

Число е. Предел и непрерывность функции в точке

Домашнее задание

1. Вычислить пределы, используя арифметику предела, теорему о зажатой последовательности и результат с лекции, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$, $a \in \mathbb{Q}$

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n+2}{n+1}\right)^{2n}, \quad b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{3n-2},$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)^{4n+1}, \quad d) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^n$$

2. Доказать по Коши и по Гейне сходимость

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x}{x + 1} = -1.$$

3. Привести пример функции, определенной на всей прямой, у которой ровно 3 точки непрерывности. Доказать непрерывности в этих точках, и разрывность в других.
4. Привести пример функции, непрерывной на каждом из промежутков X_1 и X_2 , но не являющейся непрерывной на множестве $X_1 \cup X_2$.
5. Указать множество точек, в которых непрерывна функция, найти ее точки разрыва, установить их род, нарисовать эскиз графика функции.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^3, & \text{если } x < 0; \\ (x - 1)^3, & \text{если } 0 \leq x \leq 2; \\ 4 - x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

6. Найти точки разрыва функции, установить их род, доопределить функцию по непрерывности в точках устранимого разрыва

$$y = \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{x^3 - x^2}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить пределы, используя арифметику предела, теорему о зажатой последовательности и результат с лекции, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$, $a \in \mathbb{Q}$

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2+n}{1+2n}\right)^{1-5n}, \quad b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{5}{n^2}\right)^{2n-7},$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{5n+1}\right)^{n^2}, \quad d) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2-3}{2n^2+1}\right)^n$$

2. Установить, существуют или не существуют значения a и b , при которых функция $y = f(x)$ непрерывна на своей области определения

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } |x| \leq 1; \\ x^2 + ax + b, & \text{если } |x| > 1. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \cos(x/2)}{\sin x}, & \text{если } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], x \neq 0, x \neq \pi; \\ a, & \text{если } x = 0; \\ b, & \text{если } x = \pi. \end{cases}$$

3. Указать множество точек, в которых непрерывна функция, найти ее точки разрыва, установить их род, нарисовать эскиз графика функции.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{4}; \\ 1, & \text{если } x = \frac{\pi}{4}; \\ x^2 - \frac{\pi^2}{16}, & \text{если } \frac{\pi}{4} < x \leq \pi. \end{cases}$$

4. Найти точки разрыва функции, установить их род, доопределить функцию по непрерывности в точках устранимого разрыва

$$a) y = \frac{2x-1}{2x^2+3x-2}, \quad b) y = \frac{x}{\cos x},$$

$$c) y = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}, \quad d) y = \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$$