Определение предела последовательности

1. Пусть K — множество всех сходящихся последовательностей, а $K_1,\ K_2, \ldots, K_8$ — множества всех последовательностей, удовлетворяющих соответственно условиям:

   1) $\exists \varepsilon > 0\ \exists N\ \exists n \geqslant N:\ |x_n| < \varepsilon$;

   2) $\exists \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geqslant N:\ |x_n| < \varepsilon$;

   3) $\exists \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geqslant N:\ |x_n| < \varepsilon$;

   4) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \exists n \geqslant N:\ |x_n| < \varepsilon$;

   5) $\exists \varepsilon > 0\ \forall N\ \forall n \geqslant N:\ |x_n| < \varepsilon$;

   6) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geqslant N:\ |x_n| < \varepsilon$;

   7) $\forall \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n \geqslant N:\ |x_n| < \varepsilon$;

   8) $\forall \varepsilon > 0\ \forall N\ \forall n \geqslant N:\ |x_n| < \varepsilon$;

   Какие из следующих включений верны: a) $K_6 \subset K_2$; b) $K_2 \subset K_6$; c) $K_7 \subset K_2$; d) $K_8 \subset K$; e) $K \subset K_8$;

2. Доказать по определению сходимости

$$a)\ \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) = 0; \quad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2+4n+3} = 3 \quad c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{2n-5} = 0.$$

3. Доказать, что последовательности расходятся

$$a)\ x_n = (-1)^n, \quad b)\ b_n = n^2.$$

4. Найти пределы последовательностей.

   (a) $a_n = q^n, \quad q \in \mathbb{R}$; (d) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$, + обощить результат;

   (b) $a_n = \sqrt[n]{a}, \quad a > 0$; (e) $a_n = \frac{2^n}{n!}$, + обобщить результат;

   (c) $a_n = \sqrt[n]{n}$; (f) $a_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$, + обощить результат.

Домашнее задание

1. Привести пример последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, имеющих одно и то же множество значений и таких, что:

   (a) $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,

   (b) $\{x_n\}$ сходится, а $\{y_n\}$ расходится.

2. Пусть a – некоторое вещественное число. Приведите пример последовательности $\{a_n\}$ (если такая существует), у которой:

   (a) Есть предел, равный числу a.

   (b) Есть предел равный a, но ни один из членов последовательности не равен a.

   (c) Есть предел равный a, при этом бесконечно много членов последовательности равны a и бесконечно много членов последовательности не равны a.

   (d) Число a не является пределом последовательности, при этом бесконечно много членов последовательности равны a.

3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, а последовательность $\{y_n\}$ такова, что существуют натуральные p и n_0 такие, что $y_n = x_{n+p}$ (или $y_n = x_{n-p}$) для любого $n \geqslant n_0$. Доказать, что последовательность y_n сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$.

   Иными словами, изменение (в частности отбрасывание или добавление) конечного числа членов сходящейся последовательности оставляет ее сходящейся к тому же пределу.

4. Доказать по определению следующие сходимости:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3n-11}} = 0; \quad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n^2} = 0 \quad c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{\sqrt{n}} = 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть K — множество всех сходящихся последовательностей, а $K_1,\ K_2, \ldots, K_8$ — множества последовательностей из задачи листка семинара 3.

   1) Для каких $j = 1, 2, \ldots, 8$ верно включение $K_j \subset K$.

   2) Какие из множеств K_j содержать как сходящиеся, так и расходящиеся последовательности.

   3) Какие из множеств K_j содержать неограниченные последовательности.

   4) Какому из условий 1)-8) удовлетворяет любая последовательность.

   5) Какие из множеств K_j совпадают.

2. Доказать по определению следующие сходимости:

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2-2n+3} = 0; \quad b)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt{4+\frac{1}{n}} = 2.$$

3. * Пусть $x_n > 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Доказать, что

   1) $\forall N\ \exists n_0 \geqslant N\ \forall n > n_0 :\ x_n < x_{n_0}$

   2) $\forall N\ \exists n_0 \geqslant N\ \forall n\ (1 \leqslant n < n_0) :\ x_n > x_{n_0}$.