

Домашнее задание 2а.

Если не оговорено иное, все рассматриваемые числа — целые.

1. Найдите две последние цифры десятичной записи числа  $99^{1000}$ .
2. Докажите, что  $a^3$  и  $b^3$  сравнимы по модулю  $a - b$ , если  $a > b$ .
3. Если  $11 \mid (5m + 3n)$ , то  $11 \mid (9m + n)$ .
4. Найдите, применяя умножение к не более чем двузначным числам, следующие остатки от деления.

Запишите промежуточные переходы так, чтобы был виден ход ваших вычислений без калькулятора.

- а)  $41^{24}$  на 97;
- б)  $(-117)^{31}$  на 83.

5. В некотором языке программирования имеется тип `Int`, содержащий все целые числа в отрезке  $[-M; M - 1]$ , где  $M$  — большое натуральное число. Если целое число  $x$ , возникшее в результате вычислений, оказывается вне этого отрезка (т. е. происходит переполнение), то  $x$  представляется в `Int` некоторым числом  $I(x) \in [-M; M - 1]$ . При этом для *любого*  $x \in \mathbb{Z}$  выполняются равенство:

$$I(x) = \text{остаток}(x + M, 2M) - M.$$

Докажите, что для любых целых  $x$  и  $y$  верно:

- а) если  $x \in [-M; M - 1]$ , то  $I(x) = x$ ;
- б)  $I(x + y) = I(I(x) + I(y))$ ;<sup>1</sup>
- в)  $I(xy) = I(I(x) \cdot I(y))$ .

6\*. Для целого положительного числа  $n$  рассмотрим преобразование наборов чисел  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , которое работает так:  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_2+x_3}{2}, \dots, \frac{x_n+x_1}{2})$ . Пусть для некоторого набора *целых* чисел  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$  все наборы  $f(\vec{a}), f^2(\vec{a}) = f(f(\vec{a})), f^3(\vec{a}) = f(f^2(\vec{a}))$  и т. д. тоже состоят из целых чисел. Проверьте следующие утверждения:

- а) для некоторых *различных* чисел  $k$  и  $m$  окажется  $f^k(\vec{a}) = f^m(\vec{a})$ ;
- б) если  $n$  нечетно, то все числа в наборе  $\vec{a}$  равны между собою.

7. Допустим, число  $a > 1$  делится на 2, но не на 4. Тогда у  $a$  поровну положительных *четных* и *нечетных* делителей.

8. Допустим, что каждая из цифр 0, 1 и 2 входит ровно 100 раз в десятичную запись некоторого числа  $x$ . Никаких других цифр в  $x$  нет. Докажите, что  $x$  не является точным квадратом.

9. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида  $6k + 5$ .

<sup>1</sup>Т. е. безразлично, происходит ли переполнение до сложения аргументов или после него.