ФКН. Программная инженерия. Дизайн и разработка информационных продуктов

Математический анализ

2025/2026 учебный год

Дополнительный лист 3. Производная. Выпуклость. Теоремы о среднем

23 янв – 7 фев 2026 г.

Теоремы о среднем, их следствия и обобщения

Задача 1. (10) Доказать, что если функция f дифференцируема и неограниченна на конечном интервале (a,b), то её производная также неограниченна на этом интервале.

Задача 2. (10) Доказать, что если функция f дифференцируема на отрезке $[1,2]$, то существует такая точка $\xi \in (1,2)$, что $f(2) - f(1) = \dfrac{\xi^2}{2} f'(\xi)$.

Задача 3. (10) Доказать, что если функция f дифференцируема в некоторой проколотой окрестности точки x_0, непрерывна в самой этой точке и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$, то существует и производная $f'(x_0)$, причём $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.

Задача 4. (10) Пусть функция $f(x)$ дифференцируема при $x > 1$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Доказать, что $f'(x)$ не может иметь при $x \to +\infty$ конечного предела, не равного нулю. Может ли $f'(x)$ не иметь предела при $x \to +\infty$?

Задача 5. (10) Доказать, что если функция f дифференцируема на конечном или бесконечном интервале (a,b) и существуют равные конечные или одного и того же знака бесконечные пределы $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$, то существует такая точка $\xi \in (a,b)$, что $f'(\xi) = 0$.

Задача 6. (10) Пусть функция f при любом $x \in \mathbb{R}$ и любом $h > 0$ удовлетворяет условию $|f(x+h) - f(x-h)| < h^2$. Доказать, что $f(x) = \mathrm{const}$.

Задача 7. (10) Доказать, что для строгого возрастания дифференцируемой функции на некотором интервале необходимо и достаточно, чтобы ее производная была неотрицательна на этом интервале, и не была равна нулю ни на каком отрезке, вложенном в интервал.

Выпуклость. Свойства выпуклых функций

Задача 8. (10) Доказать, что ограниченная выпуклая на интервале функция непрерывна на нем и имеет односторонние левую и правую производные в любой его точке.

Задача 9. (10) Доказать, что непрерывная на интервале (a,b) функция $f(x)$ выпукла на нем тогда и только тогда, когда для любых двух точек x_1, x_2, $a < x_1 < x_2 < b$ выполнено неравенство $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right) \le \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

Задача 10. Неравенство Йенсена (5+3+2) Пусть функция $f(x)$ выпукла на интервале (a,b). Тогда имеет место *Неравенство Йенсена* для суммы:

$$f\left(\sum_{i=0}^{n} q_i x_i\right) \leq \sum_{i=0}^{n} q_i f(x_i),$$

где $q_1,\ldots,q_n$ – неотрицательные числа, а $x_1,\ldots,x_n$ – произвольные числа из интервала (a,b). Доказательство производится индукцией по n, используя определение выпуклости.

Неравенство находит широкое применение в оптимизации и теории вероятностей. Оказываются крайне полезны следующие его варианты:

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\left(f(x)\right)dx,$$

здесь φ и f – интегрируемые в смысле Римана функции, неравенство рассматривается относительно выпуклой функции φ; интеграл «обобщает» сумму;

$$\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)],$$

здесь $\mathbb{E}[Y]$ – математическое ожидание случайной величины Y, то есть интеграл (иногда взвешенная сумма), и неравенство снова работает относительно выпуклой функции φ.

Используя неравенство Йенсена в формулировке для суммы, докажите следующие неравенства:

(a) (неравенство Коши) $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.
Подсказка: в качестве f рассмотрите ln.

(b) (неравенство Юнга) $xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$ для x, $y \geq 0$, $p > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

(c) $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} \leq \sqrt[n]{x-y}$.

Дедлайн приема работ – 7 февраля.

Если в своих решениях вы используете утверждения и определения, которых не было на лекции Эрлиха, в том числе те, что были на консультации, вам нужно уметь их доказывать / строго записывать.

Если вы не согласны с оценкой, выставленной вам ассистентом, принимавшим работу, вы можете подать апелляцию @vadim_kolba в течение трех суток после сдачи работы. При этом содержательно поясняйте свою позицию.