Асимптоты. O-символика.

1. Сформулировать, что значит

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty.$$

2. Найти естественную область определения функции, заданной формулой. Найти вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты.

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3-1}{x+1}}.$$

3. (a) Следует ли из того, что $f(x) = O(x^3)$ при $x \to 0$, что $f(x) = O(x^2)$ при $x \to 0$.

   (b) Следует ли из того, что $f(x) = O(x^3)$ при $x \to 0$, что $f(x) = O(x^3)$ при $x \to +\infty$.

   (c) Следует ли из того, что $f(x) = o(x^2)$ при $x \to 0$, что $f(x) = o(x^3)$ при $x \to 0$.

   (d) Следует ли из того, что $f(x) = O(x^3)$ при $x \to 0$, что $f(x) = o(x^2)$ при $x \to 0$.

4. Какие из следующих утверждений верны при $x \to 0$?

   (a) Если $f_1(x) = o(g(x))$ и $f_2(x) = o(g(x))$, то $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$;

   (b) Если $f_1(x) = O(g(x))$ и $f_2(x) = O(g(x))$, то $f_1(x) \cdot f_2(x) = O(g(x))$;

   (c) Если $f_1(x) = O(g_1(x))$ и $f_2(x) = o(g_2(x))$, то $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g_1(x) \cdot g_2(x))$.

5. Пусть известно, что $f(x) = 1 + 2x + o(x)$ при $x \to 0$. Найти $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

6. Пусть известно, что $f(x) = 1 + 3x + O(x^2)$ при $x \to 0$. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x}$.

7. Пусть $f(y) = y + 2y^2 + o(y^2)$ при $y \to 0$. Представить $f(3x + x^2)$ в виде $P(x) + o(x^2)$ при $x \to 0$, где $P(x)$ - многочлен степени не выше второй.

Домашнее задание

1. Найти естественную облать определения функции и асимптоты графика функции

$$a)\ f(x) = \sqrt{x^4 + x^3} - \sqrt{x^4 - x^3}, \qquad b)\ f(x) = |x+2|e^{-\frac{1}{x}}.$$

2. (a) Следует ли из того, что $f(x) = O(x^2)$ при $x \to 0$, что $f(x) = O(x^3)$ при $x \to 0$.

   (b) Следует ли из того, что $f(x) = o(x^3)$ при $x \to 0$, что $f(x) = o(x^2)$ при $x \to +\infty$.

   (c) Следует ли из того, что $f(x) = o(x^3)$ при $x \to +\infty$, что $f(x) = o(x^3)$ при $x \to 0$.

3. Пусть $f(x) = O(g(x))$. Верно ли, что $2^{f(x)} = O(2^{g(x)})$.

4. Пусть $f(y) = 1 + 3y - y^2 + o(y^2)$ при $y \to 0$. Представить $f(2x + 4x^2)$ в виде $P(x) + o(x^2)$ при $x \to 0$, где $P(x)$ - многочлен степени не выше второй. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти естественную облать определения функции и асимптоты графика функции

$$a)\ f(x) = \frac{2x^4 + x^3 + 1}{x^3}, \qquad b)\ f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 1},$$

$$c)\ f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x+4}}, \qquad d)\ f(x) = x + \frac{\sin x}{2x}.$$

2. Какие из следующих утверждений верны при $x \to 0$?

   (a) Если $f(x) = O(g(x))$, то $f(x) = o(g(x))$;

   (b) Если $f(x) = o(g(x))$, то $f(x) = O(g(x))$;

   (c) Если $f(x) = O(g(x))$, то $g(x) = O(f(x))$;

   (d) Если $f(x) = O(g(x))$, то $f(x) \cdot h(x) = O(g(x) \cdot h(x))$;

   (e) Если $f_1(x) = O(g(x))$ и $f_2(x) = O(g(x))$, то $f_1(x) + f_2(x) = O(g(x))$;

   (f) Если $f_1(x) = O(1)$ и $f_2(x) = o(g(x))$, то $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g(x))$;

   (g) Если $f_1(x) = O(g_1(x))$ и $f_2(x) = O(g_2(x))$, то $f_1(x) \cdot f_2(x) = O(g_1(x) \cdot g_2(x))$;

   (h) Если $f_1(x) = O(g_1(x))$ и $f_2(x) = O(g_2(x))$, то $f_1(x) + f_2(x) = O(g_1(x) + g_2(x))$;

   (i) Если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(h(x))$, то $f(x) = O(h(x))$;

   (j) Если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = o(h(x))$, то $f(x) = o(h(x))$;

   (k) Если $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(h(x))$, то $f(x) = o(h(x))$;

   (l) Если $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) = O(h(x))$, то $f(x) = o(h(x))$.