Алгебра. ПИ. Семинар 7.
Скелетное разложение. LU-разложение.

Осень 2025. Медведь Никита Юрьевич

1 Задачи для семинара

Обсуждение 1 (LU-разложение: идея)**.** Пусть есть произвольная матрица A. Мы хотим разложить её в произведение $A = LU$, где L нижнетреугольная (**l**ower triangular), а U верхнетреугольная (**u**pper triangular). Зачем это нужно? Допустим, в наших планах решить систему уравнений, записанную в матричном виде как $Ax = b$. Тогда если представить её как $LUx = b$, то можно временно подумать об Ux как об одном неизвестном векторе, назовём его y. Тогда $Ly = b$ – очень легко решаемая система (за счёт треугольности L). Потом останется система $Ux = y$, тоже лёгкая из-за треугольности. К сожалению, алгоритм разложения A в произведение LU будет использовать метод Гаусса, поэтому вся эта история будет не легче, чем решить исходную систему методом Гаусса. Тогда зачем же мы всё это делаем?

Объяснение первое, наивное. Пусть у нас не одна система, а много, с одной и той же матрицей: $Ax_1 = b_1$, $Ax_2 = b_2$, ..., где x_i не i-тая координата вектора x, а целый свежий вектор целиком. Тогда мы один раз разложим A в произведение LU, а потом много раз будем пожинать плоды.

Почему это наивное объяснение? Ну, я вроде как могу с тем же успехом посчитать матрицу A^{-1}? Тоже посчитаем один раз, а потом много раз будем пожинать плоды. Вы можете возразить, что она может не существовать, но как мы скоро увидим, тогда и с LU-разложением могут быть проблемы (а может и не быть, во всех деталях это долгая история). Тогда зачем все эти заморочки? Ну, очень грубо говоря, оказывается, что матрицы L^{-1} и U^{-1} могут быть в некотором смысле хорошие, а матрица A^{-1} в некотором смысле похуже, тогда поиск решения в два этапа будет на компьютере делаться с меньшей потерей точности. На самом деле сказанное выше неправда, но правда выходит далеко за наши возможности.

Обсуждение 2 (LU-разложение: алгоритм)**.** Будем делать метод Гаусса над матрицей A, применяя только операции 1 типа, причём только сверху вниз (то есть прибавлять строку, умноженную на некоторый коэффициент, к одной из последующих). Тогда если это выйдет, то рано или поздно мы получим ступенчатый (не улучшенный!) вид. Заметим, что он автоматически треугольный (а возможно в нём есть дополнительные нули — это неважно). Обозначим его U.

Теперь возьмём каждое преобразование, которое мы проделывали (вы же записали, какие именно преобразования проделывали? как я не предупредил?) и представим при помощи элементарной матрицы. Если на s-том шаге i-тая строка прибавляется к j-той с коэффициентом λ (ещё раз напомню, что $i < j$), то соответствующая элементарная матрица T_s содержит на диагонали единицы, а в клетке (j, i) число λ. Она нижнетреугольна. Тогда всю процедуру можно записать в виде $T_k T_{k-1} \dots T_2 T_1 A = U$ (здесь $T_1 A$ соответствует результату первого преобразования, $T_2 T_1 A$ результату второго и так далее). Тогда $A = (T_k T_{k-1} \dots T_2 T_1)^{-1} U$ — искомое разложение. Матрицу $L = (T_k T_{k-1} \dots T_2 T_1)^{-1}$ удобнее искать как $T_1^{-1} T_2^{-1} \dots T_k^{-1}$. Сами матрицы T_s^{-1} устроены очень просто — надо в той же клеточке вместо λ поставить $-\lambda$. Осталось все эти матрицы перемножить — тут, увы, никто не поможет. Ну разве что тот маааленький факт, что для перемножения этих матриц (если все действия сделаны в стандартном порядке, иначе не работает) нужно просто все эти числа $-\lambda$ записать в тех же клеточках в одну общую матрицу (а на диагонали оставить единицы). Докажите сами.

Упражнение 3 (LU-разложение: пример)**.** Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. Найти LU-разложение матрицы A.

Шпаргалка:

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\4&3&-2\\-5&-4&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-5&-6\\-5&-4&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-5&-6\\0&6&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-5&-6\\0&0&4-\frac{36}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-5&-6\\0&0&-\frac{16}{5}\end{pmatrix}=U.$$

Давайте пользуясь этим, посчитаем L.

Обсуждение 4 (Замечание о готовых формулах)**.** Есть также готовые формулы, по которым можно искать коэффициенты матриц L и U. Они на практике не удобнее для вычислений вот вообще ни капельки (как мне кажется) — а вот если вам захочется написать (на предмете «практикум по алгебре», например?) алгоритм на компьютере, рекомендую обратиться к этим формулам, они есть, например, в Википедии.

Обсуждение 5 (Скелетное разложение)**.** Пусть есть матрица A размера $m \times n$ ранга r. Тогда оказывается, что её можно представить в виде произведения $A = BC$ матриц размера $m\times r$ и $r\times n$. Это может оказаться полезным, если r мало. Самый банальный пример — хранение матрицы A занимает mn ячеек, а хранение матриц B и C — $r(m+n)$ ячеек. Впрочем, к этому плюсу прилагается жирный минус — чтобы извлечь какую-либо клеточку исходной матрицы A нужно произвести умножение строки матрицы B на столбец матрицы C, действие вовсе не мгновенное.

И всё же, как же такое разложение найти?

Способ 1: проделаем действия над строками, приведя матрицу A к улучшенному ступенчатому виду A'. Тогда в качестве матрицы B можно взять матрицу, составленную из столбцов исходной матрицы A, соответствующих лидерам строк матрицы A'; а в качестве матрицы C можно взять ненулевые строки матрицы A'. Почему это работает мы кратко обсудим на примере.

Способ 2 (для самостоятельного изучения при желании): пусть мы нашли ранг матрицы A и соответствующий ненулевой минор порядка r. Возьмём в качестве матрицы C набор из r строк, проходящих «через» этот минор. Тогда на матрицу B получаем матричное уравнение; окажется, что оно всегда разрешимо. Или наоборот, в качестве матрицы B возьмём набор из r столбцов, проходящих через минор, а на матрицу C получим матричное уравнение.

Этот способ можно немного модифицировать, а именно, это матричное уравнение можно упростить. Мы обсудим детали, дойдя до примера.

Замечание: в конце года мы обсудим ещё один способ найти это разложение, он будет сложнее, но зато найденное разложение, частный случай скелетного (так называемое сингулярное разложение) будет обладать дополнительными свойствами.

Замечание: полученное разложение можно преобразовать в сумму произведений вида «столбец на строку». Например, $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&8&9&10\\11&12&13&14\end{pmatrix}$ преобразуется в $\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&8&9&10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11&12&13&14\end{pmatrix}$. Такое разложение тоже называют скелетным разложением.

Упражнение 6 (Модификация П609; скелетное разложение способом 1)**.** Найти скелетное разложение матрицы $\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-3&4\\3&2&2&3\\1&-4&-8&5\end{pmatrix}$.

Решение: найдём улучшенный ступенчатый вид данной матрицы.

$$\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-3&4\\3&2&2&3\\1&-4&-8&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\0&-7&-13&6\\0&-7&-13&6\\0&-7&-13&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\0&1&13/7&-6/7\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-4/7&11/7\\0&1&13/7&-6/7\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Лидерам строк соответствуют первые два столбца, поэтому

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\\3&2\\1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-4/7&11/7\\0&1&13/7&-6/7\end{pmatrix}.$$

Почему это работает? (устное обсуждение линейных комбинаций столбцов)

Упражнение 7 (Модификация П609; скелетное разложение способом 2)**.** Найти скелетное разложение матрицы $\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-3&4\\3&2&2&3\\1&-4&-8&5\end{pmatrix}$, пользуясь знанием, что её ранг равен 2.

План решения: найти ненулевой минор порядка 2 (мы его уже видели, он просто в левом верхнем углу), взять в качестве матрицы C матрицу из соответствующих строк $\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-3&4\end{pmatrix}$. Решить уравнение $\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-3&4\\3&2&2&3\\1&-4&-8&5\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-3&4\end{pmatrix}$.

2 Домашнее задание

Упражнение 1. Для матрицы

$$\begin{pmatrix}10&4&-1\\10&4&-1\\2&8&7\\-2&-8&-7\end{pmatrix}$$

из предыдущего домашнего задания найдите скелетное разложение.

Упражнение 2. Проверить, существует ли для следующей матрицы LU-разложение, и если да, построить его.

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-3&1\\4&1&-5\end{pmatrix}$$

Упражнение 3. Проверить, существует ли для следующей матрицы LU-разложение, и если да, построить его.

$$\begin{pmatrix}4&-8&-5\\-4&7&-1\\-3&5&1\end{pmatrix}$$

Упражнение 4. Объяснить, почему матрицы $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$ не существует LU-разложения.

Подсказка: начните «предположим, оно существует, обозначим клеточки матрицы L через l_{ij}, а клеточки матрицы U через u_{ij}, тогда верны следующие уравнения на них. . . »

Замечание: в этом месте курса было бы логично, если бы мы вам сказали какое-то условие, как по матрице понять, есть ли у неё LU-разложение. Но такого естественного условия в каком-то смысле нет. Для целей нашего курса достаточно считать, что если у вас получилось найти его стандартным алгоритмом, то тогда оно и есть. Если не получилось, то надо как-то кустарно, как в предыдущей задаче, показать что его нету у этой конкретно матрицы.

2.1 Дополнительные задачи (не оцениваются)

Обсуждение 5. Разобраться во втором способе поиска скелетного разложения.