Дискретная математика **ПИ**

Листок 6. Множества.

В этом листке нужно стараться доказывать все утверждения формально, логически выводя их из аксиом и определений и сколько возможно избегая ссылок на «очевидность». В частности, не следует опираться на утверждения вроде $1 \notin 2$, поскольку строение *множеств* 1 и 2 («все есть множество») нам не известно, раз мы не давали соответствующего определения. Можно лишь считать, что $1 \in \mathbb{N}$, $2 \in \mathbb{N}$, $1 \neq 2$ и т. д. (т. е. мы принимаем на веру простые факты, хорошо знакомые нам ранее).

1. Докажите, что из $A \subseteq B$ и $B = C$ следует $A \subseteq C$.

2. Приведите пример множеств A и B, для которых:

a) $A \notin B$ и $A \not\subseteq B$;

b) $A \notin B$ и $A \subseteq B$;

c) $A \in B$ и $A \not\subseteq B$;

d) $A \in B$ и $A \subseteq B$.

Используйте как можно меньше недоказанных предположений (вроде $2 \notin 1$), сколь бы очевидными они ни казались. Может быть полезным тот факт, что множество $\varnothing$ не имеет элементов.

3*. Докажите, что $\{\{a, b\}, \{b, c\}\} \neq \{a, b, c\}$ для любых a, b, c. Возможно ли здесь включение в какую-либо сторону?

4. Определите в виде $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$ множество:

a) всех целых корней многочлена $17x^{19} - 62x^{12} + 11x^{11} - 8x^6 + x^3 - 2x + 1229$;

b) всех подмножеств множества X ровно с одним элементом (*синглетонов*); при этом не следует ссылаться на «число элементов», «мощность» и т. п.

5. В это задаче *не ссылайтесь* на аксиому основания.

a) Докажите, что не существует такого множества R, что ($x \in R \iff x \notin x$) при всех x (*парадокс Рассела*).

b) Докажите, что не существует множества V, такого что $x \in V$ для всех x (т. е. не существует множества всех множеств).

c) Объясните, зачем вообще нужны «принципы построения множеств». Почему нельзя просто группировать объекты, имеющие какое-либо общее свойство?

6. Выпишите все элементы множества $\mathcal{P}(X)$, где $X = \{1, 2, 3\}$. Какие есть включения между этими элементами?

7. Докажите, что $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(Y) \iff X \subseteq Y$ при всех X и Y.

8. Докажите, что $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ для любых множеств A и B. Если хотите, рассмотрите еще несколько тождеств.

9. Правда ли, что для любых A, B, C верно:

a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

b) $A \cup B = A \cap B \iff A = B$;

c) $B \cup C \subseteq A \iff B \subseteq A$ и $C \subseteq A$?

Избегайте рассматривать отдельные элементы, стараясь использовать известные тождества.

10. Приведите пример множеств A и B, таких что $A \times B \neq B \times A$.

11. Проверьте тождества:

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

b) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$;

c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

12. Пусть A и B непусты. Тогда $A \subseteq C$ и $B \subseteq D \iff A \times B \subseteq C \times D$. Рассмотрите случай, когда A или B пусто.

13*. Пусть A и B непусты. Тогда $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times D$ равносильно $A = B = C = D$.