

Д/з по алгебре №8

№1

Требуется, что она имеет значение.
 Тогда $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (не все равны нулю):

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ -3\lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\lambda_2 \\ -\lambda_2 \\ 5\lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ -4\lambda_3 \\ 3\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 - \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} (*)$$

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(II)} + 3 \cdot \text{(III)}]{\text{(I)} - 2 \cdot \text{(III)}} \begin{pmatrix} 0 & -7 & -5 \\ 0 & 14 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(II)} \leftrightarrow \text{(I)}} \begin{pmatrix} 0 & 14 & 5 \\ 0 & -7 & -5 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(II)} \leftrightarrow \text{(I)}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & 14 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(III)} + 2 \cdot \text{(II)}} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(I)} : (-7); \text{(III)} : (-5)} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Заметим, что тогда СЛАУ (*) имеет нулевое решение \Rightarrow система имеет тривиальное решение.

Запишем матрицу векторы в виде единиц (столбцы):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} (*)$$

$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4$

Приведем (*) к ступенчатому виду элементарными преобразованиями:

$$(*) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4$

имеем, что v_1, v_2 - ЛНЗ $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2$ - база системы столбцов

известно, что при преобразовании (*), матрица не меняется. В нашей исходной матрице (приведённой к каноническому виду) первые 2 строки $1 \ 1 \ 3 \Rightarrow d_1, d_2$ — база системы строк

№4

д) Пусть $b = \alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \alpha_3 d_3$

$$\begin{cases} 4\alpha_1 + 7\alpha_2 + 4\alpha_3 = 5 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 9 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 6\alpha_3 = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 4 & | & 5 \\ 4 & 2 & 1 & | & 9 \\ 3 & 1 & 6 & | & \lambda \end{pmatrix} (*)$$

Приведём м-цу к ступенчатому виду элементарными преобразованиями:

$$(*) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 7 & 4 & | & 5 \\ 0 & -5 & -3 & | & 4 \\ 0 & -\frac{17}{4} & 3 & | & \lambda - \frac{15}{4} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 7 & 4 & | & 5 \\ 0 & -5 & -3 & | & 4 \\ 0 & 0 & \frac{111}{20} & | & \frac{20\lambda - 143}{20} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 7 & 4 & | & 5 \\ 0 & -5 & -3 & | & 4 \\ 0 & 0 & 111 & | & 20\lambda - 143 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 7 & 4 & | & 5 \\ 0 & -5 & -3 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{20\lambda - 143}{111} \end{pmatrix}$$

Тогда $\lambda_3 = \frac{20\lambda - 793}{197}$, а λ_1, λ_2

выражаются через $\lambda_3 \Rightarrow \lambda \in \dots$

б) Пусть $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$

запишем сразу в матричном виде:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 7 & \lambda \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 9 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) (*)$$

Заметим, что последняя строка (*) эквивалентна уравнению $0 = -1 \leftarrow$ невозможно $\Rightarrow \nexists \lambda \in \mathbb{R}$, при которых в л. в. через a_1, a_2, a_3 .

$$\lambda \in \emptyset$$

Нет, не существует.

Доказательство:

Запишем наши столбцы в виде матрицы и выделим в ней базисный минор. Заметим, что его порядок ≤ 72 $\Rightarrow \exists$ столбцы, не вошедшие в базисный минор. По теореме о базисном миноре любой из таких столбцов является л.к. столбцов, вошедших в базисный минор. Но тогда взев эти столбцы с коэфф., необходимыми для

равенства произвольному столбцу, не входящему
в базисный мир, сам произвольный
столбец с координатами -1 и
все остальные столбцы (это будут
остаточные столбцы, не входящие в
базисный мир) с коэф. 0 . Мы
получим нетривиальную линейную
комбинацию, равную нулю \Rightarrow изначальная
система столбцов л.з.