Д/з к семинару 3

№1

(I) Докажем это для строк:

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Нам необходимо, используя лишь элементарные преобразования 1-го и 2-го типа заменять i и j строку местами:

1) $A \xrightarrow{Э_3(i;j,1)} \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{j1} & \dots & a_{in}+a_{jn} \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = A'$

$A' \xrightarrow{Э_3(j;i,-1)} \begin{pmatrix} a_{i1}+a_{j1} & \dots & a_{in}+a_{jn} \\ -a_{i1} & \dots & -a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = A''$

$A'' \xrightarrow{Э_3(i;j,1)} A''' \xrightarrow{Э_2(j,-1)} \begin{pmatrix} a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$

Мы получили то, что нам и требовалось.

(II) Докажем это для столбцов:

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & a_{mi} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Нам необходимо, используя лишь элементарные преобразования 1-го и 2-го типа заменять i-ый и j-ый столбец местами.

$A \xrightarrow{Э_3^T(i;j,1)} A' \xrightarrow{Э_3^T(j;i,-1)} A'' \xrightarrow{Э_3^T(i;j,1)} A''' \xrightarrow{Э_2^T(j,-1)} A''''$

$$A'''' = \begin{pmatrix} \vdots & a_{1j} & \vdots & a_{1i} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_{mj} & \vdots & a_{mi} & \vdots \end{pmatrix}$$

Мы получили то, что нам и требовалось.

№2

Пусть $\begin{cases} a_1 \neq 0 \\ a_2 \neq 0 \end{cases}$; преобразуем

$$A: \quad A \xrightarrow{\text{Э}_3\left(1;2,\, -\frac{(a_1-1)}{a_2}\right)} A' \xrightarrow{\text{Э}_3(2;1,\, -a_2)} \begin{pmatrix} 1 & \dots \\ 0 & \dots \end{pmatrix}$$

№3

1) $\dots = E + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} + \begin{array}{c} \\ j \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{array}{c} \\ i \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} - \begin{array}{c} \\ j \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 & \dots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & & 0 & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} i \\ \\ j \\ \\ \end{array} = U_1(i;j)$$

$E + (\lambda-1)\cdot E_{ii} =$

$$= \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} + \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \lambda-1 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & \overset{i}{\vdots} & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \lambda & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} = U_2(i;\lambda)$$

$$E + \lambda E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix} + \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & \dots & \overset{j}{0} \\ \vdots & \ddots & \lambda \\ \vdots & & \vdots \\ & \dots & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \dots & \overset{j}{\lambda} & 0 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} i \\ \\ \\ \\ \end{array} = U_3(i;j,\lambda)$$

2) $$U_1(i;j) = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & \overset{i}{\dots} & \dots & \overset{j}{\dots} & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & \dots & 0 & \\ & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_1^T(i;j) = \begin{array}{c} \\ j \\ \\ i \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & \dots & \overset{j}{\dots} & \overset{i}{\vdots} \\ \vdots & 0 & & 1 \\ \vdots & & 1 \dots & \vdots \\ \vdots & 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что в обоих случаях матрицы получились равными $\Rightarrow U_1(i;j) = U_1^T(i;j)$

$U_2(i;\lambda)$: в этом случае транспонирование никак не повлияет на матрицу, т.к. диагональные единицы не изм., а λ останется на пересеч. i-ой строки и i-ого столбца $\Rightarrow$

$\Rightarrow U_2(i;\lambda) = U_2^T(i;\lambda)$

$$U_3(i;j,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \overset{i}{\dots} & \dots & \overset{j}{\dots} \\ & 1 & \dots & \lambda \\ & & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \dots \\ & & & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \quad (*)$$

$$U_3(j;\ ,\lambda) = \begin{array}{c} i \\ \\ j \end{array}\begin{pmatrix} 1 & \dots & \overset{i}{\vdots} & \dots & \overset{j}{\vdots} \\ \vdots & & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \lambda & & 1 \dots & 1 \end{pmatrix}$$

При транспонировании $(*)$ получ...

нулевые единицы не изменят своих позиций, а λ с позиции ij перейдет на ji, что и соотв. $U_3(j;i,\lambda) \Rightarrow$

$$\Rightarrow U_3(i;j,\lambda)^T = U_3(j;i,\lambda)$$