

## Алгебра. ПИ. Семинар 4.

**Определители. Часть 1: по определению и с элементарными операциями.**

*Осень 2025. Медведь Никита Юрьевич*

### 1 Задачи для семинара

**Упражнение 1** (П9). Найти по определению определитель  $\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$ .

**Упражнение 2** (П43).  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

**Упражнение 3** (Снова П43). Обсуждаем элементарные операции. Снова  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ . Столбцы гипотетически удобнее строк на первом шагу?

**Упражнение 4** (П203). Найти по определению определитель треугольной матрицы  $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ .

**Упражнение 5** (П208). Решить уравнение  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0$ . Наводящий вопрос — какой порядок этой матрицы?

**Задача 6** (П279). Вычислить приведением к треугольному виду:  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$

**Задача 7** (П283).  $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$

**Обсуждение 8** (П229). Как изменится определитель, если из каждой строки, кроме последней, вычесть последующую строку, а из последней строки вычесть исходную первую строку?

**Обсуждение 9** (П230). Как изменится определитель, если к каждому столбцу, начиная со второго, прибавить предыдущий столбец, а в то же время к первому столбцу прибавить последний?

**Задача 10** (П115). Не развертывая, доказать:  $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$ . (Пропедевтика метода линейных множителей).

**Обсуждение 11** (Определитель Вандермонда). Формулируется задача: посчитать определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Спрашиваются идеи. Вероятно, прозвучит естественная идея вычитать столбцы (чтобы единички сократились и получилась строка почти из одних нулей). Показываю, что дальше как-то тяжело продолжать. Обсуждаем альтернативное доказательство с вычитанием столбцов и делимостью на  $x_i - x_j$ .

## 2 Домашнее задание

**Упражнение 1** (П6).  $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$

**Задача 2** (П14).  $\begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$

**Упражнение 3** (П45).  $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$

**Упражнение 4** (П49).  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

**Упражнение 5** (П54).  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$

**Упражнение 6** (П58).  $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$

**Упражнение 7** (П199). Найти члены определителя 4-го порядка, содержащие элемент  $a_{32}$  и входящие в определитель со знаком плюс.

**Упражнение 8** (П200). Найти члены определителя  $\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$ , содержащие  $x^4$  и  $x^3$ .

**Упражнение 9** (П221). Как изменится определитель порядка  $n$ , если у всех его элементов сменить знак на противоположный?

*Замечание:* в этой и следующих задачах требуется не только ответ, но и доказательство! Кстати, в предыдущих тоже.

**Задача 10** (П212). Как изменится определитель порядка  $n$ , если первый столбец переставить на последнее место, а остальные столбцы передвинуть влево, сохраняя их расположение?

**Задача 11** (П231). Как изменится определитель порядка  $n$ , если его матрицу повернуть на  $90^\circ$  вокруг «центра»?

*Указание:* подумайте, как такой поворот представить в виде комбинации более понятных преобразований.

*Указание 2:* у вас может получиться совсем не такой же ответ, как в задачнике; если вы все делаете верно, то они на самом деле равны, просто это неочевидно; можно сверить, одинаковый ли результат они дают при  $n$  от 1 до 5.

$$\text{Упражнение 12 (П258). } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

## 2.1 Дополнительные задачи (не оцениваются), которые просто плохо влезли

**Упражнение 13** (П196). Выяснить, входит ли в определитель соответствующего порядка и с каким знаком:  $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64} \cdots a_{3n-2,3n}a_{3n-1,3n-1}a_{3n,3n-2}$ .

**Упражнение 14** (П72).

## 2.2 Дополнительные задачи (не оцениваются) повышенной сложности

П65, П68 (считая данным, что эпсилон в кубе равно единице)