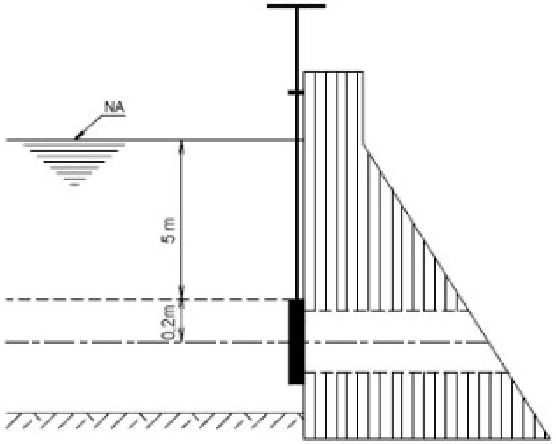
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Campus Araranguá - ARA
Departamento de Energia e Sustentabilidade

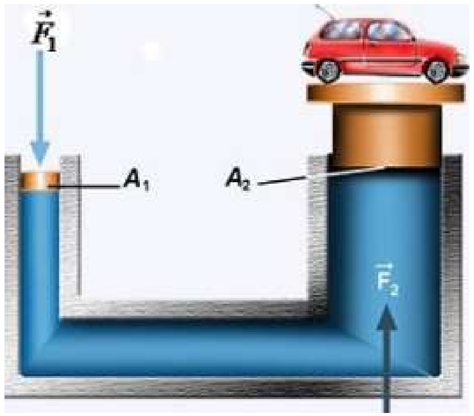
UNIDADE 3
ESTÁTICA DOS FLUIDOS

Fluido estático

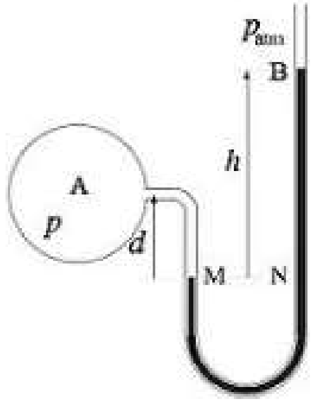
- Ausência de tensão cisalhante. Fluido não se deforma;
- Aplicações: comportas, sistemas hidráulicos e manômetros.



comportas



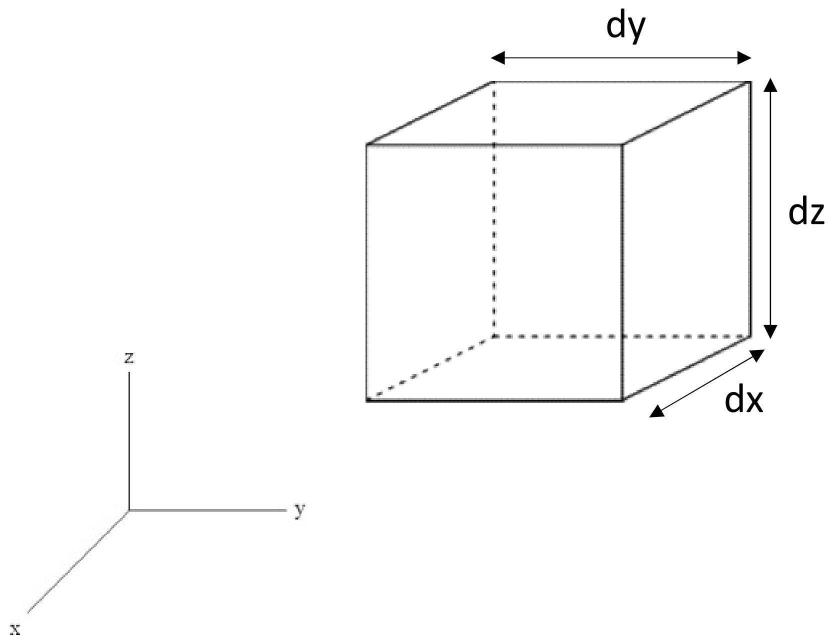
elevador hidráulico



manômetros

A equação básica da estática dos fluidos

Considere o elemento de fluido estático de volume $d\forall = dxdydz$

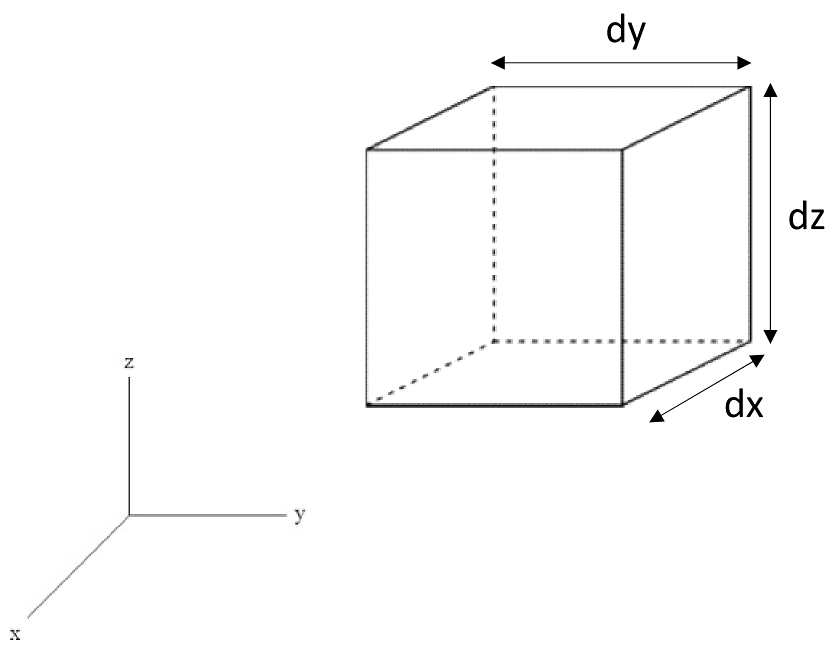


- Força de corpo (**gravidade**)

- Força de superfície (**pressão**)

A equação básica da estática dos fluidos

Considere o elemento de fluido estático de volume $d\forall = dxdydz$



- Força de corpo (**gravidade**)

$$d\vec{F}_B = \vec{g}dm = \rho\vec{g}d\forall = \rho\vec{g}dxdydz$$

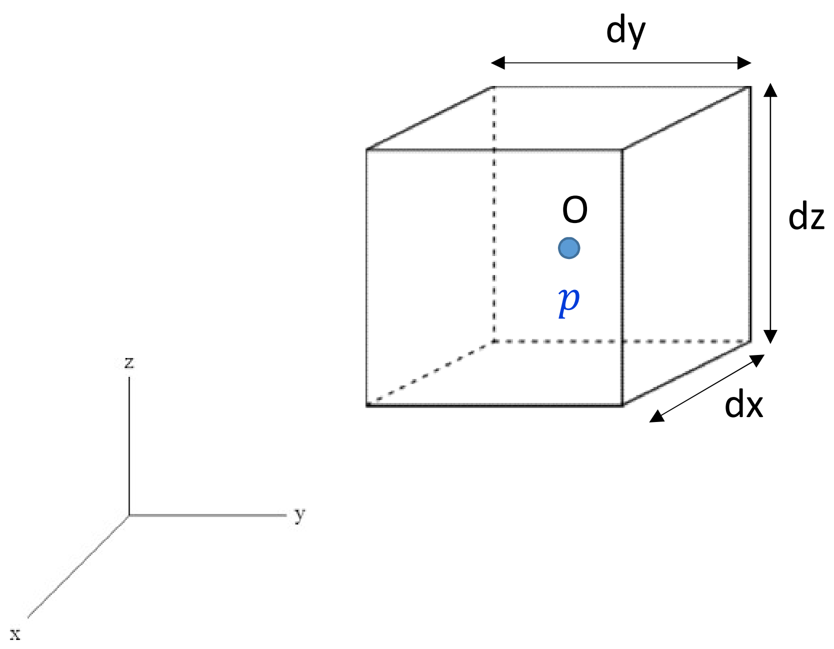
- Força de superfície (**pressão**)

A pressão é um campo escalar $p = p(x, y, z)$

Força líquida de pressão: somar todas as forças que atuam nas 6 faces do elemento

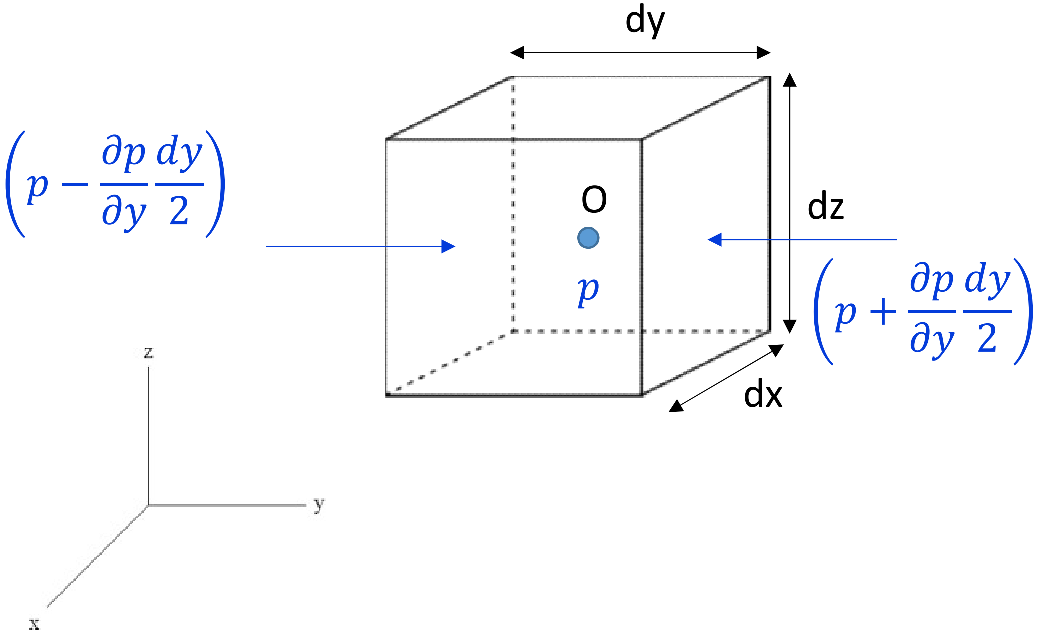
A equação básica da estática dos fluidos

Seja p a pressão no centro do elemento, O.



A equação básica da estática dos fluidos

Seja p a pressão no centro do elemento, O.



Pressões nas demais faces: expansão em série de Taylor da pressão em torno do ponto O.

- Face esquerda:

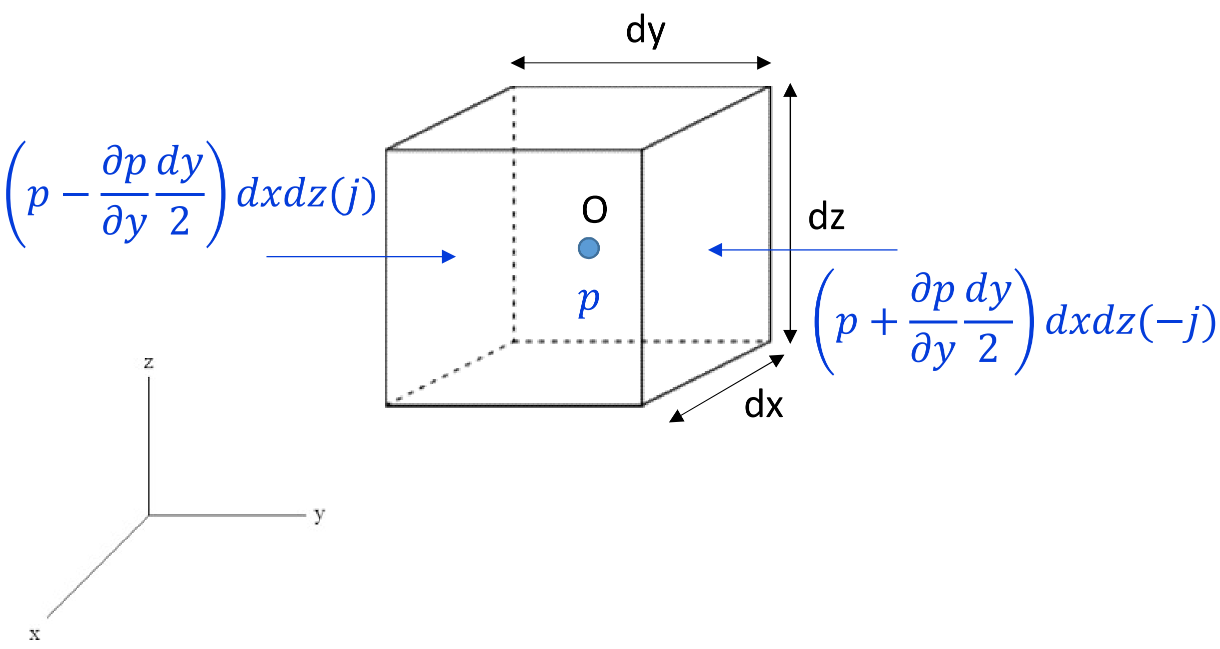
$$p_L = p + \frac{\partial p}{\partial y}(y_L - y) = p + \frac{\partial p}{\partial y}\left(-\frac{dy}{2}\right) = p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}$$

- Face direita:

$$p_R = p + \frac{\partial p}{\partial y}(y_R - y) = p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}$$

A equação básica da estática dos fluidos

Como F = pA, podemos escrever:



- Face esquerda:

$$dF_L = \left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)(dxdz)(j)$$

- Face direita:

$$dF_R = \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)(dxdz)(-j)$$

- Força líquida na direção y:

$$dF_y = dF_L + dF_R$$

A equação básica da estática dos fluidos

Procedendo da mesma forma para as demais faces, obtemos a força de superfície líquida que atua sobre o elemento.

$$d\vec{F}_S = \left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)(dydz)(\hat{\imath}) + \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)(dydz)(-\hat{\imath})$$

$$+ \left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)(dxdz)(\hat{\jmath}) + \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)(dxdz)(-\hat{\jmath})$$

$$+ \left(p - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)(dxdy)(\hat{k}) + \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)(dxdy)(-\hat{k})$$

A equação básica da estática dos fluidos

Simplificando:

$$d\vec{F}_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}\right)dxdydz$$

A equação básica da estática dos fluidos

Simplificando:

$$d\vec{F}_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}\right)dxdydz \quad \Rightarrow \quad d\vec{F}_S = -\nabla p dxdydz$$

Significado físico: A força líquida de superfície por unidade de volume tem mesma magnitude, mas orientação contrária ao gradiente de pressão.

Note que a força resultante de superfície atuante sobre o fluido não depende do valor absoluto da pressão, mas sim da variação da pressão no espaço.

A unidade de pressão no SI é N/m² ou Pa (Pascal).

A equação básica da estática dos fluidos

A força resultante sobre o elemento de fluido é:

$$d\vec{F} = d\vec{F}_B + d\vec{F}_S = (\rho\vec{g} - \nabla p)dxdydz = (\rho\vec{g} - \nabla p)d\forall$$

A equação básica da estática dos fluidos

A força resultante sobre o elemento de fluido é:

$$d\vec{F} = d\vec{F}_B + d\vec{F}_S = (\rho\vec{g} - \nabla p)dxdydz = (\rho\vec{g} - \nabla p)d\forall$$

A 2ª lei de Newton diz que:

$d\vec{F} = \vec{a}dm$ para fluido estático, $\vec{a} = 0$

A equação básica da estática dos fluidos

A força resultante sobre o elemento de fluido é:

$$d\vec{F} = d\vec{F}_B + d\vec{F}_S = (\rho\vec{g} - \nabla p)dxdydz = (\rho\vec{g} - \nabla p)d\forall$$

A 2ª lei de Newton diz que:

$$d\vec{F} = \vec{a}dm$$ para fluido estático, $\vec{a} = 0$

Assim,

$$\rho\vec{g} - \nabla p = 0 \quad \begin{cases} \rho g_x - \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 & \text{direção x} \\ \rho g_y - \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 & \text{direção y} \\ \rho g_z - \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 & \text{direção z} \end{cases}$$

A equação básica da estática dos fluidos

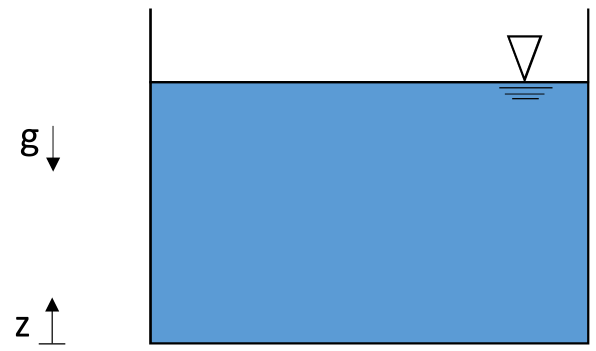
Se o sistema de coordenadas for tal que a gravidade atue no sentido de –z, temos:

$$\vec{g} = (0; 0; -g)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$



A equação básica da estática dos fluidos

Se o sistema de coordenadas for tal que a gravidade atue no sentido de –z, temos:

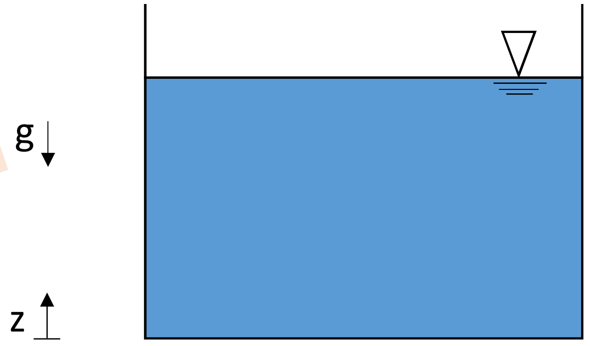
$$\vec{g} = (0; 0; -g)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g}$$

Vale para fluidos compressíveis (ρ variável) e incompressíveis (ρ constante)



Restrições:

1. Fluido estático
2. Gravidade é a única força de corpo
3. Eixo z vertical e contrário à gravidade

Variação de pressão num fluido estático

Líquidos incompressíveis: Manômetros

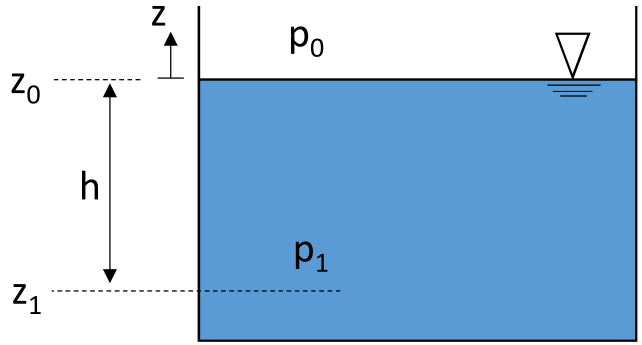
$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = constante$$

Caso a pressão de referência no nível z_0 seja p_0, a pressão p_1 no nível $z_1$será:

$$\int_{p_0}^{p_1} dp = -\int_{z_0}^{z_1} \rho g dz$$

$$\Downarrow$$

$$p_1 - p_0 = -\rho g(z_1 - z_0)$$



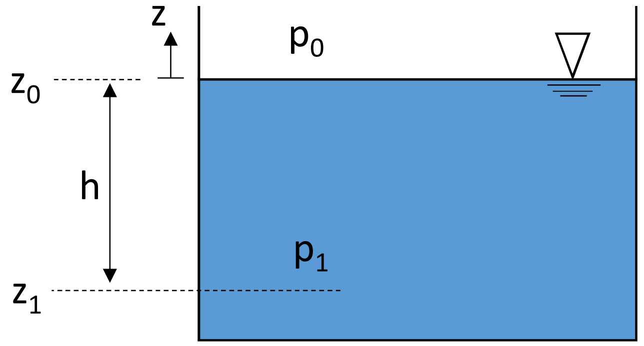
Variação de pressão num fluido estático

Líquidos incompressíveis: Manômetros

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = constante$$

Caso a pressão de referência no nível z_0 seja p_0, a pressão p_1 no nível $z_1$será:

$$\int_{p_0}^{p_1} dp = -\int_{z_0}^{z_1} \rho g dz$$



$$p_1 - p_0 = -\rho g(z_1 - z_0)$$

$$\boxed{p_1 = p_0 + \rho g h}$$

Equação básica para manômetros

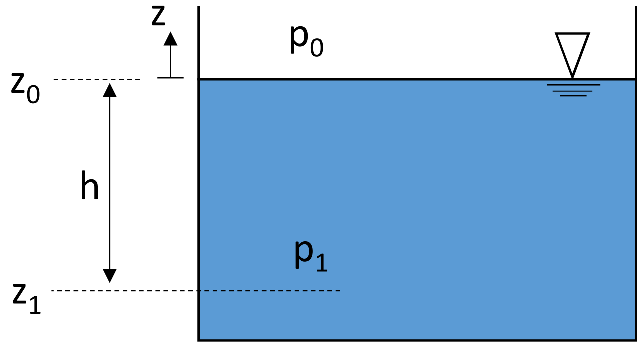
Variação de pressão num fluido estático

Pressão manométrica:

Corresponde à pressão absoluta no ponto menos a pressão atmosférica. No exemplo abaixo, se p_0 é a pressão atmosférica, a pressão manométrica na posição z_1 é:

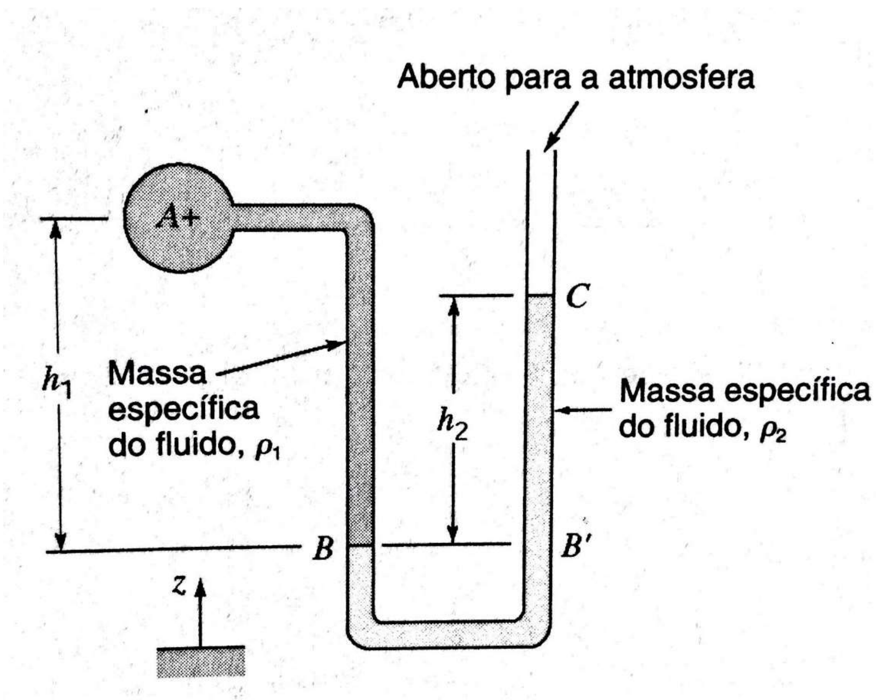
$$p_1 - p_0 = p_{1,man} = -\rho g(z_1 - z_0)$$

$$\boxed{p_{1,man} = \rho g h}$$



Variação de pressão num fluido estático

Manômetro de tubo em U



Considere uma tubulação em que escoa um fluido de massa específica ρ_1. Determinar a pressão manométrica no ponto A a partir da leitura do manômetro em U instalado conforme a figura ao lado.

$$p_B = p_A - \rho_1 g(z_B - z_A) = p_A + \rho_1 g h_1 \qquad (1)$$

$$p_{B'} = p_C - \rho_2 g(z_{B'} - z_C) = p_C + \rho_2 g h_2 \qquad (2)$$

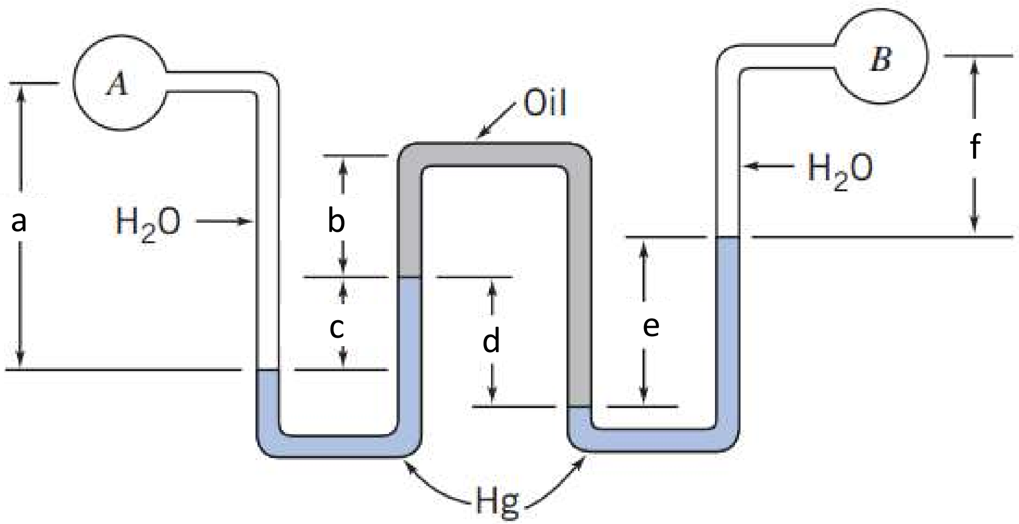
Vasos comunicantes, $(p_B = p_{B'})$:

$$p_A + \rho_1 g h_1 = p_C + \rho_2 g h_2$$

$$\boxed{p_A - p_C = p_{A,man} = \rho_2 g h_2 - \rho_1 g h_1}$$

Variação de pressão num fluido estático

Exemplo: Água escoa no interior dos tubos A e B. Óleo lubrificante está na parte superior do tubo em U invertido. Mercúrio está na parte inferior dos dois tubos em U. Determinar a diferença de pressão $p_A - p_B$.



Dados:

a = 0,25 m

b = 0,10 m

c = 0,08 m

d = 0,10 m

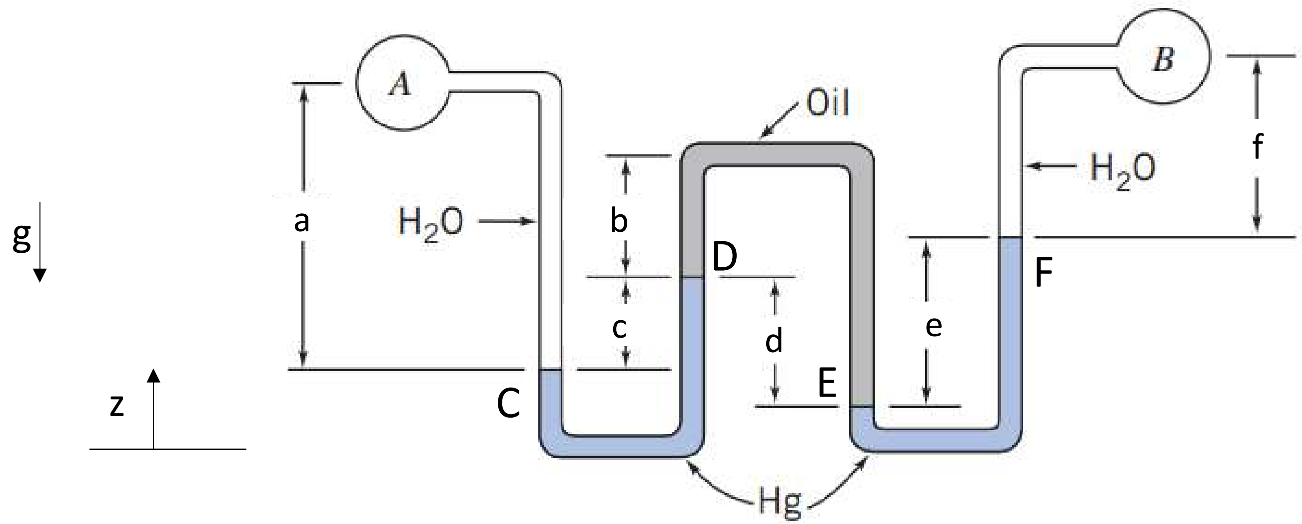
e = 0,13 m

f = 0,20 m

Variação de pressão num fluido estático

Considerações: (1) Fluido estático; (2) Fluido incompressível.

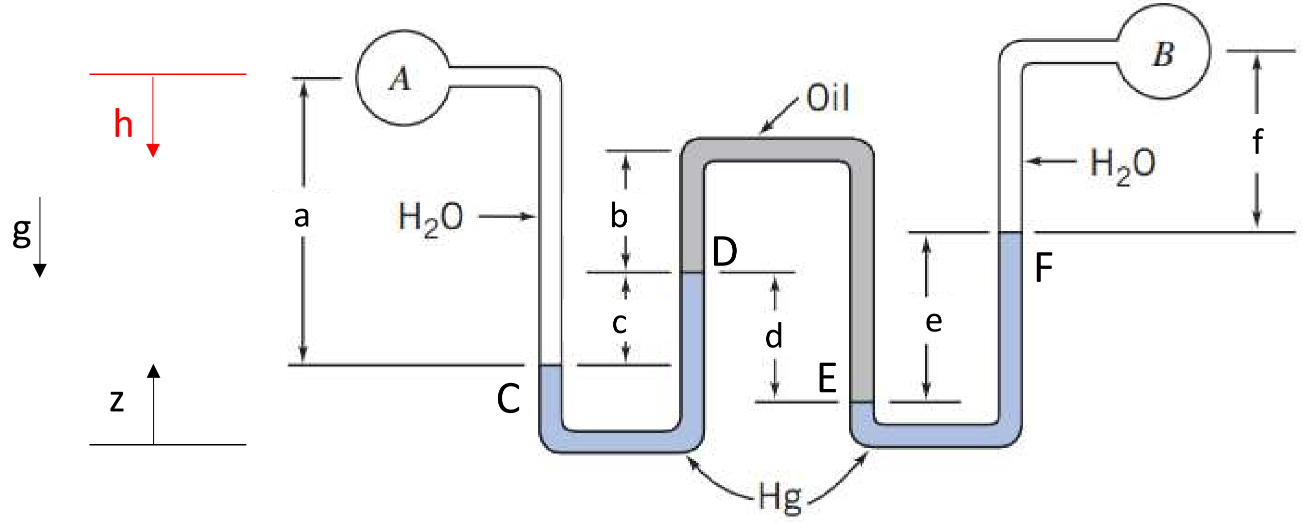
$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$



Variação de pressão num fluido estático

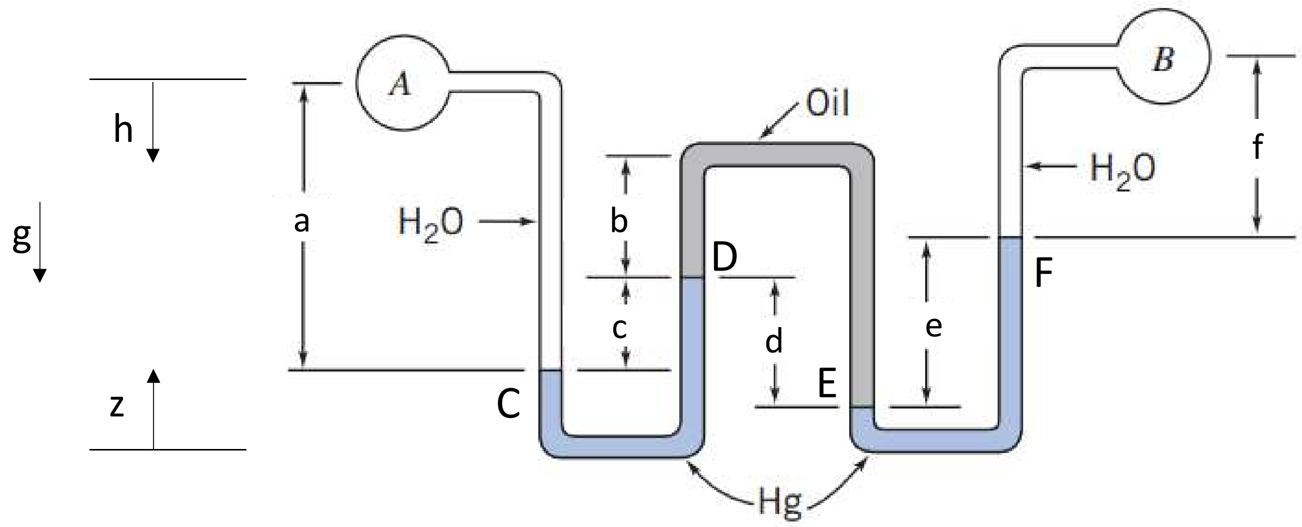
Considerações: (1) Fluido estático; (2) Fluido incompressível.

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{dp}{dh} = -\rho g$$



Variação de pressão num fluido estático

Considerações: (1) Fluido estático; (2) Fluido incompressível.



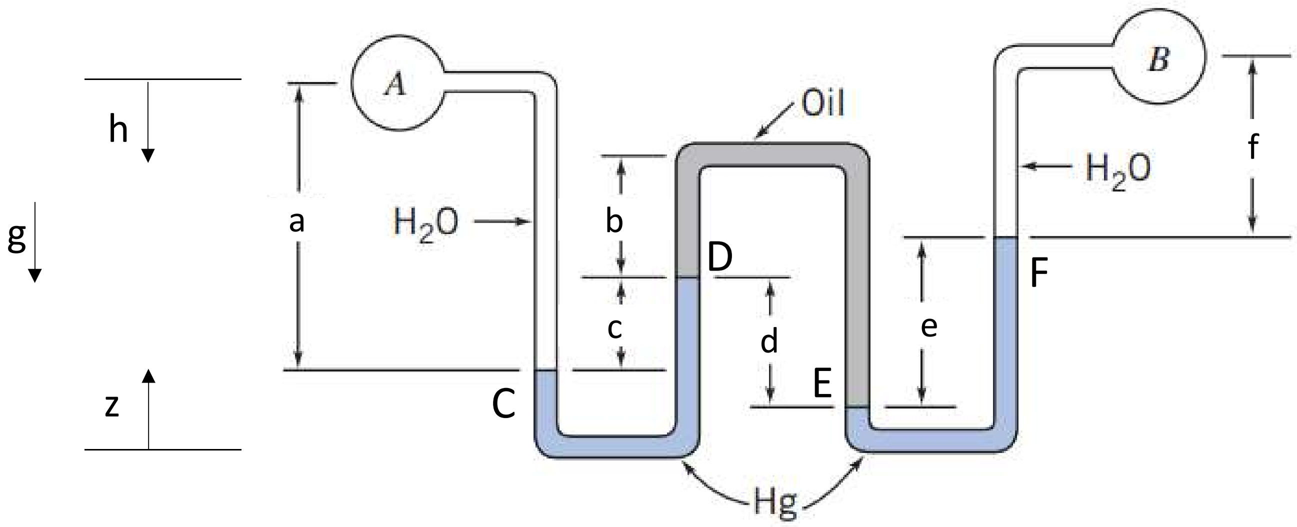
$$\frac{dp}{dz} = -\frac{dp}{dh} = -\rho g$$

$$dp = \rho g dh$$

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{h_1}^{h_2} \rho g dh$$

Variação de pressão num fluido estático

Considerações: (1) Fluido estático; (2) Fluido incompressível.



$$\frac{dp}{dz} = -\frac{dp}{dh} = -\rho g$$

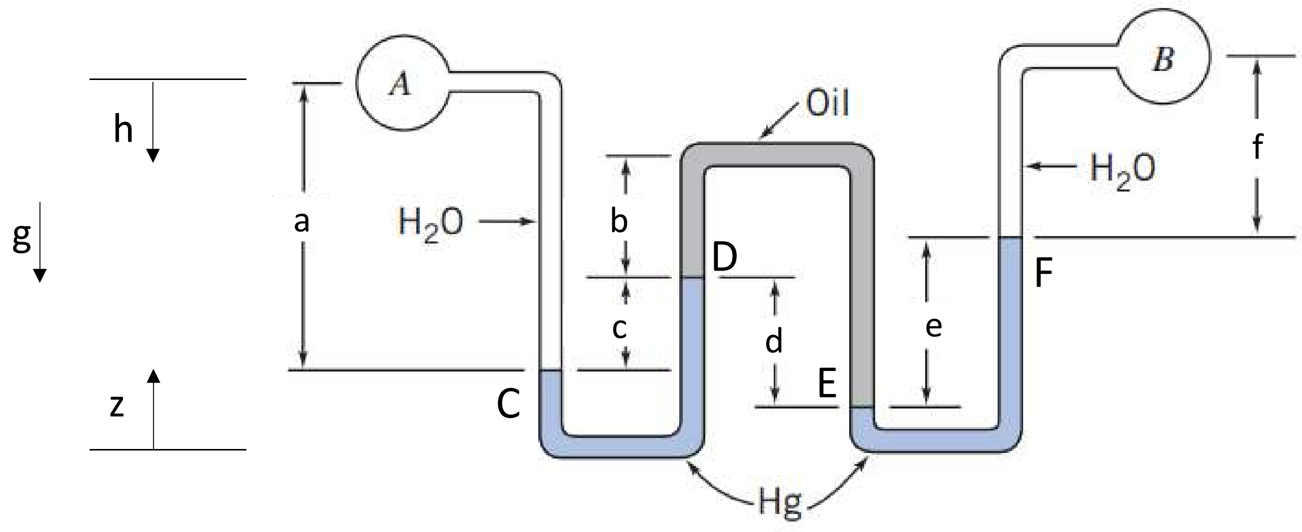
$$dp = \rho g dh$$

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{h_1}^{h_2} \rho g dh$$

$$\boxed{p_2 - p_1 = \rho g (h_2 - h_1)}$$

Variação de pressão num fluido estático

Começando do ponto A e aplicando a equação em pontos sucessivos:



$$p_C - p_A = \rho_{H2O} g a$$

$$p_D - p_C = -\rho_{Hg} g c$$

$$p_E - p_D = \rho_{oil} g d$$

$$p_F - p_E = -\rho_{Hg} g e$$

$$p_B - p_F = -\rho_{H2O} g f$$

Variação de pressão num fluido estático

Somando as equações e multiplicando por -1:

$$p_A - p_B = (p_A - p_C) + (p_C - p_D) + (p_D - p_E) + (p_E - p_F) + (p_F - p_B)$$

$$p_A - p_B = -\rho_{H2O} g a + \rho_{Hg} g c - \rho_{oil} g d + \rho_{Hg} g e + \rho_{H2O} g f$$

Variação de pressão num fluido estático

Somando as equações e multiplicando por -1:

$$p_A - p_B = (p_A - p_C) + (p_C - p_D) + (p_D - p_E) + (p_E - p_F) + (p_F - p_B)$$

$$p_A - p_B = -\rho_{H2O} g a + \rho_{Hg} g c - \rho_{oil} g d + \rho_{Hg} g e + \rho_{H2O} g f$$

Sabendo que $\rho_{H2O} = 1000 \frac{kg}{m^3}; \rho_{Hg} = 13600 \frac{kg}{m^3}; \rho_{oil} = 880 \frac{kg}{m^3}; g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$

$$p_A - p_B = 9{,}81(-1000 * 0{,}25 + 13600 * 0{,}08 - 880 * 0{,}10 + 13600 * 0{,}13 + 1000 * 0{,}20)$$

$$\boxed{p_A - p_B = 26{,}7\ kPa}$$