

Математический анализ. 1 курс

Направление 38.03.05 Бизнес-информатика

ДЗ 1. Последовательности - I

1. Сформулируйте с помощью кванторов утверждение «В любом подмножестве множества натуральных чисел есть максимум». Постройте его отрицание. Какое из утверждений истинное, а какое ложное? Обоснуйте свой ответ.
2. Сформулируйте с помощью кванторов утверждение «В любом подмножестве множества рациональных чисел есть минимум». Постройте его отрицание. Какое из утверждений истинное, а какое ложное? Обоснуйте свой ответ.
3. Докажите, что если числовое множество Y включено в числовое множество X , и X ограничено снизу, то $\inf(Y)$ существует, и $\inf(Y) \geq \inf(X)$.
4. Докажите, что в любом числовом интервале есть иррациональное число. Докажите, что в любом числовом интервале содержится бесконечно много иррациональных чисел.
5. Определите, является ли данная последовательность
 - а) ограниченной, ограниченной сверху, ограниченной снизу;
 - б) монотонной, монотонной «в хвосте».

Найдите точные грани последовательности или докажите, что их нет. Если последовательность монотонна или монотонна «в хвосте», определите тип монотонности.

(1) $x_n = \frac{1}{n^2}$; (2) $x_n = \frac{n-1}{n}$; (3) $x_n = \frac{n^2+1}{n^2-1}$; (4) $x_n = \frac{n}{n^2+3n+2}$; (5) $x_n = \frac{1}{3^n}$;

(6) $x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; (7) $x_n = \ln(n+1) - \ln(n-1)$; (8) $x_n = 3n-2$; (9) $x_n = n^3$; (10) $x_n = \sqrt[3]{n}$;

(11) $x_n = 3^n$; (12) $x_n = \log_{10}(n)$.

6. Докажите, что данные последовательности монотонны и ограничены.

Указание: в пункте (1) нужно воспользоваться неравенством Бернулли.

Неравенство Бернулли: $(1+x)^n \geq 1+nx$ при $x \geq -1$ и натуральных n .

(1) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$; (2) $x_1 = 16, x_n = \sqrt{20 + x_{n-1}}, n \geq 2$;

(3) $x_1 = 27, x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{81}{x_{n-1}} \right), n \geq 2$.