



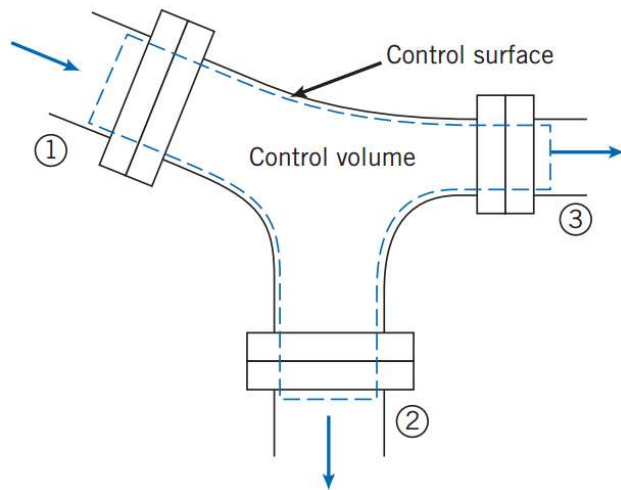
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Campus Araranguá - ARA
Departamento de Energia e Sustentabilidade

UNIDADE 5

ANÁLISE DIFERENCIAL DO MOVIMENTO DOS FLUIDOS

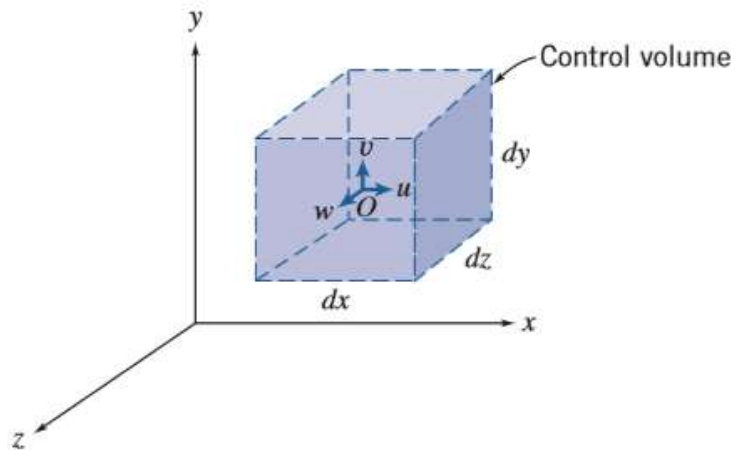
Formulação Integral x Formulação Diferencial

- **Formulação integral:** útil quando o interesse é analisar o comportamento geral de um campo de escoamento ou o efeito de/sobre um dispositivo.
- **Formulação diferencial:** análise detalhada, ponto a ponto, em que aplicamos as equações do movimento.



Conservação da massa

Considere o volume infinitesimal de fluido $dV = dxdydz$



- Massa específica ρ no centro O (x,y,z) do VC.
- Velocidade no centro O dada por:

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$

- Avaliando as propriedades nas faces direita e esquerda:

$$\rho_R = \rho \Big|_{x+dx/2} = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(\frac{dx}{2} \right)$$

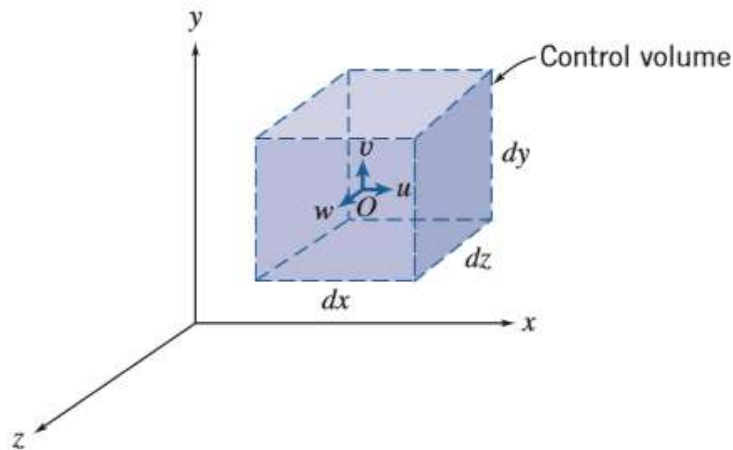
$$u_R = u \Big|_{x+dx/2} = u + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{dx}{2} \right)$$

$$\rho_L = \rho \Big|_{x-dx/2} = \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(-\frac{dx}{2} \right) = \rho - \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(\frac{dx}{2} \right)$$

$$u_L = u \Big|_{x-dx/2} = u - \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{dx}{2} \right)$$

Conservação da massa

A conservação da massa enuncia que:



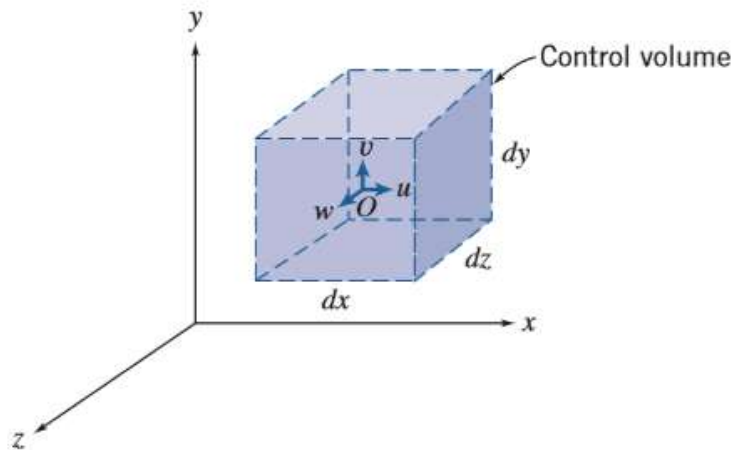
$$\underbrace{\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}}_{\text{Fluxo de massa líquido pelas SC's}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV}_{\text{Taxa de variação de massa no VC}} = 0$$

- O primeiro termo é avaliado considerando o fluxo em cada uma das 6 faces do VC.

$$(\rho u A)_R = \rho u A \Big|_{x+dx/2} = \left[\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(\frac{dx}{2} \right) \right] \left[u + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{dx}{2} \right) \right] dy dz = \rho u dy dz + \frac{1}{2} \left[u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx dy dz$$

$$(\rho u A)_L = \rho u A \Big|_{x-dx/2} = - \left[\rho - \frac{\partial \rho}{\partial x} \left(\frac{dx}{2} \right) \right] \left[u - \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{dx}{2} \right) \right] dy dz = -\rho u dy dz + \frac{1}{2} \left[u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx dy dz$$

Conservação da massa

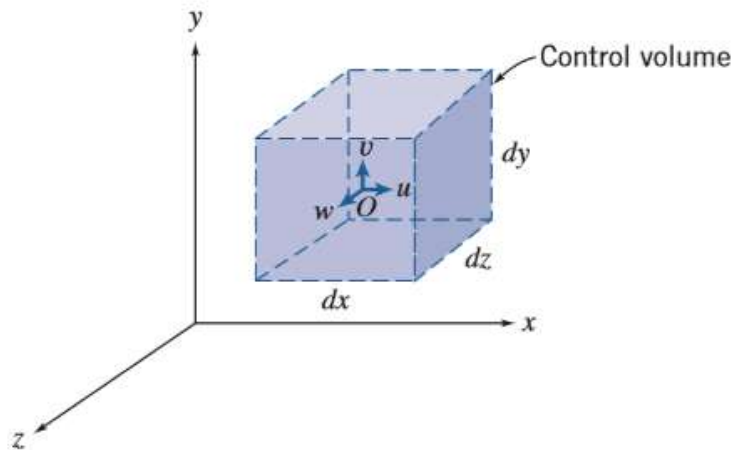


$$\underbrace{\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}}_{\text{Fluxo de massa líquido pelas SC's}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV}_{\text{Taxa de variação de massa no VC}} = 0$$

Somando as expressões:

$$\rho u dy dz + \frac{1}{2} \left[u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx dy dz - \rho u dy dz + \frac{1}{2} \left[u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx dy dz = \left[u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx dy dz = \boxed{\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz}$$

Conservação da massa



$$\underbrace{\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}}_{\text{Fluxo de massa líquido pelas SC's}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV}_{\text{Taxa de variação de massa no VC}} = 0$$

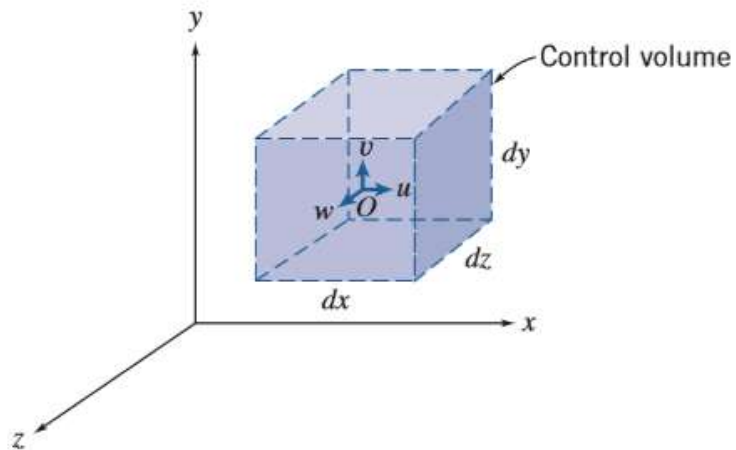
Replicando o procedimento para os planos +y, -y, +z e -z:

$$\begin{array}{cc} \text{+y} & \text{-y} \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz & \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz \end{array}$$

Somando os fluxos:

$$\longrightarrow \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz$$

Conservação da massa



$$\underbrace{\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}}_{\text{Fluxo de massa líquido pelas SC's}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV}_{\text{Taxa de variação de massa no VC}} = 0$$

equivalentes

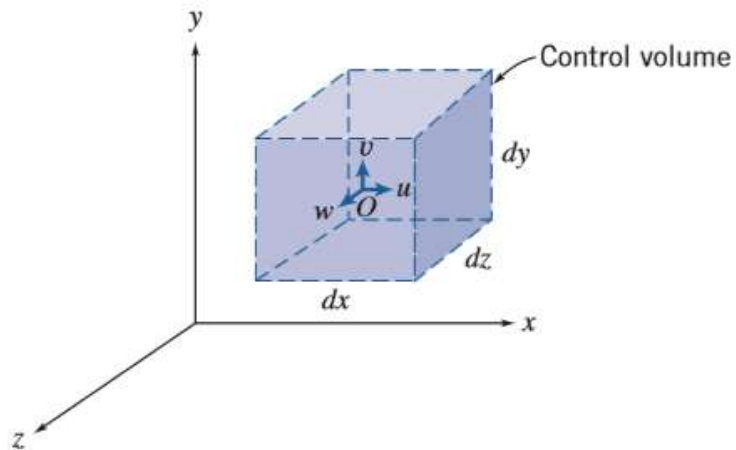
Replicando o procedimento para os planos +y, -y, +z e -z:

$$\begin{array}{cc} +y & -y \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dy dz & \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz \end{array}$$

Somando os fluxos:

$$\longrightarrow \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz$$

Conservação da massa



equivalentes

$$\left\{ \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \right\} + \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV \right\} = 0$$

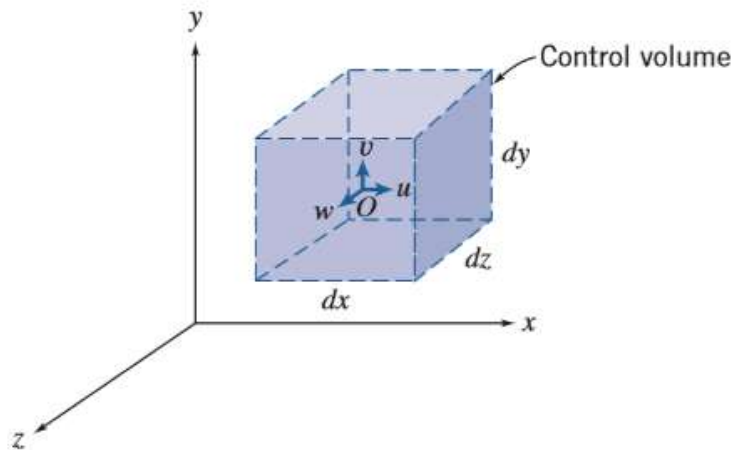
Fluxo de massa líquido pelas SC's Taxa de variação de massa no VC

A massa dentro do VC pode ser calculada como $\rho dx dy dz$. Logo, a sua taxa de variação é:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$$

equivalentes

Conservação da massa



$$\underbrace{\int_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}}_{\text{Fluxo de massa líquido pelas SC's}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV}_{\text{Taxa de variação de massa no VC}} = 0$$

A massa dentro do VC pode ser calculada como $\rho dx dy dz$. Logo, a sua taxa de variação é:

Somando com o termo anterior:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz \rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0}$$

CM em coord. cartesianas.
Eq. da continuidade

Conservação da massa

Aplicando o operador vetorial $\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$, podemos escrever:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$$

Conservação da massa

Aplicando o operador vetorial $\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$, podemos escrever:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$$

Para escoamento incompressível (ρ constante):

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \xrightarrow{\text{plano xy}} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Aumento de u em x é
acompanhado de redução
de v em y .

Conservação da massa

Aplicando o operador vetorial $\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$, podemos escrever:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$$

Para escoamento incompressível (ρ constante):

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \xrightarrow{\text{plano xy}} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Para escoamento permanente:

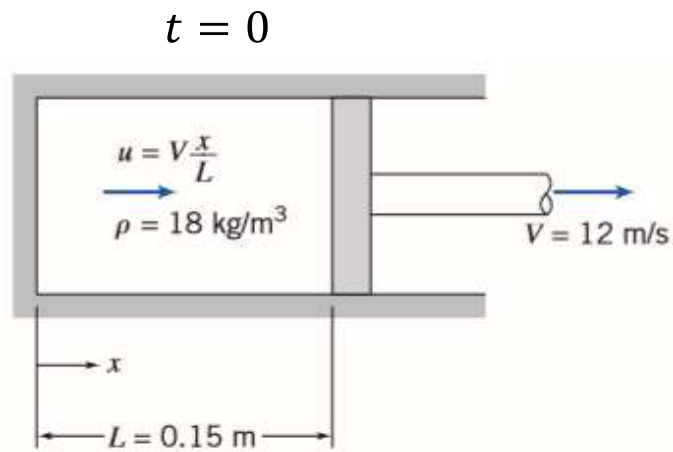
$$\nabla \cdot \rho \vec{V} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Aumento de u em x é
acompanhado de redução
de v em y .

Conservação da massa

Exemplo 5.2 (5ª ed.): Um amortecedor a gás na suspensão de um automóvel comporta-se como um dispositivo pistão-cilindro. Num instante em que o pistão está $L = 0,15$ m afastado da extremidade fechada do cilindro, a massa específica do gás é uniforme $\rho = 18$ kg/m³ e o pistão começa a mover-se, afastando-se da extremidade fechada do cilindro, com $V = 12$ m/s. O movimento do gás é unidimensional e proporcional à distância em relação à extremidade fechada; varia linearmente de zero, na extremidade, a $u = V$ no pistão. Avalie a taxa de variação da massa específica do gás nesse instante. Obtenha uma expressão para a massa específica média como função do tempo.

Conservação da massa



Hipótese:

- Velocidade u uniforme em cada seção.

Equação Continuidade: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0$

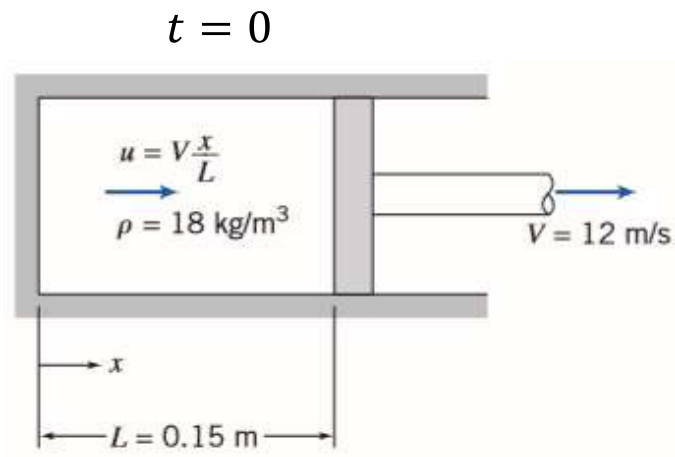
Como $\vec{V} = u\hat{i} = u(x) \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

Logo, a Eq. da continuidade para esse problema fica: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u}{\partial x}$

Como o interesse é na massa específica média no interior do cilindro, $\rho \approx \rho(t)$

Como $u = u(x)$, temos: $\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{du}{dx}$

Conservação da massa

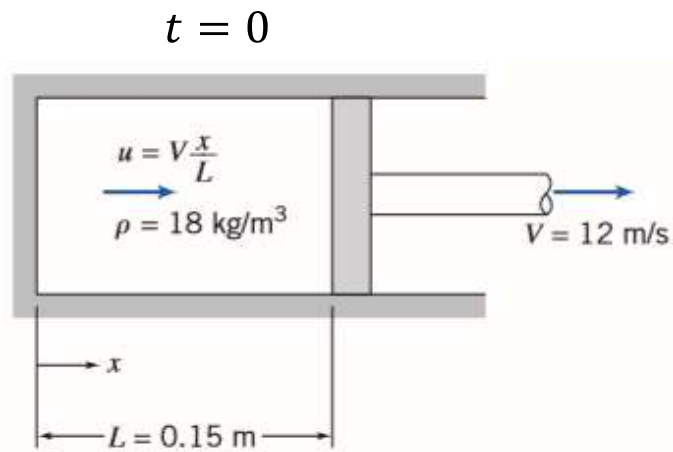


Substituindo a relação para u e separando variáveis:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{du}{dx} \longrightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{Vx}{L} \right) dt = -\left(\frac{V}{L} \right) dt$$

onde $L = L_0 + Vt \longrightarrow \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -\int_0^t \left(\frac{V}{L_0 + Vt} \right) dt$

Conservação da massa



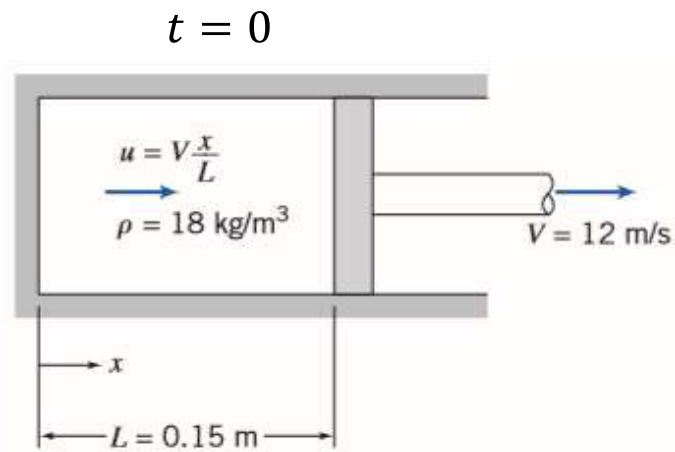
Substituindo a relação para u e separando variáveis:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{du}{dx} \longrightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{Vx}{L} \right) dt = -\left(\frac{V}{L} \right) dt$$

onde $L = L_0 + Vt \longrightarrow \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -\int_0^t \left(\frac{V}{L_0 + Vt} \right) dt$

$$\ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) = \ln \left(\frac{L_0}{L_0 + Vt} \right) \longrightarrow \rho = \rho_0 \frac{L_0}{L_0 + Vt} \longrightarrow \boxed{\rho = 18 \frac{0,15}{0,15 + 12t}}$$

Conservação da massa



Substituindo a relação para u e separando variáveis:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{du}{dx} \longrightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{Vx}{L} \right) dt = -\left(\frac{V}{L} \right) dt$$

onde $L = L_0 + Vt \longrightarrow \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -\int_0^t \left(\frac{V}{L_0 + Vt} \right) dt$

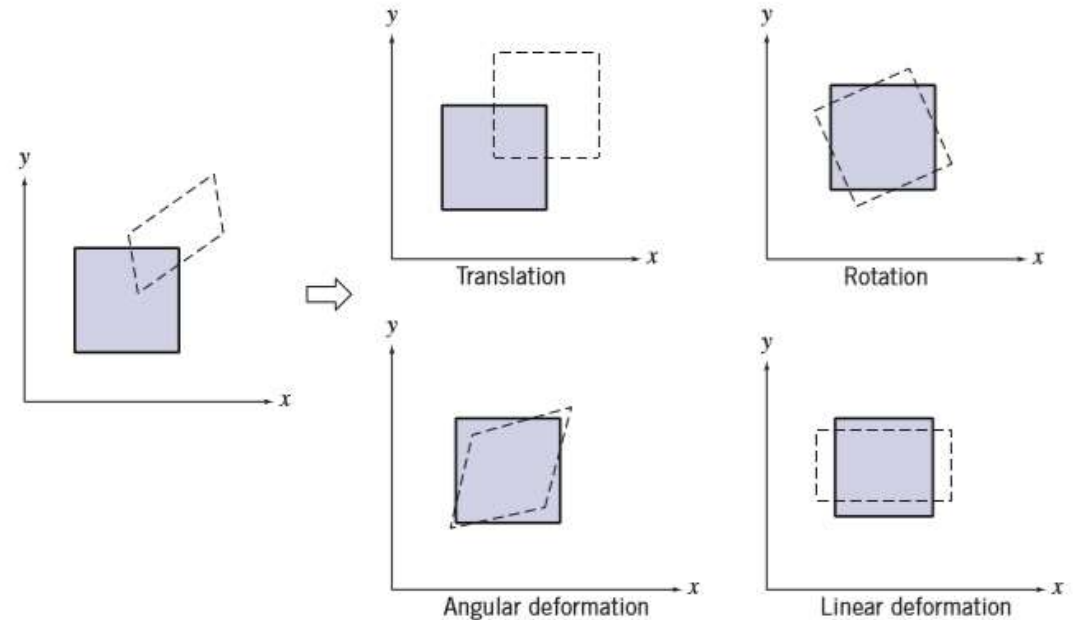
$$\ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) = \ln \left(\frac{L_0}{L_0 + Vt} \right) \longrightarrow \rho = \rho_0 \frac{L_0}{L_0 + Vt} \longrightarrow \boxed{\rho = 18 \frac{0,15}{0,15 + 12t}}$$

No instante inicial:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho_0 \frac{d}{dx} \left(\frac{Vx}{L} \right) = -\rho_0 \left(\frac{V}{L_0} \right) = -18 * \frac{12}{0,15} = \boxed{-1440 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \cdot \text{s}} \right]}$$

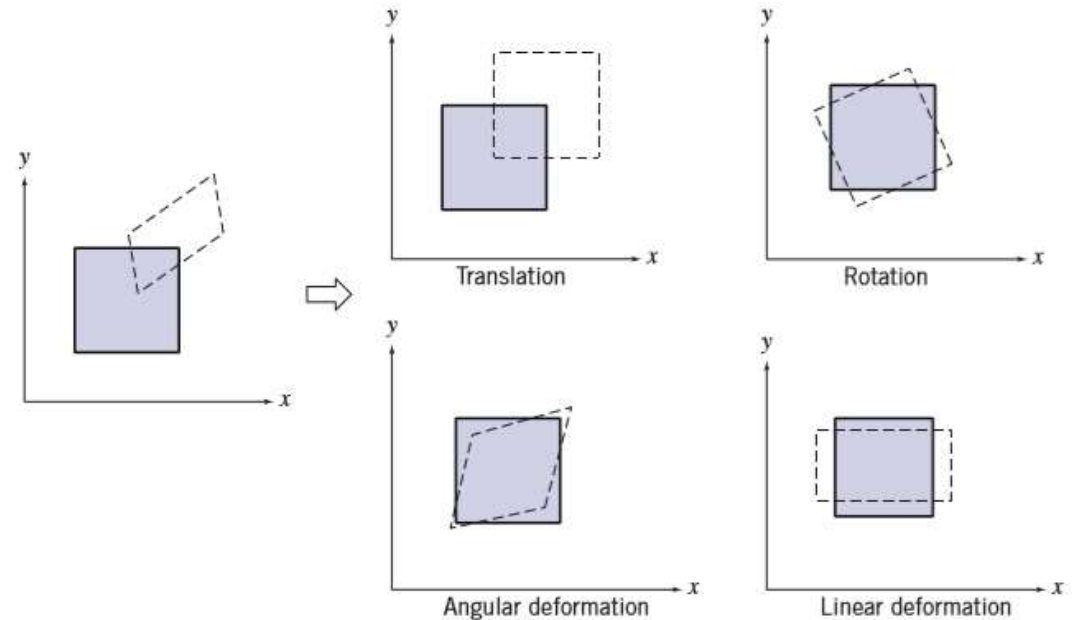
Cinemática dos fluidos

- Antes de formular o efeito das forças sobre o movimento dos fluidos (2ª lei de Newton), é importante analisar as características do movimento de um elemento de fluido infinitesimal em um escoamento.
- À medida que um elemento fluido se move, ele pode sofrer:
 - Translação
 - Rotação
 - Deformação angular
 - Deformação linear



Cinemática dos fluidos

- Antes de formular o efeito das forças sobre o movimento dos fluidos (2ª lei de Newton), é importante analisar as características do movimento de um elemento de fluido infinitesimal em um escoamento.
- À medida que um elemento fluido se move, ele pode sofrer:
 - Translação
 - Rotação
 - Deformação angular
 - Deformação linear



Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

- Ao apresentar a teoria do contínuo, mostramos que o campo de escoamento pode ser descrito em função da posição espacial e do tempo:

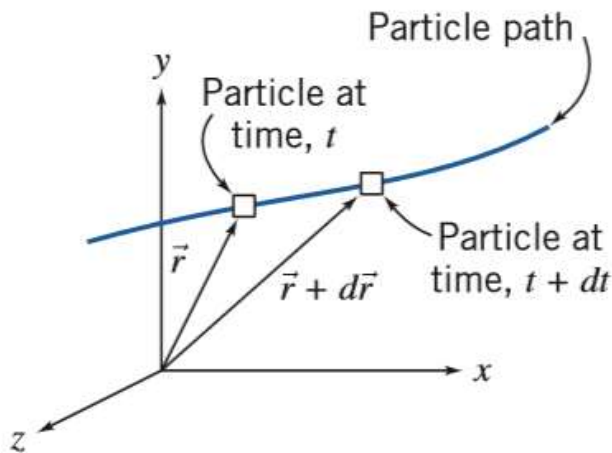
$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t) \quad \rho = \rho(x, y, z, t)$$

- Porém, se estivermos interessados em avaliar a aceleração de uma partícula à medida que ela se move no escoamento, devemos fazer um exercício adicional.
- Retemos a descrição de campo, de modo que a velocidade da partícula é a própria velocidade do escoamento na posição e instante desejados:

$$\vec{V}_p = \vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$$

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

- Considere uma partícula se movendo em um escoamento conforme:



- A velocidade da partícula na posição \vec{r} e no tempo t é:

$$\vec{V}_p \Big|_t = \vec{V}(x, y, z, t) \quad \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

- Durante o intervalo de tempo dt , a partícula se deslocou em

$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

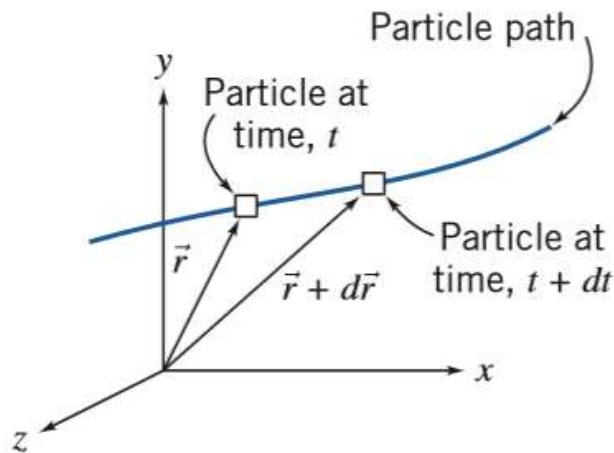
de modo que suas novas posição e velocidade no tempo $t + dt$ são:

$$\vec{r} + d\vec{r} = (x + dx)\hat{i} + (y + dy)\hat{j} + (z + dz)\hat{k}$$

$$\vec{V}_p \Big|_{t+dt} = \vec{V}(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$$

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

- A variação da velocidade da partícula durante esse deslocamento é:



$$d\vec{V}_p = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt$$

- Portanto, a aceleração total da partícula é:

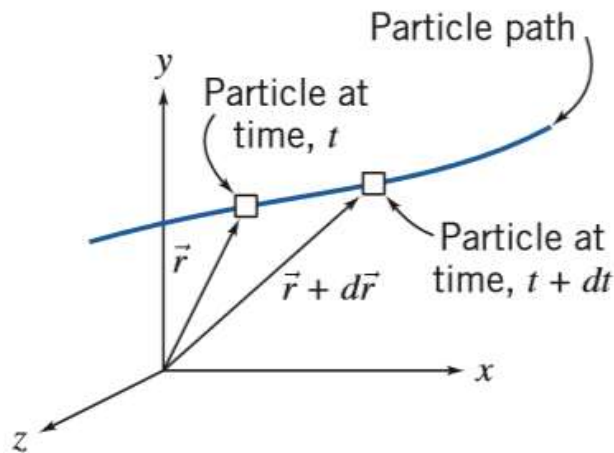
$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{dx_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{dy_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{dz_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \frac{dt}{dt}$$



$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

- A variação da velocidade da partícula durante esse deslocamento é:



$$d\vec{V}_p = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz_p + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} dt$$

- Portanto, a aceleração total da partícula é:

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{dx_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{dy_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{dz_p}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \frac{dt}{dt}$$

Aceleração substancial ou material

$$\frac{D\vec{V}_p}{Dt} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

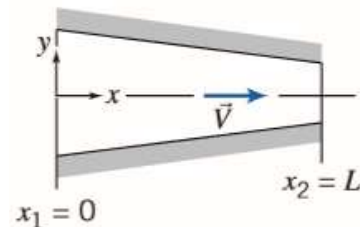
$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{V}_p}{dt} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

- Há dois efeitos que provocam a aceleração de uma partícula:

$$\frac{D\vec{V}_p}{Dt} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

1. Efeito local. Associado ao processo transiente. $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$
2. Efeito de transporte convectivo para uma região de velocidade mais elevada. Não depende do tempo. Exemplo: escoamento em um bocal.



$$u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$$

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

- Componentes do vetor aceleração (sistema cartesiano):

$$x: a_{p,x} = \frac{Du}{Dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$y: a_{p,y} = \frac{Dv}{Dt} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$z: a_{p,z} = \frac{Dw}{Dt} = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

- Componentes do vetor aceleração (sistema cartesiano):

$$x: a_{p,x} = \frac{Du}{Dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

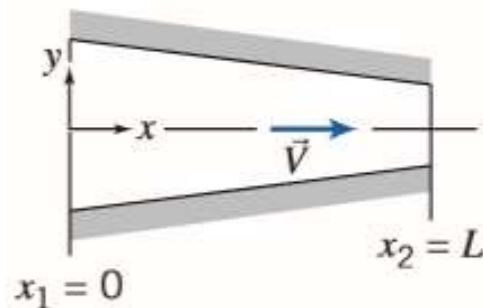
$$y: a_{p,y} = \frac{Dv}{Dt} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$z: a_{p,z} = \frac{Dw}{Dt} = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

Com essas expressões, pode-se calcular a aceleração da partícula em **qualquer posição** do escoamento e a **qualquer instante**.

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

Exemplo 5.5 (5ª ed.): Considere o escoamento unidimensional, permanente, incompressível, através do canal plano e convergente mostrado. A velocidade na linha de centro horizontal (eixo x) é dada por $\vec{V} = V_1[1 + (x/L)]\hat{i}$. Determine a aceleração para uma partícula se movendo ao longo dessa linha de centro. Se utilizarmos o método de descrição lagrangiano, a posição da partícula localizada em $x = 0$, no instante $t = 0$, será uma função do tempo $x_p = f(t)$. Obtenha a expressão para $f(t)$ e, em seguida, tomando a derivada segunda da função em relação ao tempo, obtenha uma expressão para a componente x da aceleração da partícula.



Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

Como o escoamento é 1D e permanente:

$$\vec{V} = V(x) \longrightarrow a_{p,x} = \frac{Du}{Dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \longrightarrow a_{p,x} = u \frac{\partial u}{\partial x}$$

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

Como o escoamento é 1D e permanente:

$$\vec{V} = V(x) \longrightarrow a_{p,x} = \frac{Du}{Dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \longrightarrow a_{p,x} = u \frac{\partial u}{\partial x}$$

Substituindo a expressão para velocidade $\vec{V} = V_1[1 + (x/L)]\hat{i}$

$$a_{p,x} = V_1 \left[1 + \frac{x}{L}\right] \frac{\partial}{\partial x} \left\{ V_1 \left[1 + \frac{x}{L}\right] \right\} \longrightarrow a_{p,x} = \frac{V_1^2}{L} \left[1 + \frac{x}{L}\right]$$

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

Como o escoamento é 1D e permanente:

$$\vec{V} = V(x) \longrightarrow a_{p,x} = \frac{Du}{Dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \longrightarrow a_{p,x} = u \frac{\partial u}{\partial x}$$

Substituindo a expressão para velocidade $\vec{V} = V_1[1 + (x/L)]\hat{i}$

$$a_{p,x} = V_1 \left[1 + \frac{x}{L}\right] \frac{\partial}{\partial x} \left\{ V_1 \left[1 + \frac{x}{L}\right] \right\} \longrightarrow a_{p,x} = \frac{V_1^2}{L} \left[1 + \frac{x}{L}\right]$$

**FORMULAÇÃO
EULERIANA**

Propriedade da partícula assume o valor do escoamento na posição espacial.

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

Para determinarmos a aceleração da partícula a partir de um método de descrição **lagrangiano**, devemos escrever sua posição instantânea em função do tempo:

$$x_p = x_p(t)$$

Sabendo que a velocidade da partícula é u_p , temos:

$$u_p = \frac{dx_p}{dt} \longrightarrow u_p = \frac{dx_p}{dt} = V_1 \left[1 + \frac{x_p}{L} \right]$$

Separando variáveis e integrando:

$$\int_0^{x_p} \frac{dx_p}{\left[1 + \frac{x_p}{L} \right]} = \int_0^t V_1 dt \longrightarrow L \ln \left(1 + \frac{x_p}{L} \right) = V_1 t \longrightarrow x_p = L(e^{V_1 t/L} - 1)$$

Posição instantânea
da partícula

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

Derivando duas vezes em relação ao tempo, obtemos a aceleração:

$$a_{p,x} = \frac{d^2 x_p}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} [L(e^{V_1 t/L} - 1)] = \boxed{\frac{V_1^2}{L} e^{V_1 t/L}}$$

Aceleração da partícula é
função apenas do tempo.
FORMULAÇÃO LAGRANGIANA

Translação de fluido – Aceleração de uma partícula

Derivando duas vezes em relação ao tempo, obtemos a aceleração:

$$a_{p,x} = \frac{d^2 x_p}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} [L(e^{V_1 t/L} - 1)] = \boxed{\frac{V_1^2}{L} e^{V_1 t/L}}$$

Aceleração da partícula é
função apenas do tempo.
FORMULAÇÃO LAGRANGIANA

Comparando resultados obtidos pelas duas expressões:

EULERIANO

$$a_{p,x} = \frac{V_1^2}{L} \left[1 + \frac{x}{L} \right]$$

LAGRANGIANO

$$a_{p,x} = \frac{V_1^2}{L} e^{V_1 t/L}$$

t = 0 (x = 0)

$$a_{p,x} = \frac{V_1^2}{L}$$

$$a_{p,x} = \frac{V_1^2}{L}$$

t = t_L (x = L)

$$a_{p,x} = 2 \frac{V_1^2}{L}$$

$$L = L(e^{V_1 t/L} - 1) \longrightarrow e^{V_1 t/L} = 2$$
$$a_{p,x} = 2 \frac{V_1^2}{L}$$

Conservação da quantidade de movimento linear

- A forma diferencial da Eq. da QML é obtida a partir da aplicação da 2ª Lei de Newton a uma partícula infinitesimal de massa dm .

- Para um sistema finito: $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ onde $\vec{P} = \int_{\text{massa}} \vec{V} dm$

- Para um sistema infinitesimal:

$$\vec{P} = \vec{V}m \quad \longrightarrow \quad d\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(\vec{V}m)}{dt} = \vec{V} \frac{dm}{dt} + dm \frac{d\vec{V}}{dt} = dm \frac{d\vec{V}}{dt}$$

em que: $\frac{d\vec{V}}{dt} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$  $d\vec{F} = dm \left(u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right)$

Conservação da quantidade de movimento linear

- A forma diferencial da Eq. da QML é obtida a partir da aplicação da 2ª Lei de Newton a uma partícula infinitesimal de massa dm .

- Para um sistema finito: $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ onde $\vec{P} = \int_{mas} \vec{V} dm$

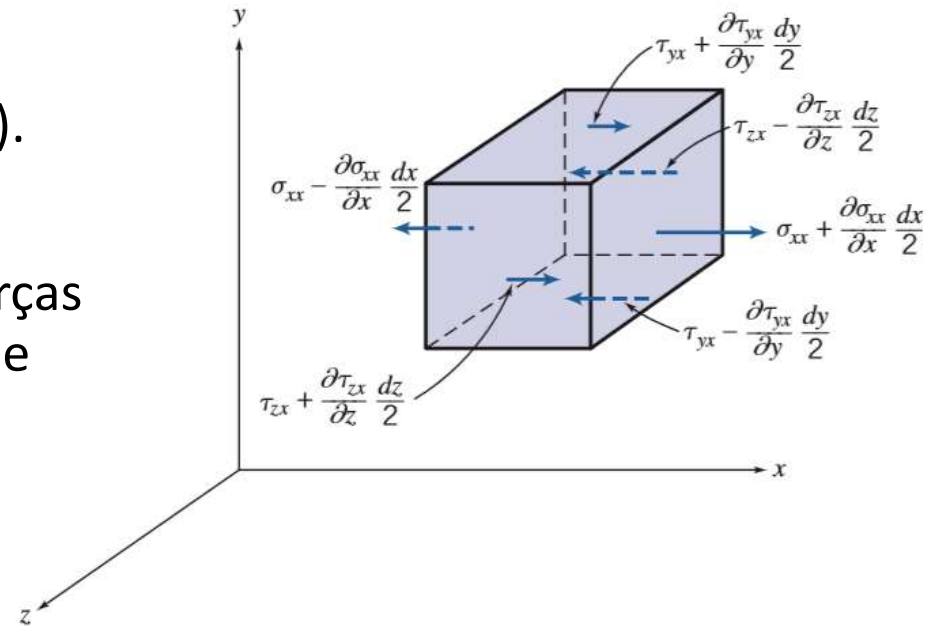
- Para um sistema infinitesimal:

$$\vec{P} = \vec{V}m \quad \longrightarrow \quad d\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(\vec{V}m)}{dt} = \vec{V} \frac{dm}{dt} + dm \frac{d\vec{V}}{dt} = dm \frac{d\vec{V}}{dt}$$

em que: $\frac{d\vec{V}}{dt} = u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$  $d\vec{F} = dm \left(u \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right)$

Conservação da quantidade de movimento linear

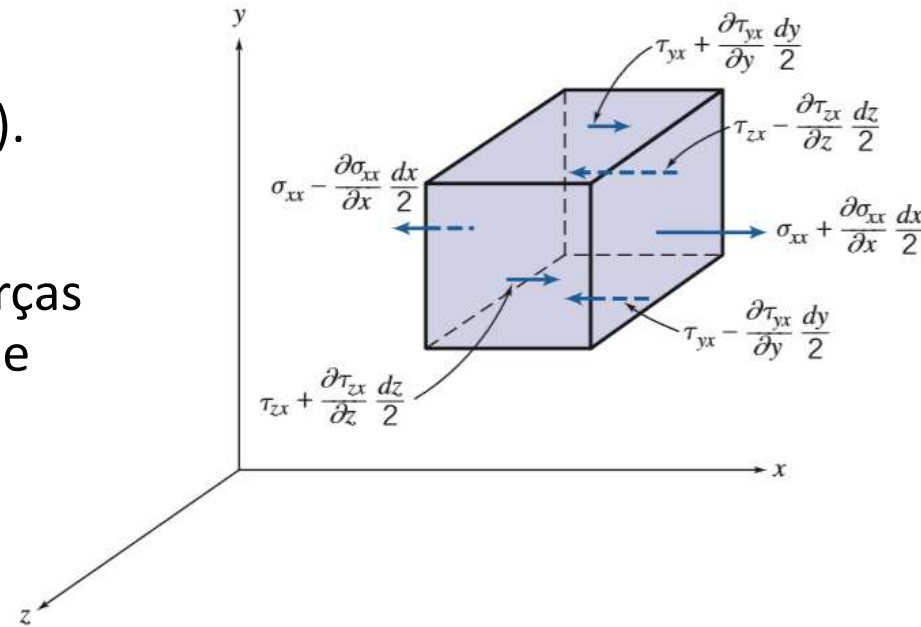
- As forças que atuam na partícula podem ser de corpo ou de superfície (tangenciais ou normais).
- Considerando apenas as componentes x das forças sobre o elemento de massa dm e admitindo que σ_{xx} , τ_{yx} e τ_{zx} atuam no centro do elemento:



Conservação da quantidade de movimento linear

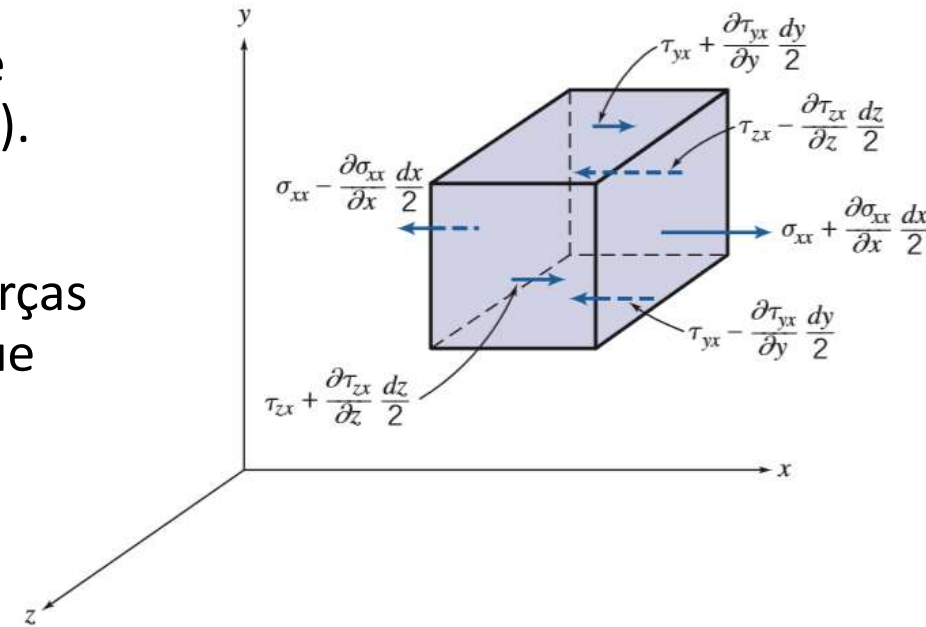
- As forças que atuam na partícula podem ser de corpo ou de superfície (tangenciais ou normais).
- Considerando apenas as componentes x das forças sobre o elemento de massa dm e admitindo que σ_{xx} , τ_{yx} e τ_{zx} atuam no centro do elemento:

$$\begin{aligned}
 dF_{s,x} = & \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz + \\
 & + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dxdz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dxdz + \\
 & + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dxdy - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dxdy
 \end{aligned}$$



Conservação da quantidade de movimento linear

- As forças que atuam na partícula podem ser de corpo ou de superfície (tangenciais ou normais).
- Considerando apenas as componentes x das forças sobre o elemento de massa dm e admitindo que σ_{xx} , τ_{yx} e τ_{zx} atuam no centro do elemento:



$$dF_{s,x} = \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz +$$

$$+ \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz +$$

$$+ \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dx dy$$



$$dF_{s,x} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

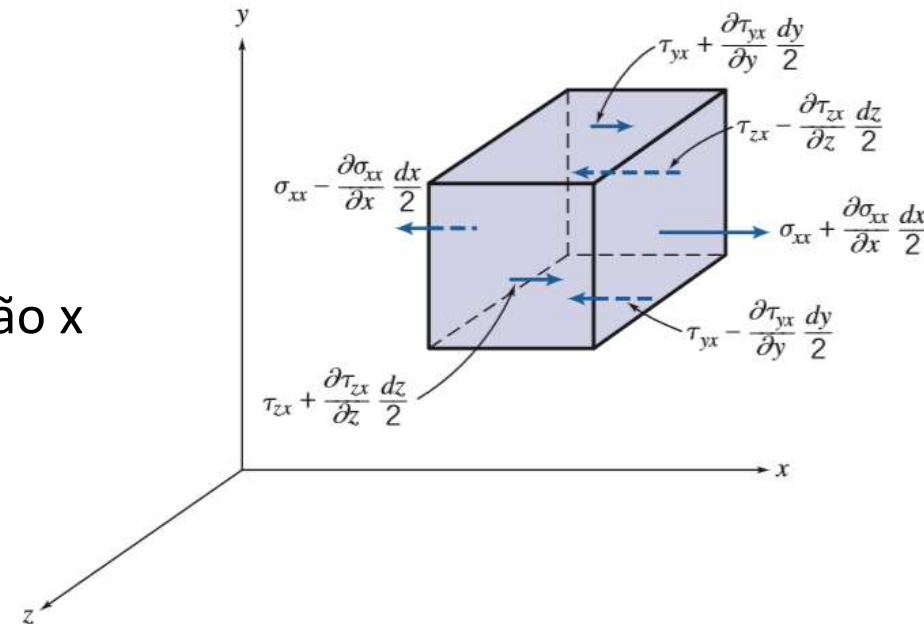
Conservação da quantidade de movimento linear

- A força de corpo na direção x é:

$$dF_{b,x} = \rho g_x dV$$

- Assim, o somatório de forças externas na direção x que atuam sobre o elemento dm fica:

$$\begin{aligned} dF_x &= dF_{b,x} + dF_{s,x} \\ &= \left(\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned}$$



- Finalmente, a equação da conservação da QML em x:

$$\mathbf{x:} \quad \left(\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) = \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

Conservação da quantidade de movimento linear

- Aplicando o mesmo procedimento para os eixos y e z:

$$\mathbf{y:} \quad \left(\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) = \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

$$\mathbf{z:} \quad \left(\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) = \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right)$$

Conservação da quantidade de movimento linear

- Para um fluido newtoniano, as tensões viscosas podem ser escritas em função da taxa de deformação e da viscosidade:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -p - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \vec{V} + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} & \tau_{xy} &= \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \tau_{xz} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \tau_{yx} &= \tau_{xy} & \sigma_{yy} &= -p - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \vec{V} + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} & \tau_{yz} &= \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} & \tau_{zy} &= \tau_{yz} & \sigma_{zz} &= -p - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \vec{V} + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}$$

Conservação da quantidade de movimento linear

- Inserindo esses termos nas equações para cada coordenada e simplificando para hipótese de escoamento incompressível e viscosidade constante:

$$\mathbf{x:} \quad \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\mathbf{y:} \quad \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

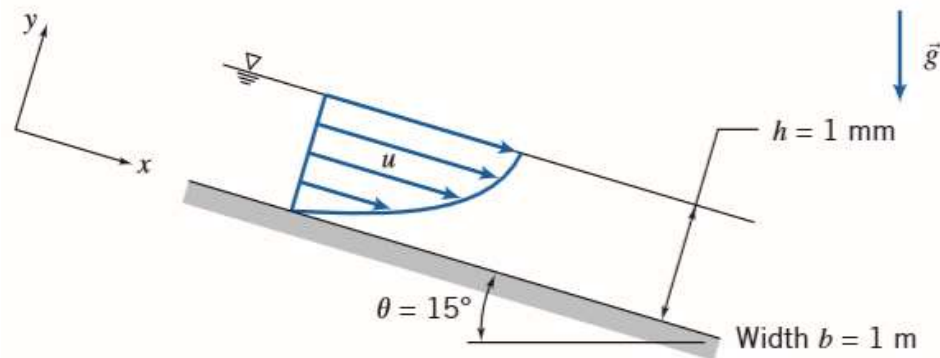
$$\mathbf{z:} \quad \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

A solução dessas equações fornece o campo de velocidades

Equações de Navier-Stokes para um escoamento incompressível com μ cte.

Conservação da quantidade de movimento linear

Exemplo 5.9 (5ª ed.): Um líquido escoar para baixo sobre uma superfície plana inclinada em um filme laminar, permanente, completamente desenvolvido e de espessura h . Simplifique as equações da continuidade e de Navier-Stokes para modelar esse campo de escoamento. Obtenha expressões para o perfil de velocidade do líquido, a distribuição de tensão de cisalhamento, a vazão volumétrica e a velocidade média. Relacione a espessura do filme de líquido com a vazão volumétrica por unidade de profundidade em um filme d'água com espessura $h = 1\text{ mm}$, escoando sobre uma superfície com largura $b = 1\text{ m}$, inclinada de $\theta = 15^\circ$ em relação à horizontal.



Conservação da quantidade de movimento linear

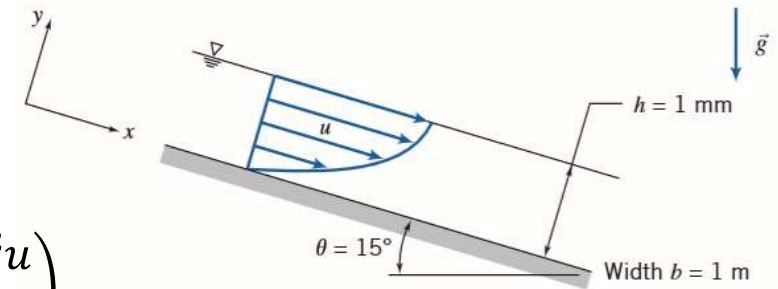
Hipóteses: 1) Escoamento incompressível; 2) viscosidade constante; 3) $w = 0$, $d/dz = 0$; 4) completamente desenvolvido ($d/dx = 0$); 5) regime permanente.

Eqs. Básicas:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

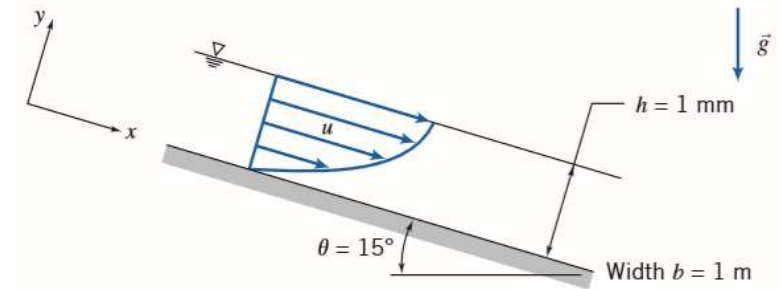
$$\rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$



Conservação da quantidade de movimento linear

Hipóteses: 1) Escoamento incompressível; 2) viscosidade constante; 3) $w = 0$, $d/dz = 0$; 4) completamente desenvolvido ($d/dx = 0$); 5) regime permanente.

Eqs. Básicas:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$



Conservação da quantidade de movimento linear

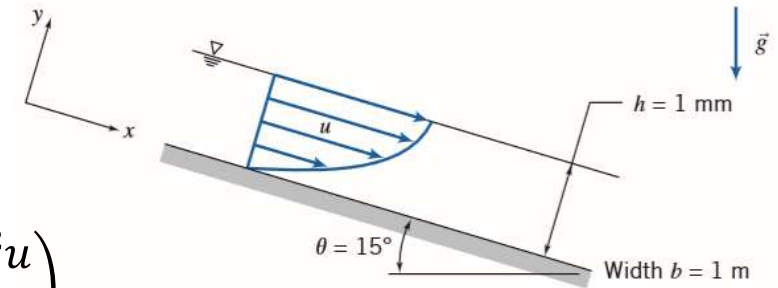
Hipóteses: 1) Escoamento incompressível; 2) viscosidade constante; 3) $w = 0$, $d/dz = 0$; 4) completamente desenvolvido ($d/dx = 0$); 5) regime permanente.

Eqs. Básicas:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$



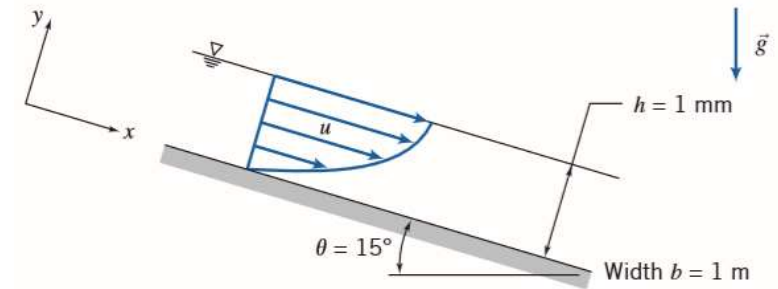
Conservação da quantidade de movimento linear

Hipóteses: 1) Escoamento incompressível; 2) viscosidade constante; 3) $w = 0$, $d/dz = 0$; 4) completamente desenvolvido ($d/dx = 0$); 5) regime permanente.

Eqs. Básicas:

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\partial v}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}} = 0 \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$



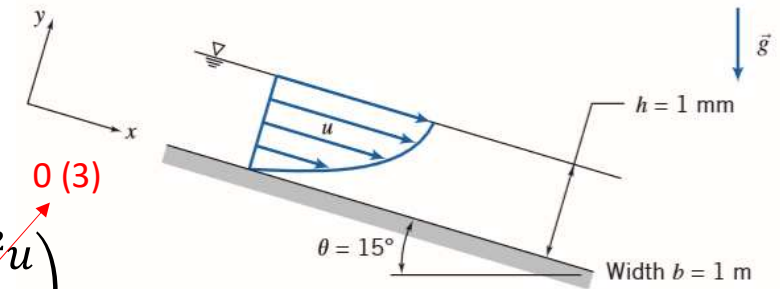
Na parede, $v = 0$. Portanto, $v = 0$ ao longo de toda a espessura de filme.

Conservação da quantidade de movimento linear

Hipóteses: 1) Escoamento incompressível; 2) viscosidade constante; 3) $w = 0$, $d/dz = 0$; 4) completamente desenvolvido ($d/dx = 0$); 5) regime permanente.

Eqs. Básicas:

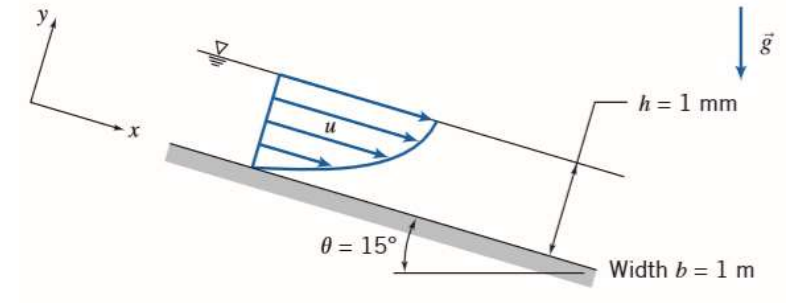
$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$



Conservação da quantidade de movimento linear

Finalmente:

$$\mathbf{x:} \quad 0 = \rho g_x + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \mathbf{y:} \quad 0 = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y}$$



Como $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2 u}{dy^2}$

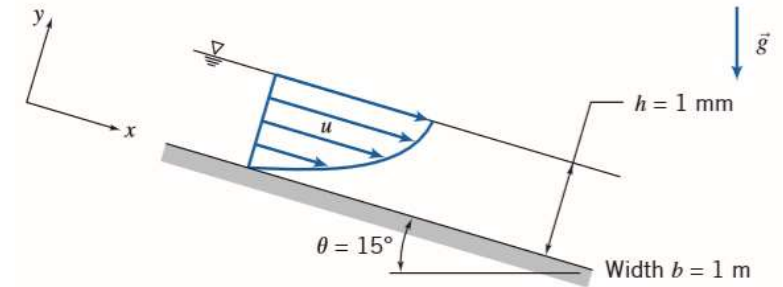
solução geral

Logo: $\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \xrightarrow{1^{\text{a}} \text{ int.}} \frac{du}{dy} = -\frac{\rho g \sin \theta}{\mu} y + c_1 \xrightarrow{2^{\text{a}} \text{ int.}} u = -\frac{\rho g \sin \theta}{2\mu} y^2 + c_1 y + c_2$

Conservação da quantidade de movimento linear

Finalmente:

$$\mathbf{x:} \quad 0 = \rho g_x + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \mathbf{y:} \quad 0 = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y}$$



Como $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2 u}{dy^2}$

solução geral

Logo: $\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \xrightarrow{1^{\text{a}} \text{ int.}} \frac{du}{dy} = -\frac{\rho g \sin \theta}{\mu} y + c_1 \xrightarrow{2^{\text{a}} \text{ int.}} u = -\frac{\rho g \sin \theta}{2\mu} y^2 + c_1 y + c_2$

Solução particular obtida a partir das condições de contorno:

1) $u(0) = 0$ não-eskorregamento na parede $\longrightarrow c_2 = 0$

2) $\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=h} = 0$ tensão nula na superfície livre $\longrightarrow c_1 = \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} h$

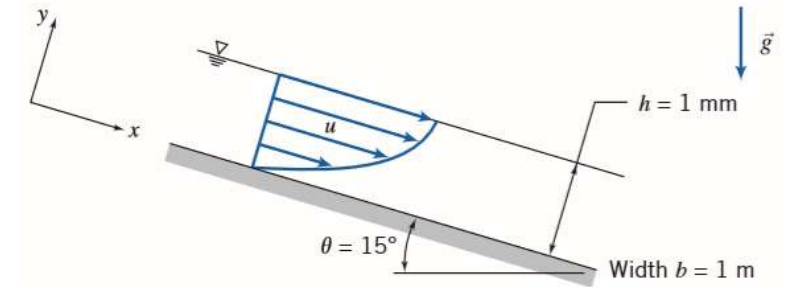
Perfil de velocidade

$$u(y) = \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right)$$

Conservação da quantidade de movimento linear

A distribuição da tensão cisalhante é:

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy}$$



Assim,

$$\tau_{yx} = \mu \frac{d}{dy} \left[\frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right) \right] = \boxed{\rho g \sin \theta (h - y)} \longrightarrow \begin{array}{l} \text{Tensão +} \\ \text{Na parede (y+), sentido x+} \end{array}$$

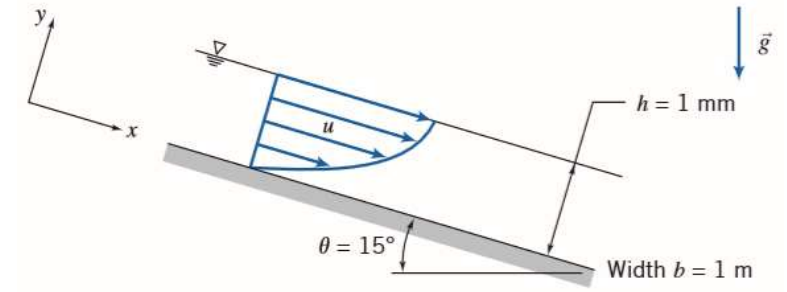
A vazão volumétrica é:

$$Q = \int_A u dA = \int_0^h u b dy = \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} b \int_0^h \left(hy - \frac{y^2}{2} \right) dy = \frac{\rho g b \sin \theta}{\mu} \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{6} \right) = \boxed{\frac{\rho g b h^3 \sin \theta}{3\mu}}$$

Conservação da quantidade de movimento linear

Velocidade média:

$$\bar{V} = \frac{Q}{A} = \frac{\rho g b h^3 \sin \theta}{3 \mu b h} = \frac{\rho g h^2 \sin \theta}{3 \mu}$$

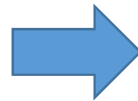


A espessura do filme em função da vazão é:

$$h = \sqrt[3]{\frac{3 \mu Q}{\rho g b \sin \theta}}$$

Finalmente, a vazão volumétrica é obtida para um conjunto de valores:

$$\begin{aligned} h &= 1 \text{ mm} & \rho &= 1000 \text{ kg/m}^3 \\ \theta &= 15^\circ & \mu &= 10^{-3} \text{ Pa.s} \\ b &= 1 \text{ m} \end{aligned}$$



$$Q = \frac{\rho g b h^3 \sin \theta}{3 \mu} = 0,846 \text{ L/s}$$