

Д/з по дискретной математике 10

№1
Докажем, используя метод математической индукции.

1) База индукции $n=1$:

$$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1 \quad \text{— верно}$$

2) Предположение:
верно $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \geq 1$

3) Докажем:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6};$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^n i^2 + (n+1)^2 = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} = \\
 &= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \\
 &= \frac{(n+1) \cdot 2 \cdot (n+2)(n+3)}{6} = \\
 &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad \text{з.н.г.}
 \end{aligned}$$

N 2

Докажем, используя метод
математической индукции:

1) База индукции $n=2$:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{13}{24} \Leftrightarrow \frac{8}{24} + \frac{6}{24} > \frac{13}{24} \Leftrightarrow \frac{14}{24} > \frac{13}{24} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 14 > 13$ - верно

2) Предположим: пусть $\forall k: 1 \leq n$

верно: $\sum_{i=1}^k \frac{1}{k+i} > \frac{13}{24}$

3) Докажем:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+i} > \frac{13}{24}$$

Докажем, используя метод математической индукции

1) База индукции $n=1, 2$ привален:

• \longrightarrow

2) Предположение: пусть $\forall n \geq 2$ среди городов существует такой, что из него можно добраться в любой другой город, пусть это город X .

3) Докажем, что при добавлении в схему нового города (и сохранении всех укл.) останется один город, из которого можно добраться в любой другой.

Рассмотрим разные случаи (пусть N - новый город):

(I) N соединен с X и из X можно попасть в N напрямую - привален, так из X можно попасть в N и в все остальные города (по предположению)

(II) Пусть из X нельзя напрямую попасть в N , но можно напрямую попасть из другого города B . Тогда можно построить путь так:

$X \rightarrow \dots \rightarrow B \rightarrow N$

II) Пусть нет ни одного города из которого можно попасть в N напрямую.
 Тогда N и состоит только из городов, из которых можно попасть в любой другой: из укл. он должен быть соединен с любым другим, в частности прямой дорогой.

Все возможные ситуации рассмотрены. Ч.т.д..

N2

Туден доказывать, используя метод математической индукции.

1) Базис: $n=2$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$

2) Предположение: пусть $\forall n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} > \frac{13}{24}$

3) Шаг индукции: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} > \frac{13}{24}$ (нужно доказать):

Сравним суммы (1) и (2):
 (пусть ? - знак сравнения)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \quad ? \quad \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k}$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \quad ? \quad \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$\frac{1}{n+1} \quad ? \quad \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \quad | \cdot (n+1)$$

$$1 \quad ? \quad \frac{n+1}{2n+1} + \frac{1}{2}$$

$$1 \quad ? \quad \frac{2n+2 + 2n+1}{2(2n+1)}$$

$$1 \quad ? \quad \frac{4n+3}{4n+2} ; \text{очевидно, что}$$

$$1 < \frac{4n+3}{4n+2} \quad , \text{ но тогда:}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} < \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} \quad , \text{ но } \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} > \frac{13}{24}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} > \frac{13}{24} \quad , \text{ ч. м. д.}$$

Доказать $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \geq n$

Докажем вспомогательный факт:

$$\forall y > 0, x < y : \frac{2}{y} \leq \frac{1}{y-x} + \frac{1}{y+x} \quad (*)$$

$$\frac{2}{y} \leq \frac{y+x+y-x}{(y-x)(y+x)} = \frac{2y}{y^2-x^2}$$

$$\frac{2y}{y^2-x^2} - \frac{2}{y} \geq 0$$

$$\frac{2y^2 - 2y^2 + 2x^2}{y(y^2-x^2)} \geq 0$$

$$\frac{2x^2}{y(y^2-x^2)} \geq 0 \quad - \text{очевидно верно}$$

Докажем исходное утверждение методом математической индукции:

База: $n=1$: пусть $k=1$, тогда $\frac{1}{1} \geq 1$ - верно

Переход: пусть утверждение верно для некоторого $n = t$, докажем его для $n = t+1$.

Известно: $\exists k_1: \sum_{i=1}^{k_1} \frac{1}{i} \geq t \quad (1)$

Доказать: $\exists k_2: \sum_{i=1}^{k_2} \frac{1}{i} \geq t+1 \quad (2)$

Из (1) $\Rightarrow \exists a \geq 0: t = \sum_{i=1}^{k_1} \frac{1}{i} - a \quad (3)$

(3) \rightarrow (2): $\sum_{i=1}^{k_1} \frac{1}{i} + \sum_{i=k_1+1}^{k_2} \frac{1}{i} \geq \sum_{i=1}^{k_1} \frac{1}{i} - a + 1$

$$\sum_{i=k_1+1}^{k_2} \frac{1}{i} \geq 1 - a$$

$$\sum_{i=k_1+1}^{k_2} \frac{1}{i} \geq 1 \quad (4)$$

Пусть $k = k_1 + 1$, $k_2 = k + \ell$, тогда (4) можно записать в виде:

$$\forall k \exists \ell: \sum_{i=0}^{\ell} \frac{1}{k+i} \geq 1$$

Пусть это не так, т.е. $\exists k \forall \ell: \sum_{i=0}^{\ell} \frac{1}{k+i} < 1 \quad (5)$

Положим $\ell \equiv 1 \pmod{2}$, тогда возможно

представить (5) в виде:

$$\sum_{i=0}^{\ell} \frac{1}{k+i} < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+\ell} \right) + \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+\ell-1} \right) + \dots + \left(\frac{1}{k+\frac{\ell-1}{2}} + \frac{1}{k+\frac{\ell+1}{2}} \right) < 1$$

делаем замену, используя (*):

$$\frac{\frac{2}{k+k+\gamma}}{2} + \frac{\frac{2}{k+k+\gamma}}{2} + \dots + \frac{\frac{2}{k+k}}{2}$$

Возьмем $\gamma = 100 \text{ К}$:

- протусловие \Rightarrow переход
верен \Rightarrow исходное утверждение