Алгебра. ПИ. Семинар 12.
Аналитическая геометрия: скалярное, векторное и смешанное произведения.

Осень 2025. Медведь Никита Юрьевич

То силы есть, но нет работы,
То есть работа — нету сил.
То есть и силы, и работа,
А нужен... косинус угла.

Неизвестный (мне) автор

1 Задачи для семинара

1.1 Комплексные числа

Упражнение 1 (27.3а, опц.)**.** Построить многочлен наименьшей степени с комплексными коэффициентами, имеющий двойной корень 1, простые корни 2,3 и $1+i$.

Упражнение 2 (27.4а)**.** Построить многочлен наименьшей степени с вещественными коэффициентами, имеющий двойной корень 1, простые корни 2,3 и $1+i$.

Задача 3 (К29.1б, 29.2б)**.** Представить дробь $\frac{1}{x^4+4}$ в виде суммы простейших дробей над полем комплексных чисел. А над полем вещественных чисел?

Задача 4. Пусть $f(z) = z^5 - z^4 + 4$. У этого многочлена есть 5 корней z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, но найти их не представляется возможным. Тем не менее, найти:
а) сумму $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5$;
б) сумму $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2$.

1.2 Скалярное произведение

Обсуждение 5. Понятие вектора. Стандартное скалярное произведение в двумерном и трёхмерном пространстве. Вычисление косинуса угла. Подход к определению длины и угла через скалярное произведение.

Задача 6 (КК24.43а)**.** Определить угол между векторами $a = (8, 4, 1)$ и $b = (2, -2, 1)$.

Решение: $\cos\angle(a,b) = \frac{(a,b)}{|a||b|} = \frac{8\cdot 2+4\cdot(-2)+1\cdot 1}{\sqrt{8^2+4^2+1^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{9}{\sqrt{81}\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$. Отсюда $\angle(a,b) = \arccos\frac{1}{3}$.

Упражнение 7 (КК24.49)**.** Найти угол между биссектрисами координатных углов xOz и yOz.

Решение: заметим, что вектор $(1, 0, 1)$ направлен вдоль биссектрисы угла xOz, а вектор $(0, 1, 1)$ направлен вдоль биссектрисы угла yOz. Остаётся найти угол между ними аналогично предыдущей задаче; получится $\pi/3$.

Упражнение 8 (КК24.9)**.** Какой угол образуют единичные векторы s и t, если известно, что векторы $p = s + 2t$ и $q = 5s - 4t$ взаимно перпендикулярны?

Решение: $p \perp q \Leftrightarrow (p, q) = 0$. Остаётся произвести вычисления:

$$(s + 2t, 5s - 4t) = 5(s, s) + 10(t, s) - 4(s, t) - 8(t, t).$$

Заметим, что по условию $|s| = |t| = 1$, что означает что $(s, s) = (t, t) = 1^2 = 1$. Также заметим, что по определению скалярного произведения $(s, t) = (t, s)$. Тогда

$$5(s, s) + 10(t, s) - 4(s, t) - 8(t, t) = 5 + (10 - 4)(t, s) - 8 = 6(t, s) - 3.$$

Приравнивая к нулю получаем $(t, s) = 1/2$, учитывая $|t| = |s| = 1$ получаем $\angle(t, s) = \pi/3$.

Обсуждение 9 (Матрица Грама)**.** Кратко обсуждаем идею матрицы Грама как предподсчитанной таблицы умножения.

Упражнение 10 (КК24.76)**.** Известны длины базисных векторов аффинной (косоугольной) системы координат $|e_1| = 4, |e_2| = 2$ и угол между ними $\omega = \pi/3$. Относительно этой системы координат заданы вершины треугольника $A(1, 3), B(1, 0), C(2, 1)$. Определить угол между сторонами AB и AC.

Решение: нам не даны сами векторы e_1, e_2 и ясно, что никак найти их по данным задачи нельзя. Но можно найти матрицу Грама $\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда

$$(\overline{AB}, \overline{AC}) = \overline{AB}_e^T \, \Gamma \, \overline{AC} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 12.$$

Так же находим

$$(\overline{AB}, \overline{AB}) = \overline{AB}_e^T \, \Gamma \, \overline{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 36,$$

откуда $|AB| = 6$. Обратите внимание, что это вовсе не теорема Пифагора, а совсем другая формула, потому что базис e_1, e_2 не *ортонормированный* (чуть подробнее об этом понятии в другой раз), то есть система координат не прямоугольная. Аналогично находим $|AC|$, после чего находим угол.

Упражнение 11 (КК24.6)**.** Даны единичные векторы a, b, c, удовлетворяющие условию $a+b+c = 0$. Вычислить $(a, b) + (b, c) + (c, a)$.

2 Домашнее задание

Упражнение 1 (КК24.4)**.** Найти скалярное произведение векторов a и b в следующих случаях:

а) $|a| = 8, |b| = 5, (\widehat{a, b}) = 60°$;

б) $|a| = |b| = 1, (\widehat{a, b}) = 135°$;

в) $a \perp b$;

г) $|a| = 3, |b| = 6, a \upuparrows b$;

д) $|a| = 3, |b| = 1, a \uparrow\downarrow b$.

Упражнение 2 (КК24.43вг)**.** Определить угол между векторами a и b, заданными своими координатами:

в) $a = (2, 5, 1), b = (3, -2, 4)$;

г) $a = (1, 0, 1), b = (2, -2, 0)$.

Упражнение 3 (КК24.7)**.** Даны векторы a, b, c, удовлетворяющие условию $a + b + c = 0$. Зная, что $|a| = 3, |b| = 1, |c| = 4$, вычислить $(a, b) + (b, c) + (c, a)$.

Упражнение 4 (КК24.8)**.** Доказать, что для любых a, b, c векторы $p = (b, c)a - (a, c)b$ и c ортогональны.

Упражнение 5 (КК24.11)**.** В треугольнике ABC известны длины сторон $BC = 5, CA = 6, AB = 7$. Найдите скалярное произведение $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$, не используя теорему косинусов.

Указание: распишите $(BA - BC)^2$ двумя способами. Кстати, тем самым вы автоматически доказали теорему косинусов.

Упражнение 6 (КК24.15)**.** Найти угол между внутренними диагоналями куба.

Упражнение 7 (КК24.57)**.** Найти вектор x, коллинеарный вектору $a = (12, -16, -15)$, если известно, что $|x| = 50$ и вектор x образовывает с осью Oz острый угол.

2.1 Задачи, которые могли бы войти в семинары и дз, но этого не произошло

Упражнение 8 (КК24.5)**.** Доказать тождество

$$|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$

и дать его геометрическое толкование.

2.2 Дополнительные задачи (не оцениваются)