Исследование функции

1. С помощью теоремы об производной обратной функции вычислить производную $y = \operatorname{arctg} x$.
2. Найти интервалы возрастания и убывания функции
$$y = (x+1)\sqrt{x^2-1}.$$
3. Найти максимум и минимум функции
$$y = (x^3+3x^2+6x+6)e^{-x}.$$
4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции
$$y = |x^2+2x-3| + 1,5\ln x$$
на отрезке $[0,5; 2]$.
5.
$$f(x) = \begin{cases} |x|\left(2+\cos\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\frac{6}{5}+\cos\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
Доказать:
(a) $f'(0)$ не существует, $g^{(n)}(0) = 0$ для всех натуральных n;
(b) $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке $x_0 = 0$ строгий минимум;
(c) $f(x)$ и $g(x)$ ни в каком интервале $(-\delta; 0)$, $\delta > 0$ не являются убывающими и ни в каком интервале $(0; \delta)$, $\delta > 0$ не являются возрастающими.

Домашнее задание

1. Вычислить производные
$$a)\ f(x) = \ln\ln\left(\frac{x}{2}\right), \qquad b)\ f(x) = 2^{\sin x^2}$$
$$c)\ f(x) = (\sin x)^{\cos x}, \qquad d)\ f(x) = \arccos\left(\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\right),$$
2. Найти интервалы возрастания и убывания функции
$$y = \operatorname{arctg} x - \ln x.$$
3. Найти максимумы и минимумы функций
$$a)\ y = (x^2+1)\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}x^2 - x, \qquad b)\ y = (x+2)e^{1/x}.$$
4.
$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} xe^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
Доказать:
(a) $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0$ для всех натуральных n;
(b) $f(x)$ имеет в точке $x_0 = 0$ строгий минимум, $g(x)$ в точке $x_0 = 0$ не имеет экстремума.
5. Найти наибольшее и наименьшее значение функции
$$f(x) = (x-3)^3 e^{|x+1|}$$
на отрезке $[-2; 4]$.