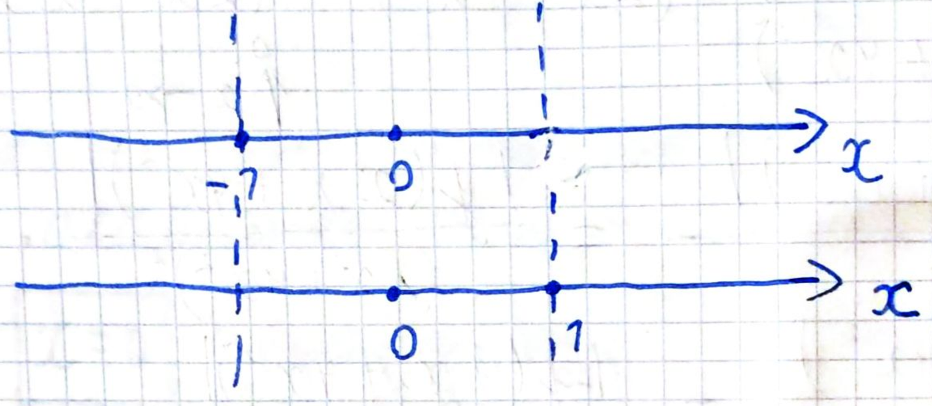
N1

а) $f(x) = \sqrt{x^4+x^3} - \sqrt{x^4-x^3}$

Область определения:

$$\begin{cases} x^4+x^3 \geq 0 \\ x^4-x^3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(x+1) \geq 0 \\ x^3(x-1) \geq 0 \end{cases}$$



$x \in (-\infty; -1] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$

Функция, являющаяся разностью 2 непрерывных функций, непрерывна на всей своей D_f, также на концах D_f функция определена $\Rightarrow$ верт. асимптот у $f(x)$ нет.

Рассмотрим наклонные асимптоты

- $x \to +\infty$

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4+x^3}-\sqrt{x^4-x^3}}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x(\sqrt{x^4+x^3}+\sqrt{x^4-x^3})} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^4+x^3} + \sqrt{x^4-x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}} \overset{\text{а.л.}}{=} \frac{2}{2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+x^3} - \sqrt{x^4-x^3} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}} - x^2\sqrt{1-\frac{1}{x}} - x\right) (*)$$

Сделаем замену: $\frac{1}{x} = t$:

$$(*): \lim_{t\to0+}\left(\frac{1}{t^2}\sqrt{1+t} - \frac{1}{t^2}\sqrt{1-t} - \frac{1}{t}\right)(**)$$

Разложим $\sqrt{1\pm t}$ в ряд Тейлора в окр-ти нуля:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{1+t} &= 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \overline{o}(t^2) \\ \sqrt{1-t} &= 1 - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \overline{o}(t^2)\end{aligned}\right\} \longrightarrow (**):$$

$$\lim_{t\to0+}\left(\frac{1}{t^2}\left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \overline{o}(t^2)\right) - \frac{1}{t^2}\left(1 - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \overline{o}(t^2)\right)\right)$$

$$= \lim_{t\to0+}\left(\frac{1}{t^2} + \cancelto{0}{\frac{1}{2t}} - \frac{1}{8} + \cancelto{0}{\frac{\overline{o}(t^2)}{t^2}} - \frac{1}{t^2} + \cancelto{0}{\frac{1}{2t}} + \frac{1}{8} + \right.$$

$$\left. + \cancelto{0}{\frac{\overline{o}(t^2)}{t^2}}\right) \overset{\text{а.л.}}{=} 0$$

При $x \to +\infty$ имеет наклонную асимптоту $\boxed{y = x}$

- $x \to -\infty$

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^4+x^3}-\sqrt{x^4-x^3}}{x}$$

Сделаем замену $t=-x$:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{t^4-t^3}-\sqrt{t^4+t^3}}{-t} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{t^4+t^3}-\sqrt{t^4-t^3}}{t} = 1$$

↑

было посчитано ранее.

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^4+x^3}-\sqrt{x^4-x^3}-x\right)$$

Сделаем замену $t=-x$:

$$\lim_{t\to+\infty} \left(\sqrt{t^4-t^3}-\sqrt{t^4+t^3}+t\right) =$$

$$= -\lim_{t\to+\infty} \left(\sqrt{t^4+t^3}-\sqrt{t^4-t^3}-t\right) =$$

$$= -0 = 0$$

↑

было посчитано ранее

При $x \to -\infty$ имеем наклонную асимптоту:

$$\boxed{y = x}$$

N 1

в) $D_f = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Единственный кандидат на вертикальную асимптоту: $x = 0$

$$\lim_{x\to 0+} |x+2| \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} (x+2)\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{x}} \overset{\text{а.л.}}{=}$$

$$= 0$$

$$\lim_{x\to 0-} |x+2| \cdot e^{-\frac{1}{x}} \underset{\substack{\uparrow \\ t=-x}}{=} \lim_{t\to 0+} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{огр.}}}{|2-t|} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{б.б.}}}{e^{\frac{1}{x}}} =$$

$= +\infty$ – значит вертикальная асимптота есть.

$\boxed{x=0}$ – вертикальная асимптота.

Рассмотрим наклонные асимптоты

· $x \to +\infty$

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[x]{\frac{1}{e}}\,(x+2)}{x} =$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[x]{\frac{1}{e}} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{огр.}\cdot\text{б.м.}}}{\frac{2\sqrt[x]{\frac{1}{e}}}{x}}\right) \overset{\text{а.л.}}{=} 1+0=1$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to+\infty}\left((x+2)\cdot e^{-\frac{1}{x}} - x\right)$$

Сделаем замену $-\frac{1}{x}=t \Leftrightarrow x=-\frac{1}{t}$:

$$\lim_{t\to0-}\left(\left(2-\frac{1}{t}\right)\cdot e^t + \frac{1}{t}\right) \quad (*)$$

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора для e^t в окр-ти нуля:

$$e^t = 1+t+\bar{o}(t) \to (*):$$

$$\lim_{t\to0-}\left(\left(2-\frac{1}{t}\right)\left(1+t+\bar{o}(t)\right)+\frac{1}{t}\right) =$$

$$=\lim_{t\to0-}\left(2+2\overset{\nearrow 0}{t}+2\bar{o}(t)-\cancel{\frac{1}{t}}-1-\overset{\nearrow 0}{\frac{\bar{o}(t)}{t}}+\cancel{\frac{1}{t}}\right) =$$

$$\overset{\text{а.л.}}{=}\lim_{t\to0-}\left(1+\cancel{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{б.м.}}}{2t}\cdot\left(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{б.м.}}}{\frac{\bar{o}(t)}{t}}\right)}^{\to 0}\right) \overset{\text{а.л.}}{=} 1$$

Для $x \to +\infty$ наклонная асимптота

$$\boxed{y = x + 1}$$

• $x \longrightarrow -\infty$

$$k = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{(-x-2)\cdot e^{-\frac{1}{x}}}{x}$$

Сделаем замену $t = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{t}$:

$$\lim_{t\to0+}\frac{\left(\frac{1}{t}-2\right)\cdot e^{t}}{-\frac{1}{t}} = \lim_{t\to0+}\left(t\left(2-\frac{1}{t}\right)\cdot e^{t}\right) =$$

$$= \lim_{t\to0+} e^{t}\cdot(2t-1) \overset{\text{а.п.}}{=} 1\cdot(-1) = -1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to-\infty}\left((-x-2)\cdot e^{-\frac{1}{x}} + x\right)$$

Сделаем замену $t = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{t}$:

$$\lim_{t\to0+}\left(\left(\frac{1}{t}-2\right)\cdot e^{t} - \frac{1}{t}\right)$$

Воспользуемся разложением e^{t} в ряд Тейлора в окрестности нуля:

$$\lim_{t\to0+}\left(\left(\frac{1}{t}-2\right)\left(1+t+\bar{o}(t)\right) - \frac{1}{t}\right) =$$

$$= \lim_{t\to0+}\left(\cancel{\frac{1}{t}} + 1 + \overset{\to 0}{\cancel{\frac{\bar{o}(t)}{t}}} - 2 - \overset{\to 0}{\cancel{2t}} - 2\,\bar{o}(t) - \cancel{\frac{1}{t}}\right) =$$

$$= \lim_{t\to0+}\left(-1 - \overset{\to 0}{\cancel{\underset{\text{б.м.}}{2t}\cdot\underset{\text{б.м.}}{\frac{\bar{o}(t)}{t}}}}\right) \overset{\text{а.п.}}{=} -1$$

Для $x \longrightarrow -\infty$ наклонная асимптота $\boxed{y = -x-1}$

№2

а) $f(x) = \underline{O}(x^2)\ ;\ x \to 0$

$\Downarrow ?$

$f(x) = \underline{O}(x^3)\ ;\ x \to 0$

Нет, не следует. Контрпример: $f(x) = x^2$:

- $f(x) = \underline{O}(x^2)\ ;\ x \to 0$

$\Updownarrow$

$\left|\frac{x^2}{x^2}\right| = 1$ - верно

- $f(x) = \underline{O}(x^3)\ ;\ x \to 0$

$\Updownarrow$

$\left|\frac{x^2}{x^3}\right| = \frac{1}{|x|} \xrightarrow{x \to 0} +\infty$

в) $f(x) = \overline{o}(x^3)\ ;\ x \to 0$

$\Downarrow ?$

$f(x) = \overline{o}(x^2)\ ;\ x \to +\infty$

Нет, не следует. Контрпример: $f(x) = x^4$

- $\frac{|x^4|}{|x^3|} = |x| \xrightarrow{x \to 0} 0$
- $\frac{|x^4|}{|x^2|} = |x^2| \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$

c) $f(x) = \bar{o}(x^3)$; $x \to +\infty$

$\Downarrow$?

$f(x) = \bar{o}(x^3)$; $x \to 0$

Нет, не следует. Контрпример: $f(x) = x$

- $\frac{|x|}{|x^3|} = \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \to +\infty} 0$
- $\frac{|x|}{|x^3|} = \frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \to 0} +\infty$

№3

$f(x) = \underline{O}(g(x))$

$\Downarrow$?

$2^{f(x)} = \underline{O}(2^{g(x)})$

Нет, не верно. Пусть $f(x) = 52x$, $g(x) = x$; $x \to +\infty$

- $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \left|\frac{52x}{x}\right| = 52 \le 228$
- $\left|\frac{2^{52x}}{2^{x}}\right| = 2^{51x} \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$

N 4

$$f(y) = 1+3y-y^2+\bar{o}(y^2);\ y\to 0$$

$$\Updownarrow$$

$$f(y) = 1+3y-y^2+g(y);\quad \frac{|g(y)|}{y^2}\xrightarrow{y\to 0} 0$$

$$f(2x+4x^2) = 1+3(2x+4x^2)-(2x+4x^2)^2 + g(2x+4x^2)$$

$$\overset{0}{\uparrow}\ x\to 0$$

$$\frac{|g(2x+4x^2)|}{x^2} = \frac{|g(2x+4x^2)|}{(2x+4x^2)^2}\cdot \frac{(2x+4x^2)^2}{x^2} = \bar{o}(x^2)$$

$$\|$$

$$\frac{4x^2(1+2x)^2}{x^2} = 4(1+2x)^2\xrightarrow{x\to 0} 0$$

$$f(2x+4x^2) = 1+6x+12x^2-4x^2-16x^3-16x^4 + \bar{o}(x^2) = 1+6x+8x^2-16x^3-16x^4+\bar{o}(x^2)$$

$$\frac{|-16x^3-16x^4|}{x^2} = 16x+16x^2\xrightarrow{x\to 0} 0$$

$$\Downarrow$$

$$-16x^3-16x^4 = \bar{o}(x^2)$$

$$f(2x+4x^2) = 1+6x+8x^2+\bar{o}(x^2)+\bar{o}(x^2) =$$

$= 1 + 6x + 8x^2 + \bar{o}(x^2)$

• Нахождение предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x - x^2 + \bar{o}(x^2)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(3 - x + \frac{\bar{o}(x^2)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(3 - x + \underset{\text{б.м.}}{\underset{\uparrow}{x}}\cdot \underset{\text{б.м.}}{\underset{\uparrow}{\frac{\bar{o}(x^2)}{x^2}}}\right)$$

$$\overset{\text{д.г.}}{=} 3$$