Алгебра. ПИ. Семинар 5.
Определители. Часть 2: разложение по строке, рекурренты, разное.

Осень 2025. Медведь Никита Юрьевич

1 Задачи для семинара

Обсуждение 1 (Разложение по строке)**.** Напоминаю формулу разложения по строке.

Упражнение 2 (К10.4в)**.** $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$. Метод Гаусса использовать неприятно, так как буквы мешают. По определению очень длинно — 24 слагаемых.

Упражнение 3 (С углом нулей)**.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -41 & 75 \\ 4 & -1 & 107 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \end{vmatrix}$. Два раза раскладываем по строке. Формулирую правило про угол нулей.

Обсуждение 4 (Линейные однородные рекуррентные уравнения порядка 2.)**.** $x^2 = 3x - 2, (x-1)(x-2) = 0, x = C_1 1^n + C_2 2^n$. В качестве начальных условий например $x_1 = 1, x_2 = -1$, чтобы $C_1 = 3, C_2 = -1$. Обсуждаем как решать, какой вид имеет ответ, почему он единственен. Логика «раз мы его отгадали и раз он единственен — значит мы его нашли».

Потом уравнение с кратным корнем. $x^2 = 4x - 4, (x-2)^2 = 0, x = C_1 2^n + nC_2 2^n$.

Задача 5 (?)**.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Задача 6 (?)**.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}$

Обсуждение 7 (Определитель Вандермонда)**.** Формулируется задача: посчитать определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$. Спрашиваются идеи. Вероятно, прозвучит естественная идея вычитать столбцы (чтобы единички сократились и получилась строка почти из одних нулей). Показываю, что дальше как-то тяжело продолжать. Возвращаемся к началу. Вычитаем из каждой строки предыдущую, умноженную на x_n.

Если есть время, обсуждаем альтернативное доказательство с вычитанием столбцов и делимостью на $x_i - x_j$.

Упражнение 8 (П22). $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x + 7y = 2 \end{cases}$

Обсуждение 9. Обсуждаем достоинства и недостатки метода Крамера перед методом Гаусса.

Недостаток: при прямом применении алгоритмическая сложность $O(n^4)$ вместо $O(n^3)$ — ужасно!

Достоинства:

- прямые формулы, а не просто алгоритм — можно подставлять в другие формулы;
- меньше делений — хорошо, если числа не вещественные (однажды потом);
- задачи с параметрами — не всегда, но иногда лучше работает.

Упражнение 10. $\begin{cases} x_1 + \lambda x_2 = \ \ 1 \\ \lambda x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$

2 Домашнее задание

Упражнение 1 (К12.1). Разлагая по строке, вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

Замечание: трудозатраты немаленькие, если это делать как-то иначе.

Задача 2 (К14.1а). $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Задача 3 (К14.1в). $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Уточнение: на случай если непонятно, там где троеточие, всюду одни и те же три числа на диагоналях. Просто в левом верхнем углу немного нарушена закономерность. Для простоты можете считать, что размер $n > 3$.

Указание: применяйте разложения по строке/столбцу, аналогично разобранным, пока не придёте к определителям одинакового типа. Для них найдите формулу, пользуясь методами из семинара. Не стесняйтесь задать вопрос, если не выходит.

Задача 4 (К14.1д). $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Задача 5 (К15.1). $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$.

Указание: это очень сложная задача, если не знать, как делать. Поэтому подсказка: посчитать матрицу AA^T (или A^TA, это неважно). Подумать, как связан её определитель с исходным.

Задача 6 (КК 5.81). Числа 20677, 53291, 25783, 28451 и 1679 делятся на 23. Доказать, что определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 8 & 3 \\ 2 & 8 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

также делится на 23.

Упражнение 7 (П26). Решить методом Крамера:

$$\begin{cases} x\cos\alpha - y\sin\alpha = \cos\beta \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha = \sin\beta \end{cases}$$

Упражнение 8 (П29). Исследовать методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 6x - 4y = 3 \end{cases}$$

Упражнение 9 (П36). Решить методом Крамера (для некоторых значений параметра может понадобиться решить отдельно другими методами):

$$\begin{cases} ax + 4y = 2 \\ ay + 9x = 3 \end{cases}$$

Упражнение 10 (П74). Решить методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 10 \\ 3x + 7y + 4z = 3 \\ x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

2.1 Дополнительные задачи (не оцениваются)

Задача 11 (КК 7.67)**.** Применяя метод рекуррентных соотношений, вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2+a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2}+a_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}.$$

Задача 12 (КК 7.76)**.** Применяя метод рекуррентных соотношений, вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

Задача 13 (КК 7.117)**.** Вычислить определитель, разложив его в сумму определителей:

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}.$$

Задача 14 (КК 7.118)**.** Вычислить определитель, разложив его в сумму определителей:

$$\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \dots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \dots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \dots & a_n-b_n \end{vmatrix}.$$

Задача 15 (КК 7.125)**.** Вычислить определитель, разложив его в произведение определителей:

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix}.$$

Комментарий: очень люблю эту задачу! Даже когда уже решите — ищите подвох!

Задача 16 (КК 8.24*)**.** *Континуантой* называется определитель

$$(a_1 a_2 \dots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

а) Записать $(a_1a_2\dots a_n)$ в виде многочлена от $a_1,\dots,a_n$.
б) Написать разложение континуанты по первым k строкам.
в) Установить следующую связь континуанты с цепными дробями:

$$\frac{(a_1a_2\dots a_n)}{(a_2a_3\dots a_n)} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Задача 17 (КК 8.28)**.** Перемножая матрицы определителей

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & -x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & -x_1 & -x_2 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_2 & -y_1 & -y_4 & y_3 \\ y_3 & y_4 & -y_1 & -y_2 \\ y_4 & -y_3 & y_2 & -y_1 \end{vmatrix},$$

доказать тождество Эйлера:

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2) =$$

$$= (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)^2 + (x_1y_2-x_2y_1-x_3y_4+x_4y_3)^2 +$$
$$+ (x_1y_3+x_2y_4-x_3y_1-x_4y_2)^2 + (x_1y_4-x_2y_3+x_3y_2-x_4y_1)^2.$$

Замечание: может быть сходу неясно, зачем такое громоздкое тождество. Заметим, что его можно сформулировать в форме «произведение суммы четырёх квадратов на сумму четырёх квадратов тоже является суммой четырёх квадратов». На этом пути можно выяснить, какие вообще числа представимы в виде суммы четырёх квадратов (теорема Лагранжа о сумме четырёх квадратов).

Замечание: происходящее в этой задаче связано со свойствами так называемых *кватернионов*.

Задача 18 (КК 5.84)**.** Пусть $A = A(t) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathcal{D})$, то есть клетками матрицы A являются дифференцируемые функции от переменной t. Докажите, что производная определителя $\det A$ может быть вычислена по формуле

$$\frac{d}{dt}\det A = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & \dots & a'_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & \dots & a'_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1}(t) & a'_{n2}(t) & \dots & a'_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$