

N 1

$$S = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & -13 \\ 4 & -2 & -7 & 5 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{matrix}$$

Приведём  
матрицу  $S$  к ступенчатому  
образу  $S'$ :  
м-цу

$$S \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 & -7 & 0 \\ 1 & 5 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & -6 \\ 4 & -2 & -7 & 5 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -6 & -18 & 15 & -6 \\ 1 & 5 & 14 & -11 & 3 \\ 0 & -18 & -54 & 45 & -18 \\ 0 & -22 & -63 & 49 & -19 \end{pmatrix} \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 14 & -11 & 3 \\ 0 & -6 & -18 & 15 & -6 \\ 0 & -12 & -54 & 45 & -18 \\ 0 & -22 & -63 & 49 & -19 \end{pmatrix} \begin{matrix} S_2 \\ S_1 \\ S_3 \\ S_4 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 14 & -11 & 3 \\ 0 & -6 & -18 & 15 & -6 \\ 0 & -22 & -63 & 49 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} S_2 \\ S_1 \\ S_4 \\ S_3 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 14 & -11 & 3 \\ 0 & -2 & -6 & 5 & -2 \\ 0 & -22 & -63 & 49 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} S_2 \\ S_1 \\ S_4 \\ S_3 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 14 & -11 & 3 \\ 0 & -2 & -6 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} S_2 \\ S_1 \\ S_4 \\ S_3 \end{matrix} = S'$$

Приведем к-ую систему к  
упрощенному ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 9 & -5 & -2 & 1 \\ 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & -5 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & -5 & -2 & 1 \\ 0 & 27 & -15 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что  $\text{Rg} = 2$  у получившейся матрицы, тогда ФСР должен содержать  $5 - 2 = 3$  л.н.з. столбцов.

В  $S'$  ровно столько столбцов  $\Rightarrow$  остаются лишь проверить являются ли они решения.

$$S' \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & -\frac{5}{9} & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & 0 & 0 \\ \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 14 & -11 & 3 \\ 0 & -2 & -6 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & -\frac{5}{9} & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & 0 & 0 \\ \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Последние строки,}$$

составленные из  $S_1, S_2, S_4$  образуют  
фундаментальную систему решений.

N 2

Запишем систему в виде расширенной матрицы:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -7 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & 17 & \lambda \end{array} \right) (*)$$

Приведем (\*) к ступенчатому виду:

$$(*) \rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & -2 & -7 & -19 & 7 \\ 3 & -1 & 4 & 10 & \lambda - 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & -2 & -7 & -19 & 7 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & \lambda - 7 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 19 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Заметим, что исходная система имеет бесконечно много решений при  $\lambda \neq 0$ , так по теореме Кронекера-Кaptepa  $\Rightarrow$  решения есть, а так det

матричной системы равен нулю, то их бесконечно много.

Заметим, что вектор  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  является

частным решением СЛАУ (при  $\lambda = 0$ ). Пусть  $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  — <sup>частный</sup>

любым  $\varphi \in P$  соотв. однородной системы (запишем только ненулевые строки):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 7 & 19 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{19}{2} \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{19}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Downarrow \\ x_1 &= -\frac{5}{2}x_3 - \frac{13}{2}x_4 \\ x_2 &= -\frac{7}{2}x_3 - \frac{19}{2}x_4 \end{aligned}$$

Пусть  $x_3 = s; \quad x_4 = t$

$$\begin{aligned} \Downarrow \\ x_1 &= -\frac{5}{2}s - \frac{13}{2}t \\ x_2 &= -\frac{7}{2}s - \frac{19}{2}t \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{2}s - \frac{13}{2}t \\ -\frac{7}{2}s - \frac{19}{2}t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} \\ -\frac{19}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Тогда, в теореме о структуре  
 общего решения неодн. СЛАУ, исходная  
 СЛАУ имеет беск. много решений  
 вида:  $\tilde{x} + s \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} \\ -\frac{19}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Итого:

Исходная СЛАУ не имеет решений  
 при  $\forall \lambda \neq 0$ .

При  $\lambda = 0$  она имеет бесконечно  
 много решений вида:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{13}{2} \\ -\frac{19}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$s, t \in \mathbb{R}$$