Домашнее задание по дискре 2 в

№1

$19x + 22y = -21$

НОД $(19, 22) = 1$, рассмотрим следующее уравнение:

$19x' + 22y' = 1$

$19x' + y'(19 + 3) = 1$

$19(x' + y') + 3y' = 1$

$x' + y' = t$:

$19t + 3y' = 1$

$t(6 \cdot 3 + 1) + 3y' = 1$

$3(6t + y') + t = 1$

$6t + y' = ч$:

$3ч + t = 1$

Пусть $ч = 0$, $t = 1$:

- $ч = 0$: $6 \cdot 1 + y' = 0$; $y' = -6$
- $x' = t - y'$: $x' = 1 + 6 = 7$

$x' = 7$, $y' = -6$

$$\Big\downarrow \cdot (-21)$$

$x_0 = -147$, $y_0 = 126$

Тогда: $x = -147 + 22t$

$y = 126 - 19t$

№2

$39x \equiv 104 \pmod{221}$

$39x = 221 \cdot q + 104$

$39x - 221q = 104 \quad |:13$

$3x - 17q = 8$

НОД $(3, 17) = 1$:

$3x' - 17q' = 1$

Пусть: $x' = 6$; $q' = 1$

$\downarrow \cdot 8$

$x_0 = 48$; $q_0 = 8$

$\Downarrow$

$x = 48 + 17t$; $q = 8 + 3t$

Необходимо найти: $x \equiv \; ? \pmod{221}$

Рассмотрим все возможные остатки при делении x на 221 при различных целых t:

- $t = -2$: $x \equiv 14 \pmod{221}$
- $t = -1$: $x \equiv 31 \pmod{221}$
- $t = 0$: $x \equiv 48 \pmod{221}$
- $t = 1$: $x \equiv 65 \pmod{221}$
- $t = 2$: $x \equiv 82 \pmod{221}$
- $t = 3$: $x \equiv 99 \pmod{221}$
- $t = 4$: $x \equiv 116 \pmod{221}$
- $t = 5$: $x \equiv 133 \pmod{221}$

$\cdot t=6: \quad x \equiv 150 \pmod{221}$

$\cdot t=7: \quad x \equiv 167 \pmod{221}$

$\cdot t=8: \quad x \equiv 184 \pmod{221}$

$\cdot t=9: \quad x \equiv 201 \pmod{221}$

$\cdot t=10: \quad x \equiv 218 \pmod{221}$

(дальше попадаем в цикл)

Итого: 13 различных решений

№3

$$\begin{cases} x \equiv -14 \pmod{12} \\ x \equiv 6 \pmod{11} \\ x \equiv 19 \pmod{5} \end{cases}$$

По китайской теореме об остатках эта система будет иметь ровно одно решение по модулю $12 \cdot 11 \cdot 5 = 660$

Рассмотрим подсистему:

$$\begin{cases} x_1 \equiv -14 \pmod{12} \quad (1) \\ x_1 \equiv 6 \pmod{11} \quad (2) \end{cases}$$

$x_1 = -14 + 12t = 6 + 11k$

$12t - 11k = 20$

$12t' - 11k' = 1$

Очевидны корни: $t' = 1$; $k' = 1$

$\downarrow \cdot (20)$

$t_0 = 20$; $k_0 = 20$

$t = 20 + 11d \quad , \quad k = 20 + 12d$

$x_1 = 6 + 11k = 6 + 11 \cdot 20 + 11 \cdot 12 d = 226 + 132 d$

$\Rightarrow x_1 \equiv 226 \pmod{132} \Leftrightarrow x_1 \equiv 94 \pmod{132}$

Рассмотрим ещё одну подсистему:

$$\begin{cases} x_2 \equiv 94 \pmod{132} \\ x_2 \equiv 19 \pmod{5} \end{cases}$$

$x_2 = 94 + 132m = 19 + 5k$

$5k - 132m = 75$

$5k - m(26 \cdot 5 + 2) = 75$

$5k - 26 \cdot 5 \cdot m - 2m = 75$

$5(k - 26m) - 2m = 75$

$$\begin{cases} 5(k_0 - 26m_0) = 85 \\ 2m_0 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_0 - 26m_0 = 17 \\ m_0 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_0 = 147 \\ m_0 = 5 \end{cases}$$

$k = 147 + 132f \ ; \quad m = 5 + 5f$

$x_2 = 94 + 132(5 + 5f) = 94 + 660 + 660f =$

$= 754 + 660f = 94 + 660f'$

$x_2 \equiv 94 \pmod{660}$ ← это и есть решение исходной системы

№4

Докажем вспомогательную формулу:

$$НОД(a^m - 1, a^n - 1) = НОД(a^r - 1, a^n - 1)$$

где $m = qn + r$; $0 \le r < n$

$$a^m - 1 = a^{qn+r} - 1 = a^r(a^{nq} - 1) + (a^r - 1)$$

$$a^{nq} - 1 = (a^n)^q - 1^q = (a^n - 1)\cdot(\ldots) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^n - 1 \mid a^{nq} - 1$$

Но тогда:

$$НОД(a^m - 1, a^n - 1) = НОД(a^r(a^{nq} - 1) + (a^r - 1), a^n - 1) = НОД(a^r - 1, a^n - 1)$$

Тогда:

$$НОД(3^{168} - 1, 3^{140} - 1) = НОД(3^{28} - 1, 3^{140} - 1) =$$

$$= НОД(3^{28} - 1, 3^0 - 1) = НОД(3^{28} - 1, 0) =$$

$$= 3^{28} - 1$$

N5

$$\underbrace{3^{\left(3^{\cdot^{\cdot^{3}}}\right)}}_{2020\ \text{шт.}} \equiv x \pmod{46}$$

$$\text{НОД}(3, 46) = 1 \Rightarrow 3^{\varphi(46)} \equiv 1 \pmod{46}$$

$$\Updownarrow$$

$$3^{22} \equiv 1 \pmod{46}$$

$$\underbrace{3^{\left(3^{\cdot^{\cdot^{3}}}\right)}}_{2019\ \text{шт.}} \equiv y \pmod{22}$$

$$\text{НОД}(3, 22) = 1 \Rightarrow 3^{\varphi(22)} \equiv 1 \pmod{22}$$

$$\Updownarrow$$

$$3^{10} \equiv 1 \pmod{22}$$

$$\underbrace{3^{\left(3^{\cdot^{\cdot^{3}}}\right)}}_{2018\ \text{шт.}} \equiv z \pmod{10}$$

$$\text{НОД}(3, 10) = 1 \Rightarrow 3^{\varphi(10)} \equiv 1 \pmod{10}$$

$$\Updownarrow$$

$$3^{4} \equiv 1 \pmod{10}$$

$$\underbrace{3^{\left(3^{\cdot^{\cdot^{3}}}\right)}}_{2017\ \text{шт.}} \equiv u \pmod{4} \quad (*)$$

Но $3 \equiv -1 \pmod 4 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow -1^{(3^{\cdot^{\cdot^{3}}})} \equiv u \pmod{}$

Очевидно, что при $\forall n$ $2 \nmid 3^n \Rightarrow$, тогда:

$u \equiv -1 \pmod 4 \Leftrightarrow u \equiv 3 \pmod 4$

Возвращаемся к предыдущим результатам:

$$\underbrace{3^{(3^{\cdot^{\cdot^{3}}})}}_{\substack{2018\\ \text{тр.}}} \equiv z \pmod{10}$$

$$\Updownarrow$$

$$3^3 \equiv z \pmod{10} \Rightarrow z = 7$$

$$\underbrace{3^{(3^{\cdot^{\cdot^{3}}})}}_{\substack{2019\\ \text{тр.}}} \equiv y \pmod{22}$$

$$\Updownarrow$$

$$3^7 \equiv y \pmod{22} \Rightarrow y = 9$$

$$\underbrace{3^{(3^{\cdot^{\cdot^{3}}})}}_{\substack{2020\\ \text{тр.}}} \equiv x \pmod{46}$$

$$\Updownarrow$$

$$3^9 \equiv x \pmod{46} \Rightarrow x = 41$$