N1

Нет, не являются. Приведём конкретный пример, из которого это видно:

Пусть $P=1$, $Q=0$, $R=0$

- $(P \vee Q) \Rightarrow R$:

  $(1 \vee 0) \Rightarrow 0$

  $1 \Rightarrow 0 \Leftrightarrow 0$

- $(P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)$

  $(1 \Rightarrow 0) \vee (0 \Rightarrow 0)$

  $0 \vee 1 \Leftrightarrow 1$ Ответ: нет

N 2

Воспользуемся свойством импликации:

$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

Используя закон де Моргана

$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$

Перепишем утверждения, используя полученный результат.

(a) $\exists x \in R : |x-3| < 1 \wedge |x| \geq 4$

(в) $\exists x \in R: |x-3| > 1 \wedge |x| \leq 4$

(e) $\exists \varepsilon \; \exists x: |x-3| < \min(\varepsilon, 1)$

$\wedge |x^2-9| \geq 10\varepsilon$

(d) $\exists \varepsilon \; \forall \delta \; \exists x: (\delta > 0) \wedge (|x-3| < \delta)$

$\wedge (\varepsilon > 0) \wedge |x^2-9| \geq \varepsilon$

N3

(a) $\forall x \in R: |x-3| < 1 \Rightarrow |x| < 4$

Предположим, что оно ложно, тогда:

$$\begin{cases} |x-3| < 1 & (1) \\ |x| \geq 4 & (2) \end{cases}$$

Из $(1) \Rightarrow x \in (2;4)$

Из $(2) \Rightarrow x \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$

Но тогда выполнение (1) и (2) одновременно невозможно $\Rightarrow$ утверждение истинно.

(b) $\forall x \in \mathbb{R} : |x-3| > 1 \Rightarrow |x| > 4$

Нет, оно не истинно.

Пример: Пусть $x = 1$, имеем

$2 > 1 \Rightarrow 1 > 4$

$1 \Rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow 0$

(c) $\forall \varepsilon \ \forall x : |x-3| < \min(\varepsilon; 1) \Rightarrow |x^2-9| < 10\varepsilon$

Предположим, что оно ложно, тогда:

$$\begin{cases} |x-3| < \min(\varepsilon; 1) & (1) \\ |x^2-9| \geq 10\varepsilon & (2) \end{cases}$$

Из (1) $\Rightarrow$ $|x-3| < \varepsilon$, тк если $\varepsilon > 1$, $|x-3| < 1 < \varepsilon$, если $\varepsilon \leq 1$: $|x-3| < \varepsilon$

Также в обоих случаях имеем: $|x-3| < 1 \Rightarrow x \in (2; 4)$

Рассмотрим (2):

$|x^2-9| \geq 10\varepsilon$;

$|x-3||x+3| \geq 10\varepsilon$

С другой стороны, $|x-3| < \varepsilon$ и $|x+3| \in (5; 7) \Rightarrow |x-3||x+3| < 7\varepsilon$

$7\varepsilon \geq 10\varepsilon \Leftrightarrow 0$ (это так лишь при $\varepsilon > 0$, однако если $\varepsilon \leq 0$, то (1) не выполняется $\Rightarrow$ справедливо считать, что $\varepsilon > 0$).

Получили противоречие $\Rightarrow$ утверждение верно.

(d) $\forall \varepsilon \ \exists \delta \ \forall x :$

$(\delta > 0) \wedge (|x-3| < \delta) \wedge (\varepsilon > 0) \Rightarrow |x^2-9| < \varepsilon$

Предположим, что оно ложно, тогда имеем:

$$(*)\begin{cases} \delta > 0 \ (1) \\ |x-3| < \delta \ (2) \\ \varepsilon > 0 \ (3) \\ |x^2-9| \geq \varepsilon \ (4) \end{cases}$$

$(4)$: $|x^2-9| \geq \varepsilon$ ; $|x-3||x+3| \geq \varepsilon$

Из $(2) \Rightarrow \delta > |x-3| \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta|x+3| > \varepsilon$ (здесь также учтён факт $(1)$)

Заметим, что при $\forall \delta > 0$ мы всегда сможем найти на множестве $R$ такие $x$ и $\varepsilon$, что

$\delta|x+3| > \varepsilon$, те, при $\forall \delta > 0$ будут $\exists x, \varepsilon$ такие, что мы сможем построить случай $(*)$ (ложного выражения)

$\Rightarrow$ изначальное выражение ложно.

Ответ: верны (a) и (c)

№4

Докажем, используя метод математической индукции.

1) База индукции $n=1$ и $n=2$:

$a_n = 2^{n-1}+1$; $a_1 = 2^0+1 = 2$

$a_2 = 2^1+1 = 3$. Верно

2) Предположим, что формула верна для $\forall n \leq k$, где $k \geq 2$.

Те: $a_k = 2^{k-1}+1$, $a_{k-1} = 2^{k-2}+1$

Тогда необходимо доказать, что $a_{k+1} = 2^k+1$ $(*)$

3) Доказательство $(*)$:

По рекуррентной формуле имеем: $a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1} =$

$= 3(2^{k-1}+1) - 2(2^{k-2}+1) =$

$= 3\cdot 2^{k-1} + 3 - 2^{k-1} - 2 =$

$= 2\cdot 2^{k-1} + 1 = 2^k + 1$

Те $a_{k+1} = 2^k + 1$ Что и требовалось доказать.

Значит по индукции верна и изначальная формула

№6

Докажем, используя метод математической индукции.

1) База индукции $n=1$:

$1 = \frac{1\cdot 2^2}{4}$; $1=1$ – верно

2) Предположение:

Пусть $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ для

$\forall n \in N$

3) Используя предположение, докажем, что: $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 =$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 =$$

$$= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + \frac{4n+4}{4}\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Что и требовалось доказать.

№5

Докажем, используя метод математической индукции

1) База индукции $n=1$: $4+15-1 =$

$= 18 \,\vdots\, 9$ – верно

2) Предположение: предположим, что

$4^n + 15n - 1 \equiv 0 \pmod 9$ для $\forall n \in N$

3) Докажем, что $4^{n+1} + 15(n+1) - 1 \equiv 0 \pmod 9$

Пусть: $4^{n+1} + 15n + 14 \equiv x \pmod 9$.

Тогда необходимо доказать, что $x \equiv 0 \pmod 9$

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} 4^n + 15n - 1 \equiv 0 \pmod 9 \quad (1) \\ 4^{n+1} + 15n + 14 \equiv x \pmod 9 \quad (2) \end{cases}$$

Из (2) вычтем (1):

$$4^{n+1} - 4^n + 15 \equiv x \pmod 9$$

$$4^n \cdot 3 + 15 \equiv x \pmod 9$$

$$3(4^n + 5) \equiv x \pmod 9$$

Если мы докажем, что $4^n + 5 \,\vdots\, 3$ при $\forall n \in N$, то левая часть будет делиться на 9 $\Rightarrow x \equiv 0 \pmod 9$ (что нам и требуется) (*)

Для этого необходимо доказать, что $4^n \equiv 1 \pmod 3$. Докажем это используя метод математической индукции:

1) База индукции $n = 1$:
$4^1 = 4 \equiv 1 \pmod 3$ - верно

2) Предположение: пусть $4^n \equiv 1 \pmod 3$

3) Докажем, что $4^{n+1} \equiv 1 \pmod 3$:
Пусть $4^{n+1} = 4 \cdot 4^n = 4 \cdot (3m + 1)$, где $m \in N$; $4(3m+1) = 12m + 4 =$

$= 3(4m + 1) + 1 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по мат. индукции $\Rightarrow 4^n \equiv 1 \pmod 3$

Но тогда (см. (*)) $\Rightarrow 4^{n+1} + 15 + 14 \equiv 0 \pmod 9$

$\Rightarrow$ по мат. индукции $4^n + 15n - 1 \equiv 0 \pmod 9$ при $\forall n \in N$. Что и требовалось доказать