

## Входное тестирование по математике'24

### Онлайн тур, третья часть

Тест выполняется онлайн и состоит из трёх частей, которые становятся доступны последовательно одна за другой. На выполнение заданий каждой из трёх частей даётся 30 минут, по окончании которых сдача заданий из данной части становится невозможной. Между частями предусмотрен небольшой перерыв от 2 до 5 минут. Ссылка на каждую следующую часть теста находится в конце предыдущей части + ссылки на все части есть в письме-приглашении.

Выполнять задания можно в любом порядке – внутри данной части теста задачи НЕ упорядочены по сложности и имеют одинаковый вес. Суммарный вес задач каждой из частей одинаков (например, вес одной задачи первой части в 5 раз меньше веса задачи третьей части).

**ВАЖНО!** В случае нецелого ответа, его следует указать в виде десятичной дроби с **двумя** знаками после десятичного разделителя. В качестве разделителя следует использовать **точку** (а не запятую)! Например, ответ 1.23 будет принят, а ответ 1,23 приведёт к несданной задаче (ручную перепроверку в случае невнимательности не обещаем в виду чётко прописанного правила и большого количества участников).

Использовать округление следует откидыванием третьей и последующих цифр после запятой. Например, 12.245 должно быть округлено до 12.24, а  $-12.899$  – до  $-12.89$ .

Вычислительную электронику использовать запрещено.

Некоторые стандартные константы:  $\pi = 3.1415\dots \approx 3.1416$      $\sqrt{2} = 1.4142\dots \approx 1.4142$   
 $\sqrt{3} = 1.7320\dots \approx 1.7321$      $\sqrt{5} = 2.2360\dots \approx 2.2361$      $\sqrt{17} = 4.1231\dots \approx 4.1231$

## Mathematics Entrance Testing'24

### Online round, part three

The test is conducted online and consists of three parts, which become available sequentially one after another. You have 30 minutes to complete the tasks in each of the three parts, after which submitting answers for that part becomes impossible. There is a short break of 2 to 5 minutes between the parts. The link to the next part of the test is located at the end of the previous part + all links are included in the invitation email.

You can solve the tasks in any order – within each part of the test, the problems are NOT ordered by difficulty and have the same weight. The total weight of the tasks in each part is the same (for example, the weight of one task in the first part is 5 times less than the weight of a task in the third part).

**IMPORTANT!** In the case of a non-integer answer, it should be given as a decimal fraction with **two** digits after the decimal separator. Use a **period** as the separator (not a comma)! For example, the answer 1.23 will be accepted, but the answer 1,23 will result in a non-submitted problem (we do not promise manual rechecks in cases of carelessness due to clearly stated rules and the large number of participants).

Rounding should be done by dropping the third and subsequent digits after the decimal point. For example, 12.245 should be rounded to 12.24, and  $-12.899$  should be rounded to  $-12.89$ .

The use of computational electronics is prohibited.

Some standard constants:  $\pi = 3.1415\dots \approx 3.1416$      $\sqrt{2} = 1.4142\dots \approx 1.4142$   
 $\sqrt{3} = 1.7320\dots \approx 1.7321$      $\sqrt{5} = 2.2360\dots \approx 2.2361$      $\sqrt{17} = 4.1231\dots \approx 4.1231$

1. На плоскости изображены графики квадратичных функций  $y = x^2 - 15x + 36$  и  $y = -x^2 - 15x - 36$ . К ним проведена общая касательная, касающаяся данных двух парабол в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Найдите максимально возможную величину  $PQ^2$ .

In the plane, the graphs of the quadratic functions  $y = x^2 - 15x + 36$  and  $y = -x^2 - 15x - 36$  are drawn. A common tangent is drawn to them, tangent to the two parabolas at points  $P$  and  $Q$ , respectively. Find the largest possible value of  $PQ^2$ .

2. Найдите количество пятизначных чисел, сумма цифр которых равна 27.

*Замечание:* числа рассматриваются натуральные, в десятичной системе счисления. В частности, цифра в старшем разряде не равна 0.

Find the number of five-digit numbers whose sum of digits equals 27.

*Note:* The numbers are natural numbers in base 10. In particular, the digit in the highest place is not 0.

3. Набор окружностей в верхней полуплоскости, все касающиеся оси  $x$ , строится слоями следующим образом. Слой  $L_0$  состоит из двух окружностей с радиусами  $4^2$  и  $5^2$ , внешне касающихся друг друга. Для  $k \geq 1$ , окружности в  $\bigcup_{j=0}^{k-1} L_j$  упорядочиваются по точкам касания с осью  $x$ . Для каждой пары последовательных окружностей в этом порядке строится новая окружность, внешне касающаяся каждой из двух окружностей пары. Слой  $L_k$  состоит из  $2^{k-1}$  окружностей, построенных таким образом. Для каждой окружности  $C$  обозначим через  $r(C)$  её радиус. Чему равна сумма  $\sum_{C \in L_3} \frac{1}{\sqrt{r(C)}}$ ?

A collection of circles in the upper half-plane, all tangent to the  $x$ -axis, is constructed in layers as follows. Layer  $L_0$  consists of two circles with radii  $4^2$  and  $5^2$ , externally tangent to each other. For  $k \geq 1$ , the circles in  $\bigcup_{j=0}^{k-1} L_j$  are ordered according to their points of tangency with the  $x$ -axis. For each pair of consecutive circles in this order, a new circle is drawn, externally tangent to each of the two circles in the pair. Layer  $L_k$  consists of  $2^{k-1}$  circles constructed in this way. For each circle  $C$ , let  $r(C)$  denote its radius. Find the value of the sum  $\sum_{C \in L_3} \frac{1}{\sqrt{r(C)}}$ .