

Алгебра. ПИ. Семинар 4.

Определители. Часть 1: по определению и с элементарными операциями.

Осень 2025. Медведь Никита Юрьевич

1 Задачи для семинара

Упражнение 1 (П9). Найти по определению определитель $\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$.

Упражнение 2 (П43). $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

Упражнение 3 (Снова П43). Обсуждаем элементарные операции. Снова $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. Столбцы гипотетически удобнее строк на первом шагу?

Упражнение 4 (П203). Найти по определению определитель треугольной матрицы $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Упражнение 5 (П208). Решить уравнение $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0$. Наводящий вопрос — какой порядок этой матрицы?

Задача 6 (П279). Вычислить приведением к треугольному виду: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$

Задача 7 (П283). $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$

Обсуждение 8 (П229). Как изменится определитель, если из каждой строки, кроме последней, вычесть последующую строку, а из последней строки вычесть исходную первую строку?

Обсуждение 9 (П230). Как изменится определитель, если к каждому столбцу, начиная со второго, прибавить предыдущий столбец, а в то же время к первому столбцу прибавить последний?

Задача 10 (П115). Не развертывая, доказать: $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$. (Пропедевтика метода линейных множителей).

Обсуждение 11 (Определитель Вандермонда). Формулируется задача: посчитать определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$. Спрашиваются идеи. Вероятно, прозвучит естественная идея вычитать столбцы (чтобы единички сократились и получилась строка почти из одних нулей). Показываю, что дальше как-то тяжело продолжать. Обсуждаем альтернативное доказательство с вычитанием столбцов и делимостью на $x_i - x_j$.

2 Домашнее задание

Упражнение 1 (П6). $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$

Задача 2 (П14). $\begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$

Упражнение 3 (П45). $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$

Упражнение 4 (П49). $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

Упражнение 5 (П54). $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$

Упражнение 6 (П58). $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$

Упражнение 7 (П199). Найти члены определителя 4-го порядка, содержащие элемент a_{32} и входящие в определитель со знаком плюс.

Упражнение 8 (П200). Найти члены определителя $\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$, содержащие x^4 и x^3 .

Упражнение 9 (П221). Как изменится определитель порядка n , если у всех его элементов сменить знак на противоположный?

Замечание: в этой и следующих задачах требуется не только ответ, но и доказательство! Кстати, в предыдущих тоже.

Задача 10 (П212). Как изменится определитель порядка n , если первый столбец переставить на последнее место, а остальные столбцы передвинуть влево, сохраняя их расположение?

Задача 11 (П231). Как изменится определитель порядка n , если его матрицу повернуть на 90° вокруг «центра»?

Указание: подумайте, как такой поворот представить в виде комбинации более понятных преобразований.

Указание 2: у вас может получиться совсем не такой же ответ, как в задачнике; если вы все делаете верно, то они на самом деле равны, просто это неочевидно; можно сверить, одинаковый ли результат они дают при n от 1 до 5.

Упражнение 12 (П258).
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2.1 Дополнительные задачи (не оцениваются), которые просто плохо влезли

Упражнение 13 (П196). Выяснить, входит ли в определитель соответствующего порядка и с каким знаком: $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64} \cdots a_{3n-2,3n}a_{3n-1,3n-1}a_{3n,3n-2}$.

Упражнение 14 (П72).

2.2 Дополнительные задачи (не оцениваются) повышенной сложности

П65, П68 (считая данным, что эpsilon в кубе равно единице)