Д/з по алгебре №13

№1

$\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$; возведём в квадрат

$$\underset{\overset{\|}{1}}{|\bar{a}|^2}+\underset{\overset{\|}{1}}{|\bar{b}|^2}+\underset{\overset{\|}{1}}{|\bar{c}|^2}+2(\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{a}\cdot\bar{c})=0$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{a}\cdot\bar{c}=-\frac{3}{2}$$

№2.

$p \parallel q \Leftrightarrow p\times q=0 \Leftrightarrow (\alpha a+5b)\times(3a-b)=0$

По дистрибутивности векторного произведения:

$$\underset{\overset{\|}{0}}{\alpha a\times 3a}-\alpha a\times b+5b\times 3a-\underset{\overset{\|}{0}}{5b\times b}=0$$

$$-\alpha a\times b+5b\times 3a=0$$

$\alpha(b\times a)+15(b\times a)=0$ (применили линейность)

$$(\alpha+15)(b\times a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\alpha=-15\\ b\times a=0 \Leftrightarrow b\parallel a\end{array}\right.$$

невозм. по усл.

Значит, $p\parallel q$ при $\alpha=-15$

N3

S - площадь четырёхугольника $ABCD$

$S = \frac{1}{2} |[\overline{AC}, \overline{BD}]|$

$\overline{AC}(-1, 2, 4)$

$\overline{BD}(-4, -1, 1)$

$$[\overline{AC}, \overline{BD}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$|[\overline{AC}, \overline{BD}]| = \sqrt{36 + 225 + 81} = \sqrt{342}$

$S = \frac{\sqrt{342}}{2}$

N4

$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; пусть $c = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$

$|\bar{c}| = 1 \Leftrightarrow c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = 1$

$\bar{c} \perp \bar{a} \Leftrightarrow (\bar{c}, \bar{a}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\bar{c} \wedge \bar{a}) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{c_x + c_y + c_z}{\sqrt{3 \cdot 1}} = 0 \Rightarrow c_x + c_y + c_z = 0$

$\bar{c} \wedge \bar{b} = 60^\circ \Rightarrow \cos(\bar{c} \wedge \bar{b}) = \frac{1}{2}$

$$\frac{C_x}{\sqrt{1 \cdot 1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow C_x = \frac{1}{2}$$

Тогда: $\begin{cases} C_y^2 + C_z^2 = \frac{3}{4} & (1) \\ C_y + C_z = -\frac{1}{2} & (2) \end{cases}$

Из (2) $\Rightarrow$ $C_z = -\frac{1}{2} - C_y \longrightarrow (1)$:

$$C_y^2 + \frac{1}{4} + C_y + C_y^2 = \frac{3}{4} \quad | \cdot 4$$

$$8C_y^2 + 4C_y - 2 = 0 \quad | :2$$

$$4C_y^2 + 2C_y^2 - 1 = 0$$

$$D = 4 + 16 = 20 = (2\sqrt{5})^2$$

$$C_{y\,1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$C_{z\,1,2} = -\frac{1}{2} - \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} = \frac{-2 + 1 \mp \sqrt{5}}{4} =$$

$$= \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{4}$$

В итоге $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \\ \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \end{pmatrix}$ или

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \\ \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \end{pmatrix}$$

Тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ левая $\Leftrightarrow \langle a, b, c \rangle < 0$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} < 0$$

1) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1+\sqrt{5}}{4} & \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \end{vmatrix} = -\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4} + \frac{1-\sqrt{5}}{4} \right) =$$

$= \frac{\sqrt{5}}{2} > 0$ – не подходит

2) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{4} & \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \end{vmatrix} = -\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4} + \frac{1+\sqrt{5}}{4} \right) =$$

$= -\frac{\sqrt{5}}{2} < 0$ – подходит

$$c = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \end{pmatrix}$$

№8

Плоскость содержит ось Oy $\Rightarrow$ плоскость содержит точку O и нормальный вектор плоскости ортогонален $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow B = 0$

Плоскость содержит точку $(0, 0, 0)$:

$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0$

$Ax + Cz = 0$; точка $(2, -5, 1)$:

$2A + C = 0 \Rightarrow C = -2A$

Возьмём $A = 1 \Rightarrow C = -2$

Итого: $x - 2z = 0$

№6

$$([a, b], [c, d]) = ([a, b], c, d) =$$

$$= (c, d, [a, b]) = (c, [d, [a, b]]) =$$

$$= (c, a(d, b) - b(a, d)) = (c, a(d, b)) -$$

$$- (c, b(a, d)) = (d, b)(c, a) - (a, d)(c, b) =$$

$$= \begin{vmatrix} (a, c) & (a, d) \\ (b, c) & (b, d) \end{vmatrix}$$

№7

Если плоскость отсекает на Oy и Oz отрезки равной длины, то точки $(0, a, 0)$ и $(0, 0, a)$ принадлежат плоскости:

$$\begin{cases} A\cdot 0 + B\cdot a + C\cdot 0 + D = 0 \\ A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot a + D = 0 \end{cases} \xRightarrow{a \neq 0} B = C$$

Найдём какие-нибудь 2 точки, принадлежащие прямой:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 4 = 0 \\ 0,3x + z - 5 = 0 \end{cases}$$

• $y = 0$

$$\begin{cases} x + 3z = 4 \\ 3x + 10z = 50 \end{cases};$$

$x = 4 - 3z$ $\Downarrow$ $12 - 9z + 10z = 50 \Rightarrow z = 38$ $\Uparrow$ $x = -110$

Первая точка: $\begin{pmatrix} -110 \\ 0 \\ 38 \end{pmatrix}$

• $z = 0$

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x = 50 \Rightarrow x = \frac{50}{3} \end{cases}$$

$\Uparrow$ $2y = 4 - \frac{50}{3}$; $y = 2 - \frac{25}{3} = \frac{6-25}{3} = -\frac{19}{3}$

Вторая точка: $\begin{pmatrix} \frac{50}{3} \\ -\frac{19}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

Плоскость имеет вид $Ax + By + Bz + D = 0$

Подставим найденные точки:

$$\begin{cases} -110A + 38B + D = 0 \\ \frac{50}{3}A - \frac{19}{3}B + D = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$-110A + 38B = \frac{50}{3}A - \frac{19}{3}B$$

$$-330A + 114B = 50A - 19B$$

$$133B = 380A \Rightarrow A = \frac{133}{380}B$$

Возьмём $B = 380$, $A = 133$

$$D = 110A - 38B = 190$$

Итого, плоскость имеет вид:

$$133x + 380y + 380z + 190 = 0$$