

Алгебра. ПИ. Семинар 3. Подстановки.

Осень 2025. Медведь Никита Юрьевич

1 Задачи для семинара

Упражнение 1 (П125). Определить число инверсий в перестановке $1, 9, 6, 3, 2, 5, 4, 7, 8$ (или любой другой).

Напоминаю понятие инверсии (беспорядка).

Упражнение 2 (П128). Определить число инверсий в перестановке $2, 4, 6, \dots, 2n, 1, 3, 5, \dots, 2n - 1$.

Упражнение 3 (П129). Определить число инверсий и чётность для перестановки

$$1, 4, 7, \dots, 3n - 2, 2, 5, 8, \dots, 3n - 1, 3, 6, 9, \dots, 3n.$$

Упражнение 4 (П130). Определить число инверсий и чётность для перестановки

$$3, 6, 9, \dots, 3n, 2, 5, 8, \dots, 3n - 1, 1, 4, 7, \dots, 3n - 2.$$

Упражнение 5 (П169). Перемножить подстановки: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Обсуждаем определение произведения; в том числе обсуждаем выбор направления.

Упражнение 6 (П173). $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3$

Задача 7 (П177). Найти A^{150} , где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

Обсуждаем, что в прошлой задаче вышло «в лоб», но здесь как-то утомительно. Откладываем.

Обсуждение 8 (Понятия). Понятие цикла. Запись цикла в цикловой форме. Запись в виде нескольких циклов; обещание, что вот-вот будет произведение и поговорим (в идеале — не сдержать, останется в виде пищи для размышлений).

Обсуждение 9 (П153). Разложить в произведение независимых циклов (обсуждаем новые обозначения).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 10 (П165). Перейти от записи в циклах к записи двумя строками: $(7531)(246)(8)(9)$.

Задача 11 (П177). Найти A^{150} , где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

Обсуждаем применение циклов.

Задача 12 (П178). Найти X из равенства $AXB = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача 13 (П184). Найти все подстановки, перестановочные с $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Пытаемся перемножить обе стороны «в лоб», наталкиваемся на проблему. Переносим в нужную сторону, получаем подстановку, у которой сверху и снизу неизвестные. Тут можно обсудить, что запись «в правильном порядке» это «стандартный вид» подстановки, но записи в случайном порядке тоже значат её же. Дорешиваем.

Обсуждение 14 (знак). Обсуждаем знак подстановки. Что будет, если ту же подстановку кто-то запишет неотсортированной?

Задача 15. Считаем знак какой-нибудь подстановки при помощи циклов. Потом через декремент (2024: не успели).

2 Домашнее задание

Упражнение 1 (по мотивам П151). Определить чётность подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Упражнение 2 (по мотивам П152). Определить чётность подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Упражнение 3 (П157). Определить чётность подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \dots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$

Задача 4 (П159). Определить чётность подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-3 & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 2n-1 & 2n & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Указание: разложите в независимые циклы.

Упражнение 5 (П164). Перейти от записи в циклах к записи «двумя строками»: (13)(25)(4)

Упражнение 6 (П170). Перемножить подстановки: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Упражнение 7 (Из головы). Найти A^{121} , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 8 & 15 & 12 & 16 & 14 & 1 & 5 & 9 & 6 & 7 & 4 & 10 & 3 & 13 & 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

Указание: как и в классе, нужно разложить на независимые циклы и возвести каждый цикл в эту степень.

Задача 8 (П185). Найти все подстановки в S_5 , перестановочные с подстановкой $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Указание: тех, кто верно решит, может смутить, что вышло чуть проще, чем задача из класса. Так и должно быть, не пугайтесь.

2.1 Дополнительные задачи (не оцениваются)

В этот раз дополнительных задач *повышенной сложности* скорее нет. Но есть просто ряд задач, которые не вошли, но немного проливают свет на происходящее. Это задачи про сортировку: П142, П143, П144, П147; про подсчёт знака через циклы: П179, П180, П181, П182.