Конспект по математическому анализу (Лекция 1)

Курс: Математический анализ
Лектор: Субочев Андрей Николаевич
Направление: 38.03.05 Бизнес-информатика, 1 курс бакалавриата
Высшая Школа Бизнеса НИУ ВШЭ, 2025/2026 учебный год

Слайд 2: Представление лектора

Лектор: Субочев Андрей Николаевич

- Доцент Департамента математики ФЭН НИУ ВШЭ
- Старший научный сотрудник Международного центра анализа и выбора решений (DeCAn Lab)
- Кандидат физико-математических наук
- **Контакты:** hse.ru/staff/subochev, asubochev@hse.ru

Слайд 3: Определение математического анализа

Математический анализ изучает **непрерывные числовые функции**.

Что такое непрерывные числовые функции?
Непрерывные зависимости между количественно измеримыми переменными величинами.

Как анализируем?
С помощью **дифференцирования** и **интегрирования**.

Слайд 4: Дифференцирование и интегрирование

Аналогии:

Физика	Экономика
x - положение в пространстве	x - запас ресурса
v - скорость перемещения в пространстве	v - поток ресурса

Операции:

Дифференцирование: Зная x как функцию времени t, находим v:

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

Интегрирование: Зная v как функцию времени t и начальное положение $x(t_0) = x_0$, находим x:

$$x(T) = \int_0^T v(t)dt + x_0$$

Пример: инерционный компас

Физически измеряем ускорение a как функцию времени $a = a(\tau)$.

Зная начальную скорость $v(t_0) = v_0$, находим скорость:

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau + v_0$$

Зная начальное положение $x(t_0) = x_0$, находим:

$$x(T) = \int_{t_0}^{T} \left(\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right)dt + v_0(T - t_0) + x_0$$

Слайд 5: Вещественные числа. Представление

Любое действительное число $a \in \mathbb{R}\{0\}$ представляется бесконечной десятичной дробью вида:

$$\pm a_0, a_1a_2a_3 \dots a_n \dots$$

где $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Число 0 представляется как 0,000...0...

Теорема: Рациональные числа представляются периодическими дробями, а иррациональные – непериодическими.

Определение: Модуль или абсолютное значение вещественного числа x, представленного дробью $\pm a_0, a_1a_2a_3 \dots a_n\dots$, есть вещественное число $|x|$, представленное дробью $+a_0, a_1a_2a_3 \dots a_n\dots$

Модуль числа 0 равен 0.

Слайд 6: Правило равенства вещественных чисел

Определение (правило равенства вещественных чисел):

Пусть a и b — положительные вещественные числа.
a = b если:

1. $a_n = b_n$ при всех $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, или
2. есть $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, такое что $a_{n_0} \neq 9$ и $a_n = 9$ при всех $n > n_0$, $b_n = a_n$ при всех $n < n_0$, $b_{n_0} = a_{n_0} + 1$, $b_n = 0$ при всех $n > n_0$.

Пусть a и b — отрицательные вещественные числа.
a = b если $|a| = |b|$.

Во всех остальных случаях $a \neq b$.

Слайд 7: Правило сравнения вещественных чисел

Определение (правило сравнения вещественных чисел):

Пусть a и b – неотрицательные числа, такие что $a \neq b$.

1. Найдём наименьшее $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$: $a_n \neq b_n$. Если $a_n > b_n$, то $a > b$.
2. a – положительное, b – отрицательное. Тогда $a > b$.
3. a и b – неположительные. Если $|a| > |b|$, то $a < b$.

Теорема: Любые два вещественных числа a и b сравнимы, то есть верно либо $a = b$, либо $a > b$ для всех $a, b \in \mathbb{R}$.

Теорема: Сравнение вещественных чисел транзитивно:

- $a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$
- $a = b \wedge b > c \Rightarrow a > c$
- $a > b \wedge b = c \Rightarrow a > c$
- $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$

для всех $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Слайд 8: Промежутки и окрестности

Определение: Промежутками называются следующие множества:

1. **отрезок** (сегмент числовой прямой): $[a, b] = \{c \in \mathbb{R} \mid a \leq c \leq b\}$
2. **интервал**: $(a, b) = \{c \in \mathbb{R} \mid a < c < b\}$
3. **полуинтервал**: $[a, b) = \{c \in \mathbb{R} \mid a \leq c < b\}$ или $(a, b] = \{c \in \mathbb{R} \mid a < c \leq b\}$
4. **открытый луч**: $(a, +\infty) = \{c \in \mathbb{R} \mid a < c\}$ или $(-\infty, b) = \{c \in \mathbb{R} \mid c < b\}$
5. **замкнутый луч**: $[a, +\infty) = \{c \in \mathbb{R} \mid a \leq c\}$ или $(-\infty, b] = \{c \in \mathbb{R} \mid c \leq b\}$
6. **числовая прямая**: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Числа a и b называются **границами** соответствующих промежутков.

Слайд 9: Интерпретация промежутков и окрестности

Интерпретация: Промежуток является областью непрерывного изменения числовой (то есть, количественно измеримой) переменной величины.

Определение: Интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ называется **ε-окрестностью точки a** и обозначается $U_\varepsilon(a)$.

Слайд 10: Кванторы

$\forall x \in D, P(x)$ – квантор всеобщности
Для любого элемента x множества D верно утверждение P(x).

$\exists x \in D: P(x)$ – квантор существования
В множестве D есть элемент x такой, что верно утверждение P(x).

Слайд 11: Максимум и минимум числового множества

Рассмотрим числовое множество D.

Определение: a – **максимум множества D**, a = max(D), если:
$a \in D \land \forall x \in D, a \geq x$

Определение: b – **минимум множества D**, b = min(D), если:
$b \in D \land \forall x \in D, b \leq x$

Слайд 12: Ограниченность числового множества

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$.

Определение: a – **верхняя грань множества D**, если:
$\forall x \in D, a \geq x$

Определение: b – **нижняя грань множества D**, если:
$\forall x \in D, b \leq x$

Определение: множество D **ограничено сверху (снизу)**, если у него есть верхняя (нижняя) грань.

Множество D **ограничено**, если у него есть и верхняя, и нижняя грани.

Слайд 13: Супремум и инфимум числового множества

$A = \{a \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D, a \geq x\}$ (множество верхних граней)

Определение: s – **точная верхняя грань множества D**, если s = min(A). s – **супремум множества D**.

$B = \{b \in \mathbb{R} \mid \forall x \in D, b \leq x\}$ (множество нижних граней)

Определение: i – **точная нижняя грань множества D**, если i = max(B). i – **инфимум множества D**.

Теорема: У любого ограниченного сверху (снизу) числового множества $D \subset \mathbb{R}$ есть супремум (инфимум), причём (естественно) только один.

Слайд 14: Общее определение функции

Пусть переменные x и y принимают значения в множествах X и Y.
Множество $X \times Y$ состоит из всех упорядоченных пар (a, b), $a \in X$, $b \in Y$.
Рассмотрим подмножество F множества $X \times Y$, $F \subseteq X \times Y$.

Определение: Если F удовлетворяет условиям:

1. $\forall a \in X, \exists b \in Y: (a, b) \in F$
2. $\forall (a_1, b_1) \in F, \forall (a_2, b_2) \in F, a_1 = a_2 \Rightarrow b_1 = b_2$

говорят, что на X определена **функция y от x**.

Функция F может обозначаться как y(x), y = f(x), $f: X \to Y$.

- x называется **независимой переменной** или **аргументом функции**
- y – **зависимой (от x) переменной** или, собственно, **функцией**
- X называется **областью определения** (domain) функции y(x) и обозначается D(y) или Dy
- Множество $\{b \in Y \mid \exists a \in X: (a, b) \in F\}$ называется **множеством значений** (range) функции y(x) и обозначается R(y) или Ry

Слайд 15: Числовая функция

Определение: Если множество значений функции является числовым, то функция называется **числовой**.

Определение: Числовая функция **ограничена сверху (снизу)**, если её множество значений ограничено сверху (снизу).

Определение (ограниченность на части области определения):
Числовая функция ограничена сверху (снизу) на множестве $M \subseteq X$, если множество $\{b \in Y \mid \exists a \in M: (a, b) \in F\}$ ограничено сверху (снизу).

Утверждение:

- У ограниченной на M сверху y(x) есть супремум $s = \sup_{x \in M} y(x)$
- У ограниченной на M снизу y(x) есть инфимум $i = \inf_{x \in M} y(x)$

Слайд 16: Числовая последовательность

Определение: Если областью определения функции является множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, то такая функция называется **последовательностью**.

Последовательность y(n), $n \in \mathbb{N}$, обозначается $\{y_n\}$ или просто y_n.

Числовые последовательности, то есть функции $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, могут обладать тремя важнейшими свойствами: **ограниченностью**, **монотонностью** и **сходимостью**.

Определение: y_n **ограничена сверху (снизу)**, если $\exists c \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}, c \geq (\leq) y_n$

y_n – **ограниченная**, если она ограничена сверху и снизу.

Слайд 17: Монотонность

Определение: x_n **неубывающая**, если $\forall n, m \in \mathbb{N}, m \geq n \Rightarrow x_m \geq x_n$

Определение: x_n **невозрастающая**, если $\forall n, m \in \mathbb{N}, m > n \Rightarrow x_m \leq x_n$

Определение: x_n **монотонная**, если она или неубывающая, или невозрастающая.

Слайд 19: Арифметические операции с вещественными числами: сложение

Определение (сумма вещественных чисел):
Рассмотрим $x, y \in \mathbb{R}$.
Рассмотрим:

- $X = \{a$ – конечная дробь $\mid a \leq x\}$
- $Y = \{b$ – конечная дробь $\mid b \leq y\}$

Составим $Z = \{z = a + b \mid a \in X \wedge b \in Y\}$
Тогда $x + y = \sup(Z)$.

Теорема: $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}: z = x + y$

Слайд 20: Арифметические операции с вещественными числами: умножение

Определение (произведение вещественных чисел):
Рассмотрим $x, y \in \mathbb{R}$.
Пусть $x > 0$ и $y > 0$. Рассмотрим:

- $X = \{a$ – конечная дробь $\mid 0 < a \leq x\}$
- $Y = \{b$ – конечная дробь $\mid 0 < b \leq y\}$

Составим $Z = \{z = a \cdot b \mid a \in X \wedge b \in Y\}$. Тогда $x \cdot y = \sup(Z)$.

Если $x \leq 0$ и $y > 0$ или $x > 0$ и $y \leq 0$, то $x \cdot y = -|x| \cdot |y|$

Теорема: $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}: z = x \cdot y$

Слайд 21: Деление вещественных чисел

Так как умножение вещественных чисел нами уже определено, то для определения деления x на y достаточно определить число $1/y$.

Определение (деление вещественных чисел):

Если $y = m/n \in \mathbb{Q}\{0\}$, то $1/y = n/m$

Если $y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ и $y > 0$, то $1/y = \sup\{a$ – конечная дробь $\mid a \cdot y \geq y > 0\}$

Если $y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ и $y < 0$, то $1/y = -1/|y|$

$x/y = x \cdot (1/y)$

Слайд 22: Возведение вещественного числа в вещественную степень

Определение (натуральный корень из натурального числа): $m, n \in \mathbb{N}$.
$\sqrt[n]{m} = \sup(\{a$ – конечная дробь $\mid 0 < a^n < m\})$

Так как определены умножение и деление вещественных чисел, а также извлечение натурального корня из натурального числа, то определено любое число a^b, где a и b — конечные дроби, $a > 0$.

Определение: Пусть $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Если $y = 0$ или $x = 1$, то $x^y = 1$.

Если $y > 0$ и $x > 1$, то:
$x^y = \sup(\{a^b \mid a, b$ — конечные дроби, $0 < a < x, 0 < b < y\})$

Если $y < 0$ или $x < 1$, то $x^y = x^{(-y)} = 1/x^y$