Алгебра. ПИ. Семинар 13.

Аналитическая геометрия: векторное и смешанное произведения. Плоскости.

Осень 2025. Медведь Никита Юрьевич

1 Задачи для семинара

1.1 Векторное произведение

Упражнение 1 (КК25.18)**.** Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A(-1,0,-1), B(0,2,-3), C(4,4,1)$.

Решение: если рассмотреть векторное произведение $\overline{AB} \times \overline{AC}$, то его модуль равен площади параллелограмма $ABDC$, где точка D понятно как построена. Тогда искомая площадь треугольника — половина этой величины.

$\overline{AB} = (1,2,-2), \overline{AC} = (5,4,2)$, тогда $\overline{AB} \times \overline{AC} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \right) = (12,-12,-6)$.
Получаем $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{12^2+(-12)^2+(-6)^2} = \frac{1}{2}6\sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3\sqrt{9} = 9$.

Обсуждение 2. Алгоритм проверки двух векторов на коллинеарность: ищем их векторное произведение, оно равно нулю тогда и только тогда, когда они коллинеарны. Чем это лучше чем «посмотреть, пропорциональны ли они»? Ну, например, на компьютере «посмотреть, пропорциональны ли они» обернётся какими-то скучными проверками деления на ноль... А через векторное произведение проще.

Упражнение 3 (КК24.60)**.** Даны два неколлинеарных вектора a и b. Найти вектор x, компланарный векторам a и b и удовлетворяющий системе уравнений $(a,x) = 1; (b,x) = 0$.

Не решение: можно, конечно, обозначив компоненты вектора a через $a = (a_1, a_2, a_3)$, и аналогично $b = (b_1, b_2, b_3), x = (x_1, x_2, x_3)$, получить на них уравнения:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 1,$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0.$$

Правда, не совсем ясно, как сюда воткнуть условие компланарности, но на самом деле можно через смешанное произведение. Получится система из трёх линейных уравнений на три неизвестных x_1, x_2, x_3; мы её решим. Из-за обилия параметров уместно решать не методом Гаусса, а методом Крамера. Тем не менее, ответ получится невнятный, в нём не будет видно геометрического смысла — и есть в нём что-то нечестное, что мы «распаковываем» данные нам векторы a, b. Давайте найдём решения, этого не делающие.

Решение 1: пусть $x = \alpha a + \beta b$. Можно ли написать уравнения на коэффициенты α, β? Важный трюк: умножим равенство скалярно на a. Получаем $(a,x) = \alpha(a,a) + \beta(a,b)$, но при этом нам дано, что $(a,x) = 1$. Получаем линейное уравнение на α, β. Аналогично получаем $\alpha(a,b) + \beta(b,b) = 0$. Решая полученную систему методом Крамера, находим

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 1 & (a,b) \\ 0 & (b,b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (a,a) & (a,b) \\ (b,a) & (b,b) \end{vmatrix}} = \frac{(b,b)}{\begin{vmatrix} (a,a) & (a,b) \\ (b,a) & (b,b) \end{vmatrix}},$$

и, аналогично,

$$\beta = \frac{-(a,b)}{\begin{vmatrix} (a,a) & (a,b) \\ (b,a) & (b,b) \end{vmatrix}}.$$

Таким образом, искомый вектор равен

$$x = \frac{(b,b)a - (a,b)b}{\begin{vmatrix} (a,a) & (a,b) \\ (b,a) & (b,b) \end{vmatrix}}.$$

Решение 2: есть другое, изящное решение через двукратное векторное произведение. А именно, обратите внимание, что вектор $[b,[a,b]]$ компланарен данным векторам (почему? потому что он перпендикулярен вектору $[a,b]$, а тот как раз перпендикулярен плоскости, натянутой на a,b) и удовлетворяет уравнению $(b,x) = 0$. Осталось подправить его так, чтобы выполнилось условие $(a,x) = 1$.

Это несложно, надо просто умножить его на подходящую константу! На какую? Ну а чему равно это скалярное произведение сейчас? Оно равно $(a,[b,[a,b]])$. Вот на это и надо разделить, чтобы вышло 1. Итого:

$$x = \frac{[b,[a,b]]}{(a,[b,[a,b]])}$$

Задача 4 (КК25.38)**.** Даны три вектора $a = (-2,-2,-4), b = (5,1,6), c = (-3,0,2)$. Найти вектор x, удовлетворяющий системе $(a,x) = 40, (b,x) = 0, (c,x) = 0$.

Аналогично предыдущей задаче, мы можем, теоретически, составить систему из трёх уравнений с тремя неизвестными — компонентами вектора x. Но проще догадаться рассмотреть векторное произведение $[b,c]$, ведь оно уже удовлетворяет двум условиям $(b,x) = 0$ и $(c,x) = 0$. Остаётся подобрать константу так, чтобы произведение $x = \alpha[b,c]$ удовлетворяло условию $(a,x) = 40$. Получаем $\alpha(a,[b,c]) = 40$, откуда $\alpha = \dfrac{40}{(a,[b,c])}$. Тогда $x = \dfrac{40[b,c]}{(a,[b,c])}$.

1.2 Смешанное произведение

Упражнение 5 (КК25.52)**.** Вычислить объем тетраэдра по координатам вершин $A(2,-2,1), B(3,0,2), C(5,-1,3), D(1,3,1)$.

Обсуждение 6. Алгоритм проверки трёх векторов на компланарность: ищем их смешанное произведение, оно равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

Упражнение 7 (КК25.59)**.** Доказать, что в произвольном трехгранном угле биссектрисы двух плоских углов и угла, смежного к третьему плоскому углу, лежат в одной плоскости.

1.3 Уравнение плоскости

Упражнение 8 (КК 26.29.1)**.** Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3, если $M_1(2,3,1), M_2(3,1,4), M_3(2,1,5)$.

План действий: находим векторы $\vec{M_1M_2} = (3-2, 1-3, 4-1) = (1,-2,3)$ и $\vec{M_1M_3} = (2-2, 1-3, 5-1) = (0,-2,4)$. Пишем условие компланарности произвольного вектора $\vec{M_1M}$ данным двум:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

(или такая же транспонированная, по вкусу). Дальше не считаем, но если посчитать, то вроде выйдет $-2x - 4y - 2z - 18 = 0$.

Задача 9 (КК25.39)**.** Даны три некомпланарных вектора a, b, c, найти вектор x, удовлетворяющий системе $(a,x) = \alpha, (b,x) = \beta, (c,x) = \gamma$.

2 Домашнее задание

Упражнение 1 (КК24.6)**.** Даны единичные векторы a, b, c, удовлетворяющие условию $a+b+c = 0$. Вычислить $(a, b) + (b, c) + (c, a)$.

Упражнение 2 (КК25.7)**.** При каких значениях $\alpha \in \mathbb{R}$ векторы $p = \alpha a + 5b$ и $q = 3a - b$ коллинеарны, если известно, что a и b не коллинеарны?

Указание: решить можно по-разному, но имеется в виду решение при помощи векторного произведения.

Упражнение 3 (КК25.24в)**.** Используя векторное произведение, вычислить площадь плоского четырёхугольника $ABCD$ с вершинами $A(-1, 0, 1), B(0, 1, 2), C(-2, 2, 5), D(-4, 0, 3)$.

Можно пользоваться готовой формулой (например, см. 25.26) без доказательства.

Задача 4 (КК25.36)**.** Даны два вектора $a = \{1, 1, 1\}$ и $b = \{1, 0, 0\}$. Найти единичный вектор c, перпендикулярный вектору a, образующий с вектором b угол в 60° и направленный так, чтобы тройка a, b, c была левой.

Указание: есть два пути. Можно написать уравнения через скалярные произведения (a, c) и (b, c). Можно рассмотреть линейную комбинацию векторов $[a, b]$ и $[a, [a, b]]$, заведомо перпендикулярных a. Оба пути довольно неприятны, успехов!

Упражнение 5 (Устно)**.** Прочтите на странице 221 задачника Ким и Крицкова пример 25.6. Понятно ли вам его решение? Понятно ли вам, как сделать решение совсем в лоб? Постарайтесь запомнить саму формулу, которую здесь доказывают («формула БАЦ минус ЦАБ»).

Задача 6 (КК25.63а)**.** Докажите тождество

$$([a, b], [c, d]) = \begin{vmatrix} (a, c) & (a, d) \\ (b, c) & (b, d) \end{vmatrix}.$$

Указание: в левой части можно временно думать о $[a, b]$ как едином векторе, тогда написано смешанное произведение трёх векторов, его можно «прокручивать» по циклу к более удобному виду. Приведите его к виду, в котором применима формула «БАЦ минус ЦАБ», позволяющая убирать векторные произведения из формул (см. предыдущую задачу).

Упражнение 7 (КК 26.28)**.** Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку $(2, 6, -3)$ параллельно плоскостям координат.

Упражнение 8 (КК 26.39)**.** Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $(2, -5, 1)$.

Упражнение 9 (КК 27.42)**.** Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x + 2y + 3z - 4 = 0, 3x + z - 5 = 0$ и отсекающей на осях Oy и Oz ненулевые отрезки равной длины. Система координат прямоугольная.

2.1 Задачи, которые могли бы войти в семинары и дз, но этого не произошло

Дополнить до базиса, дополнить до ОНБ в $\mathbb{R}^3$, в $\mathbb{R}^2$ (2-мерный 1-арный аналог векторного произведения).

Упражнение 10 (КК24.5)**.** Доказать тождество

$$|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$

и дать его геометрическое толкование.

Упражнение 11 (КК25.63б)**.** $[[a, b], [c, d]] = c(a, b, d) - d(a, b, c)$

Задача 12 (КК25.66)**.** См. в Ким–Крицкове задачу про систему $(a_1, x) = \alpha, [a_2, x] = b$.

2.2 Дополнительные задачи (не оцениваются)