

Σi^2 no дискретной математике 1c

N 1

Доказать, используя метод
математической индукции.

1) Для идущих $n = 1$:

$$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1 \text{ - верно}$$

2) Предположение:
верно $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \forall n \geq 1$

3) Доказать:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6};$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^n i^2 + (n+1)^2 = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} = \\
 &= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \\
 &= \frac{(n+1) \cdot 2 \cdot (n+2)(n+1,5)}{6} = \\
 &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad \text{q.m.g.}
 \end{aligned}$$

N2

Доказать, используя метод
математической индукции:

1) База индукции $n=2$:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{13}{24} \Leftrightarrow \frac{8}{24} + \frac{6}{24} > \frac{13}{24} \Leftrightarrow \frac{14}{24} > \frac{13}{24} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 14 > 13$ - верно

2) Предположение: верно $\forall k \leq n$

тогда: $\sum_{i=1}^k \frac{1}{K+i} > \frac{13}{24}$

3) Доказать:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+i} > \frac{13}{24}$$

N3

Доказать, используя метод математической индукции

1) Тогда индукция $n=1, 2$ приведена:



2) Предположение: пусть $\forall n \geq 2$ среди городов существует такой, что из него можно добраться в любой другой город, пусть это город X .

3) Доказано, что при добраться в скончаный набор городов (и сокращении на 1 ус.) остается один город, из которого можно добраться в другой.

Рассмотрим разные случаи (пусть N - новый город):

I N соседний с X и из X можно попасть в N напрямую - приведено, так из X можно попасть в N и в то же самое время из N (по предположению)

II Пусть из X нельзя напрямую попасть в N , но можно напрямую попасть из другого города B . Тогда можно доказать чисто индукцией:

$$X \rightarrow \dots \rightarrow B \rightarrow N$$

III Пусть нет ни одного города из которых можно попасть в N неприм.

т.е.: $N \nearrow \nwarrow \dots$

города, из которых можно попасть в любой другой: N ул. он доказан
бум сединой с любым другим, в частности
могли доказать.

Все возможные случаи рассмотрены. Ч.н.д.

№2

Тогда доказываем, используя метод
математической индукции.

$$1) \text{ База: } n=2 \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12} = \frac{74}{24} > \frac{73}{24}$$

$$2) \text{ Предположение: пусть } \forall n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} > \frac{73}{24}$$

3) Исп. индукции:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} > \frac{73}{24} \text{ (предыдущее доказано).}$$

Сравни суммы (1) и (2):

(пусть ? - знак сравнения)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} ? \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k}$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1'}{n+2} + \dots + \frac{1'}{2n} ? \frac{1'}{n+2} + \frac{1'}{n+3} + \dots + \frac{1'}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$\frac{1}{n+1} ? \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} | \cdot (n+1)$$

$$? ? \frac{n+1}{2n+1} + \frac{1}{2}$$

$$1 ? \frac{2n+2 + 2n+1}{2(2n+1)}$$

$$1 ? \frac{4n+3}{4n+2}; \text{ очевидно, что}$$

$$1 < \frac{4n+3}{4n+2}, \text{ то можно:}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} < \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k}, \text{ то}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} > \frac{13}{24}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} > \frac{13}{24}, \text{ q.m.g.}$$

Доказать $\forall n \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N}: \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \geq n$

Доказем базисное математическое предположение:

$$\forall y > 0, x < y: \frac{2}{y} \leq \frac{1}{y-x} + \frac{1}{y+x} \quad (*)$$

$$\frac{2}{y} \leq \frac{y+x+y-x}{(y-x)(y+x)} = \frac{2y}{y^2-x^2}$$

$$\frac{2y}{y^2-x^2} - \frac{2}{y} \geq 0$$

$$\frac{2y^2 - 2y^2 + 2x^2}{y(y^2-x^2)} \geq 0$$

$$\frac{2x^2}{y(y^2-x^2)} \geq 0 \text{ - очевидно верно}$$

Доказем исходное утверждение методом математической индукции:

База: $n=1$: пусть $k=1$, тогда $\frac{1}{1} \geq 1$ - верно

Переког: $\forall n \in \mathbb{N}$ утверждение верно для некоторого $n = t$, показано это для $n = t + 1$:

Известно: $\exists K_1 : \sum_{i=1}^{K_1} \frac{1}{i} \geq t$ (1)

Докажем: $\exists K_2 : \sum_{i=1}^{K_2} \frac{1}{i} \geq t + 1$ (2)

Из (1) $\Rightarrow \exists \alpha \geq 0 : t = \sum_{i=1}^{K_1} \frac{1}{i} - \alpha$ (3)

(3) \rightarrow (2): $\sum_{i=1}^{K_1} \frac{1}{i} + \sum_{i=K_1+1}^{K_2} \frac{1}{i} \geq \sum_{i=1}^{K_2} \frac{1}{i} - \alpha + 1$

$$\sum_{i=K_1+1}^{K_2} \frac{1}{i} \geq 1 - \alpha$$

↑

$$\sum_{i=K_1+1}^{K_2} \frac{1}{i} \geq 1 \quad (4)$$

Пусть $K = K_1 + 1$, $K_2 = K + \varepsilon$, тогда (4)

нашёл замечание в виде:

$$\forall K \exists \varepsilon : \sum_{i=0}^{\varepsilon} \frac{1}{K+i} \geq 1$$

Пусть это не так, т.е. $\exists K \forall \varepsilon : \sum_{i=0}^{\varepsilon} \frac{1}{K+i} < 1$ (5)

$\sum_{i=0}^{\varepsilon} \frac{1}{K+i}$ Покажем $\varepsilon \equiv 1 \pmod{2}$, тогда получим

результативно (5) в виде:

$$\sum_{i=0}^{\varepsilon} \frac{1}{K+i} < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K+1} \right) + \left(\frac{1}{K+1} + \frac{1}{K+2} \right) + \dots +$$

$$+ \left(\frac{1}{K+\frac{\varepsilon-1}{2}} + \frac{1}{K+\frac{\varepsilon+1}{2}} \right) < 1$$

Сделав замену, получим $(*)$:

$$\frac{2}{\overbrace{k+k+\dots+k}^2} + \frac{2}{\overbrace{k+k+\dots+k}^2} + \dots + \frac{2}{\overbrace{k+k}^2}$$

Возьмем $\ell = 100$ к:

- промежуточные \Rightarrow переходы
без них \Rightarrow исходное утверждение