Дискретная математика на ПИ ФКН. Подготовка к КР-1

Щуплова А.И., ассистент группы БПИ247, Замотаева А. В., ассистент группы БПИ249

октябрь 2024

1. Формализуйте следующее рассуждение, и выясните, корректно ли оно:
Существуют куздры. Следовательно, есть такая куздра, что если она глокая, то и все вообще куздры глокие.

Решение:
пусть K это множество куздр,
$x \in K - x$ это куздра (можно так же использовать обозначение *K(x))*
$G(x) - x$ глокая
Теперь формализуем рассуждение:
$\exists x \in K \Rightarrow (\exists x \in K : G(x) \Rightarrow \forall y \in \ : G(y))$
Заметим, что это выражение может быть ложно, например: $K = \{$a, b$\}$, G(a), $\neg G(b)$
$\exists x \in K$ – верно $\exists x \in K : G(x)$ – верно $\forall y \in K : G(y)$ – неверно
$1 \to (1 \to 0) = 1 \to 0 = 0$

2. Докажите, что n! $> 2^n$ при всех натуральных n > 3

Доказательство:
Докажем по индукции
База: $4! > 2^4$ - верно
Пусть верно для n, рассмотрим это неравенство для $n+1$: $(n+1)! = (n+1) \cdot n! > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, так как $n! > 2^n$ по предположению $\Rightarrow$ по ПМИ неравенсто верно $\forall n \in \mathbb{N}$

3. Существует ли такая логическая формула $\mathbf{X = X(A, B, C)}$, что формулы $\mathbf{F = (A \vee \neg B) \to (C \vee X)}$и $\mathbf{G = (\neg X \wedge \neg A) \to (B \to C)}$ логически эквивалентны?

Решение:
Заметим, что если X - истина, то F $=$ (A $\vee \neg B) \to (C \vee 1) = (A \vee \neg B) \to 1 \equiv 1,$ а $G = (0 \wedge \neg A) \to (B \to C) = (0) \to (B \to C) \equiv 1$
Получим, что если взять X тавтологией (например, $\neg A \ \vee \ A \ \vee \ C \ \vee \ B$), то F и G тоже будут тавтологиями

4. Обязательно ли следующее утверждение о натуральных числах верно? Если не все числа голубые, но число 0 голубое, то найдется такое голубое число, что следующее за ним число не голубое.

Решение: Да, это верно. Доказательство:
Утверждение является имликацией: (не все числа голубые, но число 0 голубое) $\to$ (найдется такое голубое число, что следующее за ним число не голубое)
Допустим, что не все числа голубые, но 0 — голубое. По ПМИ для свойства голубизны имеем $\neg$(голубое(0) $\wedge$ $\forall$ x: (голубое(x) $\to$ голубое(x + 1))) - ложная конъюнкция. голубое(0) = 1, значит, $\forall$ x: (голубое(x) $\to$ голубое(x + 1)) = 0 $\iff$ $\exists$ x: (голубое(x)$\wedge$ $\neg$голубое(x + 1)) . Получим, что обязательно найдется такое голубое число, что следующее за ним число не голубое.

5. Докажите, что число 1203. . .308, содержащее ровно n троек, делится на 19 при всех натуральных n

Доказательство:
Докажем по индукции:
База: n = 0: 12008 = 19 * 632
Шаг: пусть a_k — число с k тройками — делится на 19. Тогда $a_{k+1} = (\dfrac{(a_k - 8)}{10} + 3) \cdot 100 + 8 = 10 \cdot a_k + 228$. Так как 228 = 19 $\cdot$12, в силу предположения индукции получаем, что a_{k+1} делится на 19, следовательно это верно $\forall n \in \mathbb{N}$

6. Докажите, что $\boldsymbol{app}(s, \boldsymbol{app}(t, r)) = \boldsymbol{app}(\boldsymbol{app}(s, t), r)$ для всех $s, t, r \in S(A)$

Доказательство: по определению, $\forall s \forall t \forall a \ app(a : s, t) = a : app(s, t)$ и $\forall t \ app([], t) = t$
Проведем индукцию по s:
База: $s = []$: $app([], app(t, r)) = app(t, r) = app(app([], t), r)$
Шаг: пусть для s равенство верно, тогда для $a : s$ имеем $app(a : s, app(t, r)) = a : app(s, app(t, r)) = a : app(app(s, t), r)$ (по предположению индукции) $= app(a : app(s, t), r) = app(app(a : s, t), r)$, чтд.