**Дискретная математика. Контрольная работа № 1. Примерные решения** **ПИ**

**1.** Является ли формула $X(A, B, C, D) = (\neg A \vee \neg(B \to \neg C)) \to ((A \to D) \vee B)$ тавтологией?

*Решение.* Предположим, что $[X] = 0$. Тогда $[(A \to D) \vee B] = 0$, откуда $[B] = 0$, $[D] = 0$ и $[A] = 1$, но также $[\neg A \vee \neg(B \to \neg C)] = 1$. Поскольку $[\neg A] = 0$, получаем $[\neg(B \to \neg C)] = 1$, откуда $[B] = 1$, что не так. Противоречие показывает, что $[X] = 1$ для любых значений $A, B, C$, т. е. $X$ тавтология.

*Ответ:* является. □

**2.** Допустим, для некоторых формул $A, B, C$ формулы $B \to A$ и $A \to C$ являются тавтологиями. Найдите формулу $X = X(A, B, C)$, такую что $A \wedge X \equiv B$ и $A \vee X \equiv C$.

*Решение.* Попробуем «выразить» $X$ из данных эквивалентностей. Из второй эквивалентности и известных логических тождеств получаем $\neg A \wedge C \equiv \neg A \wedge (A \vee X) \equiv (\neg A \wedge A) \vee (\neg A \wedge X) \equiv \bot \vee (\neg A \wedge X) \equiv \neg A \wedge X$. Получилось выразить лишь $\neg A \wedge X$, но этого достаточно с учетом первой эквивалентности. В самом деле, $X \equiv (A \vee \neg A) \wedge X \equiv (A \wedge X) \vee (\neg A \wedge X) \equiv B \vee (\neg A \wedge C)$. Итак, любое высказывание $X$, удовлетворяющее условиям, эквивалентно $B \vee (\neg A \wedge C)$. Остается проверить, что последняя формула действительно удовлетворяет этим условиям, подставив ее вместо $X$.

В первой эквивалентности имеем $A \wedge (B \vee (\neg A \wedge C)) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg A \wedge C) \equiv (A \wedge B) \vee \bot \equiv A \wedge B \equiv B$. Последний переход имеет место в силу тавтологичности $B \to A$.

Во второй эквивалентности, $A \vee (B \vee (\neg A \wedge C)) \equiv A \vee (\neg A \wedge C)$ в силу $A \vee B \equiv A$ (т. к. $B \to A$ тавтология). Далее, $A \vee (\neg A \wedge C) \equiv (A \vee \neg A) \wedge (A \vee C) \equiv \top \wedge (A \vee C) \equiv A \vee C \equiv C$. Последний переход справедлив в силу тавтологичности $A \to C$.

Итак, формула $X = B \vee (\neg A \wedge C)$ удовлетворяет условиям задачи.

*Ответ:* $B \vee (\neg A \wedge C)$ или любая эквивалентная формула. □

**3.** На острове живут лишь рыцари, говорящие только правду, и лжецы, говорящие только ложь. За круглым столом сидят 100 островитян, каждый из которых говорит: «мои соседи — рыцарь и лжец». Сколько рыцарей за столом?

*Решение.* Если лжец делает указанное заявление, то его соседи — два рыцаря или два лжеца. Если то же самое говорит рыцарь, то его соседи — рыцарь и лжец. Для удобства выберем одно место за столом и пометим его нулем, а всем остальным местам естественным образом припишем всевозможные целые номера (каждое место получит бесконечно много номеров). Если на месте $n$ сидит рыцарь, то, без ограничения общности, на месте $n-1$ — тоже рыцарь, а на месте $n+1$ — лжец. Но соседи лжеца всегда «одного рода», а значит, на месте $n+2$ будет снова рыцарь, чей «левый» сосед лжец, а «правый», сидящий на месте $n+3$, — опять рыцарь. Соседи рыцаря разнородны, а потому на месте $n+4$ будет лжец и т. д. Формально, из предположения, что на местах $n-1$ и $n$ сидят рыцари, с помощью принципа математической индукции легко доказать, что при всех натуральных $k$ на местах $n+3k$ и $n+3k+2$ будут сидеть рыцари, а на месте $n+3k+1$ — лжец.

Допустим, за наши столом есть хотя бы один рыцарь. Один из его соседей — тоже рыцарь. Без ограничения общности можно считать, что они сидят на местах 0 и $-1$ (т. е. можно положить $n = 0$ в предыдущем рассуждении). Тогда на месте $100 = 0 + 3 \cdot 33 + 1$ будет сидеть лжец. С другой стороны, раз за столом всего 100 мест (с номерами от 0 до 99), места 0 и 100 — это одно и то же место, а на месте 0 сидит рыцарь. Противоречие. Значит, рыцаря за столом нет, а все сидящие — лжецы. Дополнительно можно заметить, что такая ситуация условиям задачи не противоречит, т. е. может иметь место.

*Ответ:* ни одного. □

**4.** Используя только следующие предикаты: Эльф$(x)$, Фея$(x)$, Гоблин$(x)$ и Любит$(x, y)$ — формализуйте высказывания:

а) Не все эльфы являются гоблинами.

б) Некоторые феи любят всех эльфов и всех гоблинов.

в) Каждому эльфу нравится какая-то фея.

г) Если какая-то фея нравится всем эльфам, то она нравится и всем гоблинам.

*Решение.* Для краткости обозначим наши предикаты $E$, $F$, $G$ и $L$ соответственно.

а) $\neg\forall x\,(E(x) \to G(x))$ или, что равносильно, $\exists x\,(E(x) \wedge \neg G(x))$.

б) «Некоторые феи» вовсе не подразумевает, что их больше одной, но лишь что есть хотя бы одна. «Любят всех эльфов и всех гоблинов» можно передать как любовь к каждому, кто принадлежит *хотя бы одной* из этих групп. Соответственно получем $\exists x\,(F(x) \wedge \forall y\,((E(y) \vee G(y)) \to L(x,y)))$.

в) $\forall x\,(E(x) \to \exists y\,(F(y) \wedge L(x,y)))$. Квантор существования может (равносильным образом) стоять и перед внешней скобкой.

г) Несмотря на слово «какая-то», единственным разумным выбором тут является квантор всеобщности по феям: ведь имеется в виду, что *любая*, нравящаяся эльфам фея, нравится и гоблинам. Иначе невозможно истолковать слово «она» как ссылку на «ту самую» фею из посылки. Итак,

$$\forall x\,((F(x) \wedge \forall y\,(E(y) \to L(y,x))) \to \forall z\,(G(z) \to L(z,x))).$$

Квантор $\forall z$ можно вынести за скобку, а вот квантор $\forall y$ при таком вынесении придется заменить на $\exists y$; тогда их можно будет написать как в порядке $\forall x \exists y \forall z$, так и в порядке $\forall x \forall z \exists y$.

$\square$

**5.** Пусть $f$ — некоторая функция, отображающая символы алфавита $A$ в символы алфавита $B$ ($A$ и $B$ непусты). Функции $rev$ и $map$ определяются уравнениями: $rev([\,]) = [\,]$, $rev(a:s) = app(rev(s),[a])$ и $map(f,[\,]) = [\,]$, $map(f,a:s) = f(a):map(f,s)$ для любых $a$ и $s$. Докажите, что $map(f,rev(s)) = rev(map(f,s))$ для любых $s \in S(A)$.

*Решение.* Воспользуемся индукцией по спискам. Основанием индукции является равенство

$$map(f,rev([\,])) = map(f,[\,]) = [\,] = rev([\,]) = rev(map(f,[\,])),$$

очевидно верное в силу определяющих функции $rev$ и $map$ уравнений. На шаге индукции нужно из предположения $map(f,rev(s)) = rev(map(f,s))$ вывести $map(f,rev(a:s)) = rev(map(f,a:s))$. Преобразуем левую часть требуемого равенства $map(f,rev(a:s)) = map(f,app(rev(s),[a]))$, и получаем функцию $app$, чье соотношение с $map$ нами не исследовалось. Здесь естественно сформулировать и применить дополнительную лемму, доказательство которой можно дать позже: $map(f,app(s,t)) = app(map(f,s),map(f,t))$ для любых $s,t \in S(A)$. Согласно этой лемме и предположению индукции,

$$\begin{aligned} map(f,rev(a:s)) &= map(f,app(rev(s),[a])) = app(map(f,rev(s)),map(f,a:[\,])) = \\ &app(map(f,rev(s)),f(a):[\,]) = app(rev(map(f,s)),[f(a)]) = \\ &rev(f(a):map(f,s)) = rev(map(f,a:s)). \end{aligned}$$

Доказательство леммы также ведется по индукции. Проще всего зафиксировать произвольную строку $t$ и доказать утверждение для нее индукцией по $s \in S(A)$ (а затем уже навесить квантор $\forall t$). Основание индукции ясно:

$$map(f,app([\,],t)) = map(f,t) = app([\,],map(f,t)) = app(map(f,[\,]),map(f,t)).$$

На шаге, предположив $map(f, app(s,t)) = app(map(f,s), map(f,t))$, получаем

$$map(f, app(a:s,t)) = map(f, a: app(s,t)) = \\ f(a) : map(app(s,t)) = f(a) : app(map(f,s), map(f,t)) = \\ app(f(a) : map(f,s), map(f,t)) = app(map(f, a:s), map(f,t)).$$

□

**6.** Последовательность $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ чисел Фибоначчи удовлетворяет равенствам: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что для всех натуральных $n \geqslant 1$ выполнено равенство: $F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

*Решение.* Используем принцип математической индукции по $n$, чтобы доказать $\forall n\,(n \geqslant 1 \to F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n})$. В основании имеем случай $n = 0$, когда посылка импликации ложна, а вся импликация истинна. Докажем шаг, предположив $F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$. Нам нужно получить импликацию $n + 1 \geqslant 1 \to F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} + F_{2n+1} = F_{2n+2}$. Посылка ее всегда истинна и ничего нам не дает. Рассмотрим заключение. Если $n \geqslant 1$, то применимо предположение индукции:

$$(F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1}) + F_{2n+1} = F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2n+2}.$$

Если же $n < 1$, то $n = 0$ и $n + 1 = 1$ (это «содержательное» основание нашей индукции; рассуждая чуть менее формально, мы могли бы с него и начать), откуда

$$F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} + F_{2n+1} = F_{2\cdot0+1} = F_1 = 0 + F_1 = F_0 + F_1 = F_2 = F_{2\cdot0+2}.$$

□

**7.** Рассмотрим операцию $f$ «уравнивания» натуральных чисел $x$ и $y$: $f(x,y) = (n/2, n/2)$, где $n = x+y$, если сумма четна, и $n = x + y - 1$ иначе. Например, $f(3,5) = (4,4)$ и $f(8,3) = (5,5)$. В конечной последовательности натуральных чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ за один шаг разрешено уравнивать любые два ее члена $a_i$ и $a_j$, заменяя их на $b$ и $c$ соответственно, где $(b,c) = f(a_i, a_j)$. Докажите, что для любого натурального $N$ последовательность $(1, 2, 4, \ldots, 2^N)$ можно превратить в $(1, 1, \ldots, 1)$ за конечное число шагов.

*Решение.* Начнем с примеров для малых $N$. Последовательность $(1,2)$ сразу превращаем в $f(1,2) = (1,1)$. Для $(1,2,4)$ сначала уравняем префикс $(1,2)$, получая $(1,1,4)$. Так как $f(1,4) = (2,2)$, одним шагом получим $(1,2,2)$. Теперь у нас опять получился префикс $(1,2)$, который можно уравнять и прийти к $(1,1,2)$. Наконец, суффикс $(1,2)$ можно уравнять так же, как и префикс, что даст нам $(1,1,1)$. Отметим, что наша операция $f$ локальна: она затрагивает не более двух позиций, и потому любую цепочку шагов для последовательности можно применить и к любой «большей» (т. е. включающей дополнительные члены) последовательности.

Ясна основная мысль: последовательность $(1, \ldots, 1, 2^k)$ можно превратить в $(1, \ldots, 1, 2^{k-1})$, а затем применить некоторую рекурсию. Нужно лишь иметь достаточно много единиц перед $2^k$. Но сколько же? В примерах $k$ единиц было достаточно. Сформулируем утверждение: для любого $k \in \mathbb{N}$ и любого $n \geqslant k$, последовательность $(\underbrace{1, ..., 1}_{n}, 2^k)$ можно превратить в $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 1)$ за конечно много шагов.

Индукция по $k$. (Мы опустим очевидные подробности.) Допустим, что утверждение верно для $k$, и рассмотрим последовательность $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 2^{k+1})$, где $n \geqslant k + 1$. Применим $f$ к последней единице и к $2^{k+1}$, получая $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}, 2^k, 2^k)$. Так как $n - 1 \geqslant k$, по предположению индукции префикс длины $n$ можно превратить в $n$ единиц, что дает последовательность $(1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}, 2^k)$. По предположению индукции, суффикс длины $n$ можно превратить в последовательность из $n$ единиц. Итак, мы получили $n + 1$ единицу, сделав лишь конечно много шагов (один плюс вдвое больше, чем требуется для последовательности $(\underbrace{1,\dots,1}_{n-1},2^k)$ согласно предположению индукции).

Наконец, чтобы получить $(1,\dots,1)$ из последовательности $(1,2,4,\dots,2^N)$, мы можем провести индукцию по $N$. При $N=0$ требуемая последовательность совпадает с исходной. Рассмотрим теперь последовательность $(1,2,4,\dots,2^N,2^{N+1})$. По предположению индукции получим из нее $(\underbrace{1,\dots,1}_{N+1},2^{N+1})$, откуда по доказанному выше утверждению можно перейти к $(\underbrace{1,\dots,1}_{N+1},1)$ за конечное число шагов.

Отметим, что из нашего доказательства нетрудно извлечь рекуррентные формулы для числа шагов, достаточного для требуемых преобразований. $\square$