Ответы на контрольные вопросы по лекции 1

Математический анализ, 1 курс, направление 38.03.05 Бизнес-информатика

Вопрос 1. Представление вещественных чисел

Основное представление:
Любое действительное число a ∈ ℝ{0} представляется бесконечной десятичной дробью вида:

$$\pm a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$$

где a_0 ∈ ℕ∪{0}, a_n ∈ {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} при всех n ∈ ℕ.

Число 0 представляется как 0,000...0...

Типы чисел в данном представлении:

- **Натуральные числа:** n,000...0... (например: 5,000...0...)
- **Целые числа:** ±n,000...0... (например: -3,000...0...)
- **Рациональные числа:** представляются периодическими дробями

Определения:

- **Конечная дробь** — десятичная дробь с конечным числом цифр после запятой (можно дополнить нулями до бесконечности)
- **Периодическая дробь** — бесконечная десятичная дробь, в которой некоторая группа цифр повторяется бесконечно

Теорема: Рациональные числа представляются периодическими дробями, а иррациональные — непериодическими.

Представление числа 22/7:
22 ÷ 7 = 3,142857142857... = 3,(142857)
Это периодическая дробь с периодом 142857.

Вопрос 2. Правило сравнения вещественных чисел

Определение (правило сравнения вещественных чисел):

Пусть a и b — неотрицательные числа, такие что a ≠ b.

1. **Для неотрицательных чисел:** Найдём наименьшее n ∈ ℕ∪{0}: $a_n \neq b_n$.
   Если $a_n > b_n$, то a > b.
2. **Положительное и отрицательное:** Если a положительное, b отрицательное, то a > b.

3. **Неположительные числа:** Если a и b неположительные, то сравниваем их модули в обратном порядке: если |a| > |b|, то a < b.

Свойства сравнения:

- **Полнота:** Любые два вещественных числа a и b сравнимы (верно либо a = b, либо a > b, либо a < b)
- **Транзитивность:** a > b ∧ b > c ⇒ a > c (и аналогично для равенства)

Вопрос 3. Числовые множества и промежутки

Числовое множество — множество, элементами которого являются действительные числа.

Числовая прямая — геометрическое представление множества всех вещественных чисел ℝ в виде прямой линии.

Числовые промежутки:

1. **Отрезок (замкнутый промежуток):** [a, b] = {c ∈ ℝ | a ≤ c ≤ b}
2. **Интервал (открытый промежуток):** (a, b) = {c ∈ ℝ | a < c < b}
3. **Полуинтервалы:**
   - [a, b) = {c ∈ ℝ | a ≤ c < b}
   - (a, b] = {c ∈ ℝ | a < c ≤ b}
4. **Лучи:**
   - Открытые: (a, +∞), (-∞, b)
   - Замкнутые: [a, +∞), (-∞, b]
5. **Числовая прямая:** (-∞, +∞) = ℝ

ε-окрестность точки a:
Интервал (a - ε, a + ε) называется ε-окрестностью точки a и обозначается Uε(a).

Интерпретация: Промежуток является областью непрерывного изменения числовой переменной величины.

Вопрос 4. Максимум и минимум числового множества

Определение максимума (с помощью кванторов):
a — максимум множества D, a = max(D), если:

$$a \in D \wedge \forall x \in D, a \geq x$$

Определение минимума (с помощью кванторов):
b — минимум множества D, b = min(D), если:

$$b \in D \wedge \forall x \in D, b \leq x$$

Отрицания определений:

Отрицание максимума:
У множества D нет максимума означает:

$$\forall a \in D, \exists x \in D : x > a$$

Отрицание минимума:
У множества D нет минимума означает:

$$\forall b \in D, \exists x \in D : x < b$$

Вопрос 5. Конечные и бесконечные множества

Алгоритмическое определение конечного множества:
Множество A конечно, если существует натуральное число n такое, что элементы A можно перенумеровать числами от 1 до n (установить взаимно однозначное соответствие с множеством {1, 2, ..., n}).

Алгоритмическое определение бесконечного множества:
Множество бесконечно, если оно не является конечным.

Теорема о максимуме и минимуме конечного числового множества:
Любое непустое конечное числовое множество имеет максимум и минимум.

Доказательство:
Пусть D — непустое конечное числовое множество. По определению конечности, можем записать $D = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Рассмотрим последовательность:

- $a_1 = x_1$
- $a_2 = \max\{a_1, x_2\}$
- $a_3 = \max\{a_2, x_3\}$
- ...
- $a_n = \max\{a_{n-1}, x_n\}$

Тогда $a_n = \max(D)$, так как $a_n \geq x_i$ для всех $i = 1, 2, ..., n$ и $a_n = x_j$ для некоторого j.

Аналогично для минимума, используя операцию min вместо max.

Вопрос 6. Примеры множеств с различными свойствами максимума и минимума

1) Множество без максимума, но с минимумом:
Множество $(0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$

- **Минимум отсутствует** (нет наименьшего элемента, так как $0 \notin (0, 1]$)

- **Максимум существует:** max = 1

Исправление: Множество [0, 1) = {x ∈ ℝ | 0 ≤ x < 1}

- **Минимум существует:** min = 0
- **Максимум отсутствует** (нет наибольшего элемента, так как 1 ∉ [0, 1))

2) Множество с максимумом, но без минимума:
Множество (-∞, 5] = {x ∈ ℝ | x ≤ 5}

- **Максимум существует:** max = 5
- **Минимум отсутствует** (множество неограничено снизу)

3) Множество без максимума и без минимума:
Множество (0, 1) = {x ∈ ℝ | 0 < x < 1}

- **Максимум отсутствует** (1 ∉ (0, 1))
- **Минимум отсутствует** (0 ∉ (0, 1))

Вопрос 7. Ограниченность числовых множеств

Определение множества, ограниченного сверху (с помощью кванторов):
Множество D ограничено сверху, если:

$$\exists a \in \mathbb{R} : \forall x \in D, x \leq a$$

Определение верхней грани:
a — верхняя грань множества D, если:

$$\forall x \in D, a \geq x$$

Определение множества, ограниченного снизу (с помощью кванторов):
Множество D ограничено снизу, если:

$$\exists b \in \mathbb{R} : \forall x \in D, x \geq b$$

Определение нижней грани:
b — нижняя грань множества D, если:

$$\forall x \in D, b \leq x$$

Определение ограниченного множества:
Множество D ограничено, если оно ограничено и сверху, и снизу.

Отрицания:

- **Отрицание ограниченности сверху:**
$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists x \in D : x > a$$
- **Отрицание ограниченности снизу:**
$$\forall b \in \mathbb{R}, \exists x \in D : x < b$$

Замечание о числе верхних и нижних граней:
У числового множества может быть бесконечно много верхних (нижних) граней, но супремум (инфимум) — единственный.

Вопрос 8. Супремум и инфимум

Определение супремума (точной верхней грани):
s — супремум множества D, если:

1. s — верхняя грань D
2. s — наименьшая из всех верхних граней D

Формально: $s = \sup(D)$, если $s = \min\{A\}$, где $A = \{a \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D, a \geq x\}$

Определение инфимума (точной нижней грани):
i — инфимум множества D, если:

1. i — нижняя грань D
2. i — наибольшая из всех нижних граней D

Формально: $i = \inf(D)$, если $i = \max\{B\}$, где $B = \{b \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D, b \leq x\}$

Пример: Множество $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$

Супремум: sup = 1
Обоснование:

- 1 — верхняя грань ($\forall n \in \mathbb{N}, 1/n \leq 1$)
- 1 — наименьшая верхняя грань (для любого $a < 1$ найдется n такое, что $1/n > a$)
- $1 \in$ множества, поэтому sup = max = 1

Инфимум: inf = 0
Обоснование:

- 0 — нижняя грань ($\forall n \in \mathbb{N}, 1/n \geq 0$)
- 0 — наибольшая нижняя грань (для любого $b > 0$ найдется n такое, что $1/n < b$)
- $0 \notin$ множества, поэтому min не существует, но inf = 0

Вопрос 9. Связь максимума/минимума с супремумом/инфимумом

Теорема: Если у множества D существует максимум, то он является супремумом этого множества. Если у множества D существует минимум, то он является инфимумом этого множества.

Доказательство для максимума:
Пусть $a = \max(D)$. Тогда:

1. $a \in D$ (по определению максимума)

2. $\forall x \in D, x \leq a$ (по определению максимума)

Это означает, что a — верхняя грань множества D.

Предположим, что существует верхняя грань $b < a$. Тогда $\forall x \in D, x \leq b < a$. Но $a \in D$, значит $a \leq b$, что противоречит условию $b < a$.

Следовательно, a — наименьшая верхняя грань, т.е. $a = \sup(D)$.

Доказательство для минимума аналогично.

Важное замечание:

- Если max существует, то sup = max
- Если min существует, то inf = min
- Но sup и inf могут существовать, даже если max и min не существуют

Вопрос 10. Теорема о существовании супремума и инфимума

Теорема: У любого ограниченного сверху (снизу) числового множества $D \subset \mathbb{R}$ есть супремум (инфимум), причём единственный.

Формулировка:

1. Если множество D ограничено сверху и $D \neq \varnothing$, то существует $\sup(D)$
2. Если множество D ограничено снизу и $D \neq \varnothing$, то существует $\inf(D)$
3. Супремум и инфимум единственны

Значение теоремы:
Эта теорема — одно из основных свойств вещественных чисел (аксиома полноты). Она гарантирует, что у любого ограниченного множества всегда есть точные границы, даже если наибольшего или наименьшего элемента в множестве нет.

Вопрос 11. Функции

Определение функции:
Пусть X и Y — множества. Подмножество $F \subseteq X \times Y$ называется функцией, если:

1. $\forall a \in X, \exists b \in Y: (a, b) \in F$ (полнота)
2. $\forall (a_1, b_1) \in F, \forall (a_2, b_2) \in F, a_1 = a_2 \Rightarrow b_1 = b_2$ (однозначность)

Терминология:

- **Независимая переменная (аргумент):** $x \in X$
- **Зависимая переменная (функция):** $y \in Y$
- **Область определения (domain):** $D(f) = X$
- **Множество значений (range):** $R(f) = \{b \in Y \mid \exists a \in X: (a,b) \in F\}$

Обозначения: $y = f(x)$, $f: X \to Y$

Числовая функция:
Функция называется числовой, если её множество значений является числовым (подмножеством $\mathbb{R}$).

Примеры:

- **Числовые функции:** $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin(x)$, $h(x) = |x|$
- **Нечисловые функции:** f(x) = "четное" или "нечетное" (для целых x)

Числовая последовательность:
Функция $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называется числовой последовательностью.
Обозначение: $\{a_n\}$ или a_n, где $a_n = f(n)$.

Пример последовательности: $a_n = 1/n$, т.е. {1, 1/2, 1/3, 1/4, ...}

Вопрос 12. Ограниченность последовательностей

Определение ограниченной сверху последовательности (с кванторами):
Последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху, если:

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq c$$

Отрицание:
Последовательность не ограничена сверху, если:

$$\forall c \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : a_n > c$$

Определение ограниченной снизу последовательности:
Последовательность $\{a_n\}$ ограничена снизу, если:

$$\exists d \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq d$$

Определение ограниченной последовательности:
Последовательность ограничена, если она ограничена и сверху, и снизу:

$$\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq M$$

Геометрическая интерпретация:
Ограниченность последовательности означает, что все её элементы лежат в некоторой полосе на числовой прямой между двумя параллельными прямыми.

Примеры:

Ограниченные последовательности:

- $a_n = 1/n$ (ограничена: $0 < a_n \leq 1$)
- $a_n = \sin(n)$ (ограничена: $-1 \leq a_n \leq 1$)
- $a_n = (-1)^n$ (ограничена: $-1 \leq a_n \leq 1$)

Неограниченные сверху:

- $a_n = n$ (растет до +∞)
- $a_n = n^2$ (растет еще быстрее)

Неограниченные снизу:

- $a_n = -n$ (убывает до -∞)

Неограниченные (ни сверху, ни снизу):

- $a_n = (-1)^n \cdot n$ (колеблется между -n и +n)

Вопрос 13. Монотонность последовательностей

Определение неубывающей последовательности (с кванторами):
Последовательность $\{x_n\}$ неубывающая, если:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, m \geq n \Rightarrow x_m \geq x_n$$

Отрицание:
Последовательность не является неубывающей, если:

$$\exists n, m \in \mathbb{N} : m > n \wedge x_m < x_n$$

Определение невозрастающей последовательности (с кванторами):
Последовательность $\{x_n\}$ невозрастающая, если:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \Rightarrow x_m \leq x_n$$

Отрицание:
Последовательность не является невозрастающей, если:

$$\exists n, m \in \mathbb{N} : m > n \wedge x_m > x_n$$

Определение монотонной последовательности:
Последовательность называется монотонной, если она либо неубывающая, либо невозрастающая.

Примеры:

- **Неубывающая:** $a_n = 1 - 1/n$ (строго возрастает к 1)
- **Невозрастающая:** $a_n = 1/n$ (строго убывает к 0)
- **Немонотонная:** $a_n = (-1)^n$ (колеблется между -1 и 1)

Геометрическая интерпретация:
Монотонная последовательность на графике движется только в одном направлении (либо вверх/горизонтально, либо вниз/горизонтально).