Д/з по алгебре №6

№1

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Из уравнения видно, что: $X \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$

Пусть $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}$

Выполним умножение:

$$\begin{pmatrix} 3x_{11} - x_{21} + 2x_{31} & 3x_{12} - x_{22} + 2x_{32} \\ 4x_{11} - 3x_{21} + 3x_{31} & 4x_{12} - 3x_{22} + 3x_{32} \\ x_{11} + 3x_{21} & x_{12} + 3x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x_{11} - x_{21} + 2x_{31} = 3 & (1) \\ 4x_{11} - 3x_{21} + 3x_{31} = 1 & (2) \\ x_{11} + 3x_{21} = 7 & (3) \\ 3x_{12} - x_{22} + 2x_{32} = 7 & (4) \\ 4x_{12} - 3x_{22} + 3x_{32} = 7 & (5) \\ x_{12} + 3x_{22} = 7 & (6) \end{cases}$$

Из $(3) \Rightarrow \boxed{x_{11} = 7 - 3x_{21}} \to (1)$:

$$21 - 9x_{21} - x_{21} + 2x_{31} = 3$$

$$\Updownarrow$$

$$-10x_{21} + 2x_{31} = -18$$

$$\Updownarrow$$

$$-5x_{21} + x_{31} = -9 \Longleftrightarrow \boxed{x_{31} = -9 + 5x_{21}}$$

Из (6) $\Rightarrow$ $\boxed{x_{12} = 7 - 3x_{22}}$ $\longrightarrow$ (4):

$$21 - 9x_{22} - x_{22} + 2x_{32} = 7 \Longleftrightarrow$$

$$-10x_{22} + 2x_{32} = -14$$

$$\Updownarrow$$

$$-5x_{22} + x_{32} = -7$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{x_{32} = 5x_{22} - 7}$$

$$X = \begin{pmatrix} 7 - 3x_{21} & 7 - 3x_{22} \\ x_{21} & x_{22} \\ 5x_{21} - 9 & 5x_{22} - 7 \end{pmatrix}$$

№2

$$A^T_{2\times2} X + X = B_{2\times3}$$

Из уравнения видно, что $X \in M_{2\times3}(\mathbb{R})$

Пусть $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$

Перепишем исходное уравнение в виде:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -x_{21} & -x_{22} & -x_{23} \\ 2x_{11}-3x_{21} & 2x_{12}-3x_{22} & 2x_{13}-3x_{23} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -x_{21} & -x_{22} & -x_{23} \\ -2x_{11}-3x_{21} & 2x_{12}-3x_{22} & 2x_{13}-3x_{23} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11}-x_{21} & x_{12}-x_{22} & x_{13}-x_{23} \\ -2x_{11}-2x_{21} & 2x_{12}-2x_{22} & 2x_{13}-2x_{23} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_{11}-x_{21} & x_{12}-x_{22} & x_{13}-x_{23} \\ -2x_{11}-2x_{21} & 2x_{12}-2x_{22} & 2x_{13}-2x_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_{11} = x_{21} + 2 \\ x_{12} = x_{22} \\ x_{13} = x_{23} + 3 \end{cases}$$

В итоге: $X = \begin{pmatrix} x_{21}+2 & x_{22} & x_{23}+3 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$

№3

Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; A^{-1} — ?

$\det A = 54 + 28 + 45 - 27 - 40 - 63 =$

$= 27 + 28 + 5 - 63 = 60 - 63 = -3$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\det A} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

№ 4

$$A=\begin{pmatrix} 10 & 4 & -1 \\ 10 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 7 \\ -2 & -8 & -7 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что: $1 \le Rg\ A \le 3.$

Заметим, что $\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 80 - 8 = 72 \Rightarrow$

$\Rightarrow Rg\ A \ge 2$

Рассмотрим окаймляющие миноры к $\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$:

$\begin{vmatrix} 10 & 4 & -1 \\ 10 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 0$ (2 одинаковые строки)

$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 7 \\ -2 & -8 & -7 \end{vmatrix}$; третья строка получается при умножении первой на 0 и вычитании из неё второй $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ одна из строк – линейная комб. других $\Rightarrow \Delta = 0.$

Все окаймляющие миноры порядка 2 равны нулю $\Rightarrow Rg\ A = 2$

N 5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что при $\forall \lambda$ $Rg\, A \geq 2$:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 20 + 1 = 21 \neq 0$$

Рассмотрим миноры порядка 3, содержащие λ (не одновременно):

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & 5 \\ 1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 5 - 24 - 2\lambda + 2 + 30 =$$

$= -\lambda - 29 + 32 = -\lambda + 3$; равенство нулю не выполняется при $\lambda \neq 3$.

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 5\lambda + 40 + 2 - 50 - 2\lambda =$$

$= 3\lambda + 41 - 50 = 3\lambda - 9$; равенство нулю не выполняется при $\lambda \neq 3$

Заметим, что оба минора являются окаймляющими к $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, причём иных окаймляющих его нет $\Rightarrow$ если они оба равны нулю (при $\lambda = 3$) $Rg\, A = 2$, а если $\lambda \neq 3$, то

$Rg\ A = 3$

Имеем : $\begin{cases} Rg\ A = 2\ ; \ \lambda = 3 \\ Rg\ A = 3\ ; \ \lambda \neq 3 \end{cases}$