**Алгебра. ПИ. Семинар 11.**
**Комплексные числа: тригонометрическая форма наносит ответный удар.**

*Осень 2025. Медведь Никита Юрьевич*

# 1 Задачи для семинара

**Упражнение 1** (К24.6абвгз). Изобразить на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам $z$, удовлетворяющих условиям:

а) $|z| = 1$;

б) $\arg z = \pi/3$;

в) $|z| \le 2$;

г) $|z - 1 - i| < 1$;

з) $|\arg z| < \pi/6$.

*Замечание*: в задачнике Кострикина главное значение аргумента (arg) понимается как лежащее в пределах $(-\pi, \pi]$. В других книгах вы можете встретить вариант с пределами $[0, 2\pi)$.

**Обсуждение 2** (Умножение). Обсуждаем умножение комплексных чисел в тригонометрической форме.

**Упражнение 3** (?). Найдите $(-1 + i)(-1 + i\sqrt{3})$ и $\frac{-1+i}{-1+i\sqrt{3}}$.

**Обсуждение 4** (Экспоненциальная форма). Кратко обсуждаем существование экспоненциальной формы и удобство в записи. Дело каждого.

**Обсуждение 5.** Возведение в степень: очевидность формулы Муавра.

**Упражнение 6** (К21.2а, 21.9а). $(1 + i)^n$. Применяем формулу Муавра, обсуждаем.

Сравниваем с ответом через бином. Обсуждаем.

**Упражнение 7** (?). Возвращаемся к уравнению $z^3 = 1$. Записываем в триг. форме и обсуждаем, как понять множество всех решений.

**Обсуждение 8** (Корни). Обсуждаем определение и формулу для комплексного корня.

**Упражнение 9** (К22.7аб). Вычислить $\sqrt[6]{i}$, $\sqrt[10]{512(1 - i\sqrt{3})}$.

**Задача 10** (К22.8а). Выразить $\cos\frac{2\pi}{5}$ в радикалах.

Идея: $\cos\frac{2\pi}{5} = (e^{i2\pi/5} + e^{-i2\pi/5})/2 = z + z^{-1}$, составить уравнение на $z$ и немного преобразовать.

**Упражнение 11** (К22.6). Верно ли равенство $\sqrt[ns]{z^s} = \sqrt[n]{z}$ $(s > 1)$?

**Упражнение 12** (25.1а). Разделить многочлен $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ с остатком на многочлен $g(x) = x^2 - 3x + 1$.

**Упражнение 13** (27.1б). Разложить на линейные множители над полем комплексных чисел многочлен $x^4 + 4$.

**Упражнение 14** (?). Разложить на линейные и квадратные множители над полем вещественных чисел многочлен $x^4 + 4$.

## 2 Домашнее задание

**Упражнение 1** (K24.6д). Изобразить на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам $z$, удовлетворяющих условию $|z+3+4i| \leqslant 5$.

**Упражнение 2** (K24.6е). Изобразить на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам $z$, удовлетворяющих условию $2 < |z| < 3$.

**Упражнение 3** (K21.9б). Вычислить $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n$; выпишите явно алгебраическую форму (в зависимости от $n$).

**Упражнение 4** (K21.11а). Представить $\cos 5x$ в виде многочлена от $\cos x$, найдя выражение $(\cos x + i\sin x)^5$ двумя способами, приравняв вещественные части и превратив $\sin^2$ в $\cos^2$.

**Упражнение 5** (K22.7з). Найти $\sqrt[4]{-4}$.

**Упражнение 6** (K22.7и). Найти $\sqrt[6]{64}$.

**Упражнение 7** (K22.7п). Найти $\sqrt[3]{2-2i}$.

**Упражнение 8** (K22.9б). Решить уравнение $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$.

Подсказка: если выходит сложно, вы делаете что-то не то.

**Упражнение 9** (по мотивам K27.2). Разложить на линейные и квадратичные множители над полем вещественных чисел многочлен $256x^8+1$.

**Обсуждение 10** (K22.12). Устная задача (не проверяется): читать задачи K22.12абв, K22.13а.

### 2.1 Дополнительные задачи (не оцениваются)

**Задача 11** (K21.3). Решить уравнения:
а) $|z| + z = 8+4i$;
б) $|z| - z = 8+12i$.

**Задача 12** (K21.4). Доказать следующие свойства модуля:
а) $|z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;
б) $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 \pm z_2|$;
в) $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$ тогда и только тогда, когда векторы $z_1$ и $z_2$ имеют одинаковые направления;
г) $|z_1+z_2| = ||z_1|-|z_2||$ тогда и только тогда, когда векторы $z_1$ и $z_2$ имеют противоположные направления.

**Задача 13** (K21.5). Доказать, что:
а) если $|z|<1$, то $|z^2 - z + i| < 3$;
б) если $|z| \leqslant 2$, то $1 \leqslant |z^2-5| \leqslant 9$;
в) если $|z| < 1/2$, то $|(1+i)z^3 + iz| < 3/4$.

**Задача 14** (K21.12). Доказать равенства:
а) $\cos nx = \sum\limits_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k} x \cdot \sin^{2k} x$;
б) $\sin nx = \sum\limits_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1} x \cdot \sin^{2k+1} x$.

**Задача 15** (K22.4). Пусть $z$ и $w$ — комплексные числа. Доказать равенства, считая что множество $zA$ по определению есть $\{za \mid a \in A\}$:
а) $\sqrt[n]{z^n w} = z\sqrt[n]{w}$;
б) $\sqrt[n]{-z^n w} = -z\sqrt[n]{w}$, если $n$ нечётно;
в) $\sqrt[n]{zw} = u\sqrt[n]{w}$, где $u$ — одно из значений $\sqrt[n]{z}$.

**Задача 16** (К22.5). Доказать, что объединение множеств $\sqrt[n]{z}$ и $\sqrt[n]{-z}$ есть множество $\sqrt[2n]{z^2}$.

**Задача 17** (К22.11). Найти произведение всех корней степени $n$ из единицы.

Для тех, кто знаком с понятием группы; первообразный корень найти в гугле:

**Задача 18** (К22.14). Доказать, что следующие утверждения равносильны:
а) $\varepsilon$ является первообразным корнем из единицы степени $n$;
б) порядок $\varepsilon$ в группе $U_n$ равен $n$;
в) $\varepsilon$ является порождающим элементом группы $U_n$.

**Задача 19** (К22.15). Доказать, что если $\varepsilon$ является первообразным корнем степени $n$ из единицы, то $\overline{\varepsilon}$ также является первообразным корнем степени $n$ из единицы.

**Задача 20** (К22.16). Доказать, что если числа $r$ и $s$ взаимно просты, то $\varepsilon$ является первообразным корнем степени $rs$ из единицы тогда и только тогда, когда $\varepsilon$ является произведением первообразного корня степени $r$ и первообразного корня степени $s$.

**Задача 21** (К22.17). а) Пусть $z$ — корень $n$-й степени из 1. Вычислить

$$1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1}.$$

б) Пусть $z$ — первообразный корень степени $2n$ из 1. Вычислить

$$1 + z + \cdots + z^{n-1}.$$

в) Пусть $z$ — корень из 1 и $z^n \pm z^m \pm 1 = 0$. Найти $n$ и $m$.

**Задача 22** (К22.18). Доказать, что:
а) число первообразных корней степени $n$ из единицы равно $\varphi(n)$;
б) если числа $m$ и $n$ взаимно просты, то $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

**Задача 23** (К22.19). Доказать, что если $z$ — первообразный корень нечётной степени $n$ из единицы, то $-z$ — первообразный корень степени $2n$.

**Задача 24** (К23.1вг). Вычислить суммы:
в) $1 + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \ldots$;
г) $\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \ldots$.

**Задача 25** (К23.2аб). Доказать равенства:
а) $\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \dfrac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ $\qquad (x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$;
б) $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \dfrac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ $\qquad (x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z})$.

**Задача 26** (К23.4абв). Доказать, что:
а) $1 + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \cdots = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos\frac{\pi n}{3})$;
б) $\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \cdots = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{4})$;
в) $\binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \cdots = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos\frac{(n-4)\pi}{4})$.

**Задача 27** (К24.4). Указать геометрический смысл числа $\arg\dfrac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}$, где $z_1, z_2, z_3$ — различные комплексные числа.

**Задача 28** (K24.5)**.** Как расположены на плоскости точки, соответствующие:
а) комплексным числам $z_1, z_2, z_3$, для которых

$$z_1 + z_2 + z_3, |z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0;$$

б) комплексным числам $z_1, z_2, z_3, z_4$, для которых

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0, |z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| \neq 0.$$

**Задача 29** (K24.7)**.** Доказать тождество

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

и указать его геометрический смысл.

**Задача 30** (K24.12)**.** Доказать, что:
а) точки плоскости, соответствующие комплексным числам $z_1, z_2, z_3$, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда существуют вещественные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, не все равные нулю, такие что

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 = 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0;$$

б) точки плоскости, соответствующие различным комплексным числам $z_1, z_2, z_3$, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда число $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ является вещественным;
в) точки плоскости, соответствующие различным комплексным числам $z_1, z_2, z_3, z_4$ и не лежащие на одной прямой, лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда их двойное отношение $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \dfrac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$ является вещественным числом.

**Задача 31** (K24.13)**.** Изобразить на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам $z$, удовлетворяющим равенству $\left|\dfrac{z - z_1}{z - z_2} = \lambda\right|$, где $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ и $\lambda$ — положительное действительное число.

**Задача 32** (K24.17)**.** Расширенной комплексной плоскостью называется комплексная плоскость, дополненная бесконечно удалённой точкой $\infty$. Доказать, что если $(z_1, z_2, z_3)$ и $(w_1, w_2, w_3)$ — две тройки попарно различных точек расширенной комплексной плоскости, то существует дробно-линейное преобразование

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0,$$

переводящее первую тройку во вторую.

**Задача 33** (K24.18)**.** Доказать, что если в каждой из двух четвёрок $(z_1, z_2, z_3, z_4)$ и $(w_1, w_2, w_3, w_4)$ точек расширенной комплексной плоскости все точки попарно различны, то дробно-линейное преобразование, переводящее одну из этих четвёрок в другую, существует тогда и только тогда, когда совпадают двойные отношения:

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = \frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} : \frac{w_1 - w_4}{w_2 - w_4}.$$

**Задача 34** (K24.19)**.** Доказать, что при дробно-линейном преобразовании расширенной комплексной плоскости прямые и окружности переходят в прямые и окружности.

**Задача 35** (K24.20)**.** Доказать, что дробно-линейное преобразование

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc = 1,$$

переводит вещественную прямую в себя тогда и только тогда, когда матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ пропорциональна некоторой вещественной матрице.

**Задача 36** (K24.21). Выяснить геометрический смысл дробно-линейного преобразования $w = 1/z$.