Алгебра. ПИ. Семинар 6.
Матричные уравнения и обратная матрица. Формулы Крамера.

Осень 2025. Медведь Никита Юрьевич

1 Задачи для семинара

Упражнение 1 (П840)**.** Найти обратную к $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ через присоединённую матрицу.

Тут мы применим небольшую хитрость — вместо напрашивающихся преобразований честно применим разложение по строке. $\Delta = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 5 \cdot (-38) + 7 \cdot (-27) = -2 + 190 - 189 = -1$. Зачем же мы раскладывали по строке вместо любимого вами правила Саррюса? Присоединённая матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -38 & 27 \\ -1 & 41 & -29 \\ 1 & -34 & 24 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$$

Обсуждаем, что обычно лучше искать через элементарные преобразования.

Обсуждение 2 (Уравнения вида $AX = B$, в том числе П861)**.** Пусть дано уравнение $AX = B$.

Обсуждаем элементарные матрицы (нет на лекции!).

Обсуждаем основную идею классического алгоритма.

Упражнение 3 (Пример: случай обратимой матрицы)**.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

Обсуждение 4 (Обратная матрица)**.** Обсуждаем, что тем самым получили алгоритм нахождения обратной матрицы. Обсуждаем, что можно отдельно найти обратную матрицу, а потом умножить на неё: $X = A^{-1}B$, но это неэффективно по количеству действий (и может окончиться потерянным временем, если обратная не существует).

Опционально: применяем к матрице из упр. 1.

Упражнение 5 (Пример: нет решений)**.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Упражнение 6 (Пример: бесконечно много решений)**.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Упражнение 7 (П862)**.** $X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

Упражнение 8 (П863)**.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$ — кратко обсуждаем, как можно решить, не выполняем вычислений.

Обсуждение 9 (Поговорим об интерполяции)**.** Давно мы решали вот такой пример или похожий: $f(-2) = 19, \quad f(1) = 4, \quad f(2) = 7$, давайте на него посмотрим с точки зрения правила Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} (-2)^2 & (-2) & 1 \\ 1^2 & 1 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ничего не напоминает? Утверждение — решение существует и единственно, если все точки попарно различны.

Упражнение 10 (П609)**.** Найти ранг матрицы по определению (которое в нашем курсе даётся через наибольший порядок ненулевого минора).

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

План действий: объясняем, почему хотя бы 1, хотя бы 2. Считаем 3 на 3: мимо! Можно ли сделать выводы? Выбрать удачно второй сразу, чтобы долго не тянуть (замечание для себя: первые 3 строки линейно зависимы целиком; первые 3 столбца вроде тоже?). Долго не висим, делаем побыстрее. Подсчет 4 на 4 пропускаем, сознаюсь, что выйдет 0.

Обсуждение 11 (Метод окаймляющих миноров)**.** А что, если в предыдущем номере, когда мы считали 3 на 3, они бы все оказались равны нулю? Ну то есть понятно что — мы бы выяснили, что ранг равен 2. Но для этого пришлось бы посчитать $4 \times 4 = 16$ миноров размера 3×3! Мы бы очень утомились. Нету ли способа получше?

Например, матрица могла бы быть такой: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$.

Оказывается, есть специальная теорема (теорема о методе окаймляющих миноров; торжественно разрешаю пользоваться ей без доказательства, если вдруг на лекции не было), утверждающая, что если на предыдущем шаге мы нашли какой-то ненулевой минор, то на следующем шаге надо перебирать не все возможные миноры большего размера, а только те, которые продолжают (окаймляют) предыдущий. Так, например, если на предыдущем шаге был ненулевой минор со строками 1,2 и столбцами 1,2, то на следующем шаге достаточно перебрать четыре минора: $M^{1,2,3}_{1,2,3}, M^{1,2,3}_{1,2,4}, M^{1,2,4}_{1,2,3}, M^{1,2,4}_{1,2,4}$. Если хотя бы один окажется ненулевой, можно остальные не проверять, а переходить к бо́льшему размеру, а если все они нулевые, то можно остальные $16 - 4 = 12$ не проверять, теорема автоматически гарантирует, что все они тоже нулевые. То есть тогда ранг был бы 2.

Упражнение 12 (П609)**.** Найти ранг матрицы методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Домашнее задание

Упражнение 1. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Решить матричное уравнение $A^T X + X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 3. Найти обратную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Упражнение 4. Найдите ранг матрицы, пользуясь определением или методом окаймляющих миноров (не при помощи элементарных преобразований).

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 & -1 \\ 10 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 7 \\ -2 & -8 & -7 \end{pmatrix}$$

Задача 5 (П613)**.** Чему равен ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ при различных значениях λ?

Подсказка: можно рассмотреть миноры 3 на 3, не содержащие двух переменных одновременно. Если повезёт, из их рассмотрения кое-что получится. А если нет, надо подумать, окаймляющими для чего они являются и есть ли там ещё какие-то окаймляющие. Такая стратегия сократит вычисления.

2.1 Дополнительные задачи (не оцениваются)

Задача 6 (П81)**.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z = b \\ x + \varepsilon^2 y + \varepsilon z = c \end{cases},$$

где ε — отличное от единицы значение $\sqrt[3]{1}$ (если это вам ни о чём не говорит, вы ещё не готовы к этой задаче).

Задача 7 (Формула Шермана–Морисона–Вудбери)**.**

Пусть дана матрица A размера $n \times n$, мы хотим найти её обратную A^{-1}. Пусть мы представили A в виде $A = B + UV$, где B обратима, а U и V — некоторые прямоугольные матрицы размера $n \times m$ и $m \times n$ соответственно (для практических целей интересен случай, когда m мало). Пусть оказалось, что матрица $E_m + VB^{-1}U$ невырождена. Тогда докажите, что A^{-1} существует и выполнена формула:

$$A^{-1} = B^{-1} + B^{-1}U(E_m + VB^{-1}U)^{-1}VB^{-1}.$$

Эта громоздкая формула говорит, что можно посчитать обратную к (потенциально более простой) матрице B, а потом сделать к ней некоторую поправку.

Задача 8. Найдите $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 3 \end{pmatrix}^{-1}$, воспользовавшись равенством

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 3 \end{pmatrix} = 2E + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

и формулой Шермана–Моррисона–Вудбери.