# Домашнее задание

## №1

б) $\{x_n\} = \frac{1}{n}$; $\{y_n\} =$

$$\{y_n\} = \begin{cases} 1; & n \text{ - нечётное} \\ \frac{1}{n}; & n \text{ - чётное} \end{cases}$$

$\{x_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

$\{y_n\} = 1, 1, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{6} \dots$

$y_n$ расходится

## №2

а) $\{a_n\} = \frac{1}{n} + a$

б) $\{a_n\} = \frac{1}{n} + a$

с) Предположим, что такая посл-ть $\exists$, тогда $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n \geq N$ $|a_n - a| < \varepsilon$.

Рассмотрим $a_n = a$:

Тогда $\exists n$ (причём их беск. множество), что $|a_n - a| = 0$

Рассмотрим $a_n \neq a$:

Тогда $\exists n$ (причём их беск. множество), что $|a_n - a| > 0$

Предположим, что $\exists N\ \forall n \geq N$

$$\begin{cases} |a_n - a| < \varepsilon \\ \varepsilon > 0 \end{cases}$$

Пусть $a_N = a$, но тогда ~~на~~ далее в посл-ти обязательно

найдется член такой, что
(*) что $a_n \neq a$, где $n > N$
и тогда $|a_n - a| < \varepsilon$
не будет верно к примеру,
для $\varepsilon = \frac{|a_n - a|}{10}$
- противоречие.

Пусть $a_N \neq a$, но далее в посл-ти обязательно найдётся член такой, что $a_n = a$, $n > N$ тогда дальше можно повторить рассуждения (*) и вновь прийти к противоречию.

Значит, такой посл-ти $\nexists$.

d) $a_n = \begin{cases} 1; & n \text{ - нечётное} \\ a; & n \text{ - чётное} \end{cases}$

$\{a_n\} = 1, a, 1, a \ldots$

N3

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon)$

$\forall n > N(\varepsilon): |x_n - x| < \varepsilon$

Рассмотрим $\{y_n\}$:

• $y_n = x_{n \pm p} \quad \forall n \geq n_0$

Пусть тогда в таком случае $N = n \pm p$, тогда $y_n = x_N$, а $\forall n > N$ выполняется определение предела для $x_n \Rightarrow$
$\Rightarrow y_n$ оно тоже будет выполняться и $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = x$

N4

a) Если $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{3n - 11}} = 0$, то т.д.:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \ \forall n \geq N(\varepsilon)$:

$\left| \frac{1}{3n - 11} \right| < \varepsilon$; $\frac{1}{3n - 11} < \varepsilon$

$$3n - 11 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$3n > \frac{1}{\varepsilon} + 11$$

$$n > \frac{1}{3\varepsilon} + \frac{11}{3}$$

$$n > \frac{1+11\varepsilon}{3\varepsilon}$$

Можно взять $N = \left[\frac{1+11\varepsilon}{3\varepsilon}\right] + 1$

ч.т.д..

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n^2} = 0$,

т.д.: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \ N(\varepsilon)$

$\forall n > N(\varepsilon)$: $\left|\frac{2n+3}{n^2}\right| < \varepsilon$

$$\frac{2n+3}{n^2} < \varepsilon$$

$$\Uparrow$$

$$\frac{2n+3n}{n^2} < \varepsilon$$

$$\frac{5n}{n^2} < \varepsilon$$

$\frac{5}{n} < \varepsilon$; $\frac{n}{5} > \frac{1}{\varepsilon}$; $n > \frac{5}{\varepsilon}$

$N = \left[\frac{5}{\varepsilon}\right] + 1$ ч.т.д..

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}} = 0$, т.д.:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \quad \forall n \geq N(\varepsilon)$:

$$\left|\frac{\cos n}{\sqrt{n}}\right| < \varepsilon$$

$\Uparrow$ $|\cos n| \in [0; 1]$

$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$; $\frac{1}{n} < \varepsilon^2$

$n > \frac{1}{\varepsilon^2}$; $N = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$

ч.т.д..