**Алгебра. ПИ. Семинар 10.**
**Комплексные числа: начало.**

*Осень 2025. Медведь Никита Юрьевич*

## 1 Задачи для семинара

**Обсуждение 1.** Общее обсуждение понятия комплексных чисел, их сложения и вычитания. Умножение комплексных чисел.

**Упражнение 2** (К20.1г)**.** $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$: сначала считаем числитель по уже обсуждённому, потом обсуждаем, как бы посчитать дробь.

**Упражнение 3** (?)**.** Решить уравнение $z^2 = -5$.

Обсуждаем 2 пути решения: разложить на множители, представив вручную $-5$ как полный квадрат, или представить $z = a + bi$ и составить систему уравнений.

**Упражнение 4** (?)**.** Решить уравнение $z^3 = 1$.

**Упражнение 5** (К20.4а)**.**

$$\begin{cases}(1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i\end{cases}$$

Обсуждаем решение методом Гаусса и методом Крамера. Основная мысль — ничего не изменилось, можно спокойно делать всё так же, как раньше.

**Упражнение 6** (20.2а)**.** Найти $i^{77}$.

**Упражнение 7** (?)**.** Найти $(1+i)^n$.

Пытаемся при помощи бинома Ньютона. Не выходит. Торжественное обещание вернуться!

**Обсуждение 8** (Триг. форма)**.** Обсуждение понятия тригонометрической формы. Аргумент, главное значение аргумента.

**Упражнение 9** (21.1абзт)**.** Найти тригонометрическую форму:

а) $5$;

б) $-i$;

з) $-1 + i\sqrt{3}$;

т) $\cos\alpha - i\sin\alpha$.

## 2 Домашнее задание

**Упражнение 1** (К20.1е)**.** Найти $\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$.

**Упражнение 2** (К20.5а)**.** Найти вещественные числа $x$ и $y$ такие, что $(2+i)x + (1+2i)y = 1 - 4i$.

**Упражнение 3** (К21.1где)**.** Найти тригонометрическую форму:

г) $-3i$;

д) $1+i$;

е) $1-i$;

**Упражнение 4** (К21.1жикмп). Найти тригонометрическую форму:

ж) $1 + i\sqrt{3}$;

и) $-1 - i\sqrt{3}$;

к) $1 - i\sqrt{3}$;

м) $-\sqrt{3} + i$;

п) $1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

**Упражнение 5** (К21.1у). Найти тригонометрическую форму числа $\sin\alpha + i\cos\alpha$.

**Задача 6** (К21.1х). Найти тригонометрическую форму числа $1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$.

*Замечание:* мы разберём эту задачу на следующем семинаре.

## 2.1 Дополнительные задачи (не оцениваются)

Тем, кто уже был знаком с комплексными числами (или быстро осваивает новый материал) могут быть интересны задачи:

**Задача 7** (К21.3). Решить уравнения:
а) $|z| + z = 8 + 4i$;
б) $|z| - z = 8 + 12i$.

**Задача 8** (К21.4). Доказать следующие свойства модуля:
а) $|z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;
б) $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2|$;
в) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ тогда и только тогда, когда векторы $z_1$ и $z_2$ имеют одинаковые направления;
г) $|z_1 + z_2| = ||z_1| - |z_2||$ тогда и только тогда, когда векторы $z_1$ и $z_2$ имеют противоположные направления.

**Задача 9** (К21.5). Доказать, что:
а) если $|z| < 1$, то $|z^2 - z + i| < 3$;
б) если $|z| \leqslant 2$, то $1 \leqslant |z^2 - 5| \leqslant 9$;
в) если $|z| < 1/2$, то $|(1+i)z^3 + iz| < 3/4$.

**Задача 10** (К24.4). Указать геометрический смысл числа $\arg\dfrac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}$, где $z_1, z_2, z_3$ — различные комплексные числа.

**Задача 11** (К24.5). Как расположены на плоскости точки, соответствующие:
а) комплексным числам $z_1, z_2, z_3$, для которых

$$z_1 + z_2 + z_3, |z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0;$$

б) комплексным числам $z_1, z_2, z_3, z_4$, для которых

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0, |z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| \neq 0.$$

**Задача 12** (К24.7). Доказать тождество

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

и указать его геометрический смысл.

**Задача 13** (K24.12). Доказать, что:
а) точки плоскости, соответствующие комплексным числам $z_1, z_2, z_3$, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда существуют вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, не все равные нулю, такие что

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 = 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0;$$

б) точки плоскости, соответствующие различным комплексным числам $z_1, z_2, z_3$, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда число $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ является вещественным;
в) точки плоскости, соответствующие различным комплексным числам $z_1, z_2, z_3, z_4$ и не лежащие на одной прямой, лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда их двойное отношение $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$ является вещественным числом.

**Задача 14** (K24.13). Изобразить на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам $z$, удовлетворяющим равенству $\left|\dfrac{z - z_1}{z - z_2} = \lambda\right|$, где $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ и $\lambda$ — положительное действительное число.

**Задача 15** (K24.17). Расширенной комплексной плоскостью называется комплексная плоскость, дополненная бесконечно удалённой точкой $\infty$. Доказать, что если $(z_1, z_2, z_3)$ и $(w_1, w_2, w_3)$ — две тройки попарно различных точек расширенной комплексной плоскости, то существует дробно-линейное преобразование

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0,$$

переводящее первую тройку во вторую.

**Задача 16** (K24.18). Доказать, что если в каждой из двух четвёрок $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ и $(w_1, w_2, w_3, w_4)$ точек расширенной комплексной плоскости все точки попарно различны, то дробно-линейное преобразование, переводящее одну из этих четвёрок в другую, существует тогда и только тогда, когда совпадают двойные отношения:

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = \frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} : \frac{w_1 - w_4}{w_2 - w_4}.$$

**Задача 17** (K24.19). Доказать, что при дробно-линейном преобразовании расширенной комплексной плоскости прямые и окружности переходят в прямые и окружности.

**Задача 18** (K24.20). Доказать, что дробно-линейное преобразование

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc = 1,$$

переводит вещественную прямую в себя тогда и только тогда, когда матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ пропорциональна некоторой вещественной матрице.

**Задача 19** (K24.21). Выяснить геометрический смысл дробно-линейного преобразования $w = 1/z$.

Со следующей недели этот список пополнится, тут пропущена часть задач с применением степеней/корней.