Д/з по дискретной математике 1в

№1

а) $\exists j \ \exists i_1 \ \exists i_2 : B(i_1, j) \wedge B(i_2, j)$

Это утверждение верно. Пусть $j = 4$, $i_1 = 1$, $i_2 = 5$

б) $\forall i, j : (H(i,j) \wedge R(i,j)) \vee (H(i,j) \wedge S(i,j))$

Это утверждение неверно. Пусть $i = 1$ и $j = 1$

в) $\forall i_1 \forall j_1 \ \exists j_2 : S(i_1, j_1) \Rightarrow R(i_1, j_2)$

Это утверждение неверно. Пусть $i_1 = 1$, $j_1 = 3$. В этом случае ни один из $j_2 = 1, 2, 3, 4, 5$ нам не подойдёт для истинности импликации.

г) $\forall i, j : (B(i;j) \Rightarrow B(j;i)) \wedge (R(i,j) \Rightarrow R(j,i)) \wedge (H(i;j) \Rightarrow H(j,i)) \wedge (S(i,j) \Rightarrow S(j,i))$

Это утверждение неверно. Пусть $i = 1, j = 2$, тогда: $S(1;2) \Rightarrow S(2;1) \equiv 1 \Rightarrow 0 \equiv 0 \Rightarrow$ изн. утв. неверно.

е) Есть такой проспект, что на разных улицах с банком и универсамом, что на одном проспекте и на улицах в соответствии с ними расположены другой универсам и другой банк

Это утверждение неверное. Заметим, что у нас лишь 2 проспекта, на которых, на разных улицах, есть банк и универсам. Но в этом случае не выполняется соответствие: у нас есть лишь одна улица, где на на двух проспектах расположены банк и универсам.

№3

Предположим, что верно в), тогда верно 0% ответов ⇒ в) неверно. Противоречие.

~~Предположим, что верно только а) или только б) тогда в этом случае верно 50% ответов ⇒ верно 2 ответа. Противоречие~~

~~Предположим, что верно а) и б) или б) и г), тогда одновременно верен и один ответ и два ответа.~~

~~Противоречие.~~

Пусть верно б), тогда верен лишь один ответ. Те, б) верно тогда и только тогда, когда тест допускает лишь одиночный выбор ответа. Но у нас допускается множественный

выбор ответов $\Rightarrow$ в общем случае это неверно.
Пусть верно а) или г), тогда верна половина ответов, не также возможно лишь когда верно и а), и г)
В итоге стоит выбрать а) и г)

№2

а) Введём обозначения:

$P(x)$: x - птица

$Q(x)$: x имеет перья

$R(x)$: x - зверь.

„Только у птиц есть перья":

$\forall x \; P(x) \to Q(x) \; \wedge \; \forall x \; Q(x) \to P(x)$

Иначе: $\forall x \; P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ (1)

„Ни один зверь не птица"

$\forall x \; R(x) \to \neg P(x)$ (2)

„Следовательно, все звери лишены перьев":

$\forall x \; R(x) \to \neg Q(x)$ (3)

Нам нужно доказать, что из (1) и (2) следует (3):

(2): $R(x) \to \neg P(x) \underset{(1)}{\Leftrightarrow} R(x) \to \neg Q(x)$

Значит, оно верно.

б) Введём обозначение:

$M(x)$: x - математик

$S(x)$: x может решить задачу

a - Павел

„Каждый математик может решить задачу, если её может кто-то решить":

$\exists x \; S(x) \to \forall y (M(y) \to S(y))$ (1)

„Павел - математик, но решить задачу не может"

$M(a) \wedge \neg S(a)$ (2)

„Следовательно, задачу решить нельзя"

$\forall x \; \neg S(x)$ (3)

Нам нужно доказать, что из (1) и (2) следует (3):

Из (2) $\Rightarrow$ $M(a) = 1$ и $S(a) = 0$

Пусть (3) - ложно, тогда $\exists x \; S(x) = 1$

Пусть $y = a$ ~~тогда~~, тогда (1) примет вид: $1 \to (M(a) \to S(a))$; $1 \to (1 \to 0)$;

$1 \to 0 \equiv 0$. Но оно по условию истинно. Получим противоречие $\Rightarrow$ (3) истинно. Значит б) верно

в) Введём обозначения:

$M(x)$: x - математик ; a - Павел

$S(x)$: x может решить задачу

„Любой, кто может решить эту задачу, - математик"

$\forall x \; S(x) \to M(x)$ (1)

„Павел не может решить задачу"

$\neg S(a) \Leftrightarrow S(a) = 0$ (2)

„Павел не математик"

$\neg M(a) \Leftrightarrow M(a) = 0$ (3)

(1): пусть $x = a$: $S(a) \to M(a)$

$0 \to M(a)$ - заметим, что тут мы не можем что-либо сказать об истинности $M(a) \Rightarrow$ в) ложь (тк из (1) и (2) $\not\Rightarrow$ (3))

г) Введём обозначения:

$M(x)$: x - математик

$S(x)$: x может решить задачу

Перепишем утверждение:

$$((\forall x \; S(x) \to M(x)) \wedge (\forall x \; M(x) \to \neg S(x)))$$

$$\to (\forall x \; \neg S(x)) \; (*)$$

Предположим, что (*) ложно, тогда:

$$(\forall x \ \neg S(x)) = 0 \Leftrightarrow \exists x \ S(x)$$

Пусть этот существующий $x = y$, т.е.:

$S(y) = 1$

Рассмотрим:

$\forall x \ S(x) \to M(x)$, пусть $x = y$:

$S(y) \to M(y)$

$1 \to M(y) \Rightarrow M(y) = 1$ (тк посылка импликации в нашем случае должна быть истинна)

Рассмотрим:

$\forall x \ M(x) \to \neg S(x)$, пусть $x = y$:

$M(y) \to \neg S(y)$

$1 \to 0 \equiv 0$ – противоречие, (*) будет истинно.

Значит, 2) истинно.