UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Centro de Ciências, Tecnologia e Saúde
Programa de Pós-Graduação em Energia e Sustentabilidade

ANÁLISE INTEGRAL DO MOVIMENTO DOS FLUIDOS

Fenômenos de Transporte – Prof. Thiago Dutra

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Centro de Ciências, Tecnologia e Saúde
Programa de Pós-Graduação em Energia e Sustentabilidade

ANÁLISE INTEGRAL DO MOVIMENTO DOS FLUIDOS

Sistema x Volume de Controle

Análise de sistema: Difícil identificar uma porção de fluido e acompanhá-la no escoamento. Além disso, geralmente estamos interessados em analisar o efeito do movimento do fluido sobre algum dispositivo/estrutura.

Assim, é mais conveniente aplicar as equações governantes de um escoamento a um **volume de controle** definido no espaço e analisar o que ocorre nessa região.

Equações governantes:

- Conservação da massa
- Conservação da quantidade de movimento
- Conservação da energia
- 2ª lei da termodinâmica

Sistema x Volume de Controle

Para um sistema, as leis da conservação da massa e da quantidade de movimento linear (2ª Lei de Newton) são:

- Conservação da massa (M)

$$\left.\frac{dM}{dt}\right)_{\text{system}} = 0 \qquad M_{\text{system}} = \int_{M(\text{system})} dm = \int_{V\!\!\!\!-(\text{system})} \rho \, dV\!\!\!\!- \qquad [1]$$

- Quantidade de movimento linear (P)

$$\vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{\text{system}} \qquad \vec{P}_{\text{system}} = \int_{M(\text{system})} \vec{V} \, dm = \int_{V\!\!\!\!-(\text{system})} \vec{V} \rho \, dV\!\!\!\!- \qquad [2]$$

Sistema x Volume de Controle

Para um sistema, as leis da conservação da massa e da quantidade de movimento linear (2ª Lei de Newton) são:

- Conservação da massa (M)

$$\left.\frac{dM}{dt}\right)_{\text{system}} = 0 \qquad M_{\text{system}} = \int_{M(\text{system})} dm = \int_{\forall(\text{system})} \rho \, d\forall \qquad [1]$$

- Quantidade de movimento linear (P)

$$\vec{F} = \left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{\text{system}} \qquad \vec{P}_{\text{system}} = \int_{M(\text{system})} \vec{V} \, dm = \int_{\forall(\text{system})} \vec{V} \rho \, d\forall \qquad [2]$$

De forma genérica:

$$N_{\text{system}} = \int_{M(\text{system})} \eta \, dm = \int_{\forall(\text{system})} \eta \, \rho \, d\forall$$

N: propriedade extensiva (depende da massa)

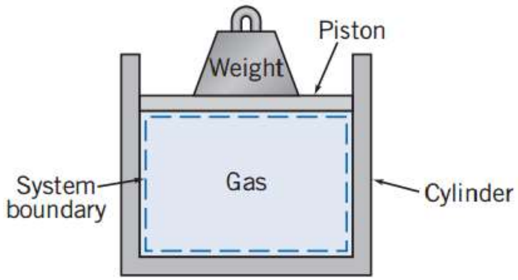
η: propriedade intensiva (independe da massa)

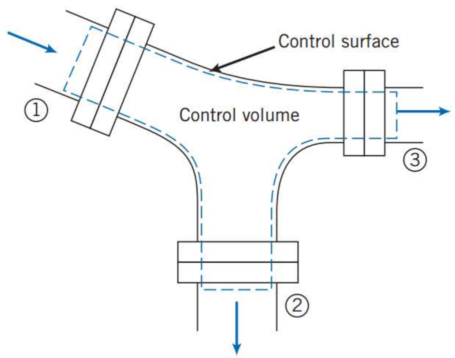
Sistema x Volume de Controle

A principal tarefa ao converter a abordagem de sistema para volume de controle (∀C) é expressar a taxa de variação da **propriedade extensiva N** de um sistema em termos de variações em um volume de controle.

Como na abordagem de ∀C há vazão de massa atravessando as fronteiras, a variação de N no ∀C vai depender desse efeito.

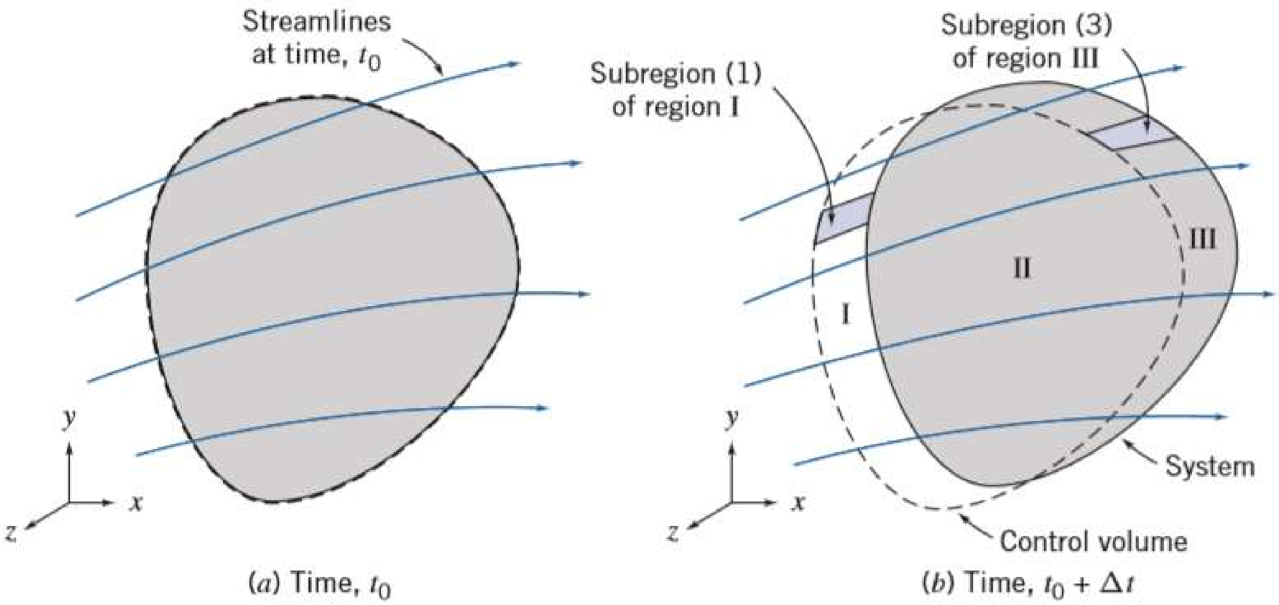
Portanto, devemos obter uma relação matemática que permita converter facilmente uma abordagem na outra.





Teorema do Transporte de Reynolds (TTR)

Imaginemos um sistema e um ∀C que coincidem em t = t0:



Em t = t0, as fronteiras do sistema e do ∀C coincidem.

Em t = t0 + Δt, o sistema ocupa as regiões II e III.

O sistema foi escolhido de modo que a massa na região I entra no ∀C durante Δt e a massa na região III deixa o ∀C no mesmo Δt.

Teorema do Transporte de Reynolds (TTR)

Podemos escrever:

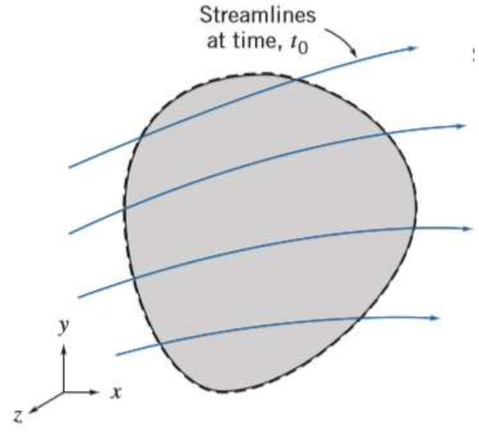
$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{system}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_s)_{t_0+\Delta t} - N_s)_{t_0}}{\Delta t} \qquad [3]$$

onde o valor de N do sistema (N_S) pode ser avaliado nos instantes t0 e t0 + dt como:

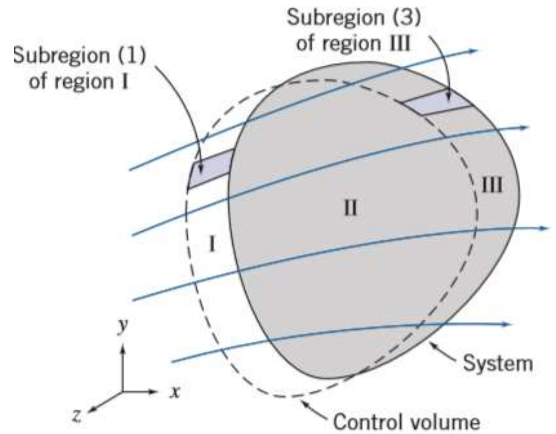
$$N_s)_{t_0+\Delta t} = (N_{\text{II}} + N_{\text{III}})_{t_0+\Delta t} = (N_{\text{CV}} - N_{\text{I}} + N_{\text{III}})_{t_0+\Delta t} \qquad [4]$$

$$N_s)_{t_0} = (N_{\text{CV}})_{t_0} \qquad [5]$$

Substituindo [4] e [5] em [3], obtém-se:



(a) Time, t_0



(b) Time, $t_0 + \Delta t$

Teorema do Transporte de Reynolds (TTR)

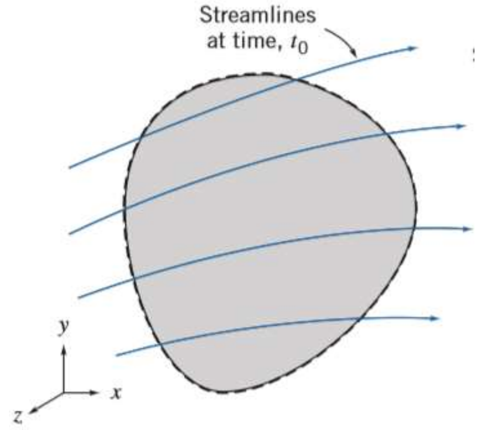
$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_s = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(N_{CV} - N_I + N_{III})_{t_0+\Delta t} - N_{CV})_{t_0}}{\Delta t}$$

que pode ser escrita como:

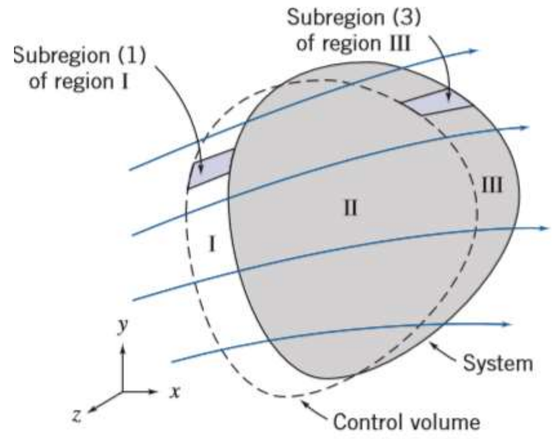
$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_s = \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{CV})_{t_0+\Delta t} - N_{CV})_{t_0}}{\Delta t}}_{①} + \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{III})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}}_{②} - \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_I)_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}}_{③} \qquad [6]$$

Agora, devemos analisar cada um dos três termos. O termo (1) pode ser escrito da seguinte forma:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{CV})_{t_0+\Delta t} - N_{CV})_{t_0}}{\Delta t} = \frac{\partial N_{CV}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \eta \, \rho \, d\forall$$



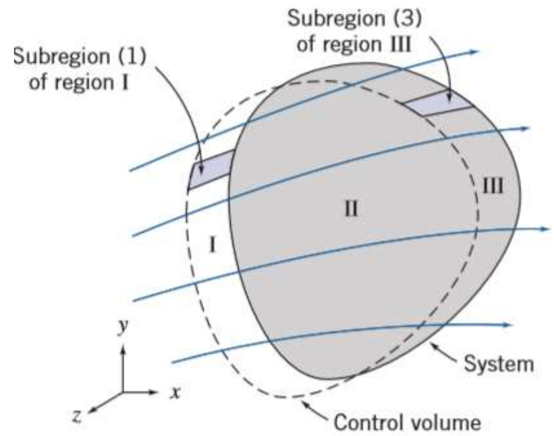
(a) Time, t_0



(b) Time, $t_0 + \Delta t$

Teorema do Transporte de Reynolds (TTR)

O termo (2) é avaliado a partir de uma expressão para $N_{III}|_{t_0+\Delta t}$. Fazendo um exame ampliado da região III (sub-região 3):



(*b*) Time, $t_0 + \Delta t$

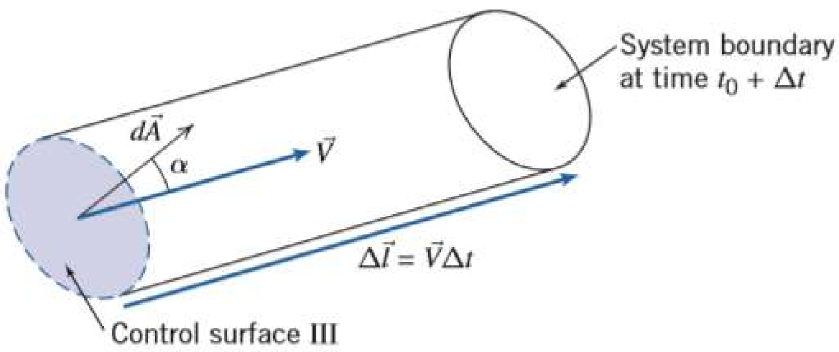
Termo 2

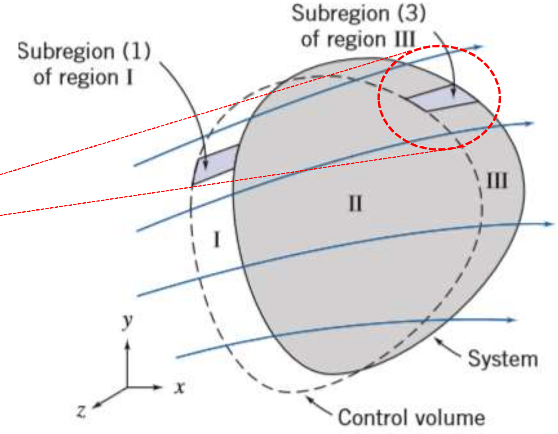
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{III})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}$$

2

Teorema do Transporte de Reynolds (TTR)

O termo (2) é avaliado a partir de uma expressão para $N_{III}|_{t_0+\Delta t}$. Fazendo um exame ampliado da região III (sub-região 3):





(b) Time, $t_0 + \Delta t$

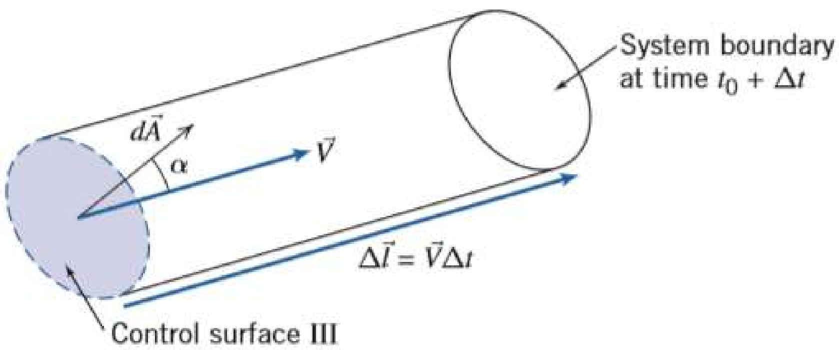
Termo 2

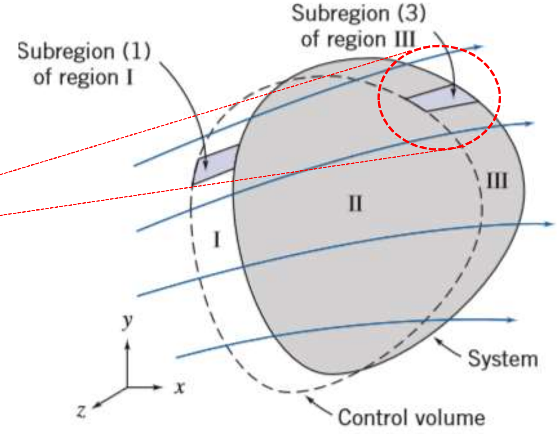
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{III})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}$$

②

Teorema do Transporte de Reynolds (TTR)

O termo (2) é avaliado a partir de uma expressão para $N_{III}|_{t_0+\Delta t}$. Fazendo um exame ampliado da região III (sub-região 3):





(b) Time, $t_0 + \Delta t$

Termo 2

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{III})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}$$

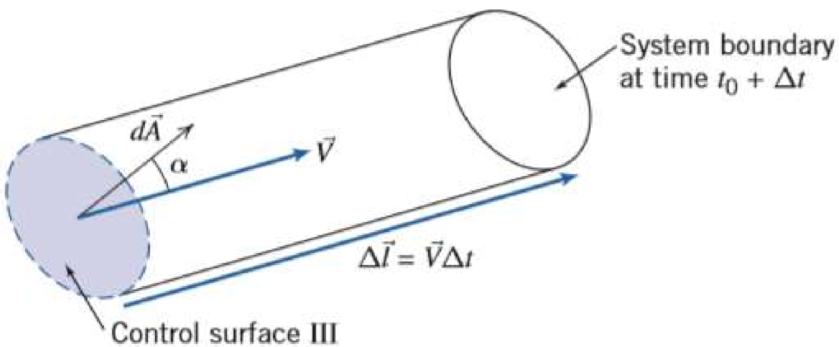
2

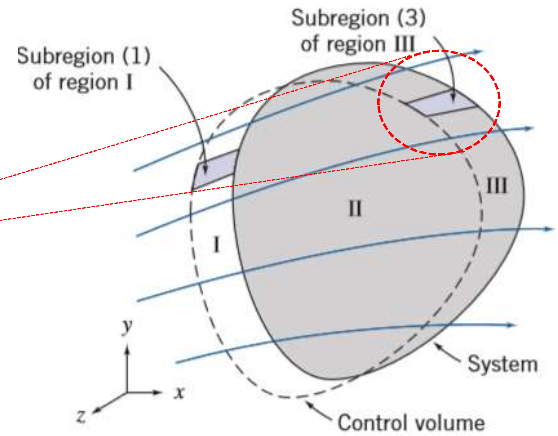
Portanto, podemos escrever:

$$dN_{III})_{t_0+\Delta t} = (\eta\, \rho\, d\forall)_{t_0+\Delta t}$$

Teorema do Transporte de Reynolds (TTR)

O termo (2) é avaliado a partir de uma expressão para $N_{III}|_{t_0+\Delta t}$. Fazendo um exame ampliado da região III (sub-região 3):





(b) Time, $t_0 + \Delta t$

Termo 2

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{III})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}$$

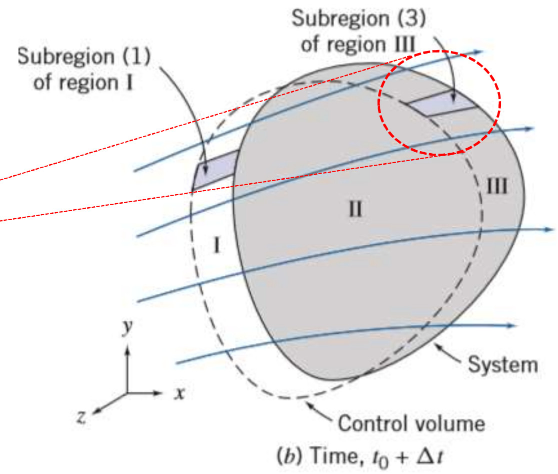
②

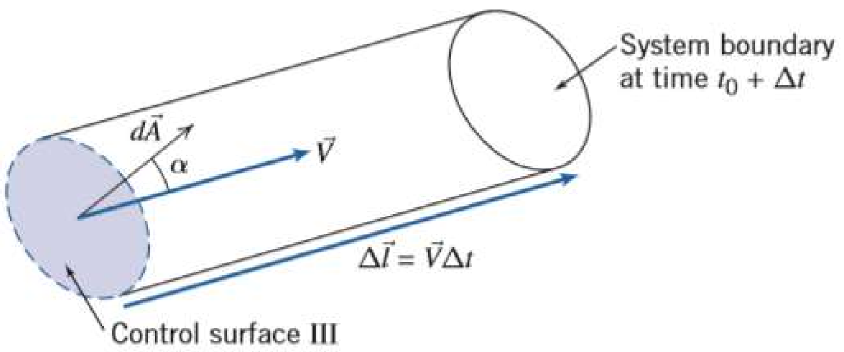
Portanto, podemos escrever:

$$dN_{III})_{t_0+\Delta t} = (\eta\,\rho\, d\forall)_{t_0+\Delta t} \longrightarrow dN_{III})_{t_0+\Delta t} = \eta\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}\,\Delta t$$

Teorema do Transporte de Reynolds (TTR)

O termo (2) é avaliado a partir de uma expressão para $N_{III}|_{t_0+\Delta t}$. Fazendo um exame ampliado da região III (sub-região 3):





Portanto, podemos escrever:

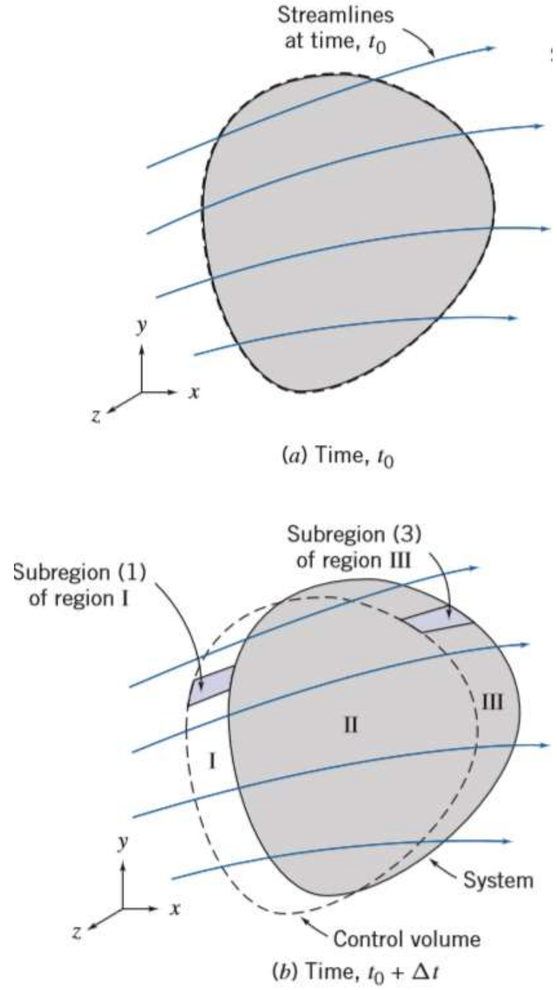
$$dN_{\mathrm{III}})_{t_0+\Delta t} = (\eta\,\rho\,d\mathcal{V})_{t_0+\Delta t} \longrightarrow dN_{\mathrm{III}})_{t_0+\Delta t} = \eta\,\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}\,\Delta t \longrightarrow \lim_{\Delta t\to 0}\frac{N_{\mathrm{III}})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} = \int_{\mathrm{CS_{III}}} \eta\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}$$

Teorema do Transporte de Reynolds (TTR)

O termo (3) da equação [6] pode ser obtido de forma análoga, resultando em:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{\text{I}})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} = -\int_{\text{CS}_1} \eta\, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

onde o sinal negativo é adotado para cancelar o sinal negativo do produto escalar (cosα >90°), que acarretaria em um volume negativo (fisicamente inconsistente).



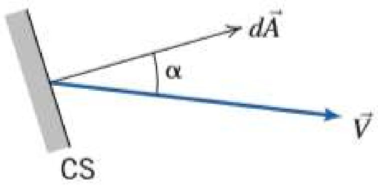
Teorema do Transporte de Reynolds (TTR)

O termo (3) da equação [6] pode ser obtido de forma análoga, resultando em:

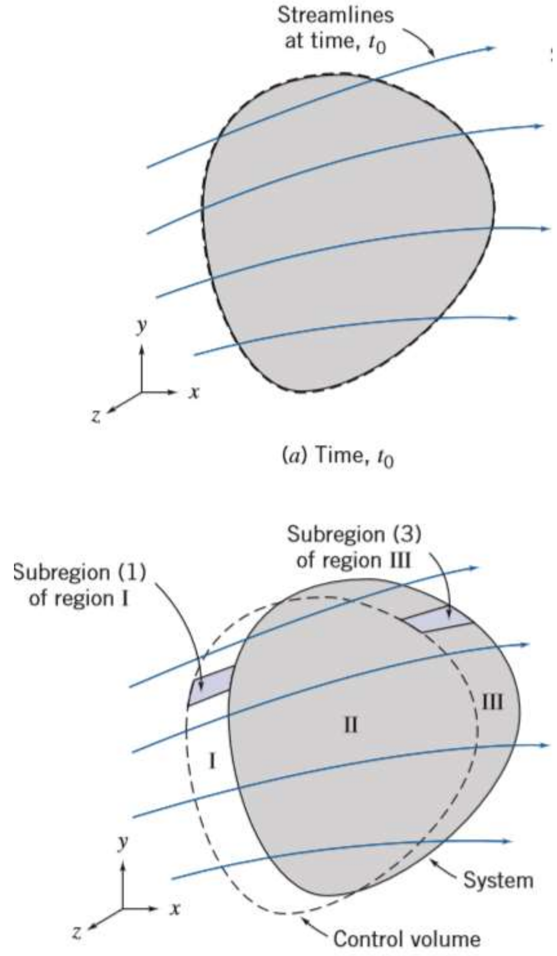
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{\mathrm{I}})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t} = -\int_{\mathrm{CS}_1} \eta\, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

onde o sinal negativo é adotado para cancelar o sinal negativo do produto escalar (cosα >90°), que acarretaria em um volume negativo (fisicamente inconsistente).

$$\vec{V} \cdot d\vec{A} = \frac{\Delta l \cos \alpha}{\Delta t} dA$$



$\vec{V} \cdot d\vec{A} = VdA \cos \alpha$



(a) Time, t_0

(b) Time, $t_0 + \Delta t$

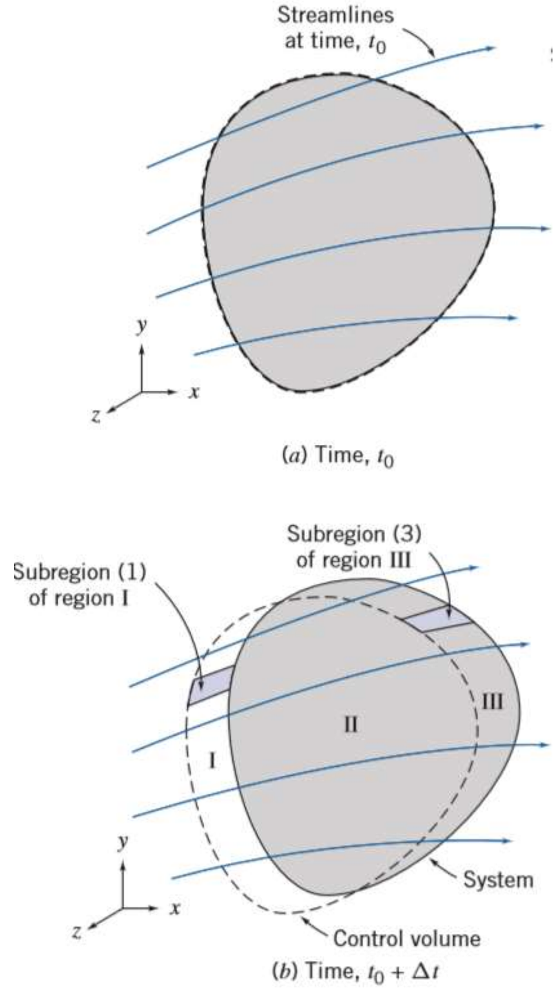
Teorema do Transporte de Reynolds (TTR)

Reescrevendo a equação [6]:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_s = \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{\mathrm{CV}})_{t_0+\Delta t} - N_{\mathrm{CV}})_{t_0}}{\Delta t}}_{①} + \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{\mathrm{III}})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}}_{②} - \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{\mathrm{I}})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}}_{③}$$

e substituindo os termos (1), (2) e (3):

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{system}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{CV}} \eta\, \rho\, dV\!\!\!\!/ + \int_{\mathrm{CS_I}} \eta\, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{\mathrm{CS_{III}}} \eta\, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$



Teorema do Transporte de Reynolds (TTR)

Reescrevendo a equação [6]:

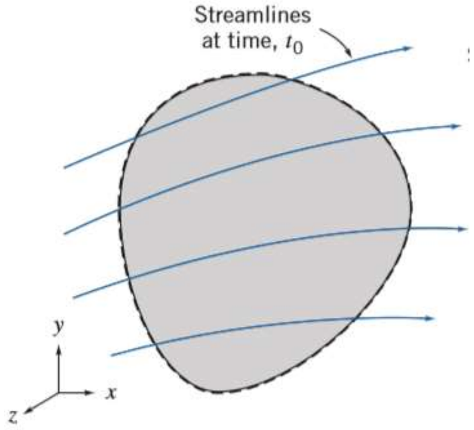
$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_s = \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{CV})_{t_0+\Delta t} - N_{CV})_{t_0}}{\Delta t}}_{①} + \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{III})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}}_{②} - \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N_{I})_{t_0+\Delta t}}{\Delta t}}_{③}$$

e substituindo os termos (1), (2) e (3):

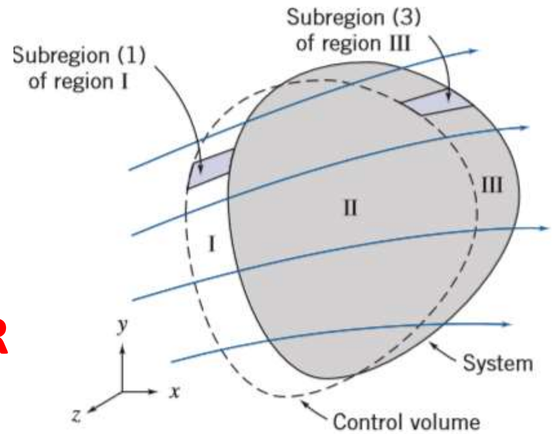
$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{system}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \eta\, \rho\, d\mathbf{V\!\!\!\!-} + \int_{CS_I} \eta\, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} + \int_{CS_{III}} \eta\, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

que corresponde a:

$$\boxed{\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{system}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \eta\, \rho\, d\mathbf{V\!\!\!\!-} + \int_{CS} \eta\, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}}$$ **TTR**



(a) Time, t_0



(b) Time, $t_0 + \Delta t$

Teorema do Transporte de Reynolds (TTR)

Interpretação física dos termos:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_s$$

Taxa de variação temporal de uma propriedade extensiva N do sistema.

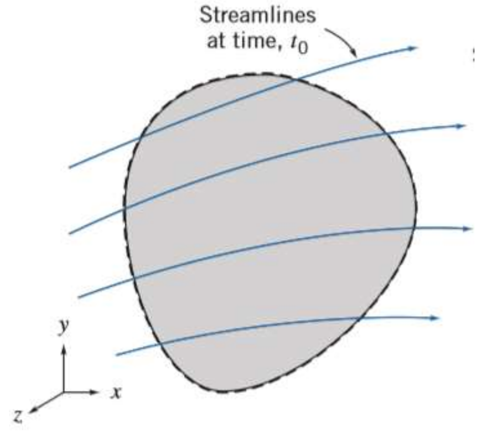
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{CV}} \eta\, \rho\, d\forall$$

Taxa de variação temporal de uma propriedade extensiva N no ∀C.

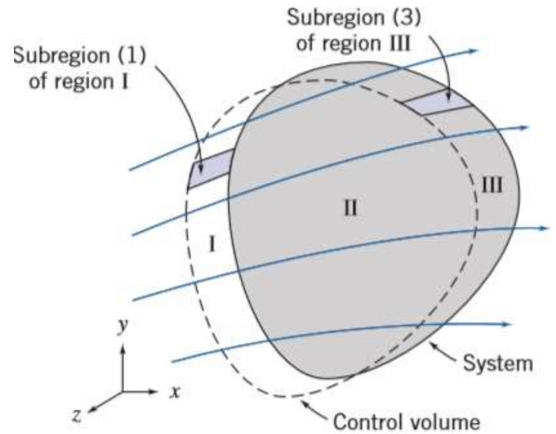
$$\int_{\mathrm{CS}} \eta\, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Fluxo líquido da propriedade N através das superfícies de controle.

Note que a velocidade é medida em relação à superfície de controle.



(a) Time, t_0



(b) Time, $t_0 + \Delta t$

Conservação da Massa

A conservação da massa declara que:

$$\left.\frac{dM}{dt}\right)_{\text{system}} = 0 \qquad M_{\text{system}} = \int_{M(\text{system})} dm = \int_{\forall(\text{system})} \rho\, d\forall$$

E o TTE é descrito por:

$$\left.\frac{dN}{dt}\right)_{\text{system}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{CV}} \eta\, \rho\, d\forall + \int_{\text{CS}} \eta\, \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Em uma simples inspeção, nota-se que N = M e η = 1. Logo:

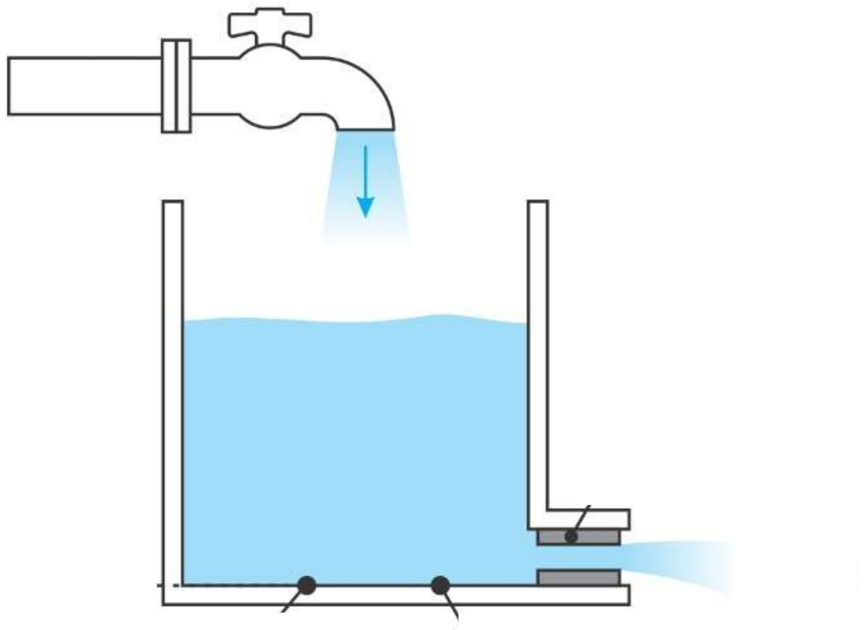
$$\left.\frac{dM}{dt}\right)_{\text{system}} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{CV}} \rho\, d\forall + \int_{\text{CS}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{CV}} \rho\, d\forall + \int_{\text{CS}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0}$$

Conservação da Massa

Interpretação física: A conservação da massa exige que a variação temporal da massa no interior do ∀C corresponda à vazão mássica líquida através das fronteiras do ∀C.

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{CV}} \rho \, d\forall + \int_{\text{CS}} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$



Conservação da Massa

Escoamento incompressível: Densidade constante (ρ = cte)

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{CV}} d\maltese + \rho \int_{\mathrm{CS}} \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \longrightarrow \frac{\partial \maltese}{\partial t} + \int_{\mathrm{CS}} \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

Se o volume de controle for não-deformável:

$$\boxed{\int_{\mathrm{CS}} \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0}$$

A vazão volumétrica (Q) líquida que atravessa as superficies de controle é nula.

onde

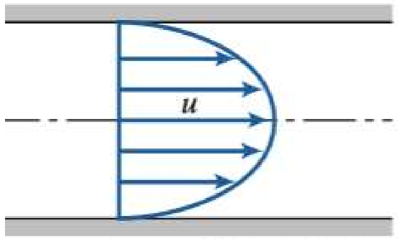
$$Q = \int_A \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad [\mathrm{m^3/s}]$$

Conservação da Massa

Velocidade média em uma seção ($\bar{V}$):

A magnitude da velocidade média em uma seção do escoamento é definida como:

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{1}{A}\int_A \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad \text{[m/s]}$$



Escoamento permanente compressível:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho \, d\forall + \int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0 \longrightarrow \int_{CS} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\dot{m} = \int_A \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

A vazão mássica ($\dot{m}$ - kg/s) líquida que atravessa as superficies de controle é nula.

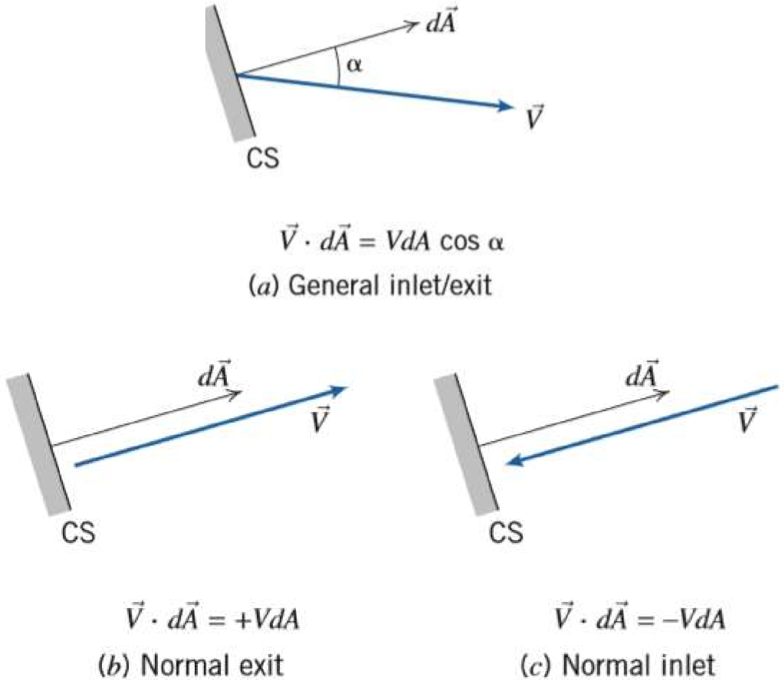
Conservação da Massa

Escoamento uniforme em uma seção:

Densidade e velocidade não variam na(s) seção(ões) de análise. Assim:

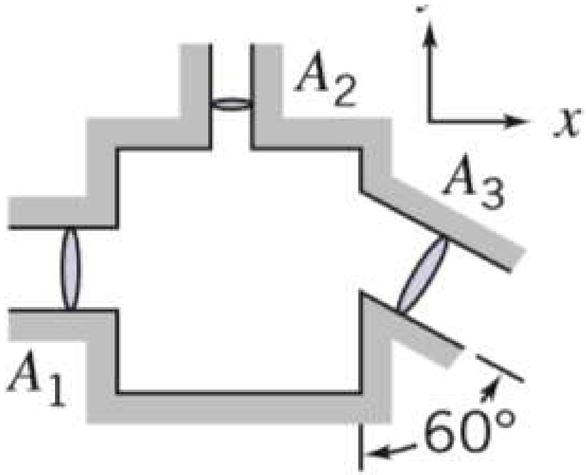
$$\int_{CS} \rho\vec{V}\cdot d\vec{A} = \sum_{CS} \rho\vec{V}\cdot\vec{A}$$

Deve-se atentar para o produto escalar:



Conservação da Massa

Exemplo: Um fluido com massa específica de 1050 kg/m³ flui em regime permanente através da caixa retangular mostrada. Dados A1 = 0,05 m²; A2 = 0,01 m²; A3 = 0,06 m² **V1** = 4**i** m/s e **V2** = -8**j** m/s. Determine a velocidade **V3**.



Conservação da Massa

Exemplo: Um tanque, com volume de 0,05 m^3, contém ar a 800 kPa (absoluta) e 15°C. Em t = 0, o ar começa a escapar do tanque através de uma válvula com área de escoamento de 65 mm^2. O ar passando através da válvula tem velocidade de 300 m/s e massa específica de 6 kg/m^3. Determine a taxa instantânea de variação de massa específica do ar no tanque em t = 0.