- 12 Для криволинейного интеграла первого рода сформулируйте а) свойства линейности и аддитивности, б) теорему об оценке модуля интеграла, в) теорему о формуле среднего значения

### Примеры решения задач

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода  $\int_L (x^{4/3} + y^{4/3}) dl$ , где кривая  $L$  — астроида  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$
- $\Delta$  Запишем параметрические уравнения астроиды  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Так как  $x' = -3a \cos^2 t \sin t$ ,  $y' = 3a \sin^2 t \cos t$ , то  $x'^2 + y'^2 = 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t$
- Отметим, что  $x'^2 + y'^2 = 0$  в четырех точках  $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ , т. е. астроида является кусочно гладкой кривой

Для вычисления криволинейного интеграла применим формулу  
(4) Получим

$$\begin{aligned} \int_L (x^{4/3} + y^{4/3}) dl &= \int_0^{2\pi} a^{4/3} (\cos^4 t + \sin^4 t) 3a |\cos t \sin t| dt = \\ &= 12a^{7/3} \int_0^{\pi/2} (\cos^5 t \sin t + \sin^5 t \cos t) dt = \\ &= 12a^{7/3} \left[ -\frac{\cos^6 t}{6} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{\sin^6 t}{6} \Big|_0^{\pi/2} \right] = 4a^{7/3}. \blacksquare \end{aligned}$$

2. Вычислить криволинейный интеграл первого рода  $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$ ,

где  $L$  — кривая, заданная уравнением  $(x^2 + y^2)^{3/2} = a^2(x^2 - y^2)$ .  
 $\Delta$  Перейдем к полярным координатам  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ .  
Уравнение кривой  $L$  примет вид

$$r = a^2 \cos 2\varphi, \quad \varphi \in \Phi = \{\varphi \mid -\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4, 3\pi/4 \leq \varphi \leq 5\pi/4\}.$$

Для вычисления интеграла применим формулу (6). Так как

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r = a^2 \cos 2\varphi, \quad \sqrt{r^2 + r'^2} = a^2 \sqrt{1 + 3 \sin^2 2\varphi},$$

то

$$\begin{aligned} \int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl &= \int_{\varphi \in \Phi} a^4 \cos 2\varphi \sqrt{1 + 3 \sin^2 2\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{2a^4}{2\sqrt{3}} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1 + 3 \sin^2 2\varphi} d(\sqrt{3} \sin 2\varphi) = 2a^4 + \frac{a^4}{\sqrt{3}} \ln(\sqrt{3} + 2). \blacksquare \end{aligned}$$

3. Найти массу  $m$  материальной кривой  $L$ , заданной уравнением  $y = \ln x$ , где  $1 \leq x \leq e$ , если линейная плотность ее в каждой точке пропорциональна квадрату абсциссы, т. е.  $\rho(x, y) = kx^2$ .

$\Delta$  По формуле для массы  $m$  имеем  $m = \int_L kx^2 dl$ . Для вычисления криволинейного интеграла воспользуемся равенством (5). Так как

$$\sqrt{1 + y'^2}(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 + x^2}{x}, \text{ то}$$

$$m = \int_1^e kx^2 \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} dx = \frac{k}{3} (1 + x^2)^{3/2} \Big|_1^e = \frac{k}{3} [(1 + e^2)^{3/2} - 2\sqrt{2}]. \blacksquare$$

4. Вычислить криволинейный интеграл  $I = \int_L (x + y) dl$ , где  $L$  — меньшая часть окружности

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ y = x, \end{cases}$$

ограниченная точками  $A(0, 0, R)$  и  $B(R/2, R/2, R/\sqrt{2})$ .

Δ Запишем параметрические уравнения данной части окружности в виде  $x = t$ ,  $y = t$ ,  $z = \sqrt{R^2 - 2t^2}$ ,  $0 \leq t \leq R/2$ . Тогда  $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} =$

$$= \sqrt{1 + 1 + \frac{4t^2}{R^2 - 2t^2}} = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 - 2t^2}}, \text{ и по формуле (7) находим}$$

$$I = \int_0^{R/2} 2t \frac{R\sqrt{2} dt}{\sqrt{R^2 - 2t^2}} = -\frac{R\sqrt{2}}{2} \int_0^{R/2} \frac{d(R^2 - 2t^2)}{\sqrt{R^2 - 2t^2}} = R^2(\sqrt{2} - 1). \blacksquare$$

5. Найти координаты  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  центра тяжести первого полувитка материальной винтовой линии  $L$ , заданного уравнениями  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ , если ее линейная плотность постоянна и равна  $\rho$ .

Δ Масса  $m$  равна  $\int_L \rho dl$ . Вычислим этот интеграл по формуле (7). Так

как  $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ , то  $m = \rho \int_0^\pi \sqrt{a^2 + b^2} dt = \pi \rho \sqrt{a^2 + b^2}$ . Значения  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  находим по формулам

$$x_0 = \frac{\rho}{m} \int_L x dl, \quad y_0 = \frac{\rho}{m} \int_L y dl, \quad z_0 = \frac{\rho}{m} \int_L z dl.$$

Каждый из этих интегралов вычисляем с помощью равенства (7):

$$x_0 = \frac{\rho}{m} \int_0^\pi a \cos t \sqrt{a^2 + b^2} dt = 0, \quad y_0 = \frac{\rho}{m} \int_0^\pi a \sin t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \frac{2a}{\pi},$$

$$z_0 = \frac{\rho}{m} \int_0^\pi b t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \frac{b\pi}{2}. \blacksquare$$

6. Найти момент инерции  $I$  относительно диаметра окружности  $L$ , заданной уравнением  $x^2 + y^2 = a^2$ , если ее линейная плотность есть  $\rho = 1$ .

Δ Зафиксируем какой-нибудь диаметр окружности. Имеем

$$I = \int_L d^2(x, y) dl,$$

где  $d(x, y)$  — расстояние от точки  $M(x, y) \in L$  до диаметра. Перейдем к полярным координатам:  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Тогда уравнение окружности  $L$  примет вид  $r = a$ . Пусть диаметр лежит на прямой, обра-

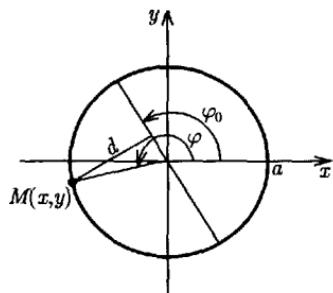


Рис. 53

зующий угол phi\_0 с осью Ox, где phi\_0 in [0, pi] (рис. 53). При этом

$$d(x, y) = d(a \cos \varphi; a \sin \varphi) = a |\sin(\varphi - \varphi_0)|.$$

Пользуясь формулой (6) и учитывая, что  $\sqrt{r^2 + r'^2} = a$ , находим

$$I = \int_0^{2\pi} a^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0) a d\varphi = a^3 \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\varphi - 2\varphi_0) \right) d\varphi = \pi a^3. \blacksquare$$

7. Пусть  $\mathbf{c} = \{u(x, y), v(x, y)\}$  — скорость плоского потока несжимаемой жидкости в точке  $M(x, y)$ . Найти количество  $Q$  жидкости, вытекающей за единицу времени из области  $G$ , ограниченной гладким контуром  $L$ .

Для разобъем кривую  $L$  на  $n$  частичных дуг. Пусть  $\mathbf{n}_k$  — единичный вектор внешней нормали к кривой  $L$  в точке  $N_k(\xi_k, \eta_k)$  (т. е. вектор  $\mathbf{n}_k$  направлен во вне области  $G$ ),  $|\Delta Q_k|$  — количество жидкости, вышедшей (вашедшей) за единицу времени через дугу длины  $\Delta l_k$  из области (в область)  $G$  (рис. 54).

Так как  $|\Delta Q_k|$  есть площадь параллелограмма со сторонами  $\Delta l_k$  и  $|\mathbf{c}_k|$ , где  $\mathbf{c}_k = \{u_k, v_k\}$ ,  $u_k = u(\xi_k, \eta_k)$ ,  $v_k = v(\xi_k, \eta_k)$ , то  $\Delta Q_k = \Delta l_k (\mathbf{c}_k \mathbf{n}_k)$ . Если скалярное произведение  $(\mathbf{c}_k \mathbf{n}_k)$

положительно, то жидкость вытекает из области  $G$  ( $\Delta Q_k > 0$ ), а если отрицательно, то втекает в  $G$  ( $\Delta Q_k < 0$ ). Далее, составим сумму

$\sum_{k=1}^n (\mathbf{c}_k \mathbf{n}_k) \Delta l_k$  и перейдем к пределу при  $\max \{\Delta l_k\} \rightarrow 0$ . Получим

$Q = \int_L (\mathbf{c} \mathbf{n}) dl$ , где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали в точке  $M(x, y) \in L$ .  $\blacktriangle$

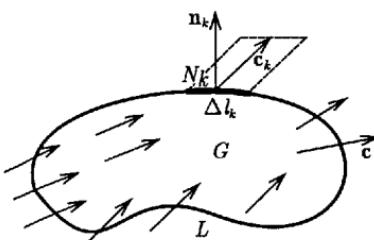


Рис. 54

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Вычислите криволинейные интегралы первого рода:

а)  $\int_L (x + y) dl$ , где  $L$  — граница треугольника с вершинами  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 1)$ ,  $C(0, 0)$ ;

б)  $\int_L y^2 dl$ , где  $L$  — арка циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(t - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ;

в)  $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} dl$ , где  $L$  — граница кругового сектора  $\{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq \pi/4\}$ ,  $r$  и  $\varphi$  — полярные координаты;

г)  $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$ , где  $L$  — окружность  $x^2 + y^2 = ax$ ;

д)  $\int_L z dl$ , где  $L$  — коническая винтовая линия  $x = t \cos t$ ,  $y = t \sin t$ ,  $z = t$ ,

$0 \leq t \leq t_0$ ;

e)  $\int_L x^2 dl$ , где  $L$  — окружность  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$

2. Найдите массу материальной кривой  $L$  с линейной плотностью  $\rho(x, y, z)$ , если:

a)  $L: x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t, z = e^{-t}, 0 \leq t \leq \ln 3; \rho(x, y, z) = \rho_0$ ;

б)  $L: x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3$  от точки  $O(0, 0, 0)$  до точки  $A(3, 3, 2)$ ,  $\rho(x, y, z) = \rho_0$ ;

в)  $L$  — половина дуги эллипса  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ , для которой  $y < 0$ ,  $\rho(x, y) = -y$ ;

г)  $L: x = t, y = \frac{1}{2}t^2, z = \frac{1}{3}t^3, 0 \leq t \leq 1, \rho(x, y, z) = \sqrt{2y}$ .

3. Найдите координаты центра тяжести:

а) однородной меньшей дуги окружности  $x^2 + y^2 = 4$ , соединяющей точки  $A(2, 0)$  и  $B(-1, \sqrt{3})$ ;

б) контура однородного сферического треугольника  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ .

4. Найдите статические моменты дуги  $L$  астроиды  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, x \geq 0, y \geq 0$ , относительно осей координат, если ее линейная плотность  $\rho(x, y) = 1$ .

5. Найдите полярный момент инерции однородной кривой  $L$  плотности  $\rho_0$  относительно точки  $O(0, 0)$ , если:

а)  $L$  — контур квадрата  $\{(x, y) : \max(|x|, |y|) = a\}$ ;

б)  $L$  — контур правильного однородного треугольника плотности  $\rho_0$  с вершинами в точках, заданных полярными координатами  $P(a, 0), Q(a, 2\pi/3), R(a, 4\pi/3)$ .

6. Найдите моменты инерции относительно осей координат одного витка однородной винтовой линии  $x = \cos t, y = \sin t, z = t/(2\pi), 0 \leq t \leq 2\pi$ , если ее плотность равна  $\rho_0$ .

7. Найдите проекции на оси координат силы, с которой материальная однородная полуокружность  $x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0$ , массы  $M$  притягивает материальную точку  $O(0, 0)$  массы  $m$ .

## § 2. Криволинейные интегралы второго рода

### Основные понятия и теоремы

#### 1. Определение криволинейного интеграла второго рода.

Пусть  $AB$  — простая спрямляемая незамкнутая кривая, заданная параметрически:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta \\ (A &= A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)), \quad B = B(\varphi(\beta), \psi(\beta))). \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть на кривой  $AB$  заданы две функции,  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ . Разобьем сегмент  $[\alpha, \beta]$  на  $n$  частей точками  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ . При этом кривая  $AB$  разобьется на  $n$  частей точками  $A = M_0, M_1, M_2, \dots$

...,  $M_n = B$  в направлении от  $A$  к  $B$ . Пусть  $(x_k, y_k)$  — координаты точки  $M_k$ ,  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ,  $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ ,  $\Delta l_k$  — длина дуги  $M_{k-1}M_k$ ,  $\Delta l = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta l_k$ . На каждой дуге  $M_{k-1}M_k$  возьмем некоторую точку  $N_k(\xi_k, \eta_k)$  и составим две интегральные суммы:

$$I_1(M_k, N_k) = \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k, \quad I_2(M_k, N_k) = \sum_{k=1}^n Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k.$$

**Определение.** Число  $I_m$  ( $m = 1, 2$ ) называется *пределом интегральных сумм*  $I_m(M_k, N_k)$  при  $\Delta l \rightarrow 0$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что для любого разбиения кривой, у которого  $\Delta l < \delta$ , и для любого выбора промежуточных точек  $N_k$  выполняется неравенство

$$|I_m(M_k, N_k) - I_m| < \varepsilon.$$

Если существует  $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} I_m(M_k, N_k) = I_m$ , то он называется *криволинейным интегралом второго рода* и обозначается следующим образом:

$$I_1 = \int\limits_{AB} P(x, y) dx, \quad I_2 = \int\limits_{AB} Q(x, y) dy.$$

Сумма  $I_1 + I_2$  называется *общим криволинейным интегралом второго рода* и обозначается так:

$$\int\limits_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (2)$$

Из определения криволинейного интеграла второго рода следует, что при изменении направления обхода кривой  $AB$  меняется и знак интеграла, т. е.

$$\int\limits_{AB} P(x, y) dx = - \int\limits_{BA} P(x, y) dx, \quad \int\limits_{AB} Q(x, y) dy = - \int\limits_{BA} Q(x, y) dy.$$

Если  $AB$  — замкнутая кривая (замкнутый контур), т. е. точка  $A$  совпадает с точкой  $B$ , то для нее можно указать два направления обхода от  $A$  к  $B$ . Если область, лежащая внутри контура, остается слева по отношению к движущейся по контуру точке, то такое направление обхода кривой  $L$  назовем *положительным*, а противоположное ему — *отрицательным*.

Интеграл (2) по замкнутому контуру  $L$  в положительном направлении обозначают так:  $\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ .

Аналогично вводится криволинейный интеграл второго рода

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \quad (3)$$

для пространственной кривой, заданной параметрически,

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), & y &= \psi(t), & z &= \chi(t), & \alpha \leq t \leq \beta \\ (A &= A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha)), & B &= B(\varphi(\beta), \psi(\beta), \chi(\beta))). \end{aligned} \quad (4)$$

## 2. Вычисление криволинейного интеграла второго рода с помощью определенного интеграла.

**Теорема 2.** Если  $AB$  — кусочно гладкая кривая, заданная уравнениями (1), а функции  $P = P(x, y)$  и  $Q = Q(x, y)$  кусочно непрерывны вдоль кривой  $AB$ , то существует интеграл (2) и справедливо равенство

$$\int\limits_{AB} P dx + Q dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)] dt. \quad (5)$$

Для пространственной кривой  $AB$ , заданной уравнениями (4), справедлива аналогичная теорема, и интеграл (3) вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \int\limits_{AB} P dx + Q dy + R dz &= \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\varphi'(t) + \\ &+ Q(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\psi'(t) + R(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\chi'(t)] dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Если кривая  $AB$  задана уравнением  $y = y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , и имеет кусочно-непрерывную производную, а функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  кусочно непрерывны вдоль кривой  $AB$ , то существует интеграл (2) и имеет место равенство

$$\int\limits_{AB} P dx + Q dy = \int\limits_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)] dx. \quad (7)$$

**Замечание.** Криволинейные интегралы второго рода обладают свойствами линейности и аддитивности, однако теорема об оценке модуля интеграла и формула среднего значения неверны.

## 3. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.

**Теорема 3.** Пусть  $AB$  — кусочно гладкая кривая, заданная уравнениями (1), функции  $P = P(x, y)$  и  $Q = Q(x, y)$  кусочно непрерывны вдоль кривой  $AB$  и  $\tau = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$  — единичный касательный вектор к кривой  $AB$  в точке  $M(x, y)$ , причем направление  $\tau$  соответствует направлению движения от  $A$  к  $B$  ( $\alpha$  — угол между вектором  $\tau$  в точке  $M(x, y)$  и осью  $Ox$ ).

Тогда имеет место равенство

$$\int\limits_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int\limits_{AB} (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) dl = \int\limits_{AB} (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}) dl, \quad (8)$$

где  $\mathbf{a} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ .

**Замечание.** Для пространственной кривой (4) справедлива аналогичная теорема, а формула (8) имеет вид

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \int\limits_{AB} (\mathbf{P} \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dl = \int\limits_{AB} (\mathbf{a} \tau) dl, \quad (9)$$

где  $\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ ,  $\tau = \cos \alpha \cdot \mathbf{i} + \cos \beta \cdot \mathbf{j} + \cos \gamma \cdot \mathbf{k}$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$  — углы между касательным вектором  $\tau$  к кривой в точке  $M(x, y, z)$  и осями  $Ox, Oy, Oz$ .

#### 4. Физические приложения криволинейных интегралов второго рода.

а) Работа силы  $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$  при перемещении материальной точки массы 1 из точки  $A$  в точку  $B$  вдоль кривой  $AB$  вычисляется по формуле

$$\int\limits_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (10)$$

Таким же образом вычисляется работа силы при перемещении материальной точки вдоль пространственной кривой.

б) Пусть  $\mathbf{c} = \{u(x, y), v(x, y)\}$  — скорость плоского потока жидкости в точке  $M(x, y)$  (см. пример 7 из § 1). Тогда количество  $Q$  жидкости, вытекающей за единицу времени из области  $G$ , равно

$$Q = \int\limits_L (\mathbf{c} \mathbf{n}) dl,$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к кривой  $L$  в точке  $M(x, y)$ . Если направление касательного вектора  $\tau$  к кривой  $L$  соответствует положительному направлению обхода кривой и  $\alpha$  — угол между вектором  $\tau$  и осью  $Ox$ , то

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \left\{ \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right), \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) \right\} = \{\sin \alpha, -\cos \alpha\}, \\ (\mathbf{c} \mathbf{n}) &= u \sin \alpha - v \cos \alpha, \end{aligned}$$

и для величины  $Q$ , используя формулу (8), получаем выражение через криволинейный интеграл второго рода:

$$Q = \int\limits_L (-v \cos \alpha + u \sin \alpha) dl = \oint\limits_L -v dx + u dy.$$

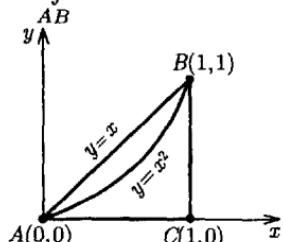
#### Контрольные вопросы и задания

- Сформулируйте определения: а) интегральных сумм для криволинейного интеграла второго рода; б) предела этих интегральных сумм; в) криволинейного интеграла второго рода.

2. Зависит ли от направления обхода кривой: а) криволинейный интеграл второго рода; б) какая-нибудь его интегральная сумма?
3. Для криволинейного интеграла второго рода  $\int\limits_{AB} y dx + x dy$ , где кривая  $AB$  задана уравнением  $y = 2x$ ,  $A(-1, -2)$ ,  $B(2, 4)$ , составьте интегральную сумму, соответствующую разбиению кривой  $AB$  на  $n$  равных частей и выбору промежуточных точек  $N_k \left( \frac{3k-n}{n}, \frac{6k-2n}{n} \right)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Вычислите предел интегральных сумм при  $n \rightarrow \infty$ .
4. Сформулируйте теорему о существовании криволинейного интеграла второго рода и сведении его к определенному интегралу. Напишите соответствующие формулы для: а) плоской кривой, заданной параметрически; в декартовых координатах; б) пространственной кривой, заданной параметрически.
5. Какое направление обхода замкнутой кривой принимают за положительное?
6. Каков смысл обозначения  $\int\limits_L P dx + Q dy$ ?
7. Сформулируйте теорему о связи между криволинейными интегралами первого и второго рода.
8. Криволинейный интеграл второго рода  $\int\limits_{AB} y dx + x dy$ , где кривая  $AB$  задана уравнением  $y = 2x$ ,  $A(-1, -2)$ ,  $B(2, 4)$ , сведите к криволинейному интегралу первого рода и вычислите его. Сравните результат с результатом задания 3.
9. Приведите примеры физических приложений криволинейных интегралов второго рода.
10. Напишите формулу для вычисления работы силы при перемещении материальной точки вдоль кривой.
11. Сформулируйте свойства линейности и аддитивности криволинейных интегралов второго рода.

### Примеры решения задач

1. Вычислить криволинейный интеграл второго рода  $I = \int\limits_{AB} 2xy dx + x^2 dy$  по трем кривым, соединяющим точки  $A(0, 0)$  и  $B(1, 1)$ , изображенным на рис. 55.



△ 1) Пусть кривая  $AB$  задана уравнением  $y = x^2$ . Тогда  $y' = 2x$ , и, пользуясь формулой (7), получим

$$I_1 = \int\limits_0^1 2x \cdot x dx + x^2 dx = \int\limits_0^1 3x^2 dx = x^3 \Big|_0^1 = 1.$$

Рис. 55 2) Для кривой  $AB$ , заданной уравнением  $y = x^2$ , имеем  $y' = 2x$ , откуда

$$I_2 = \int\limits_0^1 2x \cdot x^2 dx + x^2 \cdot 2x dx = \int\limits_0^1 4x^3 dx = x^4 \Big|_0^1 = 1.$$

3) Интегрируя по ломаной  $ACB$ , воспользуемся свойством аддитивности интеграла и представим его как сумму двух интегралов — по отрезкам  $AC$  и  $CB$ . Так как для отрезка  $AC$   $y = 0$ ,  $y' = 0$  и  $0 \leq x \leq 1$ , то по формуле (7) получаем

$$\int\limits_{AC} 2xy \, dx + x^2 \, dy = \int\limits_0^1 2x \cdot 0 \, dx + x^2 \cdot 0 \, dx = 0.$$

Для отрезка  $CB$  имеем  $x = x(y) = 1$ ,  $x' = 0$  и  $0 \leq y \leq 1$ ; поэтому

$$\int\limits_{CB} 2xy \, dx + x^2 \, dy = \int\limits_0^1 2 \cdot 1 \cdot y \cdot 0 \, dy + 1^2 \, dy = y \Big|_0^1 = 1.$$

Следовательно,

$$I_3 = \int\limits_{AC} 2xy \, dx + x^2 \, dy + \int\limits_{CB} 2xy \, dx + x^2 \, dy = 1.$$

Таким образом,  $I_1 = I_2 = I_3 = 1$ . Этот результат не случаен. Можно доказать, что значение данного интеграла  $I$  не зависит от кривой, соединяющей точки  $A$  и  $B$ . Вопрос о том, в каких случаях криволинейный интеграл второго рода не зависит от кривой, соединяющей две данные точки, будет рассмотрен в § 3. ▲

2. Вычислить криволинейный интеграл второго рода  $I = \int\limits_{AB} (4x + y) \, dx + (x + 4y) \, dy$ , где кривая  $AB$  задана уравнением  $y = x^4$ ,  $A(1, 1)$ ,  $B(-1, 1)$ .

Δ Вычислим интеграл, пользуясь формулой (7). Учитывая, что  $y = x^4$ ,  $dy = 4x^3 \, dx$  и  $x$  изменяется от 1 до -1, получаем  $I = - \int\limits_{-1}^1 (4x + x^4 + (x + 4x^4)4x^3) \, dx = -2$ . ▲

3. Вычислить криволинейный интеграл второго рода  $\oint_L (x + y) \, dx + (x - y) \, dy$ , где  $L$  — окружность  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ .

Δ Запишем параметрические уравнения данной окружности:  $x = 1 + 2 \cos t$ ,  $y = 1 + 2 \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Вычисляем интеграл, пользуясь формулой (5). Так как  $dx = -2 \sin t \, dt$ ,  $dy = 2 \cos t \, dt$ , то

$$\begin{aligned} \oint_L (x + y) \, dx + (x - y) \, dy &= \int\limits_0^{2\pi} (2 + 2 \cos t + 2 \sin t)(-2 \sin t) \, dt + \\ &\quad + (2 \cos t - 2 \sin t)2 \cos t \, dt = \\ &= \int\limits_0^{2\pi} (-4 \sin t - 8 \sin t \cos t + 4 \cos 2t) \, dt = 0. \end{aligned}$$

4. Вычислить криволинейный интеграл второго рода  $I = \int\limits_L (y^2 -$

$-z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz$ , где  $L$  — кривая  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^3$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , пробегаемая в направлении возрастания параметра  $t$ .

Δ Вычислим интеграл по формуле (6). Так как  $dx = dt$ ,  $dy = 2t dt$ ,  $dz = 3t^2 dt$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , то

$$I = \int_0^1 (t^4 - t^6 + 2t^5 \cdot 2t - t^2 \cdot 3t^2) dt = \frac{1}{35}. \blacksquare$$

5. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \oint_L (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$$

вдоль замкнутого контура  $L$ , являющегося границей части сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , расположенной в I октанте:  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ , причем направление обхода контура таково, что в плоскости  $Oxy$  движение происходит от точки  $A(1, 0, 0)$  к точке  $B(0, 1, 0)$ .

Δ Контур  $L$  состоит из трех кривых,  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ , каждая из которых является дугой единичной окружности, лежащей соответственно в

координатной плоскости  $Oxy$ ,  $Oyz$ ,  $Oxz$ . Поэтому  $I = \sum_{k=1}^3 I_k$ , где  $I_k =$   
 $= \int_{l_k} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$ .

Найдем интеграл  $I_1$  по кривой  $l_1$ . Так как кривая  $l_1$  лежит в плоскости  $Oxy$ , то  $z = 0$ ,  $dz = 0$  и  $I_1 = \int_{l_1} y^2 dx - x^2 dy$ , где  $l_1$ :  $x^2 + y^2 = 1$ ,

$x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ . Запишем параметрические уравнения  $l_1$ :  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ . По формуле (5) получим

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} (-\sin^3 t - \cos^3 t) dt = -2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 t dt = \\ = 2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) d(\cos t) = 2 \left( \cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{4}{3}.$$

Точно так же вычисляются интегралы  $I_2$  и  $I_3$ . При этом  $I_1 = I_2 = I_3 = -4/3$ . Следовательно,  $I = -4$ .  $\blacksquare$

6. Найти магнитную индукцию  $\mathbf{B} = \{B_x, B_y, B_z\}$  магнитного поля, создаваемого током  $I$ , протекающим по замкнутому проводнику  $L$ , в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ .

Δ Рассмотрим произвольное разбиение кривой  $L$  на малые дуги  $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}M_n$  такие, что направление по дуге кривой от точки  $M_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1})$  к точке  $M_k(x_k, y_k, z_k)$  совпадает с направлением тока. На дуге  $M_{k-1}M_k$  выберем некоторую промежуточную точку  $N_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ . Каждую из дуг  $M_{k-1}M_k$  заменим прямолинейным отрезком. Согласно закону Био–Савара электрический ток  $I$ ,

протекающий по отрезку  $M_{k-1}M_k$ , создает магнитное поле, индукция которого в точке  $M_0$  равна

$$\Delta \mathbf{B}_k = \{\Delta B_{kx}, \Delta B_{ky}, \Delta B_{kz}\} = \frac{\gamma I}{r_k^3} [\overrightarrow{M_{k-1}M_k} \cdot \mathbf{r}_k],$$

где  $\mathbf{r}_k = \overrightarrow{M_0N_k} = \{\xi_k - x_0, \eta_k - y_0, \zeta_k - z_0\}$ ,  $\overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \{x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1}, z_k - z_{k-1}\} = \{\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k\}$ ,  $r_k = |\mathbf{r}_k|$ ,  $\gamma$  — коэффициент пропорциональности. Поэтому

$$\Delta B_{kx} = \frac{\gamma I}{r_k^3} ((\zeta_k - z_0) \Delta y_k - (\eta_k - y_0) \Delta z_k),$$

$$\Delta B_{ky} = \frac{\gamma I}{r_k^3} ((\xi_k - x_0) \Delta z_k - (\zeta_k - z_0) \Delta x_k),$$

$$\Delta B_{kz} = \frac{\gamma I}{r_k^3} ((\eta_k - y_0) \Delta x_k - (\xi_k - x_0) \Delta y_k).$$

Суммируя по  $k$  от 1 до  $n$  и переходя к пределу при  $\Delta l \rightarrow 0$ , получим

$$B_x = \gamma I \oint_L \frac{(z - z_0) dy - (y - y_0) dz}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}},$$

$$B_y = \gamma I \oint_L \frac{(x - x_0) dz - (z - z_0) dx}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}},$$

$$B_z = \gamma I \oint_L \frac{(y - y_0) dx - (x - x_0) dy}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{3/2}}.$$

Если ввести векторы  $\mathbf{r} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$  и  $\vec{dl} = \{dx, dy, dz\}$ , то вектор магнитной индукции  $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$  можно записать в виде

$$\mathbf{B} = \gamma I \oint_L \frac{[\vec{dl} \cdot \mathbf{r}]}{r^3}.$$

Отметим, что направление обхода контура  $L$  совпадает с направлением тока в контуре. ▲

7. Привести пример, показывающий, что для криволинейных интегралов второго рода неверна, вообще говоря, формула среднего значения

$$\int_{AB} P(x, y) dx = P(x^*, y^*) \int_{AB} dx,$$

где  $AB$  — гладкая кривая,  $P(x, y)$  — непрерывная вдоль  $AB$  функция,  $(x^*, y^*)$  — некоторая точка кривой  $AB$ .

Δ Рассмотрим полуокружность  $\{x^2 + y^2 = 1, x \leq 0\}$  с направлением обхода от точки  $A(0, 1)$  к точке  $B(0, -1)$ . На полуокружности  $AB$  зададим непрерывную функцию  $P(x, y) = y$ . Пользуясь параметрическими уравнениями кривой  $AB$   $x = \cos t, y = \sin t, \pi/2 \leq t \leq 3\pi/2$ , вычислим криволинейные интегралы, входящие в формулу среднего

значения:

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \int_{AB} y dx = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin t (-\sin t) dt = -\frac{\pi}{2} \neq 0,$$

$$\int_{AB} dx = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (-\sin t) dt = 0.$$

Следовательно, не существует такого промежуточного значения  $P(x^*, y^*)$  непрерывной подынтегральной функции  $P(x, y) = y$ , для которого  $\int_{AB} P(x, y) dx = P(x^*, y^*) \int_{AB} dx$ . ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

В упр. 8–18 вычислите криволинейные интегралы второго рода. Для замкнутых кривых, заданных параметрически (уравнением  $y = f(x)$ ), направление обхода соответствует возрастанию параметра  $t$  (переменной  $x$ ).

8.  $\int_{OA} x dy - y dx$ , где  $O(0, 0)$ ,  $A(1, 2)$ , если: а)  $OA$  — отрезок прямой;
- б)  $OA$  — дуга параболы, осью которой является ось  $Oy$ ; в)  $OA$  — ломаная линия, состоящая из отрезка  $OB$  оси  $Ox$  и отрезка  $BA$ , параллельного оси  $Oy$ .
9.  $\int_{OA} x dx - y dy$ , где  $OA$  — кривые из пп. а), б) и в) упр. 8.
10.  $\int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$ , где  $L$  — дуга параболы:  $y = x^2$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ .
11.  $\int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$ , где  $L$  — кривая  $y = 1 - |1 - x|$ ,  $0 \leq x \leq 2$ .
12.  $\oint_L (x + y) dx + (x - y) dy$ , где  $L$  — эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .
13.  $\int_L (2 - y) dx + x dy$ , где  $L$  — арка циклоиды  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
14.  $\oint_L \frac{(x + y) dx - (x - y) dy}{x^2 + y^2}$ , где  $L$  — окружность  $x^2 + y^2 = 1$ .
15.  $\oint_L \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$ , где  $L$  — граница квадрата с вершинами  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 1)$ ,  $C(-1, 0)$ ,  $D(0, -1)$ .
16.  $\int_L y dx + z dy + x dz$ , где  $L$  — виток винтовой линии  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
17.  $\int_L (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$ , где  $L$  — окружность  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $y = x \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\alpha \in (0, \pi/2)$ ; обход окружности совершается против хода часовой стрелки, если смотреть из точки  $(2a, -2a, 0)$ ,  $a > 0$ .

18.  $\int_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$ , где  $L$  — кривая Вивиани  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x^2 + y^2 = ax$  ( $z \geq 0$ ,  $a \geq 0$ ), пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть из точки  $(2a, 0, 0)$ .
19. Пусть  $\mathbf{F}(M)$  — сила, с которой материальная точка массы  $m$ , помещенная в начало координат  $O(0, 0)$ , притягивает точку массы 1, находящуюся в точке  $M(x, y)$ . Найти работу силы притяжения  $\mathbf{F}$  при перемещении материальной точки массы 1 вдоль кривой  $AB$ , где  $AB$  — часть эллипса  $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ , при  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $A(0, 3)$ ,  $B(2, 0)$ .
20. Пусть  $\mathbf{c} = \{-xy, y^2/2\}$  — скорость плоского потока жидкости в точке  $M(x, y)$ . Вычислить количество жидкости, вытекающее за единицу времени из области  $G = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, x^4 \leq y \leq 1\}$ .
21. Вычислить работу силы  $\mathbf{F}$  вдоль кривой  $AB$ , если:
- $\mathbf{F} = \{y, -x\}$ ,  $AB$  — окружность  $x^2 + y^2 = 1$ , пробегаемая по ходу часовой стрелки от точки  $A(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$  до точки  $B(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ ;
  - $\mathbf{F} = \{z, -x, y\}$ ,  $AB$  — виток винтовой линии  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ ,  $z = ct$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(a, 0, 2\pi)$ .
22. Вычислить работу силы  $\mathbf{F}$  вдоль замкнутого контура  $L$  в положительном направлении, если:
- $\mathbf{F} = \{x - y, 2x + y\}$ ,  $L$  — треугольник с вершинами  $A(1, 1)$ ,  $B(3, 3)$ ,  $C(3, -1)$ ;
  - $\mathbf{F} = \{x + y, y - x\}$ ,  $L$  — эллипс  $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$ .

### § 3. Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

#### Основные понятия и теоремы

1. **Понятие простой области.** На рис. 56, а изображена замкнутая область  $G_1$ , ограниченная снизу и сверху кусочно гладкими

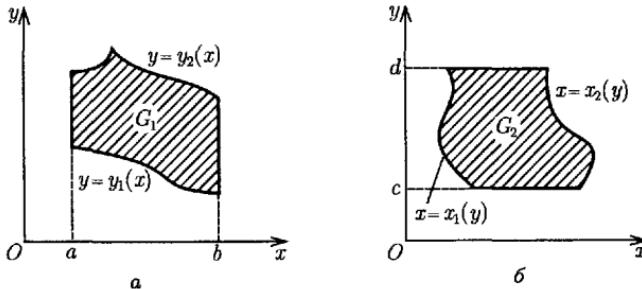


Рис. 56

кривыми  $y = y_1(x)$  и  $y = y_2(x)$ , а слева и справа — отрезками прямых  $x = a$  и  $x = b$ . Напомним, что такая область называется  $y$ -трапециевидной (отрезки прямых могут вырождаться в точку). Аналогично определяется  $x$ -трапециевидная область (рис. 56, б).

Замкнутую область  $G$  назовем *простой*, если ее можно разбить на конечное число как  $x$ -трапециевидных, так и  $y$ -трапециевидных областей.

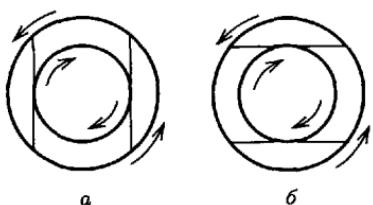


Рис. 57

Предполагается, что при каждом разбиении никакие две области не имеют общих внутренних точек. Примерами простых областей являются круг, прямоугольник, кольцо. На рис. 57, *a* показано разбиение кольца на  $y$ -трапециевидные, на рис. 57, *б* — на  $x$ -трапециевидные

области (стрелками указано положительное направление обхода границы кольца).

## 2. Формула Грина.

Теорема 5. Пусть функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  и их частные производные  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  непрерывны в простой области  $G$ .

Тогда справедливо равенство

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (1)$$

где криволинейный интеграл берется по границе  $L$  области  $G$  в положительном направлении.

Формула (1) называется *формулой Грина*. Она связывает интеграл по границе области с интегралом по самой области.

**Замечание 1.** Формула Грина справедлива не только для простой области, но и для любой ограниченной области с кусочно гладкой границей.

**Замечание 2.** Полагая в формуле Грина  $Q = x$ ,  $P = 0$ , а затем  $Q = 0$ ,  $P = -y$  и учитывая, что  $\iint_G dx dy$  равен площади  $S$  области  $G$ , получим выражения площади фигуры через криволинейные интегралы по ее границе:

$$S = \oint_L x dy, \quad S = - \oint_L y dx. \quad (2)$$

Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные числа такие, что  $\alpha + \beta = 1$ . Умножая первое из равенств (2) на  $\alpha$ , а второе на  $\beta$  и складывая, получим еще одну формулу для площади:

$$S = \oint_L \alpha x dy - \beta y dx \quad (\alpha + \beta = 1).$$

Наиболее употребительна эта формула при  $\alpha = \beta = 1/2$ :

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx. \quad (3)$$

**3. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования на плоскости.** В § 2 был рассмотрен пример, в котором криволинейный интеграл второго рода по трем различным кривым, соединяющим две данные точки  $A$  и  $B$ , имел одно и то же значение. Можно доказать (см. ниже замечание 2 к теореме 6), что этот интеграл имеет то же самое значение для любой кусочно гладкой кривой, соединяющей точки  $A$  и  $B$ . В таком случае говорят, что криволинейный интеграл второго рода не зависит от пути интегрирования (т. е. не зависит от выбора кривой, соединяющей две данные точки, а зависит только от самих этих точек).

В формулируемой ниже теореме 6 об условиях независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования используется понятие односвязной области.

**Определение.** Область  $G$  на плоскости называется *односвязной*, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости целиком принадлежит области  $G$ .

Примерами односвязных областей служат круг, прямоугольник; пример неодносвязной области — кольцо.

**Теорема 6. 1°.** Пусть функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  непрерывны в области  $G$ .

Тогда следующие три условия эквивалентны (т. е. из каждого из них следуют два других).

I. Для любого замкнутого кусочно гладкого контура  $L$ , расположенного в области  $G$ , справедливо равенство

$$\oint_L P dx + Q dy = 0.$$

II. Для любых двух точек  $A$  и  $B$  в области  $G$  криволинейный интеграл  $\int_{AB} P dx + Q dy$  не зависит от пути интегрирования, расположенного в области  $G$ .

III. Выражение  $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  является полным дифференциалом, т. е. в области  $G$  существует функция  $u(M) = u(x, y)$  такая, что

$$du = P dx + Q dy.$$

При этом для любой кусочно гладкой кривой  $AB$ , лежащей в области  $G$ , имеет место равенство

$$\int_{AB} P dx + Q dy = u(B) - u(A). \quad (4)$$

2°. Пусть  $G$  — односвязная область, а функции  $P$  и  $Q$  имеют в области  $G$  непрерывные частные производные  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ .

Тогда каждое из условий I–III эквивалентно следующему условию:

IV. В области  $G$  выполняется равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (5)$$

**Замечание 1.** Функция  $u(x, y)$  из условия III может быть найдена по формуле

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy + C,$$

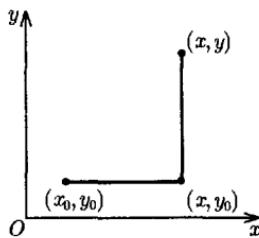


Рис. 58

удобно брать ломаную, состоящую из двух отрезков, параллельных осям координат (рис. 58). Тогда

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} P dx + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Q dy + C = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C. \quad (6)$$

**Замечание 2.** Для рассмотренного в примере 1 из § 2 криволинейного интеграла  $I = \int_A^B 2xy dx + x^2 dy$  имеем  $P = 2xy$ ,  $Q = x^2$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$ .

Таким образом,  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  и, следовательно, интеграл  $I$  не зависит от пути интегрирования.

### Контрольные вопросы и задания

1. Какая область называется:  $y$ -трапециевидной;  $x$ -трапециевидной; простой?
2. Покажите, что область  $G = \{(x, y): -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$  является простой. Удалив из области  $G$  круг  $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{16}$ , получим область  $G_1$ . Покажите, что область  $G_1$  также является простой. Укажите положительное направление обхода границы области  $G_1$ .
3. Напишите формулу Грина и сформулируйте условия, при которых она верна.
4. Пусть  $G$  —  $y$ -трапециевидная область,  $L$  — ее граница, функция  $P(x, y)$  и ее частная производная  $\frac{\partial P}{\partial y}$  непрерывны в области  $G$ . Докажите, что справедливо равенство  $\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_L P dx$ .
5. Напишите формулу для вычисления площади  $S$  простой области с помощью криволинейного интеграла по ее границе  $L$ . Верна ли формула  $S = \oint_L \frac{x}{5} dy - \frac{4y}{5} dx$ ?

6. Что означает утверждение: криволинейный интеграл  $\int\limits_{AB} P dx + Q dy$  не зависит от пути интегрирования?
7. Что означает утверждение: выражение  $P dx + Q dy$  является полным дифференциалом в области  $G$ ?
8. Пусть функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  непрерывны в области  $G$ . Сформулируйте два необходимых и достаточных условия независимости криволинейного интеграла  $\int\limits_{AB} P dx + Q dy$  от пути интегрирования.
9. Дайте определение односвязной области на плоскости. Является ли односвязной областью: полуплоскость; круговой сектор; круг с выброшенным центром; область  $G_1$  из задания 2?
10. Пусть функции  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  и их частные производные  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  непрерывны в односвязной области  $G$ . Сформулируйте необходимое и достаточное условие независимости криволинейного интеграла  $\int\limits_{AB} P dx + Q dy$  от пути интегрирования, использующее указанные производные. Как связано это условие с условиями из задания 8?
11. Пусть  $du(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  в области  $G$ . Напишите формулу для вычисления функции  $u(x, y)$ .
12. Пусть  $P = xy$ ,  $Q = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2-y}$ ,  $G\{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}$ . Докажите, что выражение  $P dx + Q dy$  является полным дифференциалом некоторой функции  $u(x, y)$  в круге  $G$ , и найдите эту функцию. Чему равен интеграл  $\oint L P dx + Q dy$  для любого замкнутого кусочно гладкого контура  $L$ , расположенного в области  $G$ ? Вычислите интеграл  $\int\limits_{AB} P dx + Q dy$ , где  $A(-1, 1)$ ,  $B(1, 1)$ .

### Примеры решения задач

#### 1. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{AO} (e^x \sin y - py) dx + (e^x \cos y - p) dy,$$

где кривая  $AO$  — верхняя полуокружность  $x^2 + y^2 = ax$ ,  $A(a, 0)$ ,  $O(0, 0)$  (рис. 59).

Δ Введем обозначения:  $P = e^x \sin y - py$ ,  $Q = e^x \cos y - p$ . Дополним кривую интегрирования  $AO$  до замкнутого контура  $L$  отрезком  $OA$  оси  $Ox$ . Тогда получим

$$I = \oint_L P dx + Q dy - \int\limits_{OA} P dx + Q dy.$$

Так как  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = p$ , то по формуле Грина находим

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_G p dx dy,$$

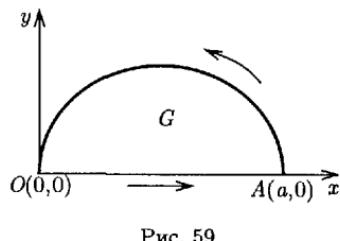


Рис. 59

где область  $G$  — верхняя половина круга радиуса  $a/2$ . Поэтому

$$\iint_G p \, dx \, dy = p \cdot S(G) = p \cdot \frac{\pi a^2}{8}.$$

Вычислим интеграл по отрезку  $OA$  оси  $Ox$ . Учитывая, что на этом отрезке  $P = 0$ ,  $dy = 0$ , получим  $\int_{OA} P \, dx + Q \, dy = 0$ . Таким образом,  $I = \frac{\pi a^2}{8} \cdot p$ .  $\Delta$

**2.** Пусть функции  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  и их частные производные первого и второго порядка непрерывны в замкнутой области  $G$ , ограниченной гладкой кривой  $L$ . Доказать, что справедлива *вторая формула Грина*:

$$\oint_L \left| \begin{array}{cc} u & v \\ \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \end{array} \right| dl = \iint_G \left| \begin{array}{cc} u & v \\ \Delta u & \Delta v \end{array} \right| dx \, dy,$$

где  $\frac{\partial u}{\partial n}$  — производная по направлению внешней нормали  $L$ ,  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ , а интеграл в левой части есть криволинейный интеграл первого рода.

$\Delta$  Сначала докажем, что

$$\oint_L v \frac{\partial u}{\partial n} \, dl = \iint_G \left( v \Delta u + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx \, dy. \quad (7)$$

Пусть  $\mathbf{n} = \{\cos \varphi, \sin \varphi\}$  — единичный вектор внешней нормали к кривой  $L$ . Так как  $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi$ , то

$$\oint_L v \frac{\partial u}{\partial n} \, dl = \oint_L \left( v \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + v \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi \right) \, dl.$$

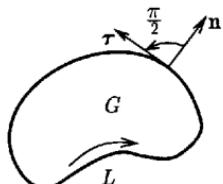
Единичный касательный к  $L$  вектор  $\tau = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$ , направление которого соответствует положительному направлению обхода контура, получается поворотом вектора  $\mathbf{n}$  на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки (рис. 60). Поэтому

$$\alpha = \varphi + \pi/2, \quad \cos \alpha = -\sin \varphi, \quad \sin \alpha = \cos \varphi.$$

Учитывая эти равенства, с помощью формулы (8) из § 2 выразим криволинейный интеграл первого рода через криволинейный интеграл второго рода:

$$\oint_L \left( v \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + v \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi \right) \, dl = \oint_L \left( -v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \, dx + \left( v \frac{\partial u}{\partial x} \right) \, dy.$$

Рис. 60



Вводя обозначения  $P = -v \frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $Q = v \frac{\partial u}{\partial x}$ , преобразуем последний интеграл по формуле Грина. Учитывая, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial u}{\partial x} \right) = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( -v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y},\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}\oint_L \left( -v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx + \left( v \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy &= \iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= \iint_G \left( v \Delta u + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy.\end{aligned}$$

Таким образом, справедливость равенства (7) доказана.

Поменяв в равенстве (7) ролями функции  $v(x, y)$  и  $u(x, y)$ , получим

$$\oint_L u \frac{\partial v}{\partial n} dl = \iint_G \left( u \Delta v + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy. \quad (8)$$

Составляя разность равенств (8) и (7), приходим ко второй формуле Грина:

$$\oint_L \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dl = \iint_G (u \Delta v - v \Delta u) dx dy. \blacksquare$$

**3.** Вычислить площадь  $S$  фигуры, ограниченной астроидой  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = b \sin^3 t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Δ Пользуясь формулой (3), находим

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3ab \cos^4 t \sin^2 t + 3ab \sin^4 t \cos^2 t) dt = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3ab\pi}{8}.\end{aligned} \blacksquare$$

**4.** Доказать, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, и вычислить криволинейный интеграл:

a)  $\int_A^B x dx - y dy$ , где  $A(0, 1)$ ,  $B(3, -4)$ ;

б)  $\int_{AB} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$ , где  $A(-2, -1)$ ,  $B(3, 0)$ .

Δ а) Очевидно,  $x dx - y dy = du$ , где  $u = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$ . По формуле (4) находим

$$\int_{AB} x dx - y dy = u(B) - u(A) = -\frac{7}{2} - \left( -\frac{1}{2} \right) = -3.$$

б) Проверим выполнение условия IV теоремы 6:  $P = x^4 + 4xy^3$ ,  $Q = 6x^2y^2 - 5y^4$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2$ . Таким образом,  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , т. е. условие IV выполнено. Следовательно, по теореме 6 выражение  $P dx + Q dy$  является полным дифференциалом, а криволинейный интеграл  $I = \int_{AB} P dx + Q dy$  не зависит от пути интегрирования. Возьмем в качестве пути интегрирования ломаную  $AMB$ , где  $M(-2, 0)$ . Тогда  $AM = \{(x, y): x = -2, -1 \leq y \leq 0\}$ ,  $MB = \{(x, y): y = 0, -2 \leq x \leq 3\}$ .

Вдоль отрезка  $AM$  имеем  $x = -2$ ,  $dx = 0$ ,  $-1 \leq y \leq 0$ ; поэтому  $\int_{AM} P dx + Q dy = \int_{-1}^0 (24y^2 - 5y^4) dy = 7$ . Вдоль отрезка  $MB$  имеем  $y = 0$ ,  $dy = 0$ ,  $-2 \leq x \leq 3$ ; поэтому

$$\int_{MB} P dx + Q dy = \int_{-2}^3 x^4 dx = 55.$$

Искомый интеграл по ломаной  $AMB$  равен сумме вычисленных интегралов, т. е. равен 62.  $\blacktriangle$

5. Дважды дифференцируемая функция  $u(x, y)$  называется гармонической в области  $G$ , если в этой области  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ . Доказать, что если для функции  $u(x, y)$ , имеющей непрерывные частные производные второго порядка в односвязной области  $G$ , и для любого гладкого замкнутого контура  $L$ , лежащего в области  $G$ , справедливо равенство  $\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} dl = 0$ , где  $\frac{\partial u}{\partial n}$  — производная по внешней нормали к

конттуру  $L$ , то  $u(x, y)$  — гармоническая функция в области  $G$ .

Д. Пусть  $\mathbf{n} = \{\cos \varphi, \sin \varphi\}$  — единичный вектор внешней нормали к кривой  $L$ . Так как

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi,$$

то

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} dl = \oint_L \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi \right) dl.$$

Далее, пусть  $\tau = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$  — единичный касательный вектор к кривой  $L$ , направление которого соответствует положительному направлению обхода контура. Тогда  $\alpha = \frac{\pi}{2} + \varphi$  (см. рис. 60),  $\cos \alpha = -\sin \varphi$ ,  $\sin \alpha = \cos \varphi$ , и по формуле (8) из § 2 получим

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} dl = \oint_L \left( \frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha \right) dl = \oint_L -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Таким образом,  $\oint_L -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = 0$  для любого замкнутого гладкого контура  $L$ , лежащего в односвязной области  $G$ , т. е. выполнено условие I теоремы 6. По теореме 6 из условия I следует условие IV, т. е.  $\frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ , откуда  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ , или  $\Delta u = 0$ . Это и означает, что функция  $u(x, y)$  гармоническая в области  $G$ . ▲

**6.** Вычислить интеграл  $I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ , где  $L$  — замкнутый кусочно гладкий контур, окружающий начало координат, пробегаемый в положительном направлении и ограничивающий область  $G$ .

Покажем, что интеграл  $I$  не зависит от выбора контура  $L$ , окружющего начало координат. Положим  $P = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ ,  $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$ . Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{при } x^2 + y^2 \neq 0,$$

т. е. условие IV теоремы 6 выполнено всюду в области  $G$ , за исключением точки  $O(0, 0)$ . Область  $G$  с выброшенной точкой  $O$  уже не является односвязной, поэтому утверждение 2° теоремы 6 использовать нельзя (нельзя утверждать, что из условия IV следует условие I).

Рассмотрим другой кусочно гладкий замкнутый контур  $l$ , окружающий начало координат. Пусть контур  $l$  лежит внутри (или вне) области  $G$ , тогда кривые  $L$  и  $l$  ограничивают некоторую область  $\Omega$ .

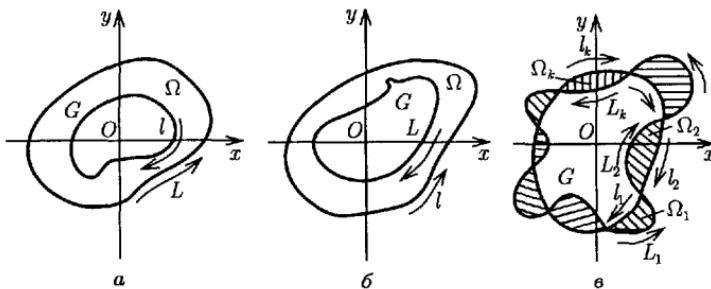


Рис. 61

Применим к этой области формулу Грина. Если кривая  $l$  лежит внутри  $G$  (рис. 61, а), то в формуле Грина обход контура  $L$  совершается против часовой стрелки, а контура  $l$  — по часовой стрелке. Поэтому

$$\oint_L P dx + Q dy - \oint_l P dx + Q dy = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

откуда

$$\oint_L P dx + Q dy = \oint_l P dx + Q dy. \quad (9)$$

Если же кривая  $l$  лежит вне  $G$  (рис. 61, б), то в формуле Грина обход контура  $L$  совершается по часовой стрелке, а контура  $l$  — против часовой стрелки. Значит,

$$\oint_l P dx + Q dy - \oint_L P dx + Q dy = 0.$$

Отсюда снова получаем равенство (9). Если контуры  $L$  и  $l$  пересекаются в  $n$  точках (рис. 61, в), то для каждой из  $n$  полученных при этом областей  $\Omega_k$ , не содержащих начала координат (они заштрихованы на рис. 61, в), справедлива формула Грина. Пользуясь этой формулой, находим

$$\int_{L_k} P dx + Q dy + \int_{l_k} P dx + Q dy = 0$$

(направления обхода показаны на рис. 61, в). Просуммировав эти равенства по  $k$  от 1 до  $n$ , получим, что сумма интеграла по контуру  $L$  в положительном направлении и интеграла по контуру  $l$  в отрицательном направлении равна нулю. Отсюда снова приходим к равенству (9). Таким образом, интеграл  $I$  не зависит от выбора кривой  $L$ . Вычислив его по единичной окружности  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , получим

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t dt + \sin^2 t dt}{\cos^2 t + \sin^2 t} = 2\pi. \blacksquare$$

**Замечание.** Рассмотренный пример показывает, что если область не является односвязной, то из условия IV теоремы 6 может не следовать условие I.

7. Найти функцию  $u(x, y)$ , если  $du = [y \cos xy - 2x \sin(x^2 - y^2)] dx + [x \cos xy + 2y \sin(x^2 - y^2)] dy$ .

△ Нетрудно убедиться, что для дифференциального выражения выполнено равенство (5). Для вычисления функции  $u(x, y)$  воспользуемся формулой (6). Находим

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{x_0}^x [y_0 \cos xy_0 - 2x \sin(x^2 - y_0^2)] dx + \\ &\quad + \int_{y_0}^y [x \cos xy + 2y \sin(x^2 - y^2)] dy = \\ &= [\sin xy_0 + \cos(x^2 - y_0^2)] \Big|_{x_0}^x + [\sin xy + \cos(x^2 - y^2)] \Big|_{y_0}^y + C = \\ &= [\sin xy_0 + \cos(x^2 - y_0^2) - \sin x_0 y_0 - \cos(x_0^2 - y_0^2)] + \\ &\quad + [\sin xy + \cos(x^2 - y^2) - \sin x_0 y_0 - \cos(x_0^2 - y_0^2)] + C = \\ &= \sin xy + \cos(x^2 - y^2) + C_1, \end{aligned}$$

где  $C_1$  — произвольная постоянная.  $\blacksquare$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

- 23.** Вычислите криволинейные интегралы второго рода, применив формулу Грина:
- $\oint_L xy^2 dy - x^2 dx$ , где  $L$  — окружность  $x^2 + y^2 = a^2$ ;
  - $\oint_L (x+y) dx - (x-y) dy$ , где  $L$  — эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;
  - $\oint_L e^{-x^2+y^2} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy)$ , где  $L$  — окружность  $x^2 + y^2 = R^2$ ;
  - $\int_{AB} (\varphi(y)e^x - py) dx + (\varphi'(y)e^x - p) dy$ , где  $AB$  — кусочно гладкая кривая, соединяющая точки  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$ , не пересекающая отрезок  $AB$  в его внутренних точках и ограничивающая вместе с отрезком  $AB$  область площади  $S$ , а функция  $\varphi(y)$  имеет непрерывную производную.
- 24.** На сколько отличаются друг от друга криволинейные интегралы  $I_1 = \int_{AnB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$  и  $I_2 = \int_{AmB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$ , где  $AmB$  — отрезок, соединяющий точки  $A(1, 1)$  и  $B(2, 6)$ , а  $AnB$  — дуга параболы, проходящей через точки  $A$ ,  $B$  и начало координат?
- 25.** С помощью криволинейных интегралов вычислите площади областей, ограниченных следующими кривыми:
- эллипсом  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ;
  - параболой  $(x+y)^2 = 2ax$  ( $a > 0$ ) и осью  $Ox$ ;
  - гиперболой  $y = 1/x$ , осью  $Ox$  и прямыми  $x = 1$  и  $x = 2$ ;
  - окружностью  $x^2 + y^2 = 4$  и параболой  $x^2 = 2 - y$  (область содержит начало координат).
- 26.** Вычислите интеграл  $I = \oint_L (x \cos \alpha + y \cos \beta) dl$ , где  $L$  — замкнутая гладкая кривая, ограничивающая область площади  $S$ ;  $\alpha$  и  $\beta$  — углы между вектором внешней нормали  $n$  к кривой  $L$  в точке  $M(x, y)$  и осями  $Ox$  и  $Oy$ .
- 27.** Докажите, что если функция  $u(x, y)$  имеет в замкнутой области  $G$  непрерывные производные второго порядка, то справедлива формула
- $$\iint_G \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = - \iint_G u \Delta u dx dy + \oint_L u \frac{\partial u}{\partial n} dl,$$
- где  $L$  — гладкий контур, ограничивающий область  $G$ .
- 28.** Докажите, что подынтегральное выражение является дифференциалом некоторой функции, и вычислите криволинейные интегралы:
- $\int_{AB} x dy + y dx$ , где  $A(-1, 2)$ ,  $B(2, 3)$ ;
  - $\int_{AB} (x+y) dx + (x-y) dy$ , где  $A(0, 1)$ ,  $B(2, 3)$ ;
  - $\int_{AB} \frac{y dx - x dy}{x^2}$ , где  $A(2, 1)$ ,  $B(1, 2)$ ,  $AB$  — кривая, не пересекающая ось  $Oy$ ;

- г)  $\int\limits_{AB} \frac{x \, dx + y \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , где  $A(1, 0)$ ,  $B(6, 8)$ ,  $AB$  — кривая, не проходящая через начало координат;
- д)  $\int\limits_{AB} x \, dx + y^2 \, dy$ , где  $A(1, 1)$ ,  $B(2, 3)$ ;
- е)  $\int\limits_{M_1 M_2} \frac{x \, dx + y \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , где точка  $M_1(x_1, y_1)$  лежит на окружности  $x^2 + y^2 = a^2$ , а точка  $M_2(x_2, y_2)$  — на окружности  $x^2 + y^2 = b^2$ .
29. Выразите следующие криволинейные интегралы через определенный интеграл:
- а)  $\int\limits_{AB} f(x+y)(dx+dy)$ , где  $A(0, 0)$ ,  $B(a, b)$ , а  $f(t)$  — непрерывная функция;
- б)  $\int\limits_{M_1 M_2} f(\sqrt{x^2 + y^2})(x \, dx + y \, dy)$ , где  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$ , а  $f(t)$  — непрерывная функция.
30. Выразите криволинейный интеграл  $\int\limits_{M_1 M_2} \varphi(x) \, dx + \psi(y) \, dy$ , где  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$ , а  $\varphi(x)$  и  $\psi(y)$  — непрерывные функции, через сумму определенных интегралов.
31. Найдите функцию  $u(x, y)$ , если:
- а)  $du = (x^2 + 2xy - y^2) \, dx + (x^2 - 2xy - y^2) \, dy$ ;
- б)  $du = \frac{\partial^{n+m+1} z}{\partial x^{n+1} \partial y^m} \, dx + \frac{\partial^{n+m+1} z}{\partial x^n \partial y^{m+1}} \, dy$ .

# ГЛАВА XIV

## ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

### § 1. Площадь поверхности

**Основные понятия и теоремы**

**1. Уравнения поверхности.** В § 4 гл. X была рассмотрена поверхность, являющаяся графиком непрерывной функции

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in G. \quad (1)$$

Задание поверхности уравнением (1), а также уравнением

$$x = f(y, z) \quad (1')$$

или уравнением

$$y = f(z, x) \quad (1'')$$

называется *явным*.

Поверхность может быть задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0, \quad (2)$$

не разрешенным относительно ни одной из переменных (*неявное задание*). При этом поверхность представляет собой множество всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (2). Например, уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad (3)$$

задает сферу радиуса  $R$  с центром в начале координат.

Наконец, поверхность может быть задана *параметрически*:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \quad (u, v) \in g, \quad (4)$$

где  $\varphi, \psi, \chi$  — непрерывные функции в области  $g$ . Переменные  $u$  и  $v$  называются *параметрами*. По формулам (4) каждой точке  $(u, v)$  области  $g$  ставится в соответствие некоторая точка  $(x, y, z)$  трехмерного пространства. Множество этих точек и образует поверхность.

Например, уравнения

$$\begin{aligned} x &= R \sin u \cos v, & y &= R \sin u \sin v, & z &= R \cos u, \\ (u, v) \in g &= \{(u, v): 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi\} \end{aligned} \quad (5)$$

задают ту же самую сферу, что и уравнение (3).

Уравнения (4) можно записать в векторном виде

$$\mathbf{r} = \varphi(u, v) \mathbf{i} + \psi(u, v) \mathbf{j} + \chi(u, v) \mathbf{k}, \quad (u, v) \in g, \quad (6)$$

где  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  — радиус-вектор точки  $M(x, y, z)$ , а  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  — ортогональный базис.

В дальнейшем, рассматривая поверхности, заданные параметрически уравнениями (4), будем считать выполненными следующие условия.

I. Область  $g$  ограничена и замкнута; ее границей является кусочно гладкая кривая без самопересечений.

II. Функции  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\chi$  непрерывно дифференцируемы (т. е. имеют непрерывные частные производные первого порядка) в области  $g$ .

III. Различным внутренним точкам  $(u, v)$  области  $g$  соответствуют различные точки  $(x, y, z)$  поверхности.

Если условие, аналогичное III, выполнено также для граничных точек области  $g$ , то поверхность будем называть *простой*. Множество точек поверхности, соответствующих граничным точкам области  $g$ , образует в этом случае *границу* (или *край*) поверхности. На рис. 62 изображена часть конической поверхности  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,

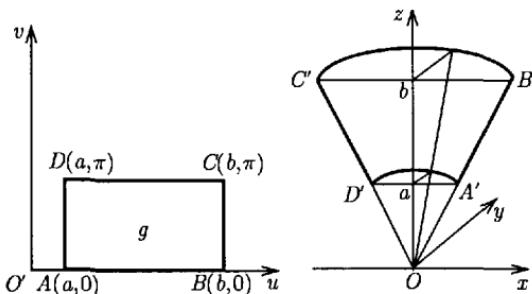


Рис. 62

$z = u$ ,  $(u, v) \in g = \{(u, v) : 0 < a \leq u \leq b, 0 \leq v \leq \pi\}$ , краем которой является замкнутый контур  $A'B'C'D'$ , соответствующий прямоугольнику  $ABCD$  — границе области  $g$ . Точки поверхности, не принадлежащие краю, называются ее *внутренними* точками. Если же условие типа III не выполнено для граничных точек области  $g$ , то поверхность может не иметь края (в таком случае она называется *замкнутой*). Примером такой поверхности является сфера, заданная уравнениями (5).

**Замечание.** Определение внутренних и граничных точек поверхности можно ввести еще и так: точка  $M$  поверхности называется *внутренней*, если существует окрестность точки  $M$  такая, что множество точек этой окрестности, не принадлежащих поверхности, является несвязным; точка поверхности, не являющаяся внутренней, называется *граничной*.

**2. Понятие гладкой поверхности.** Пусть поверхность  $\Phi$  задана либо явно, либо неявно, либо параметрически. Будем называть поверхность  $\Phi$  *гладкой*, если для любой ее внутренней точки существует такая окрестность, которая вырезает часть поверхности  $\Phi$ ,

допускающую явное представление вида (1) или (1') или (1'') где  $f$  — непрерывно дифференцируемая функция.

Из этого определения следует, что в каждой внутренней точке гладкой поверхности существует касательная плоскость и нормаль (см. § 4 гл. X).

Если поверхность  $\Phi$  задана явно уравнением (1) и функция  $f(x, y)$  непрерывно дифференцируема в области  $G$ , то поверхность, очевидно, является гладкой. Уравнение касательной плоскости и координаты вектора нормали в данной точке поверхности  $\Phi$  приведены в § 4 гл. X.

Пусть поверхность  $\Phi$  задана неявно уравнением (2) и пусть функция  $F(x, y, z)$  непрерывно дифференцируема. Точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  поверхности  $\Phi$  называется *неособой*, если в этой точке  $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \neq 0$ . В противном случае точка называется *особой*. Если поверхность не содержит особых точек, то она является гладкой. Уравнение касательной плоскости к поверхности  $\Phi$  в неособой внутренней точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  имеет вид

$$F_x(M_0)(x - x_0) + F_y(M_0)(y - y_0) + F_z(M_0)(z - z_0) = 0.$$

Вектор

$$\mathbf{N} = \{F_x(M_0), F_y(M_0), F_z(M_0)\} \quad (7)$$

является вектором нормали к поверхности  $\Phi$  в точке  $M_0$ .

Пусть поверхность  $\Phi$  задана параметрическими уравнениями (4), или, что то же самое, уравнением (6). Точка  $M_0(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$  называется *неособой* точкой поверхности  $\Phi$ , если в этой точке векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= i\varphi_u(u, v) + j\psi_u(u, v) + k\chi_u(u, v), \\ \mathbf{r}_v &= i\varphi_v(u, v) + j\psi_v(u, v) + k\chi_v(u, v) \end{aligned}$$

неколлинеарны (линейно независимы). В противном случае точка  $M_0$  называется *особой*.

Простая поверхность, не имеющая особых точек, является гладкой.

Уравнение касательной плоскости к поверхности  $\Phi$  в неособой внутренней точке  $M(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$  имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где  $x_0 = \varphi(u, v)$ ,  $y_0 = \psi(u, v)$ ,  $z_0 = \chi(u, v)$ ,

$$A = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \chi_u & \varphi_u \\ \chi_v & \varphi_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Вектор  $\mathbf{N} = [\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v] = iA + jB + kC$  есть вектор нормали к поверхности  $\Phi$  в точке  $M$ . Векторы  $\mathbf{r}_u$  и  $\mathbf{r}_v$ , отложенные от точки  $M$ , лежат в касательной плоскости (рис. 63).

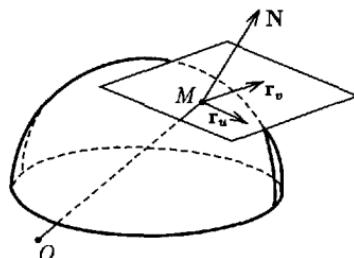


Рис. 63

**3. Понятие площади поверхности.** Пусть  $\Phi$  — гладкая ограниченная поверхность. Разобьем ее с помощью кусочно гладких кривых на конечное число  $n$  частей  $\Phi_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) так, чтобы каждая часть  $\Phi_i$  однозначно проектировалась на касательную плоскость, проведенную в любой точке этой части (предполагается, что такое разбиение возможно). На каждой части  $\Phi_i$  возьмем произвольную точку  $M_i$  и проведем через нее касательную плоскость к поверхности. Обозначим через  $S_i$  площадь проекции  $\Phi_i$  на касательную плоскость (эта проекция ограничена кусочно гладкими кривыми и потому квадрируема). Составим сумму  $S(\Phi_i, M_i) = \sum_{i=1}^n S_i$ . Пусть  $d_i$  — диаметр  $\Phi_i$ ,  $d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$ .

**Определение.** Число  $S$  называется *пределом сумм*  $S(\Phi_i, M_i)$  при  $d \rightarrow 0$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что для любого разбиения поверхности  $\Phi$ , у которого  $d < \delta$ , и для любого выбора точек  $M_i$  выполняется неравенство

$$|S(\Phi_i, M_i) - S| < \varepsilon.$$

Если существует  $\lim_{d \rightarrow 0} S(\Phi_i, M_i) = S$ , то поверхность  $\Phi$  называется *квадрируемой*, а число  $S$  — *площадью поверхности*  $\Phi$ .

**Замечание 1.** Поверхность, составленная из нескольких гладких поверхностей, называется *кусочно гладкой*. Если каждая из этих гладких поверхностей квадрируема, то сумма их площадей принимается за площадь кусочно гладкой поверхности.

**Замечание 2.** Определение площади естественным образом распространяется на поверхности, не имеющие касательной плоскости и нормали в конечном числе внутренних точек. Примером такой поверхности является коническая поверхность, которая не имеет касательной плоскости в своей вершине.

#### 4. Вычисление площади поверхности с помощью двойного интеграла.

**Теорема 1.** Гладкая параметрически заданная поверхность, не имеющая особых точек, квадрируема, и ее площадь  $S$  выражается формулой

$$S = \iint \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv, \quad (9)$$

где  $A, B$  и  $C$  определяются по формуле (8).

**Замечание 1.** При наличии конечного числа особых точек формула (9) остается в силе.

**Замечание 2.** Введем функции

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{r}_u^2 = \varphi_u^2(u, v) + \psi_u^2(u, v) + \chi_u^2(u, v), \\ G &= \mathbf{r}_v^2 = \varphi_v^2(u, v) + \psi_v^2(u, v) + \chi_v^2(u, v), \\ F &= (\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v) = \varphi_u \varphi_v + \psi_u \psi_v + \chi_u \chi_v. \end{aligned} \quad (10)$$

Справедливо равенство

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2, \quad (11)$$

и поэтому формулу (9) можно записать в виде

$$S = \iint_g \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv. \quad (12)$$

**Замечание 3.** Поверхность, определенную явно уравнением (1), можно рассматривать как заданную параметрически — роль параметров играют  $x$  и  $y$ . Параметрические уравнения (4) для такой поверхности можно записать в виде

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v), \quad (u, v) \in G.$$

Если область  $G$  удовлетворяет условию I п. 1, а функция  $f(x, y)$  непрерывно дифференцируема в области  $G$ , то, используя равенство (12), получим формулу для площади поверхности, заданной явно,

$$S = \iint_G \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} \, dx \, dy. \quad (13)$$

### Контрольные вопросы и задания

- Назовите способы задания поверхности. Для каждого способа приведите пример.
- Напишите уравнения поверхности в параметрическом и в векторном виде. Какие требования накладываются на параметрические уравнения поверхности?
- Напишите параметрические уравнения сферы, конуса, круглого цилиндра.
- Какая поверхность называется простой? Что называют границей или краем поверхности? Является ли простой поверхностью часть эллиптического параболоида  $x = u, y = v, z = u^2 + v^2, (u, v) \in g = \{(u, v) : 0 \leq u^2 + v^2 \leq a^2\}$ ? Что является границей этой поверхности?
- Приведите пример замкнутой поверхности, т. е. поверхности без края.
- Для следующих поверхностей, заданных параметрически, определите, в какие точки поверхности (границные или внутренние) отображается граница области  $g$ :
  - сфера  $x = R \sin u \cos v, y = R \sin u \sin v, z = R \cos u, (u, v) \in g = \{(u, v) : 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi\}$ ;
  - конус  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = r, (r, \varphi) \in g = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ ;
  - цилиндр  $x = a \cos \varphi, y = a \sin \varphi, z = h \ (a > 0), (h, \varphi) \in g = \{(h, \varphi) : -b \leq h \leq b, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ .
 Нарисуйте данные поверхности и укажите на рисунке образ границы области  $g$ . Являются ли эти поверхности простыми?
- Дайте определения: а) гладкой поверхности; б) касательной плоскости к поверхности в данной точке.
- Какая точка поверхности называется неособой (особой), если поверхность задана: а) явно; б) параметрически?
- Сформулируйте достаточные условия, при которых является гладкой поверхность, заданная: а) явно; б) неявно; в) параметрически.
- Напишите уравнение касательной плоскости в неособой внутренней точке гладкой поверхности, заданной: а) явно; б) неявно; в) параметрически. Каковы координаты нормали к поверхности в этой точке?

11. Укажите особые точки сферы и конуса из задания 6. Существуют ли касательные плоскости в этих особых точках?
12. Имеет ли особые точки цилиндр  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = a \sin \varphi$ ,  $z = h$  при  $-b \leq h \leq b$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ?
13. Справедливо ли утверждение: в каждой внутренней точке гладкой поверхности существует касательная плоскость и нормаль?
14. Дайте определение площади поверхности. Какая поверхность называется квадрируемой?
15. Сформулируйте теорему о квадрируемости поверхности, заданной параметрически, и напишите формулу для вычисления ее площади.
16. Вычислите выражение  $\sqrt{EG - F^2}$  для сферы, конуса, кругового цилиндра из задания 6.
17. Напишите параметрические уравнения гиперболического параболоида  $z = x^2 - y^2$  и эллипсоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  и вычислите выражение  $\sqrt{EG - F^2}$  для этих поверхностей.
18. Выведите формулу для вычисления площади поверхности, заданной явно. При каких условиях она верна?

### Примеры решения задач

1. Составить уравнение касательной плоскости и вычислить направляющие косинусы нормали к поверхности  $x = u$ ,  $y = v$ ,  $z = u^3 + v^2$  в точке  $M_0(1, 1, 2)$ .

Δ Пользуясь уравнением поверхности в векторной форме  $z = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}(u^3 + v^2)$ , получим

$$\mathbf{r}_u(M_0) = (\mathbf{i} + 3u^2 \mathbf{k})|_{M_0} = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_v(M_0) = (\mathbf{j} + 2v \mathbf{k})|_{M_0} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

По формуле  $\mathbf{N} = [\mathbf{r}_u \mathbf{r}_v]$  находим нормаль в точке  $M_0$ :

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Составляем уравнение касательной плоскости, проходящей через точку  $M_0(1, 1, 2)$ :  $-3(x - 1) - 2(y - 1) + (z - 2) = 0$ , или  $z - 3x - 2y + 3 = 0$ . Далее, вычислим длину вектора  $\mathbf{N}$  и его направляющие косинусы:  $|\mathbf{N}|^2 = 9 + 4 + 1 = 14$ ,  $\cos \alpha = -3/\sqrt{14}$ ,  $\cos \beta = -2/\sqrt{14}$ ,  $\cos \gamma = 1/\sqrt{14}$ . ▲

2. Вычислить площадь  $S$  части гиперболического параболоида  $z = xy$ , вырезанной цилиндром  $x^2 + y^2 = 8$ .

Δ Площадь  $S$  вычислим по формуле (13):

$$S = \iint_G \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \iint_G \sqrt{1 + y^2 + x^2} dx dy,$$

• где  $G$  — круг  $x^2 + y^2 \leq 8$ . В интеграле перейдем к полярным координатам; получим

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} \rho \sqrt{1 + \rho^2} d\rho.$$

Вычисляя интеграл, находим  $S = 26\pi$ . ▲

**3.** Найти площадь  $S$  части поверхности  $z = 1 - (x^2 + y^2)^{3/2}$ , отсекаемой плоскостью  $z = 0$ .

△ Для вычисления площади  $S$  воспользуемся формулой (13). Находим

$$\begin{aligned} z_x &= -3x(x^2 + y^2)^{1/2}, & z_y &= -3y(x^2 + y^2)^{1/2}, \\ \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} &= \sqrt{1 + 9(x^2 + y^2)^2}, & S &= \iint_G \sqrt{1 + 9(x^2 + y^2)^2} dx dy, \end{aligned}$$

где  $G$  — область на плоскости  $Oxy$ , на которую проектируется часть поверхности, отсеченная плоскостью  $z = 0$ . Границей области  $G$  является линия пересечения поверхности с плоскостью  $z = 0$ , т. е. кривая  $0 = 1 - (x^2 + y^2)^{3/2}$ . Отсюда получаем  $x^2 + y^2 = 1$ , т. е. граница области  $G$  — окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Вычислим интеграл  $S$ , перейдя к полярным координатам  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Имеем

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \sqrt{1 + 9\rho^4} = \frac{\pi}{3} \left[ \frac{3\rho^2}{2} \sqrt{1 + 9\rho^4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \ln \left( 3\rho^2 + \sqrt{1 + 9\rho^4} \right) \right] \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} (3\sqrt{10} + \ln(3 + \sqrt{10})). \blacksquare \end{aligned}$$

**4.** Найти площадь поверхности тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + z^2 = a^2$ ,  $y^2 + z^2 = a^2$ .

△ Сначала вычислим площадь  $S$  части поверхности  $\Phi$  первого цилиндра

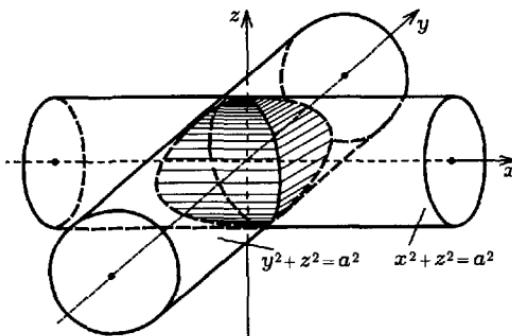


Рис. 64

ра, вырезанной вторым (рис. 64). Параметрические уравнения первого цилиндра имеют вид

$$x = a \cos \varphi, \quad y = h, \quad z = a \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < h < +\infty.$$

Для того чтобы найти уравнение линии пересечения поверхностей, подставим параметрические выражения  $y$  и  $z$  в уравнение второго цилиндра. Уравнение  $y^2 + z^2 = a^2$  в переменных  $\varphi, h$  примет вид  $h^2 = a^2 \cos^2 \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

Таким образом, для точек пересечения поверхностей при  $y > 0$  имеем  $h = a|\cos \varphi|$ , при  $y < 0$  имеем  $h = -a|\cos \varphi|$ . Область  $g$  изменения параметров поверхности  $\Phi$  запишется следующим образом:

$$g = \{(\varphi, h) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -a|\cos \varphi| \leq h \leq a|\cos \varphi|\}.$$

Пользуясь формулами (10), получаем  $E = a^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos \varphi = a^2$ ,  $G = 1$ ,  $F = 0$ , откуда  $\sqrt{EG - F^2} = a$ . По формуле (12) находим

$$S = \iint_g a d\varphi dh = a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-a|\cos \varphi|}^{a|\cos \varphi|} dh = 8a^2.$$

Точно так же вычисляется площадь части второго цилиндра, вырезанной первым. В результате получаем ответ:  $16a^2$ . ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

- Составьте уравнение касательной плоскости к поверхности в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ :
  - $x = a \cos v \sin u$ ,  $y = b \sin v \sin u$ ,  $z = c \cos u$ ,  $M_0(a/\sqrt{3}, b/\sqrt{3}, -c/\sqrt{3})$ ;
  - $x = r$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \varphi$ ,  $M_0(-1, \sqrt{3}/2, -1/2)$ ;
  - $x = a \cos \varphi$ ,  $y = a \sin \varphi$ ,  $z = h$ ,  $M_0(a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2}, -1)$ .
- Вычислите направляющие косинусы нормали к поверхности в точке  $M_0$ :
  - $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = h\varphi$ ,  $M_0(h/\sqrt{2}, h/\sqrt{2}, h\pi/4)$ ;
  - $x = (1 + \cos \psi) \cos \varphi$ ,  $y = (1 + \cos \psi) \sin \varphi$ ,  $z = \sin \psi$ ,  $M_0(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -1)$ .
- Пользуясь явным заданием поверхности, вычислите площадь
  - части гиперболического параболоида  $az = xy$ , заключенной внутри цилиндра  $x^2 + y^2 = a^2$ ;
  - части эллиптического параболоида  $2az = x^2 + y^2$ , заключенной внутри цилиндра  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ ;
  - части гиперболического параболоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$  при  $z \geq 0$ , вырезанной цилиндром  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;
  - части поверхности  $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{2z}{c} = 1$ , вырезанной плоскостями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ;
  - части конической поверхности  $z^2 = 2xy$ , отсекаемой плоскостями  $x + y = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ;
  - части конической поверхности  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , заключенной внутри цилиндра  $x^2 + y^2 = 2x$ .
- Пользуясь параметрическим заданием поверхности, вычислите площадь:
  - части сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , заключенной внутри цилиндра  $x^2 + z^2 = b^2$ , если  $0 < b < a$ ;

- б) части сферы  $x = R \cos v \sin u$ ,  $y = R \sin v \sin u$ ,  $z = R \cos u$ , ограниченной двумя параллелями и двумя меридианами, т. е.  $v_1 \leq v \leq v_2$ ,  $u_1 \leq u \leq u_2$ ;
- в) части сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , расположенной вне цилиндров  $x^2 + y^2 = \pm ax$ ;
- г) части цилиндра  $x^2 + y^2 = a^2$  при  $x > 0$ ,  $y > 0$ , вырезанной плоскостями  $x + z = 0$ ,  $x - z = 0$ ;
- д) части гиперболического параболоида  $z = (x^2 - y^2)/2$ , заключенной внутри цилиндра  $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)$ ;
- е) части геликоида  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = h\varphi$ ,  $0 \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ;
- ж) поверхности тора  $x = (b + a \cos \psi) \cos \varphi$ ,  $y = (b + a \cos \psi) \sin \varphi$ ,  $z = a \sin \psi$  при  $0 < a \leq b$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \psi \leq 2\pi$ .
5. Вычислите площадь поверхности тела, ограниченного поверхностями:
- $x^2 + y^2 = z^2/3$ ,  $x + y + z = 2a$  ( $a > 0$ );
  - $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $x + 2z = a$  ( $a > 0$ ).

## § 2. Поверхностные интегралы первого рода

### Основные понятия и теоремы

**1. Определение поверхностного интеграла первого рода.** Пусть на квадрируемой поверхности  $\Phi$  определена функция  $f(M) = f(x, y, z)$ . Разобьем  $\Phi$  кусочно гладкими кривыми на  $n$  квадрируемых частей:  $\Phi = \bigcup_{i=1}^n \Phi_i$ . На каждой части  $\Phi_i$  выберем произвольную точку  $M_i$  и составим *интегральную сумму*

$$I(\Phi_i, M_i) = \sum_{i=1}^n f(M_i) S(\Phi_i),$$

где  $S(\Phi_i)$  — площадь  $\Phi_i$ . Пусть  $d_i$  — диаметр  $\Phi_i$ ,  $d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$ .

**Определение.** Число  $I$  называется *пределом интегральных сумм*  $I(\Phi_i, M_i)$  при  $d \rightarrow 0$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что для любого разбиения  $\Phi$ , у которого  $d < \delta$ , и для любого выбора точек  $M_i$  выполняется неравенство

$$|I(\Phi_i, M_i) - I| < \varepsilon.$$

Предел  $I$  интегральных сумм называется *поверхностным интегралом первого рода* от функции  $f(M)$  по поверхности  $\Phi$  и обозначается

$$\iint_{\Phi} f(M) dS$$

или

$$\iint_{\Phi} f(x, y, z) dS. \quad (1)$$

## 2. Вычисление поверхностного интеграла первого рода с помощью двойного интеграла.

Теорема 2. Пусть  $\Phi$  — гладкая поверхность, не имеющая особых точек, заданная параметрически уравнениями  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$ ,  $z = \chi(u, v)$ ,  $(u, v) \in g$ , и пусть функция  $f(x, y, z)$  непрерывна на  $\Phi$ . Тогда существует интеграл (1) и справедливо равенство

$$\iint_{\Phi} f(x, y, z) dS = \iint_g f(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv; \quad (2)$$

функции  $E$ ,  $G$ ,  $F$  переменных  $u$ ,  $v$  определены формулами (10) из § 1.

Замечание 1. Если поверхность  $\Phi$  является графиком непрерывно дифференцируемой функции  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in G$ , то имеет место равенство

$$\iint_{\Phi} f(x, y, z) dS = \iint_G f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy. \quad (3)$$

Замечание 2. Формулы (2) и (3) остаются справедливыми для кусочно гладкой поверхности.

**3. Физические приложения поверхностных интегралов первого рода.** Пусть  $\Phi$  — материальная поверхность с поверхностью плотностью  $\rho(x, y, z)$  в точке  $M(x, y, z) \in \Phi$ .

Тогда справедливы следующие формулы:

a)  $M = \iint_{\Phi} \rho(x, y, z) dS$  — масса поверхности;

б)  $M_{xy} = \iint_{\Phi} z \rho(x, y, z) dS$ ,  $M_{xz} = \iint_{\Phi} y \rho(x, y, z) dS$ ,  $M_{yz} = \iint_{\Phi} x \rho(x, y, z) dS$  — статические моменты поверхности относительно координатных плоскостей  $Oxy$ ,  $Oxz$ ,  $Oyz$ ;

в)  $x_0 = \frac{M_{yz}}{M}$ ,  $y_0 = \frac{M_{xz}}{M}$ ,  $z_0 = \frac{M_{xy}}{M}$  — координаты центра тяжести поверхности;

г)  $I_x = \iint_{\Phi} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS$  — момент инерции поверхности относительно оси  $Ox$ ;

д)  $I_{yz} = \iint_{\Phi} x^2 \rho(x, y, z) dS$  — момент инерции поверхности относительно плоскости  $Oyz$ ;

е)  $I_0 = \iint_{\Phi} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dS$  — момент инерции поверхности относительно начала координат;

ж)  $\mathbf{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$  — сила притяжения материальной точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  массы  $m_0$  материальной поверхностью  $\Phi$ , где

$$F_x = \gamma m_0 \iint_{\Phi} \frac{x - x_0}{r^3} \rho(x, y, z) dS, \quad F_y = \gamma m_0 \iint_{\Phi} \frac{y - y_0}{r^3} \rho(x, y, z) dS,$$

$$F_z = \gamma m_0 \iint_{\Phi} \frac{z - z_0}{r^3} \rho(x, y, z) dS,$$

$\mathbf{r} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $\gamma$  — гравитационная постоянная.

### Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение поверхностного интеграла первого рода.
2. Сформулируйте теорему о существовании поверхностного интеграла первого рода и сведении его к двойному интегралу для поверхности, заданной параметрически.
3. Напишите формулу вычисления поверхностного интеграла первого рода с помощью двойного интеграла для явно заданной поверхности.
4. Пусть  $\Phi$  — материальная поверхность с поверхностной плотностью  $\rho(M)$ . Напишите формулы, по которым для этой поверхности вычисляются: а) статические моменты относительно координатных плоскостей, б) координаты центра тяжести; в) моменты инерции  $I_{xy}$  и  $I_z$  относительно плоскости  $Oxy$  и оси  $Oz$ ; г) сила, с которой поверхность притягивает материальную точку массы  $m_0$ , помещенную в точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ .
5. Пользуясь формулой (3), вычислите интеграл  $\iint_{\Phi} z dS$ , где  $\Phi$  — часть параболоида  $z = x^2 + y^2$  при  $0 \leq z \leq 1$ .
6. Пользуясь формулой (3), сведите поверхностный интеграл  $\iint_{\Phi} f(x, y, z) dS$  к сумме двух двойных интегралов, если  $\Phi$  — сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

### Примеры решения задач

1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода  $I = \iint_{\Phi} z dS$ ,

где  $\Phi$  — часть гиперболического параболоида  $z = xy$ , вырезанная цилиндром  $x^2 + y^2 = 4$ .

Δ По формуле (3) получаем

$$I = \iint_G z \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \iint_G xy \sqrt{1 + y^2 + x^2} dx dy,$$

где  $G$  — круг  $x^2 + y^2 \leq 4$ . Переходя к полярным координатам  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  и сводя двойной интеграл к повторному, находим

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 \cos \varphi \sin \varphi \sqrt{1 + r^2} dr = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \sin \varphi \cdot \int_0^2 r^3 \sqrt{1 + r^2} dr = 0. \end{aligned} \quad \blacktriangle$$

2. Вычислить интеграл  $I = \iint_{\Phi} y dS$ , где  $\Phi$  — часть поверхности цилиндра  $x = 2y^2 + 1$  при  $y > 0$ , вырезанная поверхностями  $x = y^2 + z^2$ ,

$$x = 2, \quad x = 3.$$

Δ Вычислим интеграл  $I$  с помощью двойного интеграла по области  $G$  — проекции поверхности  $\Phi$  на плоскость  $Oxz$ . Для отыскания границы области  $G$  исключим переменную  $y$  из уравнений  $x = 2y^2 + 1$  и  $x = y^2 + z^2$ ; получим  $2z^2 = x + 1$ .

Граница области  $G$  состоит из двух дуг этой параболы и отрезков

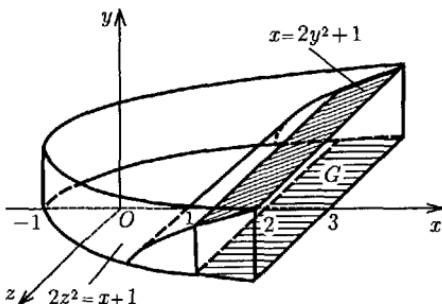


Рис. 65

прямых  $x = 2$  и  $x = 3$  (рис. 65). Уравнение поверхности запишем в виде  $y = \sqrt{\frac{x-1}{2}}$ . Отсюда следует, что

$$\sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} = \sqrt{\frac{8x-7}{8x-8}}.$$

Пользуясь формулой

$$I = \iint_G \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz,$$

получим

$$\begin{aligned} I &= \iint_G \sqrt{\frac{x-1}{2}} \sqrt{\frac{8x-7}{8x-8}} dx dz = \int_2^3 \frac{1}{4} \sqrt{8x-7} dx \int_{-\sqrt{(x+1)/2}}^{\sqrt{(x-1)/2}} dz = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_2^3 \sqrt{8x^2 + x - 7} dx = \int_2^3 \sqrt{\left(x + \frac{1}{16}\right)^2 - \left(\frac{15}{16}\right)^2} dx = \\ &= \left[ \frac{x + 1/16}{2} \sqrt{x^2 + \frac{x}{8} - \frac{7}{8}} - \left(\frac{15}{16}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| x + \frac{1}{16} + \sqrt{x^2 + \frac{x}{8} - \frac{7}{8}} \right| \right]_2^3 = \\ &= \frac{98\sqrt{17} - 99\sqrt{3}}{64\sqrt{2}} + \left(\frac{15}{16}\right)^2 \ln \frac{33 + 12\sqrt{6}}{49 + 8\sqrt{34}} \approx 2,2. \blacksquare \end{aligned}$$

3. Вычислить момент инерции  $I_z$  относительно оси  $Oz$  однородной сферической оболочки  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $z \geq 0$  плотности  $\rho_0$ .

Δ Имеем  $I_z = \iint_{\Phi} \rho_0(x^2 + y^2) dS$ . Напишем параметрические уравнения данной полусферы:  $x = a \cos v \sin u$ ,  $y = a \sin v \sin u$ ,  $z = a \cos u$ ,

$0 \leq u \leq \pi/2$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$ . По формулам (10) из § 1 находим

$$E = a^2 \cos^2 v \cos^2 u + a^2 \sin^2 v \cos^2 u + a^2 \sin^2 u = a^2,$$

$$G = a^2 \sin^2 v \sin^2 u + a^2 \cos^2 v \sin^2 u = a^2 \sin^2 u,$$

$$F = -a^2 \cos v \cos u \sin v \sin u + a^2 \sin v \cos u \cdot \cos v \sin u = 0,$$

откуда  $\sqrt{EG - F^2} = a^2 \sin u$ .

Выразим подынтегральную функцию в переменных  $u$ ,  $v$ ; получим  $x^2 + y^2 = a^2 \sin^2 u$ .

Вычисляем интеграл  $I_z$  по формуле (2):

$$I_z = \rho_0 \iint_g a^2 \sin^2 u \cdot a^2 \sin u \, du \, dv = \rho_0 a^4 \int_0^{\pi/2} \sin^3 u \, du \int_0^{2\pi} \, dv = \frac{4}{3} \pi \rho_0 a^4. \blacksquare$$

4. Заряд  $Q$  равномерно распределен по сфере радиуса  $R$ . Найти напряженность электрического поля сферы в точке  $A$ , находящейся на расстоянии  $r$  ( $r \neq R$ ) от центра сферы.

Введем прямоугольную систему координат с началом  $O$  в центре сферы и осью  $Ox$ , направленной, как и вектор  $\overrightarrow{OA}$ . Пусть  $\mathbf{E} = \{E_1, E_2, E_3\}$  — вектор напряженности в точке  $A$  электрического поля сферы. Из соображений симметрии имеем  $E_2 = E_3 = 0$  и  $|\mathbf{E}| = E_1$ . Поверхностная плотность  $\sigma$  заряда на сфере равна  $\frac{Q}{4\pi R^2}$ . Вектор напряженности, создаваемой в точке  $A$  элементом сферы с площадью  $\Delta s$ , обозначим через  $\overrightarrow{\Delta E} = \{\Delta E_1, \Delta E_2, \Delta E_3\}$ . Заряд элемента сферы равен  $\sigma \Delta s$ , и по формуле напряженности поля точечного заряда получаем  $|\Delta \mathbf{E}| = \frac{k \sigma \Delta s}{\rho^2}$ , где  $k = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0}$ ,  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая постоянная,  $\rho$  — расстояние от точки  $A(r, 0, 0)$  до элемента сферы, заряд которого будем считать сосредоточенным в точке  $M(x, y, z)$  этого элемента.

Пусть  $\alpha$  — угол между вектором  $\overrightarrow{\Delta E}$  и осью  $Ox$ . Тогда

$$\Delta E_1 = |\overrightarrow{\Delta E}| \cos \alpha = k \sigma \Delta s \cos \alpha \cdot \frac{1}{\rho^2}.$$

Вычислим  $\rho$  и  $\cos \alpha$ :

$$\rho = |\overrightarrow{MA}| = \sqrt{(x - r)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rx},$$

$$\cos \alpha = \frac{r - x}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rx}}.$$

Следовательно,

$$\Delta E_1 = k \sigma \frac{r - x}{(R^2 + r^2 - 2rx)^{3/2}} \Delta S.$$

Пусть сфера разбита кусочно гладкими кривыми на  $n$  квадрируемых частей (элементов). Будем предполагать, что диаметр  $d_i$   $i$ -го

элемента достаточно мал. Для каждого элемента вычислим величину  $\Delta E_1$ , составим сумму всех  $n$  таких величин и перейдем к пределу при  $d \rightarrow 0$  ( $d = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$ ). В результате получим поверхностный интеграл первого рода

$$E_1 = k\sigma \iint_{\Phi} \frac{r-x}{(R^2+r^2-2rx)^{3/2}} dS.$$

Верхняя и нижняя полусфера проектируются на координатную плоскость  $Oxy$  в один и тот же круг  $G = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$  и для обеих полусфер имеем  $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$ . Поэтому поверхностный интеграл  $E_1$  равен удвоенному двойному интегралу по кругу  $G$ :

$$E_1 = 2k\sigma \iint_G \frac{r-x}{(R^2+r^2-2rx)^{3/2}} \cdot \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Вычислим полученный интеграл с помощью повторного интегрирования:

$$\begin{aligned} E_1 &= 2k\sigma R \int_{-R}^R \frac{r-x}{(R^2+r^2-2rx)^{3/2}} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = \\ &= 2k\sigma R \int_{-R}^R \frac{r-x}{(R^2+r^2-2rx)^{3/2}} dx \left( \arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}} \Big|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \right) = \\ &= 2k\sigma R \pi \int_{-R}^R \frac{r-x}{(R^2+r^2-2rx)^{3/2}} dx = \\ &= 2k\sigma R \pi \left[ \int_{-R}^R \frac{r dx}{(R^2+r^2-2rx)^{3/2}} - \int_{-R}^R \frac{x}{r} d \left( \frac{1}{\sqrt{R^2+r^2-2rx}} \right) \right] = \\ &= 2k\sigma R \pi \left\{ (R^2+r^2-2rx)^{-1/2} \Big|_{-R}^R - \frac{1}{r} \left[ x(R^2+r^2-2rx)^{-1/2} \Big|_{-R}^R - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_{-R}^R (R^2+r^2-2rx)^{-1/2} dx \right] \right\} = 2k\sigma R \pi \left\{ \frac{1}{|r-R|} - \frac{1}{|r+R|} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r} \left( \frac{R}{|r-R|} + \frac{R}{r+R} + \frac{1}{r} (|r-R|-r-R) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\text{если } r > R, \text{ то } E_1 = 2k\sigma\pi R \cdot \frac{2R}{r^2} = k \cdot \frac{Q}{r^2};$$

$$\text{если } r < R, \text{ то } E_1 = 2k\sigma\pi R \cdot 0 = 0.$$

Таким образом, сфера, на которой равномерно распределен заряд  $Q$ , создает в пространстве вне сферы такое же электрическое поле, что и точечный заряд  $Q$ , помещенный в центр сферы. Внутри же сферы электрическое поле равно нулю. ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

6. На сколько отличаются друг от друга поверхностные интегралы  $I_1 = \iint_{\Phi_1} (x^2 + y^2 + z^2) dS$  и  $I_2 = \iint_{\Phi_2} (x^2 + y^2 + z^2) dS$ , где  $\Phi_1$  — сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $\Phi_2$  — поверхность октаэдра  $|x| + |y| + |z| = a$ , вписанного в эту сферу?
7. Вычислите интеграл  $\iint_{\Phi} \sqrt{z^2 - x^2} dS$ , где  $\Phi$  — часть конуса  $x^2 + y^2 = z^2$ , вырезанная цилиндром  $x^2 + y^2 = a^2$ .
8. Вычислите поверхностные интегралы первого рода:
- $\iint_{\Phi} (x + y + z) dS$ , где  $\Phi$  — полусфера  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $z \geq 0$ ;
  - $\iint_{\Phi} (x^2 + y^2) dS$ , где  $\Phi$  — граница тела, заданного неравенствами  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ ;
  - $\iint_{\Phi} \frac{dS}{(1 + x + y)^2}$ , где  $\Phi$  — граница тетраэдра, заданного неравенствами  $x + y + z \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ ;
  - $\iint_{\Phi} |xyz| dS$ , где  $\Phi$  — часть поверхности  $z = x^2 + y^2$  при  $z \leq 1$ ;
  - $\iint_{\Phi} z dS$ , где  $\Phi$  — часть геликоида  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = v$  при  $0 \leq u \leq a$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$ ;
  - $\iint_{\Phi} z^2 dS$ , где  $\Phi$  — часть конической поверхности  $x = r \cos \varphi \sin \alpha$ ,  $y = r \sin \varphi \sin \alpha$ ,  $z = r \cos \alpha$  при  $0 \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  ( $a > 0$ ,  $\alpha$  — постоянная и  $0 < \alpha < \pi/2$ );
  - $\iint_{\Phi} (xy + yz + zx) dS$ , где  $\Phi$  — часть конической поверхности  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , вырезанная цилиндром  $x^2 + y^2 = 2ax$ .
9. Вычислите массу: а) части поверхности  $z = (x^2 + y^2)/2$  при  $z \leq 1$ , плотность которой в точке  $M(x, y, z)$  равна  $z$ ; б) полусферы  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  при  $z \geq 0$ , плотность которой  $\rho(M) = z/a$ .
10. Вычислите статистические моменты относительно координатных плоскостей однородной треугольной пластинки  $x + y + z = a$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$  плотности  $\rho_0$ .
11. Вычислите момент инерции относительно оси  $Oz$  части однородной конической поверхности  $x^2 + z^2 = y^2$ ,  $y > 0$  плотности  $\rho_0$ , заключенной внутри цилиндра  $x^2 + y^2 = a^2$ .
12. Вычислите момент инерции однородной конической поверхности  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$ ,  $0 \leq z \leq b$ , плотности  $\rho_0$  относительно прямой  $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0}$ .
13. Вычислите моменты инерции относительно начала координат однородных поверхностей  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  плотности 1, где  $\Phi_1$  — поверхность куба с

- центром в начале координат и ребром  $2a$ ;  $\Phi_2$  — полная поверхность цилиндра  $x^2 + y^2 \leq R^2$ ,  $0 \leq z \leq H$ .
14. Вычислите координаты центра тяжести однородных поверхностей  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , где  $\Phi_1$  — часть конической поверхности  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , вырезанная цилиндром  $x^2 + y^2 = ax$ ;  $\Phi_2$  — часть поверхности  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  при  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $x + y \leq a$ .
15. С какой силой однородная поверхность  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = r$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq b \leq r \leq a$ , плотности  $\rho_0$  притягивает материальную точку массы  $m$ , помещенную в начало координат?

### § 3. Поверхностные интегралы второго рода

#### Основные понятия и формулы

**1. Двусторонние и односторонние поверхности.** Если поверхность ограничивает некоторое тело, то у нее различают *внешнюю* и *внутреннюю* стороны. Примером такой поверхности является сфера. Если поверхность задана уравнением  $z = f(x, y)$ , то у нее различают *верхнюю* и *нижнюю* стороны. Указанные поверхности имеют две стороны. Наряду с ними существуют так называемые односторонние поверхности. Сформулируем теперь строгие определения.

Если каждой точке  $M$  области  $G$  поставлен в соответствие вектор  $\mathbf{a}(M)$ , то говорят, что в области  $G$  задано *векторное поле*. Векторное поле  $\mathbf{a}(M) = \{a_1(M), a_2(M), a_3(M)\}$  называется *непрерывным* в области  $G$ , если его координаты — функции  $a_1(M), a_2(M), a_3(M)$  — являются непрерывными в области  $G$ . Гладкая поверхность  $\Phi$  в каждой внутренней точке  $M$  имеет нормаль  $\mathbf{N}(M)$ , причем существует окрестность этой точки, вырезающая часть поверхности, на которой поле нормалей непрерывно.

Если можно задать векторное поле нормалей, непрерывное на всей поверхности, то такая поверхность называется *двусторонней*. Поверхность, на которой не существует непрерывного векторного поля нормалей, называется *односторонней*.

Двусторонняя поверхность  $\Phi$  характеризуется следующим свойством: для любой точки  $M \in \Phi$  и для любого замкнутого контура, проходящего по поверхности  $\Phi$  и не пересекающегося с границей поверхности, выбранное в точке  $M$  направление нормали, непрерывно меняясь при движении точки по контуру, не изменит своего направления (на противоположное) при возвращении в точку  $M$ .

На односторонней поверхности существует такой контур, при обходе которого направление нормали изменится на противоположное.

На каждой двусторонней поверхности можно задать два непрерывных поля нормалей, противоположных по направлению:  $\mathbf{N}(M)$  и  $-\mathbf{N}(M)$ . Выбор одного из этих полей называется выбором *стороны поверхности*. Таким образом, двусторонняя поверхность имеет две стороны.

Двусторонние поверхности называются также *ориентируемыми*, а выбор определенной стороны (выбор поля  $\mathbf{N}(M)$  или  $-\mathbf{N}(M)$ ) называется *ориентацией поверхности*. Например, плоскость, сфера, гиперболоиды — двусторонние поверхности, лист Мёбиуса — односторонняя поверхность. На рис. 66 изображен лист Мёбиуса и указан контур, при обходе по которому направление нормали изменяется на противоположное.

Если поверхность задана уравнением  $z = f(x, y)$ , где функция  $f(x, y)$  непрерывно дифференцируема, то на верхней стороне поверхности непрерывное поле нормалей можно задать вектор-функцией

$$\mathbf{N}(M) = \{-f_x(M), -f_y(M), 1\}, \quad (1)$$

на нижней стороне — вектор-функцией

$$-\mathbf{N}(M) = \{f_x(M), f_y(M), -1\}. \quad (2)$$

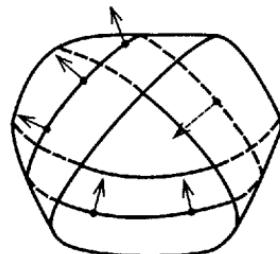


Рис. 66

Если гладкая двусторонняя поверхность задана параметрически, то на одной ее стороне непрерывное поле нормалей можно задать вектор-функцией  $\mathbf{N} = \{A, B, C\}$ , а на другой — вектор-функцией  $-\mathbf{N} = \{-A, -B, -C\}$ .

Понятия двусторонней и односторонней поверхности можно ввести и для кусочно гладких поверхностей. Примером кусочно гладкой двусторонней поверхности является поверхность параллелепипеда.

**2. Определение поверхностного интеграла второго рода.** Пусть  $\Phi$  — гладкая или кусочно гладкая ограниченная поверхность. Выберем одну из ее сторон, определяемую полем нормалей  $\mathbf{N}(M)$ . Пусть  $\alpha(M), \beta(M), \gamma(M)$  — углы, которые вектор  $\mathbf{N}(M)$  составляет с осями координат, и пусть на поверхности  $\Phi$  заданы три функции  $P(M), Q(M), R(M)$ .

Определение. Поверхностные интегралы первого рода

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{\Phi} P(M) \cos \alpha(M) dS, & I_2 &= \iint_{\Phi} Q(M) \cos \beta(M) dS, \\ I_3 &= \iint_{\Phi} R(M) \cos \gamma(M) dS \end{aligned} \quad (3)$$

называются *поверхностными интегралами второго рода* соответственно от функций  $P, Q, R$  по выбранной стороне поверхности  $\Phi$ .

Они обозначаются также следующим образом:

$$I_1 = \iint_{\Phi} P(M) dy dz, \quad I_2 = \iint_{\Phi} Q(M) dz dx, \quad I_3 = \iint_{\Phi} R(M) dx dy.$$

Такие обозначения связаны с тем, что элемент площади  $dy dz$  можно рассматривать как площадь проекции элемента поверхности с площадью  $dS$  на координатную плоскость  $Oyz$ , т. е.  $dy dz = dS \cos \alpha$

(или  $dy dz = -dS \cos \alpha$  в зависимости от знака  $\cos \alpha$ ) и, аналогично,  $dz dx = dS \cos \beta$ ,  $dx dy = dS \cos \gamma$ .

Из определения следует, что поверхностный интеграл второго рода зависит от выбора стороны поверхности. Если взять другую сторону поверхности, то вектор  $\mathbf{N}(M)$  изменит направление на противоположное; поэтому направляющие косинусы вектора  $\mathbf{N}(M)$ , а следовательно, и интегралы  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  изменят знак.

Сумма

$$I_1 + I_2 + I_3 = \iint_{\Phi} P(M) dy dz + Q(M) dz dx + R(M) dx dy \quad (4)$$

называется *общим поверхностным интегралом второго рода*.

**3. Вычисление поверхностного интеграла второго рода с помощью двойного интеграла.** Поверхностные интегралы второго рода (3) по выбранной стороне поверхности  $\Phi$  являются поверхностными интегралами первого рода соответственно от функций  $P(M) \cos \alpha(M)$ ,  $Q(M) \cos \beta(M)$ ,  $R(M) \cos \gamma(M)$ . Поэтому на основании теоремы 2, считая, что функции  $P(M)$ ,  $Q(M)$ ,  $R(M)$  непрерывны на  $\Phi$ , получаем формулы для вычисления поверхностных интегралов второго рода.

Пусть гладкая двусторонняя поверхность  $\Phi$  задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \quad (u, v) \in g,$$

и не имеет особых точек. Выберем ту сторону поверхности, на которой  $\mathbf{N}(M) = \{A, B, C\}$ . Тогда, пользуясь формулой (11) из § 1, находим

$$\begin{aligned} \cos \alpha(M) &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{A}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ \cos \beta(M) &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{B}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ \cos \gamma(M) &= \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{C}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{aligned}$$

По формуле (2) из § 2 получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{\Phi} P(M) \cos \alpha(M) dS = \\ &= \iint_g P(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \frac{A}{\sqrt{EG - F^2}} \sqrt{EG - F^2} du dv = \\ &= \iint_g P(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) A(u, v) du dv. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично,

$$I_2 = \iint_{\Phi} Q(M) \cos \beta(M) dS = \iint_g Q(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) B(u, v) du dv, \quad (6)$$

$$I_3 = \iint_{\Phi} R(M) \cos \gamma(M) dS = \iint_G R(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) C(u, v) du dv. \quad (7)$$

Если гладкая поверхность  $\Phi$  задана уравнением  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in G$ , и выбрана верхняя сторона поверхности, т. е.  $\mathbf{N}(M) = \{-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1\}$ , то  $\cos \gamma(M) = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$ , и по формуле (3) из § 2 находим

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint_{\Phi} R(M) \cos \gamma(M) dS = \\ &= \iint_G R(x, y, f(x, y)) \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = \\ &= \iint_G R(x, y, f(x, y)) dx dy. \end{aligned} \quad (8)$$

Для нижней стороны поверхности имеем  $\cos \gamma(M) = -\frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$ , откуда

$$I_3 = - \iint_G R(x, y, f(x, y)) dx dy. \quad (9)$$

Аналогично получаются формулы для вычисления интегралов  $I_1$  и  $I_2$ , если поверхность  $\Phi$  задана соответственно уравнением  $x = x(y, z)$ ,  $(y, z) \in G$ , и уравнением  $y = y(z, x)$ ,  $(z, x) \in G$ .

**4. Физический смысл поверхностного интеграла второго рода.** Запишем общий поверхностный интеграл второго рода (4) в виде

$$\Pi = \iint_{\Phi} [P(M) \cos \alpha(M) + Q(M) \cos \beta(M) + R(M) \cos \gamma(M)] dS. \quad (10)$$

Направляющие косинусы  $\cos \alpha(M)$ ,  $\cos \beta(M)$ ,  $\cos \gamma(M)$  являются координатами единичного вектора нормали  $\mathbf{n}(M)$  к поверхности  $\Phi$  в точке  $M$ . Если ввести вектор  $\mathbf{a}(M) = \{P(M), Q(M), R(M)\}$ , то подынтегральное выражение будет представлять собой скалярное произведение векторов  $\mathbf{a}(M)$  и  $\mathbf{n}(M)$ , а интеграл (10) можно записать в виде

$$\Pi = \iint_{\Phi} (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS. \quad (11)$$

Интеграл (11) называется *потоком вектора (векторного поля)* через выбранную сторону поверхности  $\Phi$  (определенную вектором  $\mathbf{n}(M)$ ). В частности, если  $\mathbf{a}(M) = \mathbf{v}(M)$  — скорость течения жидкости в точке  $M$ , то  $\Pi = \iint_{\Phi} (\mathbf{v}, \mathbf{n}) dS$  представляет собой поток жидкости через выбранную сторону поверхности (см. также § 2 из гл. XV).

### Контрольные вопросы и задания

- 1 Сформулируйте понятие векторного поля
- 2 Дайте определение поверхности а) двусторонней, б) односторонней, в) ориентируемой. Приведите примеры двусторонних поверхностей и односторонней поверхности
- 3 Каким характеристическим свойством обладает двусторонняя поверхность, односторонняя поверхность?
- 4 Укажите вектор-функцию  $\mathbf{N}(M)$ , определяющую верхнюю сторону поверхности  $z = f(x, y)$
- 5 Найдите непрерывное векторное поле единичных нормалей, определяющее внешнюю сторону сферы  $x = a \sin u \cos v$ ,  $y = a \sin u \sin v$ ,  $z = a \cos u$ ,  $(u, v) \in g = \{(u, v) | 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi\}$
- 6 Вычислите координаты единичных векторов нормалей, определяющих нижнюю сторону части конической поверхности  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  при  $0 < a \leq z \leq b$ ,  $a < b$ . Докажите, что это поле нормалей непрерывно
- 7 Сформулируйте определение поверхностных интегралов второго рода. Как они обозначаются?
- 8 Зависят ли от ориентации поверхности
  - а) поверхностный интеграл первого рода и его интегральные суммы,
  - б) поверхностный интеграл второго рода?
- 9 Что такое общий поверхностный интеграл второго рода? Каков его физический смысл?
- 10 Сформулируйте достаточные условия существования поверхностного интеграла второго рода и напишите формулы сведения его к двойному интегралу в случае, если поверхность задана
  - а) параметрически, б) явно
- 11 Вычислите поверхностные интегралы второго рода  $\iint_{\Phi} dx dy$ ,  $\iint_{\Phi} dy dz$ ,  $\iint_{\Phi} dz dx$ , где  $\Phi$  — внешняя сторона сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
- 12 Выразите поверхностный интеграл второго рода
 
$$\iint_{\Phi} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) f(x, y, z) dS$$
 через сумму двойных интегралов, где  $\Phi$  — сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  и  $\mathbf{n}(M) = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  — ее внешняя нормаль
- 13 Вычислите поверхностный интеграл второго рода
 
$$\iint_{\Phi} x dy dz + y dz dx + z dx dy,$$
 где  $\Phi$  — внешняя сторона поверхности куба  $\{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ . Чему равен этот интеграл, если  $\Phi$  — внутренняя сторона поверхности куба?

### Примеры решения задач

1. Вычислить поверхностный интеграл второго рода  $I = \iint_{\Phi} dx dy$ , где  $\Phi$  — нижняя сторона части конуса  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  при  $0 \leq z \leq 1$

Δ Проекцией данной части конуса на плоскость  $Oxy$  является круг  $G$   $x^2 + y^2 \leq 1$ . Пользуясь формулой (9), сведем поверхностный интеграл  $I$  к двойному интегралу  $I = -\iint_G dx dy$ . Так как  $\iint_G dx dy = S(G) = \pi$ , то  $I = -\pi$ . ▲

2. Вычислить поверхностный интеграл второго рода  $I = \iint_{\Phi} y dz dx$ ,

где  $\Phi$  — верхняя сторона части параболоида  $z = x^2 + y^2$  при  $0 \leq z \leq 2$ .

Δ По формуле (1) вычислим вектор нормали, определяющий верхнюю сторону данной поверхности  $\mathbf{N} = \{-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1\} = \{-2x, -2y, 1\}$ . Отсюда следует, что для единичного вектора  $\mathbf{n}(M) = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  верхней стороны справедливо равенство

$$\operatorname{sgn} \cos \beta(M) = \begin{cases} -1 & \text{при } y > 0, \\ 1 & \text{при } y < 0 \end{cases}$$

Разобьем данную поверхность на две части, описываемые уравнениями  $y = \sqrt{z - x^2}$  при  $y \geq 0$  и  $y = -\sqrt{z - x^2}$  при  $y \leq 0$ . Обе части поверхности (обозначим их соответственно  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ ) проектируются на область  $G$  плоскости  $Oxz$ , граница которой состоит из дуги параболы  $z = x^2$  и отрезка прямой  $z = 2$ , т. е.  $G = \{(x, z) \mid -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}, x^2 \leq z \leq 2\}$ .

Сведем поверхностные интегралы по  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  к двойным интегралам по области  $G$  подобно тому, как это было сделано при выводе формул (8) и (9). Получим

$$\iint_{\Phi_1} y dz dx = -\iint_G y(x, z) dz dx = -\iint_G \sqrt{z - x^2} dz dx$$

(здесь перед двойным интегралом стоит знак минус, так как  $\cos \beta(M) < 0$ ) и, аналогично,

$$\iint_{\Phi_2} y dz dx = \iint_G y(x, z) dz dx = \iint_G -\sqrt{z - x^2} dz dx.$$

Таким образом, имеем

$$I = \iint_{\Phi} y dz dx = \iint_{\Phi_1} y dz dx + \iint_{\Phi_2} y dz dx = -2 \iint_G \sqrt{z - x^2} dz dx.$$

Двойной интеграл вычислим с помощью повторного интегрирования:

$$I = -2 \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^2 \sqrt{z - x^2} dz = -2 \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2}{3} (z - x^2)^{3/2} \Big|_{x^2}^2 = \\ = -\frac{4}{3} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2)^{3/2} dx$$

Используя замену переменной  $x = \sqrt{2} \sin t$ ,  $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ , окончательно получаем

$$I = -\frac{4}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2^{3/2} \sqrt{2} \cos^4 t dt = -2\pi. ▲$$

3. Вычислить поток  $\Pi$  вектора  $\mathbf{a} = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$  через внешнюю сторону сферы  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ .

Δ Согласно определению потока требуется вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\Pi = \iint_{\Phi} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS,$$

где  $\Phi$  — внешняя сторона данной сферы. Находим вектор нормали  $\mathbf{N}$  по формуле (7) из § 1:  $\mathbf{N} = \{2(x - a), 2(y - b), 2(z - c)\}$ . Единичный вектор нормали  $\mathbf{n} = \left\{ \frac{x - a}{R}, \frac{y - b}{R}, \frac{z - c}{R} \right\}$  определяет внешнюю сторону сферы. Учитывая это, перепишем интеграл в виде

$$\Pi = \iint_{\Phi} \left( x^2 \frac{x - a}{R} + y^2 \frac{y - b}{R} + z^2 \frac{z - c}{R} \right) dS$$

и вычислим его по формуле (2) из § 2. Для этого запишем параметрические уравнения сферы.  $x = a + R \cos v \sin u$ ,  $y = b + R \sin v \sin u$ ,  $z = c + R \cos u$ ,  $0 \leq u \leq \pi$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$ . Так как  $\sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin u$ , то

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} R^2 \sin u \left[ (a + R \cos v \sin u)^2 \cos v \sin u + \right. \\ &\quad \left. + (b + R \sin v \sin u)^2 \sin v \sin u + (c + R \cos u)^2 \cos u \right] du = \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} 2aR \cos^2 v dv \int_0^{\pi} \sin^3 u du + R^2 \int_0^{2\pi} 2bR \sin^2 v \int_0^{\pi} \sin^3 u du + \\ &\quad + R^2 \int_0^{2\pi} 2cR dv \int_0^{\pi} \cos^2 u \sin u du = \frac{8\pi R^3}{3}(a + b + c). \blacksquare \end{aligned}$$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

16. Вычислите поверхностный интеграл второго рода

а)  $\iint_{\Phi} x dy dz + y dz dx + z dx dy$ , где  $\Phi$  — внешняя сторона сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,

б)  $\iint_{\Phi} f(x) dy dz + g(y) dz dx + h(z) dx dy$ , где  $\Phi$  — внешняя сторона параллелепипеда  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $0 \leq z \leq c$ ,  $f(x)$ ,  $g(y)$ ,  $h(z)$  — непрерывные функции,

в)  $\iint_{\Phi} (y - z) dy dz + (z - x) dz dx + (x - y) dx dy$ , где  $\Phi$  — нижняя сторона части конической поверхности  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  при  $0 \leq z \leq h$ ,

г)  $\iint_{\Phi} \left( \frac{\cos \alpha}{x} + \frac{\cos \beta}{y} + \frac{\cos \gamma}{z} \right) ds$ , где  $\Phi$  — внешняя сторона эллипсоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

17. Вычислите поток вектора  $\mathbf{a}(M)$  через ориентированную поверхность  $\Phi$ , если
- $\mathbf{a}(M) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $\Phi$  — нижняя сторона части конической поверхности  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  при  $0 \leq z \leq h$ ,
  - $\mathbf{a}(M) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $\Phi$  — верхняя сторона основания этого конуса, т. е.  $\Phi = \{(x, y, z) | z = h, x^2 + y^2 \leq h^2\}$ ,
  - $\mathbf{a}(M) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ ,  $\Phi$  — внешняя сторона части цилиндрической поверхности  $x^2 + y^2 = a^2$  при  $0 \leq z \leq h$ ,
  - $\mathbf{a}(M) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ ,  $\Phi$  — внешняя сторона границы тела  $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}$ ,
  - $\mathbf{a}(M) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $\Phi$  — верхняя сторона части поверхности  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$  при  $0 \leq z \leq 1$ ,
  - $\mathbf{a}(M) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ ,  $\Phi$  — верхняя сторона части сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  при  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ,
  - $\mathbf{a}(M) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ ,  $\Phi$  — внешняя сторона поверхности пирамиды, ограниченной плоскостями  $x + y + z = a$  ( $a > 0$ ),  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,
  - $\mathbf{a}(M) = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ ,  $\Phi$  — внешняя сторона сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = x$ .

## § 4. Формула Стокса

### Основные понятия и формулы

**1. Согласование ориентации поверхности с направлением обхода ее границы.** Пусть  $\Phi$  — ориентированная поверхность, ограниченная замкнутым контуром  $L$ . Введем *положительное направление обхода контура, согласованное с ориентацией поверхности*: если наблюдатель находится на выбранной стороне поверхности (т. е. направление от ног к голове совпадает с направлением вектора

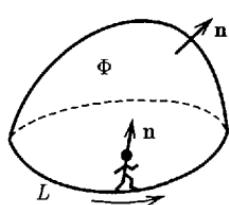


Рис. 67

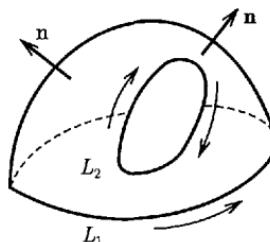


Рис. 68

нормали), то при обходе контура  $L$  в положительном направлении он оставляет поверхность слева от себя (рис. 67).

Если граница поверхности состоит из нескольких замкнутых контуров, то для каждого из них положительное направление обхода определяется таким же образом (рис. 68).

Поверхность  $\Phi$  называется *xyz-проектируемой*, если она однозначно проектируется на каждую координатную плоскость прямоугольной системы координат  $Oxyz$ . Такую поверхность можно задать с помощью любого из следующих уравнений:

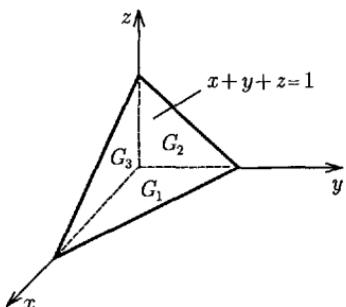


Рис. 69

$$\begin{aligned} z &= z(x, y), \quad (x, y) \in G_1; \\ x &= x(y, z), \quad (y, z) \in G_2; \\ y &= y(z, x), \quad (z, x) \in G_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Примером такой поверхности является часть плоскости, изображенная на рис. 69.

## 2. Формула Стокса.

**Теорема 3.** Пусть гладкая *xyz-проектируемая ориентированная поверхность*  $\Phi$  ограничена кусочно гладким контуром  $L$  и расположена внутри области  $G$ , в которой функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  имеют непрерывные частные производные первого порядка.

Тогда справедлива формула

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Phi} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (2)$$

где контур  $L$  обходится в положительном направлении.

Эта формула называется *формулой Стокса*. Она выражает криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру  $L$  через поверхностный интеграл второго рода по поверхности  $\Phi$ , ограниченной контуром  $L$ .

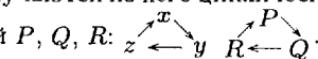
**Замечание 1.** Формула Стокса остается справедливой, если поверхность  $\Phi$  не является *xyz-проектируемой*, но ее можно разбить кусочно гладкими кривыми на конечное число *xyz-проектируемых* частей.

**Замечание 2.** Формула Стокса справедлива и в том случае, когда поверхность  $\Phi$  является плоской областью, параллельной какой-либо координатной плоскости (такая поверхность не является *xyz-проектируемой*). Для такой поверхности формула Стокса переходит в формулу Грина. Например, если поверхность  $\Phi$  параллельна плоскости  $Oxy$ , то вектор нормали  $n = \{0, 0, 1\}$ ,  $\oint_R dz = 0$ , и из равенства (2) получаем формулу Грина

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_{\Phi} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

**Замечание 3.** Если граница поверхности  $\Phi$  состоит из нескольких контуров, то формула Стокса остается в силе. При этом в левой части формулы (2) нужно записать сумму интегралов по всем контурам, пробегаемым в положительном направлении.

**Замечание 4.** Отметим, что третье слагаемое в правой части формулы Стокса представляет собой правую часть формулы Грина. Два первых получаются из него циклической перестановкой переменных  $x, y, z$  и функций  $P, Q, R$ :



**3. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования в пространстве.** Для криволинейных интегралов второго рода в пространстве справедлива теорема об условиях независимости их от пути интегрирования, аналогичная теореме 6 из гл. XIII. В этой теореме будет использовано понятие поверхностино односвязной области.

**Определение.** Трехмерная область  $G$  называется *поверхностью односвязной*, если для любого замкнутого контура  $L$ , лежащего в  $G$ , внутри области  $G$  найдется поверхность, ограниченная контуром  $L$ .

Примерами поверхности односвязных областей являются: шар, область, заключенная между концентрическими сферами; примером поверхности неодносвязной области служит тор.

**Теорема 4. 1°.** Пусть функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  непрерывны в области  $G$ . Тогда следующие три условия эквивалентны (т. е. из каждого из них следуют два другие).

I. Для любого замкнутого кусочно гладкого контура  $L$ , расположенного в области  $G$ , справедливо равенство

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = 0.$$

II. Для любых двух точек  $A$  и  $B$  области  $G$  криволинейный интеграл  $\int_{AB} P dx + Q dy + R dz$  не зависит от пути интегрирования, расположенного в области  $G$ .

III. Выражение  $P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$  является полным дифференциалом, т. е. в области  $G$  существует функция  $u(M) = u(x, y, z)$  такая, что

$$du = P dx + Q dy + R dz.$$

При этом для любой кусочно гладкой кривой  $AB$ , лежащей в  $G$ , имеет место равенство

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = u(B) - u(A). \quad (3)$$

2°. Пусть  $G$  — поверхность односвязная область, а функции  $P, Q, R$  в области  $G$  имеют непрерывные частные производные первого порядка. Тогда каждое из условий I III эквивалентно следующему условию.

IV. В области  $G$  выполняются равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \quad (4)$$

**Замечание** Функция  $u(x, y, z)$  из условия III может быть найдена по формуле

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P dx + Q dy + R dz = \\ &= \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz + C \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $(x_0, y_0, z_0)$  — какая-нибудь фиксированная точка,  $C$  — произвольная постоянная, и в качестве кривой интегрирования взята ломаная, отрезки которой параллельны осям координат

### Контрольные вопросы и задания

- 1 Как вводится положительное направление обхода контура, согласованное с ориентацией поверхности, ограниченной этим контуром?
- 2 Пусть на сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  выбрана ее внешняя сторона. Контур  $L: x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = y$  является границей полусферы, содержащей точку  $M(1, 0, 0)$ . Укажите на контуре  $L$  положительное направление, согласованное с ориентацией данной полусферы.
- 3 Дайте определение  $xyz$ -проектируемой поверхности.
- 4 Является ли  $xyz$ -проектируемой часть плоскости  $x + y + z = 1$  при  $x \geq 0, y > 0, z \geq 0$ ? Является ли эта поверхность гладкой?
- 5 Является ли  $xyz$ -проектируемой сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ? Покажите, что сфера допускает разбиение кусочно гладкими кривыми на конечное число гладких  $xyz$ -проектируемых частей.
- 6 Покажите, что часть параболоида  $z = x^2 + y^2$  при  $0 \leq z \leq h$  можно разбить на четыре гладкие  $xyz$ -проектируемые поверхности.
- 7 Напишите формулу Стокса и сформулируйте условия, при которых эта формула верна.
- 8 Пользуясь формулой Стокса, вычислите криволинейный интеграл второго рода  $\oint_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$ , где  $L$  — граница тела, заданного неравенствами  $x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ , причем контур  $L$  обходится против часовой стрелки, если смотреть из точки  $(2, 0, 0)$ .
- 9 Что означает утверждение криволинейный интеграл  $\int_A^B P dx + Q dy + R dz$  не зависит от пути интегрирования?
- 10 Что означает утверждение выражение  $P dx + Q dy + R dz$  является полным дифференциалом в области  $G$ ?
- 11 Пусть функции  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  непрерывны в области  $G$ . Сформулируйте два необходимых и достаточных условия независимости криволинейного интеграла  $\int_A^B P dx + Q dy + R dz$  от пути интегрирования.
- 12 Дайте определение поверхности односвязной области в пространстве. Является ли поверхности односвязной областью все пространство, часть шара, отсекаемая плоскостью, шар с выброшенным центром, тор?
- 13 Пусть функции  $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$  имеют непрерывные частные производные первого порядка в поверхности односвязной области

- G* Сформулируйте необходимое и достаточное условие независимости криволинейного интеграла  $\int\limits_{AB} P dx + Q dy + R dz$  от пути интегрирования, использующее производные первого порядка. Как связано это условие с условиями из задания 11?
- 14 Пусть  $du(x, y, z) = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$  в области *G*. Напишите формулу для вычисления функции  $u(x, y, z)$ .
- 15 Пусть  $P = 2xy + z$ ,  $Q = x^2 + z^2$ ,  $R = 2yz + x$ . Докажите, что выражение  $P dx + Q dy + R dz$  является полным дифференциалом некоторой функции  $u(x, y, z)$ , и найдите эту функцию. Чему равен интеграл  $\int\limits_{AB} P dx + Q dy + R dz$ , где  $A(-1, 1, 1)$ ,  $B(1, -1, 1)$ ?

### Примеры решения задач

1. Вычислить двумя способами (по формуле (6) из § 2 гл. XIII и по формуле Стокса) криволинейный интеграл  $I = \oint_L y dx + z^2 dy + x^2 dz$ ,

где контур  $L$  — окружность, по которой пересекаются сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  и плоскость  $z = \sqrt{3}$ , причем направление обхода контура  $L$  выбирается против хода часовой стрелки, если смотреть из точки  $(0, 0, 2)$ . В формуле Стокса в качестве ориентированной поверхности  $\Phi$ , которую ограничивает окружность  $L$ , взять

а) верхнюю сторону части сферы  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$  при  $\sqrt{3} \leq z \leq 2$ ,

б) верхнюю сторону части плоскости  $z = \sqrt{3}$  при  $x^2 + y^2 \leq 1$  (направление обхода контура согласовано с ориентацией поверхности).  $\Delta$  Уравнения окружности  $L$  можно записать в виде  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = \sqrt{3}$ . Вычислим криволинейный интеграл  $I$ , перейдя к параметрическим уравнениям окружности  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Тогда  $dx = -\sin t dt$ ,  $dy = \cos t dt$ ,  $dz = 0$ , и по формуле (6) из § 2 гл. XIII получаем

$$I = \int\limits_0^{2\pi} (-\sin^2 t + 3 \cos t) dt = -\pi$$

Перейдем теперь к вычислению интеграла  $I$  вторым способом — с помощью формулы Стокса. Поскольку  $P = y$ ,  $Q = z^2$ ,  $R = x^2$ , имеем

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -2z, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -1,$$

и поверхностный интеграл второго рода в формуле Стокса равен

$$J = - \iint\limits_{\Phi} 2z dy dz + 2x dz dx + dx dy$$

Пусть  $n = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  — единичный вектор нормали верхней стороны поверхности  $\Phi$ .

а) Часть сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  при  $\sqrt{3} \leq z \leq 2$  проектируется на координатные плоскости  $Oyz$ ,  $Oxz$ ,  $Oxy$  соответственно в области

$$G_1 = \{(y, z) : -\sqrt{4-z^2} \leq y \leq \sqrt{4-z^2}, \sqrt{3} \leq z \leq 2\},$$

$$G_2 = \{(z, x) : \sqrt{3} \leq z \leq 2, -\sqrt{4-z^2} \leq x \leq \sqrt{4-z^2}\},$$

$$G_3 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Так как на область  $G_1$  проектируются две части поверхности  $\Phi$ :  $x = \sqrt{4-y^2-z^2}$ , для которой  $\cos \alpha \geq 0$ , и  $x = -\sqrt{4-y^2-z^2}$ , для которой  $\cos \alpha \leq 0$ , то для поверхностного интеграла второго рода

$$J_1 = - \iint_{\Phi} 2z \, dy \, dz \text{ получаем}$$

$$J_1 = - \left( \iint_{G_1} 2z \, dy \, dz - \iint_{G_1} 2z \, dy \, dz \right) = 0.$$

Аналогично,

$$J_2 = - \iint_{\Phi} 2x \, dz \, dx = - \left( \iint_{G_2} 2x \, dz \, dx - \iint_{G_2} 2x \, dz \, dx \right) = 0.$$

Учитывая, что  $\cos \gamma > 0$ , и пользуясь формулой (8) из § 3, находим

$$J_3 = - \iint_{\Phi} dx \, dy = - \iint_{G_3} dx \, dy = -S(G_3) = -\pi.$$

Следовательно,  $J = J_1 + J_2 + J_3 = -\pi = I$ .

Отметим, что второй способ вычисления криволинейного интеграла  $I$  (с помощью формулы Стокса) является более громоздким по сравнению с первым. Этот способ рассматривается здесь только с целью лучшего усвоения формулы Стокса. То же самое относится к примеру 2 и некоторым упражнениям для самостоятельной работы этого параграфа.

б) Для верхней части плоскости  $z = \sqrt{3}$  имеем  $dz = 0$ ,  $\mathbf{n} = \{0, 0, 1\}$ . Поэтому

$$J = - \iint_{\Phi} 2z \, dy \, dz + 2x \, dz \, dx + dx \, dy = - \iint_{\Phi} dx \, dy = - \int_{x^2+y^2 \leq 1} dx \, dy = -\pi.$$

Таким образом, и в этом случае получили тот же результат. ▲

2. Пользуясь формулой Стокса, вычислить криволинейный интеграл  $I = \int_O^A yz \, dx + 3xz \, dy + 2xy \, dz$ , где  $OA$  — кривая,  $x = t \cos t$ ,  $y = t \sin t$ ,  $z = t^2$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(2\pi, 0, 4\pi^2)$ .

Δ Незамкнутая кривая  $OA$  лежит на поверхности  $z = x^2 + y^2$ . Действительно,  $x^2 + y^2 = t^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = t^2$ , т. е.  $x^2 + y^2 = z$ . Дополним кривую интегрирования  $OA$  до замкнутого контура  $L$  дугой  $AO$  параболы  $z = x^2$ , лежащей в плоскости  $Oxz$  (отметим, что эта парабола лежит также на поверхности  $z = x^2 + y^2$ ). Тогда

$$I = \oint_L yz \, dx + 3xz \, dy + 2xy \, dz - \iint_{AO} yz \, dx + 3xz \, dy + 2xy \, dz.$$

Учитывая, что вдоль кривой  $AO$   $y = 0$ ,  $dy = 0$ , получим

$$\int\limits_{AO} yz \, dx + 3xz \, dy + 2xy \, dz = 0.$$

Следовательно,  $I = \oint_L yz \, dx + 3xz \, dy + 2xy \, dz$ .

Контур  $L$  лежит на параболоиде  $z = x^2 + y^2$  и обходится в направлении, указанном на рис. 70. Выберем на части параболоида, ограниченной контуром  $L$ , непрерывное векторное поле нормалей  $\mathbf{n}(M) = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  так, чтобы обход контура был положительным, т. е. выберем верхнюю сторону параболоида. По формуле (1) из § 3 находим  $\mathbf{N} = \{-2x, -2y, 1\}$ . Вычислим единичный вектор нормали  $\mathbf{n}$ :

$$|\mathbf{N}|^2 = 4x^2 + 4y^2 + 1,$$

$$\mathbf{n} = \left\{ \frac{-2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}, \frac{-2y}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \right\}.$$

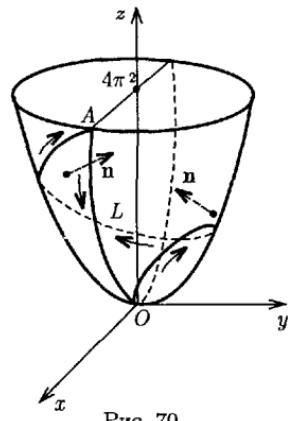


Рис. 70

Для нахождения криволинейного интеграла по замкнутому контуру  $L$  применим формулу Стокса. Так как  $P = yz$ ,  $Q = 3xz$ ,  $R = 2xy$ , то

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} &= 2x - 3x = -x, & \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} &= y - 2y = -y, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= 3z - z = 2z. \end{aligned}$$

По формуле Стокса находим

$$\begin{aligned} I &= \oint_L yz \, dx + 3xz \, dy + 2xy \, dz = \iint_{\Phi} \left[ \frac{-2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \cdot (-x) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{-2y}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \cdot (-y) + \frac{2z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \right] ds = 2 \iint_{\Phi} \frac{x^2 + y^2 + z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} dS. \end{aligned}$$

Этот поверхностный интеграл первого рода вычислим по формуле (3) из § 2. В данном случае  $z = x^2 + y^2$ ,  $z_x = 2x$ ,  $z_y = 2y$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$ . Поэтому

$$2 \iint_{\Phi} \frac{x^2 + y^2 + z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} dS = 4 \iint_G (x^2 + y^2) dx dy,$$

где  $G$  — область на плоскости  $Oxy$ , ограниченная кривой  $l$ :  $x =$

$= t \cos t$ ,  $y = t \sin t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) и отрезком  $[0, 2\pi]$  оси  $Ox$  (рис. 71). Для вычисления двойного интеграла по области  $G$  перейдем к поляр-

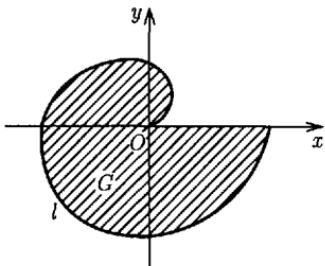


Рис. 71

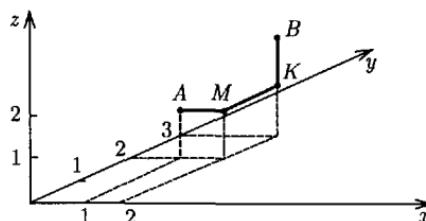


Рис. 72

ным координатам  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Подставляя эти выражения для  $x$  и  $y$  в уравнения кривой  $l$ , получим  $\rho \cos \varphi = t \cos t$ ,  $\rho \sin \varphi = t \sin t$ . Отсюда, учитывая, что  $t$  и  $\varphi$  изменяются в одних и тех же пределах от 0 до  $2\pi$ , находим  $\rho = t$ ,  $\varphi = t$ , и, следовательно, уравнение кривой  $l$  в полярных координатах имеет вид  $\rho = \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Таким образом,

$$I = 4 \iint_G (x^2 + y^2) dx dy = 4 \iint_{G'} \rho^3 d\rho d\varphi = 4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\varphi \rho^3 d\rho = \frac{32}{5} \pi^5. \blacksquare$$

3. Доказать, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int_{AB} (15x^2y + 3z^2) dx + (5x^3 - 2yz) dy + (6xz - y^2) dz,$$

где  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(2, 3, 2)$ .

Δ Проверим выполнение условия IV теоремы 4:  $P = 15x^2y + 3z^2$ ,  $Q = 5x^3 - 2yz$ ,  $R = 6xz - y^2$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 15x^2$ ,  $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = -2y$ ,  $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 6z$ . Следовательно, выражение  $P dx + Q dy + R dz$  является полным дифференциалом, а криволинейный интеграл  $I = \int_{AB} P dx + Q dy + R dz$  не зависит от пути интегрирования.

Возьмем в качестве пути интегрирования ломаную  $AMKB$ , где  $M(2, 2, 1)$ ,  $K(2, 3, 1)$  (рис. 72). Тогда

$$AM = \{(x, y, z): 1 \leq x \leq 2, y = 2, z = 1\},$$

$$MK = \{(x, y, z): x = 2, 2 \leq y \leq 3, z = 1\},$$

$$KB = \{(x, y, z): x = 2, y = 3, 1 \leq z \leq 3\}.$$

Вдоль отрезка  $AM$  имеем  $y = 2$ ,  $z = 1$ ,  $dy = dz = 0$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ;

$$\text{поэтому } \int_{AM} P dx + Q dy + R dz = \int_1^2 (30x^2 + 3) dx = 73.$$

Вдоль отрезка  $MK$  имеем  $x = 2$ ,  $z = 1$ ,  $dx = dz = 0$ ,  $2 \leq y \leq 3$ ;  
поэтому  $\int\limits_{MK} P dx + Q dy + R dz = \int\limits_2^3 (40 - 2y) dy = 35$ .

Вдоль отрезка  $KB$  имеем  $x = 2$ ,  $y = 3$ ,  $dx = dy = 0$ ,  $1 \leq z \leq 3$ ;  
поэтому интеграл вдоль этого отрезка равен  $\int\limits_1^3 (12z - 9) dz = 30$ .

Искомый интеграл по ломаной  $AMKB$  равен сумме вычисленных интегралов, т. е. равен 138. ▲

4. Найти функцию  $u(x, y, z)$ , если

$$du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right) dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right) dy - \frac{xy}{z^2} dz.$$

△ Нетрудно убедиться, что для дифференциального выражения  $du$  выполнены равенства (4) при  $yz \neq 0$ . Для вычисления функции  $u(x, y, z)$  воспользуемся формулой (5), считая, что  $y_0, z_0, y, z$  отличны от нуля. Получим

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int\limits_{x_0}^x \left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0}\right) dx + \int\limits_{y_0}^y \left(\frac{x}{z_0} + \frac{x}{y^2}\right) dy - \int\limits_{z_0}^z \frac{xy}{z^2} dz + C = \\ &= \left(1 - \frac{1}{y_0} + \frac{y_0}{z_0}\right)x \Big|_{x_0}^x + \left(\frac{x}{z_0}y - \frac{x}{y}\right) \Big|_{y_0}^y + \frac{xy}{z} \Big|_{z_0}^z + C = \\ &= x \left(1 - \frac{1}{y} - \frac{y}{z}\right) - x_0 \left(1 - \frac{1}{y_0} - \frac{y_0}{z_0}\right) + C. \end{aligned}$$

Следовательно,  $u(x, y, z) = x \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right) + C_1$ , где  $C_1$  — произвольная постоянная и  $yz \neq 0$ . ▲

5. Найти работу силы тяготения  $\mathbf{F} = -\frac{k}{r^3} \mathbf{r}$  ( $\mathbf{r} = i x + j y + k z$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ), действующей на единичную массу, которая перемещается из точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  в точку  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ .

△ Работа  $A$  силы  $\mathbf{F}$  при перемещении материальной точки из точки  $M_1$  в точку  $M_2$  вдоль кривой  $M_1 M_2$  вычисляется (аналогично плоскому случаю) по формуле  $A = \int\limits_{M_1 M_2} P dx + Q dy + R dz$ , где  $\mathbf{F} = \{P, Q, R\}$ .

Следовательно,

$$A = \int\limits_{M_1 M_2} -\frac{k}{r^3} (x dx + y dy + z dz).$$

Покажем, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом:

$$\begin{aligned} -\frac{k}{r^3} (x dx + y dy + z dz) &= -\frac{k}{2r^3} d(x^2 + y^2 + z^2) = \\ &= -\frac{k}{2r^3} d(r^2) = -\frac{k}{2r^3} 2r dr = -\frac{k dr}{r^2} = k \cdot d\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} A = k \int_{M_1 M_2} d\left(\frac{1}{r}\right) &= k \left( \frac{1}{r(M_2)} - \frac{1}{r(M_1)} \right) = \\ &= k \left( \frac{1}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \right). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

18. Пользуясь формулой Стокса, вычислите криволинейный интеграл:

a)  $\int_L y dx + z dy + x dz$ , где  $L$  — виток винтовой линии  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , пробегаемый в направлении от точки  $(1, 0, 0)$  до точки  $(1, 0, 2\pi)$ ;

б)  $\oint_L (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$ , где  $L$  — окружность  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $y = x \operatorname{tg} \alpha$ ,  $0 < \alpha < \pi/2$ , обход которой совершается против хода часовой стрелки, если смотреть из точки  $(2a, 0, 0)$ ;

в)  $\oint_L y dx + z dy + x dz$ , где  $L$  — окружность  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x + y + z = 0$ , пробегаемая против часовой стрелки, если смотреть из точки  $(a, 0, 0)$ ;

г)  $\oint_L (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$ , где  $L$  — эллипс  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$  ( $a > 0$ ,  $h > 0$ ), пробегаемый против часовой стрелки, если смотреть из точки  $(2a, 0, 0)$ ;

д)  $\oint_L (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz$ , где  $L$  — кривая, по которой пересекаются верхняя полусфера  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$  ( $z > 0$ ) с цилиндром  $x^2 + y^2 = 2rx$ , где  $0 < r < R$ . Кривая  $L$  пробегается против хода часовой стрелки, если смотреть из точки  $(0, 0, 2R)$ ;

е)  $\oint_L (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$ , где  $L$  — граница сечения куба  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq a$ ,  $0 \leq z \leq a$  плоскостью  $x + y + z = 3a/2$ , пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть из точки  $(2a, 0, 0)$ ;

ж)  $\oint_L (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$ , где  $L$  — контур, ограничивающий часть сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  при  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ . Направление обхода кривой  $L$  берется против хода часовой стрелки, если смотреть из точки  $(2, 0, 0)$ .

19. Докажите, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом и вычислите криволинейные интегралы:

а)  $\int_A^B x dx + y^2 dy - z^3 dz$ , где  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(2, 3, -4)$ ;

б)  $\int_{AB} yz dx + xz dy + xy dz$ , где  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(6, 1, 1)$ ;

в)  $\int\limits_{M_1 M_2} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где точка  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  лежит на сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , а точка  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  — на сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$  и  $0 < a < b$ .

20. Выразите криволинейный интеграл  $\int\limits_{M_1 M_2} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})(x dx + y dy + z dz)$  через определенный интеграл, где  $f(t)$  — непрерывная функция и  $M_1 = M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2 = M_2(x_2, y_2, z_2)$ .
21. Найдите функцию  $u(x, y, z)$ , если:
- $du = (x^2 - 2yz) dx + (y^2 - 2xz) dy + (z^2 - 2xy) dz$ ;
  - $du = (yze^x + ze^y + ye^z) dx + (xze^y + ze^x + xe^z) dy + (xye^z + ye^x + xe^y) dz$ ;
  - $du = (2xyz + y^2z + yz^2) dx + (2xyz + x^2z + xz^2) dy + (2xyz + x^2y + xy^2) dz$ .
22. Найдите работу, производимую силой тяжести, когда материальная точка массы  $m$  перемещается из точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  в точку  $M_2(x_2, y_2, z_2)$  (ось  $Oz$  направлена вертикально вверх).
23. Вычислите работу силы  $\mathbf{F}$  вдоль замкнутого контура  $L$ , пробегаемого против хода часовой стрелки, если смотреть из точки  $M$ :
- $\mathbf{F} = \mathbf{r} = \{x, y, z\}$ ,  $L$  — окружность, по которой плоскость  $x = 2y$  пересекает сферу  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ,  $M = (2R, 0, 0)$ ;
  - $\mathbf{F} = \{yz, zx, xy\}$ ,  $L$  — эллипс, по которому плоскость  $2z - 3x = 6$  пересекает цилиндр  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $M = (2, 0, 0)$ .

## § 5. Формула Остроградского–Гаусса

### Основные понятия и теоремы

Пусть функции  $z_1(x, y)$  и  $z_2(x, y)$  определены и непрерывны в ограниченной замкнутой области  $D$  и  $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$ . Область  $G = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$  называется *z-цилиндрической* (рис. 73). Аналогично определяются *x-цилиндрическая* и *y-цилиндрическая* области. Область  $G$  называется *простой*, если ее можно разбить на конечное число как *x-цилиндрических*, так и *y-цилиндрических* и *z-цилиндрических* областей.

Теорема 5. Пусть функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  и их частные производные  $\frac{\partial P}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial z}$  непрерывны в простой замкнутой области  $G$ , ограниченной кусочно гладкой поверхностью  $\Phi$ .

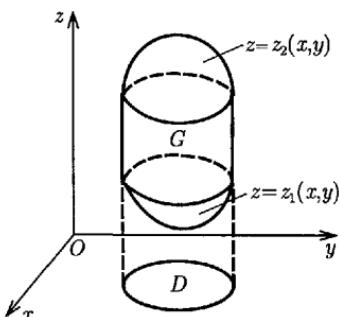


Рис. 73

Тогда справедлива формула

$$\iiint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\Phi} P dy dz + Q dz dx + R dx dy, \quad (1)$$

где поверхностный интеграл берется по внешней стороне поверхности.

Формула (1) называется *формулой Остроградского–Гаусса*.

Следствие. Если функции  $P, Q, R$  таковы, что  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1$ , то интеграл в левой части равенства (1) равен объему области  $G$ , т. е.  $\iiint_G dx dy dz = V(G)$ , и из формулы (1) получается формула для вычисления объема области  $G$  с помощью интеграла по ее поверхности

$$V(G) = \iint_{\Phi} P dy dz + Q dz dx + R dx dy. \quad (2)$$

Замечание. Формула Остроградского–Гаусса остается справедливой для любой ограниченной области  $G$ , граница которой состоит из конечного числа кусочно гладких поверхностей.

### Контрольные вопросы и задания

- Дайте определение: а)  $z$ -цилиндрической области; б)  $y$ -цилиндрической области; в)  $x$ -цилиндрической области.
- Какая область называется простой?
- Является ли простой областью: а) шар  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ ; б) параллелепипед  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $0 \leq z \leq c$ ; в) тетраэдр  $x + y + z \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ ? Ответы обоснуйте.
- Напишите формулу Остроградского–Гаусса и сформулируйте условия, при которых эта формула справедлива.
- Пусть  $z$ -цилиндрическая область  $G$  ограничена кусочно гладкой поверхностью  $\Phi$  и пусть функция  $R(x, y, z)$  и ее частная производная  $\frac{\partial R}{\partial z}$  непрерывны в области  $G$ . Сводя тройной интеграл к повторному, докажите, что  $\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\Phi} R dx dy$ , где поверхностный интеграл берется по внешней стороне  $\Phi$ .
- Пользуясь формулой Остроградского–Гаусса, покажите, что объем области  $G$ , ограниченной кусочно гладкой поверхностью  $\Phi$ , можно вычислить по формуле

$$V(G) = \frac{1}{3} \iint_{\Phi} x dy dz + y dz dx + z dx dy,$$

где интеграл берется по внешней стороне  $\Phi$ .

- С помощью формулы Остроградского–Гаусса вычислите интеграл

$$\iint_{\Phi} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy,$$

где  $\Phi$  — внешняя сторона тетраэдра заданного неравенствами  $x + y + z \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .

### Примеры решения задач

1. Пользуясь формулой Остроградского–Гаусса, вычислить интеграл  $\Pi = \iint_{\Phi} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$  (см. пример 3 из § 3), где  $\Phi$  — внешняя сторона сферы  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ .  
 $\Delta$  По формуле Остроградского–Гаусса имеем

$$\Pi = \iiint_G (2x + 2y + 2z) dx dy dz,$$

где  $G$  — шар  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \leq R^2$ . Для вычисления интеграла перейдем к сферическим координатам

$$\begin{aligned} x &= a + r \cos \varphi \sin \theta, & y &= b + r \sin \varphi \sin \theta, & z &= c + r \cos \theta, \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi, & 0 &\leq \theta \leq \pi. \end{aligned}$$

Якобиан перехода равен  $r^2 \sin \theta$ . Уравнение границы области  $G$  имеет вид  $r = R$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \Pi = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 &[a + b + c + r(\cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \sin \theta + \\ &+ \cos \theta)] dr = \frac{8}{3} \pi (a + b + c) R^3. \end{aligned} \blacksquare$$

### 2. Вычислить интеграл Гаусса

$$I(\xi, \eta, \zeta) = \iint_{\Phi} \frac{\cos \varphi}{r^2} dS,$$

где  $\Phi$  — поверхность, ограничивающая простую замкнутую область  $G$ ;  $N(\xi, \eta, \zeta)$  — фиксированная точка вне области  $G$ ;  $M(x, y, z) \in \Phi$ ;  $\mathbf{r} = \{x - \xi, y - \eta, z - \zeta\}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ ;  $\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  — внешняя единичная нормаль к поверхности  $\Phi$  в точке  $M$ ;  $\varphi$  — угол между векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{n}$ .

$\Delta$  Выразим  $\cos \varphi$  через координаты векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{n}$ :

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})}{|\mathbf{n}| |\mathbf{r}|} = \frac{(x - \xi) \cos \alpha + (y - \eta) \cos \beta + (z - \zeta) \cos \gamma}{r}.$$

Поверхностный интеграл  $I$  запишется в виде

$$I = \iint_{\Phi} \left( \frac{x - \xi}{r^3} \cos \alpha + \frac{y - \eta}{r^3} \cos \beta + \frac{z - \zeta}{r^3} \cos \gamma \right) dS.$$

Так как точка  $N(\xi, \eta, \zeta)$  лежит вне области  $G$ , то  $r \neq 0$  и, следовательно, функции  $P = \frac{x - \xi}{r^3}$ ,  $Q = \frac{y - \eta}{r^3}$ ,  $R = \frac{z - \zeta}{r^3}$  непрерывны вместе с их частными производными первого порядка в области  $G$ . Находим  $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(x - \xi)^2}{r^5}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(y - \eta)^2}{r^5}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(z - \zeta)^2}{r^5}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} = 0$ .

Применяя формулу Остроградского–Гаусса, получаем

$$I(\xi, \eta, \zeta) = \iiint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = 0. \blacksquare$$

3. Вычислить интеграл Гаусса  $I(0, 0, 0)$  (см. предыдущий пример), если  $\Phi$  — сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

Δ Формулу Остроградского–Гаусса применять нельзя, так как функции  $P, Q, R$  не являются непрерывными в точке  $N(0, 0, 0) \in G$ . Так как  $\xi = \eta = \zeta = 0$ ,  $\mathbf{n} = \left\{ \frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a} \right\}$  и  $r = a$ , то

$$\begin{aligned} \frac{x - \xi}{r^3} \cos \alpha + \frac{y - \eta}{r^3} \cos \beta + \frac{z - \zeta}{r^3} \cos \gamma &= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{ar^3} = \frac{1}{a^2}, \\ I(0, 0, 0) &= \frac{1}{a^2} \iint_{\Phi} dS = \frac{4\pi a^2}{a^2} = 4\pi, \end{aligned}$$

т. е. интеграл Гаусса  $I(0, 0, 0)$  не зависит от радиуса  $a$  сферы. ▲

4. Пусть  $\Phi$  — гладкая поверхность, ограничивающая простую замкнутую область  $G$ , функция  $u(x, y, z)$  имеет непрерывные частные производные второго порядка в области  $G$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n}$  — производная функции  $u(x, y, z)$  по направлению внешней нормали к поверхности  $\Phi$ . Доказать, что

$$\iint_{\Phi} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_G \Delta u dx dy dz,$$

где  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ .

Δ Пусть  $\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\Phi$ . Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

и поверхностный интеграл  $\iint_{\Phi} \frac{\partial u}{\partial n} ds$  запишется в виде

$$\iint_{\Phi} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS.$$

Применяя формулу Остроградского–Гаусса, получим

$$\iint_{\Phi} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iiint_G \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz = \iiint_G \Delta u dx dy dz. \blacksquare$$

5. Вычислить интеграл  $I = \iint_{\Phi} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^2 dx dy$ , где

$\Phi$  — нижняя сторона части параболоида  $z = x^2 + y^2$ , отсекаемая плоскостью  $z = 2x$ .

Δ Дополним поверхность  $\Phi$  до замкнутой частью плоскости  $z = 2x$ . Обозначим плоскую часть через  $\Phi_1$  и выберем ее верхнюю сторону.

Для вычисления интеграла по замкнутой кусочно гладкой поверхности  $\Phi + \Phi_1$  применим формулу Остроградского–Гаусса. Тогда для интеграла  $I$  получим

$$I = \iiint_G (3x^2 + 3y^2 + 2z) dx dy dz - \iint_{\Phi_1} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^2 dx dy,$$

где  $G$  — тело, ограниченное поверхностями  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 2x$ . Вычислим тройной интеграл с помощью повторных интегралов. Область  $G$  проектируется на плоскость  $Oxy$  в область  $D$ , границей которой является окружность  $2x = x^2 + y^2$ . Находим

$$\begin{aligned} \iiint_G (3x^2 + 3y^2 + 2z) dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_{x^2+y^2}^{2x} [3(x^2 + y^2) + 2z] dz = \\ &= \iint_D [6x(x^2 + y^2) + 4x^2 - 4(x^2 + y^2)^2] dx dy. \end{aligned}$$

Двойной интеграл вычислим, перейдя к полярным координатам  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . В полярных координатах уравнение окружности примет вид  $r = 2 \cos \varphi$ , и поэтому двойной интеграл равен

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r [6r^3 \cos \varphi + 4r^2 \cos^2 \varphi - 4r^4] dr &= \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \frac{6}{5} r^5 \cos \varphi + r^4 \cos^2 \varphi - \frac{2}{3} r^6 \right) \Big|_0^{2 \cos \varphi} d\varphi = \\ &= 16 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \frac{12}{5} \cos^6 \varphi + \cos^6 \varphi - \frac{8}{3} \cos^6 \varphi \right) d\varphi = \frac{176}{15} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^6 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{176}{15} \left[ \frac{5}{16} \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{3}{64} \sin 4\varphi - \frac{1}{48} \sin^3 2\varphi \right] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{11}{3} \pi. \end{aligned}$$

Вычислим интеграл по верхней стороне области  $\Phi_1$  на плоскости  $z = 2x$ , учитывая, что единичный вектор нормали  $\mathbf{n}$  равен  $\{-2/\sqrt{5}, 0, 1/\sqrt{5}\}$ . Получаем

$$\iint_{\Phi_1} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^2 dx dy = \iint_{\Phi_1} \left( -\frac{2}{\sqrt{5}} x^3 + \frac{z^2}{\sqrt{5}} \right) dS.$$

Этот интеграл вычислим с помощью двойного интеграла по области  $D$ . Находим  $z_x = 2$ ,  $z_y = 0$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{5}$  и

$$\iint_{\Phi_1} \left( -\frac{2}{\sqrt{5}} x^3 + \frac{z^2}{\sqrt{5}} \right) ds = \iint_D (-2x^3 + 4x^2) dx dy.$$

Переходя к полярным координатам, получим

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} (-2r^3 \cos^3 \varphi + 4r^2 \cos^2 \varphi) r dr =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( -\frac{64}{5} \cos^8 \varphi + 16 \cos^6 \varphi \right) d\varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

Таким образом, данный интеграл  $I$  равен  $\frac{11\pi}{3} - \frac{3\pi}{2} = \frac{13\pi}{6}$ .  $\blacktriangle$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

24. Пользуясь формулой Остроградского–Гаусса, вычислите поверхностные интегралы по внешней стороне поверхности  $\Phi$  (если поверхность не замкнутая, дополните ее до замкнутой):

a)  $\iint_{\Phi} x dy dz + y dz dx + z dx dy$ , где  $\Phi$  — сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ;

b)  $\iint_{\Phi} (y - z) dy dz + (z - x) dz dx + (x - y) dx dy$ , где  $\Phi$  — часть конической поверхности  $x^2 + y^2 = z^2$  при  $0 \leq z \leq h$ ;

c)  $\iint_{\Phi} yz dy dz + zx dz dx + xy dx dy$ , где  $\Phi$  — граница тела  $x^2 + y^2 \leq a^2$ ,  $0 \leq z \leq h$ ;

d)  $\iint_{\Phi} x dy dz + y dz dx + z dx dy$ , где  $\Phi$  — часть поверхности  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$  при  $0 \leq z \leq 1$ ;

e)  $\iint_{\Phi} y dy dz + z dz dx + x dx dy$ , где  $\Phi$  — поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями  $x + y + z = a$  ( $a > 0$ ),  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ;

f)  $\iint_{\Phi} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$ , где  $\Phi$  — сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = x$ ;

ж)  $\iint_{\Phi} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$ , где  $\Phi$  — поверхность куба  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq a$ ,  $0 \leq z \leq a$ ;

з)  $\iint_{\Phi} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$ , где  $\Phi$  — сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ;

и)  $\iint_{\Phi} (x - y + z) dy dz + (y - z + x) dz dx + (z - x + y) dx dy$ , где  $\Phi$  —

поверхность  $|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$ .

25. Пусть  $\Phi$  — гладкая поверхность, ограничивающая область  $G$ , функции  $u(x, y, z)$  и  $v(x, y, z)$  имеют непрерывные частные производные второго порядка в замкнутой области  $G$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n}$  — производная по направлению внешней нормали к поверхности  $\Phi$ . Докажите справедливость формул:

a)  $\iint_{\Phi} u \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iiint_G \left\{ \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] + u \Delta u \right\} dx dy dz$ ;

б)  $\iint_{\Phi} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n} \right| ds = \iiint_G \left| \frac{u}{\Delta u} \frac{v}{\Delta v} \right| dx dy dz$  — вторая формула Грина.

# ГЛАВА XV

## СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

### § 1. Дифференциальные операции в скалярных и векторных полях

#### Основные понятия и формулы

**1. Скалярное поле.** Пусть  $G$  — область в трехмерном пространстве (или на плоскости). Говорят, что в области  $G$  задано *скалярное поле*, если каждой точке  $M \in G$  поставлено в соответствие некоторое число  $u(M)$ .

Физические примеры скалярных полей: поле температур какого-либо тела; поле плотности зарядов на какой-либо поверхности или в сплошной среде; поле плотности масс какого-либо тела.

Поверхность (линия), на которой функция  $u(M)$  принимает постоянное значение, называется *поверхностью (линией) уровня* скалярного поля (например, поверхность или линия постоянной температуры). Придавая  $u(M)$  различные постоянные значения:  $u(M) = C$ , получаем семейство поверхностей (линий) уровня данного скалярного поля.

Физические скалярные поля не зависят от выбора системы координат: величина  $u$  является функцией лишь точки  $M$  и, быть может, времени (нестационарные поля).

Если в пространстве введена прямоугольная система координат  $Oxyz$ , то скалярное поле описывается функцией трех переменных:  $u = u(x, y, z)$ ,  $(x, y, z) \in G$ .

**2. Векторное поле.** Говорят, что в области  $G$  задано *векторное поле*, если каждой точке  $M \in G$  поставлен в соответствие некоторый вектор  $\mathbf{a}(M)$ .

Физические примеры векторных полей: электрическое поле системы электрических зарядов, характеризующееся в каждой точке вектором напряженности  $\mathbf{E}$ ; магнитное поле, создаваемое электрическим током и характеризующееся в каждой точке вектором магнитной индукции  $\mathbf{B}$ ; поле тяготения, создаваемое системой масс и характеризующееся в каждой точке вектором силы тяготения  $\mathbf{F}$ , действующей в этой точке на единичную массу; поле скоростей потока жидкости, описываемое в каждой точке вектором скорости  $\mathbf{v}$ .

Удобной геометрической характеристикой векторного поля  $\mathbf{a}(M)$  служат *векторные линии* — кривые, в каждой точке  $M$  которых вектор  $\mathbf{a}(M)$  направлен по касательной к кривой. Векторные линии поля тяготения, электрического и магнитного полей называются *силовыми линиями*, а поля скоростей — *линиями тока*. Так, например, силовые

линии электрического поля двух разноименных зарядов представляют собой кривые, начинающиеся на одном заряде и заканчивающиеся на другом. Силовые линии магнитного поля тока являются замкнутыми кривыми.

Пусть векторная линия, проходящая через точку  $M_0$ , описывается уравнением  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ , где  $t$  — параметр. Условие коллинеарности вектора поля  $\mathbf{a}$  и касательного вектора  $\mathbf{r}(t)$  в произвольной точке этой линии имеет вид

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lambda \mathbf{a}, \quad (1)$$

где  $\lambda$  — некоторое число. Условие (1) можно записать также в виде

$$\left[ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{a} \right] = 0, \quad (2)$$

или, умножая на  $dt$ , в виде

$$[\mathbf{dr} \mathbf{a}] = 0. \quad (3)$$

Каждое из уравнений (1)–(3) является дифференциальным уравнением векторных линий в векторной форме и определяет множество векторных линий. Конкретная векторная линия, проходящая через заданную точку  $M_0$ , определяется дополнительным условием

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad (4)$$

где  $r_0$  — радиус-вектор точки  $M$ .

Физические векторные поля не зависят от выбора системы координат: в каждой точке  $M$  вектор  $\mathbf{a}(M)$  полностью определяется своим модулем  $|\mathbf{a}(M)|$  и направлением. Если в пространстве введена прямоугольная система координат  $Oxyz$ , то векторное поле  $\mathbf{a}(M)$  описывается вектор-функцией трех переменных  $\mathbf{a}(x, y, z)$  или тремя скалярными функциями — ее координатами:

$$\mathbf{a}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}, \quad (x, y, z) \in G.$$

Так как в прямоугольных координатах  $d\mathbf{r} = \{dx, dy, dz\}$ , то векторное уравнение (3) для векторных линий эквивалентно системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}, \quad (5)$$

а дополнительное векторное условие (4) эквивалентно следующим условиям:

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0, \quad (6)$$

где  $x_0, y_0, z_0$  — координаты точки  $M_0$ .

**3. Производная по направлению.** Скалярное и векторное поля  $u(M) = u(x, y, z)$  и  $\mathbf{a}(M) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$  называются *дифференцируемыми n раз*, если функции  $u(x, y, z), P(x, y, z),$

$Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  дифференцируемы  $n$  раз. В дальнейшем, не оговаривая это особо, будем считать, что рассматриваемые поля дифференцируемы нужное нам число раз.

Пусть  $u(M)$  — скалярное поле, заданное в области  $G$ ;  $\mathbf{l}$  — единичный фиксированный вектор;  $M$  — фиксированная точка;  $M'$  — любая точка из  $G$ , отличная от  $M$  и такая, что вектор  $\overrightarrow{MM'}$  коллинеарен  $\mathbf{l}$ . Пусть, далее,  $MM'$  — величина направленного отрезка  $MM'$  (она равна его длине  $|MM'|$ , если векторы  $\overrightarrow{MM'}$  и  $\mathbf{l}$  сонаправлены, и равна  $-|\overrightarrow{MM'}|$ , если эти векторы противоположно направлены).

**Определение.** Число  $\lim_{M' \rightarrow M} \frac{u(M') - u(M)}{|MM'|}$  называется *производной скалярного поля*  $u(M)$  (функции  $u(M)$ ) в точке  $M$  по направлению  $\mathbf{l}$  и обозначается символом  $\frac{\partial u}{\partial l}(M)$ .

Производная по направлению  $\frac{\partial u}{\partial l}(M)$  является скоростью изменения функции  $u(M)$  по направлению  $\mathbf{l}$  в точке  $M$ .

Если в прямоугольной системе координат  $Oxyz$   $\mathbf{l} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ , то

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \quad (7)$$

В частности, если вектор  $\mathbf{l}$  сонаправлен с одной из координатных осей, то производная по направлению  $\mathbf{l}$  совпадает с соответствующей частной производной. Например, если  $\mathbf{l} = \{1, 0, 0\}$ , то

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot 1 = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Аналогично определяется производная по направлению векторного поля.

**Определение.** Вектор  $\lim_{M' \rightarrow M} \frac{\mathbf{a}(M') - \mathbf{a}(M)}{|MM'|}$  называется *производной векторного поля*  $\mathbf{a}(M)$  (вектор-функции  $\mathbf{a}(M)$ ) в точке  $M$  по направлению  $\mathbf{l}$  и обозначается символом  $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial l}$ .

Если в прямоугольной системе координат  $Oxyz$   $\mathbf{a}(M) = \{P, Q, R\}$ , то

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial l} = \left\{ \frac{\partial P}{\partial l}, \frac{\partial Q}{\partial l}, \frac{\partial R}{\partial l} \right\}.$$

#### 4. Градиент скалярного поля.

**Определение.** *Градиентом* скалярного поля  $u(x, y, z)$  называется вектор-функция

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}.$$

Из равенства (7) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\text{grad } u \cdot \mathbf{l}), \quad (8)$$

откуда  $\frac{\partial u}{\partial l}(M) = |\operatorname{grad} u||\mathbf{l}| \cos \varphi = |\operatorname{grad} u| \cos \varphi$ , так как  $|\mathbf{l}| = 1$ . Здесь  $\varphi$  — угол между векторами  $\mathbf{l}$  и  $\operatorname{grad} u$  в точке  $M$ . Очевидно, что  $\frac{\partial u}{\partial l}$  принимает наибольшее значение при  $\varphi = 0$ , т. е. в направлении  $\operatorname{grad} u$  в данной точке. Иначе говоря, вектор  $\operatorname{grad} u$  в данной точке указывает направление наибольшего роста поля  $u$  (функции  $u$ ) в этой точке, а  $|\operatorname{grad} u|$  есть скорость роста функции  $u$  в этом направлении. Таким образом, вектор  $\operatorname{grad} u$  не зависит от выбора системы координат, а его модуль и направление в каждой точке определяются самой функцией  $u(M)$ .

### 5. Потенциальное поле.

**Определение.** Векторное поле  $\mathbf{a}(M)$  называется *потенциальным* в области  $G$ , если его можно представить в этой области как градиент некоторого скалярного поля  $u(M)$ :

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} u. \quad (9)$$

Функция  $u(M)$  называется *скалярным потенциалом* векторного поля  $\mathbf{a}(M)$ . Если  $\mathbf{a} = \{P, Q, R\}$ , то из равенства (9) следует, что

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Иногда потенциалом векторного поля  $\mathbf{a}$  называют такую функцию  $u$ , что  $\mathbf{a} = -\operatorname{grad} u$ .

Рассмотрим, например, поле тяготения точечной массы  $m$ , помещенной в начале координат. Оно описывается вектор-функцией  $\mathbf{F}(M) = -\gamma \frac{m}{r^3} \mathbf{r}$  ( $\gamma$  — гравитационная постоянная,  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ). С такой силой действует это поле на единичную массу, помещенную в точку  $M(x, y, z)$ . Поле тяготения является потенциальным. Его можно представить как градиент скалярной функции  $u(M) = \frac{\gamma m}{r}$ , называемой *ньютоновским потенциалом поля тяготения* точечной массы  $m$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \gamma m \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) = \gamma m \left( -\frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\gamma m}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = \\ &= -\gamma m \frac{x}{r^3}. \end{aligned}$$

Аналогично,  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\gamma m \frac{y}{r^3}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z} = -\gamma m \frac{z}{r^3}$ , откуда

$$\operatorname{grad} u = -\frac{\gamma m}{r^3} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = -\gamma \frac{m}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{F}(M).$$

В качестве еще одного примера рассмотрим электрическое поле точечного заряда  $e$ , помещенного в начале координат. Оно описывается в точке  $M(x, y, z)$  вектором напряженности

$$\mathbf{E}(M) = \frac{ke}{r^3} \mathbf{r} \quad (\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

Это также потенциальное поле. Его можно представить в виде  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \frac{ke}{r}$ . Функция  $u(M) = \frac{ke}{r}$  называется *потенциалом электрического поля* точечного заряда  $e$ .

Поверхности уровня потенциала  $u(M)$  называются *эквипотенциальными поверхностями*. В рассмотренных примерах эквипотенциальными поверхностями являются сферы с центром в начале координат.

### 6. Дивергенция.

**Определение.** *Дивергенцией* векторного поля  $\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$  называется скалярная функция

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Слово “дивергенция” означает “расходимость” (“расхождение”). Дивергенция характеризует плотность источников данного векторного поля в рассматриваемой точке.

Рассмотрим, например, электрическое поле точечного заряда  $e$ , помещенного в начале координат:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{ke}{r^3} \mathbf{r} = \frac{ke}{r^3} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}), \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= ke \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{r^3} \right) \right].\end{aligned}$$

Так как  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^3} \right) = \frac{r^3 - x \cdot 3r^2 \cdot \frac{\partial r}{\partial x}}{r^6} = \frac{r^3 - 3x^2 r}{r^6} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$  и, аналогично,  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r^3} \right) = \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{r^3} \right) = \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$ , то

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = ke \frac{3(r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2))}{r^5} = 0$$

(при  $r \neq 0$ ). Физически этот результат означает отсутствие источников поля в любой точке, кроме начала координат. В начале координат  $\operatorname{div} \mathbf{E} = \infty$  (бесконечная плотность заряда).

### 7. Ротор.

**Определение.** *Ротором* (или *вихрем*) векторного поля  $\mathbf{a} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$  называется вектор-функция

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

В частности, для плоского поля  $\mathbf{a} = \{P(x, y), Q(x, y), 0\}$  имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{k} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right).$$

Ротор характеризует завихренность поля  $\mathbf{a}$  в данной точке.

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг оси  $Oz$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (рис. 74). Векторное поле скоростей  $\mathbf{v}(M)$  точек этого тела можно представить в виде

$$\mathbf{v}(M) = [\omega \mathbf{r}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}.$$

Найдем ротор поля скоростей  $\mathbf{v}(M)$ :

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot 0 + \mathbf{j} \cdot 0 + 2\omega \mathbf{k} = 2\omega \mathbf{k}.$$

Таким образом,  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$  является постоянным вектором, направленным вдоль оси вращения  $Oz$ , а его модуль равен удвоенной угловой скорости вращения тела:  $|\operatorname{rot} \mathbf{v}| = 2\omega$ .

Рассмотрим потенциальное поле

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}.$$

Его потенциал  $u = r^2/2 = (x^2 + y^2 + z^2)/2$ . Вычислим ротор этого поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{r} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{i} \cdot 0 + \mathbf{j} \cdot 0 + \mathbf{k} \cdot 0 = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Вообще, ротор любого потенциального поля равен нулю (см. также § 2). Поэтому говорят, что потенциальное поле является *безвихревым*.

**8. Соленоидальное поле.** Векторное поле  $\mathbf{a}(M)$  называется *соленоидальным* в области  $G$ , если в этой области  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ . Так как  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  характеризует плотность источников поля  $\mathbf{a}$ , то в той области, где поле  $\mathbf{a}$  соленоидально, нет источников этого поля.

Например, электрическое поле  $\mathbf{E}$  точечного заряда соленоидально (удовлетворяет условию  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ ) всюду вне точки, где находится заряд (в этой точке  $\operatorname{div} \mathbf{E} = \infty$ ). Векторные линии соленоидального поля не могут начинаться или заканчиваться внутри области соленоидальности; они либо начинаются и заканчиваются на границе области, либо являются замкнутыми кривыми. Примером соленоидального поля с замкнутыми векторными линиями является магнитное поле, создаваемое током в проводнике.

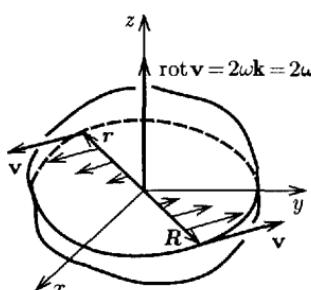


Рис. 74

Если векторное поле  $\mathbf{a}(M)$  можно представить как ротор некоторого векторного поля  $\mathbf{b}(M)$ , т. е.  $\mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{b}$ , то вектор-функция  $\mathbf{b}(M)$  называется **векторным потенциалом** поля  $\mathbf{a}(M)$ .

Можно проверить (см. подробнее § 2), что  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{b} \equiv 0$ , т. е. поле  $\mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{b}$  является соленоидальным.

Любое векторное поле можно представить в виде суммы потенциального и соленоидального полей (см. § 2).

**9. Уравнения Максвелла.** Уравнения Максвелла — фундаментальные уравнения классической электродинамики, описывающие электромагнитные явления в любой среде (и в вакууме). Они связывают величины, характеризующие электромагнитное поле, т. е. напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$ , электрическую индукцию  $\mathbf{D}$ , напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  и магнитную индукцию  $\mathbf{B}$  с источниками поля, т. е. с распределением в пространстве электрических зарядов и токов.

В дифференциальной форме уравнения Максвелла записываются с помощью понятий дивергенции и ротора. В системе СИ эти уравнения имеют следующий вид.

$$\text{I. } \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Это уравнение является обобщением закона Био–Савара и выражает тот факт, что магнитное поле порождается токами проводимости ( $\mathbf{j}$  — плотность тока) и токами смещения  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ .

$$\text{II. } \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Это уравнение выражает закон электромагнитной индукции Фарадея и показывает, что одним из источников электрического поля является изменяющееся во времени магнитное поле.

$$\text{III. } \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Это уравнение выражает факт отсутствия магнитных зарядов (соленоидальность магнитного поля).

$$\text{IV. } \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho.$$

Это уравнение выражает закон Кулона и показывает, что вторым источником электрического поля являются электрические заряды с плотностью  $\rho$ .

К уравнениям Максвелла следует присоединить так называемые материальные уравнения поля.

$$\text{V. } \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}.$$

$$\text{VI. } \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.$$

$$\text{VII. } j = \sigma \mathbf{E}.$$

Здесь  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость,  $\mu$  — магнитная проницаемость,  $\sigma$  — удельная проводимость среды.

**10. Оператор Гамильтона.** Напомним, что символ  $\frac{\partial}{\partial x}$  называется оператором частной производной по  $x$ . Под произведением этого

оператора на функцию  $u = (u, x, y, z)$  будем понимать частную производную  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , т. е.  $\frac{\partial}{\partial x} \cdot u = \frac{\partial u}{\partial x}$ . Аналогично,  $\frac{\partial}{\partial y}$  и  $\frac{\partial}{\partial z}$  — операторы частных производных по  $y$  и по  $z$ .

Введем векторный *оператор “набла”*, или *оператор Гамильтона*:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}.$$

С помощью этого символического (операторного) “вектора” удобно записывать и выполнять операции векторного анализа.

В результате умножения вектора  $\nabla$  на скалярную функцию  $u(x, y, z)$  получается *grad u*:

$$\nabla u = \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) u = \mathbf{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial u}{\partial z} = \text{grad } u.$$

Скалярное произведение вектора  $\nabla$  на вектор-функцию  $\mathbf{a}(x, y, z) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  дает *div a*:

$$(\nabla \mathbf{a}) = \frac{\partial}{\partial x} P + \frac{\partial}{\partial y} Q + \frac{\partial}{\partial z} R = \text{div } \mathbf{a}.$$

Векторное произведение вектора  $\nabla$  на вектор-функцию  $\mathbf{a}(x, y, z) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  дает *rot a*:

$$[\nabla \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \text{rot } \mathbf{a}.$$

### 11. Правила вычислений с оператором $\nabla$ .

а) Если оператор  $\nabla$  действует на линейную комбинацию  $\sum a_i F_i$ , где  $F_i$  — скалярные или векторные функции  $a_i$  — числа, то

$$\nabla \left( \sum_i a_i F_i \right) = \sum_i a_i \nabla F_i.$$

б) Если оператор  $\nabla$  действует на произведение нескольких функций  $F, G, H$  (скалярных или векторных), то результат этого действия аналогичен результату дифференцирования произведения в том смысле, что оператор  $\nabla$  последовательно применяют к каждому сомножителю, отмеченному знаком  $\downarrow$ , а другие сомножители при этом считают фиксированными. Затем результаты складывают. Итак,

$$\nabla(FGH) = \nabla(\overset{\downarrow}{FGH}) + \nabla(F\overset{\downarrow}{GH} + \nabla(FG\overset{\downarrow}{H})). \quad (10)$$

При этом следует иметь в виду, что слагаемые в правой части равенства (10) предварительно преобразуют по правилам векторной алгебры так, чтобы за оператором  $\nabla$  стоял тот множитель, который отмечен знаком  $\downarrow$ . После вычислений знаки  $\downarrow$  опускают.

Пользуясь этим правилом, докажем, что

$$\text{div}[\mathbf{a}\mathbf{b}] = (\mathbf{b} \text{rot } \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \text{rot } \mathbf{b}). \quad (11)$$

Учитывая, что  $\operatorname{div}[\mathbf{ab}] = (\nabla \cdot [\mathbf{ab}])$ , по формуле (10) имеем

$$(\nabla \cdot [\mathbf{ab}]) = (\nabla \cdot [\overset{\downarrow}{\mathbf{ab}}]) + (\nabla \cdot [\overset{\uparrow}{\mathbf{ab}}]). \quad (12)$$

Чтобы в первом из двух смешанных произведений (12) оператор  $\nabla$  действовал на вектор  $\mathbf{a}$ , воспользуемся свойством смешанного произведения:

$$(\nabla \cdot [\overset{\downarrow}{\mathbf{ab}}]) = ([\nabla \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}] \mathbf{b}).$$

Переставляя сомножители  $[\nabla \mathbf{a}]$  и  $\mathbf{b}$  в скалярном произведении и учитывая, что  $[\nabla \mathbf{a}] = \operatorname{rot} \mathbf{a}$ , получаем

$$(\nabla \cdot [\overset{\downarrow}{\mathbf{ab}}]) = (\mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a}).$$

Во втором слагаемом (12) поменяем местами сомножители в векторном произведении:

$$(\nabla \cdot [\overset{\uparrow}{\mathbf{ab}}]) = -(\nabla \cdot [\overset{\downarrow}{\mathbf{ba}}]).$$

После этого находим

$$(\nabla \cdot [\overset{\downarrow}{\mathbf{ab}}]) = -(\nabla \cdot [\overset{\downarrow}{\mathbf{ba}}]) = -(\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}).$$

Складывая полученные результаты, получаем формулу (11).

Формулу (8) для производной по направлению с помощью оператора  $\nabla$  можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\mathbf{l} \nabla u).$$

С другой стороны,  $\frac{\partial u}{\partial l}$  можно вычислить, “умножая” скалярное произведение векторов  $\mathbf{l}$  и  $\nabla$  на скаляр  $u$ :

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\mathbf{l} \nabla) u. \quad (13)$$

Символ  $\frac{\partial}{\partial l} = (\mathbf{l} \nabla)$  будем называть *оператором производной по направлению  $\mathbf{l}$* . В частном случае, когда вектор  $\mathbf{l}$  сонаправлен с одной из координатных осей, например, с  $Ox$  ( $\mathbf{l} = \mathbf{i}$ ), имеем

$$\frac{\partial}{\partial l} = (\mathbf{i} \nabla) = \frac{\partial}{\partial x},$$

т. е. оператор производной по направлению координатной оси — это оператор соответствующей частной производной.

Используя оператор производной по направлению, запишем с помощью оператора Гамильтона производную векторного поля  $\mathbf{a}$  по направлению  $\mathbf{l}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial l} = (\mathbf{l} \nabla) \mathbf{a}. \quad (14)$$

Формула (14) эквивалентна совокупности трех формул (13) для координат вектора  $\mathbf{a}$ .

**12. Нестационарные поля.** Пусть в области  $G$  определено нестационарное скалярное поле  $u(x, y, z, t)$  величина  $u$  является функцией точки  $M(x, y, z) \in G$  и времени  $t$ . Физический пример такого поля — изменяющееся со временем распределение температуры в какой-либо среде (например, в потоке жидкости). Рассмотрим движущуюся в области  $G$  точку (частицу жидкости)  $M(x(t), y(t), z(t))$ . Координаты точки (частицы) изменяются со временем по известному закону  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ . Величина  $u$  в движущейся точке  $M$  является сложной функцией  $t$

$$u = u(x(t), y(t), z(t), t)$$

Вычислим производную по  $t$  этой функции (она называется *полной производной*). По правилу дифференцирования сложной функции находим

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Введя в точке  $M$  вектор скорости  $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\} = \left\{ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\}$ , получаем

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} + v_z \frac{\partial u}{\partial z},$$

или

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v} \operatorname{grad} u) = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla u) = \frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla)u \quad (15)$$

Аналогично, если в области  $G$  задано нестационарное векторное поле  $\mathbf{a}(x, y, z, t)$ , то для движущейся точки  $M(x(t), y(t), z(t))$  векторная величина  $\mathbf{a}$  является сложной функцией  $t$   $\mathbf{a}(x(t), y(t), z(t), t)$ . Полную производную по  $t$  для каждой координаты вектор-функции  $\mathbf{a}$  можно вычислить по формуле (15). Умножая результаты на базисные векторы  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  и складывая, получим

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{a} \quad (16)$$

В формулах (15) и (16) слагаемые  $\frac{\partial u}{\partial t}$  и  $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}$  выражают скорости изменения величин  $u$  и  $\mathbf{a}$  со временем при фиксированных координатах, т. е. характеризуют локальное изменение этих величин, и поэтому называются *локальными производными*. Слагаемые  $(\mathbf{v} \nabla)u$  и  $(\mathbf{v} \nabla)\mathbf{a}$  образуются за счет изменения координат точки, ее движения (конвекции). Поэтому эти слагаемые в выражениях полных производных называются *конвективными производными*.

Локальные производные характеризуют нестационарность рассматриваемого физического поля в данной точке пространства. Конвективные производные характеризуют неоднородность поля в данный момент времени.

### Контрольные вопросы и задания

- 1 Дайте определение скалярного и векторного полей и приведите примеры физических полей
- 2 Что такое поверхности уровня? Напишите уравнение семейства поверхностей уровня электрического поля точечного заряда, находящегося в точке  $M(x_0, y_0, z_0)$
- 3 Что такое векторные линии? Напишите их уравнения в различных формах
- 4 Дайте определение производной по направлению для скалярного и векторного полей. Как связана производная по направлению с частными производными?
- 5 Найдите производную скалярного поля  $u = \sqrt{(x - x_0)^2 + y^2 + z^2}$  в точке  $A(0, 0, 0)$  по направлению а) оси  $Ox$ , б) оси  $Oy$ , в) вектора  $\mathbf{l} = \{1, 1, 1\}$
- 6 Дайте определение градиента скалярного поля. Как связана производная по направлению  $\mathbf{l}$  с градиентом скалярного поля в данной точке?
- 7 Для скалярного поля из задания 5 найдите  $\operatorname{grad} u$  в точке  $A(0, 0, 0)$ . Сопоставьте направление  $\operatorname{grad} u$  с указанными в задании 5 направлениями и значение  $|\operatorname{grad} u(A)|$  с производными функции  $u$  в точке  $A$  по этим направлениям
- 8 Какое векторное поле называется потенциальным? Приведите примеры потенциальных полей
- 9 Дайте определение дивергенции векторного поля. Каков физический смысл дивергенции?
- 10 Чему равна дивергенция электрического поля точечного заряда?
- 11 Дайте определение ротора векторного поля. Каков физический смысл ротора?
- 12 Какое векторное поле называется безвихревым? Приведите примеры безвихревых полей
- 13 Какое векторное поле называется соленоидальным? Приведите примеры соленоидальных полей
- 14 Что такое скалярный потенциал, векторный потенциал?
- 15 Напишите систему уравнений Максвелла. Какое из уравнений Максвелла выражает факт отсутствия магнитных зарядов?
- 16 Что такое оператор Гамильтона?
- 17 Запишите с помощью оператора Гамильтона а) градиент скалярного поля, б) дивергенцию векторного поля, в) ротор векторного поля, г) формулы для производной скалярного и векторного полей по направлению  $\mathbf{l}$
- 18 Используя правила вычислений с оператором Гамильтона, докажите, что  $\operatorname{div}[\mathbf{ab}] = (\mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{b})$
- 19 Что такое полная производная, локальная производная, конвективная производная? Что они характеризуют и каким соотношением связаны?

### Примеры решения задач

**1.** Найти и нарисовать линии уровня скалярного поля  $u = xy$ . Вычислить и изобразить на чертеже градиент этой функции в точках  $(1, 1)$  и  $(1, -1)$ .

Линии уровня функции  $u = xy$  задаются уравнением  $xy = C$ , где  $C$  — произвольная постоянная, т. е. представляют собой семейство

гипербол  $y = \frac{C}{x}$ , а также две прямые,  $x = 0$  и  $y = 0$  (рис. 75). Далее,

$$\operatorname{grad} u = y \mathbf{i} + x \mathbf{j},$$

$$\operatorname{grad} u_{(1,1)} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \operatorname{grad} u_{(1,-1)} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

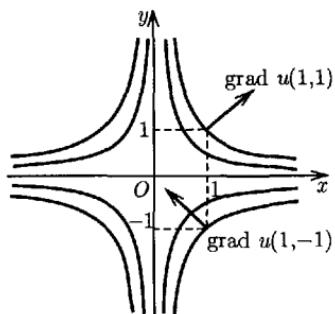


Рис. 75

На рис. 75 видно, что в указанных точках  $\operatorname{grad} u$  перпендикулярен линиям уровня, проходящим через точки. В точке  $(1, 1)$  функция  $u = xy$  быстрее всего возрастает в направлении от начала координат по биссектрисе I квадранта, и скорость ее возрастания в этом направлении равна

$$\frac{\partial u}{\partial l}(1, 1) = |\operatorname{grad} u|_{(1, 1)} = \sqrt{2}.$$

В точке  $(1, -1)$  функция  $u = xy$  возрастает быстрее всего в направлении к началу координат по биссектрисе IV квадранта, и скорость ее возрастания в этом направлении также равна  $\sqrt{2}$ . ▲

**2.** Найти градиент скалярного поля  $u = xyz$  в точке  $M(-2, 3, 4)$ . Чему равна в этой точке производная поля  $u$  в направлении вектора  $\mathbf{a} = \{3, -4, 12\}$ ?

△ Согласно определению градиента имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} u(M) &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}(M), \frac{\partial u}{\partial y}(M), \frac{\partial u}{\partial z}(M) \right\} = \\ &= \{yz, zx, xy\}_{M(-2,3,4)} = \{12, -8, -6\}. \end{aligned}$$

Далее, единичным вектором, сонаправленным с  $\mathbf{a}$ , является вектор  $\mathbf{l} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{13}\{3, -4, 12\}$ . По формуле (8) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M) = \frac{3}{12} \cdot 12 + \frac{4}{13} \cdot 8 - \frac{12}{13} \cdot 6 = -\frac{4}{13}. \blacksquare$$

**3.** Найти векторные линии векторного поля  $\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} u$ , где  $u = xyz$ .

△ Для векторного поля  $\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} u = yz \mathbf{i} + zx \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$  уравнения (5), определяющие векторные линии, имеют вид

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy} \quad \text{или} \quad xdx = ydy \quad \text{и} \quad ydy = zdz,$$

откуда

$$\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C_1, \tag{17}$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{2} + C_2. \tag{18}$$

Уравнения (17) и (18) определяют два семейства гиперболических цилиндров с образующими, параллельными соответственно осям  $Oz$  и  $Ox$ , а также (при  $C_1 = C_2 = 0$ ) две пары плоскостей,  $x = \pm y$  и  $y = \pm z$ .

Любая векторная линия поля  $\mathbf{a}(M)$  является линией пересечения двух поверхностей, получающихся из семейств (17) и (18) при некоторых фиксированных значениях  $C_1$  и  $C_2$ .

Например, при  $C_1 = C_2 = 0$  линия пересечения плоскостей  $x = y$  и  $y = z$  представляет собой прямую, проходящую через начало координат. Ее уравнения имеют вид  $x = y = z$ . В точках этой прямой вектор поля есть  $\mathbf{a}(M) = \{x^2, x^2, x^2\}$ . ▲

4. Найти градиент сферического скалярного поля  $u = \varphi(r)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  (т. е. зависящего только от расстояния точки  $(x, y, z)$  до начала координат).

△ Согласно определению градиента имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \varphi(r) &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \varphi(r), \frac{\partial}{\partial y} \varphi(r), \frac{\partial}{\partial z} \varphi(r) \right\} = \\ &= \left\{ \varphi'(r) \frac{x}{r}, \varphi'(r) \frac{y}{r}, \varphi'(r) \frac{z}{r} \right\} = \varphi'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}.\end{aligned}$$

Отметим, что из соотношения

$$\mathbf{a} = \varphi'(r) \frac{\mathbf{r}}{r} = \operatorname{grad} \varphi(r)$$

следует, что векторное поле  $\mathbf{a} = \varphi'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$  является потенциальным, а функция  $\varphi(r)$  — его потенциал. ▲

5. Доказать, что кулоновское поле  $\mathbf{a} = \frac{C}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$  ( $C = \text{const}$ ) потенциально, и найти его потенциал.

△ Кулоновское поле  $\mathbf{a} = \frac{C}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$  является частным случаем потенциального поля  $\varphi'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$ , рассмотренного в предыдущей задаче и имеющего своим потенциалом функцию  $\varphi(r)$ . Поэтому, полагая  $\varphi'(r) = \frac{C}{r^2}$ , находим  $\varphi(r) = -\frac{C}{r} + C_1$ , где  $C_1$  — произвольная постоянная.

Итак, кулоновское поле потенциально и представимо в виде

$$\mathbf{a} = \frac{C}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \operatorname{grad} \varphi(r),$$

где  $\varphi(r) = C_1 - \frac{C}{r}$  — его потенциал. Отметим, что потенциал любого векторного потенциального поля определен неоднозначно — с точностью до постоянного слагаемого. Это слагаемое не влияет на координаты векторного поля, получающиеся дифференцированием потенциала, и может быть выбрано любым удобным образом, исходя из дополнительных соображений. ▲

6. Найти дивергенцию векторного поля  $a = x \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^3 \mathbf{k}$  в точке  $M(-2, 4, 5)$ .

△ Согласно определению дивергенции векторного поля  $\mathbf{a} = \{P, Q, R\}$

находим

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{a}(M) &= \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M) = \\ &= (1 + 2y + 3z^2)_{M(-2,4,5)} = 1 + 8 + 75 = 84. \blacksquare\end{aligned}$$

7. Найти дивергенцию сферического векторного поля  $\mathbf{a} = f(r) \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ . Определить вид функции  $f(r)$ , для которой поле  $\mathbf{a}$  является соленоидальным.

△ Данное поле в координатах имеет вид  $\mathbf{a} = f(r) \mathbf{r} = \{f(r)x, f(r)y, f(r)z\}$ . Согласно определению дивергенции находим

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{a} &= \frac{\partial}{\partial x}(f(r)x) + \frac{\partial}{\partial y}(f(r)y) + \frac{\partial}{\partial z}(f(r)z) = \\ &= f'(r) \frac{x^2}{r} + f(r) + f'(r) \frac{y^2}{r} + f(r) + f'(r) \frac{z^2}{r} + f(r) = f'(r)r + 3f(r).\end{aligned}$$

Из условия соленоидальности  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$  следует, что  $f'(r)r + 3f(r) = 0$ . Далее, разделяя переменные, имеем

$$\frac{df}{f} = -\frac{3dr}{r}.$$

После интегрирования получаем

$$\ln|f| = -3 \ln r + \ln C,$$

откуда  $f(r) = \frac{C}{r^3}$ , где  $C$  --- произвольная постоянная.

Итак, дивергенция сферического векторного поля  $\mathbf{a} = f(r) \mathbf{r}$  равна нулю только в том случае, если  $f(r) = \frac{C}{r^3}$ , т. е. только в случае кулоновского поля  $\mathbf{a} = \frac{C}{r^3} \mathbf{r}$ . Это поле является соленоидальным в любой области, не содержащей начала координат. ▲

8. Дано векторное поле  $\mathbf{a} = z^2 \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j} + y^2 \mathbf{k}$ . Найти  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  в точке  $M(1, 2, 3)$ .

△ Согласно определению ротора имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{a}(M) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(2y - 0) + \mathbf{j}(2x - 0) + \mathbf{k}(2x - 0)_M = \\ &= 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}. \blacksquare\end{aligned}$$

9. Найти ротор сферического векторного поля  $\mathbf{a} = f(r) \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ .

△ Запишем данное поле в координатах:  $\mathbf{a} = f(r) \mathbf{r} = \{f(r)x, f(r)y, f(r)z\}$ . По определению ротора находим

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f(r)x & f(r)y & f(r)z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(r)z - \frac{\partial}{\partial z}f(r)y\right) +$$

$$\begin{aligned} & + \mathbf{j} \left( \frac{\partial}{\partial z} f(r)x - \frac{\partial}{\partial x} f(r)z \right) + \mathbf{k} \left( \frac{\partial}{\partial x} f(r)y - \frac{\partial}{\partial y} f(r)x \right) = \\ & = \mathbf{i} f'(r) \left( \frac{yz}{r} - \frac{zy}{r} \right) + \mathbf{j} f'(r) \left( \frac{zx}{r} - \frac{xz}{r} \right) + \mathbf{k} f'(r) \left( \frac{xy}{r} - \frac{yx}{r} \right) = 0. \end{aligned}$$

Итак, ротор любого сферического векторного поля равен нулю, т. е. сферическое векторное поле является безвихревым.  $\blacktriangle$

**10.** Векторное поле  $a(M)$  соленоидально в области  $G$ . Доказать, что его можно представить в виде  $a(M) = \operatorname{rot} b(M)$ , и найти векторный потенциал  $b(M)$ .

$\triangle$  Пусть  $\mathbf{a} = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}$  и  $\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ . Будем искать векторный потенциал поля  $\mathbf{a}(M)$  в виде  $\mathbf{b} = b_1(x, y, z) \mathbf{i} + b_2(x, y, z) \mathbf{j}$ . Из условия  $\operatorname{rot} \mathbf{b} = \mathbf{a}$  получаем

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ b_1 & b_2 & 0 \end{array} \right| = -\frac{\partial b_2}{\partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial b_1}{\partial z} \mathbf{j} + \left( \frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} = P \mathbf{i} + Q \mathbf{j} + R \mathbf{k},$$

откуда

$$\frac{\partial b_2}{\partial z} = -P, \quad \frac{\partial b_1}{\partial z} = Q, \quad \frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial b_1}{\partial y} = R. \quad (19)$$

Интегрируя первые два уравнения (19), находим

$$b_2 = - \int_{z_0}^z P(x, y, z) dz + \varphi(x, y), \quad b_1 = \int_{z_0}^z Q(x, y, z) dz + \psi(x, y),$$

где  $z_0$  — аппликата какой-нибудь точки  $(x_0, y_0, z_0) \in G$ , а  $\varphi(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  — произвольные функции. Положим  $\psi(x, y) = 0$ , а функцию  $\varphi(x, y)$  выберем так, чтобы выполнялось третье равенство (19), т. е.

$$-\int_{z_0}^z \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) dz + \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} - \int_{z_0}^z \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) dz = R(x, y, z). \quad (20)$$

Покажем, что такой выбор функции  $\varphi(x, y)$  возможен. Действительно, учитывая равенство  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\partial R}{\partial z}$  (оно следует из условия  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ ), получаем из (20)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= R(x, y, z) - \int_{z_0}^z \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) dz = \\ &= R(x, y, z) - [R(x, y, z) - R(x, y, z_0)] = R(x, y, z_0), \\ \text{откуда } \varphi(x, y, z) &= \int_{x_0}^x R(x, y, z_0) dx. \end{aligned}$$

Итак, искомый векторный потенциал  $\mathbf{b}(M)$  имеет координаты

$$b_1 = \int_{z_0}^z Q(x, y, z) dz, \quad b_2 = - \int_{z_0}^z P(x, y, z) dz + \int_{x_0}^x R(x, y, z_0) dx, \quad b_3 = 0 \quad \blacktriangle$$

**11.** Пусть  $u(M)$  и  $v(M)$  — скалярные поля. Доказать справедливость формулы  $\operatorname{grad}(uv) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$

△ Согласно правилу (10) вычисления оператора Гамильтона от произведения функций имеем

$$\operatorname{grad}(uv) = \nabla(\overset{\downarrow}{uv}) + \nabla(u\overset{\downarrow}{v}) = v\nabla u + u\nabla v = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v \quad \blacktriangle$$

**12.** Пусть  $u(M)$  — скалярное поле,  $\mathbf{a}(M)$  — векторное поле. Доказать справедливость формулы

$$\operatorname{div}(u\mathbf{a}) = [\operatorname{grad} u \cdot \mathbf{a}] + u \operatorname{div} \mathbf{a} \quad (21)$$

△ Используя свойства оператора Гамильтона, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u\mathbf{a}) &= (\nabla \cdot u\mathbf{a}) = (\nabla \cdot \overset{\downarrow}{u}\mathbf{a}) + (\nabla \cdot u\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = (\nabla u \cdot \mathbf{a}) + u(\nabla \cdot \mathbf{a}) = \\ &= (\operatorname{grad} u \cdot \mathbf{a}) + u \operatorname{div} \mathbf{a} \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**13.** Доказать справедливость формулы

$$\operatorname{rot}(u\mathbf{a}) = [\operatorname{grad} u \cdot \mathbf{a}] + u \operatorname{rot} \mathbf{a}, \quad (22)$$

где  $u(M)$  — скалярное поле,  $\mathbf{a}(M)$  — векторное поле

△ Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(u\mathbf{a}) &= [\nabla \cdot u\mathbf{a}] = [\nabla \cdot \overset{\downarrow}{u}\mathbf{a}] + [\nabla \cdot u\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}] = \\ &= [\nabla u \cdot \mathbf{a}] + u[\nabla \cdot \mathbf{a}] = [\operatorname{grad} u \cdot \mathbf{a}] + u \operatorname{rot} \mathbf{a} \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**14.** Доказать справедливость формулы

$$\operatorname{rot}[\mathbf{ab}] = \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}, \quad (23)$$

где  $\mathbf{a}(M)$  и  $\mathbf{b}(M)$  — векторные поля

△ Учитывая выражение ротора с помощью оператора  $\nabla$  и правило (10), находим

$$\operatorname{rot}[\mathbf{ab}] = [\nabla[\overset{\downarrow}{\mathbf{ab}}]] + [\nabla[\overset{\downarrow}{\mathbf{ab}}]]. \quad (24)$$

Преобразуя первое двойное векторное произведение в (24) по формуле  $[\mathbf{p}[\mathbf{qs}]] = \mathbf{q}(\mathbf{ps}) - \mathbf{s}(\mathbf{pq})$ , получаем

$$[\nabla[\overset{\downarrow}{\mathbf{ab}}]] = \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}(\nabla \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = (\mathbf{b}\nabla) \overset{\downarrow}{\mathbf{a}} - \mathbf{b}(\nabla \overset{\downarrow}{\mathbf{a}}) = (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} \quad (25)$$

Отметим, что перестановка сомножителей в скалярном произведении  $(\overset{\downarrow}{\mathbf{a}}(\nabla \mathbf{b}) = (\mathbf{b}\nabla) \overset{\downarrow}{\mathbf{a}})$  сделана для того, чтобы оператор  $\nabla$  действовал на стоящий за ним вектор  $\mathbf{a}$ .

Аналогично для второго слагаемого в (24) имеем

$$[\nabla[\mathbf{a}\mathbf{b}]] = \mathbf{a}(\nabla \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \mathbf{a}) = \mathbf{a}(\nabla \mathbf{b}) - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} = \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}. \quad (26)$$

Складывая (25) и (26), получаем формулу (23). ▲

**15.** Доказать справедливость формулы

$$\operatorname{grad}(\mathbf{a}\mathbf{b}) = [\mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a}] + [\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}] + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}, \quad (27)$$

где  $\mathbf{a}(M)$  и  $\mathbf{b}(M)$  — векторные поля

△ Согласно правилу (10) имеем

$$\operatorname{grad}(\mathbf{a}\mathbf{b}) = \nabla(\mathbf{a}\mathbf{b}) + \nabla(\mathbf{b}\mathbf{a}). \quad (28)$$

Перепишем формулу  $[\mathbf{p}[\mathbf{q}\mathbf{s}]] = \mathbf{q}(\mathbf{p}\mathbf{s}) - \mathbf{s}(\mathbf{p}\mathbf{q})$  в виде  $\mathbf{s}(\mathbf{p}\mathbf{q}) = [\mathbf{p}[\mathbf{q}\mathbf{s}]] + + (\mathbf{p}\mathbf{s})\mathbf{q}$ . При этом мы переставили сомножители в произведении  $[\mathbf{q}\mathbf{s}]$ , изменив знак векторного произведения

Запишем с помощью этой формулы второе слагаемое в (28)

$$\nabla(\mathbf{a}\mathbf{b}) = [\mathbf{a}[\nabla \mathbf{b}]] + (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} = [\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}] + (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} \quad (29)$$

Аналогично для первого слагаемого в (28) имеем

$$\nabla(\mathbf{b}\mathbf{a}) = \nabla(\mathbf{b}\mathbf{a}) = [\mathbf{b}[\nabla \mathbf{a}]] + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} = [\mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a}] + [\mathbf{b}\nabla]\mathbf{a} \quad (30)$$

Складывая (29) и (30), получаем формулу (27). ▲

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

- Найдите и нарисуйте линии уровня скалярного поля  $u = (x - y)^2$ . Вычислите и начертите вектор  $\operatorname{grad} u$  в точках  $A(-1, 1)$  и  $B(1, 1)$
- Найдите линии уровня скалярного поля  $u = e^{2x/(x^2+y^2)}$  и нарисуйте линии уровня  $u(x, y) = e$  и  $u(x, y) = e^{1/2}$ . Вычислите и начертите вектор  $\operatorname{grad} u$  в точках  $A(1, 1)$ ,  $B(2, 0)$ ,  $C(1, -1)$
- Найдите и нарисуйте линии уровня скалярного поля  $u = \min(x, y)$ . Вычислите и начертите вектор  $\operatorname{grad} u$  в точках  $A(2, 1)$  и  $B(1, 2)$
- Найдите векторные линии
  - кулоновского поля  $\mathbf{E} = \frac{ke}{r^3} \mathbf{r}$  точечного заряда  $e$ , находящегося в начале координат,
  - векторного поля  $\mathbf{a} = [\mathbf{c} \mathbf{r}]$ , где  $\mathbf{c}$  — постоянный вектор,  $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ ,
  - векторного поля  $\mathbf{a} = -a^2 y \mathbf{i} + b^2 x \mathbf{j}$  ( $a$  и  $b$  — числа),
  - векторного поля  $\mathbf{a} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + 2z \mathbf{k}$
- Вычислите производные скалярного поля  $u = x^2 + y^2$  в точке  $M(1, 1)$  по направлениям векторов  $\mathbf{l}_1 = \{1, 1\}$ ,  $\mathbf{l}_2 = \{0, 1\}$ ,  $\mathbf{l}_3 = \{-1, 1\}$ . Найдите  $\operatorname{grad} u$  в точке  $M$  и сравните  $|\operatorname{grad} u|$  с найденными значениями производных по направлениям векторов  $\mathbf{l}_1$ ,  $\mathbf{l}_2$ ,  $\mathbf{l}_3$

6. Найдите градиент скалярного поля  
 а)  $u = x^3y^2z$  в точке  $M(1, 2, 3)$ ,  
 б)  $u = (x - y)(y - z)(z - x)$  в точках  $M_1(1, 2, 3)$ ,  $M_2(3, 1, 2)$ ,  $M_3(2, 3, 1)$ ,  
 в)  $u = (x - 1)(y - 2)(z - 3)$  в точке  $M(2, 3, 4)$
7. В каких точках градиент скалярного поля  $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$   
 а) перпендикулярен оси  $Oz$ , б) параллелен оси  $Oz$ ?
8. В каких точках градиент скалярного поля  $u = x^2 + y^2 - 2xy$   
 а) перпендикулярен прямой  $y = x$ , б) равен нулю?
9. Найдите угол между градиентами скалярного поля  $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$  в  
 точках  $M(1, 2, 2)$  и  $N(-3, 1, 0)$
10. В каких точках выполнено равенство  $\left| \operatorname{grad} \ln \frac{1}{r} \right|$ , если  
 $r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$
11. Докажите, что а)  $\operatorname{grad} r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ , б)  $\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ , в)  $\operatorname{grad} \sin r = \cos r \frac{\mathbf{r}}{r}$ , где  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ . Укажите скалярные потенциалы векторных полей  $\frac{\mathbf{r}}{r}$ ,  $-\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ ,  $\frac{1}{r} \cos r$ ,  $\frac{\mathbf{r}}{r^2}$ ,  $\frac{1}{1+r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$
12. Докажите справедливость формул ( $u, v$  — скалярные поля)  
 а)  $\operatorname{grad}(u + v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$ , б)  $\operatorname{grad} \frac{u}{v} = \frac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2}$ ,  
 в)  $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$ , г)  $\operatorname{grad} f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v$
13. Найдите  $\operatorname{grad}(\mathbf{c}\mathbf{r})$  и  $\operatorname{grad}(u(\mathbf{c}\mathbf{r}))$ , где  $u$  — скалярное поле,  $\mathbf{c}$  — постоянный вектор,  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$
14. Для скалярного поля  $u = u(x, y)$  найдите  $\operatorname{grad} u$ , если функция  $u(x, y)$  определяется неявно уравнением  
 а)  $u^3 - 3xyu = a^2$ , б)  $x + y + u = e^u$ , в)  $x + y + u = e^{-(x+y+u)}$
15. Найдите дивергенцию векторного поля  $\mathbf{a}$ , если  
 а)  $\mathbf{a} = (x - y)(y - z)\mathbf{i} + (y - z)(z - x)\mathbf{j} + (z - x)(x - y)\mathbf{k}$ ,  
 б)  $\mathbf{a} = (y^2 + z^2)(x + y)\mathbf{i} + (z^2 + x^2)(y + z)\mathbf{j} + (x^2 + y^2)(z + x)\mathbf{k}$ ,  
 в)  $\mathbf{a} = (x^2 + y^2)(y - z)\mathbf{i} + (y^2 + z^2)(z - x)\mathbf{j} + (z^2 + x^2)(x - y)\mathbf{k}$ ,  
 г)  $\mathbf{a} = f_1(y, z)\mathbf{i} + f_2(x, z)\mathbf{j} + f_3(x, y)\mathbf{k}$ ,  
 д)  $\mathbf{a} = [x + f_1(y, z)]\mathbf{i} + [y + f_2(x, z)]\mathbf{j} + [z + f_3(x, y)]\mathbf{k}$ ,  
 е)  $\mathbf{a} = xf_1(y, z)\mathbf{i} + yf_2(x, z)\mathbf{j} + zf_3(x, y)\mathbf{k}$
16. Вычислите а)  $\operatorname{div} \mathbf{r}$ , б)  $\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r}$ , в)  $\operatorname{div}(r^4 \mathbf{r})$ , где  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$
17. Найдите минимальное значение дивергенции векторного поля  $\mathbf{a} = (x - a)(y - b)^2 \mathbf{i} + (y - b)(x - a)^2 \mathbf{j}$
18. Докажите справедливость формулы  
 а)  $\operatorname{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{div} \mathbf{b}$ ,  
 б)  $\operatorname{div}(u\mathbf{c}) = (\mathbf{c} \operatorname{grad} u)$ , где  $\mathbf{c}$  — постоянный вектор
19. Используя формулы (21) и (11) из § 1, преобразуйте а)  $\operatorname{div}(r\mathbf{c})$ ,  
 б)  $\operatorname{div}(r^2 \mathbf{c})$ , в)  $\operatorname{div}(f(r)\mathbf{c})$ , г)  $\operatorname{div}(\mathbf{b}(r\mathbf{a}))$ , д)  $\operatorname{div}(\mathbf{r}(r\mathbf{a}))$ , е)  $\operatorname{div} r[\mathbf{c}\mathbf{r}]$ , ж)  $\operatorname{div}[\mathbf{a}[\mathbf{r}\mathbf{b}]]$ , где  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  — постоянные векторы

20. Твердое тело вращается вокруг оси  $Oz$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Векторные поля скоростей  $\mathbf{v}(M)$  и ускорений  $\boldsymbol{\omega}(M)$  определяются формулами  $\mathbf{v}(M) = [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]$ ,  $\boldsymbol{\omega}(M) = [\boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]]$ , где  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$  — радиус-вектор точки  $M$ . Вычислите  $\operatorname{div} \mathbf{v}(M)$  и  $\operatorname{div} \boldsymbol{\omega}(M)$ .
21. Найдите дивергенцию гравитационного поля, создаваемого конечной системой точечных масс  $m_1, m_2, \dots, m_n$ .
22. Найдите дивергенцию электрического поля, создаваемого конечной системой точечных зарядов  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .
23. Найдите ротор векторного поля  $\mathbf{a} = \frac{y}{x} \mathbf{i} + \frac{z}{y} \mathbf{j} + \frac{x}{z} \mathbf{k}$
- а) в произвольной точке  $M(x, y, z)$ , б) в точке  $A(-1, -1, -1)$ .
24. Найдите ротор векторного поля
- а)  $\mathbf{a} = yz \mathbf{i} + zx \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$ , б)  $\mathbf{a} = y^2 z^3 \mathbf{i} + 2xzy^2 \mathbf{j} + 3xy^2 z^2 \mathbf{k}$ ,
- в)  $\mathbf{a} = yz \mathbf{i} + z(x+2y) \mathbf{j} + y(x+y) \mathbf{k}$ , г)  $\mathbf{a} = \frac{y}{x^2} \mathbf{j} - \frac{1}{x} \mathbf{k}$ ,
- д)  $\mathbf{a} = \frac{y}{x^2} \mathbf{i} - \frac{1}{x} \mathbf{j}$ , е)  $\mathbf{a} = \frac{y}{x^2} \mathbf{k} - \frac{1}{x} \mathbf{i}$
25. Найдите ротор векторного поля  $\mathbf{a}$  в точке  $M(1, 1, 2)$ , если
- а)  $\mathbf{a} = yz^2 \mathbf{j} + x \mathbf{k}$ , б)  $\mathbf{a} = yz^2 \mathbf{i} + x \mathbf{j}$ , в)  $\mathbf{a} = yz^2 \mathbf{k} + x \mathbf{i}$
26. Вычислите а)  $\operatorname{rot} r \mathbf{r}$ , б)  $\operatorname{rot} \frac{\mathbf{r}}{r}$ , в)  $\operatorname{rot} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ , где  $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ .
27. Используя формулы (22) и (24), преобразуйте а)  $\operatorname{rot}(\mathbf{r}c)\mathbf{a}$ , б)  $\operatorname{rot}(\mathbf{rc})$ , в)  $\operatorname{rot} f(r)\mathbf{c}$ , г)  $\operatorname{rot}[\mathbf{c} \cdot f(r) \mathbf{r}]$ , где  $\mathbf{a}$  — векторное поле,  $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $c$  — постоянный вектор.
28. Для произвольных векторных полей  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  и произвольного скалярного поля  $u$  докажите двумя способами (с помощью оператора Гамильтона и в прямоугольных координатах) справедливость следующих формул
- а)  $(\mathbf{a}\nabla)u\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{a}\nabla u) + u(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}$ , б)  $(\mathbf{c}\nabla)(\mathbf{a}\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\nabla)\mathbf{a}$ ,
- в)  $(\mathbf{c}\nabla)[\mathbf{a}\mathbf{b}] = [\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\nabla)\mathbf{b}] - [\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\nabla)\mathbf{a}]$ ,
- г)  $[(\mathbf{a}\mathbf{b})\cdot\operatorname{rot} \mathbf{c}] = (\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{c}) - (\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\nabla)\mathbf{c})$ .
29. Пусть  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — векторные поля. Докажите, что вектор  $(\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a}$  есть производная векторного поля  $\mathbf{a}$  по направлению вектора  $\mathbf{b}$ , умноженная на модуль вектора  $\mathbf{b}$ .  $(\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{b}} |\mathbf{b}|$
30. Даны векторные поля  $\mathbf{a} = yz \mathbf{i} + zx \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$  и  $\mathbf{b} = zt \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + yz \mathbf{k}$ . Вычислите векторы  $(\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a}$  и  $(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}$  и найдите  $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{b}}$  и  $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{a}}$  (производную поля  $\mathbf{a}$  по направлению вектора  $\mathbf{b}$  и производную поля  $\mathbf{b}$  по направлению вектора  $\mathbf{a}$ ).
31. Вычислите производные векторного поля  $\mathbf{a} = xy \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + zx \mathbf{k}$  по направлениям векторов  $\mathbf{l}_1 = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{l}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{l}_3 = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{l}_4 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ . Вычислите также векторы  $(\mathbf{l}_1\nabla)\mathbf{a}$ ,  $(\mathbf{l}_2\nabla)\mathbf{a}$ ,  $(\mathbf{l}_3\nabla)\mathbf{a}$ ,  $(\mathbf{l}_4\nabla)\mathbf{a}$ .
32. Покажите, что дифференциалы скалярного поля и векторного поля могут быть записаны с помощью оператора Гамильтона в виде  $du = (d\mathbf{r} \cdot \nabla u) = (d\mathbf{r}\nabla)u$ ,  $d\mathbf{a} = (d\mathbf{r}\nabla)\mathbf{a}$ , где  $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$ .
33. Нестационарное поле температуры точек плоскости  $Oxy$  задано формулой  $T = T_0 e^{-(x^2+y^2+t^2)}$  ( $t$  — время). Частица движется по траектории  $\mathbf{r}(t) = \frac{\cos t}{t} \mathbf{i} + \frac{\sin t}{t} \mathbf{j}$  ( $\mathbf{r}(t)$  — радиус-вектор частицы). Вычислите локальную, конвективную и полную производные по времени температуры частицы.

34. Нестационарное электрическое поле в пространстве задано формулой

$$\mathbf{E} = \frac{ke}{r^3} \mathbf{r} + A_0 \sin \omega t \cdot \mathbf{i}, \quad \mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}; \quad r = |\mathbf{r}|, \quad t \text{ — время.}$$

Вычислите векторы локальной, конвективной и полной производных по времени поля  $\mathbf{E}$  в точке, движущейся по винтовой линии  $\mathbf{r}(t) = a \cos t \cdot \mathbf{i} + b \sin t \cdot \mathbf{j} + bt \mathbf{k}$ .

35. Пусть  $\mathbf{v}(x, y, z, t)$  — нестационарное поле скоростей потока жидкости. Используя формулу (16) при  $\mathbf{a} = \mathbf{v}$  и формулу (27) при  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{v}$ , выведите формулу

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \left( \frac{\mathbf{v}}{2} \right)^2 + [\operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}].$$

## § 2. Повторные дифференциальные операции в скалярных и векторных полях

### Основные понятия и формулы

**1. Дифференциальные операции второго порядка.** Пусть в области  $G$  заданы скалярное поле  $u(M)$  и векторное поле  $\mathbf{a}(M) = \{P, Q, R\}$ , причем функции  $u, P, Q, R$  имеют в области  $G$  непрерывные частные производные второго порядка. Тогда  $\operatorname{grad} u(M)$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{a}(M)$  являются дифференцируемыми векторными полями, а  $\operatorname{div} \mathbf{a}(M)$  — дифференцируемым скалярным полем.

К векторным полям  $\operatorname{grad} u(M)$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{a}(M)$  можно применить операции вычисления дивергенции и ротора, а к скалярному полю  $\operatorname{div} \mathbf{a}(M)$  — операцию вычисления градиента. Таким образом, получаем повторные операции:  $\operatorname{div} \operatorname{grad} u$ ,  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u$ ,  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a}$ ,  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a}$ ,  $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a}$ .

Операцию  $\operatorname{div} \operatorname{grad} u$  называют *оператором Лапласа* и обозначают также символом  $\Delta$ :

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u.$$

С помощью оператора Гамильтона оператор Лапласа записывается в виде

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = (\nabla \cdot (\nabla u)) = \nabla^2 u.$$

Учитывая, что

$$\nabla^2 = \left( \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

получаем

$$\Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Функция  $u$ , удовлетворяющая в некоторой области уравнению Лапласа  $\Delta u = 0$ , называется *гармонической* в этой области. Например, линейная функция  $u = ax + by + cz$  является гармонической в любой области. Оператор Лэпласа широко используется в уравнениях математической физики. Отметим, в частности, что потенциал

электрического поля точечного заряда или поля тяготения точечной массы, имеющий вид  $u = \frac{k}{r}$  ( $k = \text{const}$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ), при  $r \neq 0$  удовлетворяет уравнению Лапласа.

Как было отмечено в § 1,

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = [\nabla \cdot \nabla u] = 0$$

(потенциальное векторное поле  $\operatorname{grad} u$  является безвихревым) и

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = (\nabla[\nabla \cdot \mathbf{a}]) = 0$$

(векторное поле  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  является соленоидальным).

Две остальные повторные операции  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a}$  и  $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a}$  связаны соотношением (см. пример 3 на с. 404)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \nabla \mathbf{a}, \quad (1)$$

где  $\Delta \mathbf{a} = \Delta(P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) = \Delta P\mathbf{i} + \Delta Q\mathbf{j} + \Delta R\mathbf{k}$  — вектор-функция, координатами которой являются результаты применения оператора Лапласа к функциям  $P, Q, R$ .

**2. Разложение векторного поля на сумму потенциального и соленоидального полей.** Произвольное непрерывно дифференцируемое векторное поле  $\mathbf{a}(M)$  может быть представлено в виде

$$\mathbf{a}(M) = \mathbf{a}_1(M) + \mathbf{a}_2(M), \quad (2)$$

где  $\mathbf{a}_1(M)$  — потенциальное поле,  $\mathbf{a}_2(M)$  — соленоидальное поле.

Действительно, по определению потенциальное векторное поле  $\mathbf{a}_1(M)$  есть градиент некоторого скалярного поля  $u(M)$ :  $\mathbf{a}_1(M) = \operatorname{grad} u(M)$ . Поэтому для вектора  $\mathbf{a}_2(M)$  из равенства (2) имеем

$$\mathbf{a}_2(M) = \mathbf{a}(M) - \operatorname{grad} u(M). \quad (3)$$

Чтобы векторное поле  $\mathbf{a}_2(M)$  было соленоидальным, оно должно удовлетворять условию  $\operatorname{div} \mathbf{a}_2(M) = 0$ , откуда, учитывая равенство (3), находим

$$\operatorname{div} \mathbf{a}_2(M) = \operatorname{div} \mathbf{a}(M) - \operatorname{div} \operatorname{grad} u(M) = \operatorname{div} \mathbf{a}(M) - \Delta u(M) = 0.$$

Таким образом, для скалярного потенциала поля  $\mathbf{a}_1(M)$  получаем уравнение

$$\Delta u = \operatorname{div} \mathbf{a}, \quad (4)$$

где  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  — известная функция данного поля  $\mathbf{a}(M)$ .

Итак, если функция  $u$  есть решение уравнения (4), то, полагая  $\mathbf{a}_1(M) = \operatorname{grad} u(M)$ ,  $\mathbf{a}_2(M) = \mathbf{a}(M) - \operatorname{grad} u(M)$ , получаем представление поля  $\mathbf{a}(M)$  в виде (2), где  $\mathbf{a}_1(M)$  — потенциальное,  $\mathbf{a}_2(M)$  — соленоидальное поле.

Уравнение (4) — неодиородное уравнение в частных производных второго порядка, называемое *уравнением Пуассона*:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f, \quad f = \operatorname{div} \mathbf{a}.$$

Отметим, что это уравнение имеет (бесконечное) множество решений, поэтому представление поля  $\mathbf{a}(M)$  в виде (2) не единственно.

### Контрольные вопросы и задания

- Перечислите повторные дифференциальные операции в скалярных и векторных полях.
- Результаты каких повторных дифференциальных операции тождественно равны нулю?
- Что такое оператор Лапласа и как он связан с оператором  $\nabla$ ?
- Приведите примеры функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа  $\Delta u = 0$ . Как называются такие функции?
- Объясните, как представить произвольное векторное поле в виде суммы потенциального и соленоидального полей.
- Вычислите  $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{r}$  и  $\operatorname{div} \operatorname{grad} r$ , где  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ .

### Примеры решения задач

#### 1. Доказать справедливость формулы

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) + u \Delta v, \quad (5)$$

где  $u$  и  $v$  — скалярные поля.

$\Delta$  Используя оператор Гамильтона, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) &= (\nabla \cdot (u \nabla v)) = (\nabla u \cdot \nabla v) + u \nabla^2 v = \\ &= (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) + u \Delta v. \blacksquare \end{aligned}$$

#### 2. Доказать справедливость формулы

$$\Delta(uv) = v \Delta u + 2(\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) + u \Delta v, \quad (6)$$

где  $u$  и  $v$  — скалярные поля.

$\Delta$  Используя формулы  $\Delta u = (\nabla \cdot \nabla u)$ ,  $\nabla(uv) = v \nabla u + u \nabla v$  и  $(\nabla \cdot v \nabla u) = (\nabla u \cdot \nabla v) + v \nabla^2 u$ , находим

$$\begin{aligned} \nabla(uv) &= (\nabla \cdot \nabla(uv)) = (\nabla \cdot (v \nabla u + u \nabla v)) = (\nabla \cdot v \nabla u) + (\nabla \cdot u \nabla v) = \\ &= (\nabla v \cdot \nabla u) + v \nabla^2 u + (\nabla u \cdot \nabla v) + u \nabla^2 v = \\ &= v \nabla^2 u + 2\nabla u \nabla v + u \nabla^2 v = v \nabla u + 2(\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) + u \Delta v. \blacksquare \end{aligned}$$

Отметим, что формулу (6) с помощью оператора Гамильтона можно записать в виде

$$\nabla^2(uv) = v \nabla^2 u + 2(\nabla u \cdot \nabla v) + u \nabla^2 v$$

аналогично формуле второй производной произведения двух функций

$$(uv)'' = uv'' + 2u'v' + uv''.$$

#### 3. Доказать, что для векторного поля $\mathbf{a}$ справедлива формула

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}.$$

Δ Используя формулу для двойного векторного произведения  $[\mathbf{a}[\mathbf{bc}]] = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - (\mathbf{ab})\mathbf{c}$  и полагая в ней  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \nabla$ , получаем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = [\nabla[\nabla \mathbf{a}]] = \nabla(\nabla \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}. \blacksquare$$

4. Вычислить  $\Delta\left(\frac{1}{r}\right)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа.

Δ Учитывая равенство  $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{x}{r}$  и аналогичные равенства для  $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)$  и  $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)$ , получаем

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{r^2} \frac{x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{r^2} \frac{y}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{1}{r^2} \frac{z}{r}\right) = \\ &= -\frac{r^3 - 3r^2 \frac{x}{r} x}{r^6} - \frac{r^3 - 3r^2 \frac{y}{r} y}{r^6} - \frac{r^3 - 3r^2 \frac{z}{r} z}{r^6} = \\ &= -\frac{3r^3 - 3r^3}{r^6} = 0 \quad \text{при } r \neq 0. \end{aligned}$$

Итак, функция  $u = \frac{1}{r}$  является гармонической в любой области, где  $r \neq 0$ . ▲

5. Доказать, что электрическое поле  $\mathbf{E}(M, t)$  при  $\mu = \epsilon = 1$  удовлетворяет телеграфному уравнению

$$\Delta \mathbf{E} = \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (7)$$

в области, где плотность зарядов равна нулю ( $\rho = 0$ ).

Δ Рассмотрим систему уравнений Максвелла при  $\mu = \epsilon = 1, \rho = 0$  (см. п. 9 из § 1):

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (8)$$

Дифференцируя первое из уравнений (8) по времени и учитывая последнее уравнение, находим

$$\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (9)$$

Вычисляя ротор от обеих частей второго из уравнений (8), получаем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (10)$$

В силу тождества  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$  и уравнения  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  имеем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}. \quad (11)$$

Поэтому  $\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \Delta \mathbf{E}$ , и, следовательно, из (9) получаем уравнение (7) ▲

Если ток проводимости отсутствует ( $\sigma = 0$ ), то для электрического поля  $\mathbf{E}$  получается *волновое уравнение*

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Для стационарного электрического поля  $\mathbf{E}(M)$  оно переходит в уравнение Лапласа

$$\Delta \mathbf{E} = 0. \quad (12)$$

Уравнение (12) означает, что каждая координата вектора  $\mathbf{E}$  является гармонической функцией в рассматриваемой области

**6.** Разложить векторное поле  $\mathbf{a} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + (z + 2)\mathbf{k}$  на сумму потенциального и соленоидального полей

△ Как показано в п 2, векторное поле  $\mathbf{a}$  представимо в виде  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ , где  $\mathbf{a}_1 = \operatorname{grad} u$  — потенциальное поле,  $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a} - \operatorname{grad} u$  — соленоидальное поле, причем  $u$  — решение уравнения Пуассона  $\Delta u = \operatorname{div} \mathbf{a}$ .

Для данного поля

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial x}(x - y) + \frac{\partial}{\partial y}(x + y) + \frac{\partial}{\partial z}(z + 2) = 3$$

Уравнение  $\Delta u = 3$  в прямоугольных координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 3.$$

Частным решением этого уравнения является, например, функция  $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ . Для этой функции

$$\operatorname{grad} u = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{r}$$

Следовательно, данное поле  $\mathbf{a}$  представимо в виде суммы потенциального поля

$$\mathbf{a}_1 = \operatorname{grad} u = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{r}$$

и соленоидального поля

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 = \mathbf{a} - \operatorname{grad} u &= [(x - y) - x]\mathbf{i} + [(x + y) - y]\mathbf{j} + [(z + 2) - z]\mathbf{k} = \\ &= -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \end{aligned}$$

Непосредственно можно проверить, что векторное поле  $\mathbf{a}_2$  является соленоидальным:

$$\operatorname{div} \mathbf{a}_2 = \frac{\partial}{\partial x}(-y) - \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial z}(2) = 0. \blacksquare$$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

36. Вычислите а)  $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)$ , б)  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))$ , в)  $\operatorname{rot}(u \operatorname{grad} v)$ , г)  $\operatorname{rot}[a \operatorname{rot} b]$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $u$  и  $v$  — скалярные поля,  $a$  и  $b$  — векторные поля
37. Для векторного поля  $a = x^2 y^2 \mathbf{i} + y^2 z^2 \mathbf{j} + z^2 x^2 \mathbf{k}$  вычислите  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} a$ ,  $\operatorname{grad} \operatorname{div} a$ ,  $\Delta a$  и проверьте справедливость формулы (1)
38. Даны векторные поля  $a_1 = i e^{\pm x} + j e^{\pm y} + k e^{\pm z}$ ,  $a_2 = i e^{\pm y} + j e^{\pm z} + k e^{\pm x}$ ,  $a_3 = i e^{\pm z} + j e^{\pm x} + k e^{\pm y}$  (возможны любые комбинации знаков). Докажите, что  
 а)  $\operatorname{rot} a_1 = 0$ , а поля  $a_2$  и  $a_3$  удовлетворяют уравнению  $a + \operatorname{rot} \operatorname{rot} a = 0$ ,  
 б)  $\operatorname{div} a_2 = 0$ ,  $\operatorname{div} a_3 = 0$ , а поле  $a_1$  удовлетворяет уравнению  $a - \operatorname{grad} \operatorname{div} a = 0$
39. Покажите, что функция  $u = \ln \frac{1}{r}$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , удовлетворяет при  $r \neq 0$  уравнению Лапласа на плоскости  $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
40. Покажите, что электрическое поле  $\mathbf{E} = \frac{ke}{r^3} \mathbf{r}$  точечного заряда  $e$ , находящегося в начале координат, удовлетворяет при  $r \neq 0$  уравнению Лапласа  $\Delta \mathbf{E} = 0$
41. Покажите, что при  $\mu = \epsilon = 1$  магнитное поле  $\mathbf{H}$  удовлетворяет телеграфному уравнению  $\Delta \mathbf{H} = \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$
42. Разложите следующие векторные поля на сумму потенциального и соленоидального полей  
 а)  $a_1 = (x + y) \mathbf{i} + (x - y) \mathbf{j} + (z + 1) \mathbf{k}$ ,  
 б)  $a_2 = \frac{1}{2}(x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k})$ , в)  $a_2 = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} - 2z \mathbf{k}$

## § 3. Интегральные характеристики векторных полей

### Основные понятия и формулы

**1. Поток векторного поля.** Рассмотрим векторное поле  $\mathbf{a}(M)$ , определенное в пространственной области  $G$ , и некоторую кусочно гладкую ориентированную поверхность  $\Phi \subset G$ . Пусть  $\mathbf{n}(M)$  — поле единичных нормалей на выбранной стороне поверхности  $\Phi$ .

Как было отмечено в § 3 из гл. XIV, поверхностный интеграл

$$\iint_{\Phi} (\mathbf{a} \mathbf{n}) dS = \iint_{\Phi} a_n dS \quad (1)$$

называется *потоком векторного поля  $\mathbf{a}(M)$  через поверхность  $\Phi$  в сторону, определяемую вектором  $\mathbf{n}$*  (говорят также: *поток через выбранную сторону поверхности  $\Phi$* )

Если взять другую сторону поверхности (изменить ориентацию), то вектор  $\mathbf{n}$  изменит направление на противоположное; поэтому скалярное произведение  $(\mathbf{a} \mathbf{n})$ , а значит, и поток (поверхностный интеграл (1)) изменит знак.

Если  $\mathbf{a} = \mathbf{v}$  — скорость движущейся жидкости, то  $\iint_{\Phi} (\mathbf{v} \mathbf{n}) dS$  пред-

ставляет собой количество (объем) жидкости, протекающей через поверхность  $\Phi$  в заданную сторону в единицу времени. Эта величина называется в физике (гидродинамике) *потоком жидкости* через поверхность  $\Phi$ . Поэтому и в случае произвольного векторного поля  $\mathbf{a}(M)$  интеграл (1) называется потоком векторного поля через поверхность  $\Phi$ .

Рассмотрим электрическое поле  $\mathbf{E}$  точечного заряда  $e$ , помещенного в точку  $N$ . Найдем поток векторного поля  $\mathbf{E}$  через внешнююю сторону сферы  $\Phi$  радиуса  $r$  с центром в точке  $N$ . Пусть  $\mathbf{r} = \overrightarrow{NM}$  ( $M$  — точка на сфере  $\Phi$ ); тогда  $|\overrightarrow{NM}| = r$ ,  $\mathbf{E}(M) = \frac{ke}{r^3} \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{n}(M) = \frac{\mathbf{r}}{r}$ ,  $(\mathbf{En}) = \frac{ke}{r^4} (\mathbf{r}\mathbf{r}) = \frac{ke}{r^4} r^2 = \frac{ke}{r^2}$ . Поэтому

$$\iint_{\Phi} (\mathbf{En}) dS = \frac{ke}{r^2} \iint_{\Phi} dS = \frac{ke}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi ke = \frac{e}{\varepsilon},$$

где  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды,  $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$ .

Если в системе координат  $Oxyz$   $\mathbf{a} = \{P, Q, R\}$ , а  $\mathbf{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ , то выражение (1) для потока векторного поля  $\mathbf{a}(M)$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi} (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) dS &= \\ &= \iint_{\Phi} P dy dz + Q dz dx + R dx dy. \end{aligned} \quad (2)$$

Каждое слагаемое в правой части равенства (2) зависит от выбора системы координат, однако их сумма, т. е. поток  $\iint_{\Phi} (\mathbf{an}) dS$ , очевидно, не зависит от выбора системы координат.

**2. Формула Остроградского–Гаусса в векторной форме.** Пусть в области  $G$  определено векторное поле  $\mathbf{a} = \{P, Q, R\}$ ;  $\Phi$  — замкнутая поверхность, ограничивающая область  $G$ ;  $\mathbf{n}(M) = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\Phi$  в точке  $M$ .

Пусть, далее, для векторного поля  $\mathbf{a}$  (т. е. для функций  $P, Q, R$ ) и поверхности  $\Phi$  выполнены условия теоремы 5 из гл. XIV. Тогда справедлива формула Остроградского–Гаусса

$$\iiint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\Phi} (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) dS. \quad (3)$$

Подынтегральная функция в тройном интеграле есть  $\operatorname{div} \mathbf{a}$ , а поверхностный интеграл представляет собой поток векторного поля  $\mathbf{a}$  через поверхность  $\Phi$ . Поэтому формулу (3) можно записать в векторной форме:

$$\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \iint_{\Phi} (\mathbf{an}) dS. \quad (4)$$

**Физический смысл формулы Остроградского–Гаусса:** поток векторного поля  $\mathbf{a}$  через замкнутую поверхность в сторону внешней нормали равен тройному интегралу по области, ограниченной этой поверхностью, от дивергенции векторного поля  $\mathbf{a}$ . Чтобы поток был отличен от нуля, внутри области  $G$  должны быть источники (или стоки) поля. Из формулы Остроградского–Гаусса следует, что тогда и  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  будет отлична от нуля. Таким образом,  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  характеризует источники поля. Само векторное поле как бы расходится от источников. Отсюда и происходит название “расходимость” или “дивергенция”.

**3. Свойства соленоидального поля.** Как известно, векторное поле  $\mathbf{a}(M)$ , удовлетворяющее в области  $G$  условию  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ , называется соленоидальным в этой области. Пусть область  $V$  является объемно односвязной. Это означает, что если кусочно гладкая замкнутая поверхность  $\Phi$  лежит в области  $G$ , то и область, ограниченная поверхностью  $\Phi$ , целиком принадлежит области  $G$ . Примерами объемно односвязных областей являются шар, параллелепипед, тор. Отметим, что тор не является поверхностью односвязной областью. Область, заключенная между двумя сферами, не является объемно односвязной (но является поверхностью односвязной; см. п. 3 § 4 из гл. XIV).

Из формулы Остроградского–Гаусса следует, что соленоидальное поле в объемно односвязной области обладает следующим свойством: *поток соленоидального поля через любую замкнутую поверхность, расположенную в этой области, равен нулю*. Иногда это свойство принимают за определение соленоидального поля.

Отметим, что если область не является объемно односвязной, то поток соленоидального (в этой области) поля через замкнутую поверхность, расположенную в области, может быть отличен от нуля. Так, электрическое поле  $\mathbf{E}(M)$  точечного заряда, помещенного в точку  $N$ , является соленоидальным в шаре с выброшенным центром  $N$  ( $\operatorname{div} \mathbf{E}(M) = 0$  при  $M \neq N$ ). Шар с выброшенным центром не является объемно односвязной областью, и, как мы установили в п. 1, поток поля  $\mathbf{E}(M)$  через сферу с центром в точке  $N$  отличен от нуля.

Слово “соленоидальное” означает “трубчатое”. Для соленоидального поля имеет место закон сохранения интенсивности векторной трубки. Он состоит в следующем.

Пусть  $\mathbf{a}(M)$  — соленоидальное поле. Рассмотрим отрезок “векторной трубки”, т. е. область, ограниченную двумя сечениями,  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , и боковой поверхностью  $\Phi_3$ , состоящей из векторных линий (рис. 76). Применим к такой области формулу Остроградского–Гаусса (4). Так как в соленоидальном поле  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ , то поток векторного поля  $\mathbf{a}(M)$  через поверхность области равен нулю:  $\iint_{\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3} (\mathbf{a} \mathbf{n}) dS = 0$

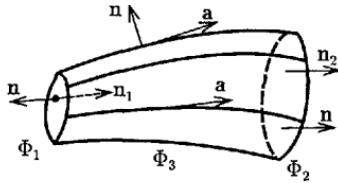


Рис. 76

( $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали). На боковой поверхности  $\Phi_3$  имеем  $\mathbf{a} \perp \mathbf{n}$ , поэтому  $\iint_{\Phi_3} (\mathbf{an}) dS = 0$ . Значит,

$$\iint_{\Phi_1 + \Phi_2} (\mathbf{an}) dS = \iint_{\Phi_1} (\mathbf{an}) dS + \iint_{\Phi_2} (\mathbf{an}) dS = 0.$$

Изменим на сечении  $\Phi_1$  направление нормали  $\mathbf{n}$  на противоположное ( $\mathbf{n}_1$  — внутренняя нормаль к  $\Phi_1$ ). Тогда получим

$$\iint_{\Phi_1} (\mathbf{an}_1) dS = \iint_{\Phi_2} (\mathbf{an}_2) dS,$$

где оба потока через сечения  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  вычисляются в направлении векторных линий.

Таким образом, в соленоидальном (трубчатом) векторном поле  $\mathbf{a}$  поток через любое сечение векторной трубы имеет одно и то же значение. Это и есть закон сохранения интенсивности векторной трубы.

**4. Инвариантное определение дивергенции.** Пусть в области  $G$ , ограниченной поверхностью  $\Phi$ , определено векторное поле  $\mathbf{a}(M)$ . Запишем формулу (4) для векторного поля  $\mathbf{a}$  в области  $G$ . Применяя к левой части этой формулы теорему о среднем, получим

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M^*) \cdot V(G) = \iint_{\Phi} (\mathbf{an}) dS,$$

или

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M^*) = \frac{\iint_{\Phi} (\mathbf{an}) dS}{V(G)},$$

где  $V(G)$  — объем области  $G$ , а  $M^*$  — некоторая точка области  $G$ .

Зафиксируем точку  $M \in G$  и будем стягивать область  $G$  к точке  $M$  так, чтобы  $M$  оставалась внутренней точкой области  $G$ . Тогда  $V(G) \rightarrow 0$ , а  $M^*$  будет стремиться к  $M$ . В силу непрерывности  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  значение  $\operatorname{div} \mathbf{a}(M^*)$  будет стремиться к  $\operatorname{div} \mathbf{a}(M)$ . Таким образом, получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = \lim_{\substack{V(G) \rightarrow 0 \\ M \in G}} \frac{\iint_{\Phi} (\mathbf{an}) dS}{V(G)}. \quad (5)$$

В правую часть формулы (5) входят величины, инвариантные относительно выбора системы координат (поток векторного поля через поверхность и объем области). Поэтому формула (5) дает *инвариантное определение дивергенции векторного поля*. Итак, дивергенция векторного поля зависит только от самого поля и не зависит от выбора системы координат.

**5. Циркуляция векторного поля.** Рассмотрим векторное поле  $\mathbf{a}(M)$ , определенное в пространственной области  $G$ , и некоторую кусочно гладкую кривую  $L \in G$ , на которой указано направление обхода (выбор направления обхода называют также ориентацией кривой).

Пусть  $\tau(M)$  — единичный касательный вектор к кривой  $L$  в точке  $M$ , направленный в сторону обхода кривой.

Криволинейный интеграл

$$\int_L (\mathbf{a} \tau) dl = \int_L a_\tau dl \quad (6)$$

называется *циркуляцией векторного поля  $\mathbf{a}$  вдоль кривой  $L$  в заданном направлении*.

Если взять другое направление обхода кривой (изменить ориентацию), то вектор  $\tau$  изменит направление на противоположное, поэтому скалярное произведение  $(\mathbf{a}\tau)$ , а значит, и циркуляция (криволинейный интеграл (6)) изменит знак.

Если  $\mathbf{a} = \mathbf{F}$  — силовое векторное поле, т. е.  $\mathbf{F}$  — вектор силы, то циркуляция  $\int_L (\mathbf{F}\tau) dl$  представляет собой работу силового векторного

поля  $\mathbf{a}$  вдоль кривой  $L$  в заданном направлении.

Если в прямоугольной системе координат  $Oxy$   $\mathbf{a} = \{P, Q, R\}$ , а  $\tau = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ , то выражение (6) для циркуляции векторного поля  $\mathbf{a}$  можно записать в виде

$$\int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dl = \int_L P dx + Q dy + R dz. \quad (7)$$

Каждое слагаемое в правой части (7) зависит от выбора системы координат, однако их сумма, т. е. циркуляция  $\int_L (\mathbf{a}\tau) dl$ , очевидно, не зависит от выбора системы координат.

Если ввести вектор  $d\mathbf{r} = \{dx, dy, dz\}$ , то циркуляцию можно записать в виде  $\int_L (\mathbf{a} d\mathbf{r})$  (сравните с правой частью равенства (7)).

**6. Формула Стокса в векторной форме.** Пусть в области  $G$  определено векторное поле  $\mathbf{a} = \{P, Q, R\}$ ;  $L$  — замкнутый контур, лежащий в области  $G$ ;  $\Phi$  — произвольная поверхность, границей которой является контур  $L$ ;  $\Phi \subset G$  (говорят: поверхность  $\Phi$  натянута на контур  $L$ );  $\mathbf{n}(M) = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  — единичный вектор нормали на выбранной стороне поверхности  $\Phi$ .

Пусть для векторного поля  $\mathbf{a}$  (т. е. для функций  $P, Q, R$ ) и поверхности  $\Phi$  выполнены условия теоремы 3 из гл. XIV. Тогда справедлива формула Стокса

$$\begin{aligned} & \oint_L P dx + Q dy + R dz = \\ & = \iint_{\Phi} \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS, \end{aligned}$$

где ориентация контура  $L$  согласована с ориентацией поверхности  $\Phi$ . Левая часть формулы Стокса есть циркуляция векторного поля  $\mathbf{a}$

вдоль контура  $L$ , а правая часть представляет собой поток через поверхность  $\Phi$  векторного поля с координатами  $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ , т. е. поток  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  через поверхность  $\Phi$ . Поэтому формулу Стокса можно записать в векторной форме:

$$\oint_L (\mathbf{a} dt) = \iint_L (\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (8)$$

или

$$\oint_L (\mathbf{a} dr) = \iint_{\Phi} (\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

*Физический смысл формулы Стокса:* циркуляция векторного поля  $\mathbf{a}$  вдоль замкнутого контура равна потоку ротора векторного поля  $\mathbf{a}$  через поверхность, натянутую на этот контур.

Чтобы циркуляция была отлична от нуля для малого контура, окружающего некоторую выбранную точку поверхности, поле  $\mathbf{a}$  должно поворачиваться (иметь завихрение) вблизи этой точки. Из формулы Стокса следует, что тогда и  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  вблизи этой точки будет отличен от нуля. Таким образом,  $\operatorname{rot} \mathbf{a}(M)$  характеризует завихрение поля в точке  $M$ . Отсюда и происходит название “вихрь” или “ротор”.

**7. Свойства потенциального поля.** Как известно, векторное поле  $\mathbf{a}(M)$ , удовлетворяющее в области  $G$  условию  $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u$ , называется потенциальным в этой области ( $u$  — скалярный потенциал поля  $\mathbf{a}(M)$ ). Если поле  $\mathbf{a}(M) = \{P, Q, R\}$  потенциально в области  $G$ , то  $P = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $R = \frac{\partial u}{\partial z}$  и выражение  $P dx + Q dy + R dz = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$  является полным дифференциалом функции  $u$  в области  $G$ . Это означает, что выполнено условие III теоремы 4 из гл. XIV об условиях независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования в пространстве. Из условия III вытекают остальные условия этой теоремы.

Таким образом, потенциальное в области  $G$  поле обладает следующими свойствами.

1°. Циркуляция потенциального поля  $\mathbf{a}(M)$  вдоль любого замкнутого контура  $L \subset G$  равна нулю:

$$\oint_L (\mathbf{a} dr) = \iint_L P dx + Q dy + R dz = 0.$$

Иногда это свойство принимают за определение потенциального поля.

2°. Для любых точек  $A$  и  $B$  из области  $G$  циркуляция потенциального поля  $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u$  вдоль кривой  $AB$  не зависит от выбора кривой  $AB \subset G$  и равна разности значений потенциала  $u$  в точках  $A$  и  $B$ :

$$\int_{AB} (\mathbf{a} dr) = u(B) - u(A).$$

Применимельно к силовому потенциальному полю это свойство означает, что работа такого поля вдоль кривой  $AB$  не зависит от выбора кривой, а зависит только от начальной и конечной точек  $A$  и  $B$ . Для поля тяготения точечной массы  $\mathbf{F} = -\frac{k}{r^3} \mathbf{r}$  этот факт был уже установлен в примере 5 из § 4 гл. XIV:

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} \frac{k}{r}, \quad \int_{AB} (\mathbf{F} d\mathbf{r}) = k \left( \frac{1}{r(B)} - \frac{1}{r(A)} \right).$$

3°. Потенциальное поле  $\mathbf{a}(M)$  является безвихревым, т. е.

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0.$$

Пусть теперь дано векторное поле  $\mathbf{a}(M) = \{P, Q, R\}$ , удовлетворяющее в области  $G$  условию  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$ . Следует ли отсюда, что поле  $\mathbf{a}(M)$  потенциально в области  $G$ ? Ответ на этот вопрос зависит от вида области  $G$ . Если область  $G$  является поверхностью односвязной, то из условия  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$  в силу теоремы 4 из гл. XIV следует, что существует функция  $u(x, y, z)$  такая, что

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Следовательно,  $\mathbf{a} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k} = \operatorname{grad} u$ , т. е. поле  $\mathbf{a}$  является потенциальным в области  $G$ .

Таким образом, условие  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$  является необходимым и достаточным условием потенциальности поля  $\mathbf{a}(M)$  в поверхности односвязной области.

Потенциал  $u(x, y, z)$  потенциального поля  $\mathbf{a}(M) = \{P, Q, R\}$  в поверхности односвязной области можно вычислить по формуле (5) из § 4 гл. XIV:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P dx + Q dy + R dz = \\ &= \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz. \end{aligned} \quad (9)$$

Если область  $G$  не является поверхностью односвязной, то условия  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$  не достаточно для потенциальности поля  $\mathbf{a}(M)$  в области  $G$ . Так, например, векторное поле

$$\mathbf{a} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$$

(см. пример 13 на с. 423) удовлетворяет условию  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$  в шаре с выброшенным диаметром, лежащим на оси  $Oz$ . Шар с выброшенным диаметром не является поверхностью односвязной областью, и, как показано в примере 13, поле  $\mathbf{a}$  не является потенциальным в этом шаре.

**8. Инвариантное определение ротора.** Пусть в области  $G$  определено векторное поле  $\mathbf{a}(M)$ . Зафиксируем точку  $M \in G$  и некоторую плоскость, проходящую через эту точку. Пусть  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к плоскости,  $L$  — замкнутый контур, лежащий в плоскости и ограничивающий область  $\Phi$  такую, что  $M$  — внутренняя точка области  $\Phi$ . Запишем формулу (8) для векторного поля  $\mathbf{a}$  в области  $\Phi$ . Применяя к правой части этой формулы теорему о среднем, получим

$$\oint_L (\mathbf{a} \tau) dl = (\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n})_{M^*} S(\Phi),$$

откуда

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n})_{M^*} = \frac{\oint_L (\mathbf{a} \tau) dl}{S(\Phi)},$$

где  $S(\Phi)$  — площадь области  $\Phi$ ,  $M^*$  — некоторая точка области  $\Phi$ .

Будем стягивать область  $\Phi$  к точке  $M$  так, чтобы  $M$  оставалась внутренней точкой области  $\Phi$ . Тогда  $S(\Phi) \rightarrow 0$ , а  $M^*$  будет стремиться к  $M$ . В силу непрерывности  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  значение  $(\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n})_{M^*}$  будет стремиться к  $(\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n})_M$ . Таким образом, получаем

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n})_M = \lim_{\substack{S(\Phi) \rightarrow 0 \\ M \in \Phi}} \frac{\oint_L (\mathbf{a} \tau) dl}{S(\Phi)} \quad (10)$$

В правую часть формулы входят величины, инвариантные относительно выбора системы координат (циркуляция векторного поля вдоль замкнутого контура и площадь плоской области). Поэтому данная формула дает **инвариантное определение проекции  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  в точке  $M$  на направление, определяемое заданным вектором  $\mathbf{n}$** .

Итак, проекция ротора векторного поля на произвольное направление, а значит, и сам  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  зависит только от векторного поля  $\mathbf{a}$  и не зависит от выбора системы координат.

Для определения вектора  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  вышеуказанным способом достаточно рассмотреть в заданной точке  $M$  проекции  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  на три произвольных некомпланарных направления. Такими тремя проекциями  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  определяется однозначно.

### Контрольные вопросы и задания

- Что называется потоком векторного поля через поверхность? Напишите выражения для потока в векторной форме и в прямоугольных координатах.
- Приведите примеры потоков физических векторных полей через заданные поверхности.
- Запишите формулу Остроградского–Гаусса в прямоугольных координатах и в векторной форме.

- 4 Каков физический смысл формулы Остроградского–Гаусса?
- 5 Какая область называется объемно односвязной? Приведите примеры объемно односвязных областей и областей, не являющихся поверхностью односвязными
- 6 Каким свойством обладает соленоидальное векторное поле в объемно односвязной области? Покажите, что это свойство может не иметь места, если область не является объемно односвязной
- 7 Выведите закон сохранения интенсивности векторной трубы для соленоидального поля
- 8 Дайте инвариантное определение дивергенции векторного поля
- 9 Что называется циркуляцией векторного поля вдоль кривой? Напишите выражение для циркуляции в векторной форме и в прямоугольных координатах
- 10 Запишите формулу Стокса в прямоугольных координатах и в векторной форме
- 11 Каков физический смысл формулы Стокса?
- 12 Сформулируйте свойства  $1^\circ$ – $3^\circ$  потенциального поля. Что означает свойство  $2^\circ$  применительно к силовому полю?
- 13 Сформулируйте необходимое и достаточное условие потенциальности поля  $\mathbf{a}(M)$  в поверхности односвязной области и напишите формулу вычисления потенциала поля  $\mathbf{a}(M)$
- 14 Векторное поле  $\mathbf{a}(M)$  в области  $G$  удовлетворяет условию  $\text{rot } \mathbf{a} = 0$ . Следует ли отсюда, что поле  $\mathbf{a}(M)$  потенциально в области  $G$ ?
- 15 Циркуляция векторного поля  $\mathbf{a}(M)$  вдоль любого замкнутого контура, лежащего в области  $G$ , равна нулю. Является ли поле  $\mathbf{a}(M)$  потенциальным в области  $G$ ?
- 16 Дайте инвариантное определение ротора векторного поля
- 17 Каков физический смысл условия  $\text{div } \mathbf{a} = 0$ ?
- 18 Каков физический смысл условия  $\text{rot } \mathbf{a} = 0$ ?
- 19 Приведите примеры физических полей удовлетворяющих условиям а)  $\text{div } \mathbf{a} = 0$ , б)  $\text{rot } \mathbf{a} = 0$
- 20 В области  $G$  выполнено условие  $\text{div } \mathbf{a} = 0$ . Следует ли отсюда, что поток векторного поля  $\mathbf{a}(M)$  через замкнутую поверхность, лежащую в  $G$ , равен нулю? Приведите соответствующие примеры
- 21 Пусть точечный заряд находится в точке  $M_0$ . Рассмотрим электрическое поле  $\mathbf{E}$  этого заряда в области  $G$ , представляющей собой окрестность точки  $M_0$ , из которой удалена сама точка  $M_0$ . Является ли поле  $\mathbf{E}$  в области  $G$  соленоидальным? Укажите какую-либо замкнутую поверхность  $\Phi \subset G$ , через которую поток поля  $\mathbf{E}$  равен нулю. Укажите замкнутую поверхность  $\Phi \subset G$ , через которую поток поля  $\mathbf{E}$  отличен от нуля. Всякая ли область, в которой поле  $\mathbf{E}$  соленоидально, является объемно односвязной?
- 22 Пусть точечная масса  $m$  находится в точке  $M_0$ . Рассмотрим поле тяготения  $\mathbf{F}$  массы  $m$  в области  $G$ , представляющей собой окрестность точки  $M_0$ , из которой удалена сама точка  $M_0$ . Является ли поле  $\mathbf{F}$  в области  $G$  потенциальным? Существует ли в области  $G$  замкнутый контур, вдоль которого циркуляция поля  $\mathbf{F}$  не равна нулю? Всякая ли область, где поле  $\mathbf{F}$  потенциально, является поверхностью односвязной?

### Примеры решения задач

**1.** Доказать, что поток постоянного векторного поля  $\mathbf{a}$  через любую замкнутую кусочно гладкую поверхность равен нулю.

Δ Пусть  $\Phi$  — замкнутая кусочно гладкая поверхность, ограничивающая область  $G$ . Согласно формуле Остроградского–Гаусса имеем

$$\iint_{\Phi} (\mathbf{a} \mathbf{n}) dS = \iiint_G \operatorname{div} \mathbf{a} dV = 0,$$

так как дивергенция постоянного поля  $\mathbf{a}$  равна нулю. Следовательно, поток постоянного векторного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю:  $\iint_{\Phi} (\mathbf{a} \mathbf{n}) dS = 0$ . ▲

**2.** Найти поток радиуса-вектора  $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$  через произвольную замкнутую кусочно гладкую поверхность  $\Phi$ , ограничивающую область  $G$  объема  $V$ .

Δ Сначала найдем дивергенцию данного поля:  $\operatorname{div} \mathbf{r} = 1 + 1 + 1 = 3$ . Далее, используя формулу Остроградского–Гаусса, имеем

$$\iint_{\Phi} (\mathbf{r} \mathbf{n}) dS = \iiint_G \operatorname{div} \mathbf{r} dV = 3 \iiint_G dV = 3V.$$

Полученный результат дает формулу для вычисления объема области  $G$  с помощью поверхностного интеграла

$$V = \frac{1}{3} \iint_{\Phi} (\mathbf{r} \mathbf{n}) dS,$$

или, в прямоугольных координатах,

$$V = \frac{1}{3} \iint_{\Phi} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS,$$

где  $\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\Phi$ . Эта формула была приведена в § 5 из гл. XIV. ▲

**3.** Вычислить поток электрического поля  $\mathbf{E}$  точечного заряда  $e$ , помещенного в начале координат, через произвольную замкнутую кусочно гладкую поверхность, не проходящую через начало координат.

Δ Векторное поле  $\mathbf{E}$  точечного заряда  $e$ , находящегося в начале координат, имеет вид  $\mathbf{E}(M) = \frac{ke}{r^3} \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ ,  $|\mathbf{r}| = |\overrightarrow{OM}|$ .

По определению, векторное поле  $\mathbf{E}$  является соленоидальным в любой области  $G$ , где  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ . В п. 6 из § 1 было показано, что  $\operatorname{div} \left( \frac{ke}{r^3} \mathbf{r} \right) = 0$  при  $r \neq 0$ . Поэтому поле  $\mathbf{E}(M)$  соленоидально в любой области  $G$ , не содержащей начала координат. Однако, как было отмечено в п. 3, величина потока соленоидального векторного поля через замкнутую поверхность  $\Phi$ , расположенную в области  $G$ , существенно

связана со свойством объемной односвязности области  $G$ . Рассмотрим два случая.

1. Пусть замкнутая кусочно гладкая поверхность  $\Phi$  представляет собой границу объемно односвязной области  $G$ , не содержащей начала координат. Тогда условие  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  выполняется во всех точках объемно односвязной области  $G$ , и в силу свойства соленоидального поля поток вектора  $\mathbf{E}$  через поверхность  $\Phi$  равен нулю.

2. Пусть замкнутая кусочно гладкая поверхность  $\Phi$  представляет собой границу области  $G$ , содержащей внутри себя начало координат. Тогда поле  $\mathbf{E}$  не является соленоидальным в области  $G$ , так как в начале координат  $\operatorname{div} \mathbf{E} = \infty$ . Если же выбросить из области  $G$  начало координат, то оставшаяся область не будет объемно односвязной. Для вычисления потока  $\mathbf{E}$  через поверхность  $\Phi$  введем сферу  $\Phi_1$  достаточно малого радиуса с центром в начале координат, целиком расположенную внутри  $G$ , и рассмотрим область  $G_1$  между поверхностями  $\Phi_1$  и  $\Phi$ . Условие  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  выполнено для всех точек области  $G_1$ .

Применим к этой области формулу Остроградского–Гаусса. Тройной интеграл от дивергенции  $\mathbf{E}$  по области  $G_1$  равен нулю. Следовательно, равен нулю и полный поток поля  $\mathbf{E}$  через поверхности  $\Phi$  и  $\Phi_1$ :

$$\iint_{\Phi} (\mathbf{E} \mathbf{n}) dS + \iint_{\Phi_1} (\mathbf{E} \mathbf{n}) dS = 0 \quad (11)$$

Вычислим поток поля  $\mathbf{E}$  через сферу  $\Phi_1$ :

$$\iint_{\Phi_1} (\mathbf{E} \mathbf{n}) dS = -4\pi k e$$

(см. с. 408). Знак минус означает, что внешняя к области  $G_1$  нормаль на поверхности  $\Phi_1$  направлена к центру сферы  $\Phi_1$  (к началу координат) и, следовательно, противоположна вектору  $\mathbf{r}$ . Отметим, что поток  $\mathbf{E}$  через сферу  $\Phi_1$  не зависит от ее радиуса, т. е. имеет одно и то же значение для сферы любого радиуса.

Возвращаясь к соотношению (11), находим поток поля  $\mathbf{E}$  через поверхность  $\Phi$ :

$$\iint_{\Phi} (\mathbf{E} \mathbf{n}) dS = - \iint_{\Phi_1} (\mathbf{E} \mathbf{n}) dS = 4\pi k e.$$

Итак, поток электрического поля  $\mathbf{E}$  через поверхность  $\Phi$  равен либо нулю, либо  $4\pi k e$ , в зависимости от того, лежит точка, где помещен заряд, вне или внутри области, ограниченной поверхностью  $\Phi$ . ▲

4. Вычислить поток векторного поля  $\mathbf{a} = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$  через боковую поверхность  $\Phi_1$  конуса  $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq h^2, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h\}$  в сторону внешней нормали.

△ I способ. Поток  $\iint_{\Phi_1} (\mathbf{a} \mathbf{n}) dS$  поля  $\mathbf{a}$  через поверхность  $\Phi_1$  можно

вычислить по формуле (2), не пользуясь формулой Остроградского–Гаусса. Этот способ применялся ранее (см. пример 3 из § 3 гл. XIV). Здесь мы так делать не будем.

**П способ.** Чтобы сделать возможным применение формулы Остроградского–Гаусса для вычисления искомого потока, дополним заданную поверхность  $\Phi_1$  (боковую поверхность конуса) до замкнутой кусочно гладкой поверхности  $\Phi$  основанием конуса — кругом  $\Phi_2$ :  $x^2 + y^2 \leq h^2$ ,  $z = h$ .

Применим теперь формулу Остроградского–Гаусса к области  $G$ , ограниченной замкнутой поверхностью  $\Phi$ :

$$\iint_{\Phi_1} (\mathbf{an}) dS + \iint_{\Phi_2} (\mathbf{an}) dS = 2 \iiint_G (x + y + z) dx dy dz. \quad (12)$$

На круге  $\Phi_2$  имеем  $\mathbf{a} = x^2 \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + h^2 \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ ; поэтому

$$\iint_{\Phi_2} (\mathbf{an}) dS = \iint_{\Phi_2} h^2 dS = h^2 S(\Phi_2) = h^2 \cdot \pi h^2 = \pi h^4.$$

Для вычисления тройного интеграла перейдем к цилиндрическим координатам:  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $z = z$ . Уравнение конической поверхности примет вид  $z = \rho$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} 2 \iiint_G (x + y + z) dx dy dz &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \rho d\rho \int_{\rho}^h [\rho(\cos \varphi + \sin \varphi) + z] dz = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \left[ \rho(h - \rho)(\cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{h^2}{2} - \frac{\rho^2}{2} \right] \rho d\rho = \frac{\pi}{2} h^4. \end{aligned}$$

Из формулы (12) следует, что искомый интеграл по боковой поверхности  $\Phi_1$  конуса равен разности тройного интеграла и поверхностного интеграла по кругу  $\Phi_2$ :

$$\iint_{\Phi_2} (\mathbf{an}) dS = \frac{\pi h^4}{2} - \pi h^4 = -\frac{\pi h^4}{2}.$$

Рассмотренный пример показывает, что применение формулы Остроградского–Гаусса для вычисления потока векторного поля через замкнутую поверхность удобно в тех случаях, когда достаточно просто вычисляются поверхностный интеграл по поверхности, дополняющей данную поверхность до замкнутой поверхности  $\Phi$ , и тройной интеграл от дивергенции векторного поля по области, ограниченной поверхностью  $\Phi$ . ▲

**5.** Вывести формулу Грина как частный случай формулы Стокса для поля  $\mathbf{a} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$  на плоскости.

Δ Рассмотрим векторное поле  $\mathbf{a} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$  как частный случай поля  $\mathbf{a} = \{P, Q, R\}$  при  $R = 0$ . Пусть поле  $\mathbf{a} = \{P, Q, 0\}$  задано в плоской области  $G$  с границей  $L$ , лежащей в плоскости  $Oxy$ . Единичная нормаль к области  $G$  совпадает с базисным вектором  $\mathbf{k}$  оси  $Oz$ .

Поэтому, применяя формулу Стокса (9) к полю  $\mathbf{a}$  в области  $G$ , получим

$$\oint_L (\mathbf{a} d\mathbf{r}) = \iint_G (\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}) dS. \quad (13)$$

Формула (13) является векторной формой формулы Грина. Вычислим ротор поля  $\mathbf{a}$ :

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

Учитывая также запись циркуляции в прямоугольных координатах, получаем уже знакомый вид формулы Грина

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dS.$$

Отметим, что по-прежнему условие  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$  (т. е. в данном случае  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ ) обеспечивает потенциальность поля  $\mathbf{a}$  лишь в поверхностно односвязной области. Такую область на плоскости мы назвали односвязной (см. § 3 из гл. XIII). ▲

**6.** Доказать, что циркуляция постоянного векторного поля  $\mathbf{a}$  вдоль любого замкнутого кусочно гладкого контура равна нулю.

△ Пусть  $L$  — замкнутый кусочно гладкий контур,  $\Phi$  — кусочно гладкая поверхность, натянутая на  $L$ . Согласно формуле Стокса (9) имеем  $\oint_L (\mathbf{a} d\mathbf{r}) = \iint_{\Phi} (\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) dS = 0$ , так как ротор постоянного поля  $\mathbf{a}$  равен нулю. Следовательно, циркуляция постоянного векторного поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю:  $\oint_L (\mathbf{a} d\mathbf{r}) = 0$ . ▲

**7.** Найти циркуляцию плоского векторного поля  $\mathbf{a} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$  вдоль произвольного кусочно гладкого контура  $L$ , лежащего в плоскости  $Oxy$  и ограничивающего область  $\Phi$  площади  $S$ .

△ Сначала вычислим ротор данного поля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\mathbf{k}.$$

Далее, используя формулу Стокса и учитывая, что для области  $\Phi$   $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ , находим

$$\oint_L (\mathbf{a} d\mathbf{r}) = \iint_{\Phi} (2\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) dS = 2 \iint_{\Phi} dS = 2S.$$

Полученный результат дает формулу для вычисления площади

плоской фигуры с помощью криволинейного интеграла:

$$S = \frac{1}{2} \oint_L (\mathbf{a} d\mathbf{r}),$$

или, в прямоугольных координатах,

$$S = \frac{1}{2} \iint_L x dy - y dx.$$

Другой вывод этой формулы был получен в § 3 из гл. XIII. ▲

**8.** С помощью формулы Стокса найти циркуляцию векторного поля  $\mathbf{a} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  вдоль замкнутого контура  $L$ , состоящего из отрезка винтовой линии  $\mathbf{r}(t) = a \cos t \cdot \mathbf{i} + a \sin t \cdot \mathbf{j} + bt\mathbf{k}$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ )

и отрезка прямой, соединяющего точки  $B(a, 0, 2\pi b)$  и  $A(a, 0, 0)$ , причем обход контура совершается так, что по отрезку прямой движение происходит от точки  $B$  к точке  $A$ .  
△ Находим

$$\text{rot } \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & z \end{vmatrix} = 2\mathbf{k}.$$

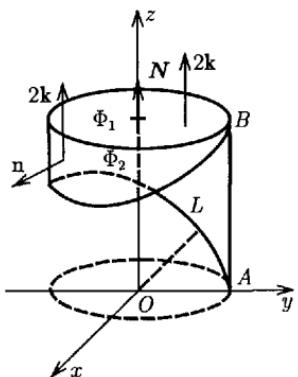


Рис. 77

Пусть поверхность  $\Phi$ , натянутая на контур  $L$ , состоит из части  $\Phi_1$  цилиндрической поверхности  $x^2 + y^2 = a^2$  и круга  $\Phi_2$ :  $x^2 + y^2 \leq a^2$ ,  $z = 2\pi b$  (рис. 77). На цилиндрической поверхности  $\Phi_1$  имеем  $\text{rot } \mathbf{a} \perp \mathbf{n}$ , и поэтому  $(\text{rot } \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) = 0$ . На поверхности  $\Phi_2$  имеем  $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ , и поэтому  $\text{rot } \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 2$ .

Применяя к полю  $\mathbf{a}$  формулу Стокса, получаем

$$\oint_L (\mathbf{a} d\mathbf{r}) = \iint_{\Phi} (\text{rot } \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{\Phi_1} + \int_{\Phi_2} = 0 + 2 \iint_{\Phi_2} ds = 2S(\Phi_2) = 2\pi a^2. \blacksquare$$

**9.** Найти работу силового поля  $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  вдоль отрезка  $L_1$  винтовой линии  $\mathbf{r}(t) = a \cos t \cdot \mathbf{i} + a \sin t \cdot \mathbf{j} + bt\mathbf{k}$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) от точки  $A(a, 0, 0)$  до точки  $B(a, 0, 2\pi b)$ .

△ I способ. Непосредственно вычисляя криволинейный интеграл второго рода, выраждающий работу силового поля  $\mathbf{F}$  вдоль кривой  $L_1$  в заданном направлении, находим

$$\oint_{L_1} (\mathbf{F} d\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} (-a \sin t \cdot \mathbf{i} + a \cos t \cdot \mathbf{j} + bt\mathbf{k}) \times \\ \times (-a \sin t \cdot \mathbf{i} + a \cos t \cdot \mathbf{j} + bt\mathbf{k}) dt = 2\pi a^2 + 2\pi^2 b^2.$$

II способ. Чтобы сделать возможным применение формулы Стокса для вычисления искомого интеграла, дополним заданный отрезок  $L_1$  винтовой линии до замкнутой кусочно гладкой кривой  $L$  отрезком  $L_2$  прямой, соединяющим точки  $B(a, 0, 2\pi b)$  и  $A(a, 0, 0)$ .

Применяя формулу Стокса к контуру  $L$  и любой кусочно гладкой поверхности  $\Phi$ , натянутой на этот контур, имеем

$$\int_{L_1} (\mathbf{F} d\mathbf{r}) + \int_{L_2} (\mathbf{F} d\mathbf{r}) = \iint_{\Phi} (\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (14)$$

Повторяя выкладки предыдущего примера для вектора  $\mathbf{a} = \mathbf{F}$ , находим, что  $\operatorname{rot} \mathbf{F} = 2\mathbf{k}$  и

$$\iint_{\Phi} (\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = 2\pi a^2.$$

Вычислим теперь работу силы  $\mathbf{F}$  вдоль отрезка  $L_2$  прямой от точки  $B(a, 0, 2\pi b)$  до точки  $A(a, 0, 0)$ . На этой прямой  $\mathbf{F} = a\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $d\mathbf{r} = \mathbf{k} dz$  и

$$\int_{L_2} (\mathbf{F} d\mathbf{r}) = \int_{2\pi b}^0 z dz = \frac{z^2}{2} \Big|_{2\pi b}^0 = -2\pi^2 b^2.$$

Из формулы (14) следует, что искомый интеграл (работка силы  $\mathbf{F}$  вдоль кривой  $L_1$ ) равен разности поверхностного интеграла (потока  $\operatorname{rot} \mathbf{F}$  через поверхность  $\Phi$ ) и криволинейного интеграла по отрезку прямой  $L_2$ :

$$\int_{L_1} (\mathbf{F} d\mathbf{r}) = 2\pi a^2 - (-2\pi^2 b^2) = 2\pi a^2 + 2\pi^2 b^2.$$

Рассмотренный пример показывает, что применение формулы Стокса для вычисления работы силового поля (а также других криволинейных интегралов второго рода) вдоль незамкнутых кривых удобно в тех случаях, когда достаточно просто вычисляются криволинейный интеграл по кривой, дополняющей данную кривую до замкнутого контура, и поток ротора данного векторного поля через поверхность, натянутую на этот контур. ▲

10. Вершины  $D, B, A'$  куба  $ABCDA'B'C'D'$  находятся соответственно в точках  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ . Применяя формулу Стокса, вычислить циркуляцию векторного поля  $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$  вдоль ломаной  $C'C D A B B'A'D'$  (рис. 78).

△ Обозначим данную ломаную через  $L_1$ . Чтобы сделать возможным применение формулы Стокса для вычисления искомого интеграла  $\int_{L_1} (\mathbf{a} d\mathbf{r})$ , дополним ломаную  $L_1$  до замкнутой кривой  $L$  отрезком  $L_2$  прямой, соединяющим точки  $D'$  и  $C'$ . На контур  $L$  "натянем" кусочно гладкую поверхность  $\Phi$ , состоящую из трех квадратов:  $C'CDD'$ ,  $D'DAA'$  и  $A'ABB'$ . Обозначим их соответственно через  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$ .

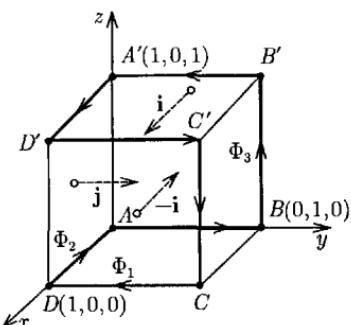


Рис. 78

Применяя формулу Стокса к контуру  $L$  и поверхности  $\Phi$ , имеем

$$\begin{aligned} \int_{L_1} (\mathbf{a} d\mathbf{r}) + \int_{L_2} (\mathbf{a} d\mathbf{r}) &= \\ = \iint_{\Phi_1} (\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) dS + \iint_{\Phi_2} (\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) dS + \iint_{\Phi_3} (\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) dS. \end{aligned} \quad (15)$$

Далее, находим  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ . Единичные векторы нормалей на частях  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  поверхности  $\Phi$  с учетом направления обхода контура  $L$  имеют вид  $\mathbf{n}(\Phi_1) = -\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{n}(\Phi_2) = \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{n}(\Phi_3) = \mathbf{i}$ .

Вычислим поток  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  через поверхность  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi_1} (\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}(\Phi_1)) dS + \iint_{\Phi_2} (\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}(\Phi_2)) dS + \iint_{\Phi_3} (\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}(\Phi_3)) dS = \\ = \iint_{\Phi_1} dS - \iint_{\Phi_2} dS - \iint_{\Phi_3} dS = -1. \end{aligned}$$

Найдем теперь циркуляцию поля  $\mathbf{a}$  вдоль отрезка  $L_2$  прямой от точки  $D'$  до точки  $C'$ . На этой прямой  $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  $d\mathbf{r} = \mathbf{j} dy$  и

$$\int_{L_2} (\mathbf{a} d\mathbf{r}) = \int_0^1 dy = 1.$$

Из формулы (15) следует, что искомый интеграл  $\int_{L_1} (\mathbf{a} d\mathbf{r})$  (циркуляции поля  $\mathbf{a}$  вдоль кривой  $L_1$ ) равен разности поверхностного интеграла (потока  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  через поверхность  $\Phi$ ) и криволинейного интеграла

$$\begin{aligned} \int_{L_2} (\mathbf{a} d\mathbf{r}) \text{ (циркуляции поля } \mathbf{a} \text{ вдоль кривой } L_2\text{)}: \int_{L_1} (\mathbf{a} d\mathbf{r}) = -1 - 1 = \\ = -2. \blacksquare \end{aligned}$$

11. Доказать, что векторное поле  $\mathbf{a} = y^2 \mathbf{i} + 2xy \mathbf{j} + z \mathbf{k}$  потенциально, и найти его потенциал.

Δ Поле  $\mathbf{a}$  определено во всем пространстве. Пространство является поверхностью односвязной областью; поэтому необходимое и достаточное условие потенциальности поля  $\mathbf{a}$  имеет вид  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$ . Находим

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & 2xy & z \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно,  $\mathbf{a}$  — потенциальное поле.

Вычислим потенциал поля  $\mathbf{a}$  по формуле (10), взяв в качестве точки  $(x_0, y_0, z_0)$  начало координат:

$$u(x, y, z) = \int_0^x 0 \cdot dx + \int_0^y 2xy dy + \int_0^z z dz = xy^2 + \frac{z^2}{2}. \blacksquare$$

**12.** Найти работу силового поля  $\mathbf{F} = y^2 \mathbf{i} + 2xy \mathbf{j} + z \mathbf{k}$  вдоль отрезка  $L$  линии пересечения цилиндров  $x^2 + z^2 = a^2$  и  $y^2 + z^2 = a^2$ , проходящего от точки  $A(-a, -a, 0)$  через точку  $C(0, 0, a)$  до точки  $B(a, a, 0)$ .  
 △ I способ. Как и в примере 9, можно непосредственно вычислить криволинейный интеграл  $\int_L (\mathbf{F} d\mathbf{r})$ , выражающий работу силового поля  $\mathbf{F}$  вдоль данной кривой  $L$ . Здесь мы этого делать не будем.

II способ. Воспользуемся тем, что данное силовое поле  $\mathbf{F}$  является потенциальным во всем пространстве:  $\mathbf{F} = \operatorname{grad} u$ , где  $u = xy^2 + \frac{z^2}{2}$  (см. пример 11). Отсюда следует, что работа силы  $\mathbf{F}$  вдоль кривой  $L$  равна разности значений потенциала в точках  $B$  и  $A$ :

$$\int_L (\mathbf{F} d\mathbf{r}) = u(B) - u(A) = a^3 - (-a^3) = 2a^3. \blacksquare$$

**13.** Выяснить, является ли потенциальным векторное поле  $\mathbf{a} = -\frac{y}{x^2+y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2} \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$ .

△ Находим

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}, \quad \text{если } x^2 + y^2 \neq 0.$$

Заметим, однако, что поле  $\mathbf{a}$  не определено на оси  $Oz$ , поэтому условие  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$  выполняется во всех точках пространства, кроме точек оси  $Oz$ . Следовательно, в любой поверхности односвязной области, не содержащей точек оси  $Oz$ , поле  $\mathbf{a}$  является потенциальным. Так, например, оно потенциально в I октанте ( $x > 0, y > 0, z > 0$ ), и его потенциал равен  $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2z$  (проверьте это).

Рассмотрим теперь область, содержащую точки оси  $Oz$ , например шар с центром в начале координат. Удалив из этого шара точки оси  $Oz$  (т. е. диаметр, лежащий на оси  $Oz$ ), получим область  $G$ , в которой поле  $\mathbf{a}$  определено и  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$ . Однако эта область не является поверхностью односвязной, и поэтому из условия  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$  нельзя сделать вывод о потенциальности поля  $\mathbf{a}$ . Покажем, что поле  $\mathbf{a}$  в области  $G$  не является потенциальным.

Для этого рассмотрим окружность  $L = \{x = R \cos t, y = R \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi, z = 0\}$ , лежащую в области  $G$ , и вычислим циркуляцию поля  $\mathbf{a}$  вдоль окружности  $L$ , пробегаемой в направлении возрастания параметра  $t$  от 0 до  $2\pi$ . Имеем

$$\begin{aligned} \oint_L (\mathbf{a} d\mathbf{r}) &= \oint_L -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = \\ &= \int_0^{2\pi} [(-\sin t)(-\sin t) dt + \cos t \cdot \cos t dt] = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

Итак, циркуляция поля  $\mathbf{a}$  вдоль замкнутой кривой  $L$  не равна нулю. Следовательно, поле  $\mathbf{a}$  не является потенциальным в области  $G$ . ▲

14. Пусть векторное поле  $\mathbf{a} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$  задано в плоской области  $D$ , ограниченной кусочно гладкой кривой  $L$ . Доказать, что

$$\iint_D \operatorname{div} \mathbf{a} dS = \oint_L (\mathbf{a} \mathbf{n}) dl, \quad (16)$$

где  $\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ , а  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к кривой  $L$ .

Δ Формула (16) представляет собой “плоский” вариант формулы Остроградского–Гаусса и может быть получена из обычной формулы Остроградского–Гаусса следующим образом. Рассмотрим векторное поле  $\mathbf{a} = \{P(x, y), Q(x, y), 0\}$  в пространственной области  $G = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq 1\}$ . Согласно формуле Остроградского–Гаусса имеем

$$\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \iint_{\Phi} (\mathbf{a} \mathbf{n}) dS, \quad (17)$$

где  $\Phi$  — поверхность, ограничивающая область  $G$ , а  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\Phi$ . Сводя тройной интеграл к повторному и учитывая, что  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  не зависит от  $z$ , получим

$$\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \iint_D dx dy \int_0^1 \operatorname{div} \mathbf{a} dz = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{a} dS$$

Поверхность  $\Phi$  состоит из оснований  $D(z=0)$ ,  $\Phi_1(z=1)$  и боковой поверхности  $\Phi_2$ . На основаниях  $D$  и  $\Phi_1$  имеем  $\mathbf{a} \perp \mathbf{n}$ , и, следовательно,  $\iint_D (\mathbf{a} \mathbf{n}) dS = \iint_{\Phi_1} (\mathbf{a} \mathbf{n}) dS = 0$ . На боковой (цилиндрической) поверхности  $\Phi_2$  введем криволинейные координаты  $(l, z)$  (рис 79), где

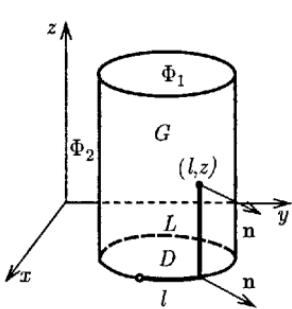


Рис 79

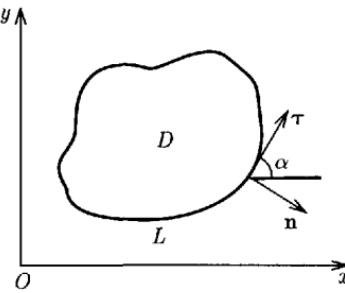


Рис 80

$l$  — расстояние вдоль кривой  $L$ , отсчитываемое от некоторой точки ( $0 \leq l \leq l_0$ ). Так как на  $\Phi_2$  выполняется равенство  $dS = dl \cdot dz$  и вектор нормали  $\mathbf{n}$  совпадает с вектором нормали к кривой  $L$ , причем  $\mathbf{a}$

и  $\mathbf{n}$  зависят только от  $l$  и не зависят от  $z$ , то

$$\iint_{\Phi} (\mathbf{an}) dS = \iint_{\Phi_2} (\mathbf{an}) dS = \int_0^{l_0} dl \int_0^1 (\mathbf{an}) dz = \int_0^{l_0} (\mathbf{an}) dl = \oint_L (\mathbf{an}) dl$$

Подставляя найденные выражения для тройного и поверхностного интегралов в (17), приходим к формуле (16).  $\blacktriangle$

**Замечание 1** Отметим, что формула (16) (“плоский” вариант формулы Остроградского–Гаусса) есть не что иное, как формула Грина, записанная в специальной форме. В самом деле, запишем формулу Грина в обычном виде

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy$$

Введем теперь вектор  $\mathbf{a} = \{Q, -P\}$ . Тогда  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \operatorname{div} \mathbf{a}$ ,  $P dx + Q dy = (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) dl = [Q \sin \alpha + (-P)(-\cos \alpha)] dl = (\mathbf{an}) dl$ , где  $\alpha$  — угол между касательным вектором  $\tau$  и осью  $Ox$ ,  $\mathbf{n} = \left\{ \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right), \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) \right\} = \{\sin \alpha, -\cos \alpha\}$  — единичный вектор внешней нормали к  $L$  (рис. 80). В силу этих равенств формула Грина принимает вид (16).

**Замечание 2** Аналогично тому, как из формулы Остроградского–Гаусса была получена формула (16), из формулы (16) (или, что то же самое, из формулы Грина) можно получить формулу Ньютона–Лейбница (“одномерный” вариант формулы Остроградского–Гаусса). Для этого положим  $Q = Q(x)$ ,  $P = 0$ ,  $D = \{x, y \mid 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq 1\}$ . Тогда из формулы Грина получим

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_L Q dy$$

Так как  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  не зависит от  $y$ , а на нижней и верхней сторонах прямоугольника  $D$  имеем  $dy = 0$ , то

$$\int_0^l \frac{\partial Q}{\partial x} dx \int_0^1 dy = Q(0) \int_1^0 dy + Q(l) \int_0^1 dy,$$

или

$$\int_0^l \frac{\partial Q}{\partial x} dx = Q(l) - Q(0)$$

Это и есть формула Ньютона–Лейбница.

Таким образом, формулы Грина и Остроградского–Гаусса являются обобщениями формулы Ньютона–Лейбница на случаи двумерных и трехмерных областей.

**15.** Пусть скалярные поля  $u$  и  $v$  заданы в области  $G$ , ограниченной кусочно гладкой поверхностью  $\Phi$ . Доказать, что

$$\iint_{\Phi} v \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_G (v \Delta u + (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v)) dV \quad (18)$$

(первая формула Грина) и

$$\iint_{\Phi} \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS = \iiint_G (v \Delta n u - u \Delta v) dV \quad (19)$$

(вторая формула Грина)

Δ Применим к векторному полю  $\mathbf{a} = v \operatorname{grad} u$  в области  $G$  формулу Остроградского Гаусса. Учитывая равенства  $(v \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{n}) = v \frac{\partial u}{\partial n}$ ,  $\operatorname{div}(v \operatorname{grad} u) = v \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) + (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v)$  (см. формулу (21) из § 1) и  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u$ , получаем формулу (18)

Вторая формула Грина выводится с помощью первой нужно в (18) поменять  $u$  и  $v$  местами и вычесть полученное равенство из (18) ▲

Замечание 1 Отметим, что первую и вторую формулы Грина на плоскости можно вывести аналогично (18) и (19), применив формулу (16) к векторным полям  $v(x, y) \operatorname{grad} u(x, y)$  и  $u(x, y) \operatorname{grad} v(x, y)$ . Эти формулы в координатной форме были получены в § 3 из гл XIII

Замечание 2 Рассмотрим широко распространенный в математической физике оператор

$$L(u) = \operatorname{div}[k(M) \operatorname{grad} u(M)] - q(M)u(M), \quad (20)$$

где  $k(M)$ ,  $q(M)$ ,  $u(M)$  — скалярные функции (оператор Лапласа  $\Delta u$  является частным случаем  $L(u)$  при  $k(M) = 1$ ,  $q(M) = 0$ )

Пусть векторное поле  $\mathbf{a} = v(M)k(M) \operatorname{grad} u$  ( $v(M)$  — скалярное поле) задано в области  $G$ , ограниченной поверхностью  $\Phi$ . Применив к векторному полю  $\mathbf{a}$  в области  $G$  формулу Остроградского–Гаусса и учитывая равенство

$$\operatorname{div}(vk \operatorname{grad} u) = v \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + k(\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v)$$

(см. формулу (21) из § 1), получаем

$$\iint_{\Phi} kv \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_G [vL(u) + k(\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) + quv] dV \quad (21)$$

(первая формула Грина для оператора  $L(u)$ )

Меняя в формуле (21)  $u$  и  $v$  местами и вычитая полученное равенство из (21), приходим к формуле

$$\iint_{\Phi} k \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dS = \iiint_G (vL(u) - uL(v)) dV \quad (22)$$

(вторая формула Грина для оператора  $L(u)$ )

В случае полей  $u(M)$  и  $v(M)$ , заданных в области  $D$  с границей  $L$  на плоскости, применяя к полям  $v \cdot k \operatorname{grad} u$  и  $u \cdot k \operatorname{grad} v$  формулу (16), для оператора  $L(u)$  получаем следующие формулы

$$\int_L kv \frac{\partial u}{\partial n} dl = \iint_D [vL(u) + k(\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) + quv] dS,$$

$$\int_L k \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) dl = \iint_D (vL(u) - uL(v)) dS,$$

аналогичные формулам (21) и (22)

В случае полей  $u(x)$  и  $v(x)$ , заданных на отрезке  $0 \leq x \leq l$ , для оператора

$$L(u) = \frac{d}{dx} \left[ k(x) \frac{du(x)}{dx} \right] + q(x)u(x)$$

(одномерный вариант (20)) имеют место формулы

$$kv \frac{du}{dx} \Big|_0^l = \int_0^l \left[ vL(u) + k \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + quv \right] dx \quad (23)$$

$$k \left( v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right) \Big|_0^l = \int_0^l (vL(u) - uL(v)) dx \quad (24)$$

В справедливости формул (23) и (24) можно убедиться непосредственно интегрированием по частям

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

43. Применяя формулу Остроградского–Гаусса, вычислите поток векторного поля  $\mathbf{a} = (x - y)\mathbf{i} + (z - y)\mathbf{j} + (z - x)\mathbf{k}$  через
- поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями  $x + y + z = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  в сторону внешней нормали,
  - сферу  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  в сторону внешней нормали
44. Применяя формулу Остроградского–Гаусса, вычислите поток векторного поля  $\mathbf{a} = x \cos y \mathbf{i} - \sin y \mathbf{j} + (z - 1)^2 \mathbf{k}$  через боковую поверхность цилиндра, ограниченного поверхностями
- $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 2$ ,
  - $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 2$ ,  $z = 4$  в сторону внутренней нормали
45. Вычислите поток векторного поля  $\mathbf{a} = (z + 1)\mathbf{k}$  через
- сферу  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  в сторону внешней нормали,
  - полусферу  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $z \geq 0$  в сторону внешней нормали к сфере,
  - полусферу  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $z \geq 0$  в сторону внутренней нормали к сфере,
  - полусферу  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $z \leq 0$  в сторону внутренней нормали к сфере,
  - полусферу  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $y \geq 0$  в сторону внешней нормали к сфере
46. Вычислите поток векторного поля  $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$  через круг, получающийся при пересечении шара  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  и плоскости
- $x + y + z = 0$ ,
  - $x + y + z = 1$ ,
  - $x - y + z = 0$ ,
  - $x - y + z = 1$  в сторону той нормали к плоскости, которая образует острый угол с осью  $Oy$
47. Применяя формулу Остроградского Гаусса, вычислите поток векторного поля  $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$  через каждую из частей сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , получающихся при пересечении этой сферы плоскостью
- $x + y + z = 0$ ,
  - $x + y + z = 1$ ,
  - $x - y + z = 0$ ,
  - $x - y + z = 1$  в сторону внешней нормали к сфере
48. Вычислите поток векторного поля  $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$  через круг, полученный при пересечении шара  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  и плоскости  $x + y + z = \alpha$  в сторону той нормали к плоскости, которая образует острый угол с осью  $Ox$ . При каком значении  $\alpha$  поток векторного поля  $\mathbf{a}$  принимает наибольшее и наименьшее значения?

49. Даны векторные поля  $\mathbf{a}_1 = f_1(y, z)\mathbf{i} + f_2(z, x)\mathbf{j} + f_3(x, y)\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{a}_2 = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{a}_3 = \left(\frac{x^2}{2} - xy\right)\mathbf{i} + \left(\frac{y^2}{2} - yz\right)\mathbf{j} + \left(\frac{z^2}{2} - xz\right)\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{a}_4 = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ . Выясните, какие из них являются соленоидальными. Вычислите поток каждого из данных полей через сферу единичного радиуса с центром в начале координат в сторону внешней нормали.
50. Применяя формулу Стокса, вычислите циркуляцию векторного поля  $\mathbf{a} = (z - x^2)\mathbf{i} + (x - y^2)\mathbf{j} + (y - z^2)\mathbf{k}$  вдоль
- треугольного контура, образованного пересечением плоскости  $x + y + z = 1$  с координатными плоскостями и пробегаемого по часовой стрелке, если смотреть из начала координат,
  - треугольного контура, образованного отрезками прямых, соединяющими точки  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  и  $(0, 0, 1)$ , и пробегаемого по часовой стрелке, если смотреть из точки  $(1, 0, 0)$ ,
  - трехугольных контуров, лежащих в плоскостях  $Oxy$  и  $Oxz$ , аналогичных контуру из п. б) и пробегаемых по часовой стрелке, если смотреть соответственно из точек  $(0, 0, 1)$  и  $(0, 1, 0)$ .
51. Применяя формулу Стокса, вычислите циркуляцию векторного поля  $\mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$  вдоль окружности, получающейся при пересечении сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  плоскостью а)  $x + y + z = 0$ , б)  $x + y + z = 1$ , в)  $x - y + z = 0$ , г)  $x - y + z = -1$ . Контур пробегается против часовой стрелки, если смотреть из точки  $(0, 2, 0)$ .
52. Применяя формулу Стокса, вычислите циркуляцию векторного поля  $\mathbf{a} = (y - x)\mathbf{i} + (z - y)\mathbf{j} + (x - z)\mathbf{k}$  вдоль окружности, получающейся при пересечении сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  и плоскости  $x + y + z = \alpha$ . Окружность пробегается против часовой стрелки, если смотреть из точки  $(0, 0, 2)$ . При каком значении  $\alpha$  циркуляция векторного поля принимает наименьшее значение?
53. Применяя формулу Стокса, вычислите циркуляцию векторного поля  $\mathbf{a} = x \cos y \mathbf{i} + \sin y \mathbf{j} + (z - 1)^2 \mathbf{k}$  вдоль отрезка винтовой линии  $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \frac{t}{\pi} \mathbf{k}$
- от точки  $A(0, 0, 0)$  до точки  $B(0, 0, 2)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ )
  - от точки  $B(0, 0, 2)$  до точки  $C(0, 0, 4)$  ( $2\pi \leq t \leq 4\pi$ )
54. Вершины  $D, B, A'$  куба  $ABCDA'B'C'D'$  находятся соответственно в точках  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ . Применяя формулу Стокса, вычислите циркуляцию векторного поля  $\mathbf{a} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$  вдоль замкнутого контура а)  $C'CBB'A'D'C'$ , б)  $DD'A'ABCD$ , в)  $C'D'DABB'C'$ . Используя полученные результаты, вычислите циркуляцию векторного поля  $\mathbf{a}$  вдоль ломаной г)  $C'CBB'A'D'$ , д)  $DD'A'ABC$ , е)  $C'D'DABB'$ .
55. Докажите, что векторное поле  $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$ , где  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ , является потенциальным, и найдите потенциал этого поля.
56. Даны векторные поля  $\mathbf{a}_1 = (y + z)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{a}_2 = f_1(x)\mathbf{i} + f_2(y)\mathbf{j} + f_3(z)\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{a}_3 = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{a}_4 = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ . Выясните, какие из них являются потенциальными. Вычислите циркуляцию каждого из данных полей вдоль окружности  $x^2 + z^2 = 1$ , пробегаемой против часовой стрелки, если смотреть из точки  $(0, 1, 0)$ .
57. Найдите потенциалы потенциальных полей предыдущей задачи.
58. Докажите, что поток векторного поля  $\mathbf{a}$  через поверхность  $\Phi$ , заданную уравнением  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ ,  $(u, v) \in g$ , в сторону нормали  $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \end{bmatrix}$

может быть вычислен по формуле

$$\iint_{\Phi} (\mathbf{a} \mathbf{n}) dS = \iint_g \left( \mathbf{a} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \end{bmatrix} \right) du dv,$$

где  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$  — единичный вектор нормали к поверхности  $\Phi$

Вычислите по этой формуле поток векторного поля  $\mathbf{a} = \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \varphi \mathbf{j}$  через коническую поверхность  $\Phi$ , заданную векторным уравнением  $\mathbf{r}(r, \varphi) = r \cos \varphi \mathbf{i} + r \sin \varphi \mathbf{j} + r \cos \alpha \mathbf{k}$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq r \leq 1$ ), где  $r, \varphi$  — полярные координаты,  $\alpha$  — угол между образующей конуса и осью  $Oz$ .

Какая из нормалей  $\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$  и  $\mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \end{bmatrix}$  образует острый угол с осью  $Oz$ ?

59. В области  $G = \{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$  задано векторное поле  $\mathbf{a} = \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$ . Докажите, что  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$  в  $G$ . Объясните, почему из условия  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$  не следует потенциальность поля  $\mathbf{a}$  в области  $G$ . Задав произвольную замкнутую кривую  $L$  в области  $G$  в виде  $x = \rho(\varphi) \cos \varphi$ ,  $y = \rho(\varphi) \sin \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , докажите, что циркуляция поля  $\mathbf{a}$  вдоль кривой  $L$  равна нулю. Найдите потенциал поля  $\mathbf{a}$ .

60. Вычислите ротор векторного поля  $\mathbf{a}$  и циркуляцию этого поля вдоль окружности  $L$ , если

a)  $\mathbf{a} = \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ ,  $L: x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = z_0$ ,

б)  $\mathbf{a} = x \mathbf{i} + \frac{y}{y^2 + z^2} \mathbf{j} + \frac{z}{y^2 + z^2} \mathbf{k}$ ,  $L: y^2 + z^2 = 1$ ,  $x = x_0$ ,

в)  $\mathbf{a} = \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} - \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ ,  $L: x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = z_0$ ,

г)  $\mathbf{a} = x \mathbf{i} + \frac{y}{y^2 + z^2} \mathbf{j} - \frac{z}{y^2 + z^2} \mathbf{k}$ ,  $L: y^2 + z^2 = 1$ ,  $x = x_0$

Являются ли поля а) и в) потенциальными в шаре  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  с выброшенным диаметром, лежащим на оси  $Oz$ , а поля б) и г) потенциальными в шаре  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  с выброшенным диаметром, лежащим на оси  $Ox$ ?

61. Дано векторное поле на плоскости  $\mathbf{a} = \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$ ,  $x^2 + y^2 \neq 0$

Вычислите  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$  и циркуляцию поля  $\mathbf{a}$  вдоль окружности  $x^2 + y^2 = R^2$ . Является ли поле  $\mathbf{a}$  потенциальным в области  $0 < x^2 + y^2 \leq 1$ , в области  $(x - 2)^2 + y^2 \leq 1$ ?

62. Дано скалярное поле на плоскости  $u = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . Вычислите

$\operatorname{grad} u$  и циркуляцию векторного поля  $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u$  вдоль окружности  $x^2 + y^2 = R^2$ . Является ли векторное поле  $\mathbf{a}$  потенциальным в области  $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$ ?

63. Дано векторное поле на плоскости  $\mathbf{a} = \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$ ,  $x^2 + y^2 \neq 0$

Вычислите  $\operatorname{div} \mathbf{a}$  и поток поля  $\mathbf{a}$  через окружность  $x^2 + y^2 = 1$  в сторону внешней нормали. Объясните, почему в данном случае из соленоидальности поля  $\mathbf{a}$  не следует, что поток поля  $\mathbf{a}$  через любую замкнутую кривую равен нулю.

64. Дано векторное поле на плоскости  $\mathbf{a} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$ ,  $x^2 + y^2 \neq 0$ . Докажите, что  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$  и поток поля  $\mathbf{a}$  через любую замкнутую кривую, не проходящую через начало координат, равен нулю (кривая может обходить начало координат)
65. Пусть в односвязной плоской области  $G$  векторное поле  $\mathbf{a}(x, y)$  удовлетворяет условиям  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$  и  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ . Докажите, что поле  $\mathbf{a}$  потенциально и его потенциал является гармонической функцией в области  $G$ . Объясните, почему это утверждение неприменимо к полю  $\mathbf{a} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$  в области  $0 < x^2 + y^2 \leq 1$ , хотя условия  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$  и  $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$  в этой области выполнены (см. упр. 61 и 64)
66. Применяя формулу Остроградского–Гаусса к векторному полю  $u(M) \mathbf{i}$ , где  $u(M)$  — скалярное поле в области  $G$  с границей  $\Phi$ , докажите, что

$$\iint_{\Phi} u \cos \alpha dS = \iiint_G \frac{\partial u}{\partial x} dV,$$

- где  $\alpha$  — угол между внешней нормалью  $\mathbf{n}$  к поверхности  $\Phi$  и осью  $Ox$
67. Применяя формулу Остроградского–Гаусса к векторным полям  $u(M) \mathbf{i}$ ,  $u(M) \mathbf{j}$ ,  $u(M) \mathbf{k}$ , где  $u(M)$  — скалярное поле в области  $G$ , ограниченной поверхностью  $\Phi$ , докажите, что

$$\iint_{\Phi} u \mathbf{n} dS = \iint_{\Phi} \mathbf{n} u dS = \iiint_G \nabla u dV, \quad (25)$$

- где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\Phi$  (Эта формула аналогична формуле Остроградского Гаусса, но вместо векторного поля здесь фигурирует скалярное поле  $u(M)$ )
68. Используя формулу (25), докажите, что

$$\operatorname{grad} u(M) = \lim_{\substack{V(G) \rightarrow 0 \\ M \in G}} \frac{\iint_{\Phi} u \mathbf{n} dS}{V(G)}, \quad (26)$$

- где  $V(G)$  — объем области  $G$ , ограниченной поверхностью  $\Phi$  (Эта формула дает инвариантное определение градиента скалярного поля, аналогичное инвариантным определениям дивергенции и ротора)
69. Пусть векторное поле  $\mathbf{a} = \{P(M), Q(M), R(M)\}$  задано в области  $G$ , ограниченной поверхностью  $\Phi$ , а  $\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\Phi$ .

Примените в области  $G$  формулу Остроградского–Гаусса к векторным полям  $R(M) \mathbf{j} - Q(M) \mathbf{k}$ ,  $P(M) \mathbf{k} - R(M) \mathbf{i}$  и  $Q(M) \mathbf{i} - P(M) \mathbf{j}$ . Умножая полученные равенства соответственно на  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  и складывая, докажите, что

$$\iint_{\Phi} [\mathbf{n} \mathbf{a}] dS = \iiint_G \operatorname{rot} \mathbf{a} dV$$

или

$$\iint_{\Phi} [\mathbf{n} \mathbf{a}] dS = \iiint_G [\nabla \mathbf{a}] dV \quad (27)$$

Эта формула аналогична формуле Остроградского–Гаусса

$$\iint_{\Phi} (\mathbf{n} \mathbf{a}) dS = \iiint_G \operatorname{div} \mathbf{a} dV$$

или

$$\iint_{\Phi} (\mathbf{n}\mathbf{a}) dS = \iiint_G (\nabla \mathbf{a}) dV \quad (28)$$

70. Используя формулу (27), докажите, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}(M) = \lim_{\substack{V(G) \rightarrow 0 \\ M \in G}} \frac{\iint_{\Phi} [\mathbf{n}\mathbf{a}] dS}{V(G)}, \quad (29)$$

где  $V(G)$  — объем области  $G$ , ограниченной поверхностью  $\Phi$  (Формула (29) дает инвариантное определение ротора векторного поля, причем, в отличие от формулы (10), она выражает сам вектор  $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ , а не его проекцию на некоторое выбранное направление)

71. В примере 4 из § 5 гл. XIV для скалярного поля  $u$  была получена формула

$$\iint_{\Phi} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_G \Delta u dV, \quad (30)$$

которую с помощью оператора Гамильтона можно записать в виде

$$\iint_{\Phi} (\mathbf{n}\nabla)u dS = \iiint_G \nabla^2 u dV \quad (31)$$

Используя формулу (30), докажите, что

$$\Delta u(M) = \lim_{\substack{V(G) \rightarrow 0 \\ M \in G}} \frac{\iint_{\Phi} \frac{\partial u}{\partial n} dS}{V(G)}, \quad (32)$$

где  $V(G)$  — объем области  $G$ , ограниченной поверхностью  $\Phi$  (Формула (32) дает инвариантное определение оператора Лапласа) Формулы (25), (27), (28), (31) можно рассматривать как частные случаи следующего операторного обобщения формулы Остроградского–Гаусса

$$\iint_{\Phi} L(\mathbf{n}) dS = \iiint_G L(\nabla) dV, \quad (33)$$

где  $L(\mathbf{b})$  — некоторое линейное однородное выражение относительно вектора  $\mathbf{b}$  ( $\mathbf{b}$  — произвольный вектор, в частности вектор  $\mathbf{n}$  или вектор  $\nabla$ ) Такими выражениями относительно вектора  $\mathbf{n}$  в левых частях формул (25), (27), (28), (31) являются  $n_i$ ,  $[\mathbf{n}\mathbf{a}]$ ,  $(\mathbf{n}\mathbf{a})$ ,  $(\mathbf{n}\nabla)$  В правых частях указанных формул тройные интегралы берутся от тех же выражений, в которых вектор  $\mathbf{n}$  заменен вектором  $\nabla$  Поэтому формулы (5), (26), (29), (32) оказываются частными случаями операторной формулы

$$L(\nabla)_M = \lim_{\substack{V(G) \rightarrow 0 \\ M \in G}} \frac{\iint_{\Phi} L(\mathbf{n}) dS}{V(G)},$$

где  $V(G)$  — объем области  $G$ , ограниченной поверхностью  $\Phi$  и стягивающейся к точке  $M$

72. Применяя формулу (33), докажите, что

$$\iint_{\Phi} (\mathbf{v}\mathbf{n})\mathbf{a} dS = \iiint_G (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{a} dV, \quad (34)$$

$$\iint_{\Phi} (\mathbf{n}\nabla)\mathbf{a} dS = \iint_{\Phi} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial n} dS = \iiint_G \Delta \mathbf{a} dV, \quad (35)$$

где  $\mathbf{a}$  — векторное поле, заданное в области  $G$  с границей  $\Phi$ ;  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\Phi$ ;  $\mathbf{v}$  — постоянный вектор.

Проверьте справедливость этих формул, проделав все указанные операции в координатах. Используя формулы (34) и (35), докажите, что

$$(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{a}(M) = \lim_{\substack{V(G) \rightarrow 0 \\ M \in G}} \frac{\iint_{\Phi} (\mathbf{v}\mathbf{n})\mathbf{a} dS}{V(G)}, \quad \Delta\mathbf{a}(M) = \lim_{\substack{V(G) \rightarrow 0 \\ M \in G}} \frac{\iint_{\Phi} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial n} dS}{V(G)}$$

(эти формулы дают инвариантные определения операций  $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{a}$  и  $\Delta\mathbf{a}$ ).

73. Пусть  $\mathbf{a}$  — постоянный вектор,  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ . Используя формулу (34), докажите, что  $\iint_{\Phi} (\mathbf{a}\mathbf{n})\mathbf{r} dS = \mathbf{a}V$ , где  $V$  — объем области, ограниченной поверхностью  $\Phi$ .

74. Пусть  $\mathbf{a}$  — постоянный вектор,  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ . Используя формулу (34) и тождество (25) из § 1, докажите, что  $\iint_G (\mathbf{a}\mathbf{r})\mathbf{n} dS = \mathbf{a}V$ , где  $V$  — объем области, ограниченной поверхностью  $\Phi$ .

#### § 4. Основные дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных ортогональных координатах

##### Основные понятия и формулы

**1. Криволинейные ортогональные координаты.** Пусть  $x, y, z$  — прямоугольные координаты точки  $M$ . Положение точки  $M$ , как было отмечено в гл. XII, можно задать также с помощью криволинейных координат. Будем обозначать их  $q_1, q_2, q_3$ , а формулы, связывающие криволинейные координаты с прямоугольными, запишем в виде

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3). \quad (1)$$

При изменении  $q_1$  и фиксированных значениях  $q_2$  и  $q_3$  точка с координатами  $x, y, z$ , определяемыми формулами (1), описывает в пространстве некоторую кривую, называемую *координатной линией*  $q_1$ . Аналогично определяются координатные линии  $q_2$  и  $q_3$ . Криволинейные координаты называются *ортогональными*, если в любой точке три координатные линии, проходящие через эту точку, попарно ортогональны (т. е. попарно ортогональны касательные к координатным линиям в этой точке).

Элемент  $dl_1$  длины дуги координатной линии  $q_1$  выражается формулой

$$dl_1 = H_1 dq_1,$$

где

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}.$$

Аналогично,

$$dl_2 = H_2 d q_2, \quad dl_3 = H_3 d q_3,$$

где

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2},$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}.$$

Величины  $H_1, H_2, H_3$  называются *параметрами Ламэ* или *масштабными коэффициентами* криволинейных координат  $q_1, q_2, q_3$ . Они характеризуют в каждой точке пространства изменение  $dl_i$  длины координатной линии в зависимости от изменения  $dq_i$ , соответствующей криволинейной координаты  $q_i$ .

**2. Цилиндрические и сферические координаты.** Примерами криволинейных ортогональных координат являются известные нам цилиндрические и сферические координаты.

Цилиндрические координаты  $q_1 = \rho, q_2 = \varphi, q_3 = z$  вводятся с помощью соотношений

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, & y &= \rho \sin \varphi, & z &= z, \\ \rho &\geq 0, & 0 \leq \varphi < 2\pi, & -\infty < z < +\infty. \end{aligned} \tag{2}$$

Параметры Ламэ для цилиндрических координат имеют вид

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1.$$

Сферические координаты  $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$  вводятся с помощью соотношений

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, & y &= r \sin \theta \sin \varphi, & z &= r \cos \theta, \\ r &\geq 0, & 0 \leq \theta \leq \pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned} \tag{3}$$

Параметры Ламэ для сферических координат имеют вид

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r \sin \theta.$$

**3. Операции grad, div, rot,  $\Delta$  в криволинейных ортогональных координатах.** Пусть  $q_1, q_2, q_3$  — криволинейные ортогональные координаты точки  $M$ . Введем в точке  $M$  ортогональный базис, состоящий из трех единичных векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , касательных к координатным линиям в точке  $M$  и направленных в сторону возрастания  $q_1, q_2, q_3$ . Отметим, что при переходе от точки к точке направления векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  изменяются (в отличие от векторов  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ), т. е. базис  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  зависит от точки  $M$  (или, что то же самое, от  $q_1, q_2, q_3$ ).

Пусть  $u(M)$  и  $\mathbf{a}(M)$  — дифференцируемые скалярное и векторное поля. Вектор  $\mathbf{a}(M)$  разложим по базису  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  в точке  $M$ :  $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$ .

Основные дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных ортогональных координатах имеют следующий вид:

$$\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \mathbf{e}_3, \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (a_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (a_2 H_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (a_3 H_1 H_2) \right\},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{a} &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} H_1 \mathbf{e}_1 & H_2 \mathbf{e}_2 & H_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ a_1 H_1 & a_2 H_2 & a_3 H_3 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_2} (a_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (a_2 H_2) \right\} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_3 H_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_3} (a_1 H_1) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial q_1} (a_3 H_3) \right\} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_1 H_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (a_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (a_1 H_1) \right\} \mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \quad (5)$$

$$= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right\}.$$

### Контрольные вопросы и задания

- Что такое криволинейные координаты; координатные линии? Какие криволинейные координаты называются ортогональными?
- Что такое параметры Ламэ? Каков их геометрический смысл?
- Приведите примеры криволинейных ортогональных координат. Напишите формулы, связывающие прямоугольные координаты: а) с цилиндрическими координатами; б) со сферическими координатами. Изобразите на рисунке координатные линии для цилиндрических и сферических координат.
- Вычислите параметры Ламэ для цилиндрических и сферических координат двумя способами: а) по формулам для параметров Ламэ; б) используя вид координатных линий и геометрический смысл параметров Ламэ.
- Как вводится базис  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , связанный с криволинейными ортогональными координатами? В чем его отличие от базиса  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ? Изобразите на рисунке базис  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  в произвольной точке для: а) цилиндрических координат; б) сферических координат.
- Запишите в криволинейных ортогональных координатах:
  - $\operatorname{grad} u$ ;
  - $\operatorname{div} \mathbf{a}$ ;
  - $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ .
- Используя формулу  $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ , выведите выражение для оператора Лапласа в криволинейных ортогональных координатах.

### Примеры решения задач

- Записать выражение градиента скалярного поля  $u$  в цилиндрических координатах.

Полагая в формуле (4)  $q_1 = \rho$ ,  $q_2 = \varphi$ ,  $q_3 = z$ ,  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_\rho$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\varphi$ ,  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$  и используя выражения параметров Ламэ в цилиндрических

координатах, получаем

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z. \blacksquare$$

**2.** Записать выражение  $\Delta u$  ( $\Delta$  — оператор Лапласа) в сферических координатах.

$\Delta$  Полагая в формуле (5)  $q_1 = r$ ,  $q_2 = \theta$ ,  $q_3 = \varphi$  и используя выражения параметров Ламэ в сферических координатах, получаем

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}. \blacksquare \quad (6)$$

**3.** Найти сферически симметричное решение уравнения Пуассона  $\Delta u = \frac{1}{r}$ , т. е. решение, зависящее только от  $r$ .

$\Delta$  Так как искомая функция  $u$  по условию не зависит от  $\theta$  и  $\varphi$ , то производные по этим переменным в выражении (6) равны нулю, и уравнение для функции  $u$  примет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{r}.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) = r;$$

используем обозначения обыкновенных производных, так как функция  $u$  зависит лишь от одной переменной:  $u = u(r)$ . Умножая на  $dr$ , получаем

$$d \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) = r dr,$$

откуда, интегрируя, находим

$$r^2 \frac{du}{dr} = \frac{r^2}{2} + C_1.$$

Деля на  $r^2$  и интегрируя еще раз, имеем

$$u = \frac{r}{2} - \frac{C_1}{r} + C_2.$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные.  $\blacksquare$

### Задачи и упражнения для самостоятельной работы

**75.** Пусть  $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$  — единичные базисные векторы системы цилиндрических координат  $\rho, \varphi, z$ , связанных с прямоугольными координатами  $x, y, z$  формулами (2). Даны точки  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$  (координаты точек прямоугольные).

- Изобразите на рисунке базис  $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$  в точках  $A, B, C$ .
- Найдите углы между векторами: 1°)  $\mathbf{e}_\rho(A)$  и  $\mathbf{e}_\rho(B)$ ; 2°)  $\mathbf{e}_\varphi(A)$  и  $\mathbf{e}_\rho(B)$ ; 3°)  $\mathbf{e}_\rho(A)$  и  $\mathbf{e}_\varphi(B)$ ; 4°)  $\mathbf{e}_z(A)$  и  $\mathbf{e}_z(B)$ .
- Разложите векторы: 1°)  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  по базису  $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$  в точках  $A$  и  $B$ ; 2°)  $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$  в точках  $A$  и  $B$  по базису  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ .

76. Пусть  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$  — единичные базисные векторы системы сферических координат  $r, \theta, \varphi$ , связанных с прямоугольными координатами  $x, y, z$  формулами (3). Даны точки  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $C(0, 0, 1)$  (координаты точек прямоугольные).
- Изобразите на рисунке базис  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$  в точках  $A, B, C$
  - Найдите углы между векторами  $1^\circ$   $\mathbf{e}_r(A)$  и  $\mathbf{e}_\theta(B)$ ,  $2^\circ$   $\mathbf{e}_\varphi(A)$  и  $\mathbf{e}_r(B)$ ,  $3^\circ$   $\mathbf{e}_r(A)$  и  $\mathbf{e}_\varphi(B)$ ,  $4^\circ$   $\mathbf{e}_\theta(A)$  и  $\mathbf{e}_\theta(B)$
  - Разложите векторы  $1^\circ$   $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  и по базису  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$  в точках  $A$  и  $B$ ,  $2^\circ$   $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$  в точках  $A$  и  $B$  по базису  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$
77. Запишите выражение градиента скалярного поля  $u$  на плоскости  $Oxy$  в полярных координатах
78. Выразите дивергенцию и ротор плоского векторного поля  $\mathbf{a}(x, y)$  в полярных координатах
79. Запишите выражение градиента скалярного поля и в сферических координатах
80. Запишите выражение дивергенции векторного поля  $\mathbf{a}$
- в цилиндрических координатах,
  - в сферических координатах
81. Выразите ротор векторного поля  $\mathbf{a}$
- в цилиндрических координатах,
  - в сферических координатах
82. Запишите выражение  $\Delta u$  ( $\Delta$  — оператор Лапласа) в цилиндрических координатах
83. Найдите решения уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$ , зависящие
- только от  $\rho$ ,
  - только от  $\varphi$ ,
  - только от  $z$ , где  $\rho, \varphi, z$  — цилиндрические координаты
84. Найдите решения уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$ , зависящие
- только от  $r$ ,
  - только от  $\theta$ ,
  - только от  $\varphi$ , где  $r, \theta, \varphi$  — сферические координаты
85. С помощью выражения оператора Лапласа в сферических координатах вычислите  $\Delta(r^m)$
86. Пусть  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  — ортогональный базис системы криволинейных координат  $q_1, q_2, q_3$ . Найдите  $\operatorname{div} \mathbf{e}_1, \operatorname{div} \mathbf{e}_2, \operatorname{div} \mathbf{e}_3$ . Запишите полученные выражения
- в цилиндрических координатах, считая  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$ ,
  - в сферических координатах, считая  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_\varphi$
87. Пусть  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  — ортогональный базис системы криволинейных координат  $q_1, q_2, q_3$ . Докажите, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{e}_1 = \left( \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \right) \mathbf{e}_2 - \left( \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right) \mathbf{e}_3 = \frac{1}{H_1} [\operatorname{grad} H_1 \cdot \mathbf{e}_1]$$

Выполните аналогичные формулы для  $\operatorname{rot} \mathbf{e}_2$  и  $\operatorname{rot} \mathbf{e}_3$ . Запишите полученные выражения

- в цилиндрических координатах, считая  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$ ,
- в сферических координатах, считая  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_\varphi$

## ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

### Глава I

1. ★ Воспользуйтесь методом доказательства от противного 5. ★ Воспользуйтесь результатами примеров 1 и 2 15. Пусть  $x$  — любое положительное число и пусть  $x_1$  и  $y_1$  — любые рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < x_1 \leq x, \quad 0 < y_1 \leq 1 \quad (*)$$

Тогда по определению произведения положительных чисел имеем  $x - 1 = \sup M$ , где  $M = \{(x_1 y_1)_r\}$ . Как следует из (\*),  $\forall x_1, y_1 \quad 0 < (x_1 y_1)_r \leq x_1 \leq x$ , т.е.  $x$  — верхняя граница множества  $M$ . Пусть  $\tilde{x} < x$ . Как показано в примере 1 из § 1, существует рациональное число  $x^*$  такое, что  $\tilde{x} < x^* < x$ . Возьмем  $x_1 = x^*$ ,  $y_1 = 1$ . Тогда  $(x_1 y_1)_r = x^* - 1 = x^*$  и, следовательно,  $(x_1 y_1)_r > \tilde{x}$ . Итак, для числа  $x$  выполнены оба условия определения точной верхней границы множества, т.е.  $\sup M = x$ . Таким образом,  $\forall x > 0 \quad x - 1 = \sup M = x$ , откуда  $x - 1 = x$ . Если  $x = 0$ , то согласно правилу умножения рациональных чисел  $0 - 1 = 0$ . Если  $x < 0$ , то согласно определению произведения вещественных чисел  $x - 1 = -|x| - 1$ . Но, как только что было показано,  $|x| - 1 = |x|$ , т.е.  $x - 1 = -|x| = x$ .

33. ★ При  $x_1 x_2 \dots x_n = 0$  утверждение очевидно. При  $x_1 x_2 \dots x_n \neq 0$  положите  $y_k = \frac{x_k}{\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) и воспользуйтесь результатом примера 2 из § 4.

### Глава II

1. а) Да, б) нет, в) да, г) да, д) нет 4. Нет 5. Достаточно доказать, что последовательность  $\{x_n\}$  неограниченная 14. ★ Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , то

$\exists A > 0$  и номер  $N$  такие, что  $x_n > A \quad \forall n > N$ . Среди  $x_1, x_2, \dots, x_N$  существует наименьшее число 15. а)  $x_4 = x_5 = -120$ , б)  $x_{10} = 20 - 20$ . 20. а) а, б) а<sup>2</sup>, в) 0,

г) а 21. а)  $y_n = \left[ 2 + (-1)^n \frac{1}{n} \right]$  расходится, б)  $y_n = \operatorname{sgn} \left( (-1)^n \frac{1}{n} \right)$  расходится 23. а) Сходится, если  $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha \leq \beta$  или  $\alpha \leq 0, \beta$  любое, б) сходится, если  $\gamma \leq 3/2$  24. а) 0, б) 0, в) 1/3 26. а) 1/2, б) 1/3, в) 1 ★ Представьте дробь  $\frac{1}{k(k+1)}$  в виде  $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), г) 1/4 ★ Представьте  $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$  в виде  $S_n = A + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} \quad \forall n$ ,

д) ★  $\frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}, 0! = 1, n \geq 1$  30. а) 2, б) 0 31. Так как  $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1/\varepsilon)^n}{n!} = 0$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$  такое, что  $\forall n > N$  выполняется неравенство  $(1/\varepsilon)^n / n! < 1$  или  $1 / \sqrt[n]{n!} < \varepsilon$  33.  $(1 + \sqrt{1 + 4a})/2$  34. а)  $(a + 2b)/3$ , б)  $\sqrt{a}$ ,

в)  $-\sqrt{a}$ , г) 2, д)  $(1 - \sqrt{1 - 4x_1})/2$ , е)  $1/2$ , ж)  $(\sqrt{5} - 1)/2$ , з) 3    37. ★ г) Докажите, что 1°) множество  $U$  предельных точек последовательности ограничено, 2°) если  $\inf U = c$ ,  $\sup U = b$ , то  $c, b \in U$ , 3°)  $c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ,  $b = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$

39. а) Предельные точки 2,  $-2$ ,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -2$ , б) предельные точки 0, 1, 2,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , в) предельные точки  $-4, 0, 2, 6$ ,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 6$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -4$ , г) предельные точки  $-1/2, 1, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -1/2$ , д) предельная точка 1,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ , е) предельные точки 0, 1,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , ж) предельные точки  $-e - \frac{1}{\sqrt{2}}, -e + \frac{1}{\sqrt{2}}, e - 1, e, e + 1, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = e + 1$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -e - \frac{1}{\sqrt{2}}$ , з) предельные точки  $0, 1/2, 1, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , и) предельные точки 1, 2,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ , к) предельные точки 0, 1,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , л) нет предельных точек,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  40. Рассохится ★ Докажите, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} \neq \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1}$  41. а) Воспользуйтесь оценкой  $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{1-k} - \frac{1}{k}$  при  $k \geq 2$ , г) воспользуйтесь оценкой  $|x_{n+p} - x_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k q^k \right| \leq M \sum_{k=n+1}^{n+p} |q|^k$  42. ★ В определении 1 фундаментальной последовательности положите  $p = 1$  43. ★ б) Покажите, что для  $\varepsilon = 1/2$  и  $\forall n$   $|x_n - x_{2n}| \geq 1/2$

### Глава III

2. ★ Докажите, что  $f(x)$  не удовлетворяет определению предела функции по Гейне 3. Нет 4. ★ Для доказательства того, что не существует  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  при  $|a| \neq 1$ , воспользуйтесь отрицанием определения предела функции по Гейне 8. а) 1, б) 4/5, в)  $-1/2$ , г) 1, д)  $m$  9. а)  $4/3$ , б)  $-2$ , в)  $1/4$  10. а) 1, б)  $5^{10}/3^{25}$ , в) 1, г)  $1/\sqrt[3]{2}$  12. а) Нет, б)  $1/2$ , в) 1 15. а)  $x = 0$  — точка устранимого разрыва, б)  $x = 0$  — точка разрыва II рода, в)  $x = k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) — точки разрыва I рода, г) в точках  $x = 1$  и  $x = -1$  функция непрерывна, остальные точки — точки разрыва II рода, д)  $x = -1$  — точка разрыва II рода, е)  $x = 0$  — точка разрыва I рода, ж)  $x = 1$  — точка разрыва I рода,  $x = 0$  — точка разрыва II рода, з)  $x = -1$  и  $x = 3$  — точки разрыва II рода, и)  $x = 1$  — точка устранимого разрыва, к)  $x = -1$  — точка разрыва I рода, л)  $x = -1$  — точка разрыва I рода 17. а)  $a^x = 1 + x \ln a + o(x)$ , б)  $e^x = 1 + x + o(x)$ , в)  $(1+x)^a = 1 + ax + o(x)$ , г)  $\sin x = x + o(x)$ , д)  $\operatorname{th} x = x + o(x)$ , е)  $\operatorname{ch} x = 1 + (1/2)x^2 + o(x^2)$  19. а) Нет, б) да, в) да 20. а) Равенство  $o(x+x^2) = o(x^2)$  при  $x \rightarrow 0$  неверно. Действительно, например, функция  $\alpha(x) = x \sqrt[3]{x}$  является бесконечно малой более высокого порядка, чем  $x+x^2$  при  $x \rightarrow 0$  (так как  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt[3]{x}}{x+x^2} = 0$ ), но  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt[3]{x}}{x^2} = \infty$  т.е.  $x \sqrt[3]{x} \neq o(x^2)$

- при  $x \rightarrow 0$ , б) нет, в) да, г) нет, д) да **23.** а)  $25x + o(x)$ ,  $25x + o(x)$ , б)  $1 - 8x^4 + o(x^4)$ ,  $1 - (1/2)x^2 + o(x^2)$ , в)  $1 + 2x + o(x)$ ,  $1 + \sqrt{x} + o(\sqrt{x})$ , г)  $-x^2 + o(x^2)$ ,  $x + o(x)$ , д)  $(1/27)x + o(x)$ ,  $(-1/27)\sqrt{x} + o(\sqrt{x})$ , е)  $1 + x^3 \ln 2 + o(x^3)$ ,  $1 + x^2 \ln 2 + o(x^2)$ , ж)  $-2x^2 + o(x^2)$ ,  $-2x^2 + o(x^2)$ , з)  $1 - (1/2)x + o(x)$ ,  $1 + (1/2)x + o(x)$ , и)  $\sqrt{x} + o(\sqrt{x})$ , к)  $1 + (x + (1/2)|x|) \ln 5 + o(x)$ , л)  $1 - (1/6)x + o(x)$ , м)  $-(1/2)x^2 + o(x^2)$  **24.** а)  $(x - 2)^2 + o((x - 2)^2)$ , б)  $1 + \beta(2 - x) + o(2 - x)$ , в)  $x - 2 + o(x - 2)$ , г)  $1 - (1/2)\pi^2(x - 2)^2 + o((x - 2)^2)$ , д)  $\pi(x^2 - 4) + o(x - 2)$ , е)  $(2/35)(x - 2) + o(x - 2)$ , ж)  $4(1 + \ln x)(x - 2) + o(x - 2)$  **25.** а)  $1/2 + o(1)$ , б)  $1/(3x) + o(1/x)$ , в)  $5/2 + o(1)$ , г)  $1/\sqrt[3]{x^2} + o(1/\sqrt[3]{x^2})$ ,  $1/\sqrt[3]{x^2} + o(1/\sqrt[3]{x^2})$ , д)  $1 - 1/(2x^2) + o(1/x^2)$ , е)  $1 + (\ln 5)/x + o(1/x)$ , ж)  $-4/x^2 + o(1/x^2)$ ,  $4/x^2 + o(1/x^2)$ , з)  $1/\sqrt{x} + o(1/\sqrt{x})$  **26.** а)  $1/3 + o(1)$ , б)  $(1/n) \ln 14 + o(1/n)$ , в)  $1/\sqrt{n} + o(1/\sqrt{n})$  **27.** а) 4, б)  $1/\sqrt{3}$ , в)  $2/\pi$ , г)  $\alpha/m - \beta/n$ , д) 1, е)  $-1/12$ , ж)  $1/a$ , з)  $1/2$ ,  $\sqrt{2/3}$ , 1, и) 0, к) 0, если  $a < b$ ,  $+\infty$ , если  $a > b$ ,  $e^{-1/b}$ , если  $a = b$ , л) 1, м) 1, н)  $\sqrt[3]{b}$  **28.** а)  $\alpha/m + \beta/n$ , б)  $-19/3$ , в)  $1/324$ , г)  $-4/9$ , д) 3, е)  $\ln a$ , ж)  $e^{\pi^2}$ , з) 0, и) 0, к) 0, л)  $e^{-x^2/2}$ , м)  $e^{-1}$  **29.** а)  $-2$ , б)  $a^a \ln(ea)$ , в)  $2a/b$ , г)  $a^x \ln^2 a$ , д)  $-2$ , е)  $e^2$ , ж)  $-\pi^2/4$ , з)  $e^{1-a}$ , и) 0, к)  $\ln 2$  **30.** а) 2, б)  $4/3$ , в)  $7/4$ , г)  $-\ln 2$ , д)  $a^a \ln(a/e)$ , е)  $\ln a$ , ж) 2, з)  $45/91$ , и)  $e^{-4\pi^2 a^2}$ , к)  $e^{2\alpha}$ , л)  $e$ , м)  $1/2$ , н)  $1/2$

## Г л а в а IV

1. а)  $\Delta y = \arcsin\left(\frac{1}{2} + \Delta x\right) - \frac{\pi}{6}$ ,  $-\frac{3}{2} \leq \Delta x \leq \frac{1}{2}$ , в)  $\Delta y = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{2}\right)$ ,  $-2 < \Delta x < +\infty$  2. а) 1, б)  $2x_0$ , в)  $y'(4) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + \Delta x} - \sqrt{4}}{\Delta x} = \frac{1}{4}$  г) 0, д)  $1/2$  3. а)  $f'(a)$ , б)  $2f'(a)$ , в)  $-2f'(a)$ , г)  $\frac{1}{2}k(k+1)f'(a)$  4. а)  $v_1 > v_2$  при  $0 \leq t < 1/2$ ,  $v_1 = v_2$  при  $t = 1/2$ ,  $v_1 < v_2$  при  $t > 1/2$ , на  $[0, 1]$   $v_{1cp} = v_{2cp} = 1$ , на  $[1, 2]$   $v_{1cp} = 1 < 3 = v_{2cp}$ , б)  $v_1 = v_2 = 0$  при  $t = 0$ ,  $v_1 > v_2$  при  $0 < t < 2/3$ ,  $v_1 = v_2 = 4/3$  при  $t = 2/3$ ,  $v_1 < v_2$  при  $t > 2/3$ , на  $[0, 1]$   $v_{1cp} = v_{2cp} = 1$ , на  $[1, 2]$   $v_{1cp} = 3 < 7 = v_{2cp}$ , в)  $v_1 > v_2$  при  $1 \leq t < 4$ ,  $v_1 = v_2 = 1/4$  при  $t = 4$ ,  $v_1 < v_2$  при  $t > 4$ , на  $[1, 4]$   $v_{1cp} = (1/3) \ln 4 > 1/3 = v_{2cp}$ , на  $[1, 25]$   $v_{1cp} = (1/24) \ln 25 < 1/6 = v_{2cp}$  5. а)  $y = x$ , б)  $y = 2x - 1$ , в)  $x = 0$ , г)  $y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$  6. а)  $\left(\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}, \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ , б)  $\left(\frac{1}{e-1}, \frac{e}{e-1}\right)$ , в)  $\left(\frac{6 - \sqrt{3}\pi}{6(2 - \sqrt{3})}, \frac{6 - \sqrt{3}\pi}{6(2 - \sqrt{3})}\right)$  7.  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ,  $y = \frac{1}{4}x + 1$  8. а)  $f'(+0) = 1$ ,  $f'(-0) = -1$ , б)  $f'(1+0) = f'(1-0) = f'(1) = 1$ , в)  $f'(+0) = f'(-0) = f'(0) = 0$ , г)  $f'(+0) = 1$ ,  $f'(-0) = -1$ , д)  $f'(+0) = f'(-0) = f'(0) = 0$ , е)  $f'(\pi/2 + 0) = f'(\pi/2 - 0) = f'(\pi/2) = 0$ , ж)  $f'(1+0) = e$ ,  $f'(1-0) = -e$  9. а)  $2x$ , б)  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$  ( $x > 0$ ), в)  $-\frac{1}{x^2}$  ( $x \neq 0$ ), г)  $\frac{4}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{2x\sqrt{x}}$  ( $x > 0$ ), д)  $\frac{1}{x} \frac{\ln 108}{\ln 2 \ln 3}$  ( $x > 0$ ), и)  $y'(1) = \frac{\ln 108}{\ln 2 \ln 3}$ , е)  $\left(2^x - \frac{1}{2^x}\right) \ln 2$ , ж)  $\cos x + \sin x$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y'(\pi/4) = \sqrt{2}$ , з)  $1/(\sin^2 \cos x)$  ( $x \neq \pi n/2$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ), и) 0 ( $\arcsin x + \arccos x = \pi/2 = \text{const}$ ), к) 0 ( $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2 = \text{const}$ ) **10.** ★ Представьте  $[u(x)]^{v(x)}$  в виде  $e^{v(x) \ln u(x)}$  и воспользуйтесь формулой для производной сложной функции **11.** а)  $\frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ ,  $\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

- ( $x < -a, x > a$ );  $\frac{5x^2 + 3}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$ ; 6)  $\frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left[ 1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right]$
- ( $x > 0$ )  $-\sin x \sin(2 \cos x) - \cos x \sin(2 \sin x)$ ; в)  $\cos[\sin(\sin x)] \cos(\sin x) \cos x$ ;
- $\frac{4 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{(1 - \operatorname{tg}^2 x)^2} (x \neq \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z})$ ;  $2^{\cos x + \operatorname{tg} x} \ln 2 \left( -\sin x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z})$ ; г)  $e^x (\sin x + \cos x)$ ;  $2e^{x^2} (x \cos 2x - \sin 2x)$ ;  $e^x \left[ e^{e^x} + x^{e^x} \left( \ln x + \frac{1}{x} \right) \right] (x > 0)$ ; д)  $x^x (\ln x + 1) x > 0$ ;  $\frac{1}{x \ln x [\ln(\ln x)]} (x > e)$ ;  $\frac{1}{x^2 - a^2} (x < -a, x > a)$ ; е)  $\frac{1}{x} (x \neq 0)$ ;  $\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ ;  $\operatorname{ctg} x (2\pi n < x < \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z})$ ;
- ж)  $\frac{1}{x} \cos(\ln x) (x > 0)$ ;  $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} (-a < x < a)$ ;  $\frac{1}{x^2 + a^2}$ ; з)  $\frac{1}{1+x^2} (x \neq 1)$ ;
- $\arctg \frac{1+x}{1-x} - \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \pi/4 & \text{при } x < 1, \\ -3\pi/4 & \text{при } x > 1; \end{cases}$  и)  $\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} (x < -1, x > 1)$ ;
- $\operatorname{sgn} \cos x (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z})$ ; 1 ( $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ); к) 1 ( $-1 < x < 1$ ); 1;
- и)  $\frac{a^2 + b^2}{(x+a)(x^2+b^2)} (x > -a)$ ;  $\sqrt{a^2 - x^2} (-a < x < a)$ ; м)  $-\frac{\arccos x}{x^2} (0 < |x| < 1)$ ;
- $\frac{x \ln x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} (x > 1)$ ; н)  $\frac{x \arcsin x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} (-1 < x < 1)$ ;  $\frac{e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$ ; о)  $\frac{1}{2(1 + x^2)}$ ;
- $(\sin x)^{\cos x - 1} (\cos^2 x - \sin^2 x \ln \sin x) (2\pi n < x < \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z})$ ;  $\frac{\operatorname{ch}(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x} (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z})$ ;  $-\frac{\sin x}{\operatorname{ch}^2(\cos x)}$ ; п)  $\operatorname{cth} x (x > 0)$ ;  $\operatorname{tg} x / \ln 10$ ; 1/  $\operatorname{ch} 2x$ ;  $-1/\operatorname{ch} x (x > 0)$ .
12. а)  $\frac{\varphi\varphi' + \psi\psi'}{\sqrt{\varphi^2 + \psi^2}} (\varphi^2 + \psi^2 \neq 0)$ ; б)  $\frac{\psi'\varphi \ln \varphi - \varphi'\psi \ln \psi}{\varphi\psi \ln^2 \varphi}$ ; в)  $2xf'(x^2) - \frac{2}{x^3}f'(-x^2) (x \neq 0)$ ; г)  $f'(f(x)f'(x))$ . 13. а)  $\frac{f(0) + f'(0)}{f'(0)}$ ; б)  $f(0)/f'(0)$ .
14. а)  $e^{f'(a)/f(a)}$ ; б)  $e^{2\sqrt{a}f'(a)/f(a)}$ . 15. а)  $a^n f'(a) - na^{n-1} f(a)$ ; б)  $g(a)f'(a) - f(a)g'(a)$ ; в)  $[(\ln a)f'(a) - (1/a)f(a)]/g'(a)$ . 18. а) Нет,  $(uv)'|_{x=0} = 0$ ; б) да,  $(uv)'|_{x=1} = \frac{1}{2}$ ; в) да,  $(uv)'|_{x=1} = \cos 1$ ; г) нет,  $(uv)'|_{x=0} = 0$ ; д) нет,  $(uv)'|_{x=0} = 0$ ; е) нет,  $(uv)'|_{x=n} = 0$ ; ж) нет,  $(uv)'|_{x=n} = 0$ . 19. I. а) Да; б) нет. II. а) Нет; б) нет. 20. а) В точках  $x$  таких, что  $f(x) = 0$  и  $f'(x) \neq 0$ ; б) в точках  $x$  таких, что  $f(x) = g(x)$  и  $f'(x) \neq g'(x)$ ; в) в точках  $x$  таких, что  $f(x) = \max_{[a,x]} f(t)$  и  $f'(x) \neq 0$ . 21. Нет. 22.  $\star$  Для  $P_n(x)$  рассмотрите  $(x + x^2 + \dots + x^n)'$ . 23. а)  $-\infty < t < \infty$ ,  $f'(x) = 2t/1|_{t=x} = 2x$ ,  $f(x) = x^2$  ( $-\infty < x < \infty$ ); б)  $0 \leq t \leq \pi/2$ ,  $f'(x) = (\sin^2 t)' / (\cos^2 t)'|_{t=\arccos \sqrt{x}} = -1$  ( $t \neq 0, t \neq \pi/2$ )
- $(0 < x < 1)$ ,  $f(x) = 1 - x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ); в)  $0 \leq t \leq \pi$ ,  $f'(x) = \frac{b \cos t}{-a \sin t}|_{t=\arccos(x/a)} = -\frac{b}{a} \frac{\cos t}{\sqrt{1 - \cos^2 t}}|_{\substack{\cos t=x/a \\ t \neq 0, t \neq \pi}} = -\frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} (-a < x < a)$ ,  $f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$  ( $-a \leq x \leq a$ ); касательная:  $x = a$ , нормаль:  $y = 0$ ; г)  $0 \leq t < \infty$ ,  $f'(x) = \frac{b \operatorname{ch} t}{a \operatorname{sh} t}|_{0 < t < \infty} = \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} (x > a)$ ,  $f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$  ( $x \geq a$ ); касательная:  $x = a$ , нормаль:  $y = 0$ ; е)  $-\infty < t < \infty$ ,  $f'(x) = \frac{2e^{2t}}{e^t}|_{t=\ln x} = 2x$ ,  $f(x) = x^2$

- ( $0 < x < \infty$ ). 27. а)  $|\mathbf{v}| = \sqrt{18}$ ,  $\cos X = \cos Y = 1/\sqrt{18}$ ,  $\cos Z = 4/\sqrt{18}$ ;  
 б)  $|\mathbf{v}| = \sqrt{R^2 + h^2}$ ,  $\cos X = 0$ ,  $\cos Y = -R/\sqrt{R^2 + h^2}$ ,  $\cos Z = h/\sqrt{R^2 + h^2}$ ;  
 в)  $|\mathbf{v}| = \sqrt{14}$ ,  $\cos X = 1/\sqrt{14}$ ,  $\cos Y = 2/\sqrt{14}$ ,  $\cos Z = 3/\sqrt{14}$ ; г)  $|\mathbf{v}| = 2,9$ ,  
 $\cos X = 2/29$ ,  $\cos Y = 25/29$ ,  $\cos Z = 10\sqrt{2}/29$ . 28. а)  $\Delta y = \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ ,  
 где  $\alpha(\Delta x) = \begin{cases} \frac{e^{\Delta x} - 1 - \Delta x}{\Delta x} & \text{при } \Delta x \neq 0, \\ 0 & \text{при } \Delta x = 0; \end{cases}$  б)  $\Delta y = \alpha(\Delta x)\Delta x$ , где  $\alpha(\Delta x) =$   
 $= \begin{cases} \frac{\sin(\pi/2 + \Delta x) - 1}{\Delta x} & \text{при } \Delta x \neq 0, \\ 0 & \text{при } \Delta x = 0; \end{cases}$  в)  $\Delta y = \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ , где  $\alpha(\Delta x) =$   
 $= \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} \Delta x - \Delta x}{\Delta x} & \text{при } \Delta x \neq 0, \\ 0 & \text{при } \Delta x = 0. \end{cases}$  29.  $\Delta y = \Delta x + 2(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$ ;  $dy = \Delta x$ ;  
 а)  $\Delta y = 0,010201$ ,  $dy = 0,01$ ; б)  $\Delta y = 0,121$ ,  $dy = 0,1$ ; в)  $\Delta y = 4$ ,  $dy = 1$ ;  
 г)  $\Delta y = 48$ ,  $dy = 3$ . 30.  $\Delta s = 5\Delta t + 2\Delta t^2$ ,  $ds = 5\Delta t$ ; а)  $\Delta s = 0,52$ ,  $ds =$   
 $= 0,5$ ; б)  $\Delta s = 1,08$ ,  $ds = 1$ ; в)  $\Delta s = 7$ ,  $ds = 5$ . 31. а)  $\frac{dx}{2\sqrt{x}}$  ( $x > 0$ ); б)  $-\frac{dx}{x^2}$   
 $(x \neq 0)$ ; в)  $\frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ; г)  $\frac{dx}{x^2 - 1}$  ( $x \neq \pm 1$ ); д)  $\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$  ( $-a < x < a$ ); е)  $\frac{dx}{x^2 + a^2}$ ;  
 ж)  $(1 + 2x)e^{2x}dx$ ; з)  $x \cos x dx$ . 32. а)  $dy|_{x=0} = dx$ ,  $dy|_{x=1} = dx$ ; б)  $dy|_{x=0} = dx$ ,  
 $dy|_{x=1} = \frac{1}{2}dx$ ; в)  $dy|_{x=0} = dx$ ,  $dy|_{x=1} = e dx$ ; г)  $dy|_{x=0} = \frac{\pi}{2}dx$ ,  $dy|_{x=1} = 0$ ;  
 д)  $dy|_{x=0} = 0$ ,  $dy|_{x=1} = -\frac{\pi}{2}dx$ . 34. Равенства б) и в). 35. а)  $-0,8747$ ; б)  $0,5121$   
 рад, или  $29^\circ 20'$ ; в)  $1,04$ ; г)  $1,0033$ ; д)  $0,83$  рад, или  $47^\circ 33'$ ; е)  $1,2$ . 36. а)  $2,08$ ;  
 б)  $3,9961$ ; в)  $2,0045$ . 37.  $f'(a)/2$ . 38. а)  $(12x - 8x^3)e^{-x^2}$ ; б)  $-a^{10} \sin ax$ ;  
 в)  $k^4 e^{kx}$ ; г)  $12x f''(x^2) + 8x^3 f'''(x^2)$ ; д)  $e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$ ; е)  $\varphi'''(x) \times$   
 $\times f'(\varphi(x)) + 3\varphi'(x)\varphi''(x)f''(\varphi(x)) + \varphi^3(x)f'''(\varphi(x))$ ; ж)  $-\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots \cdot 17}{2^{10} x^9 \sqrt{x}}$  ( $x >$   
 $> 0$ ); з)  $\frac{720}{(x-1)^7}$  ( $x \neq 1$ ); и)  $2^{20}(x^2 \sin 2x - 20x \cos 2x - 95 \sin 2x)$ ; к)  $5^{14}(5x^3 -$   
 $- 126x) \sin 5x - 3 \cdot 5^{13}(75x^2 - 182) \cos 5x$ ; л)  $-\frac{2 \cdot 8!}{(x+1)^9}$  ( $x \neq -1$ ); м)  $\frac{1}{2} \cdot 30! \times$   
 $\times \left[ \frac{1}{(x-1)^{31}} + \frac{1}{(x+1)^{31}} \right]$  ( $x \neq \pm 1$ ); н)  $5^{10}(5x+11)e^{5x}$ ; о)  $-\frac{9!}{x^{10}}$  ( $x > 0$ ).  
 39. а)  $\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!(a/2)^n}{(ax+b)^{(2n-1)/2}}$  ( $ax+b > 0$ ); б)  $\frac{(-1)^{n-1}(ad-bc)c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}n!$  ( $cx+$   
 $+d \neq 0$ ); в)  $-2^{n-1} \cos(2x + n\frac{\pi}{2})$ ; г)  $2^{n-1} \cos(2x + n\frac{\pi}{2})$ ; д)  $\frac{3}{4} \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) -$   
 $- \frac{3^n}{4} \sin\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right)$ ; е)  $\frac{3}{4} \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3^n}{4} \cos\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right)$ ; ж)  $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)^n \times$   
 $\times \cos[(\alpha - \beta)x + n\frac{\pi}{2}] - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^n \cos[(\alpha + \beta)x + n\frac{\pi}{2}]$ ; з)  $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)^n \times$   
 $\times \cos[(\alpha - \beta)x + n\frac{\pi}{2}] + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^n \cos[(\alpha + \beta)x + n\frac{\pi}{2}]$ ; и)  $a^{n-1} \left[ ax \sin\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right) + n \sin\left(ax + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) \right]$ ; ж)  $a^{n-2} \left[ a^2 x^2 \cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right) + 2nax \cos\left(ax + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) + n(n-1) \cos\left(ax + (n-2)\frac{\pi}{2}\right) \right]$ ; л)  $k^{n-2} e^{kx} [(ax^2 + bx + c)k^2 +$   
 $+ (2ax + b)nk + n(n-1)a]$ ; м)  $(-1)^{n-1} a^n (n-1)! \left[ \frac{1}{(ax+b)^n} - \frac{1}{(ax-b)^n} \right]$

$\left(\frac{ax+b}{ax-b} > 0\right)$ ; н)  $x \operatorname{ch} x + n \operatorname{sh} x$ , если  $n$  нечетное,  $x \operatorname{sh} x + n \operatorname{ch} x$ , если  $n$  четное; о)  $x^2 \operatorname{sh} x + 2nx \operatorname{ch} x + n(n-1) \operatorname{sh} x$ , если  $n$  нечетное,  $x^2 \operatorname{ch} x + 2nx \times \operatorname{sh} x + n(n-1) \operatorname{ch} x$ , если  $n$  четное; п)  $a_0 n!$ . 41. а)  $f''(x) = 2$ ;  $f'''(x) = 0$ ; б)  $f''(x) = f'''(x) = 0$ ; в)  $f''(x) = -\frac{ab}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$ ;  $f'''(x) = -\frac{3abx}{(a^2 - x^2)^{5/2}}$ ; г)  $f''(x) = -\frac{ab}{(x^2 - a^2)^{3/2}}$ ;  $f'''(x) = \frac{3abx}{(x^2 - a^2)^{5/2}}$ ; д)  $f''(x) = -\frac{1}{4a \sin^4(t/2)}$ ;  $f'''(x) = \frac{\cos(t/2)}{4a^2 \sin^4(t/2)}$ , где  $t = \varphi^{-1}(x)$  — обратная функция к функции  $x = a(t - \sin t)$  ( $t \neq 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ); е)  $f''(x) = 2$ ,  $f'''(x) = 0$ . 42.  $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$ ,  $(f^{-1}(y))'' = -\frac{f''(x)}{f'^3(x)}$ ,  $(f^{-1}(y))''' = \frac{3f''^2(x) - f'(x)f'''(x)}{f'^5(x)}$ . 43. а)  $|\mathbf{r}''(2)| = 2$ ,  $\cos X = \cos Y = 0$ ,  $\cos Z = 1$ ; б)  $|\mathbf{r}''(\pi)| = 1$ ,  $\cos X = 1$ ,  $\cos Y = \cos Z = 0$ ; в)  $|\mathbf{r}''(1)| = 2\sqrt{10}$ ,  $\cos X = 0$ ,  $\cos Y = 1/\sqrt{10}$ ,  $\cos Z = 3/\sqrt{10}$ ; г)  $|\mathbf{r}''(2,5)| = \sqrt{641}/25$ ,  $\cos X = -4/\sqrt{641}$ ,  $\cos Y = 25/\sqrt{641}$ ,  $\cos Z = 0$ . 44. а)  $6dx^3$ ; б)  $\frac{-15dx^4}{16(x-1)^{7/2}}$  ( $x > 1$ ); в)  $-\frac{6dx^5}{x^4}$  ( $x > 0$ ); г)  $(10 \cos x - x \sin x)dx^{10}$ . 45. а)  $\operatorname{ch} x \times dx^n$ , если  $n$  нечетное;  $\operatorname{sh} x dx^n$ , если  $n$  четное; б)  $a^n \operatorname{sh}(ax) dx^n$ , если  $n$  нечетное;  $a^n \operatorname{ch}(ax) dx^n$ , если  $n$  четное; в)  $(-1)^{n-1} 2 \cdot (n-3)! \frac{dx^n}{x^{n-2}}$  ( $x > 0$ ,  $n \geq 3$ ). 47.  $\varphi(x_0) \cdot n!$ .

## Глава V

1.  $2\sqrt{x} + \ln|x|$ .
2.  $(1/12)(x^3 + 1)^4$ .
3.  $2\sqrt{3} \operatorname{arctg}(x/\sqrt{3}) - x$ .
4.  $27x - 9x^3 + 9x^5/5 - x^7/7$ .
5.  $(-1/57)(3x+2)^{-19}$ .
6.  $15^x / \ln 15$ .
7.  $4(x^2 + 7)/(7\sqrt[4]{x})$ .
8.  $\ln|x| - 1/(4x^4)$ .
9.  $x + 2 \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$ .
10.  $-\operatorname{ctg} x - x$ .
11.  $3x/2 - (5/4) \ln|x| + + 3/2$ .
12.  $-\frac{2}{\ln 5} \left( \frac{1}{5} \right)^x + \frac{1}{5 \ln 2} \left( \frac{1}{2} \right)^x$ .
13.  $x - \operatorname{th} x$ .
14.  $0,5 \operatorname{ch} 2x$ .
15.  $0,5 \operatorname{sh}(2x + 3)$ .
16.  $\frac{4^x}{\ln 4} + 2 \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9}$ .
17.  $\arcsin x + \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ .
18.  $(1/22)(2x - 3)^{11}$ .
19.  $(-\cos x + \sin x) \operatorname{sgn}(\cos x + \sin x)$ .
20.  $(-2/5)\sqrt{2 - 5x}$ .
21.  $\frac{1}{\sqrt{6}} \times \operatorname{arctg}(x\sqrt{3/2})$ .
22.  $(1/\sqrt{3}) \ln|x\sqrt{3} + \sqrt{3x^2 - 2}|$ .
23.  $(-1/2) \operatorname{cth}(2x + \pi/4)$ .
24.  $\operatorname{tg}(x/2)$ .
25.  $\operatorname{tg}(x/2 - \pi/4)$ .
26.  $(1/4)(1 + x^3)^{4/3}$ .
27.  $-0,5 \cos(2x + 3)$ .
28.  $(1/4) \operatorname{arctg}(x^2/2)$ .
29.  $2 \operatorname{arctg}\sqrt{x}$ . ★ Воспользуйтесь тем, что  $dx/\sqrt{x} = 2d(\sqrt{x})$ .
30.  $1,5(1 + 2x)^{1/3}$ .
31.  $-\arcsin(1/|x|)$ .
32.  $2 \operatorname{sgn} \ln(\sqrt{|x|} + + \sqrt{|1+x|})$ ,  $x(1+x) > 0$ .
33.  $2\sqrt{\ln x}$ .
34.  $(-1/2)e^{-x^2}$ .
35.  $(1/3) \ln^3 x$ .
36.  $\ln|2 + \ln x|$ .
37.  $(1/30)(1 + 27x)^{10/9}$ .
38.  $0,75(\ln x)^{4/3}$ .
39.  $(1/6) \sin^6 x$ .
40.  $(3/2) \sqrt[3]{1 - \sin 2x}$ .
41.  $(-1/\sqrt{2}) \ln|\sqrt{2} \cos x + \sqrt{\cos(2x)}|$ .
42.  $\ln|\operatorname{tg}(x/2)|$ .
43.  $\ln|\operatorname{th}(x/2)|$ .
44.  $0,5(\operatorname{arctg} x)^2$ .
45.  $\frac{1}{4} \ln^2 \frac{1+x}{1-x}$ .
46.  $-\frac{1+55x^2}{6600}(1-5x^2)^{11}$ .
47.  $-\frac{1}{15}(8+4x^2+3x^4)\sqrt{1-x^2}$ .
48.  $\left( \frac{2}{3} - \frac{4}{7} \sin^2 x + \frac{2}{11} \sin^4 x \right) \sqrt{\sin^3 x}$ .
49.  $-x - 2e^{-x/2} + 2 \ln(1 + e^{x/2})$ .
50.  $x - 2 \ln(1 + \sqrt{1 + e^x})$ .
51.  $(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2$ .
52.  $0,5[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin(x/a)]$ .
53.  $-\sqrt{a^2 - x^2} + a \arcsin(x/a)$ .
54.  $0,5 \times [x\sqrt{a^2 + x^2} - a^2 \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})]$ .
55.  $\sqrt{x^2 - a^2} - 2a \ln(\sqrt{x-a} + \sqrt{x+a})$ ,

- если  $x > a$ ;  $-\sqrt{x^2 - a^2} + 2a \ln(\sqrt{-x+a} + \sqrt{-x-a})$ , если  $x < -a$ . 56.  $\ln|x| + \sqrt{x^2 + a^2}$ . 57.  $\ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}|$ . 58.  $x(\ln x - 1)$ . 59.  $\frac{2}{3}x^{3/2} \left( \ln^2 x - \frac{4}{3} \ln x + \frac{8}{9} \right)$ . 60.  $-0,5(x^2 + 1)e^{-x^2}$ . 61.  $\frac{1-2x^2}{4} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x$ . 62.  $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ . 63.  $-\frac{\arcsin x}{x} - \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \right|$ . 64.  $\ln \operatorname{tg}(x/2) - \cos x \ln \operatorname{tg} x$ . 65.  $0,5[(1+x^2)(\operatorname{arctg} x)^2 - 2x \operatorname{arctg} x + \ln(1+x^2)]$ . 66.  $\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - x$ . 67.  $0,5[e^x \sqrt{e^{2x}+1} + \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}+1})]$ . 68.  $0,5x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$ . 69.  $\frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax}$ . 70.  $(1/8)e^{2x}(2 - \sin 2x - \cos 2x) +$   
 $71. \ln|x-2| + \ln|x+5|$ . 72.  $x + (1/6) \ln|x| - (9/2) \ln|x-2| + (28/3) \ln|x-3|$ . 73.  $-\frac{5x-6}{x^2-3x+2} + 4 \ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right|$ . 74.  $\operatorname{arctg} x + \frac{5}{6} \ln \frac{x^2+1}{x^2+4}$ . 75.  $-\frac{1}{x-2} - \operatorname{arctg}(x-2)$ . 76.  $\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ . 77.  $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$ . 78.  $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$ . 79.  $\frac{1}{4} \ln \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$ . 80.  $\frac{2}{5} \ln \frac{x^2+2x+2}{x^2+x+1/2} + \frac{8}{5} \operatorname{arctg}(x+1) - \frac{2}{5} \operatorname{arctg}(2x+1)$ . 81.  $\frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{6} \operatorname{arctg} x^3$ . 82.  $-\frac{1}{96(x-1)^{96}} - \frac{3}{97(x-1)^{97}} - \frac{3}{98(x-1)^{98}} - \frac{1}{99(x-1)^{99}}$ . 83.  $\frac{1}{12} \ln \frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}$ . 84.  $\frac{x^4}{4} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4+1}{(x^4+2)^4}$ . 85.  $\frac{1}{7} \ln \frac{|x|^7}{(1+x^7)^2}$ . 86.  $\frac{1}{\sqrt{3}} \times \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$ . 87.  $\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^4-x^2\sqrt{2}+1}{x^4+x^2\sqrt{2}+1}$ . 88.  $\operatorname{arctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3$ . 89.  $\frac{3}{4} \times \ln \frac{x\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2(1-\sqrt[6]{x}+2\sqrt{x})^3} - \frac{3}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}$ . 90.  $0,5(x^2 - x\sqrt{x^2-1} + \ln|x + \sqrt{x^2-1}|)$ . 91.  $-\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ . 92.  $\frac{2x-3}{4} \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{8} \ln \left( \frac{1}{2} + x + \sqrt{x^2+x+1} \right)$ . 93.  $-\ln \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right|$ . 94.  $R + \ln(x+1+R) - \sqrt{2} \times \ln \left| \frac{x+2+\sqrt{2}R}{x} \right|$ , где  $R = \sqrt{x^2+2x+2}$ . 95.  $-\frac{19+5x+2x^2}{6} \sqrt{1+2x-x^2} - 4 \arcsin \frac{1-x}{\sqrt{2}}$ . 96.  $\left( \frac{63}{256}x - \frac{21}{128}x^3 + \frac{21}{160}x^5 - \frac{9}{80}x^7 + \frac{x^9}{10} \right) \sqrt{1+x^2} - \frac{63}{256} \times \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ . 97.  $-\frac{1}{2x^2} \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}$ . 98.  $\frac{2x^2+1}{3x^3} \sqrt{x^2-1}$ . 99.  $\arcsin \frac{x-1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}+2x-x^2}{(1-x)\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}$ . 100.  $\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}} \right|$ . 101.  $\frac{1}{2} \arcsin \frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}} - \frac{1}{2} \times \ln \left| \frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1} \right|$ . 102.  $\frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}$ . 103.  $\frac{3}{2(2z+1)} + \frac{1}{2} \ln \frac{z^4}{|2z+1|^3}$ , где  $z = x + \sqrt{x^2+x+1}$ . 104.  $\ln \left| \frac{z-1}{z} \right| - 2 \operatorname{arctg} z$ , где  $z = \frac{1+\sqrt{1-2x+x^2}}{x}$ . 105.  $\frac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)} + \frac{2}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}+1+2z}{\sqrt{5}-1-2z} \right|$ , где  $z = -x + \sqrt{x(x+1)}$ .

- 106.**  $-\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{x^2 + 1}$  ★ Положите  $t = x + \frac{1}{x}$  **107.**  $-\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x\sqrt{2} + \sqrt{x^4 + 1}}{x^2 - 1} \right|$
- ★ Положите  $t = x - \frac{1}{x}$  **108.**  $(5/16)x - (1/4)\sin 2x + (3/64)\sin 4x + (1/48) \times \sin^3 2x$  **109.**  $(1/16)x - (1/64)\sin 4x + (1/48)\sin^3 2x$  **110.**  $1/(3\cos^3 x) - 1/\cos x$  **111.**  $(1/4)\operatorname{tg}^4 x - (1/2)\operatorname{tg}^2 x - \ln |\cos x|$  **112.**  $-2\sqrt{\operatorname{ctg} x} + (2/3) \times \sqrt{\operatorname{tg}^3 x}$  **113.**  $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{z^2 + z\sqrt{2} + 1}{z^2 - z\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{2}}{z^2 - 1}$ , где  $z = \operatorname{tg} x$  **114.**  $1/4x + 1/8\sin 2x + 1/(16)\sin 4x + 1/(24)\sin 6x$  **115.**  $-3/(16)\cos 2x + 3/(64)\cos 4x + 1/(48)\cos 6x - 3/(128)\cos 8x + 1/(192)\cos 12x$  **116.**  $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3\operatorname{tg}(x/2) + 1}{\sqrt{5}}$  **117. а)**  $\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$ , **б)**  $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \frac{\varepsilon + \cos x + \sqrt{1-\varepsilon^2} \sin x}{1 + \varepsilon \cos x}$  **118.**  $x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)$  **119.**  $-\frac{1}{6} \ln \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 - \sin x \cos x} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left( \frac{2\cos x - \sin x}{\sqrt{\sin x}} \right)$  **120.**  $\operatorname{arctg} \left( \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x \right)$

## Г л а в а VI

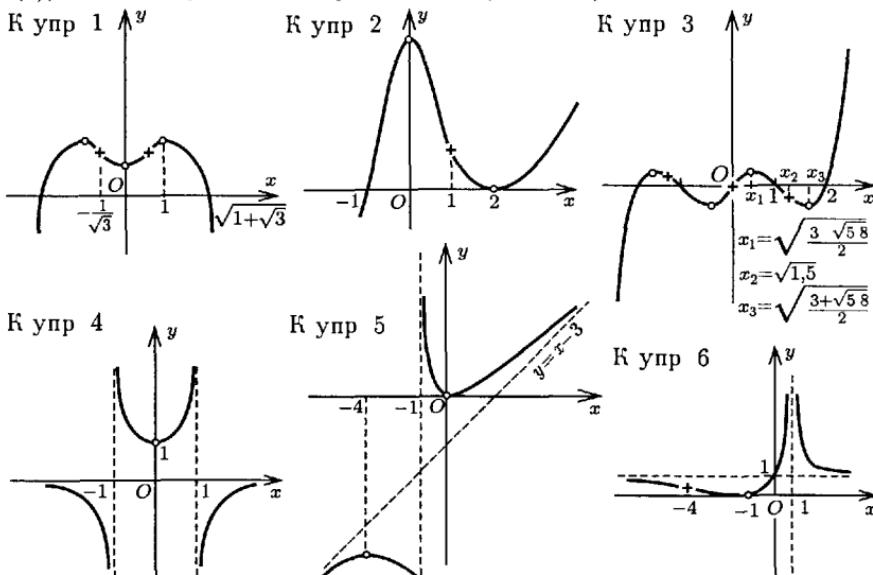
- 2. а)** Да, **б)** нет, **в)** нет, **г)** нет, **д)** да **4. а)** Нет, **б)** да **8. а)**  $\inf_{(0, +\infty)} f(x) = 0$  не достигается,  $\sup_{(0, +\infty)} f(x) = 1 = f(1)$ , **б)**  $\inf_{[-5, 10]} f(x) = 0 = f(0)$ ,  $\sup_{[-5, 10]} f(x) = 100 = f(10)$ , **в)**  $\inf_{[-\infty, +\infty]} f(x) = 0$ ,  $\sup_{[-\infty, +\infty]} f(x) = \pi/2$  не достигаются, **г)**  $\inf_{[0, \pi]} f(x) = -1 = f(\pi)$ ,  $\sup_{[0, \pi]} f(x) = \sqrt{2} = f(\pi/4)$ , **д)**  $\inf_{(0, 1)} f(x) = 0$ ,  $\sup_{(0, 1)} f(x) = 1/2$  не достигаются **13. а)** 4, **б)** 2 **17. а)**  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/|k|$ , **б)**  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/75$ , **в)**  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ , **г)**  $\delta(\varepsilon) = e^{-10}\varepsilon$  **18. а)** Равномерно непрерывна на (1, 2), но не является равномерно непрерывной на (0, 1), **б)** равномерно непрерывна на (0, 01, 1), но не является равномерно непрерывной на (0, 1), **в)** равномерно непрерывна, **г)** равномерно непрерывна, **ж)** равномерно непрерывна, **з)** не является равномерно непрерывной, **и)** равномерно непрерывна, **к)** не является равномерно непрерывной, **л)** равномерно непрерывна **22.**  $f(x) = \arcsin x$  на  $(-1, 1)$  **23.** Из равномерной непрерывности  $f(x)$  на  $(a, b)$  следует, что в точках  $a$  и  $b$  выполнено условие Коши существования предела функции. Поэтому функцию  $f(x)$  можно доопределить в точках  $a$  и  $b$  так, что она станет непрерывной на  $[a, b]$ , а значит, и ограниченной на  $[a, b]$  **27. а)** Убывает на  $(-\infty, -\frac{b}{2a})$ , возрастает на  $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$ , **б)** возрастает на  $(-\infty, +\infty)$ , **в)** возрастает на  $(-1, 1)$ , убывает на  $(-\infty, -1)$  и на  $(1, +\infty)$ , **г)** возрастает на  $(-\infty, +\infty)$ , **д)** возрастает на  $(2\pi n - \frac{2\pi}{3}, 2\pi n + \frac{2\pi}{3})$ , убывает на  $(2\pi n + \frac{2\pi}{3}, 2\pi n + \frac{4\pi}{3})$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , **е)** возрастает на  $(\frac{1}{2n+1,5}, \frac{1}{2n-0,5})$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , убывает на  $(-\infty, -2)$ , на  $(\frac{1}{2n+0,5}, \frac{1}{2n-0,5})$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $n \neq 0$ , и на  $(2, +\infty)$ , **ж)** возрастает на  $(0, 2/\ln 2)$ , убывает на  $(-\infty, 0)$  и на  $(2/\ln 2, +\infty)$ , **з)** возрастает на  $(0, n)$ , убывает на  $(n, +\infty)$  **28.** Возрастает при  $a \geq 1$ , убывает при  $a \leq -1$  **31. ★** Используйте метод примера 3 из § 3 **34.**  $c = 1/2$  или  $c = \sqrt{2}$  **37. ★** Используйте метод примера 5 из § 3 **39. ★** Воспользуйтесь теоремой 6 и результатом упр 23 **41.** Нет **42.** Рассмотрим функцию

$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ . Она непрерывна на  $[a, b]$  и дифференцируема в  $(a, b)$ , причем  $g(a) = g(b) = 0$ . Так как  $f(x)$  не является линейной функцией, то  $g'(x) \neq 0$  и, следовательно,  $g'(x) \neq 0$  в  $(a, b)$ . Отсюда следует, что  $\exists c_1, c_2 \in (a, b)$  такие, что  $g'(c_1) > 0$ , а  $g'(c_2) < 0$  (объясните, почему), откуда  $f'(c_1) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , а  $f'(c_2) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . Значит, в одной из точек  $c_i$  имеем  $|f'(c_i)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|$ , т. е.  $|f(b) - f(a)| < |f'(c_i)| \cdot |b - a|$ .

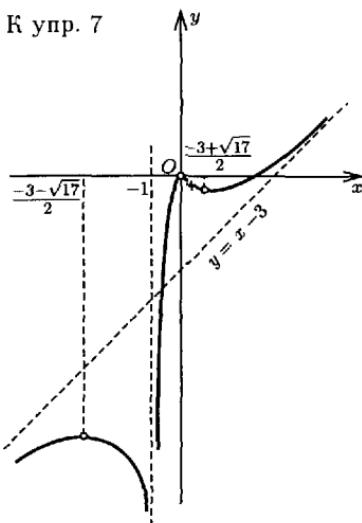
44. ★ Воспользуйтесь результатом упр. 43–45. 0 46. 0 47.  $\alpha/\beta$  48. –2  
 49. 1 50. 1/2 51.  $-1/3$  52. 1 53. 0 54. 1 55. 1/6 56. 0 57.  $a^a (\ln a - 1)$   
 58.  $e^{2/\pi}$  59.  $1/e$  60. 1 61.  $e^{-1/6}$  62.  $e^{-1/3}$  63.  $1/2$  64.  $1/2$  65. 0 66.  $-e/2$   
 67.  $a^a$  68. 1 69. а)  $1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ , б)  $1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5)$ , в)  $x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ , г)  $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$ ,  
 д)  $-\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + o(x^6)$ , е)  $x - \frac{x^7}{18} - \frac{x^{13}}{3240} + o(x^{13})$ , ж)  $a + \frac{x}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2a^{2n-1}} + o(x^2)$ , з)  $1 - \frac{1}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{7}{16}x^3 + o(x^3)$  70. а)  $1 + 2(x-1) + (x-1)^2$ , б)  $1 + (x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$ , в)  $1 - \frac{\pi^2}{8} \times (x-1)^2 + \frac{\pi^4}{384}(x-1)^4 + o((x-1)^4)$  71. а) Меньше  $1/3840$ , б) меньше  $2 \times 10^{-6}$ , в) меньше  $1/16$  72. а) 2,080, б) 3,08000, в) 0,3090, г) 0,01745241  
 д) 0,095, е) 1,22140, ж) 0,99452 73. а)  $-1/12$ , б)  $-2$ , в) 1, г)  $-1/4$ , д)  $1/2$ ,  
 е) 0, ж)  $1/3$ , з)  $19/90$  74. а)  $a = -2$ ,  $b = 3/2$ , б)  $a = b = -2$ , в)  $a = 1$ ,  $b = 2$  или  $a = -1$ ,  $b = -2$  75.  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) = -1/3$

## Глава VII

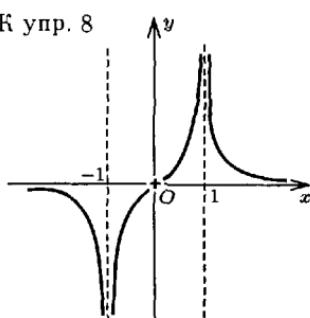
На графиках функций экстремальные точки обозначены “кружками” (○), а точки перегиба — “крестиками” (× или +)



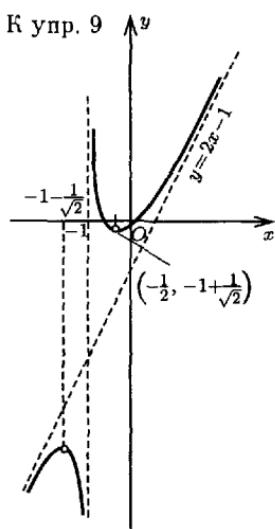
К упр. 7



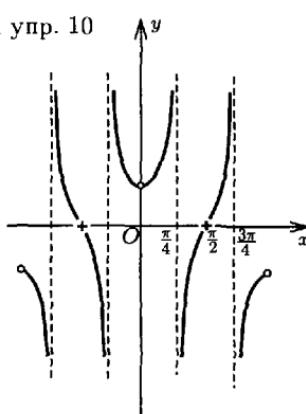
К упр. 8



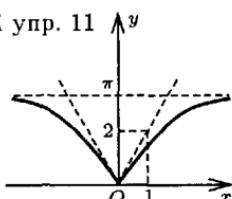
К упр. 9



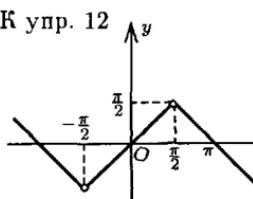
К упр. 10



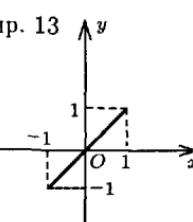
К упр. 11

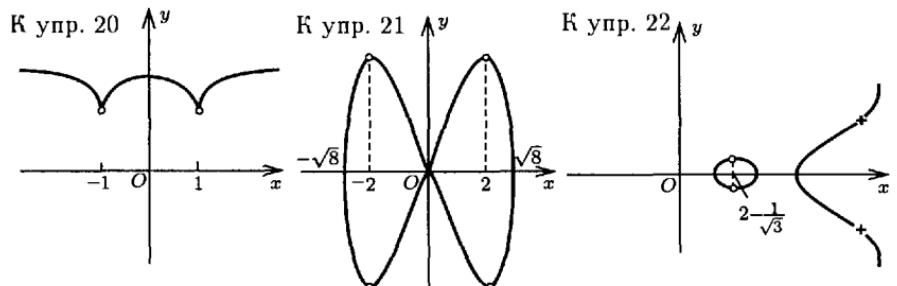
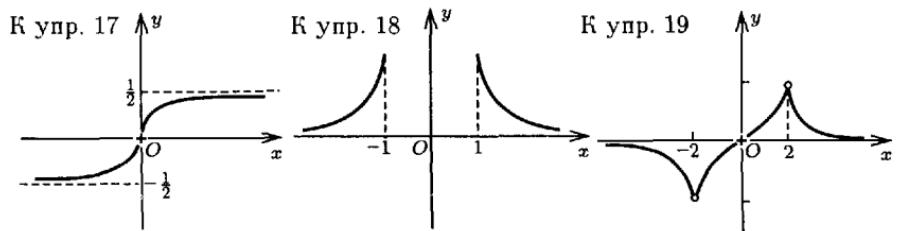
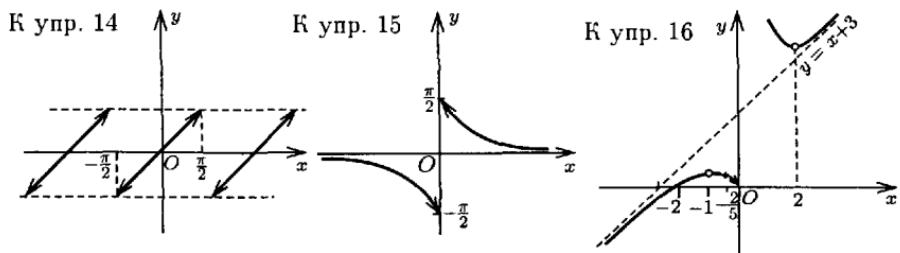


К упр. 12

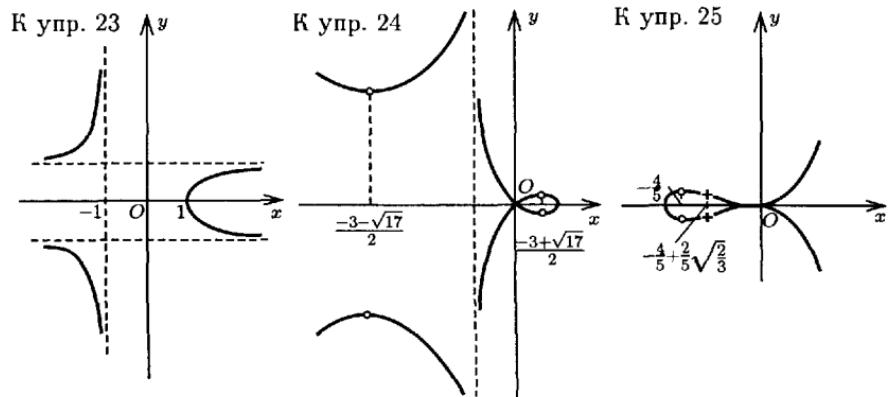


К упр. 13

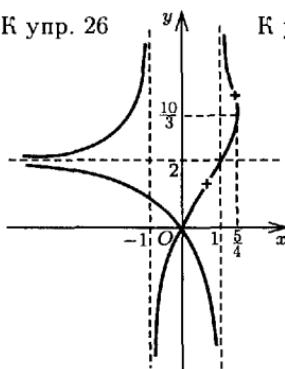
 $(0,0)$  — угловая точка $(\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2})$  и  $(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, -\frac{\pi}{2})$  —  
угловые точки



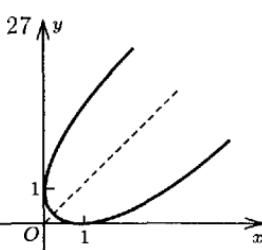
(0, 0) — угловая точка



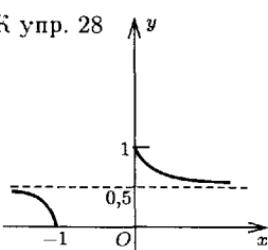
К упр. 26



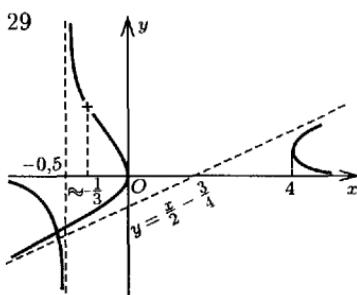
К упр. 27



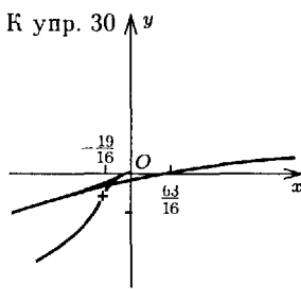
К упр. 28



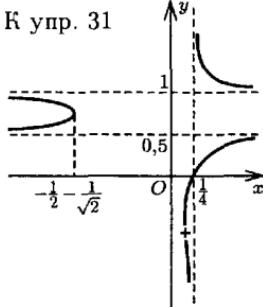
К упр. 29



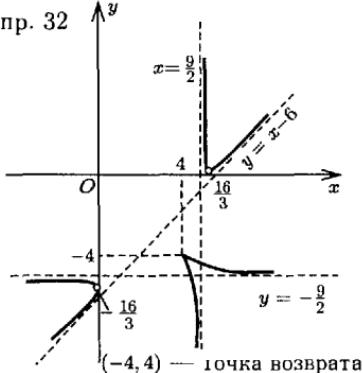
К упр. 30



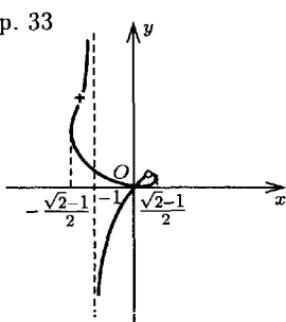
К упр. 31



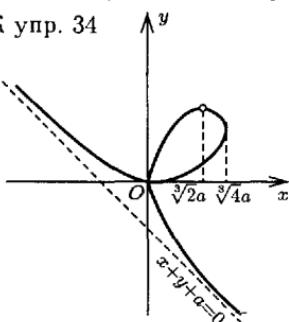
К упр. 32

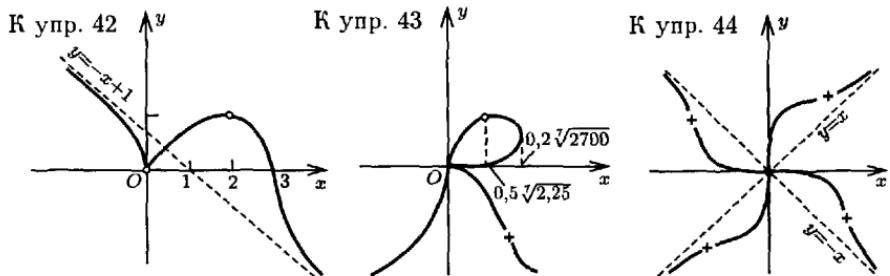
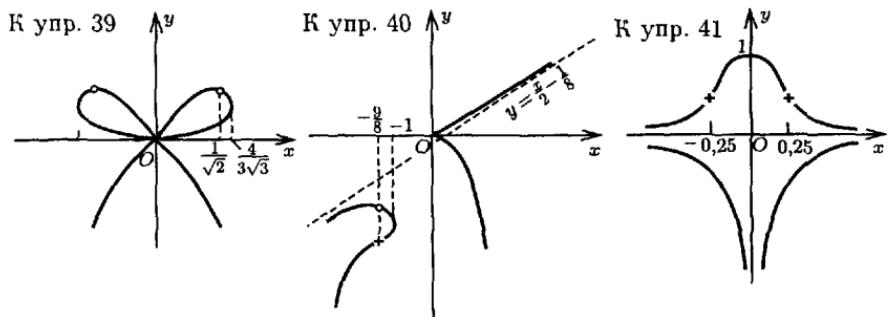
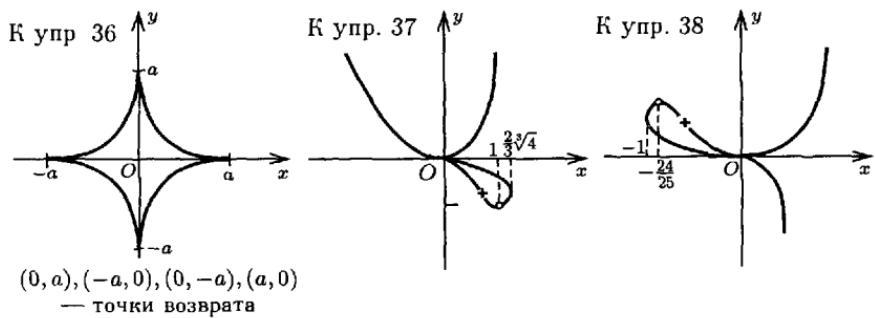
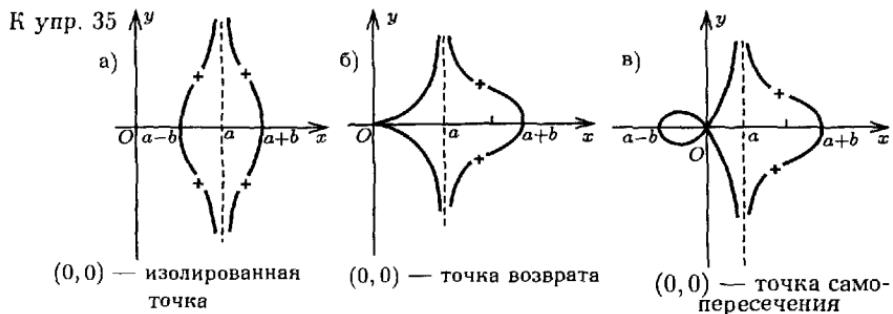


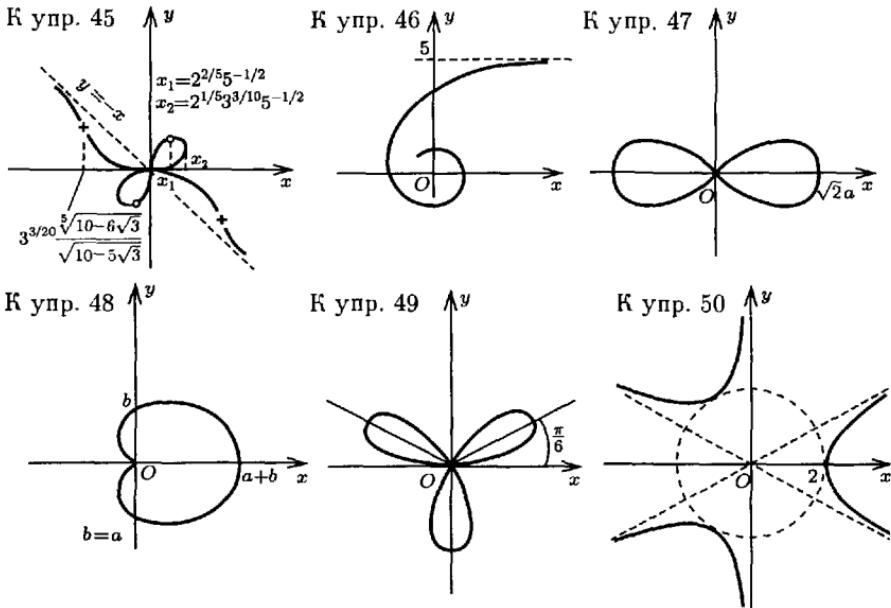
К упр. 33



К упр. 34







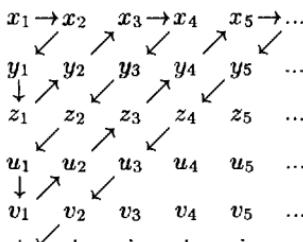
## Глава VIII

4. ★ Используйте то, что  $x = 0$  — предел точек разрыва. 6. а) Да; б) нет; в) нет; г) да, с учетом замечания в п. 4 § 1; д) да; е) нет. 7. Нет; да; нет; да. 9. а) Да; б) нет. 10. а)  $2/\pi$ ; 0;  $(2/\pi) \cos \varphi_0$ ; б)  $-1$ ;  $-1/3$ ;  $1/2$ ; 0. 11.  $2/3$ ;  $(1/15)10^{3/2}$ ;  $(1/150)100^{3/2}$ ; б) 10; в)  $(1/2) \cos \varphi$ . 12.  $v_{cp} = (v_0 + v_1)/2$ , где  $v_1 = 2gh$  — конечная скорость тела. 11.  $i_0^2/2$ ;  $i_0^2/2$ ;  $i_0^2/2$  —  $-(i_0^2/2)(1/t_0)(T/4\pi)[\sin(4\pi t_0/T + 2\varphi) - \sin 2\varphi]$ ;  $i_0^2/2$ . 14. а) 0; б)  $\sin(b^2)$ ; в)  $-\sin(a^2)$ ; г)  $2x\sqrt{1+x^4}$ ; д)  $2x\sqrt{1+x^4}$ ; е)  $3x^2/\sqrt{1+x^6} - 2x/\sqrt{1+x^4}$ ; ж)  $3x^2/\sqrt{1+x^6} - 2x/\sqrt{1+x^4}$ ; з)  $3x^2/\sqrt{1+x^6}$ ; и)  $3t^2/\sqrt{1+t^{12}}$ ; к) 0; л)  $-\int_{t^2}^x (x^2 + t^4)^{-3/2} dx + 3x^2/\sqrt{x^2 + x^{12}}$ . 15. а) 1; б) 1; в)  $\pi(2 \sin \alpha)$ . 16. а)  $\pi\sqrt{2}$ ; б)  $2/3$ . 17.  $5/6$ . 18. а)  $0,5 \ln(e/2)$ ; б)  $4\pi$ ; в) 1. 19. а)  $1/6$ ; б)  $(1/\sqrt{2}) \ln[(9 + 4\sqrt{2})/7]$ ; в)  $2 - \pi/2$ ; г)  $\pi^2/4$ . 20. Нет. 21. а) Да,  $\pi/4$ ; б) да,  $\pi/4$ ; в) да, хотя в этом промежутке нарушено условие теоремы 10,  $\pi/4$ . 24. а)  $0,5 \ln 3 - \pi/2\sqrt{3}$ ; б)  $(5/27)e^3 - 2/27$ ; в)  $4\pi/3 - \sqrt{3}$ ; г)  $2\pi(1/\sqrt{3} - 1/2\sqrt{2})$ ; д)  $1/6$ ; е)  $\pi^3/6 - \pi/4$ . 27. а)  $\frac{\pi(2m)!(2n)!}{2^{2m+2n+1} m! n! (m+n)!}$ ; б) 0, если  $n$  — четное число;  $\pi$ , если  $n$  — нечетное число; в)  $\pi/2^n$ ; г)  $(\pi/2^n) \sin(\pi n/2)$ . 28. а)  $(8/27)(10\sqrt{10} - 1)$ ; б)  $(e^2 + 1)/4$ ; в)  $\ln \operatorname{tg}(\pi/4 + a/2)$ ; г)  $4a[1 + \sqrt{3} \ln(1 + \sqrt{3})/\sqrt{2}]$ ; д)  $6a$ ; е)  $1 + [\ln(1 + \sqrt{2})]/\sqrt{2}$ ; ж)  $32a$ ; з)  $\pi a \sqrt{1 + 4\pi^2} + (a/2) \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2})$ ; и)  $8a$ ; к)  $3\pi a/2$ ; л)  $19/3$ . 30. а)  $(ab/2)[\arcsin(x_1/a) - \arcsin(x_0/a)] - [b/2a] \times (x_1 \sqrt{a^2 - x_1^2} - x_0 \sqrt{a^2 - x_0^2})$ ; б)  $9/2$ ; в)  $1/3 + 2/\pi$ ; г)  $4a^3/3$ ; д)  $0,5 \operatorname{cth}(\pi/2)$ . 31. а)  $(a^2/3)(4\pi^3 + 3\pi)$ ; б)  $6\pi a^2$ . 32. а)  $3\pi a^2/2$ ; б)  $\pi a^2/4$ ; в)  $11\pi$ ; г)  $2/3$ .

33. а)  $3a^2/2$ ; б)  $a^2$ . 34.  $(\pi h/6)[(2A+a)B + (A+2a)b]$ . 36. а)  $2abc/3$ ; б)  $4\pi abc/3$ ; в)  $8\pi abc/3$ ; г)  $16a^3/3$ ; д)  $2\pi a^3/3 - 8a^3/9$ . 37. а)  $3\pi ab^2/7$ ; б)  $16\pi/15$ ; в)  $8\pi/3$ ; г)  $\pi^2/2$ ; д)  $2\pi^2$ ; е)  $5\pi^2 a^3$ ; ж)  $6\pi^3 a^3$ . 38.  $2a^2$ ;  $\pi a^3/2$ . 39.  $(p^2/8)[\sqrt{2} + 5 \ln(1 + \sqrt{2})]$ . 40.  $bh^2/6$ ;  $bh^3/12$ . 41.  $M_x = \pi ab^3/4$ ;  $M_y = \pi a^3 b/4$ . 42.  $3RM/16$ . 45.  $4\pi^2$ . 46.  $x_0 = (a \sin \alpha)/\alpha$ ;  $y_0 = 0$ . 47.  $x_0 = 9a/20$ ;  $y_0 = 9a/20$ . 48.  $x_0 = 0$ ;  $y_0 = 0$ ;  $z_0 = 3a/8$ . 49.  $\varphi_0 = 0$ ,  $r_0 = 5a/6$ .

## Глава IX

1. а) Достаточно каждому числу  $n$  из первого множества поставить в соответствие число  $2n$  из второго множества; б) функция  $y = (b-a)x + a$  осуществляет взаимно однозначное соответствие между элементами сегментов  $[0, 1]$  и  $[a, b]$ ; в) функция  $y = \operatorname{tg} \frac{\pi(2x - a - b)}{2(b - a)}$  осуществляет взаимно однозначное соответствие между элементами интервала  $(a, b)$  и числовой прямой  $\mathbf{R}$ . 2. б) Элементы объединения счетного числа счетных множеств  $\{x_i\}, \{y_i\}, \{z_i\}, \{u_i\}, \{v_i\}, \dots, \{w_i\}, \dots$  можно занумеровать по следующей схеме:



4. ★ а) Используйте метод примера 2 из § 1; б) воспользуйтесь равенством  $A = (A \setminus B) + AB$  (см. упр. 5) и результатом упр. 4, а); в) воспользуйтесь результатом упр. 4, б); г) воспользуйтесь результатом упр. 4, б).
5. а) Докажем, что: 1°) любой элемент  $x$  из множества  $(A+B)C$  принадлежит также множеству  $(AB+BC)$ ; 2°) обратно: любой элемент  $x$  из множества  $(AB+BC)$  принадлежит также множеству  $(A+B)C$ . 1°. Если  $x \in (A+B)C$ , то  $x \in (A+B)$  и  $x \in C$ . Так как  $x \in (A+B)$ , то  $x$  принадлежит хотя бы одному из множеств  $A$  или  $B$ . Пусть, например,  $x \in A$ . Тогда  $x \in AC$  и, следовательно,  $x \in (AC+BC)$ . 2°. Если  $x \in (AC+BC)$ , то  $x$  принадлежит хотя бы одному из множеств  $AC$  или  $BC$ . Пусть, например,  $x \in AC$ . Тогда  $x \in A$  и  $x \in C$ . Значит,  $x \in (A+B)$  и  $x \in (A+B)C$ .
6. Докажем, что любой элемент  $x$  из множества  $\bigcup_k \overline{A_k}$  принадлежит также множеству  $\bigcap_k \overline{A_k}$ . Если  $x \in \bigcup_k \overline{A_k}$ , то  $x \notin \bigcup_k \overline{A_k}$  и, следовательно,  $x \notin \overline{A_k} \forall k$ . Поэтому  $x \in \overline{A_k} \forall k$ , а значит,  $x \in \bigcap_k \overline{A_k}$ . Остается доказать, что любой элемент  $x$  из множества  $\bigcap_k \overline{A_k}$  принадлежит также множеству  $\bigcup_k \overline{A_k}$ . Сделайте это самостоятельно.
7. Если предположить, что какая-то точка  $x \in G$  не является внутренней точкой  $G$ , то  $x$  окажется предельной точкой  $E$  (объясните, почему) и, следовательно,  $x \in E$ . Но это невозможно, так как  $GE = \emptyset$ . Таким образом, любая точка  $x \in G$  является внутренней точкой  $G$ , т. е.  $G$  — открытое множество.
8. ★ Воспользуйтесь тем, что  $Q + \overline{Q} = [a, b]$  и  $\mu Q = 0$  (см. пример 4 из § 1); отсюда  $\mu \overline{Q} = b - a$ .
- 9 и 10. ★ Воспользуйтесь определением измеримого множества.
12. ★ а) Используйте метод примера 1 из § 2; б) воспользуйтесь результатом в) примера 5 из § 1;

в) воспользуйтесь результатом д) примера 5 из § 1. **13.** ★ Рассмотрите функцию  $y(x) = x$  на сегменте  $[0, 1]$  и воспользуйтесь свойствами 5° и 1° измеримых функций. **15.** Интегрируемость по Лебегу следует из измеримости  $f(x)$  (см. упр. 12, а). Чтобы доказать, что  $f(x)$  неинтегрируема по Риману на  $[0, 1]$ , достаточно доказать, что нижний и верхний интегралы Дарбу не равны:  $I \neq \bar{I}$ . Рассмотрите произвольное разбиение  $[0, 1]$  на частичные сегменты и покажите, что для него  $s = 0$ ,  $S \geq 1 - a$  ( $s$  и  $S$  — суммы Дарбу). Отсюда следует, что  $I = 0$ ,  $\bar{I} \geq 1 - a > 0$ . **16.**  $\int\limits_{[0,1]} f(x)d\mu(x) = 1 - a$ .

**17.**  $\int\limits_D \varphi(x)d\mu(x) = (1 - a)/2$ . **19.** ★ Составьте разность  $f(x) - g(x)$  и воспользуйтесь для нее результатом упр. 18. **20.** ★ Воспользуйтесь тем, что множество всех нижних (верхних) интегральных сумм Дарбу, получающихся при разбиениях  $[a, b]$  на конечное число частичных сегментов, содержится во множестве всех нижних (верхних) интегральных сумм, получающихся при разбиениях  $[a, b]$  на конечное число попарно непересекающихся измеримых множеств. **21.** ★ Воспользуйтесь тем, что для лебеговского разбиения  $T$  множества  $E$  выполняется неравенство  $S_T - s_T \leq \delta \cdot \mu E$ , где  $\delta = \max_{1 \leq k \leq n} (y_k - y_{k-1})$ , а также тем, что  $\bar{I} - I \leq S_T - s_T$ . **22.** ★ Для доказательства необходимости воспользуйтесь тем, что для лебеговского разбиения  $T$  множества  $E$  выполняется неравенство  $S_T - s_T \leq \delta \cdot \mu E$ , где  $\delta = \max_{1 \leq k \leq n} (y_k - y_{k-1})$ . Для доказательства достаточности воспользуйтесь неравенством  $\bar{I} - I \leq S_T - s_T$ . **23.** ★ Воспользуйтесь тем, что любая лебеговская интегральная сумма  $I(E_k, \xi_k)$  лебеговского разбиения  $T = \{E_k\}$  множества  $E$  удовлетворяет неравенствам  $s_T \leq I(E_k, \xi_k) \leq S_T$ , а также тем, что  $S_T - s_T \leq \delta \cdot \mu E$ .

## Глава X

- 5.**  $x_i = y_k + (z_i - y_k)t$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $t \in R$ . **7.** а)  $m$ -мерный шар; б)  $m$ -мерный шар; в)  $m$ -мерная сфера. **13.** а)  $a$ ; б) 2; в)  $e^3$ ; г) 0; д) 0; е) 0; ж) 0; з) 1. **15.** ★ б) Рассмотрите случай, когда точка  $M(x, y)$  стремится к точке  $O(0, 0)$  по параболе  $y = kx^2$ . **16.** а) 1 и 1; б)  $1/2$  и  $1/3$ ; в)  $-1/2$  и  $1/2$ ; г) 1 и  $-1$ ; д)  $1/2$  и  $-2/3$ ; е) 0 и 1; ж)  $1/2$  и 1; з)  $\sqrt{3}/2$  и 1. **17.** а) Предел не существует,  $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = 1$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = -1$ ; б) предел не существует,  $\lim_{x \rightarrow 1} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = 1$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 1} f(x, y)) = \infty$ ; в)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = 1$ . **18.** а)  $O(0, 0)$ ; б) все точки окружности  $x^2 + y^2 = 4$ ; в) все точки конической поверхности  $x^2 + y^2 = z^2$ ; г) все точки прямой  $y = 0$ ; д) все точки прямых  $x = 0$  и  $y = 0$ ; е) все точки прямых  $x \pm y = \pi n$ ,  $n \in Z$ ; ж) все точки сфер  $x^2 + y^2 + z^2 = \pi/2 + \pi k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . **19.** а) В точке  $O$  функция непрерывна по отдельным переменным и разрывна по совокупности переменных, в точке  $A$  непрерывна как по отдельным переменным, так и по совокупности переменных; б) в точках  $O$  и  $A$  функция непрерывна по отдельным переменным и по совокупности переменных; в) в точке  $O$  функция непрерывна по отдельным переменным и разрывна по совокупности переменных, в точке  $A$  разрывна по отдельным переменным и по совокупности переменных; г) в точке  $O$  функция

непрерывна по переменной  $x$  и разрывна по переменной  $y$  и по совокупности переменных, в точке  $A$  непрерывна по отдельным переменным и по совокупности переменных; д) в точке  $O$  функция непрерывна по отдельным переменным и по совокупности переменных, в точке  $A$  разрывна по отдельным переменным и по совокупности переменных; е) в точках  $O$  и  $A_2$  функция непрерывна по отдельным переменным и по совокупности переменных, в точке  $A_1$  разрывна по отдельным переменным и по совокупности переменных. 20. а) Да; б) нет; в) да; г) да; д) нет; е) нет. 21. а)  $\sup u = 1$  достигается, например, в точке  $(1, 0)$ ;  $\inf u = -1$  достигается, например, в точке  $(0, 1)$ ; б)  $\sup u = 81$  достигается, например, в точке  $(0, 3)$ ;  $\inf u = 0$  не достигается; в)  $\sup u = 0,5$  достигается, например, в точке  $(1, 1)$ ;  $\inf u = 0$  достигается, например, в точке  $(0, 1)$ ; г)  $\sup u = 1/e$  достигается, например, в точке  $(1, 1)$ ;  $\inf u = 0$  достигается, например, в точке  $(0, 0)$ ; д)  $\sup u = a$  достигается, например, в точке  $(1, 0, 0)$ ;  $\inf u = b$  достигается, например, в точке  $(0, 0, 1)$ . 23. а) Равномерно непрерывна; б) не является равномерно непрерывной; в) равномерно непрерывна на множестве  $\Omega_1$ , не является равномерно непрерывной на множестве  $\Omega_2$ ; г) равномерно непрерывна на множестве  $\Omega_1$ , не является равномерно непрерывной на множестве  $\Omega_2$ ; д) не является равномерно непрерывной; е) равномерно непрерывна.

24. а)  $u_x = 2x + 6xy^3$ ,  $u_y = 3y^2 + 9x^2y^2$ ; б)  $u_x = yz + \frac{1}{yz}$ ,  $u_y = xz - \frac{x}{y^2z}$ ,  $u_z = xy - \frac{x}{yz}$ ; в)  $u_x = y \cdot \cos(xy + yz)$ ,  $u_y = (x + z) \cos(xy + yz)$ ,  $u_z = y \times \cos(xy + yz)$ ; г)  $u_x = -\frac{\sin x}{\cos y}$ ,  $u_y = \frac{\cos x \sin y}{\cos^2 y}$ ; д)  $u_x = \frac{e^{x/y}}{\cos^2(x+y)} + \operatorname{tg}(x+y) \cdot e^{x/y} \cdot \frac{1}{y}$ ,  $u_y = \frac{e^{x/y}}{\cos^2(x+y)} + \operatorname{tg}(x+y)e^{x/y}\left(\frac{-x}{y^2}\right)$ ; е)  $u_x = \frac{|y|}{x^2 + y^2}$ ,  $u_y = -\frac{x \operatorname{sgn} y}{x^2 + y^2}$ ; ж)  $u_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ ,  $u_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ; з)  $u_x = y \ln(xy) + y$ ,  $u_y = x \ln(xy) + x$ ; и)  $u_x = -\frac{z}{x} \left(\frac{y}{x}\right)^z$ ,  $u_y = \frac{z}{y} \left(\frac{y}{x}\right)^z$ ,  $u_z = \left(\frac{y}{x}\right)^z \ln \frac{y}{x}$ ; к)  $u_x = z^{x/y} \ln z \cdot \frac{1}{y}$ ,  $u_y = z^{x/y} \ln z \left(\frac{-x}{y^2}\right)$ ,  $u_z = \frac{x}{y} z^{x/y-1}$ ; л)  $u_x = y^z x^{y^z-1}$ ,  $u_y = x^{yz} z y^{z-1} \ln x$ ,  $u_z = x^{y^z} y^z \ln y \ln x$ ; м)  $u_x = x^{y-1} y^{z+1} z^x + x^y y^z z^x \ln z$ ,  $u_y = x^y y^z z^x \ln x + x^y \times x^{y-1} z^{x+1}$ ,  $u_z = x^y y^z z^x \ln y + x^{y+1} y^z z^{x-1}$ . 25. Нет. 26. а)  $u_x(0, 0)$  и  $u_y(0, 0)$  не существуют, функция  $u(x, y)$  не дифференцируема в точке  $O(0, 0)$ ; б)  $u_x(0, 0) = u_y(0, 0) = 0$  и функция  $u(x, y)$  дифференцируема в точке  $O$ ; в)  $u_x(0, 0) = u_y(0, 0) = 0$ , но функция  $u(x, y)$  не дифференцируема в точке  $O$ ; г)  $u_x(0, 0) = u_y(0, 0) = 0$  и функция  $u(x, y)$  дифференцируема в точке  $O$ ; д)  $u_x(0, 0)$  и  $u_y(0, 0)$  не существуют, функция  $u(x, y)$  не дифференцируема в точке  $O$ ; е)  $u_x(0, 0) = u_y(0, 0) = 1$ , но функция  $u(x, y)$  не дифференцируема в точке  $O$ ; ж)  $u_x(0, 0) = u_y(0, 0) = 0$  и функция  $u(x, y)$  дифференцируема в точке  $O$ ; з)  $u(0, 0) = u_y(0, 0) = 0$  и функция  $u(x, y)$  дифференцируема в точке  $O$ ; и)  $u_x(0, 0) = u_y(0, 0) = 0$  и функция  $u(x, y)$  дифференцируема в точке  $O$ ; к)  $u_x(0, 0) = u_y(0, 0) = 0$  и функция  $u(x, y)$  дифференцируема в точке  $O$ ; л)  $u_x(0, 0) = u_y(0, 0) = 0$  и функция  $u(x, y)$  дифференцируема в точке  $O$ ; м)  $u_x(0, 0) = u_y(0, 0) = 0$  и функция  $u(x, y)$  дифференцируема в точке  $O$ . 27. а) Частные производные функции  $u(x, y)$  существуют в окрестности точки  $O$ , за исключением самой точки  $O$ ; б) частные производные функции  $u(x, y)$  существуют в окрестности точки  $O$  и непрерывны в точке  $O$ ; в) частная производная  $u_x$  существует в окрестности точки  $O$ , за исключением точек  $(0, y)$ ,  $y \neq 0$ ; частная производная  $u_y$  существует в окрестности точки  $O$ , за исключением точек  $(x, 0)$ ,  $x \neq 0$ ;  $u_x$ ,  $u_y$  разрывны в точке  $O$ .

г) частная производная  $u_x$  существует в окрестности точки  $O$ , за исключением точек  $(0, y)$ ,  $y \neq 0$ ; частная производная  $u_y$  существует в окрестности точки  $O$ , за исключением точек  $(x, 0)$ ,  $x \neq 0$ ;  $u_x$ ,  $u_y$  разрывны в точке  $O$ ;  
д) частные производные функции  $u(x, y)$  существуют в окрестности точки  $O$ , за исключением самой точки  $O$ ; е) частные производные функции  $u(x, y)$  существуют в окрестности точки  $O$ , за исключением точек прямой  $y = -x$  ( $x \neq 0$ ), они разрывны в точке  $O$ ; ж) частные производные функции  $u(x, y)$  существуют в окрестности точки  $O$  и непрерывны в этой точке; з) частные производные функции  $u(x, y)$  существуют в окрестности точки  $O$  и непрерывны в этой точке; и) частная производная  $u_x$  существует в окрестности точки  $O$ , за исключением точек  $(0, y)$ ,  $y \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ;  $u_x$  разрывна в точке  $O$ ; частная производная  $u_y$  существует в окрестности точки  $O$  и непрерывна в этой точке; к) частная производная  $u_x$  существует в окрестности точки  $O$  и непрерывна в точке  $O$ ; частная производная  $u_y$  существует в окрестности точки  $O$ , за исключением точек  $(x, 0)$ ,  $x \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ;  $u_y$  разрывна в точке  $O$ ; л) частные производные функции  $u(x, y)$  существуют в окрестности точки  $O$  и непрерывны в этой точке; м) частные производные функции  $u(x, y)$  существуют в окрестности точки  $O$  и непрерывны в этой точке.

**29.** а)  $u = y$ ; б)  $u = x + 2y - 1$ ; в)  $u = 3x + 3y$ ; г)  $u = \frac{\pi}{6}x + \frac{1}{2}y - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

д)  $u = x + y + 1$ . **30.** а) Да; б) нет; в) да. **31.** а)  $u_x = f_t + f_v \cdot 2x$ ,  $u_y = f_t + f_v \cdot 2y$ , где  $t = x + y$ ,  $v = x^2 + y^2$ ; б)  $u_x = \frac{1}{y}f_t - \frac{y}{x^2}f_v$ ,  $u_y = \frac{-x}{y^2}f_t + \frac{1}{x}f_v$ , где  $t = \frac{x}{y}$ ,

$v = \frac{y}{x}$ ; в)  $u_x = f_t + yf_v$ ,  $u_y = -ft + xf_v$ , где  $t = x - y$ ,  $v = xy$ ; г)  $u_x = f_t y g$ ,

$u_y = f_t x g + f_g v z$ ,  $u_z = f_g v y$ , где  $t = xy$ ,  $v = yz$ ; д)  $u_x = f^g \left[ g_v y \ln f + \frac{g}{f} f_t \right]$ ,

$u_y = f^g \left[ g_v x \ln f - \frac{g}{f} f_t \right]$ , где  $t = x - y$ ,  $v = xy$ ; е)  $u_x = f_t - 2xf_v + yf_w$ ,

$u_y = -2yf_t + f_v + xf_w$ , где  $t = x - y^2$ ,  $v = y - x^2$ ,  $w = xy$ ; ж)  $u_x = \frac{xf_t}{\sqrt{x^2 + y^2}} +$

$\frac{xf_w}{\sqrt{z^2 + x^2}}$ ,  $u_y = \frac{yf_t}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{yf_v}{\sqrt{y^2 + z^2}}$ ,  $u_z = \frac{zf_v}{\sqrt{z^2 + y^2}} + \frac{zf_w}{\sqrt{z^2 + x^2}}$ , где  $t =$

$= \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $v = \sqrt{y^2 + z^2}$ ,  $w = \sqrt{z^2 + x^2}$ . **33.** а)  $xu_x - yu_y = x$ ; б)  $2xu_x + yu_y = 2u$ ; в)  $u_x + u_y + u_z = 0$ ; г)  $xu_x + yu_y + zu_z = 0$ ; д)  $xu_x + yu_y = u$ .

**34.** а)  $u = \sin x + 0,5x^2y + y^2$ ; б)  $u = x^2y + \frac{1}{3}y^3 - \frac{4x^3}{3}$ ; в)  $u = \frac{1}{y}e^{xy} + xy - ex$ .

**35.** а)  $du|_M = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$ ,  $du|_{M_0} = 4dx + 12dy$ ; б)  $du|_M = -\frac{yz}{x^2}dx +$

$+ \frac{z}{x}dy + \frac{y}{x}dz$ ,  $du|_N = -6dx + 3dy + 2dz$ ; в)  $du|_M = -\sin x(y+z)[(y+z)dx +$   
 $+ xdy + xdz]$ ,  $du|_N = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\pi}{3}dx + dy + dz \right)$ ; г)  $du|_M = e^{xy}(ydx + xdy)$ ,

$du|_O = 0$ ; д)  $du|_M = x^y \left( \frac{y}{x}dx + \ln x \cdot dy \right)$ ,  $du|_{M_0} = 12dx + 8\ln 2 \cdot dy$ ; е)  $du|_M =$

$= (1 + \ln xy)dx + \frac{x}{y}dy$ ,  $du|_{M_0} = dx + dy$ . **36.** а)  $du|_M = (f_t + f_v)dx + (f_v -$

$- f_t)dy$ ,  $du|_{M_0} = [f_t(2, 0) + f_v(2, 0)]dx + [f_v(2, 0) - f_t(2, 0)]dy$ , где  $t = x - y$ ,

$v = x + y$ ; б)  $du|_M = \left( yf_t + \frac{1}{y}f_v \right)dx + \left( xf_t - \frac{x}{y^2}f_v \right)dy$ ,  $du|_{M_0} = [f_t(0, 0) +$

$+ f_v(0, 0)]dx$ , где  $t = xy$ ,  $v = \frac{x}{y}$ ; в)  $du|_M = 2(xf_t - xf_w)dx + 2y(f_v - f_t)dy +$

$+ 2z(f_w - f_v)dz$ ,  $du|_N = 2(f_t(0, 0, 0) - f_w(0, 0, 0))dx + 2(f_v(0, 0, 0) - f_t(0, 0, 0))dy +$

$+2(f_w(0,0,0) - f_v(0,0,0))dz$ , где  $t = x^2 - y^2$ ,  $v = y^2 - z^2$ ,  $w = z^2 - x^2$ ;  
 г)  $du|_M = (f_t \cos x - f_v \sin x)dx + f_t \cos y dy + f_v \sin z dz$ ,  $du|_O = f_t(0,0)dx +$   
 $+ f_t(0,0)dy$ , где  $t = \sin x + \sin y$ ,  $v = \cos x - \cos z$ . 38. а)  $u_{xx} = 6x + 12xy^4$ ,  
 $u_{xy} = 24x^2y^3$ ,  $u_{yy} = 12y^2 + 24x^3y^2$ ; б)  $u_{xx} = 0$ ,  $u_{xy} = 2yz^3 - \frac{2}{y^3z^3}$ ,  $u_{xz} =$   
 $= 3y^2z^2 - \frac{3}{y^2z^4}$ ,  $u_{yy} = 2xz^3 + \frac{6x}{y^4z^3}$ ,  $u_{yz} = 6xyz^2 + \frac{6x}{y^3z^4}$ ,  $u_{zz} = 6xy^2z + \frac{12x}{y^2z^5}$ ;  
 в)  $u_{xx} = -y^2 \cos xy$ ,  $u_{xy} = -\sin xy - xy \cos xy$ ,  $u_{yy} = -x^2 \cos xy$ ; г)  $u_{xx} =$   
 $= -\sin t$ ,  $u_{xy} = -z \sin t$ ,  $u_{xz} = -y \sin t$ ,  $u_{yy} = -z^2 \sin t$ ,  $u_{yz} = -yz \sin t + \cos t$ ,  
 $u_{zz} = -y^2 \sin t$ , где  $t = x + yz$ ; д)  $u_{xx} = -u_{yy} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$ ,  $u_{xy} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ ;  
 е)  $u_{xx} = \frac{e^{x+y}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}[y^2 + 2x(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2]$ ,  $u_{xy} = \frac{e^{x+y}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}[-xy +$   
 $+ (x+y)(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2]$ ,  $u_{yy} = \frac{e^{x+y}}{(x^2 + y^2)^{3/2}}[x^2 + 2y(x^2 + y^2) + (x^2 +$   
 $+ y^2)^2]$ ; ж)  $u_{xx} = yz(yz - 1)x^{yz-2}$ ,  $u_{xy} = x^{yz-1}z(1 + yz \ln x)$ ,  $u_{xz} = x^{yz-1}y(1 +$   
 $+ yz \ln x)$ ,  $u_{yy} = x^{yz}(z \ln x)^2$ ,  $u_{yz} = \ln x \cdot x^{yz}(1 + yz \ln x)$ ,  $u_{zz} = x^{yz}(y \ln x)^2$ ;  
 з)  $u_{xx} = \frac{z(z-1)}{x^2} \left(\frac{x}{y}\right)^z$ ,  $u_{xy} = -z^2y^{-2}(xy^{-1})^{z-1}$ ,  $u_{xz} = \frac{1}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1} \left(1 + z \ln \frac{x}{y}\right)$ ,  
 $u_{yy} = \frac{z(z+1)}{y^2} \left(\frac{x}{y}\right)^z$ ,  $u_{yz} = -\frac{1}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^z \left(1 + z \ln \frac{x}{y}\right)$ ,  $u_{zz} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln^2 \frac{x}{y}$ . 41. а)  $u_{yxx} =$   
 $= -2y \sin xy - xy^2 \cos xy$ ,  $u_{yyxx} = -2x \sin xy - x^2y \cos xy$ ; б)  $\frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} = 24 \times$   
 $\times (\cos y + \cos x)$ ; в)  $u_{zyx} = (x^2y^2z^2 + 3xyz + 1)e^{xyz}$ ; г)  $\frac{\partial^{10} u}{\partial x^4 \partial y^6} = -2^6 \sin x \times$   
 $\times \cos 2y$ ; д)  $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} = m!n!$ ; е)  $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} = 2^m e^{2x} \sin \left(y + \frac{n\pi}{2}\right) + 2^{-n} e^x \times$   
 $\times \cos \frac{y + n\pi}{2}$ ; ж)  $\frac{\partial^{10} u}{\partial x \partial y^9} = 10! \left(2x \operatorname{tg} x + \frac{x^2 + y}{\cos^2 x}\right)$ ; з) так как  $\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{2xn!}{(x-y)^{n+1}}$ ,  
 то  $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{2(-1)^m(n+m-1)!(nx+my)}{(x-y)^{m+n+1}}$ . 42. а)  $u_{xx} = f_{tt} + 4xf_{tv} + 4x^2f_{vv} +$   
 $+ 2f_v$ ,  $u_{xy} = f_{tt} + 2(x+y)f_{tv} + 4xyf_{vv}$ ,  $u_{yy} = f_{tt} + 4yf_{tv} + 4y^2f_{vv} + 2f_v$ , где  
 $t = x + y$ ,  $v = x^2 + y^2$ ; б)  $u_{xx} = y^2f_{tt} + 2f_{tv} + \frac{1}{y^2}f_{vv}$ ,  $u_{xy} = xyf_{tt} - \frac{x}{y^3}f_{vv} +$   
 $+ f_t - \frac{1}{y^2}f_v$ ,  $u_{yy} = x^2f_{tt} - 2\frac{x^2}{y^2}f_{tv} + \frac{x^2}{y^4}f_{vv} + \frac{2x}{y^3}f_v$ , где  $t = xy$ ,  $v = \frac{x}{y}$ ; в)  $u_{xx} =$   
 $= y^2gf'' + 2yzf'g' + z^2fg'', u_{yy} = x^2gf''$ ,  $u_{zz} = x^2fg''$ ,  $u_{xy} = xygf'' + xzfg' +$   
 $+ gf'$ ,  $u_{xz} = xyf'g' + xzfg'' + fg'$ ,  $u_{yz} = x^2f'g'$ ; г)  $u_{xx} = -\frac{1}{f^2}(f_t + f_v)^2 +$   
 $+ \frac{1}{f}(f_{tt} + 2f_{tv} + f_{vv})$ ,  $u_{xy} = -\frac{1}{f^2}(f_t + f_v)f_v + \frac{1}{f}(f_{tv} + f_{vv})$ ,  $u_{yy} = \frac{1}{f}f_{vv} -$   
 $- \frac{1}{f^2}f_v^2$ , где  $t = x$ ,  $v = x + y$ ; д)  $u_{xx} = \cos^2 x \cdot f'' - \sin x \cdot f'$ ,  $u_{xy} = -\sin y \cos x \times$   
 $\times f''$ ,  $u_{yy} = \sin^2 y \cdot f'' - \cos y \cdot f'$ ; е)  $u_{xx} = g \cdot f^{g-2}[(g-1)f'^2 + ff'']$ ,  $u_{xy} =$   
 $= f^{g-1}g'f'(1 + g \ln f)$ ,  $u_{yy} = f^g(g'^2 \ln^2 f + g'' \ln f)$ . 46. а)  $u_{xy} = 0$ ; б)  $uu_{xy} =$   
 $= u_x u_y$ ; в)  $u_{xx} = u_{yy}$ ; г)  $x^2 u_{xx} = y^2 u_{yy} - xu_x + yu_y$ . 47. а)  $u = 0,5x^2y + xy +$   
 $+ y^2$ ; б)  $u = y \cos x - y + x$ ; в)  $u = 0,5xy^2 + xy + y$ . 48. а)  $d^2u|_M = 2y^3dx^2 +$   
 $+ 12xy^2dx dy + 6x^2y dy^2$ ,  $d^2u|_{M_0} = 2dx^2 + 24dx dy + 24dy^2$ ; б)  $d^2u|_M =$   
 $= \frac{2yz}{x^3}dx^2 - \frac{2z}{x^2}dx dy - \frac{2y}{x^2}dx dz + \frac{2}{x}dy dz$ ,  $d^2u|_N = 12dx^2 - 6dx dy - 4dx dz +$

- + $2dy dz$ , в)  $d^2u|_M = -\cos(xy + xz)[(y+z)dx + x(dy + dz)]^2 - 2\sin(xy + xz) \times$   
 $\times dx(dy + dz)$ ,  $d^2u|_N = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}dx + dy + dz\right)^2 - \sqrt{3}dx(dy + dz)$ , г)  $d^2u|_M =$   
 $= e^{xy}[(ydx + xdy)^2 + 2dxdy]$ ,  $d^2u|_O = 2dxdy$ , д)  $d^2u|_M = x^{y-2}[(ydx + x \times$   
 $\times \ln x dy)^2 + dx(2xdy - ydx)]$ ,  $d^2u|_{M_0} = 2[(3dx + 2\ln 2dy)^2 + dx(4dy - 3dx)]$ ,
- е)  $d^2u|_M = \frac{dx^2}{x} + \frac{2}{y}dxdy - \frac{x}{y}dy^2$ ,  $d^2u|_{M_0} = -dx^2 - 2dxdy + dy^2$
49. а)  $d^2u|_M = f_{tt}(dx - dy)^2 + 2f_{tv}(dx^2 - dy^2) + f_{vv}(dx + dy)^2$ ,  $d^2u|_{M_0} =$   
 $= f_{tt}(0, 2)(dx - dy)^2 + 2f_{tv}(0, 2)(dx^2 - dy^2) + f_{vv}(0, 2)(dx + dy)^2$ , где  $t =$   
 $= x - y$ ,  $v = x + y$ , б)  $d^2u|_M = f_{tt}(dx + dy)^2 + 4zf_{tv}dz(dx + dy) + 4z^2f_{vv}dz^2 +$   
 $+ 2f_vdz^2$ ,  $d^2u|_{M_0} = f_{tt}(0, 0)(dx + dy)^2 + 2f_v(0, 0)dz^2$ , где  $t = x + y$ ,  $v = z^2$ ,  
 в)  $d^2u|_M = f_{tt}(ydx + xdy)^2 + 4f_{tv}(ydx + xdy)(xdx + ydy) + 4f_{vv}(xdx + y \times$   
 $\times dy)^2 + 2f_t dxdy + 2f_v(dx^2 + dy^2)$ ,  $d^2u|_{M_0} = 2f_t(0, 0)dxdy + 2f_v(0, 0)(dx^2 +$   
 $+ dy^2)$ , где  $t = xy$ ,  $v = x^2 + y^2$ , г)  $d^2u|_M = -\sin f(x) e^{f(y)}f'^2(x)dx^2 + 2 \times$   
 $\times \cos f(x)e^{f(y)}f'(x)f'(y)dx dy + \cos f(x) e^{f(y)}f''(x)dx^2 + \sin f(x) e^{f(y)} \times$   
 $\times f'^2(y)dy^2 + \sin f(x) e^{f(y)}f''(y)dy^2$ ,  $d^2u|_O = e^{f(0)}[(\cos f(0)f''(0) - \sin f(0) \times$   
 $\times f'^2(0))dx^2 + 2\cos f(0)f'^2(0)dxdy + \sin f(0)(f''(0) + f'^2(0))dy^2]$  50. а)  $d^n u =$   
 $= f^{(n)}(ax + by + cz)(adx + bdy + cdz)^n$ , б)  $d^n u = \left( a dx \frac{\partial}{\partial(ax)} + b dy \frac{\partial}{\partial(by)} + \right.$   
 $+ c dz \frac{\partial}{\partial(cz)} \left. \right)^n u$  51. а)  $u = 1 - 2x + (2x^2 + 2xy + y^2)$ , б)  $u = 8 + (-3\Delta x + 11\Delta y) +$   
 $+ (\Delta x^2 - 3\Delta x\Delta y + 4\Delta y^2)$ , где  $\Delta x = x - 1$ ,  $\Delta y = y - 2$ , в)  $u = 3(\Delta x^2 + \Delta y^2 +$   
 $+ \Delta z^2 - \Delta x\Delta y - \Delta y\Delta z - \Delta z\Delta x) + (\Delta x^3 + \Delta y^3 + \Delta z^3 - 3\Delta x\Delta y\Delta z)$ , где  
 $\Delta x = x - 1$ ,  $\Delta y = y - 1$ ,  $\Delta z = z - 1$  52. а)  $\sqrt{1-x-y} = 1 - \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{8}(x+y)^2 + o(x^2 + y^2)$ , б)  $\ln(1+x+y) = x+y - 0,5(x+y)^2 + \frac{1}{3}(x+y)^3 + o((x^2 + y^2)^{3/2})$ , в)  $(x+y)\sin(x-y) = x^2 - y^2 + o((x^2 + y^2)^{3/2})$ , г)  $e^x \cos y =$   
 $= 1 + x + 0,5(x^2 - y^2) + \frac{1}{8}(x^3 - 3xy^2) + \frac{1}{24}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + o((x^2 + y^2)^2)$ ,  
 д)  $x^y = 1 - y + xy + o((x-1)^2 + (y-1)^2)$ , е)  $x^{y/z} = -y + 2z + x^2 + xy -$   
 $- 2xz + o((x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2)$  53. а)-д) Равномерно непрерывна  
 54. а)  $u_{\min} = u(0, 0) = 0$ , б) точек экстремума нет, в)  $u_{\min} = u(-2, -1) = -2$ ,  
 г)  $u_{\min} = u(4/3, 4/3) = -64/27$ , д)  $u_{\min} = u(1, -1) = -6$  и  $u_{\max} = u(-1, 1) = 6$ ,  
 е) точек экстремума нет, ж) точек экстремума нет, з)  $u_{\min} = u(2/3, -4/3) =$   
 $= -(4/3)e^{-2}$ , и)  $u_{\min} = u(0, 0) = 0$ , к)  $u_{\min} = u(0, 0) = 0$ ,  $u_{\max} = u(0, 1) =$   
 $= u(0, -1) = 2/e$ , л)  $u_{\min} = u(-1/\sqrt{10}, 2/\sqrt{10}) = -\sqrt{5/(2e)}$ ,  $u_{\max} = u(1/\sqrt{10},$   
 $-2/\sqrt{10}) = \sqrt{5/(2e)}$ , м)  $u_{\min} = u(1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}) = u(-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}) = \frac{-1}{2e}$ ,  
 $u_{\max} = u(1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}) = u(-1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}) = 1/(2e)$ , н)  $u_{\min} = u(1, 1) = 3$   
 55. а)  $u_{\min} = u(1, -1, 3) = -11$ , б)  $u_{\min} = u(1/2, 1/2, -2) = -17/4$ , в)  $u_{\min} =$   
 $= u(1, -2, 1/2) = -9/2$ , г)  $u_{\max} = u(1/4, 1/4, 1/4) = 1/256$ , д)  $u_{\min} = u(1/4,$   
 $1/4, 1/4) = -1/8$ , е)  $u_{\max} = u(1/(2\sqrt{3}), 1/(2\sqrt{3}), 1/\sqrt{3}) = \sqrt{3/e}$ ,  $u_{\min} =$   
 $= u(-1/(2\sqrt{3}), -1/(2\sqrt{3}), -1/\sqrt{3}) = -\sqrt{3/e}$

## Глава XI

1.  $f(1) = 2$  2.  $f'(1) = -0,4$ ,  $f''(1) = -0,72$  4. а)  $y' = \frac{x+y}{x-y}$ ,  $y'' = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$ , где  $y = f(x)$ , б)  $y' = \frac{1}{1+\varepsilon \sin y}$ ,  $y'' = \frac{-\varepsilon \cos y}{(1+\varepsilon \sin y)^3}$ , где  $y = f(x)$ , в)  $y' = \frac{y^2(\ln x-1)}{x^2(\ln y-1)}$ ,  $y'' = \frac{y^2 \left[ y \ln^2 \frac{e}{x} - 2(x-y) \ln \frac{e}{x} \ln \frac{e}{y} - x \ln^2 \frac{e}{y} \right]}{x^4(1-\ln y)^3}$ , где  $y = f(x)$ , г)  $y' = -\frac{y}{x}$ ,  $y'' = \frac{2y}{x^2}$ , где  $y = f(x)$  5.  $y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$ ,  $y'' = \frac{-18}{(x+2y)^3}$ ,  $y''' = -\frac{162x}{(x+2y)^5}$ , где  $y = f(x)$  6. а)  $y'(0) = -0,5$ ,  $y''(0) = -\frac{3}{4}$ ,  $y'''(0) = 0$ , б)  $y'(0) = -1/3$ ,  $y''(0) = -2/3$ ,  $y'''(0) = -7/27$  7.  $z_x(0, -1) = -0,5$ ,  $z_y(0, -1) = 0$  8. а)  $z_x = \frac{xz}{x^2-y^2}$ ,  $z_y = \frac{-yz}{x^2-y^2}$ ,  $z_{xx} = \frac{-y^2 z}{(x^2-y^2)^2}$ ,  $z_{xy} = \frac{xyz}{(x^2-y^2)^2}$ ,  $z_{yy} = \frac{-x^2 z}{(x^2-y^2)^2}$ , где  $z = f(x, y)$ , б)  $z_x = \frac{yz}{z^2-xy}$ ,  $z_y = \frac{xz}{z^2-xy}$ ,  $z_{xx} = \frac{-2xy^3 z}{(z^2-xy)^3}$ ,  $z_{xy} = \frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$ ,  $z_{yy} = \frac{-2x^3yz}{(z^2-xy)^3}$ , где  $z = f(x, y)$ , в)  $z_x = z_y = \frac{1}{e^z-1}$ ,  $z_{xx} = z_{xy} = z_{yy} = \frac{-e^z}{(e^z-1)^3}$ , где  $z = f(x, y)$  9. а)  $dz = -dx - dy$ ,  $d^2z = 0$ , б)  $dz = \frac{z}{y(x+z)}(y dx + z dy)$ ,  $d^2z = \frac{-z^2}{y^2(x+z)^3}(y dx - x dy)^2$ , где  $z = f(x, y)$ , в)  $dz = \frac{x-yz}{xy-z}dx + \frac{y-xz}{xy-z}dy$ ,  $d^2z = \frac{1}{(xy-z)^3}\{[(xy-z)^2 + (x-yz)^2 - 2y(xy-z)(x-yz)](dx)^2 + 2[(x-yz)(y-xz) - (xy-z)(x^2+y^2 - xyz - z^2)]dxdy + [(xy-z)^2 + (y-xz)^2 - 2x(y-xz)(xy-z)](dy)^2\}$ , где  $z = f(x, y)$ , г)  $dz = -\frac{c^2}{z}\left(\frac{x}{a^2}dx + \frac{y}{b^2}dy\right)$ ,  $d^2z = \frac{-c^2}{a^4z^3}(c^2x^2 + a^2z^2)(dx)^2 - \frac{2c^4xy}{a^2b^2z^3} \times dx dy - \frac{c^2}{b^4z^3}(c^2y^2 + b^2z^2)(dy)^2$ , где  $z = f(x, y)$  10. а)  $z_{xx} = -0,4$ ,  $z_{xy} = -0,2$ ,  $z_{yy} = -3,132$ , б)  $z_{xx} = \frac{169}{32}$ ,  $z_{xy} = -\frac{1}{8}$ ,  $z_{yy} = -\frac{5}{8}$  14. а)  $x' = \frac{y-z}{x-y}$ ,  $y' = \frac{z-x}{x-y}$ ,  $y'' = -x'' = \frac{(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2}{(x-y)^3}$ , б)  $y' = -x' = \frac{1}{y-x}$ ,  $y'' = -x'' = \frac{2}{(x-y)^3}$ , где  $x = x(z)$ ,  $y = y(z)$  15. а)  $z'(0) = y'(0) = -0,5$ ,  $z''(0) = -y''(0) = -0,75$ , б)  $y'(0) = z'(0) = -1$ ,  $y''(0) = 1$ ,  $z''(0) = 0$  16.  $dz = \frac{1}{9}(2dx - dy)$ ,  $d^2z = -\frac{2}{243}(2(dx)^2 - 5dx dy + 2(dy)^2)$  17.  $du = \frac{(\sin v + x \cos v)dx + (x \cos v - \sin u)dy}{y \cos u + x \cos v}$ ,  $dv = \frac{(y \cos u - \sin v)dx + (y \cos u + \sin u)dy}{y \cos u + x \cos v}$ ,  $d^2u = -d^2v = \frac{(2 \cos v dx - x \sin v dv)dv - (2 \cos u dy - y \sin u du)du}{y \cos u + x \cos v}$ , где  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  18.  $du = 0,5(dx + dy)$ ,  $dv = 0,5[(1 + \pi/2)dy - dx]$ ,  $d^2u = (dx)^2$ ,  $d^2v = 0,5(dx - dy)^2$  19.  $f_{\min}(0) = 0$  20. а) Нет точек экстремума, б)  $z_{\max} = z(0, 0) = 2\sqrt[3]{2}$ , в)  $z_{\min} = z(-3 - \sqrt{6}, -3 - \sqrt{6}) = -4 - 2\sqrt{6}$ ,  $z_{\max} = z(\sqrt{6} - 3, \sqrt{6} - 3) = 2\sqrt{6} - 4$ , г)  $z_{\min} = z_1(0, 0) = a$ ,  $z_{\max} = z_2(0, 0) = -a$  22. а) Зависимы, б) зависимы 24. Независимы в любой окрестности точки  $(0, 0, 0)$  26. Функции  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  зависимы во всем пространстве  $E^3$  28. а)  $u_{\min} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$  в точке  $\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$ , б)  $u_{\min} = 2\sqrt{2}a$  в точке  $(\sqrt{2}a, \sqrt{2}a)$ ,

$u_{\max} = -2\sqrt{2}a$  в точке  $(-\sqrt{2}a, -\sqrt{2}a)$ , в)  $u_{\max} = 0,5$  в точках  $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  и  $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ ,  $u_{\min} = -0,5$  в точках  $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  и  $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ , г)  $u_{\min} = 0,4$  в точке  $(0,4, -0,4, 0,2)$ , д)  $u_{\min} = 5$  в точке  $(0, 0, 0)$ ,  $u_{\max} = 7 \frac{10}{27}$  в точке  $(-4/3, 8/3, 4/3)$ , е) нет точек экстремума, ж)  $u_{\max} = 1$  в точке  $(1, 1, 1)$ , з)  $u_{\min} = -3$  в точке  $(-1/3, 2/3, -2/3)$ ,  $u_{\max} = 3$  в точке  $(1/3, -2/3, 2/3)$ , и)  $u_{\max} = c^{-2}$  в точках  $(0, 0, -1)$  и  $(0, 0, 1)$ ,  $u_{\min} = a^{-2}$  в точках  $(-1, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ , к)  $u_{\min} = \left( \sum_{i=1}^n a_i^{-2} \right)^{-1}$  в точке  $\left( \frac{1}{a_1 \sum_{i=1}^n a_i^{-2}}, \dots, \frac{1}{a_n \sum_{i=1}^n a_i^{-2}} \right)$

29. а)  $u_{\min} = -1$  в точках  $(-1, 1, 1)$ ,  $(1, -1, 1)$ ,  $(1, 1, -1)$  и  $(-1, -1, -1)$ ,  $u_{\max} = 1$  в точках  $(1, 1, 1)$ ,  $(-1, -1, 1)$ ,  $(-1, 1, -1)$  и  $(1, -1, -1)$ , б)  $u_{\min} = -1/(3\sqrt{6})$  в точках  $(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$ ,  $(1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$  и  $(-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$ ,  $u_{\max} = 1/(3\sqrt{6})$  в точках  $(-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$ ,  $(-1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$  и  $(2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$  30.  $d = h = 6$  31.  $S_{\min} = 48\text{см}^2$  при высоте 2 см и длинах сторон основания, равных 4 см 32.  $V_{\min} = \pi\text{м}^3$  при радиусе основания 1 м и длине образующей 2 м 33.  $2a/\sqrt{3}, 2b/\sqrt{3}, 2c/\sqrt{3}$  34.  $\rho_{\min} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$  35.  $7/(4\sqrt{2})$  36.  $S_{\max} = 0,25a^2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$  37.  $l_{\min} = \sqrt{2ab} \sin \frac{C}{2}$  38. а)  $y + y = 0$ , решение исходного уравнения есть функция  $y = A \sin(\ln x + \varphi)$ , где  $A, \varphi$  — произвольные постоянные, б)  $y + y = 0$ , решение исходного уравнения есть функция  $y = A \sin\left(\frac{1}{2} \ln(2x \pm \sqrt{4x^2 + 1}) + \varphi\right)$ , где  $A, \varphi$  — произвольные постоянные, в)  $y + \omega^2 y = 0$ , решение исходного уравнения есть функция  $y = A \sin\left(\frac{\omega}{2} \arcsin x + \varphi\right)$ , где  $A, \varphi$  — произвольные постоянные 39. а)  $x''' + y = 0$ , б)  $x^{(4)} + 1 = 0$  40. а)  $u + (1+u)u = 0$ , б)  $t^5 u + (3t^4 + 1)u + u = 0$ , в)  $\frac{t^2}{1 - \ln t} u + u = 0$ , г)  $tu + u = 0$  41.  $u'' + [q(x) - 0,25p^2(x) - 0,5p'(x)]u = 0$  42. а)  $\rho = \rho$ , б)  $\rho^2 = \rho^2 \frac{1 - \sin 2\varphi}{\sin 2\varphi}$  43.  $\rho = k\rho^3$ ,  $\varphi = -1$  44. а)  $uz_u = z$ , б)  $z_v = \pm \frac{v}{\sqrt{u - v^2}} e^u$ , в)  $z_u = z_v$ , г)  $z_u^2 + azz_v = bz^2$

45. а)  $z_u = 0$ , решение исходного уравнения есть функция  $z = f(bx - ay)$ , где  $f(v)$  — произвольная дифференцируемая функция, б)  $z_u = 0$ , решение исходного уравнения есть функция  $z = f(x^2 + y^2)$ , где  $f(v)$  — произвольная дифференцируемая функция, в)  $uz_u = z$ , решение исходного уравнения есть функция  $z = f\left(\frac{8y}{x}\right)(4x - 7y)$ , где  $f(v)$  — произвольная дифференцируемая функция 46. а)  $w_v = 0$ , решение исходного уравнения есть  $z = \frac{y+1}{x} f\left(\frac{x}{y+1}\right)$ , где  $f(u)$  — произвольная дифференцируемая функция, б)  $w_v = 0$ , решение исходного уравнения есть функция  $z = \exp\{x + y + f(x^2 + y^2)\}$ , где  $f(u)$  — произвольная дифференцируемая функция 47. а)  $v = w_v = 1$ , б)  $w_v = 0$ , в)  $u^2 w_u^2 + v^2 w_v^2 = w^2 w_u w_v$  48.  $B = \frac{x^2 u^2 + u^4 (x_u^2 + x_v^2) - 2xu^3 x_u}{x^4 (ux_u + vx_v)^2}$  49. а)  $B = z_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} z_\varphi^2$ , б)  $B = z_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} z_\rho + \frac{1}{\rho^2} z_{\varphi\varphi}$ , в)  $B = z_{uu} + 2z_{uv} + z_{vv} - z_u - z_v$ , г)  $B = \rho^2 z_{\rho\rho}$  50. а)  $z_{uu} + z_{vv} = 0$ , б)  $z_{vv} = \frac{2u}{u^2 + v^2} z_u$ , в)  $z_{uu} +$

$+ 2z_{uv} + z_{vv} = 0$  51. а)  $w_{vv} = 0$ , решение исходного уравнения есть функция  $z = y f(x+y) + x g(x+y)$ , где  $f(u), g(u)$  — произвольные дважды дифференцируемые функции, б)  $z_{uv} = 0$ , решение исходного уравнения есть функция  $z = f(y+ax) + g(y-ax)$ , где  $f(v), g(u)$  — произвольные дважды дифференцируемые функции

$$52. u \frac{\partial}{\partial u} \left( u \frac{\partial R}{\partial u} \right) + v \frac{\partial}{\partial v} \left( v \frac{\partial R}{\partial v} \right) + w \frac{\partial}{\partial w} \left( w \frac{\partial R}{\partial w} \right) = \\ = 2 \left( uv \frac{\partial^2 R}{\partial u \partial v} + uw \frac{\partial^2 R}{\partial u \partial w} + vw \frac{\partial^2 R}{\partial v \partial w} \right) \\ 53. \text{а) } w_{uu} = 0, \text{ б) } w_{uu} = 0,5, \text{ в) } w_{uu} = \\ = \left( 1 - \frac{v}{u} \right) w_{vv}, \text{ г) } w_{uu} + w_{vv} + w_u^2 + w_v^2 = 0, \text{ д) } w_{uu} + w_{uv} + w_{vv} = w$$

## Глава XII

1. а)  $\int_1^4 dx \int_1^x f(x, y) dy, \int_1^4 dy \int_y^4 f(x, y) dx$  (рис. 81), б)  $\int_2^3 dx \int_{(x+1)/3}^{6x-11} f(x, y) dy +$

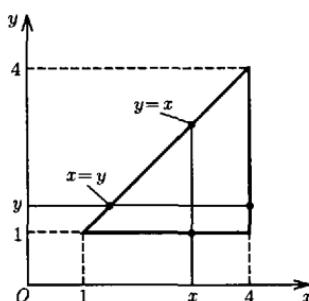


Рис. 81

$$+ \int_3^5 dx \int_{(x+1)/3}^{(29-5x)/2} f(x, y) dy, \int_1^2 dy \int_{(y+11)/6}^{3y-1} f(x, y) dx +$$

$$+ \int_2^7 dy \int_{(y+11)/6}^{(29-2y)/5} f(x, y) dx \quad (\text{рис. 82}), \quad \text{в) } \int_{-2}^1 dx \times$$

$$\times \int_{3x^2}^{6-3x} f(x, y) dy, \int_0^3 dy \int_{-\sqrt{y/3}}^{\sqrt{y/3}} f(x, y) dx + \int_3^{12} dy \times$$

$$\times \int_{-\sqrt{y/3}}^{2-y/3} f(x, y) dx \quad (\text{рис. 83}), \quad \text{г) } \int_{-2}^4 dx \times$$

$$\times \int_{-2+\sqrt{8+2x-x^2}}^{-2-\sqrt{8+2x-x^2}} f(x, y) dy, \int_{-5}^1 dy \int_{1-\sqrt{5-4y-y^2}}^{1+\sqrt{5-4y-y^2}} f(x, y) dx, \quad \text{д) } \int_0^4 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy,$$

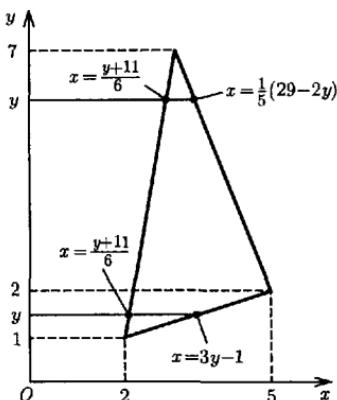
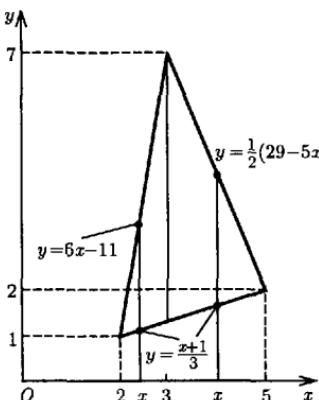


Рис. 82

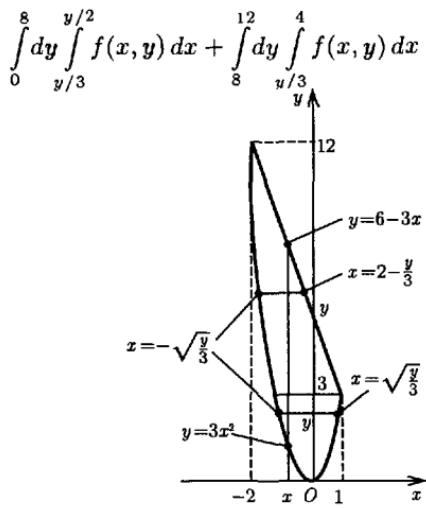


Рис. 83

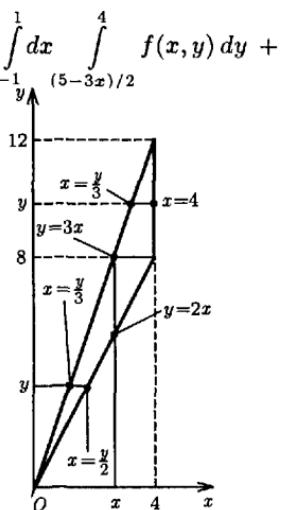


Рис. 84

$$\begin{aligned}
 & + \int_1^4 dx \int_1^4 f(x, y) dy + \int_4^5 dx \int_{3x-11}^4 f(x, y) dy, \quad \int_1^4 dy \int_{(5-2y)/3}^{(y+11)/3} f(x, y) dx; \quad \text{ж}) \quad \int_{-2}^{-1} dx \times \\
 & \times \int_0^{3x+6} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{3x+3}^{3x+6} f(x, y) dy, \quad \int_0^3 dy \int_{y/3-2}^{y/3-1} f(x, y) dx + \int_3^6 dy \int_{y/3-2}^0 f(x, y) dx; \\
 3) \quad & \int_{-2}^0 dx \int_{-3x-3}^{1,5x+6} f(x, y) dy + \int_0^3 dx \int_{-3}^{6-3x} f(x, y) dy, \quad \int_{-3}^3 dy \int_{-y/3-1}^{2-y/3} f(x, y) dx + \int_3^6 dy \times \\
 & \times \int_{(2/3)y-4}^{2-y/3} f(x, y) dx; \quad \text{и)} \quad \iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G_1} f(x, y) dx dy + \iint_{G_2} f(x, y) dx dy + \\
 & + \iint_{G_3} f(x, y) dx dy + \iint_{G_4} f(x, y) dx dy
 \end{aligned}$$

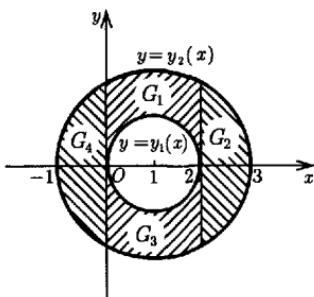


Рис. 85

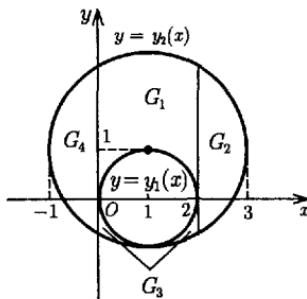


Рис. 86

$$\begin{aligned}
 & + \iint_{G_3} f(x, y) dx dy + \iint_{G_4} f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy + \int_2^3 dx \int_{-y_2(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^2 dx \int_{-y_2(x)}^{-y_1(x)} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-y_2(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy, \text{ где } y_1(x) = \sqrt{2x - x^2}, y_2(x) = \\
 & = \sqrt{3 + 2x - x^2} \quad (\text{рис. 85}); \quad \int_1^2 dy \int_{1-x_2(y)}^{1+x_2(y)} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{1+x_1(y)}^{1+x_2(y)} f(x, y) dx + \\
 & + \int_{-2}^{-1} dy \int_{1-x_2(y)}^{1+x_2(y)} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{1-x_2(y)}^{1-x_1(y)} f(x, y) dx, \text{ где } x_1(y) = \sqrt{1 - y^2}, x_2(y) = \\
 & = \sqrt{4 - y^2}; \quad \text{к) } \iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G_1} f(x, y) dx dy + \iint_{G_2} f(x, y) dx dy + \\
 & + \iint_{G_3} f(x, y) dx dy + \iint_{G_4} f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_{y_1(x)}^{1+y_2(x)} f(x, y) dy + \int_2^3 dx \int_{1-y_2(x)}^{1+y_2(x)} f(x, y) \times \\
 & \times dy + \int_0^2 dx \int_{1-y_2(x)}^{-y_1(x)} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{1-y_2(x)}^{1+y_2(x)} f(x, y) dy, \text{ где } y_1(x) = \sqrt{2x - x^2}, \\
 & y_2(x) = \sqrt{3 + 2x - x^2} \quad (\text{рис. 86}); \quad \int_1^3 dy \int_{1-x_2(y)}^{1+x_2(y)} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{1+x_1(y)}^{1+x_2(y)} f(x, y) dx + \\
 & + \int_{-1}^1 dy \int_{1-x_2(y)}^{1-x_1(y)} f(x, y) dx, \quad \text{где } x_1(y) = \sqrt{1 - y^2}, \quad x_2(y) = \sqrt{3 + 2y - y^2}. \\
 \text{2. а) } & \int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy \quad (\text{рис. 87}); \quad \text{б) } \int_1^2 dy \int_e^{e^y} f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{e^{y/2}}^{e^2} f(x, y) dx \quad (\text{рис. 88}); \\
 \text{в) } & \int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x, y) dx; \quad \text{г) } \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \times \\
 & \times \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx \quad (\text{рис. 89}); \quad \text{д) } \int_{-1}^0 dx \int_{-(1+x)/2}^0 f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{-(1+x)/2}^{-\sqrt{x}} f(x, y) dy
 \end{aligned}$$

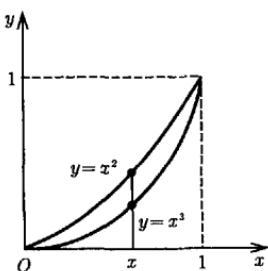


Рис. 87

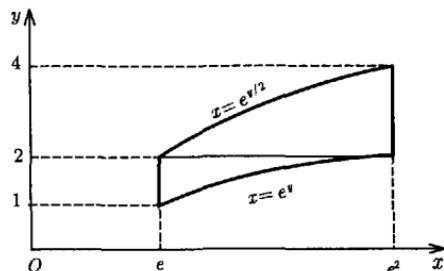


Рис. 88

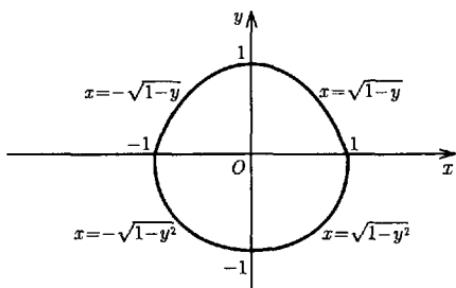


Рис. 89

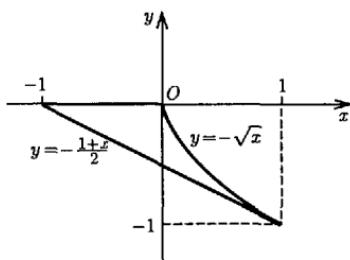


Рис. 90

(рис. 90); е)  $\int_{0,5\sqrt{3}}^{\sqrt{2}-0,5} dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{0,5} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{2}-0,5}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{2}-y} f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \times$   
 $\times \int_0^{\sqrt{2}-y} f(x, y) dx$  (рис. 91); ж)  $\int_{-1}^{-0,5\sqrt{3}} dx \int_{0,5}^{0,5+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-0,5\sqrt{3}}^0 dx \times$   
 $\times \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 f(x, y) dy$  (рис. 92). 3. а) 4,5; б)  $-27/4$ ; в) 61. 4. а)  $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho f(\rho \cos \varphi,$   
 $\rho \sin \varphi) d\rho = \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi$ ; б)  $\int_0^\pi d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi} \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\rho =$   
 $= \int_0^{\pi - \arcsin(\rho/2)} \rho d\rho \int_{\arcsin(\rho/2)}^{\pi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi$  (рис. 93), в)  $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\rho =$   
 $= \int_a^b \rho d\rho \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi$ ; г)  $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\rho =$

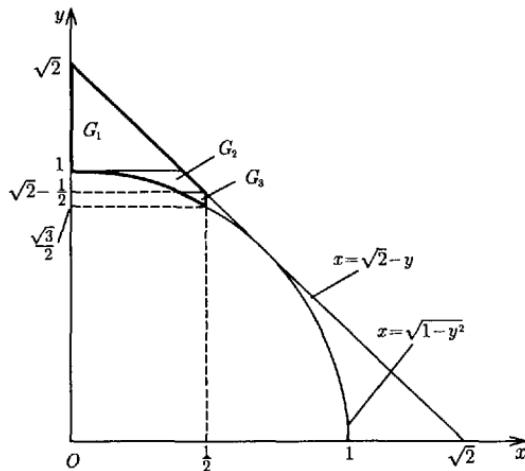


Рис. 91

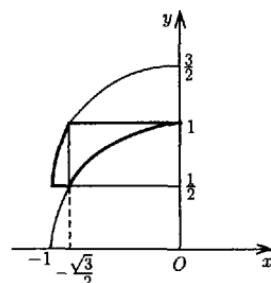


Рис. 92

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^a \rho d\rho \int_{-\arccos(\rho^2/a^2)}^{0,5\arccos(\rho^2/a^2)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi \text{ (рис. 94); } \text{ д) } \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{1/(\sin \varphi + \cos \varphi)} \rho \times \\
 &\times f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\rho = \int_0^{1/\sqrt{2}} \rho d\rho \int_0^{\pi/2} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi + \int_{1/\sqrt{2}}^1 \rho d\rho \left[ \int_0^{\alpha - \pi/4} f(\rho \times \right. \\
 &\left. \times \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi \right]
 \end{aligned}$$

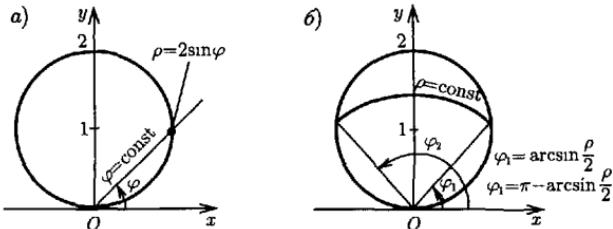


Рис. 93

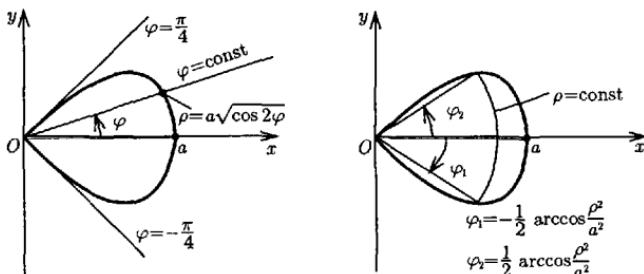


Рис. 94

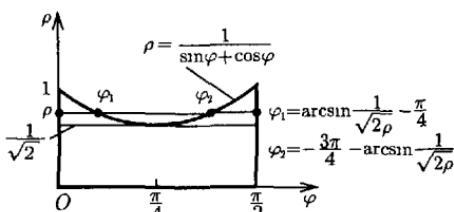


Рис. 95

$\times \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi + \int_{3\pi/4 - \alpha}^{\pi/2} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi \Big],$  где  $\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}\rho}$  (рис. 95);

$$\begin{aligned}
 &\text{е) } \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a \sin \varphi / \cos^2 \varphi} \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\rho + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_0^{a / \sin \varphi} \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\rho + \\
 &+ \int_{3\pi/4}^{\pi} d\varphi \int_0^{a \sin \varphi / \cos^2 \varphi} \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\rho = \int_0^a \rho d\rho \int_{\alpha_1(\rho)}^{\pi - \alpha_1(\rho)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_a^{\sqrt{2}a} \rho d\rho \left[ \int_{\alpha_1(\rho)}^{\alpha_2(\rho)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi + \int_{\pi - \alpha_2(\rho)}^{\pi - \alpha_1(\rho)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi \right], \text{ где } \alpha_1(\rho) = \\
& = \arcsin \frac{\sqrt{a^2 + 4\rho^2} - a}{2\rho}, \quad \alpha_2(\rho) = \arcsin \frac{a}{\rho}. \quad 5. \quad \text{a) } \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sin \varphi / \cos^2 \varphi} \rho f(\rho \cos \varphi, \\
& \rho \sin \varphi) d\rho = \int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho \int_0^{\pi/4} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi, \quad \text{где } \alpha = \arcsin \frac{\sqrt{1 + 4\rho^2} - 1}{2\rho}; \\
& \text{б) } \int_{\pi/6}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{2/\sin \varphi} \rho f(\rho^2) d\rho = \int_0^{2\sqrt{2}} f(\rho^2) \rho d\rho \int_{\pi/6}^{\pi/4} d\varphi + \int_{\pi/6}^{\pi/4} f(\rho^2) \rho d\rho \int_{\pi/6}^{\arcsin(2/\rho)} d\varphi; \\
& \text{в) } \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{1/\sqrt{2} \operatorname{cosec}(\varphi + \pi/4)}^1 \rho f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\rho = \int_0^1 \rho d\rho \int_{1/\sqrt{2}}^1 f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) d\varphi; \\
& \text{где } \alpha(\rho) = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}\rho}. \quad 6. \quad \text{а) } \frac{1}{2} \int_2^3 du \int_{u-6}^u f(u, v) dv; \quad \text{б) } \int_2^3 u du \int_3^4 f(v) dv = \frac{5}{2} \int_3^4 f(v) dv. \\
& 8. \text{ Положите } u = xy, \quad v = x - 2y. \quad 9. \quad \text{а) } 2\pi ab/3; \quad \text{б) } 2; \quad \text{в) } 0 \text{ и } 21\pi a^4/2^9. \\
& 10. \quad \text{а) } 18\pi; \quad \text{б) } 4/3; \quad \text{в) } 0; \quad \text{г) } 543 \frac{11}{15}. \quad 11. \quad \text{а) } (15/8 - \ln 4)a^2; \quad \text{б) } \pi; \quad \text{в) } 0,5a^2 \ln 2. \\
& 12. \quad \text{а) } a^2(\sqrt{3} - \pi/3); \quad \text{б) } a^2(4 - \sqrt{15} + \pi/2 - \arccos(\sqrt{15}/4)). \quad 13. \quad \text{а) } a^2 b^2/(2c^2); \\
& \text{б) } 1/35; \quad \text{в) } ab(a^2 + b^2)\pi/2; \quad \text{г) } 3\pi; \quad \text{д) } 2/3. \quad 14. \quad \text{а) } \pi(3 \ln 3 - 2); \quad \text{б) } 2\pi^2; \quad \text{в) } 3/4. \\
& 15. \quad \text{а) } x_0 = -1, \quad y_0 = 3,2; \quad \text{б) } x_0 = 4,5, \quad y_0 = -1; \quad \text{в) } x_0 = y_0 = \pi a/8. \quad 16. \quad x_0 = \\
& = -a/5, \quad y_0 = 0. \quad 17. \quad \text{а) } I_x = ab^3 \rho_0/3, \quad I_y = a^3 b \rho_0/3; \quad \text{б) } I_x = \rho_0/6, \quad I_y = 7\rho_0/6; \\
& \text{в) } I_x = I_y = a^4(1 - 5\pi/16)\rho_0; \quad \text{г) } I_x = I_y = \frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}} \rho_0. \quad 18. \quad \text{а) } I_x = a^2 b^4/8, \\
& I_y = a^4 b^2/8; \quad \text{б) } I_x = 0,1, \quad I_y = 13/30. \quad 19. \quad p_B = \pi a^2 \rho(h - (2/3)a), \quad p_H = \\
& = \pi a^2 \rho(h + (2/3)a). \quad 20. \quad \text{Взяв ось } x \text{ в качестве оси абсцисс, получаем } I_{x'} = \\
& = \iint_G (y - a)^2 \rho(x, y) dx dy = I_x - 2aM_x + a^2 m. \quad \text{Так как по условию } M_x = \\
& = 0, \text{ то приходим к равенству } I_{x'} = I_x + ma^2. \quad 21. \quad \text{а) } \int_a^b dx \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} dy \times \\
& \times \int_{-c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} f(x, y, z) dz, \quad \int_{-b}^b dy \int_{-a\sqrt{1-y^2/b^2}}^{a\sqrt{1-y^2/b^2}} dx \int_{-c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}}^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} f(x, y, z) \\
& z) dz, \quad \int_{-a}^a dx \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2-z^2/c^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2-z^2/c^2}} dz \int_{-c}^c f(x, y, z) dy, \quad \int_{-c}^c dz \int_{-a\sqrt{1-z^2/c^2}}^{a\sqrt{1-z^2/c^2}} dx \times \\
& \times \int_{-b\sqrt{1-x^2/a^2-z^2/c^2}}^{b\sqrt{1-x^2/a^2-z^2/c^2}} f(x, y, z) dy, \quad \int_{-b}^b dy \int_{-c\sqrt{1-y^2/b^2}}^{c\sqrt{1-y^2/b^2}} dz \int_{-a\sqrt{1-y^2/b^2-z^2/c^2}}^{a\sqrt{1-y^2/b^2-z^2/c^2}} f(x, y, z) dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-c}^c dz \int_{-b\sqrt{1-z^2/c^2}}^{b\sqrt{1-z^2/c^2}} dy \int_{-a\sqrt{1-y^2/b^2-z^2/c^2}}^{a\sqrt{1-y^2/b^2-z^2/c^2}} f(x, y, z) dx; \quad 6) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y, \\
& -b\sqrt{1-z^2/c^2}) dz + \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{16-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz + \int_1^4 dx \int_0^{\sqrt{16-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz, \\
& \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz + \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_0^{\sqrt{16-y^2}} f(x, y, z) dz + \int_1^4 dy \times \\
& \times \int_0^{\sqrt{16-y^2}} dx \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz, \quad \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz \int_{\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{16-y^2-z^2}} f(x, y, z) dx + \int_0^1 dy \times \\
& \times \int_0^{\sqrt{16-y^2}} dz \int_0^{\sqrt{16-y^2-z^2}} f(x, y, z) dx + \int_1^4 dy \int_0^{\sqrt{16-y^2}} dz \int_0^{\sqrt{16-y^2-z^2}} f(x, y, z) dx, \quad \int_0^1 dz \times \\
& \times \int_0^{\sqrt{1-z^2}} dy \int_{\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{16-y^2-z^2}} f(x, y, z) dx + \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{16-z^2}} dy \int_0^{\sqrt{16-y^2-z^2}} f(x, y, z) dx + \int_1^4 dz \times \\
& \times \int_0^{\sqrt{16-z^2}} dy \int_0^{\sqrt{16-y^2-z^2}} f(x, y, z) dx, \quad \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz \int_{\sqrt{1-x^2-z^2}}^{\sqrt{16-x^2-z^2}} f(x, y, z) dy + \int_0^1 dx \times \\
& \times \int_0^{\sqrt{16-x^2}} dz \int_0^{\sqrt{16-x^2-z^2}} f(x, y, z) dy + \int_1^4 dx \int_0^{\sqrt{16-x^2}} dz \int_0^{\sqrt{16-x^2-z^2}} f(x, y, z) dy, \quad \int_0^1 dz \times \\
& \times \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \int_{\sqrt{1-x^2-z^2}}^{\sqrt{16-x^2-z^2}} f(x, y, z) dy + \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{16-z^2}} dx \int_0^{\sqrt{16-x^2-z^2}} f(x, y, z) dy + \int_1^4 dz \times \\
& \times \int_0^{\sqrt{16-z^2}} dx \int_0^{\sqrt{16-x^2-z^2}} f(x, y, z) dy; \quad B) \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{4-2x-2y} f(x, y, z) dz + \int_0^2 dx \times \\
& \times \int_{x-2}^{4-2x+2y} dy \int_0^0 dx \int_0^{4+2x+2y} f(x, y, z) dz + \int_{-2}^0 dx \int_0^{x+2} dy \times \\
& \times \int_0^{4+2x-2y} f(x, y, z) dz, \quad \int_0^2 dy \int_0^{2-y} dx \int_0^{4-2x-2y} f(x, y, z) dz + \int_0^2 dy \int_0^{4+2x-2y} dx \int_0^{4+2x+2y} f(x, y, \\
& z) dz + \int_{-2}^0 dy \int_0^{y+2} dx \int_0^{4-2x+2y} f(x, y, z) dz + \int_{-2}^0 dy \int_0^0 dx \int_0^{4+2x+2y} f(x, y, z) dz, \\
& \int_0^4 dz \int_0^{2-z/2} dy \int_{y+z/2-2}^{2-y-z/2} f(x, y, z) dx + \int_0^4 dz \int_0^{z/2-2} dy \int_{-y+z/2-2}^{y-z/2+2} f(x, y, z) dx, \quad \int_{-2}^0 dy \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^{2y+4} dz \int_{y+z/2-2}^{2-y-z/2} f(x, y, z) dx + \int_0^2 dy \int_0^{4-2y} dz \int_{z/2-y-2}^{y-z/2+2} f(x, y, z) dx, \quad \int_0^4 dz \int_0^{2-z/2} dx \times \\
& \times \int_{x+z/2-2}^{2-x-z/2} f(x, y, z) dy + \int_0^4 dz \int_{z/2-2}^0 dx \int_{-x+z/2-2}^{x-z/2+2} f(x, y, z) dy, \quad \int_{-2}^0 dx \int_0^{2x+4} dz \times \\
& \times \int_{x+z/2-1}^{2-x-z/2} f(x, y, z) dy + \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dz \int_{z/2-x-2}^{y-z/2+2} f(x, y, z) dy. \quad 22. \text{ а)} \int_0^1 dy \int_0^{(1-y)/a} dx \times \\
& \times \int_0^{ax+y} f(x, y, z) dz = \int_0^1 dz \int_0^z dy \int_{(z-y)/a}^{(1-y)/a} f(x, y, z) dx + \int_0^1 dz \int_0^1 dy \int_0^{(1-y)/a} f(x, y, z) dx = \\
& = \int_0^1 dy \left[ \int_y^1 dz \int_{(z-y)/a}^{(1-y)/a} f(x, y, z) dx + \int_0^y dz \int_0^{(1-y)/a} f(x, y, z) dx \right] = \int_0^{1/a} dx \left[ \int_0^{ax} dz \times \right. \\
& \times \left. \int_0^{1-ax} f(x, y, z) dy + \int_0^1 dz \int_{ax}^{1-ax} f(x, y, z) dy \right] = \int_0^1 dz \left[ \int_{z/a}^{1/a} dx \int_0^{1-ax} f(x, y, z) dy + \right. \\
& \left. + \int_0^{z/a} dx \int_{z-ax}^{1-ax} f(x, y, z) dy \right]; \quad 6) \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{2x^2+3y^2} f(x, y, z) dz = \int_0^1 dy \left[ \int_0^{3y^2} dz \int_0^1 f(x, y, z) \right. \\
& \left. dx + \int_{3y^2}^{2+3y^2} dz \int_{\sqrt{(z-3y^2)/2}}^1 f(x, y, z) dx \right] = \int_0^3 dz \int_{\sqrt{z/3}}^1 dy \int_0^1 f(x, y, z) dx + \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{z/3}} dy \times \\
& \times \int_{\sqrt{(z-3y^2)/2}}^1 f(x, y, z) dx + \int_2^3 dz \int_{\sqrt{(z-2)/3}}^{\sqrt{z/3}} dy \int_{\sqrt{(z-3y^2)/2}}^1 f(x, y, z) dx + \int_3^5 dz \times \\
& \times \int_{\sqrt{(z-2)/3}}^1 dy \int_{\sqrt{(z-3y^2)/2}}^1 f(x, y, z) dx = \int_0^1 dx \left[ \int_0^{2x^2} dz \int_0^1 f(x, y, z) dy + \int_{2x^2}^{2x^2+3} dz \times \right. \\
& \left. \times \int_{\sqrt{(z-2x^2)/3}}^1 f(x, y, z) dy \right] = \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{z/2}} dx \int_0^1 f(x, y, z) dy + \int_0^2 dz \int_0^{\sqrt{z/2}} dx \times \\
& \times \int_{\sqrt{(z-2x^2)/3}}^1 f(x, y, z) dy + \int_2^3 dz \int_0^1 dx \int_{\sqrt{(z-2x^2)/3}}^1 f(x, y, z) dy + \int_3^5 dz \int_{\sqrt{(z-3)/2}}^1 dx \times \\
& \times \int_{\sqrt{(z-2x^2)/3}}^1 f(x, y, z) dy; \quad \text{в)} \text{ например, } \int_{-1}^1 dz \int_{|z|}^1 dx \int_{-\sqrt{x^2-z^2}}^{\sqrt{x^2-z^2}} f(x, y, z) dy = \int_0^1 dx \times \\
& \times \int_{-x}^x dy \int_{-\sqrt{x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2-y^2}} f(x, y, z) dz; \quad \text{г)} \text{ например, } \int_0^1 dy \left[ \int_0^{y^2} dz \int_y^1 f(x, y, z) dx + \int_y^y dz \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \int_0^1 f(x, y, z) dx \Big]. \quad 23. \text{ а) } 0; \text{ б) } 1/8. \quad 24. \text{ Например, } \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_{\arctg(1/\cos\varphi)}^{\pi/2} \sin\theta d\theta \times \\
 & \frac{z/y}{1/(\cos\varphi\sin\theta)} \times \int_{\arctg(1/\sqrt{2})}^{\pi/4} f(r)r^2 dr = \int_{\arccos(\tg\theta)}^{\pi/4} \sin\theta d\theta \int_{\cos\theta/\sin^2\theta}^{1/(\cos\varphi\sin\theta)} d\varphi \int_{\cos\theta/\sin^2\theta}^{\pi/2} f(r)r^2 dr + \\
 & + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_{\cos\theta/\sin^2\theta}^{1/(\cos\varphi\sin\theta)} f(r)r^2 dr. \quad 25. \text{ а) } \pi/10; \text{ б) } 3^7\pi/2^5. \quad 26. \text{ а) } 4\pi/21; \\
 & \text{б) } 81/40\pi. \quad 27. \text{ а) } 3\sqrt{3}\pi/5; \text{ б) } 8\pi abc/5; \text{ в) } 9/4. \quad 28. \text{ а) } 2/3; \text{ б) } 1; \text{ в) } \pi ab(a+b)/8. \\
 & 29. \text{ а) } 21\pi/32; \text{ б) } \pi(b-a)(b^2+ab-2a^2)/3. \quad 30. \text{ а) } 21\pi/(4\sqrt{2}); \text{ б) } \pi^2 a^3/(4\sqrt{2}). \\
 & 31. \text{ а) } \pi abc/60; \text{ б) } 81/40; \text{ в) } 6. \quad 32. \text{ а) } 4\pi\rho_0; \text{ б) } 128\rho_0/15; \text{ в) } 1408\rho_0/105. \\
 & 33. \text{ а) } x_0 = 0, y_0 = 2, z_0 = 4a/(3\pi); \text{ б) } x_0 = y_0 = 16\sqrt{3}/(15\pi), z_0 = 2; \text{ в) } x_0 = 7p/18, y_0 = 0, z_0 = 7p/176; \text{ г) } x_0 = y_0 = 0, z_0 = 7/20. \quad 34. \text{ а) } x_0 = -2, y_0 = 1, z_0 = 4/3; \text{ б) } x_0 = -2, y_0 = 1, z_0 = 2/3; \text{ в) } x_0 = 32/13, y_0 = 16/13, z_0 = 33/65. \quad 35. \text{ а) } I_{xy} = (4/15)\pi\rho_0 abc^3, I_{xz} = (4/15)\pi\rho_0 ab^3 c, I_{yz} = (4/15)\pi\rho_0 a^3 bc; \\
 & \text{б) } I_{xy} = \pi\rho_0/10, I_{xz} = I_{yz} = \pi\rho_0/20; \text{ в) } I_{xy} = 81\pi\rho_0/16, I_{yz} = I_{xz} = 9\pi\rho_0/16. \\
 & 36. \text{ а) } I_{xy} = (4/9)\pi\rho_0 abc^3, I_{xz} = (4/9)\pi\rho_0 ab^3 c, I_{yz} = (4/9)\pi\rho_0 a^3 bc; \text{ б) } I_{xy} = 75\pi, I_{xz} = 62\pi, I_{yz} = 50\pi. \quad 37. \text{ а) } I_x = I_y = 0, 15\pi\rho_0, I_z = 0, 1\pi\rho_0, I_0 = 0, 2\pi\rho_0; \\
 & \text{б) } I_x = I_y = \pi\rho_0 a^5 (16 - 7\sqrt{2})/60, I_z = \pi\rho_0 a^5 (8 - 5\sqrt{2})/30, I_0 = \pi\rho_0 a^5 (2 - \sqrt{2})/5. \quad 38. 5\pi^2\rho_0/64. \quad 39. F_x = \gamma \iint_T \frac{\rho_0 m_0 x}{r^3} dx dy dz = \gamma\rho_0 m_0 \iint_{-R \leqslant y \leqslant R} dy dz \times \\
 & \times \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{x dx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 0; \quad F_y = 0; \quad F_z = \gamma\rho_0 m_0 \iiint_{0 \leqslant z \leqslant h} \frac{z}{r^3} dx dy dz = \\
 & = \gamma\rho_0 m_0 \iint_{x^2+y^2 \leqslant R^2} dx dy \int_0^h \frac{z dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \gamma\rho_0 m_0 \iint_{x^2+y^2 \leqslant R^2} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} \right) dx dy = 2\pi\gamma\rho_0 m_0 (R + h - \sqrt{R^2 + h^2}). \quad 40. \text{ а) } \frac{m}{3}; \\
 & \text{б) } \frac{2^m h_1 h_2 \dots h_m}{(m-1)!(2m+1)}. \quad 41. \frac{2^m h_1 h_2 \dots h_m}{|\Delta|}. \quad 42. \frac{a_1 a_2 \dots a_m}{m!}. \quad 43. \frac{8\pi^2 R^5}{15}.
 \end{aligned}$$

## Глава XIII

1. а)  $1 + \sqrt{2}$ ; б)  $\frac{256a^3}{15}$ ; в)  $2(e^a - 1) + \frac{\pi a}{4} e^a$ ; г)  $2a^2$ ; д)  $\frac{1}{3}[(2+t_0^2)^{3/2} - 2^{3/2}]$ ; е)  $\frac{2\pi a^3}{3}$ .
2. а)  $\frac{2\rho_0}{\sqrt{3}}$ ; б)  $5\rho_0$ ; в)  $4 + \frac{18}{\sqrt{5}} \arcsin \frac{\sqrt{5}}{3}$ ; г)  $\frac{1}{8}[3\sqrt{3} - 1 + \frac{3}{2} \ln \frac{3+2\sqrt{3}}{3}]$ .
3. а)  $x_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}, y_0 = \frac{9}{2\pi}, z_0 = y_0 = z_0 = \frac{4a}{(3\pi)}$ . 4.  $M_x = M_y = \frac{3a^2}{5}$ .
5. а)  $\frac{32a^3\rho_0}{3}$ ; б)  $\frac{3\sqrt{3}a^3\rho_0}{2}$ .
6.  $I_x = I_y = \frac{5}{6}\rho_0 \sqrt{4\pi^2 + 1}, I_z = \rho_0 \sqrt{4\pi^2 + 1}$ .
7.  $F_1 = 0, F_2 = \gamma \frac{2mM}{\pi a^2}$ , где  $\gamma$  — гравитационная постоянная.
8. а) 0; б)  $\frac{2}{3}$ ; в) 2.
9. а)  $-\frac{3}{2}$ ; б)  $-\frac{3}{2}$ ; в)  $-\frac{3}{2}$ .
10.  $-\frac{14}{15}$ .
11.  $\frac{4}{3}$ .
12. 0.
13.  $-\pi a^2$ .
14.  $-2\pi$ .
15. 0.
16.  $-\pi$ .
17.  $2\pi\sqrt{2}a^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ .
18.  $-\frac{\pi a^3}{4}$ .
19.  $\frac{m}{6}$ .
20. 0.
21. а)  $\pi$ ; б)  $\pi a(2c - b)$ .
22. а) 4; б)  $-4\pi$ .
23. а)  $\frac{\pi a^4}{2}$ ; б)  $-2\pi ab$ ;
- в) 0; г)  $\pm pSe^{x_2} \cdot \varphi(y_2) - e^{x_1} \cdot \varphi(y_1) - p(y_2 - y_1) - 0,5p(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$  (вы-

бор знака зависит от направления обхода замкнутого контура  $AmBA$ ).

24.  $I_1 - I_2 = 2$ . 25. а)  $\pi ab$ ; б)  $\frac{a^2}{6}$ ; в)  $\ln 2$ ; г)  $3\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3}$ . 26.  $I = 2S$ . 28. а) 8;

б) 4; в)  $-\frac{3}{2}$ ; г) 9; д)  $\frac{61}{6}$ ; е)  $b - a$ . 29. а)  $\int_0^{a+b} f(u) du$ ; б)  $\int_{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}^{a+b} uf(u) du$ .

30.  $\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx + \int_{y_1}^{y_2} \psi(y) dy$ . 31. а)  $u = \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + C$ ; б)  $u = \frac{\partial^{n+m} z}{\partial x^n \partial y^m} + C$ .

## Глава XIV

1. а)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} - \sqrt{3} = 0$ ; б)  $2x + \sqrt{3}y - z = 0$ ; в)  $ax + ay - \sqrt{2}a^2 = 0$ .

2. а)  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\cos \beta = -\frac{1}{2}$ ,  $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; б)  $\cos \alpha = 0$ ,  $\cos \beta = 0$ ,  $\cos \gamma = -1$ .

3. а)  $\frac{2\pi a^2(2\sqrt{2}-1)}{3}$ ; б)  $\frac{a^2(20-3\pi)}{9}$ ; в)  $\frac{4}{3}ab(2\sqrt{2}-1)\arctg\sqrt{\frac{b}{a}}$ ; г)  $\frac{1}{3}abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)^{-1}\left[\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^{3/2} - \frac{1}{c^3}\right]$ ; д)  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ ; е)  $\pi\sqrt{2}$ . 4. а)  $4\pi a^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right)$ ;

б)  $R^2|v_2 - v_1||\cos u_1 - \cos u_2|$ ; в)  $8a^2$ ; г)  $2a^2$ ; д)  $(20 - 3\pi)/9$ ; е)  $\pi\left(a\sqrt{a^2+h^2} + h^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h}\right)$ ; ж)  $4\pi^2 ab$ . 5. а)  $4\pi(3+2\sqrt{3})a^2$ ; б)  $\frac{\pi a^2}{3\sqrt{3}}(\sqrt{5}+2\sqrt{2})$ .

6.  $I_1 - I_2 = (4\pi - 2\sqrt{3})a^4$ . 7.  $\frac{8a^3\sqrt{2}}{3}$ . 8. а)  $\pi a^3$ ; б)  $\frac{\pi(1+\sqrt{2})}{2}$ ; в)  $0,5(3 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1)\ln 2$ ; г)  $\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$ ; д)  $\pi^2(a\sqrt{1+a^2} + \ln(1+\sqrt{1+a^2}))$ ; е)  $0,5\pi a^4 \sin \alpha \cos^2 \alpha$ ; ж)  $\frac{64a^4\sqrt{2}}{15}$ . 9. а)  $\frac{2\pi(1+6\sqrt{3})}{15}$ ; б)  $\pi a^2$ . 10.  $\frac{a^3\rho_0}{2\sqrt{3}}$ .

11.  $\frac{\pi a^4 \rho_0}{2}$ . 12.  $\frac{1}{12}\pi\rho_0 a(3a^2 + 2b^2)\sqrt{a^2 + b^2}$ . 13.  $40a^4$ ,  $\pi R\left(R(R+H)^2 + \frac{2H^3}{3}\right)$ .

14.  $x_0 = \frac{a}{2}$ ,  $y_0 = 0$ ,  $z_0 = \frac{16a}{9\pi}$ ;  $x_0 = y_0 = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ ,  $z_0 = \frac{a(\sqrt{2}+1)}{\pi}$ . 15.  $F = \{F_1, F_2, F_3\}$ , где  $F_1 = F_2 = 0$ ,  $F_3 = \pi\gamma m\rho_0 \ln\left(\frac{a}{b}\right)$ . 16. а)  $4\pi a^3$ ; б)  $abc \times \left(\frac{f(a) - f(0)}{a} + \frac{g(b) - g(0)}{b} + \frac{h(c) - h(0)}{c}\right)$ ; в) 0; г)  $\frac{4\pi}{abc}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$ .

17. а) 0; б)  $\pi h^3$ ; в) 0; г) 0; д)  $\pi$ ; е)  $\frac{3\pi}{8}$ ; ж) 0; з)  $\frac{\pi}{5}$ . 18.  $-2\pi \star$  Дополните кривую  $L$  отрезком так, чтобы контур стал замкнутым; б)  $2\sqrt{2}\pi a^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ ;

в)  $-\pi a^2\sqrt{3}$ ; г)  $-2\pi a(a+h)$ ; д)  $2\pi Rr^2$ ; е)  $-\frac{9}{2}a^3$ ; ж) -4; 19. а)  $-53\frac{7}{12}$ ; б) 0;

в)  $b - a$ . 20.  $\int_{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}^{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}} tf(t) dt$ . 21. а)  $u = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C$ ; б)  $u = \frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}{e^x yz + e^y xz + e^z xy + C}$ ; в)  $u = x^2yz + xy^2z + xyz^2 + C$ . 22.  $-mg(z_2 - z_1)$ . 23. а) 0; б) 0. 24. а)  $4\pi a^3$ ; б) 0.  $\star$  Дополните поверхность  $\Phi$  до замкнутой; в) 0; г)  $\pi$ .  $\star$  Дополните поверхность  $\Phi$  до замкнутой; д) 0; е)  $\frac{\pi}{5}$ ; ж)  $3a^4$ ; з)  $\frac{12\pi a^5}{5}$ ; и) 1.

## Глава XV

1.  $(x - y) = C$ ;  $\operatorname{grad} u(-1, 1) = -n\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ ;  $\operatorname{grad} u(1, 1) = 0$ . 2.  $(x - C)^2 + y^2 = C^2$ ,  $x^2 + y^2 \neq 0$ ;  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ ;  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ ;  $\operatorname{grad} u(1, 1) = -e\mathbf{j}$ ;  $\operatorname{grad} u(2, 0) = -(e/2)\mathbf{i}$ ;  $\operatorname{grad} u(1, -1) = e\mathbf{j}$ . 3. Пары лучей, сонаправленных с положительными полуосами  $Ox$  и  $Oy$  и имеющих общее начало на прямой  $y = x$ ;  $\operatorname{grad} u(2, 1) = \mathbf{j}$ ;  $\operatorname{grad} u(1, 2) = \mathbf{i}$ . 4. а) Лучи, исходящие из начала координат; б) окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных прямой, параллельной вектору  $\mathbf{c}$  и проходящей через начало координат; центры этих окружностей лежат на указанной прямой; в) семейство эллипсов  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = C$ ; г)  $x = C_1 y = C_2 \sqrt{|z|}$ . 5.  $|\operatorname{grad} u| = 2\sqrt{2} = \frac{\partial u}{\partial l_1}(M)$ ,  $2 = \frac{\partial u}{\partial l_2}(M)$ ,  $0 = \frac{\partial u}{\partial l_3}(M)$ . 6. а)  $\operatorname{grad} u(M) = 36\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ ; б)  $\operatorname{grad} u(M_1) = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ ,  $\operatorname{grad} u(M_2) = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ ,  $\operatorname{grad} u(M_3) = 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ; в)  $\operatorname{grad} u(M) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ . 7. а) В точках конуса  $z^2 = xy$ ; б) в точках прямой  $x = y = z$ . 8. а) Во всех точках; б) в точках прямой  $x = y$ . 9.  $\varphi = \arccos(-8/9)$ . 10. В точках сферы  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 1$ . 11.  $r$ ;  $1/r$ ;  $\sin r$ ;  $\ln r$ ;  $\operatorname{arctg} r$ . 13. с; (сг)  $\operatorname{grad} u + uc$ . 14. а)  $\frac{u}{u^2 - xy}(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$ ; б)  $(e^u - 1)^{-1}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ ; в)  $-\mathbf{i} - \mathbf{j}$ . 15. а) 0; б)  $2(x^2 + y^2 + z^2)$ ; в) 0; г) 0; д) 3; е)  $f_1(y, z) + f_2(x, z) + f_3(x, y)$ . 16. а) 3; б)  $2/r$ ; в)  $7r^4$ . 17.  $\min \operatorname{div} \mathbf{a} = 0$  при  $x = a$ ,  $y = b$ . 19. а) (сг)/ $r$ ; б)  $2(\mathbf{rc})$ ; в)  $(f'(r)/r)(\mathbf{rc})$ ; г)  $(\mathbf{ab})$ ; д)  $4(\mathbf{ra})$ ; е) 0; ж)  $2(\mathbf{ab})$ . 20. а) 0; б)  $-2\omega^2$ . 21. 0 вне масс. 22. 0 вне зарядов. 23. а)  $-(1/y)\mathbf{i} - (1/z)\mathbf{j} - (1/x)\mathbf{k}$ . 24. а) 0; б)  $2xyz(3z - 2)\mathbf{i} + 2yz^2(1 - z)\mathbf{k}$ ; в) 0; г)  $-(1/x^2)\mathbf{j} - (2/x^3)\mathbf{k}$ ; д) 0; е)  $(1/x^2)\mathbf{i} + 2(y/x^3)\mathbf{j}$ . 25. а)  $-4\mathbf{i} - \mathbf{j}$ ; б)  $4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ ; в)  $4\mathbf{i}$ . 26. а) 0; б) 0; в) 0. 27. а)  $(\mathbf{rc}) \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\mathbf{ca}]$ ; б)  $(1/r)[\mathbf{rc}]$ ; в)  $(f'(r)/r)[\mathbf{rc}]$ ; г)  $2f(r)\mathbf{c} + (f'(r)/r)[\mathbf{cr}^2 - \mathbf{r}(\mathbf{cr})]$ . 30. (б $\nabla$ ) $\mathbf{a} = yz(x + y)\mathbf{i} + zx(y + z)\mathbf{j} + xy(z + x)\mathbf{k}$ ; (а $\nabla$ ) $\mathbf{b} = y(z^2 + x^2)\mathbf{i} + z(x^2 + y^2)\mathbf{j} + x(y^2 + z^2)\mathbf{k}$ ;  $\partial \mathbf{a} / \partial b = (z^2x^2 + x^2y^2 + y^2z^2)^{-1/2}[yz(x + y)\mathbf{i} + zx(y + z)\mathbf{j} + xy(z + x)\mathbf{k}]$ ;  $\partial \mathbf{b} / \partial a = (y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2)^{-1/2}[y(z^2 + x^2)\mathbf{i} + z(x^2 + y^2)\mathbf{j} + x(y^2 + z^2)\mathbf{k}]$ . 31.  $\partial \mathbf{a} / \partial l_1 = y\mathbf{i} + z\mathbf{k}$ ;  $\partial \mathbf{a} / \partial l_2 = (1/\sqrt{2})[(x + y)\mathbf{i} + z\mathbf{j} + z\mathbf{k}]$ ;  $\partial \mathbf{a} / \partial l_3 = (1/\sqrt{2}) \times$   
 $\times [x\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + x\mathbf{k}]$ ;  $\partial \mathbf{a} / \partial l_4 = (1/\sqrt{3})[(x + y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (z + x)\mathbf{k}]$ ;  $(l_1 \nabla) \mathbf{a} = y\mathbf{i} + z\mathbf{k}$ ;  $(l_2 \nabla) \mathbf{a} = (x + y)\mathbf{i} + z\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ;  $(l_3 \nabla) \mathbf{a} = x\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} +$   
 $+ x\mathbf{k}$ ;  $(l_4 \nabla) \mathbf{a} = (x + y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (z + x)\mathbf{k}$ . 33.  $\partial T / \partial t = -2T_0 t \exp\{-t^{-2} - t^2\}$ ;  $(\mathbf{v} \nabla) T = 2T_0 t^{-3} \exp\{-t^{-2} - t^2\}$ ;  $dT / dt = \partial T / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) T = 2T_0 (-t + + t^{-3}) \exp\{-t^{-2} - t^2\}$ . 34.  $\partial \mathbf{E} / \partial t = i A_{00} \omega \cos \omega t$ ;  $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{E} = (ke/r^5) \{[a \sin t \times$   
 $\times (3x^2 - r^2) - 3bx(y \cos t + z)]\mathbf{i} + [b \cos t(r^2 - 3y^2) - 3y(bz - ax \sin t)]\mathbf{j} +$   
 $+ [b(r^2 - 3z^2) - 3z(by \cos t - ax \sin t)]\mathbf{k}\}$ ;  $d\mathbf{E} / dt = \partial \mathbf{E} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{E}$ . 36. а)  $(\operatorname{grad} u)^2 + u \Delta u$ ; б)  $f''(r) + (2/r)f'(r)$ ; в)  $[\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v]$ ; г)  $(\operatorname{rot} \mathbf{b} \nabla) \times$   
 $\times \mathbf{a} - (\mathbf{a} \nabla) \operatorname{rot} \mathbf{b} - \operatorname{rot} \mathbf{b} \cdot \operatorname{div} \mathbf{a}$ . 37.  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 2(2zx - x^2)\mathbf{i} + 2(2xy - y^2)\mathbf{j} +$   
 $+ 2(2yz - z^2)\mathbf{k}$ ;  $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} = 2(2zx + y^2)\mathbf{i} + 2(2xy + z^2)\mathbf{j} + 2(2yz + x^2)\mathbf{k}$ ;  $\Delta \mathbf{a} = 2(x^2 + y^2)\mathbf{i} + 2(y^2 + z^2)\mathbf{j} + 2(z^2 + x^2)\mathbf{k}$ . 42. а)  $\mathbf{a}_{\text{пот}} = (1/3)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{a}_{\text{сол}} = (2x/3 + y)\mathbf{i} + (x - 4y/3)\mathbf{j} + (2z/3 + 1)\mathbf{k}$ ; б)  $\mathbf{a}_{\text{пот}} = \mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_{\text{сол}} = 0$ ; в)  $\mathbf{a}_{\text{пот}} = 0$ ,  $\mathbf{a}_{\text{сол}} = \mathbf{a}_3$ . Следует иметь в виду, что ответы этой задачи не однозначны. Например, возможно  $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_{\text{пот}} = \mathbf{a}_{\text{сол}}$ , где  $\mathbf{a}_{\text{пот}} = (x + z)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{a}_{\text{сол}} = (x - y - z)\mathbf{i} + (y - x - z)\mathbf{j} + (2z + y + x)\mathbf{k}$ . 43. а)  $1/6$ ; б)  $4\pi/3$ . 44. а) 0; б) 0. 45. а)  $4\pi/3$ ; б)  $5\pi/3$ ; в)  $-5\pi/3$ ; г)  $\pi/3$ ; д)  $2\pi/3$ . 46. а) 0; б)  $2\pi 3\sqrt{3}$ ; в) 0; г)  $10\pi\sqrt{3}/81$ . 47. а) 0; б)  $-2\pi/3\sqrt{3}$ ; в)  $2\pi/3\sqrt{3}$ ; г) 0; д)  $-10\pi\sqrt{3}/81$ ; е)  $10\pi\sqrt{3}/81$ . 48.  $\pi\alpha(3 - \alpha^2)/3\sqrt{3}$ ;  $\alpha = 1$ ;  $\alpha =$

- = -1. 49. Соленоидальными являются поля  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_3$ ; 0;  $8\pi/3$ ; 0; 0. 50. а) 3/2; б)  $-1/2$ ; в)  $-1/2$ ;  $-1/2$ . 51. а)  $-\pi\sqrt{3}$ ; б)  $-2\sqrt{3}/3$ ; в)  $\pi/\sqrt{3}$ ; г)  $-2\pi/(3\sqrt{3})$ . 52.  $-\pi\sqrt{3}(1 - \alpha^2/3)$ ;  $\alpha = 0$ . 53. а) 2/3; б) 26/3. 54. а) 2; б)  $-2$ ; в)  $-1$ ; г) 1; д)  $-1$ ; е)  $-2$ . 55.  $u = \int_0^r tf(t)dt + C$ . 56. Потенциальными являются поля  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ ; 0; 0; 0;  $\pi$ . 57.  $\mathbf{a}_1 = \operatorname{grad} u_1$ ;  $u_1 = xy + xz + yz + C$ ;  $\mathbf{a}_2 = \operatorname{grad} u_2$ ;  $u_2 = \int_0^x f_1(\xi)d\xi + \int_0^y f_2(\eta)d\eta + \int_0^z f_3(\zeta)d\zeta + C$ . 58.  $N_1$  образует острый угол с осью  $Oz$ . 59.  $u = \ln r + C$ . 60. а)  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$  при  $x^2 + y^2 \neq 0$ ; б)  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$  при  $y^2 + z^2 \neq 0$ ; в)  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = [4xy/(x^2 + y^2)^2] \mathbf{k}$ ; г)  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = [4yz/(y^2 + z^2)^2] \mathbf{i}$ ; циркуляции всех полей вдоль указанных окружностей равны нулю. Поле а) потенциально в указанной области, и его потенциал есть  $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2/2} + C$ . Поле б) потенциально в указанной области, и его потенциал есть  $u = \ln \sqrt{y^2 + z^2} + x^2/2 + C$ . Поля в) и г) не являются потенциальными. 61. 0 при  $x^2 + y^2 \neq 0$ ;  $2\pi$ ; нет; да. 62.  $\operatorname{grad} u = [-|y|/(x^2 + y^2)] \mathbf{i} + [|x|/(x^2 + y^2)] \mathbf{j}$ ; 0; да. 63. 0 при  $x^2 + y^2 \neq 0$ ;  $2\pi$ ; область не является односвязной. 75. б)  $1^\circ$ )  $\pi/2$ ;  $2^\circ$ ) 0;  $3^\circ$ )  $\pi$ ;  $4^\circ$ ) 0; в)  $1^\circ$ ) в точке  $A$ :  $\mathbf{i} = \mathbf{e}_\rho$ ,  $\mathbf{j} = \mathbf{e}_\varphi$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{e}_z$ ; в точке  $B$ :  $\mathbf{i} = -\mathbf{e}_\varphi$ ,  $\mathbf{j} = \mathbf{e}_\rho$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{e}_z$ ;  $2^\circ$ ) в точке  $A$ :  $\mathbf{e}_\rho = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$ ; в точке  $B$ :  $\mathbf{e}_\rho = \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$ . 76. б)  $1^\circ$ )  $\pi/2$ ;  $2^\circ$ ) 0;  $3^\circ$ )  $\pi$ ;  $4^\circ$ ) 0; в)  $1^\circ$ ) в точке  $A$ :  $\mathbf{i} = \mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{j} = \mathbf{e}_\varphi$ ,  $\mathbf{k} = -\mathbf{e}_\theta$ ; в точке  $B$ :  $\mathbf{i} = -\mathbf{e}_\varphi$ ,  $\mathbf{j} = \mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{k} = -\mathbf{e}_\theta$ ;  $2^\circ$ ) в точке  $A$ :  $\mathbf{e}_r = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{j}$ ; в точке  $B$ :  $\mathbf{e}_r = \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i}$ . 77.  $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$ . 78.  $\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\rho) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right]$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_z$ , где  $\mathbf{a} = a_\rho(\rho, \varphi) \mathbf{e}_\rho + a_\varphi(\rho, \varphi) \mathbf{e}_\varphi$ . 79.  $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$ . 80. а)  $\operatorname{div} \mathbf{a}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\rho) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \rho \frac{\partial a_z}{\partial z} \right]$ , где  $\mathbf{a} = a_\rho \mathbf{e}_\rho + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi + a_z \mathbf{e}_z$ ; б)  $\operatorname{div} \mathbf{a}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r \sin \theta) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \sin \theta) + r \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right]$ , где  $\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ . 81. а)  $\operatorname{rot} \mathbf{a}(\rho, \varphi, z) = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left( \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\varphi) - \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_z$ , где  $\mathbf{a} = a_\rho \mathbf{e}_\rho + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi + a_z \mathbf{e}_z$ ; б)  $\operatorname{rot} \mathbf{a}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r \sin \theta} \times \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (ra_\varphi) \right] \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (ra_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\varphi$ , где  $\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ . 82.  $\Delta u(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ . 83. а)  $C_1 \ln \rho + C_2$ ; б)  $C_1 \varphi + C_2$ ; в)  $C_1 z + C_2$ ;  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные. 84. а)  $C_1/r + C_2$ ; б)  $C_1 \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + C_2$ ; в)  $C_1 \varphi + C_2$ ;  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные. 85.  $m(m+1)r^{m-2}$ . 86.  $\operatorname{div} \mathbf{e}_1 = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial(H_2 H_3)}{\partial q_1}$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{e}_2 = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial(H_3 H_1)}{\partial q_2}$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{e}_3 = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial(H_1 H_2)}{\partial q_3}$ ; а)  $\operatorname{div} \mathbf{e}_\rho = \frac{1}{\rho}$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{e}_\varphi = 0$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{e}_z = 0$ ; б)  $\operatorname{div} \mathbf{e}_r = \frac{2}{r}$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \theta$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{e}_\varphi = 0$ . 87. а)  $\operatorname{rot} \mathbf{e}_\rho = 0$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_z$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{e}_z = 0$ ; б)  $\operatorname{rot} \mathbf{e}_r = 0$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{r} \operatorname{ctg} \theta$ ,  $\mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta$ .

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аддитивность интеграла 150, 188  
Асимптотические формулы 55

Безвихревое поле 388  
Бесконечная производная 66  
Бесконечно большая последовательность 21  
— — более высокого порядка роста 29  
— — функция при  $x \rightarrow a$  справа, слева 42  
— — — —  $x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$  42  
— — дифференцируемая функция 81  
— — малая последовательность 21  
— — функция 52, 199  
— — более высокого порядка 52, 199  
Бесконечно малые одного порядка 52

Вектор нормали 69, 216  
Вектор-функция 68  
Векторная линия 384  
Векторное поле 384  
Векторный потенциал 389  
Вертикальная асимптота 130  
Верхний интеграл Дарбу 144  
— — Лебега 187  
— — предел последовательности 34  
Верхняя грань функции 108  
— — числового множества 8  
— — сумма по Лебегу 187  
— — — Риману 144  
Ветвь кривой 138  
Вихрь 387  
Внешняя мера 179  
Внутренняя точка множества 192  
— — поверхности 346  
Возрастание функции в точке 116  
— — на промежутке 116  
Возрастающая последовательность 32  
Волновое уравнение 406  
Вторая производная 80  
Второй дифференциал 81, 226  
Выпуклая область 233

Выпуклость графика вверх 131  
— — вниз 131

Гармоническая функция 340, 402  
Геометрическая интерпретация дифференциала 77  
— — — дифференцируемости функции двух переменных 215  
— — — производной 66  
— — — равномерной непрерывности функции 113  
— — — теоремы Лагранжа 117  
— — — — Ролля 117  
Геометрические приложения двойного интеграла 283  
— — определенного интеграла 164, 165, 167, 168, 171  
Гиперболический косинус 49  
— — котангенс 49  
— — синус 49  
— — тангенс 49  
Гладкая кривая 318  
— — поверхность 346  
Годограф 68  
Градиент 385  
Граница множества 192  
— — поверхности 346  
Границная точка множества 192  
— — поверхности 346

Двойной интеграл 279  
Двусторонняя поверхность 360  
Диаметр множества 279  
Дивергенция 387, 410  
Дифференциал независимой переменной 77, 217  
— — функции 77, 216  
— —  $n$ -го порядка 82, 227  
Дифференцирование 65  
Дифференцируемая  $n$  раз функция 81, 226  
— — функция 77, 214  
Дифференцируемое  $n$  раз скалярное, векторное поле 384

- Длина кривой 165, 317  
 Дополнение множества 179
- Зависимость функций 257  
 Закон сохранения интенсивности векторной трубы 410  
 Замена переменных в выражении, содержащем обыкновенные производные 269  
 — — —, — частные производные 270  
 Замечательные пределы 47, 49  
 Замкнутая область 193  
 — поверхность 348  
 Замкнутое множество 178, 192  
 Знакоопределенная квадратичная форма 238  
 Знакопеременная квадратичная форма 238
- Измеримая на множестве функция 184  
 Измеримое (по Лебегу) множество 179  
 Инвариантность формы первого дифференциала 78, 217  
 Интеграл Гаусса 379  
 — Лебега 186  
 — с переменным верхним пределом 153  
 Интегральная сумма 143, 279, 295, 312, 317, 325, 353  
 Интегрирование иррациональных функций 100  
 — рациональных функций 96  
 — тригонометрических функций 106  
 Интегрируемая по Лебегу функция 187  
 — Риману функция 143  
 — функция 279, 295
- Касательная 66  
 — плоскость 215  
 Квадрируемая поверхность 348  
 — фигура 167  
 Квантор всеобщности 8  
 — существования 8  
 Колебание функции 109, 144  
 Конвективная производная 392  
 Коэффициент растяжения объема 300  
 — площади 283  
 Криволинейные координаты 282, 298  
 — ортогональные координаты 432  
 Криволинейный интеграл второго рода 324  
 — первого рода 317  
 Критерий Коши сходимости последовательности 37, 194  
 — Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы 238
- Кубируемое тело 171, 312  
 Кусочно гладкая кривая 318  
 — поверхность 346  
 Кусочно непрерывная функция 145  
 — — вдоль кривой 318
- Лебеговская интегральная сумма 188  
 Лебеговское разбиение 187  
 Левая производная 66  
 Левый предел 41  
 Лемма Дарбу 144  
 Линейность интеграла 87, 149, 188  
 Линия тока 383  
 — уровня 383  
 Локальная производная 392  
 Локальный максимум 131, 236  
 — минимум 131, 236  
 — экстремум 131, 236
- Максимальное значение функции 109  
 Масштабный коэффициент 433  
 Матрица квадратичной формы 237  
 Мера (Лебега) 179  
 Метод вычеркивания 98  
 — замены переменной 91, 155, 281, 297, 313  
 — интегрирования по частям 94  
 — исключения части переменных 261  
 — Лагранжа 263  
 — математической индукции 14  
 — неопределенных коэффициентов 98  
 Минимальное значение функции 109  
 Многочлен Тейлора 125, 229  
 Множества одинаковой мощности 177  
 Множество меры нуль 182  
 — мощности континуума 177  
 — точек площади нуль 280  
 Монотонная последовательность 32
- Наклонная асимптота 130  
 Невозрастающая последовательность 32  
 Независимая переменная 40, 198  
 Независимость интеграла от пути интегрирования 335  
 Неограниченная последовательность 16  
 Неопределенностя разных типов 25, 59, 60  
 Неопределенный интеграл 87  
 Неособая точка поверхности 347  
 Непрерывная кривая 193  
 Непрерывность функции в точке 48, 205  
 — — — — по отдельной переменной 205

Непрерывность функции в точке по совокупности переменных 205  
 — — — слева 48  
**Непрерывность функции в точке справа 48**  
 — — вдоль кривой 318  
 — — множестве 206  
**Неравенство Бернулли 14**  
 — треугольника 195  
**Неубывающая последовательность 32**  
**Нечетная функция 130**  
**Неявная функция 243**  
**Нижний интеграл Дарбу 144**  
 — — Лебега 187  
 — объем тела 312  
 — предел последовательности 34  
**Нижняя грань функции 109**  
 — числового множества 7, 8  
 — сумма по Лебегу 187  
 — — — Риману 144  
**Нормаль 69, 216**  
**Ньютоновский потенциал поля тяготения 386**

**Область 193**  
 — определения функции 40, 198  
**Обобщенные полярные координаты 290**  
 — сферические координаты 299  
**Образ области 281**  
**Общая форма остаточного члена 125**  
**Объединение множеств 177**  
**Объем  $m$ -мерного параллелепипеда 312**  
 — тела (по Жордану) 171, 312  
**Объемно односвязная область 409**  
**Ограниченнная последовательность 16, 194**  
 — сверху функция 108  
 — снизу функция 108  
 — функция 108, 206  
**Ограниченнное множество 8, 193**  
 — сверху множество 7  
 — снизу множество 7  
**Односвязная область 335**  
**Односторонняя поверхность 360**  
**Окрестность 6, 193**  
**Оператор Гамильтона 390**  
 — дифференциала 227  
 — “набла” 390  
 — Лапласа 402  
 — производной по направлению 391  
 — частной производной 227  
**Определенный интеграл 143**  
**Определитель Якоби 245**  
**Ориентация поверхности 361**  
**Ориентируемая поверхность 361**  
**Особая точка поверхности 347**

**Остаточный член асимптотической формулы 56**  
 — — формулы Тейлора в форме Коши и Лагранжа 125  
**Остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано 125, 229**  
**Открытое множество 178, 192**  
**Открытый  $m$ -мерный шар 192**  
**Отрицательно определенная квадратичная форма 237**  
**Отрицательное направление обхода 325**  
  
**Параметр 67, 345**  
 — — Ламэ 433  
**Параметрическое задание поверхности 345**  
 — — функции 68  
**Первообразная 87, 154**  
**Первый дифференциал 77, 216**  
**Переменная дуга 165**  
**Пересечение множеств 177**  
**Периодическая функция 130**  
**Плоская фигура 167**  
**Площадь плоской фигуры (по Жордану) 167**  
 — — поверхности 348  
**Поверхностно односвязная область 369**  
**Поверхностный интеграл второго рода 361**  
 — — первого рода 353  
**Поверхность уровня 383**  
**Повторный интеграл 280, 296, 313**  
 — предел 200  
**Подпоследовательность 34**  
**Подстановки Эйлера 100**  
**Покоординатная сходимость 194**  
**Полная производная 392**  
**Полное приращение 204**  
**Полный дифференциал 335, 369**  
**Положительно определенная квадратичная форма 237**  
**Положительное направление обхода 325, 367**  
**Последовательность 16**  
 — точек пространства 193  
**Потенциал электрического поля 383**  
**Потенциальное поле 386**  
**Поток векторного поля 363, 407**  
 — жидкости 408  
**Правая производная 66**  
**Правила дифференцирования 66**  
**Правило Лопитала 122**  
 — построения отрицания 8  
 — сравнения чисел 5  
**Правый предел 41**

- Предел вектор-функции 68  
 — длин ломаных 164  
 — интегральных сумм 143, 279, 295,  
 317, 325, 348  
 Предел последовательности 16  
 — точек пространства 193  
 — функции в точке 40, 199  
 — на бесконечности 41, 199  
 Предельная точка множества 40, 192  
 — последовательности 34  
 Представление вещественных чисел  
 в виде бесконечных десятичных  
 дробей 5  
 Приращение функции 65, 205  
 Произведение вещественных чисел 11  
 Производная 65  
 — вектор-функции 68  
 — по направлению 385  
 —  $n$ -го порядка 80  
 Прообраз области 281  
 Простая замкнутая кривая 164, 317  
 — незамкнутая кривая 164, 317  
 — область 334, 377  
 — поверхность 346  
 Простейшие дроби 97  
 — элементарные функции 48  
 Равенство вещественных чисел 5  
 Равномерная непрерывность функции  
 112, 206  
 Разбиение множества 186  
 Разностное отношение 65  
 Разность множеств 178  
 Расстояние между двумя точками 191  
 Расходящаяся последовательность 16  
 Ротор 387, 414  
 Свойство, справедливое почти всюду  
 184  
 Связное множество 193  
 Силовая линия 383  
 Скалярное поле 383  
 Скалярный потенциал 386  
 Сложная функция 48, 206  
 Смешанная производная 226  
 Совокупность неявных функций,  
 определяемых системой уравнений 245  
 Соленоидальное поле 388, 410  
 Спрямляемая кривая 164, 317  
 Среднее значение функции 150  
 Строго монотонная последовательность 32  
 Сторона поверхности 360  
 Сумма множеств 177  
 — ряда 178  
 Суммы Дарбу 144  
 Сферические координаты 299  
 Схема построения графика функции  
 $y = f(x)$  132  
 Схема построения кривой, заданной  
 параметрически 137  
 Сходящаяся последовательность 16,  
 193  
 Сходящийся ряд 178  
 Счетная аддитивность меры Лебега  
 179  
 Счетное множество 177  
 Таблица основных неопределенных  
 интегралов 89  
 — производных простейших элемен-  
 тарных функций 65  
 Телеграфное уравнение 405  
 Тело 171, 300, 312  
 Теорема Больцано–Вейерштрасса 34,  
 194  
 — Вейерштрасса вторая 109, 206  
 — — первая 108, 206  
 — Кантора 113, 206  
 — Коши 117  
 — Лагранжа 117  
 — Лузина 185  
 — о вычислении площади поверхно-  
 сти с помощью двойного интегра-  
 ла 348  
 — — — — — поверхностного интеграла  
 первого рода с помощью двойно-  
 го интеграла 354  
 — — — — — дифференцируемости обратной  
 функции 67  
 — — — — — сложной функции 67, 216  
 — — — локальной ограниченности функции,  
 непрерывной в точке 108  
 — — — непрерывности сложной функции 48, 206  
 — — — разложение рациональной дро-  
 би на сумму простейших дробей 97  
 — — — связи между криволинейными  
 интегралами первого и второго  
 рода 326  
 — — — структуре открытых множеств 178  
 — — — существовании точных граней  
 числового множества 9  
 — — — сходимости монотонной ограни-  
 ченной последовательности 32  
 — — — трех последовательностях 25  
 — — об устойчивости знака непрерыв-  
 ной функции 108  
 — — Ролля 117

- Теоремы о вычислении кратных интегралов с помощью повторного интегрирования 280
- — — криволинейных интегралов с помощью определенного интеграла 318, 326
  - — — дифференцируемых функциях 77, 116, 215
  - — зависимости и независимости функций 257, 258
  - — замене переменных в интегралах 91, 155, 282, 300, 316
  - — направлении выпуклости и точках перегиба графика функции 131
  - — непрерывных функциях 48, 49, 108, 109, 205, 206
  - — неявных функциях 243–246
  - — первообразных 87, 91, 94, 97, 154, 155
  - — пределах последовательностей 16, 21, 25, 32, 34, 37, 194
  - — — функций 41, 199, 200
  - — производных 66, 67
  - — равенстве смешанных производных 226
  - об измеримых функциях 184, 185
  - интегрируемых функциях 144, 145, 187, 279, 280, 295
  - условиях независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования 335, 369
  - экстремумах функций 131, 236, 263
- Точка возврата 141
- возможного экстремума 131, 237
  - перегиба 131
  - разрыва 49, 205
  - I и II рода 49
  - устранимого разрыва 49
  - *m*-мерного координатного пространства 191
- Точные верхняя и нижняя грани множества 8
- — — функции 108, 206
- Тройной интеграл 295
- Убывание функции в точке 116
- — на промежутке 116
- Убывающая последовательность 32
- Угловая точка 134
- Угловой минор 237
- Упорядоченная совокупность чисел 191
- Уравнение касательной 66
- — плоскости 216
- Уравнение Лапласа 235
- теплопроводности 235
  - Пуассона 403
- Уравнения Максвелла 389
- Условия связи 261
- Условный максимум 261
- минимум 261
  - экстремум 261
- Физическая интерпретация вектор-функции и ее производной** 68
- — дифференциала 77
  - — поверхностного интеграла второго рода 363
  - — производной 66
  - — теоремы Лагранжа 117
  - — — Ролля 117
  - — формулы Остроградского–Гаусса 408
  - — — Стокса 412
  - — частной производной 213
- Формула бинома Ньютона 29
- Грина 334
  - — вторая 338, 425, 426
  - — первая 425, 426
  - замены переменной 91, 155
  - интегрирования по частям 94, 155
  - Коши 118
  - Лагранжа конечных приращений 117, 229
  - Лейбница 81
  - Маклорена 125
  - Ньютона–Лейбница 155
  - Остроградского–Гаусса 378, 408
  - Стокса 368, 411
  - Тейлора 125, 228
- Формулы для вычисления длин плоских кривых 165
- — — моментов и координат центра тяжести 175, 284, 301, 319, 327, 354
- Формулы для вычисления объемов тел 172, 282, 300
- — — площадей 168, 283, 348
  - замены переменных 269
  - — — в кратных интегралах 281, 297, 313
  - среднего значения 150
- Фундаментальная последовательность 37, 194
- Функциональная матрица 257
- Функция 40
- Дирихле 44, 146, 151, 185, 189
  - Лагранжа 263
  - Римана 148
  - *m* переменных 198
  - $\operatorname{sgn} x$  88, 154

- Цилиндрические координаты 298  
 Циркуляция 411
- Частичная сумма ряда 178  
 Частичный предел последовательности 34  
 Частная производная 213  
 — —  $n$ -го порядка 225  
 Частное значение функции 40, 198  
 — приращение функции 204  
 Четная функция 130  
 Число  $e$  49  
 Числовая последовательность 16  
 — прямая 6  
 Числовой ряд 178  
 Член последовательности 16  
 — ряда 178
- Эквивалентные бесконечно малые 52  
 — множества 177  
 — функции 185  
 Эквидистантная поверхность 387  
 Экстремум 131, 236  
 Элемент объема в криволинейных координатах 300
- Элемент объема в прямоугольных координатах 300  
 — площади в криволинейных координатах 283  
 — — — прямоугольных координатах 283  
 Элементарная функция 49  
 Эллиптический интеграл 166
- Явная функция 130  
 Явное задание поверхности 345  
 Якобиан 245
- $C$ -свойство измеримых функций 185  
 $t$ -кратный интеграл 312  
 $t$ -мерная сфера 192  
 $t$ -мерное евклидово пространство 191  
 — координатное пространство 191  
 $t$ -мерный параллелепипед 192  
 — шар 192  
 “о малое” 52  
 $xyz$ -проектируемая поверхность 368  
 $y$ -трапециевидная область 280  
 $z$ -цилиндрическая область 377  
 $\varepsilon$ -окрестность 6, 192

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
-----------------------	---

### ГЛАВА I ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Сравнение вещественных чисел . . . . .	5
§ 2. Точные грани числового множества. Применение символов математической логики . . . . .	7
§ 3. Арифметические операции над вещественными числами . . . . .	11
§ 4. Метод математической индукции . . . . .	14

### ГЛАВА II ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Ограничные и неограниченные последовательности . . . . .	16
§ 2. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности . .	21
§ 3. Свойства сходящихся последовательностей . . . . .	24
§ 4. Замечательные пределы . . . . .	29
§ 5. Монотонные последовательности . . . . .	32
§ 6. Предельные точки . . . . .	34
§ 7. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности . . . . .	37

### ГЛАВА III ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

§ 1. Предел функции. Теоремы о пределах. Бесконечно большие функции . . . . .	40
§ 2. Непрерывность функции в точке . . . . .	48
§ 3. Сравнение бесконечно малых функций. Символ “о малое” и его свойства . . . . .	52
§ 4. Вычисление пределов функций с помощью асимптотических формул. Вычисление пределов показательно-степенных функций . . . . .	58

### ГЛАВА IV ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

§ 1. Производная функции. Правила дифференцирования . . . . .	65
§ 2. Дифференциал функции . . . . .	77
§ 3. Производные и дифференциалы высших порядков . . . . .	80

**ГЛАВА V  
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ**

§ 1	Первообразная и неопределенный интеграл	87
§ 2	Простейшие неопределенные интегралы	89
§ 3	Метод замены переменной	91
§ 4	Метод интегрирования по частям	94
§ 5	Интегрирование рациональных функций	96
§ 6	Интегрирование иррациональных функций	100
§ 7	Интегрирование тригонометрических функций	106

**ГЛАВА VI  
ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О НЕПРЕРЫВНЫХ  
И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ**

§ 1	Теоремы об ограниченности непрерывных функций	108
§ 2	Равномерная непрерывность функции	112
§ 3	Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях	116
§ 4	Правило Лопитала	122
§ 5	Формула Тейлора	125

**ГЛАВА VII  
ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ  
И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ**

§ 1	Построение графиков явных функций	130
§ 2	Исследование плоских кривых, заданных параметрически	137

**ГЛАВА VIII  
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ**

§ 1	Интегрируемость функции (по Риману) и определенный интеграл	143
§ 2	Свойства определенного интеграла	149
§ 3	Формула Ньютона–Лейбница	153
§ 4	Вычисление длин плоских кривых	164
§ 5	Вычисление площадей плоских фигур	167
§ 6	Вычисление объемов тел	171
§ 7	Физические приложения определенного интеграла	173

**ГЛАВА IX  
МЕРА И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА**

§ 1	Мера множества	177
§ 2	Измеримые функции	184
§ 3	Интеграл Лебега	186

**ГЛАВА X  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ  
ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

§ 1	Последовательности точек в $m$ -мерном евклидовом пространстве	191
§ 2	Предел функции	198
§ 3	Непрерывность функции	204
§ 4	Частные производные и дифференцируемость функции	213
§ 5	Частные производные и дифференциалы высших порядков	225
§ 6	Локальный экстремум функции	236

**ГЛАВА XI  
НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ**

§ 1	Неявные функции	243
§ 2	Зависимость функций	257
§ 3	Условный экстремум	261
§ 4	Замена переменных	269

**ГЛАВА XII  
КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ**

§ 1	Двойные интегралы	279
§ 2	Тройные интегралы	295
§ 3	$m$ -кратные интегралы	312

**ГЛАВА XIII  
КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ**

§ 1	Криволинейные интегралы первого рода	317
§ 2	Криволинейные интегралы второго рода	324
§ 3	Формула Грина Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования	333

**ГЛАВА XIV  
ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ**

§ 1	Площадь поверхности	345
§ 2	Поверхностные интегралы первого рода	353
§ 3	Поверхностные интегралы второго рода	360
§ 4	Формула Стокса	367
§ 5	Формула Остроградского–Гаусса	377

**ГЛАВА XV  
СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ**

§ 1	Дифференциальные операции в скалярных и векторных полях	383
§ 2	Повторные дифференциальные операции в скалярных и векторных полях	402
§ 3	Интегральные характеристики векторных полей	407
§ 4	Основные дифференциальные операции векторного анализа в криволинейных ортогональных координатах	432
<b>Ответы и указания</b>		437
<b>Предметный указатель</b>		471

Учебное издание

*БУТУЗОВ Валентин Федорович,  
КРУТИЦКАЯ Наталья Чары,  
МЕДВЕДЕВ Герман Николаевич,  
ШИШКИН Александр Александрович*

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
В ВОПРОСАХ И ЗАДАЧАХ**

Редактор *Е.Ю. Ходан*  
Оригинал-макет *Н.Л. Ивановой*

ЛР №071930 от 06.07.99. Подписано в печать 25.05.01.  
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 30. Уч.-изд. л. 33. Тираж 3000 экз. Заказ № 1742

Издательская фирма “Физико-математическая литература”  
МАИК “Наука/Интерperiодика”  
117864 Москва, ул. Профсоюзная, 90

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в ППП “Типография “Наука”  
121099 Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 5-9221-0127-7



9 785922 101271