Дискретная математика

Наука, лежащая в основе современной прикладной математики, результаты и методы которой используются практически в любой дисциплине, включающей в себя математические модели. В то же время дискретная математика — наука более молодая и, соответственно, менее глубокая и более доступная для изучения «без купюр».

Поэтому курс ДМ имеет три основные цели:

— Познакомить студентов с основами современной дискретной математики;

— Показать, как дискретная математика используется в экономических и «программистских» дисциплинах.

— Научить студентов работать с формальными математическими понятиями, в том числе строго доказывать простые утверждения.

Содержание курса

Множества и логика

Комбинаторика

Бинарные отношения

Теория графов

Итоговая оценка вычисляется по формуле:

$$0.15 \cdot C_1 + 0.15 \cdot C_2 + 0.2 \cdot C_3 + 0.15 \cdot H + 0,35 \cdot E,$$

где C_1—C_3 — оценки за контрольные работы, H — за домашние задание, E — за экзамен. Блокирующих форм контроля нет.

Округление итоговой оценки — математическое, кроме границ 3/4 (в меньшую сторону) и 0/1 (в большую). Т.е. 3,96 округляется до 3, а 4,50 — до 5.

Оценка за домашние задания состоит из процента решенных задач домашнего задания (2/3 от оценки) и оценки за активность на семинаре (1/3, оценивается преподавателем).

Домашние задания сдаются в электронном виде до начала семинара. Производится выборочная устная проверка. В случае обнаружения плагиата (или если студент не может объяснить свои решения), обнуляются оценки за все сданные студентом ранее домашние задания.

Контрольная работа и экзамен — письменные работы. Ориентировочно, 80-150 минут, 5-10 заданий. Категорически предпочтительно написание работы в аудитории.

Лекция 1

Множества

2 сентября 2025 г.

Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А. Бинарные отношения, графы и коллективные решения. М.: Физматлит, 2011,2017.

Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера. СПб.: Лань, 2004.

Халмош П. Наивная теория множеств. М.: Мир, 1965.

Неопределяемые понятия

Множество. A, B, $C\ldots$

Элемент. $a, b, c, \ldots$

Элемент принадлежит множеству. $x \in A$

Примеры:

A — множество всех четных чисел между 1 и 9. $2 \in A$, а $5 \notin A$.

B — множество всех корней уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$. $1 \in B$, $3 \in B$, а $0 \notin B$.

Пусть C — множество всех рек, протекающих по территории России. Волга$\in C$, Нева$\in C$, Нил$\notin C$.

— $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;
— $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;
— $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел;
— $\mathbb{R}$ — множество действительных (вещественных) чисел.

Множество, не имеющее ни одного элемента, называют пустым множеством. Обозначение: $\varnothing$.

Примеры:

Множество решений системы уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ 4x - 6y = 12 \end{cases}$$

Множество квадратных уравнений, имеющих более двух различных корней.

Множество, содержащее все элементы, находящиеся в рассмотрении, называется универсальным и обозначается U (от англ. universal).

Универсальное множество различно в разных моделях: в экономических задачах им может быть множество товаров на рынке, в социологических — множество жителей России и т.д. Ввести одно универсальное множество для всех моделей невозможно.

Парадокс Брадобрея: военный цирюльник получил приказ — брить тех и только тех солдат, которые не бреются сами. Сможет ли он выполнить приказ?

Парадокс Рассела: множество всех элементов и множеств — внутренне противоречивое понятие.

Множество может содержать себя, как элемент.

Рассмотрим множество (М) всех множеств, не содержащих себя, как элемент.

Верно ли, что $M \in M$?

Множества бывают конечные и бесконечные. Точное определение существует, но мы его пока опустим. Число элементов конечного множества обозначается $|M|$.

Но писать, например, $|\mathbb{R}| = \infty$ — ошибка и очень плохой тон.

A — множество всех товаров на рынке.

B — множество всех целых чисел, кратных 5.

Здесь A — конечное множество, а B — бесконечное. Хотя часто для удобства анализа в экономических моделях предполагается, что число товаров (или агентов) бесконечно.

Невозможно полностью устранить все ошибки в программах, поскольку множество всевозможных ошибок бесконечно, а множество найденных ошибок за время жизни программиста конечно.

Способы задания множеств

Перечисление: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.
Множество четных чисел между 1 и 9: $A = \{2, 4, 6, 8\}$.
Порядок не важен, повторения не учитываются, т.е. $\{2, 4, 6, 8\} = \{8, 4, 2, 6\} = \{6, 2, 4, 8, 8\}$.

Неформальный алгоритм.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

Характеристическое свойство

$$\{\text{ что } | \text{ при каких условиях}\}$$

Множество всех четных натуральных чисел:

$$2\mathbb{N} = \{2k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$$

Множество B называется подмножеством множества A, если все его элементы принадлежат A.

Обозначение: $B \subseteq A$, $A \supseteq B$.

Говорят также, что B включено в A, или B содержится в A.

$$B \subseteq A \Longleftrightarrow (x \in B \Rightarrow x \in A)$$

Если $B \subseteq A$ и множество A содержит элементы, которые не принадлежат B, то множество B называется собственным подмножеством множества A.

Обозначение: $B \subset A$.

$2\mathbb{N} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Свойства:

$X \subseteq X$, $\varnothing \subseteq X$.

Если $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq Z$, то $X \subseteq Z$.

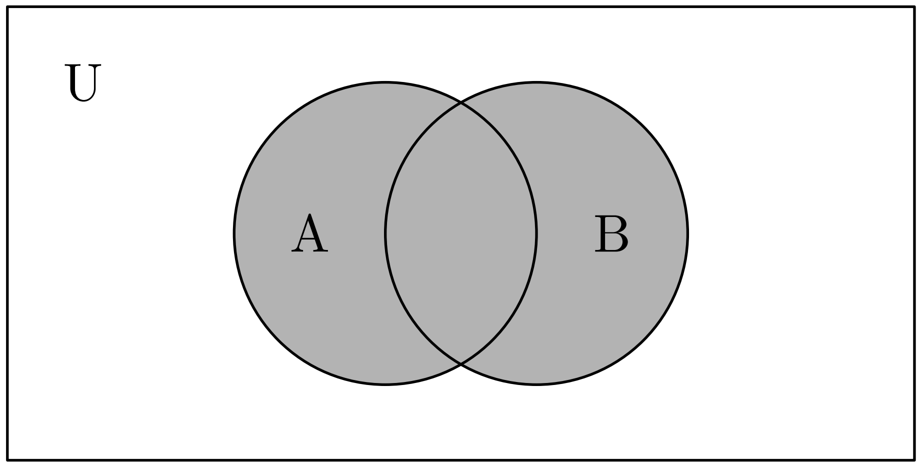
Множества A и B называются равными (или совпадающими), если они состоят из одних и тех же элементов.

$A = B$ тогда и только тогда, когда $\forall\, x\ x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

$$A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A.$$

Операции над множествами
Объединение

$$A \cup B = \{x \,|\, x \in A \text{ или } x \in B\}.$$



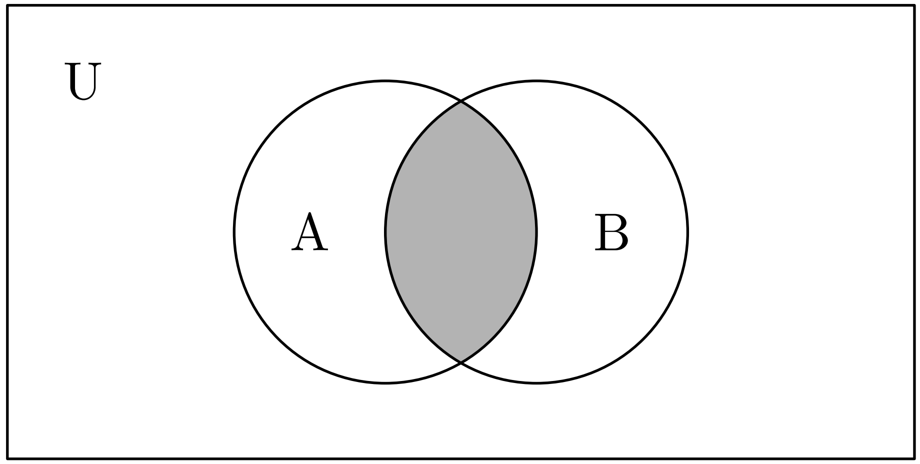
$A \cup B$

Объединение конечного числа множеств:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s = \{x \,|\, x \in A_1 \text{ или } x \in A_2 \text{ или } \ldots \text{ или } x \in A_s\}.$$

Пересечение

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \text{ и } x \in B\}.$$



$A \cap B$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_s = \{x \,|\, x \in A_1 \text{ и } x \in A_2 \text{ и } \ \ldots \ \text{ и } x \in A_s\}.$$

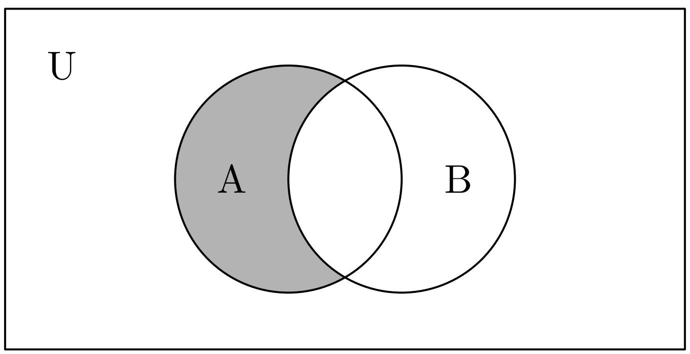
Если $A \cap B = \varnothing$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Разность

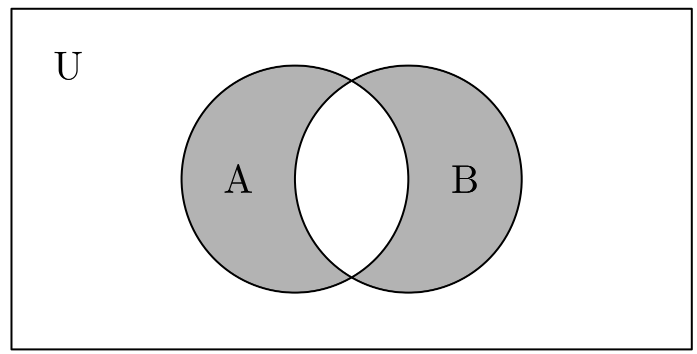
$A \backslash B = \{x \,|\, x \in A \text{ и } x \notin B\}.$

Симметрическая разность

$$A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$



$A \setminus B$



$A \Delta B$

Дополнение

$$\overline{A} = \{a \in U \mid a \notin A\}$$

Законы алгебры множеств

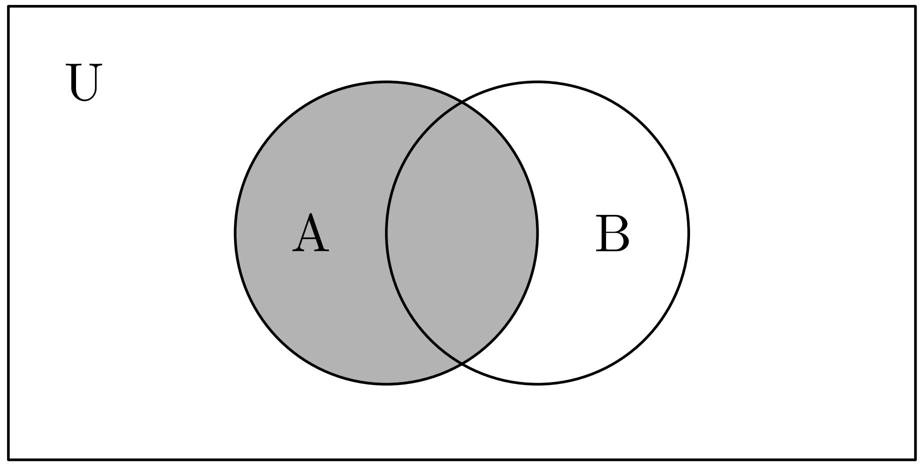
1°. *Законы идемпотентности:*
$A \cup A = A,\ \ A \cap A = A.$

2°. *Законы коммутативности* операций объединения и пересечения:
$A \cup B = B \cup A,\ \ A \cap B = B \cap A.$

3°. *Законы ассоциативности* операций объединения и пересечения:
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

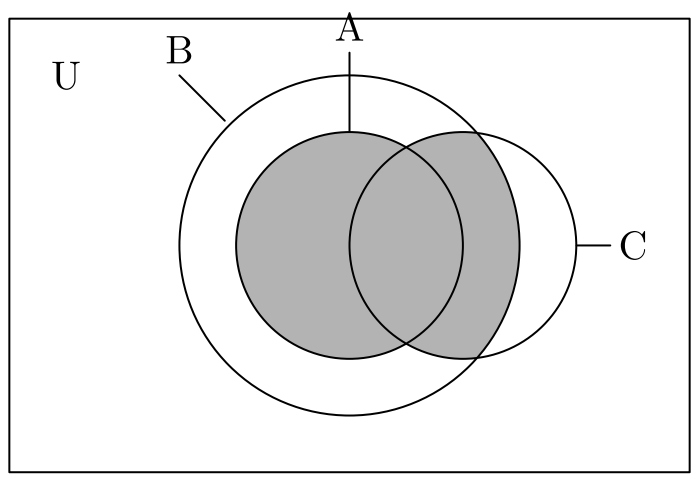
4°. *Законы поглощения*

$A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A.$



5°. *Модулярный закон*

Если $A \subseteq B$, то $A \cup (B \cap C) = (A \cup C) \cap B.$



6°. *Законы дистрибутивности:*
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

7°. *Универсальные границы* (нижняя и верхняя):
$A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$,
$A \cup U = U$, $A \cap U = A$.

8°. *Дополняемость:*
$A \cap \overline{A} = \varnothing$, $A \cup \overline{A} = U$.

9°. *Инволютивный закон:*
$\overline{\overline{A}} = A$.

10°. *Законы де Моргана:*
$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$,
$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Декартово произведение

Декартовым (прямым) произведением множеств A и B называется множество $A \times B$ всевозможных упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$ и $b \in B$, т.е.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ и } b \in B\}.$$

В общем случае $A \times B \neq B \times A$, т.е. порядок множеств в декартовом произведении важен!

Пример 1. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$.

Тогда $A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6)\}$,

$B \times A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3)\}$.

Пример 2. $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
Декартово произведение $A \times B$ можно интерпретировать как множество клеток шахматной доски.

Пример 3. Докажите, что $A \times B = B \times A$ тогда и только тогда, когда $A = B$.

Решение. Пусть $A \neq B$. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что существует x, такой, что $x \in A$, но $x \notin B$. Поскольку B непусто, выберем $y \in B$. Пара (x, y) по определению входит в $A \times B$, но т.к. $x \notin B$, не входит в $B \times A$. Следовательно, $A \times B \neq B \times A$. Полученное противоречие позволяет утверждать, что $A = B$.

Обратное утверждение доказывается проще: если $A = B$, то $A \times B = A \times A = B \times A$.

Если множества A и B конечны, то множество $A \times B$ содержит $|A| \cdot |B|$ элементов. Поэтому декартово произведение и называется произведением.

Пример 4. А сколько элементов в $\mathbb{R} \times \varnothing$?

Пример 5. Декартово произведение n отрезков $[0, 1]$ называется *n-мерным кубом* и обозначается I^n. Для удобства будем считать, что I^0 — это точка.

Что такое

I^1;

I^2;

I^3?

Дайте определение вершины, ребра и грани n-мерного куба. Сколько вершин, ребер и граней в таком кубе?

Нарисуйте проекцию на плоскость 4-мерного куба. Также он называется тассеракт. В «Мстителях», он, кстати, нарисован неправильно. Сравните свою проекцию с фильмом.

Разбиение множеств

Совокупность множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ таких, что $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = U$, называется разбиением множества U.