Бином Ньютона. Последовательность.

1. Вычислить значение суммы
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}.$$

2. Найти слагаемое, получающееся при разложении
$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$$
и содержащее x^3.

3. Доказать равенство
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$
алгебраически и комбинаторно. Используя этот результат вычислить значение суммы
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}.$$

4. Найти коэффициент слагаемого многочлена $(1+x^2-x^3)^9$ при x^8.

5. Привести пример последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющей условию:

   a) $\exists N\ \forall n > N:\ x_n < x_N$;

   b) $\exists N\ \forall n > N\ \forall m > n:\ x_n < x_m$.

6. Показать, что последовательность a_n ограничена (мы определяли ограниченность как: $\exists C > 0\ \forall n \in \mathbb{N}:\ |a_n| < C$) тогда и только тогда, когда она ограничена сверху и снизу.

7. Доказать ограниченность последовательности $a_n = \frac{2n^2-1}{2+n^2}$.

8. Доказать неограниченность последовательности $b_n = n^2 - n$.

9. * Доказать ограниченность последовательности $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Домашнее задание

1. Вычислить значение суммы
$$a)\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}, \qquad b)\ \sum_{k=1}^{n}\sin kx, \quad x\in\mathbb{R}.$$
Указание: в пункет b) нужно домножить сумму на $2\sin\frac{x}{2}$, если он не ноль.

2. Найти коэффициент многочлена $(1+2x-3x^2)^4$ при x^3 и x^4.

3. Привести пример последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющей условию:

   a) $\forall m\ \exists n:\ x_m \neq x_n$;

   b) $\exists N_1\ \forall n > N_1 : x_{N_1} > x_n$ и $\exists N_2\ \forall n > N_2 : x_{N_2} < x_n$;

   c) $\forall n\ \exists m > n\ \exists k > n:\ x_m < x_n < x_k$.

4. Доказать, что если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - ограниченные последовательности и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ - некоторые числа, то $\{\alpha x_n + \beta y_n\}$ - ограниченная последовательность.

5. Доказать ограниченность последовательности
$$a)\quad a_n = \frac{n^2+4n+8}{(n+1)^2}, \qquad b)\quad a_n = \sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}.$$

6. Доказать неограниченность последовательности
$$a)\quad a_n = \frac{n^3}{n^2+1}, \qquad b)\quad a_n = \sqrt{n^2+(-1)^n\cdot\sqrt{n^3}}-n.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти коэффициент многочлена

   a) $(1-x+x^2)^3$ при x^3;

   b) $(1+x^2+x^3)^7$ при x^{11}.

2. Найти члены разложения, являющиеся целыми числами

$$a)\quad (\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})^5, \qquad b)\quad (\sqrt{5}-\sqrt{2})^8.$$

3. Доказать ограниченность последовательности

$$a)\quad a_n=\frac{1-n}{\sqrt{n^2+1}}, \qquad b)\quad a_n=\frac{5n^6+6}{(n^4+1)(n^2-1)},$$

$$c)\quad a_n=n(\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4-n}).$$

4. Доказать неограниченность последовательности

$$a)\quad a_n=\frac{1-n}{\sqrt{n}}, \qquad b)\quad a_n=\frac{n-n^4}{(n+2)^3},$$

$$c)\quad a_n=\sqrt{n^4+n^3+1}-\sqrt{n^4-n^3+1}.$$