

Входное тестирование по математике, ФКН 2019

Онлайн часть

Тест выполняется онлайн и состоит из трёх частей, которые становятся доступны последовательно одна за другой. На выполнение заданий каждой из трёх частей даётся 20 минут, по окончании которых сдача заданий из данной части становится невозможной. Между частями предусмотрен небольшой перерыв от 2 до 5 минут.

Выполнять задания можно в любом порядке – внутри данной части теста задачи НЕ упорядочены по сложности и имеют одинаковый вес. Суммарный вес задач каждой из частей одинаков (например, вес одной задачи первой части в 9 раз меньше веса задачи третьей части).

1 Первая часть

- Степан и Илья решили угостить друзей пиццей и заказали набор из 5ти пицц. При доставке выяснилось, что Степану не хватает 970 рублей, чтобы самостоятельно оплатить заказ, Илье – не хватает 810 рублей, и даже им вместе – тоже не хватает ещё 280 руб. Сколько стоил набор пицц (в рублях)?
- Для функции f выполнено равенство $f\left(\frac{x+3}{x-1}\right) = x^2$. Чему равно $f(2)$?
- У куба срезали все его вершины, так что теперь на их месте остались маленькие треугольные грани (эти треугольные грани между собой не пересекаются даже по вершинам). Сколько рёбер у получившейся фигуры?
- После того, как Наташа съела половину персиков из банки, уровень компота понизился на одну треть. На какую часть (от полученного уровня) понизится уровень компота, если съесть половину оставшихся персиков?
- Чему равна сумма всех корней уравнения $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$?
- Чему равен свободный коэффициент уравнения касательной к параболе $y = x^2$ в точке $(2, 4)$?
- На глобусе проведены все меридианы с шагом 15° и все параллели с шагом в 10° . На сколько частей разделена поверхность глобуса? (Меридиан — дуга, соединяющая Северный полюс с Южным. Параллель — это окружность, параллельная экватору. Нулевая параллель — это экватор)
- Найдите максимум функции 256^{5x-x^2-6} при вещественных x .
- Остап придумал новую увлекательную игру, для которой изготовил “правильную” игральную кость: вероятность выпадения 6 на этой кости равно 0.3, вероятность выпадения единицы равна 0.1, вероятность выпадения остальных четырёх вариантов одинакова и равна по 0.15. Чему равна вероятность набрать сумму 17 за 3 броска такой кости? (ответ укажите в виде десятичной дроби)

10. Скорость машины на протяжении путешествия равнялась $60 + 0.5t + \pi \sin \pi t$ км, где t – время в пути, измеряемое в часах. Какое расстояние машина прошла за второй час пути (т.е. от момента “1 час в пути” до момента “2 часа в пути”)?
11. В компании все кроме Пети пожали руку ровно трём другим людям. А Петя пожал руку всем в компании. Сколько человек было в этой компании, если рукопожатий всего было сделано 100?
12. Найдите радиус вписанной окружности “египетского треугольника” (со сторонами 3, 4, 5).
13. Для какого количества целых значений параметра a прямая $y = x + a$ пересекает окружность $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 4^2$?
14. Вычислите сумму всех нечётных чисел от 1 до 99.
15. На сколько нулей оканчивается число $200!$ (т.е. число $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 199 \cdot 200$)?
16. Чему равен модуль комплексного числа z^2 , где $z = 6 - 4i$ (i – это мнимая единица)?
17. Чему равен наибольший общий делитель чисел $2^{12} - 1$ и $2^9 - 1$?
18. На олимпиаде по русскому языку 350 участников разместили в трёх аудиториях. В каждой из первых двух удалось разместить по 140 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории. (ответ укажите в виде десятичной дроби)

2 Вторая часть

1. Какое максимальное число можно получить из числа 271828182845904523536 вычеркиванием десяти цифр?
2. В строю 1025 солдат. По команде солдаты рассчитываются на первый–второй, и из строя выходят «первые». Затем оставшиеся снова рассчитываются на первый–второй и по команде из строя выходят «первые» и т. д. до тех пор, пока не останется один солдат. Какой по счёту солдат останется?
3. Найдите сумму всех целых x для которых выполнено неравенство $\frac{\ln(3x - 6)}{3x - 6} > \frac{\ln(2x - 4)}{2x - 4}$
4. Квадрат $ABCD$ – грань куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, AC – диагональ этой грани, AC_1 – главная диагональ куба. Пусть α – это угол между AC и AC_1 . Вычислите $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$.
5. С числом разрешается делать одну из 6 операций: либо прибавлять к нему целое число от 1 до 3, либо умножать его на целое число от 1 до 3. За какое минимальное число таких операций можно получить из числа 6 число 43?
6. Вычислите $1/\operatorname{tg}(\arccos \frac{3}{5})$

3 Третья часть

1. Строительство нового завода стоит 75 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0.5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0.5x^2 + x + 7)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 3 года?
2. В взводе 101 солдат разного роста. Сколькими способами можно выстроить этот взвод так, чтобы какие-то 100 из них (не обязательно стоящие подряд) оказались выстроеными по росту слева направо?