

# Математический анализ. 1 курс

## Направление 38.03.05 Бизнес-информатика

### ДЗ 1. Последовательности - I

1. Сформулируйте с помощью кванторов утверждение «В любом подмножестве множества натуральных чисел есть максимум». Постройте его отрицание. Какое из утверждений истинное, а какое ложное? Обоснуйте свой ответ.
2. Сформулируйте с помощью кванторов утверждение «В любом подмножестве множества рациональных чисел есть минимум». Постройте его отрицание. Какое из утверждений истинное, а какое ложное? Обоснуйте свой ответ.
3. Докажите, что если числовое множество  $Y$  включено в числовое множество  $X$ , и  $X$  ограничено снизу, то  $\inf(Y)$  существует, и  $\inf(Y) \geq \inf(X)$ .
4. Докажите, что в любом числовом интервале есть иррациональное число. Докажите, что в любом числовом интервале содержится бесконечно много иррациональных чисел.
5. Определите, является ли данная последовательность
  - а) ограниченной, ограниченной сверху, ограниченной снизу;
  - б) монотонной, монотонной «в хвосте».

Найдите точные грани последовательности или докажите, что их нет. Если последовательность монотонна или монотонна «в хвосте», определите тип монотонности.

$$(1) x_n = \frac{1}{n^2}; (2) x_n = \frac{n-1}{n}; (3) x_n = \frac{n^2+1}{n^2-1}; (4) x_n = \frac{n}{n^2+3n+2}; (5) x_n = \frac{1}{3^n};$$
$$(6) x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}; (7) x_n = \ln(n+1) - \ln(n-1); (8) x_n = 3n-2; (9) x_n = n^3; (10) x_n = \sqrt[3]{n};$$
$$(11) x_n = 3^n; (12) x_n = \log_{10}(n).$$

6. Докажите, что данные последовательности монотонны и ограничены.

**Указание:** в пункте (1) нужно воспользоваться неравенством Бернулли.

**Неравенство Бернулли:**  $(1+x)^n \geq 1 + nx$  при  $x \geq -1$  и натуральных  $n$ .

$$(1) x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}; (2) x_1 = 16, x_n = \sqrt{20 + x_{n-1}}, n \geq 2;$$
$$(3) x_1 = 27, x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{81}{x_{n-1}}\right), n \geq 2.$$