

Теорема Вейерштрасса. Критерий Коши. Подпоследовательности.
Частичные пределы.

1. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, если

$$a) x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}, \quad b) x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

2. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентно, сходится и найти ее предел

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}.$$

3. Исследовать сходимость последовательности $\{x_n\}$ по критерию Коши

$$a) x_n = \frac{\sin a}{2} + \frac{\sin 2a}{2^2} + \dots + \frac{\sin na}{2^n}; \quad b) x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)};$$

$$c) x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

4. У последовательности $\{x_n\}$ подпоследовательности $\{x_{2k}\}$, $\{x_{2k-1}\}$ и $\{x_{3k}\}$ сходятся. Доказать, что сходится и сама последовательность.

5. Найти все частичные пределы, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty}$ и $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty}$ последовательности

$$a) x_n = 3^{(-1)^n n}. \quad b) x_n = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

$$c) \left\{ 1; \frac{1}{2}; \frac{2}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{3}{4}; \frac{4}{4}; \frac{5}{4}; \dots, \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{2^n + 1}{2^n}, \dots \right\}.$$

1. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, если

$$a) x_n = 1 + \frac{1^2}{4} + \frac{2^2}{4^2} + \dots + \frac{n^2}{4^n}, \quad b) x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

2. Доказать, что последовательность, заданная рекуррентно, сходится и найти ее предел

$$x_1 = \sqrt{5}, \quad x_{n+1} = \sqrt{5 \cdot x_n}.$$

3. Исследовать сходимость последовательности $\{x_n\}$ по критерию Коши

$$a) x_1 = 1, \quad x_n = x_{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n!};$$

$$b) x_n = \sum_{k=1}^n a_k q^k, \quad |q| < 1, \quad |a_k| \leq C, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$c) x_n = \frac{n \cos \pi n - 1}{2n}.$$

4. Найти все частичные пределы последовательности, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty}$ и $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty}$

$$a) x_n = n \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right). \quad b) x_n = \frac{((-1)^n - 1)n^2 + n + 1}{n},$$

$$c) \left\{ 1; \frac{1}{10}; \frac{2}{10}; \dots; \frac{9}{10}; \frac{1}{10^2}; \frac{2}{10^2}; \dots; \frac{99}{10^2}; \dots, \frac{1}{10^n}; \frac{2}{10^n}; \dots; \frac{10^n - 1}{10^n}; \dots \right\}.$$