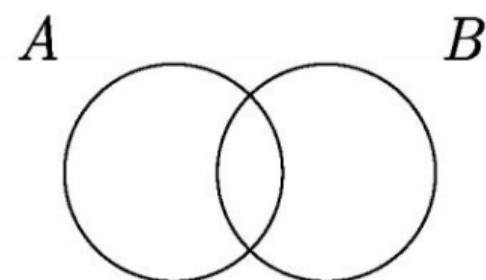


Множества



Определение множества

Множество — это не определяемое понятие!

Множество относится к наиболее первичным понятиям математики.

Обозначения

Множества обозначаются заглавными латинскими буквами **A, B, C, ...**

Элементы множеств обозначаются строчными латинскими буквами **a, b, c, ...**

Когда хотят сказать о том, что элемент **принадлежит** множеству, используют следующую запись: $a \in A$

Примеры:

A — множество всех чётных чисел между 1 и 9. $2 \in A, 5 \notin A$.

B — множество всех корней уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$. $1 \in B, 3 \in B, 0 \notin B$.

C — множество всех рек, протекающих по территории России. Волга $\in C$, Ока $\in C$,

Миссисипи¹ $\notin C$

¹В. Ю. Драгунский — Главные реки

Примеры числовых множеств:

\mathbb{N} — множество натуральных чисел;

\mathbb{Z} — множество целых чисел;

\mathbb{Q} — множество рациональных чисел;

\mathbb{R} — множество действительных (вещественных) чисел.

Определение

Пустое множество — множество, не имеющее ни одного элемента. Обозначение: \emptyset

Примеры:

- Множество решений системы уравнений:
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 13 \end{cases}$$
- Множество квадратных уравнений, имеющих более двух различных корней.

Определение

Универсальное множество — множество, содержащее все элементы, находящиеся в рассмотрении. Обозначение U (от англ. universal)

Универсальное множество различно в разных моделях.

Например:

- В экономических задачах им может быть множество товаров на рынке;
- В социологических — множество всех молодых людей от 18 до 21, проживающих в Республике Мордовия;
- В медицинских — все пациенты, участвующие в клиническом исследовании.

Ввести одно универсальное множество для всех моделей невозможно.

Парадокс брадобрея

Пусть в некой деревне живёт брадобрей, который бреет всех жителей деревни, которые не бреются сами, и только их. Бреет ли брадобрей сам себя?

Парадокс Рассела

Множество всех элементов и множеств — внутренне противоречивое понятие.

Множество может содержать себя, как элемент.

Рассмотрим множество (M) всех множеств, не содержащих себя, как элемент.

Верно ли, что $M \in M$?

Способы задания множеств

Перечисление: $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$.

Множество чётных чисел между 1 и 9: $A = \{2, 4, 6, 8\}$.

Порядок не важен, повторения не учитываются, т.е. $\{2, 4, 6, 8\} = \{8, 4, 2, 6\} = \{6, 2, 4, 8, 8\}$

Неформальный алгоритм: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

Характеристическое свойство: $\{\text{что} \mid \text{при каких условиях}\}$.

Множество всех натуральных квадратов: $X = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$

Подмножество, собственное подмножество

Определение

Множество B является **подмножеством** множества A , если все его элементы принадлежат A .

Обозначение: $B \subseteq A$, $A \supseteq B$. Говорят также, что B включено в A или B содержится в A .

$B \subseteq A \iff (x \in B \Rightarrow x \in A)$.

Свойства: $X \subseteq X$, $\emptyset \subseteq X$. Если $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq Z$, то $X \subseteq Z$.

Определение

Если $B \subseteq A$ и множество A содержит элементы, которые не принадлежат B , то множество B называется **собственным подмножеством** множества A .

Обозначение: $B \subset A$.

Пример: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Определение

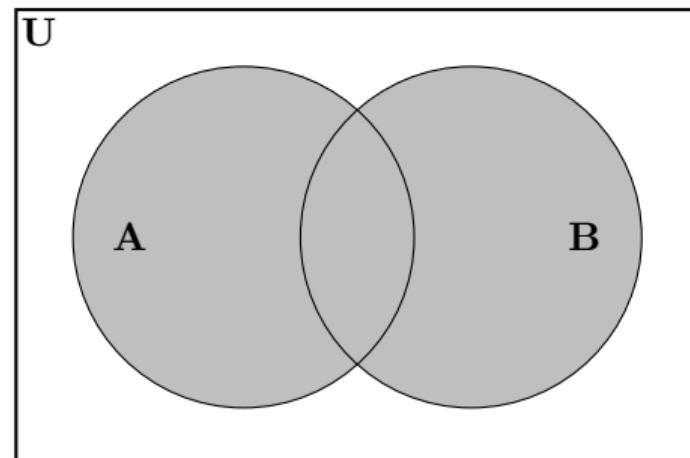
Множества A и B называются **равными** (или совпадающими), если они состоят из одних и тех же элементов.

$A = B$ тогда и только тогда, когда $\forall x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Операции над множествами: объединение

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$



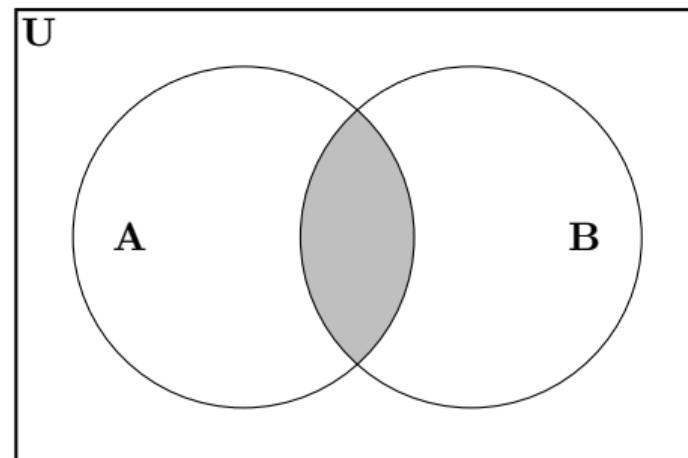
$$A \cup B$$

Объединение конечного числа множеств:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_s = \{x \mid x \in A_1 \text{ или } x \in A_2 \text{ или } \dots \text{ или } x \in A_s\}$$

Операции над множествами: пересечение

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

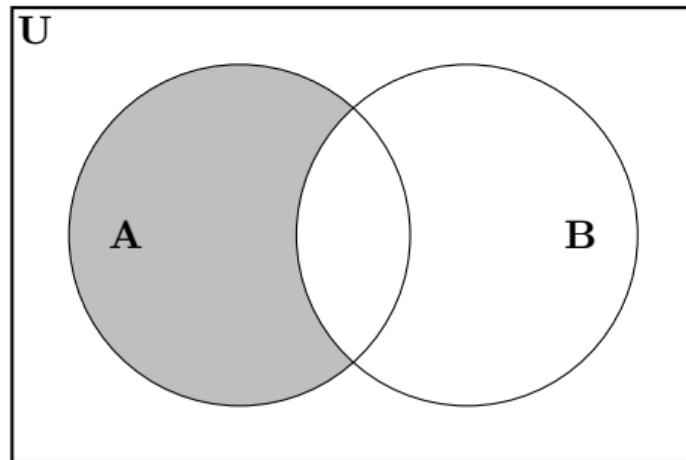


$$A \cap B$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_s = \{x \mid x \in A_1 \text{ и } x \in A_2 \text{ и } \dots \text{ и } x \in A_s\}$$

Операции над множествами: разность

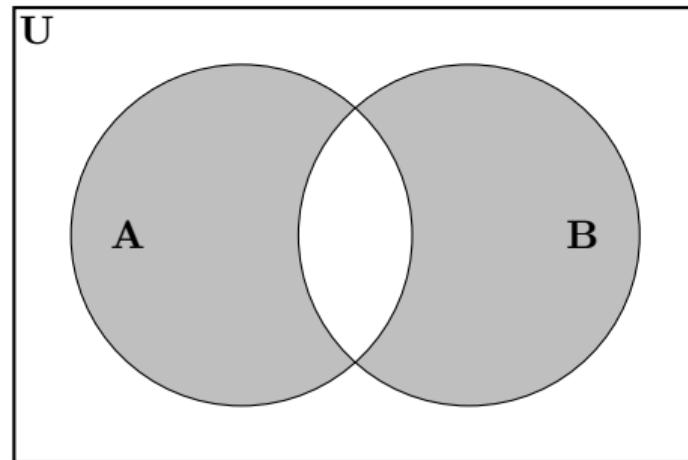
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$



$$A \setminus B$$

Операции над множествами: симметрическая разность

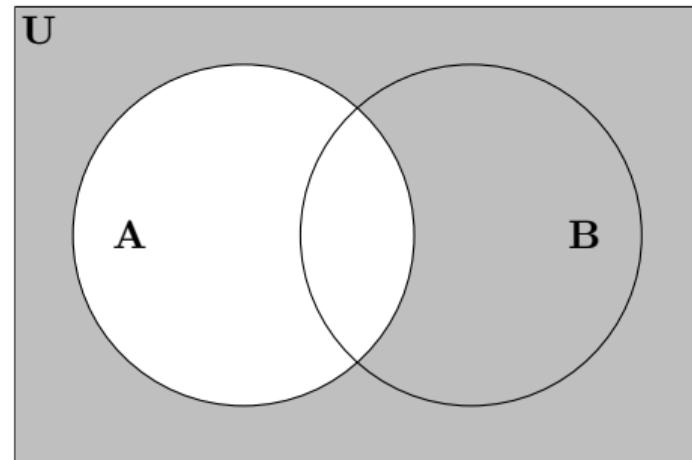
$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



$$A \Delta B$$

Операции над множествами: дополнение

$$\overline{A} = \{a \in U \mid a \notin A\}$$



\overline{A}

1. Законы идемпотентности:

$$A \cup A = A, A \cap A = A.$$

2. Законы коммутативности операций объединения и пересечения:

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$$

3. Законы ассоциативности операций объединения и пересечения:

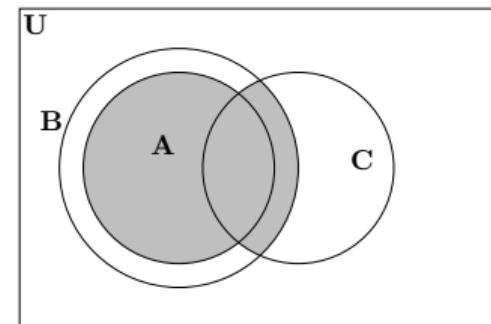
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

4. Законы поглощения: $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$.

5. Модулярный закон:

Если $A \subseteq B$, то $A \cup (B \cap C) = (A \cup C) \cap B$.



6. Законы дистрибутивности:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

7. Универсальные границы(нижняя и верхняя):

$$A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset,$$
$$A \cup U = U, A \cap U = A.$$

8. Дополняемость:

$$A \cap \overline{A} = \emptyset, A \cup \overline{A} = U.$$

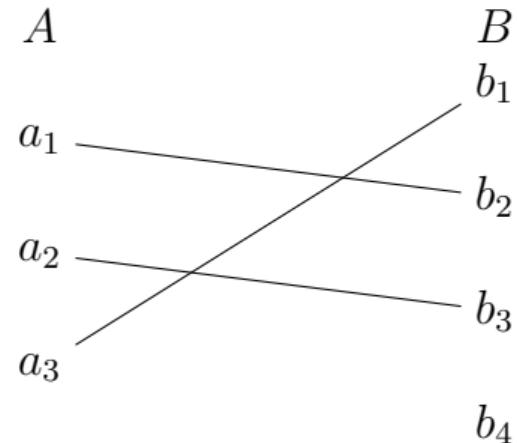
9. Инволютивный закон: $\overline{\overline{A}} = A$.

10. Законы де Моргана:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Сравнение множеств

Будем говорить, что мощность множества A не больше мощности множества B , если можно каждому элементу множества A сопоставить элемент множества B , так, чтобы разным элементам были сопоставлены разные. Научно это называется «инъекция».



Пример 1. Мощность множества совершеннолетних граждан России не больше мощности множества 10-значных чисел, поскольку каждому гражданину можно сопоставить номер его паспорта.

Пример 2. Мощность прямой не больше мощности отрезка $[\pi/2, \pi/2]$, поскольку каждой точке x прямой сопоставляется точка отрезка $\operatorname{tg}(x)$.

Пример 3. Если $m \geq n$, то мощность множества $\{1, 2, \dots, n\}$ не больше мощности множества $\{1, 2, \dots, m\}$. Опять-таки достаточно каждому элементу сопоставить самого себя.

Если $m < n$, утверждение неверно (это называется принцип Дирихле). Ну и, конечно, наоборот тоже верно, достаточно каждой точке отрезка сопоставить ее саму, как точку прямой.

Пример 4. Если во множестве n элементов, то их можно взаимно однозначно сопоставить элементам множества $\{1, \dots, n\}$. Докажем это.

Стоп-стоп! Мы не будем ничего доказывать, поскольку это определение числа элементов на множестве: в группе 30 студентов, если их можно пронумеровать так, что они получат номера от 1 до 30 и свободных номеров не останется.

Определение

Множество A называется **конечным**, если его элементы можно взаимно-однозначно сопоставить какому-то из множеств $\{1, \dots, n\}$. n называется **мощностью** или числом элементов во множестве. Обозначение $|A| = n$. Если такого соответствия не существует, то множество называется **бесконечным**.

Мы пока будем пользоваться интуитивным пониманием конечных и бесконечных множеств. Но будем внимательны. Например, писать, что $|\mathbb{R}| = \infty$ — ошибка и очень плохой тон.

Пример 5.

A — множество всех товаров на рынке.

B — множество всех целых чисел, кратных 5.

Здесь A — конечное множество, а B — бесконечное. Хотя часто для удобства анализа в экономических моделях предполагается, что число товаров (или агентов) бесконечно.

Невозможно полностью устраниТЬ все ошибки в программах, поскольку множество всевозможных ошибок бесконечно, а множество найденных ошибок за время жизни программиста конечно.

Определение

Декартовым (прямым) произведением множеств A и B называется множество $A \times B$ всевозможных упорядоченных пар (a, b) , где $a \in A$ и $b \in B$, т.е.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ и } b \in B\}.$$

В общем случае $A \times B \neq B \times A$, т.е. порядок множеств в декартовом произведении важен!

Пример 6. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. Тогда:

$$\begin{aligned}A \times B &= \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6)\}; \\B \times A &= \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3)\}.\end{aligned}$$

Пример 7. $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Декартово произведение $A \times B$ можно интерпретировать как множество клеток шахматной доски.

Пример 8. Докажите, что $A \times B = B \times A$ тогда и только тогда, когда $A = B$.

Решение. Пусть $A \neq B$. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что существует x , такой, что $x \in A$, но $x \notin B$. Поскольку B непусто, выберем $y \in B$. Пара (x, y) по определению входит в $A \times B$, но т.к. $x \notin B$, не входит в $B \times A$. Следовательно, $A \times B \neq B \times A$. Полученное противоречие позволяет утверждать, что $A = B$.

Обратное утверждение доказывается проще: если $A = B$, то $A \times B = A \times A = B \times A$.

Если множества A и B конечны, то множество $A \times B$ содержит $|A| \cdot |B|$ элементов.
Поэтому декартово произведение и называется произведением.

Пример 9. А сколько элементов в $\mathbb{R} \times \emptyset$?

Спасибо за внимание!