Множества (терминология и обозначения)

Множество состоит из *элементов*. Например, множество целых неотрицательных чисел состоит из элементов $0, 1, 2, 3, \ldots$, а множество студентов Вашей группы состоит из ? элементов (спросите у старосты).

Обозначения: $x \in A$ читается как «x является элементом множества A». При задании множества перечислением элементов используются фигурные скобки. Например, русский алфавит есть множество $\{а, б, в, \ldots, ю, я\}$ из 33 элементов (букв). При перечислении порядок не важен и возможны повторения: $\{1, 2\}$, $\{2, 1\}$, $\{1, 2, 1\}$ — одно и то же множество из двух элементов. Число элементов A обозначается $|A|$, например, $|\{1, 2\}| = |\{1, 2, 1\}| = 2$.

Бывает и *пустое* множество, не содержащее ни одного элемента. (Например, обычно таково множество получивших все десятки за первый курс.) Оно обозначается $\varnothing$.

Долгое время вместо «уравнение $x^2+1 = 0$ не имеет решений» школьников учили говорить «множество решений уравнения $x^2+1 = 0$ пусто», а ответ к задаче «решить уравнение $x^2 = 1$» учили записывать как $\{-1, 1\}$.

1. Сколько элементов во множестве $\{\varnothing\}$?

2. Напишите какое-нибудь уравнение, у которого множество решений есть $\{1, 2, 5\}$.

3. Напишите какое-нибудь уравнение, у которого множество решений состоит из всех неотрицательных чисел; из всех положительных чисел.

4. Найдите все:
а) подмножества множества $\{1, 2\}$;
б) подмножества множества $\{1, 2, 3\}$;
в) собственные подмножества множества $\{1, 2, 3\}$.

5. Задайте следующие множества перечислением их элементов:
а) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x + 12 = 0\}$;
б) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -10 < x \leq -2\}$;
в) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -10 < x \leq -2\}$;
г) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x^3 - 2x^2 - x = 0\}$;
д) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + \frac{1}{x} \leq 2 \text{ и } x > 0\}$;
е) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 5x - 14 \leq 0\}$;

6. Задайте следующие множества указанием их характеристического свойства:
а) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;
б) $\{3, 6, 9, 12, 15\}$;
в) $\{1, 4, 9, 16, 25\}$;
г) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$;
д) $\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \ldots\right\}$;
е) $\left\{\frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, \ldots\right\}$;
ж) $\left\{\frac{1}{4}, \frac{4}{9}, \frac{9}{16}, \frac{16}{25}, \ldots\right\}$;
з) $\left\{\frac{4}{7}, \frac{7}{12}, \frac{10}{17}, \frac{13}{22}, \ldots\right\}$.

7. Укажите, какие из записей верны:
а) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ или $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$;
б) $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 2\}\}$ или $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{1, 2\}\}$.

8. Докажите, что если A — собственное подмножество множества B, а B — собственное подмножество множества C, то A — собственное подмножество множества C.

Пересечение множеств A и B состоит из тех элементов, которые входят одновременно и в A, и в B. Обозначение: $A \cap B$.

Объединение множеств A и B состоит из тех элементов, которые входят хотя бы в одно из множеств A и B. Обозначение: $A \cup B$.

Разность множеств A и B состоит из тех элементов множества A, которые не входят в множество B.

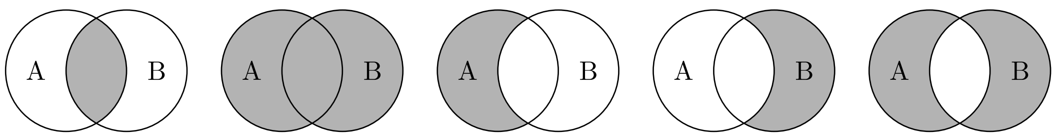
Симметрическая разность множеств A и B состоит из элементов, входящих ровно в одно из есть множеств: $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

9. Восполните пробелы:

$$\begin{array}{cc} x \in A \cap B & (x \text{ принадлежит } A) \text{ и } (x \text{ принадлежит } B) \\ ??? & (x \text{ принадлежит } A) \text{ или } (x \text{ принадлежит } B) \\ x \in A \setminus B & ??? \end{array}$$

(Слово «или» понимается в неисключительном смысле: возможно, что верно и то, и другое. Какое множество получится для «исключающего или» — когда верно ровно одно из двух?)

10. Сделайте подписи к рисункам:



$A \cap B$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $A \setminus B$

11. Пусть $A = \{4, 6, 10\}$, $B = \{4, 8, 12\}$, $C = \{8, 12, 4\}$ и $D = \{12\}$. Какие из следующих утверждений верны?

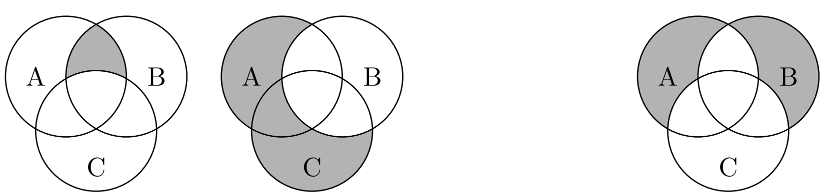
1) $10 \in C$; 2) $12 \in C$; 3) $A \subseteq B$; 4) $D \subset C$; 5) $B = C$; 6) $A = B$.

12. Известно, что $A = \{1, 2, 4, 5, 9\}$, $B = \{2, 3, 5, 6, 9\}$, $C = \{4, 5, 6, 7\}$. Найдите $(A \cap B) \setminus C$. Найдите $(A \setminus C) \cap B$. Выразите $\{4, 5, 7\}$ через A, B и C. Выразите $\{1, 2, 4\}$ через A, B и C.

13. Вставьте пропущенное слово: «множество решений уравнения $AB = 0$ есть ... множеств решений уравнений $A = 0$ и $B = 0$» (здесь A и B — выражения, содержащие неизвестное x) Объясните, почему это все же не всегда верно.

14. Напишите уравнение, множество решений которого есть пересечение множеств решений уравнений $\sin x = |\sin x|$ и $\cos x = \mathrm{tg}(\mathrm{tg}(x))$. (Указание: тригонометрию для этого знать вредно.)

15. Сделайте недостающие подписи и рисунки:



$(A \cap B) \setminus C$ $\qquad\qquad$ $(A \triangle B) \triangle C$ $\qquad\qquad$ $A \cap B \cap C$

16. Найдите пересечение, объединение и разность подмножеств числовой прямой: $A = \{x | x^2 - 1 \leq 0\}$; $B = \{x || x| < 1\}$;

17. Пусть A и B — подмножества плоскости. Найдите пересечение множеств $A \cap B$, объединение $A \cup B$, разности множеств $A \setminus B$, $B \setminus A$, дополнения множеств $\overline{A}$, $\overline{B}$, и изобразите их на плоскости:

а) $A = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1\}$, $B = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1\}$;

б) $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$, $B = \{(x, y) | (x - 2)^2 + y^2 \leq 9\}$;

в) $A = \{(x,y)|(x-5)^2+(y-7)^2<25\}$, $B = \{(x,y)|(x-7)^2+(y-5)^2 \le 9\}$.

18. (Известная шутка финского журналиста, 1940 г.) Немец не может быть одновременно умным, порядочным и нацистом (членом национал-социалистической партии). То есть, в терминах теории множеств, пересечение трёх множеств — людей умных, порядочных и нацистов пусто. Это утверждение имело три эквивалентные переформулировки: одна из них гласила, что умный и порядочный человек не может быть нацистом. Каковы были две других? Докажите эквивалентность всех формулировок.

Множества называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. (Можно даже сказать, что это одно и то же множество.)

Множество A называется *подмножеством* множества B, если все элементы множества A являются элементами множества B. Обозначение $A \subseteq B$. Если при этом $A \ne B$, множество A называется собственным подмножеством B. Обозначение $A \subset B$. [1]

19. Петя хочет выразить мысль «все вороны черные» научно, с использованием множества ворон и множества черных предметов. Что он должен сказать?

20. Продолжите фразу: «множество A не является подмножеством множества B, если существует такое x, что...»

21. Продолжите фразу: «множество A — собственное подмножество множества B, если $A \subseteq B$ и существует такое x, что...»

22. Продолжите фразу: «множества A и B равны, если A является подмножеством B, а...»

23. Докажите, что если A — собственное подмножество множества B, а B — собственное подмножество множества C, то A — собственное подмножество множества C.

24. Сколько подмножеств есть у множества $\{1,2,3\}$?

25. Верно ли, что множество, единственным элементом которого является пустое множество, является подмножеством пустого множества? ...совпадает с множеством всех подмножеств пустого множества?

26. Докажите формулы, связывающие операции объединения и пересечения:

а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность пересечения относительно объединения);

б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность объединения относительно пересечения);

в) два закона абсорбции:

$(A \cup B) \cap A = A$,

$(A \cap B) \cup A = A$.

27. Докажите следующие свойства операции дополнения:

а) $\overline{\overline{A}} = A$;

б) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$;

в) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (формулы де Моргана).

28. Докажите, что дополнение B множества A полностью определяется из следующих условий: $A \cup B = U$ и $A \cap B = \varnothing$.

29. Докажите, что $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow B \subseteq \overline{A}$.

30. Выразите операцию разности множеств через пересечение и дополнение, а также через объединение и дополнение.

31. Докажите следующие свойства операции разности множеств:

а) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \varnothing$ (выражение включения через разность);

б) $A \setminus B = B \setminus A \Leftrightarrow A = B$ (антикоммутативность);

в) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ (самодистрибутивность);

г) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;

---

[1] В англоязычных текстах чаще пишут $A \subset B$ в обоих случаях.

д) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

е) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subseteq (A \setminus C) \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.

32. Докажите следующие формулы, выражающие отношение включения через операции объединения и пересечения:

а) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$;

б) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

33. Пусть $A_1 \subseteq A_2$ и $B_1 \subseteq B_2$. Докажите, что

а) $A_1 \cup B_1 \subseteq A_2 \cup B_2$; (стабильность включения относительно объединения)

б) $A_1 \cap B_1 \subseteq A_2 \cap B_2$; (стабильность включения относительно пересечения).

34. Ассоциативна ли операция разности множеств?

35. Будет ли операция разности множеств дистрибутивной относительно объединения? А наоборот?

36. Докажите, что операция Δ коммутативна, ассоциативна и обладает свойствами:

а) $A = B \Leftrightarrow A \Delta B = \varnothing$;

б) $A \Delta B = C \Leftrightarrow A \Delta C = B \Leftrightarrow C \Delta B = A$;

в) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \cup B = A \Delta B$;

г) $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$;

д) $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$.

37. **а**) Докажите что $A \Delta B \Delta C \supseteq (A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B))$.

б) При каких условиях включение становится равенством?

38. Верно ли, что

а) $(A \cup B) \setminus C$ равно $(A \setminus C) \cup B$;

б) $A \setminus C \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$;

в) $(A \triangle C) \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C)$;

г) $(A \triangle B) \triangle C = (B \triangle C) \triangle A$?

39. Докажите тождества, используя основные теоремы и аксиомы алгебры множеств:

а) $(A \setminus B) \cap ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = A \setminus B$.

б) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{C})$;

в) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$;

г) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

д) $(A \setminus B) \cup (\overline{A} \setminus \overline{B}) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

е) $(\overline{A} \setminus \overline{B} \cup (\overline{B} \setminus \overline{A}) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

ж) $(A \setminus \overline{B}) \cup (\overline{A} \setminus B) = (B \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B})$;

з) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

и) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;

к) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$;

л) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

м) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

н) $(A \cup \overline{B}) \cap (A \cup \overline{C}) = A \cup (\overline{B} \setminus C)$;

о) $(\overline{A} \setminus B) \cup (A \cap \overline{B}) = \overline{B}$;

п) $(A \cap B) \setminus (A \cup B) = \varnothing$;

р) $(A \cup B) \setminus (A \setminus B) = B$;

40. Упростите выражения:

а) $((A \cup B) \cap (A \cup U)) \cup ((A \cup B) \cap (B \cup \varnothing))$;

б) $((A \cup B) \cap (B \cup U)) \cup (A \cup \varnothing)$;

в) $A \cup (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C \cap D) \cup (B \cap C \cap D) \cup (C \cap D) \cup D$;

г) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$;

д) $A \cup B \cup (C \cap \overline{(A \cup \overline{B} \cup \overline{C})})$;
е) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (A \cap B \cap C)$;
ж) $(A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D)$;
з) $(A \cup B) \cap (B \cup U) \cap (A \cup \varnothing)$;
и) $(A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$;
к) $(A \cap B) \cup (A \setminus B)$;
л) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B} \cap (\overline{A} \cup B)$;
м) $((A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup C)) \setminus (\overline{B} \cup C)$;
н) $((A \setminus B) \cap \overline{(\overline{A} \cup B))}$;
о) $\overline{(\overline{A} \cup \overline{B} \cup C)} \cup \overline{(\overline{A} \cup B)} \cup (\overline{A} \cup C)$;
п) $(A \cup B) \setminus A$;
р) $(A \cap B) \setminus A$;
с) $(A \cap B) \cup \overline{A}$;
т) $((A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup C)) \setminus (\overline{B} \cup C)$;
у) $\overline{(A \setminus B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})}$.
ф) $A \cup (B \setminus C) \setminus ((A \cup B) \cap (A \cup C))$.
х) $(A \setminus B) \cap C \setminus (A \cap C) \setminus B$.
ц) $(A \cup B) \setminus C \setminus (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
41. Верно ли что $A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда для любого множества C
а) $A \cup C \subseteq B \cup C$;
б) $(C \setminus A) \subseteq (C \setminus B)$.
42. Докажите следующие свойства множеств:
а) $(A \cup B) = (A \cup C)$ и $(A \cap B) = (A \cap C) \Rightarrow B = C$;
б) $(A \cup B) = B$ и $(A \cap B) = \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$;
в) $(A \cup B) = (A \cap B) \Rightarrow A = B$.
г) $A \cap B \supseteq C \Leftrightarrow A \supseteq C$ и $B \supseteq C$;
д) $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C$ и $B \subseteq C$;
е) $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \setminus B \subseteq C$;
ж) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$;
з) $A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C) \subseteq (B \setminus C)$;
и) $A \subseteq B \Rightarrow (C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$;
к) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$;
л) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$;
м) $(A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$;
н) $A = B \Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \varnothing$.
43. Даны множества A и B. Решите систему относительно X:

$$\textbf{а)}\ \begin{cases} A \cap X = B; \\ A \cup X = B. \end{cases}$$

$$\textbf{б)}\ \begin{cases} A \setminus X = B; \\ X \setminus A = C. \end{cases}$$

$$\textbf{в)}\ \begin{cases} (X \times A) \cup (A \times X) = B \times B; \\ A \Delta X = B. \end{cases}$$

44. Верно ли, что
а) $(A \cap B \cap C) \Delta D = (A \Delta D) \cap (B \Delta D) \cap (C \Delta D)$?

б) $(A \cup B \cup C)\Delta D = (A\Delta D) \cup (B\Delta D) \cup (C\Delta D)$?

45. Верно ли что

а) если $A \triangle B \subseteq A$, то $B \subseteq A$;

б) если $A \triangle B \triangle C \subseteq A \cup B$, то $C \subseteq A \cup B$?

46. Докажите или опровергните следующее утверждение:

$$A\Delta B\Delta C \subseteq A \cup B \Rightarrow C \subseteq A \cup B.$$

47. Пусть $B \subseteq A \subseteq C$. Решите систему

$$\begin{cases} A \cap X = B; \\ A \cup X = C. \end{cases}$$

48. Множества A, B и C ($A \subseteq B \subseteq C$) содержат 3, 6 и 9 элементов соответственно. Сколько элементов может содержать множество X, если $B \cap X = A$, $B \cup X = C$? Как его выразить с помощью A, B, C и операций над множествами?

49. Докажите бесконечную дистрибутивность операций объединения и пересечения для нескольких множеств:

$$B \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i);$$

$$B \cup (\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (B \cup A_i);$$

50. Докажите формулу де Моргана для нескольких множеств:

$$\overline{(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i;$$

$$\overline{(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i.$$

51. Докажите два утверждения Хаусдорфа:

а) $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)\Delta(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) \subset (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2) \cup \ldots \cup (A_n\Delta B_n)$;

б) $(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)\Delta(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n) \subset (A_1\Delta B_1) \cap (A_2\Delta B_2) \cap \ldots \cap (A_n\Delta B_n)$.

52. $x \in A_1\Delta A_2\Delta \ldots \Delta A_n$ тогда и только тогда, когда x содержится в $\ldots$ числе множеств A_i. Заполните пропуск и докажите утверждение.

53. Покажите, что для любого натурального n имеет место эквивалентность: $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq A_1 \Leftrightarrow A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A_1$.

54. Имеется бесконечная последовательность множеств:

$A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subset \ldots$.

а) Докажите, что объединение множеств любой бесконечной подпоследовательности совпадает с объединением всех множеств этой последовательности.

б) Верно ли то же самое для пересечения?

55. Пусть $A_1, A_2 \ldots, A_n, \ldots$ — последовательность множеств. Докажите, что существует последовательность попарно непересекающихся множеств $B_1, B_2 \ldots, B_n, \ldots$, причем для каждого натурального n

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

Декартово произведение множеств

56. Пусть $A = \{1, 3, 7\}$; $B = \{0, 1, 3, 4, 8\}$. Из каких элементов состоят множества:

а) $A \times B$ и $B \times A$;

б) $A \times B \cap B \times A$ и $A \times B \cup B \times A$?

57. При каких условиях совпадают множества $A \times B$ и $B \times A$?

58. Изобразите на плоскости ($\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) множество $((-\infty, -1] \cup (0, 1)) \times (2, 3]$.

59. Докажите, что декартово произведение множеств пусто тогда и только тогда, когда один из сомножителей — пустое множество.

60. Докажите, что если множества A и B конечны, то

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

61. Множество $\mathbb{R} \times \varnothing$ — конечное или бесконечное? Если конечное, то сколько в нем элементов?

62. Докажите, что

$$A \times B = \bigcup_{x \in A} \{x\} \times B.$$

Это равенство можно использовать для алгебраического доказательства следующих задач.

а) А верно ли, что

$$A \times B = \bigcup_{X \subseteq A} X \times B?$$

63. Докажите следующие свойства прямого произведения множеств:

а) $(A \times C) \cap (B \times C) = (A \cap B) \times C$;

б) $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$;

в) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$;

г) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$.

д*) При каких условиях на A, B, C и D в последней формуле получается равенство?

64. Пусть множество A содержит 25 элементов, B — 20, их объединение — 31. Могут ли A и B быть декартовыми произведениями некоторых (неодноэлементных) множеств?

65. Сколько элементов содержит множество $([0, 15) \times \mathbb{Z}) \cap (\mathbb{N} \times [-3, 7])$?

66. Во множествах A, B и C по 100 элементов, в их попарных пересечениях — по 50, в пересечении всех трех множеств — 20 элементов. Сколько элементов во множестве $(A \times B \times C) \cap (B \times A \times C) \cap (C \times B \times A)$?

67. Верно ли что

а) $(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \times B) \setminus ((A \cap C) \times (B \cap D))$;

б) $(A \times B) \setminus (B \times A) = ((A \setminus B) \times A) \cup (A \times (B \setminus A))$?

68. Докажите, что включение стабильно относительно декартова произведения: $A \subseteq C$ и $B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$. Какие ограничения надо наложить на A, B, C и D, чтобы в этой формуле можно было заменить знак следствия на знак эквивалентности?

69. Докажите, что:

а) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$;

б) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;

в) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$;

г) $A \times B = (A \times D) \cap (C \times B)$, где $A \subseteq C$ и $B \subseteq D$;

д) $\overline{(A \times B)} = (\overline{A} \times U) \cup (U \times \overline{B})$. Какое множество будет универсальным для $A \times B$?

70. Пусть $A, B \neq \varnothing$ и $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D$. Докажите, что $A = B = C = D$.

71. Пусть множества A и B содержат по 7 элементов.

а) Докажите, что любое подмножество $A \times B$ можно представить в виде объединения 7 множеств, каждое из которых будет декартовым произведением каких-то подмножеств A и B.

б) Приведите пример, показывающий, что 6 множеств недостаточно.

72. Сравните множества:

$$(\cup_{i \in I} A_i) \times (\cup_{j \in J} B_j) \text{ и } \cup_{i \in I, j \in J} (A_i \times B_j);$$

$$(\cap_{i \in I} A_i) \times (\cap_{j \in J} B_j) \text{ и } \cap_{i \in I, j \in J} (A_i \times B_j);$$

n-мерным кубом называется декартово произведение n отрезков $[0, 1]$. Обозначение: I^n. Для удобства будем считать, что I^0 это точка.

73. Что такое **а**) I^1; **б**) I^2; **в**) I^3?

74. Дайте определение вершины, ребра и грани куба. Сколько вершин, ребер и граней в n-мерном кубе?

75*. Нарисуйте проекции на плоскость 4-мерного куба (он же декартово произведение двух квадратов) и декартова произведения двух треугольников. Сколько у этих 4-мерных многогранников будет вершин? 1-,2-,3-мерных граней? Подсказка: картинки проще рисовать програмно.