Формальная логика. Метод математической индукции.*

1. Определите, является ли утверждение всегда истинным

$$(\neg Q \,\&\, (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow \neg P$$

2. Даны следующие утверждения и предикаты $(x, y \in \mathbb{R})$:
   - A: Все деревья высокие;
   - $B(x):\ x + 5 = 10$;
   - $C(x, y):\ x^2 \leqslant y$;
   - $E(x; y):\ x^2 + y^2 = 0$.

   Среди следующих утверждений укажите истинные:

   (a) A;
   (b) $C(x, -1)$;
   (c) $A \wedge B(5)$;
   (d) $A \Rightarrow B(10)$;
   (e) $\forall x \in \mathbb{R}:\ B(x)$;
   (f) $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : C(x; y)$;
   (g) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : B(x) \Rightarrow A$;
   (h) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : B(x) \Rightarrow E(x; y)$;
   (i) $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : B(x) \wedge E(x; y)$;
   (j) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : E(x; y) \Rightarrow C(x; y)$;
   (k) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : B(x) \Rightarrow C(x; y)$;
   (l) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : B(x) \Rightarrow B(y)$.

3. Пусть $x, y, z \in \mathbb{R}$. Какие из следующих утверждений верны?

   (a) $\forall x\ \forall y\ \exists z : xy^2 \leqslant z$;
   (b) $\forall y\ \forall x\ \exists z : xy^2 \leqslant z$;
   (c) $\forall x\ \exists z\ \forall y : xy^2 \leqslant z$;
   (d) $\exists z\ \forall x\ \exists y : xy^2 \leqslant z$;
   (e) $\forall z\ \forall y\ \exists x : xy^2 \leqslant z$;
   (f) $\forall z\ \exists x\ \forall y : xy^2 \leqslant z$;

4. Записать отрицание к утверждению, не используя знак отрицания. Что верно: утверждение или его отрицание?

   (a) $\forall x : x^2 > 0$;
   (b) $\forall x\ \exists y : x^2 > y^2$;
   (c) $\exists x : x^2 < 0$;
   (d) $\exists x\ \forall y : xy > 0$;

5. Какие из следующих утверждений верны?

   (a) $\forall x \in \mathbb{R} : |x + 1| < 2 \Rightarrow |x| < 1$;
   (b) $\forall x \in \mathbb{R} : |x + 1| > 2 \Rightarrow |x| > 1$;
   (c) $\forall \varepsilon\ \forall x : |x - 3| < \varepsilon \Rightarrow |x^2 - 9| < 10\varepsilon$.

6. Докажите, что для любого натурального n выполнено равенство

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

7. Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 5$ верно: $3^{n-1} > 2n^2 - n$.

8. Последовательность c_n задана рекуррентно:

$$c_1 = 6, \quad c_{n+1} = 2c_n - 3n + 2.$$

   Докажите, что $c_n = 2^n + 3n + 1$.

* - при составлении листка использованы материалы Ильи Щурова из открытых источников.

Домашнее задание

1. Являются ли утверждения логически эквивалентными?

$$(P \vee Q) \Rightarrow R \quad \text{и} \quad (P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)$$

2. Записать отрицания ко всем утверждениям задачи 3, не используя знак отрицания.

3. Какие из следующих утверждений верны?
   (a) $\forall x \in \mathbb{R} : |x-3| < 1 \Rightarrow |x| < 4$;
   (b) $\forall x \in \mathbb{R} : |x-3| > 1 \Rightarrow |x| > 4$;
   (c) $\forall \varepsilon\ \forall x : |x-3| < \min(\varepsilon; 1) \Rightarrow |x^2-9| < 10\varepsilon$;
   (d) $\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall x : (\delta > 0) \wedge (|x-3| < \delta) \wedge (\varepsilon > 0) \Rightarrow |x^2-9| < \varepsilon$.

4. Последовательность a_n задана рекуррентно:

$$a_1 = 2,\ a_2 = 3, \qquad a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}.$$

   Докажите, что $a_n = 2^{n-1} + 1$.

5. Доказать, что при каждом натуральном n число $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

6. Докажите, что для любого натурального n выполнено равенство

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что высказывание всегда истинно

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$$

2. Среди следующих утверждений, построенных из предикатов из задачи 2, укажите истинные:
   (a) $B(5)$;
   (b) $A \vee B(5)$;
   (c) $A \Rightarrow B(5)$;
   (d) $A \wedge B(10)$;
   (e) $\neg C(3; 4)$;
   (f) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : C(x; y)$;
   (g) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : \neg C(x; y)$;
   (h) $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : B(x) \Rightarrow E(x; y)$;
   (i) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : C(x; y) \Rightarrow E(x; y)$;
   (j) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : (C(x; y) \wedge E(x; y)) \Rightarrow \neg B(x))$;
   (k) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : B(x) \Rightarrow B(y))$;
   (l) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : B(x) \Rightarrow B(y)$.

3. Доказать, что при каждом натуральном n справедливо неравенство

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} \leqslant n.$$

4. Доказать, что при каждом натуральном n выражение $2n^3 + 3n^2 + 7n$ делится на 6.

5. Доказать, что при каждом натуральном n выражение $7^n + 12n + 17$ делится на 18.

6. Докажите неравенство для всех натуральных n: $4^n > 7n - 5$.

7. Докажите неравенство для всех натуральных n: $4^n \geqslant n^2 + 3^n$.

8. Доказать, что при каждом натуральном n справедливо равенство

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2.$$

9. Доказать, что при каждом натуральном n справедливо равенство

$$1 + \frac{7}{3} + \frac{13}{9} + \ldots + \frac{6n-5}{3^{n-1}} = \frac{2 \cdot 3^n - 3n - 2}{3^{n-1}}.$$