ДЗ к семинару 3

Задача 1. Доказать, что используя элементарные преобразования только второго и третьего типов, можно получить элементарные преобразования первого типа.

Задача 2. Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots \\ a_2 & \dots \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times n}(\mathbb{R})$ такую, что $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \neq 0$. Доказать, что используя элементарные преобразования строк только третьего типа можно привести матрицу A к виду $\begin{pmatrix} 1 & \dots \\ 0 & \dots \end{pmatrix}$.

Задача 3. Доказать следующие равенства:

1) $U_1(i;j) = E + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{i,i} - E_{j,j}$,
   $U_2(i;\lambda) = E + (\lambda - 1)E_{i,i}$ и
   $U_3(i;j,\lambda) = E + \lambda E_{i,j}$;

2) $U_1(i;j)^T = U_1(i;j)$,
   $U_2(i;\lambda)^T = U_2(i;\lambda)$ и
   $U_3(i;j,\lambda)^T = U_3(j;i,\lambda)$.

Задача 4. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ – произвольная матрица. Доказать следующие соотношения:

$$A \overset{Э_1(i;j)}{\rightsquigarrow} U_1(i;j)\cdot A, \quad A \overset{Э_2(i;\lambda)}{\rightsquigarrow} U_2(i;\lambda)\cdot A \quad \text{и} \quad A \overset{Э_3(i;j,\lambda)}{\rightsquigarrow} U_3(i;j,\lambda)\cdot A.$$

Задача 5. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ – произвольная матрица и $Э_\alpha$ – некоторое элементарное преобразование строк. Обозначим через $Э_\alpha^T$ элементарное преобразование столбцов, соответствующее $Э_\alpha$ (то есть того же типа и с теми же параметрами). Доказать, что если $A \overset{Э_\alpha}{\rightsquigarrow} A'$, то $A^T \overset{Э_\alpha^T}{\rightsquigarrow} (A')^T$.

Задача 6. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ – произвольная матрица. Не производя явных вычислений, используя свойства транспонирования и результаты задач 3, 4 и 5, доказать соотношения

$$A \overset{Э_1^T(i;j)}{\rightsquigarrow} A\cdot U_1(i;j), \quad A \overset{Э_2^T(i;\lambda)}{\rightsquigarrow} A\cdot U_2(i;\lambda) \quad \text{и} \quad A \overset{Э_3^T(i;j,\lambda)}{\rightsquigarrow} A\cdot U_3(j;i,\lambda).$$

Задача 7. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ – произвольная матрица. Обозначим

$$A \overset{Э_1(i;j)}{\rightsquigarrow} A', \quad A \overset{Э_2(i;\lambda)}{\rightsquigarrow} A'' \quad \text{и} \quad A \overset{Э_3(i;j,\lambda)}{\rightsquigarrow} A'''.$$

Доказать, что

$$A' \overset{Э_1(i;j)}{\rightsquigarrow} A, \quad A'' \overset{Э_2(i;\lambda^{-1})}{\rightsquigarrow} A \quad \text{и} \quad A''' \overset{Э_3(i;j,-\lambda)}{\rightsquigarrow} A.$$