UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Campus Araranguá - ARA
Departamento de Energia e Sustentabilidade

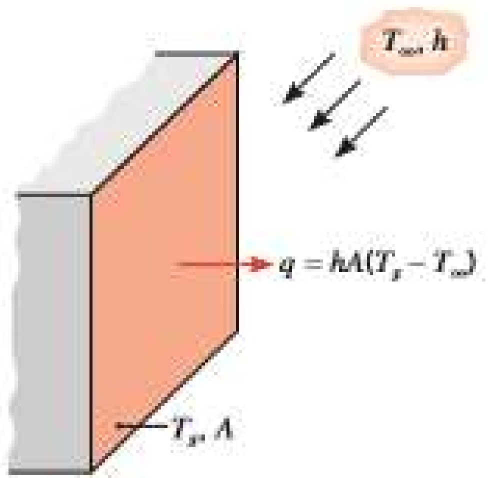
SUPERFÍCIES ESTENDIDAS (ALETAS)

Aletas

Intensificar a transferência de calor através do aumento da área de troca.

Aletas

Considere a situação:



Para intensificar a troca de calor, podemos:

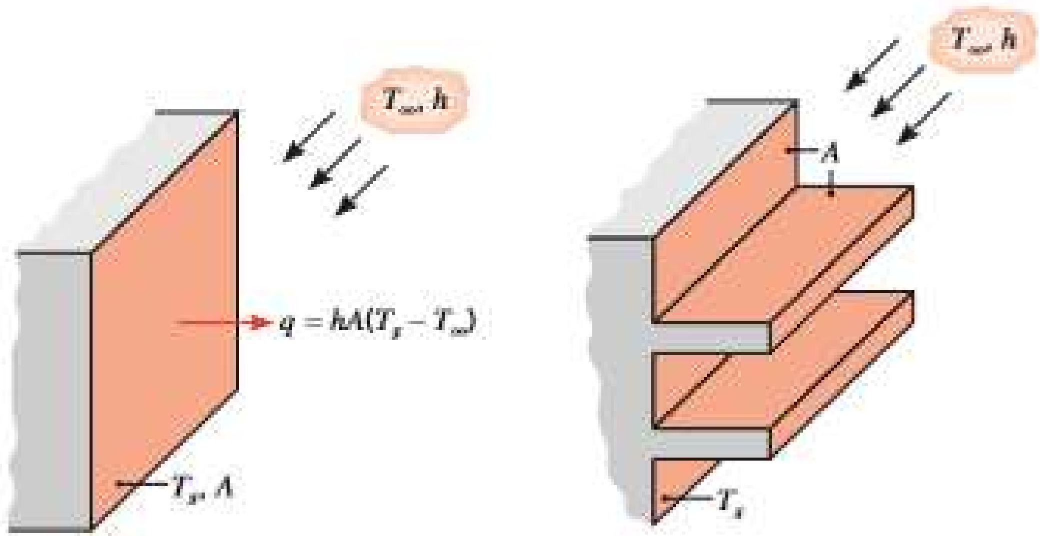
- aumentar h (adotar um ventilador maior)

Porém, é comum o limite máximo de h esbarrar em alguma restrição de projeto (custo, ruído…), sendo insuficiente para atender a troca de calor requerida.

- reduzir T_∞ (geralmente impraticável)

Aletas

Considere a situação:



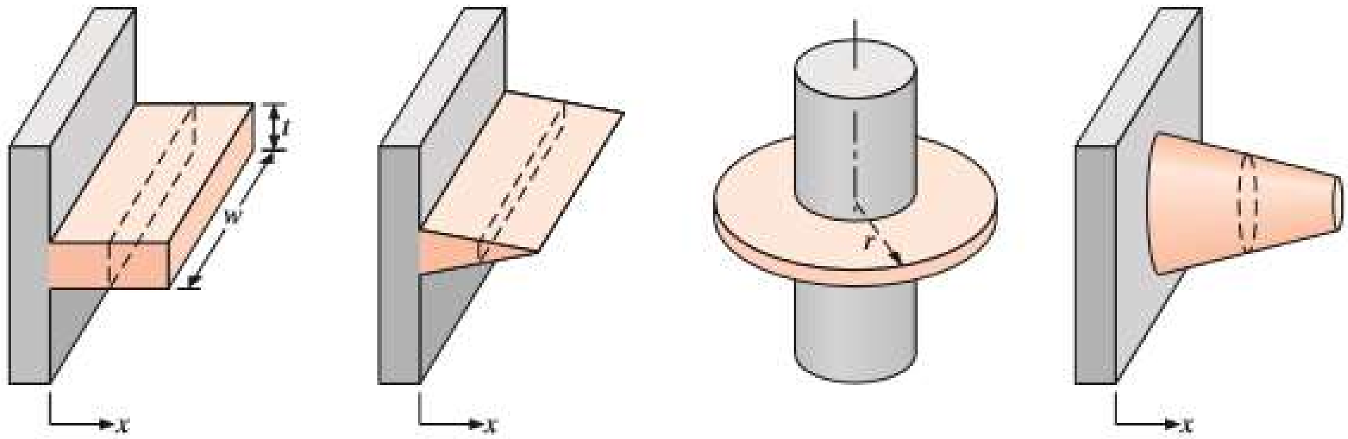
Podemos aumentar a área de troca, A, através de **aletas** que se estendam da parede para o fluido adjacente.

A condutividade térmica da aleta, k, é um parâmetro muito importante (Ideal: k → ∞)

Configurações de Aletas

- Planas: fixada a uma parede plana
  - Seção constante
  - Seção variável

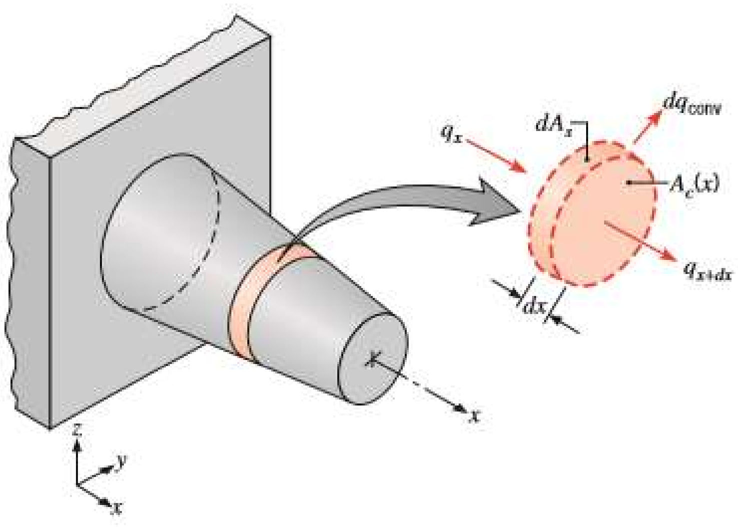
- Anular: fixada circunferencialmente a um cilindro



Equação da Condução de Calor na Aleta

Para determinarmos o quanto uma aleta (ou conjunto de aletas) melhora a transferência de calor em um dispositivo, devemos obter a **distribuição de temperatura ao longo da aleta**.

Para tanto, aplicamos um balanço de energia em um elemento infinitesimal:



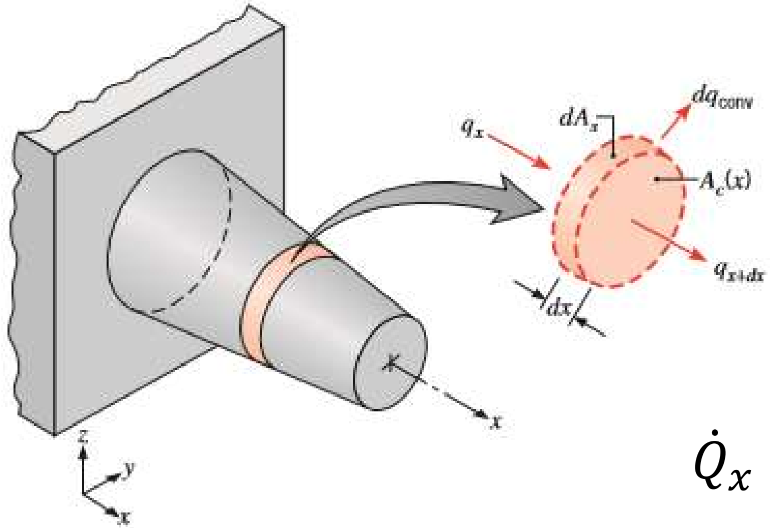
Balanço de energia

$$\dot{Q}_x = \dot{Q}_{x+d} \quad + d\dot{Q}_{conv}$$

Equação da Condução de Calor na Aleta

Hipóteses:

- T = T(x)
- Regime permanente
- k constante
- Radiação desprezível
- Sem geração
- h uniforme



$$\dot{Q}_x = \dot{Q}_{x+dx} + d\dot{Q}_{conv}$$

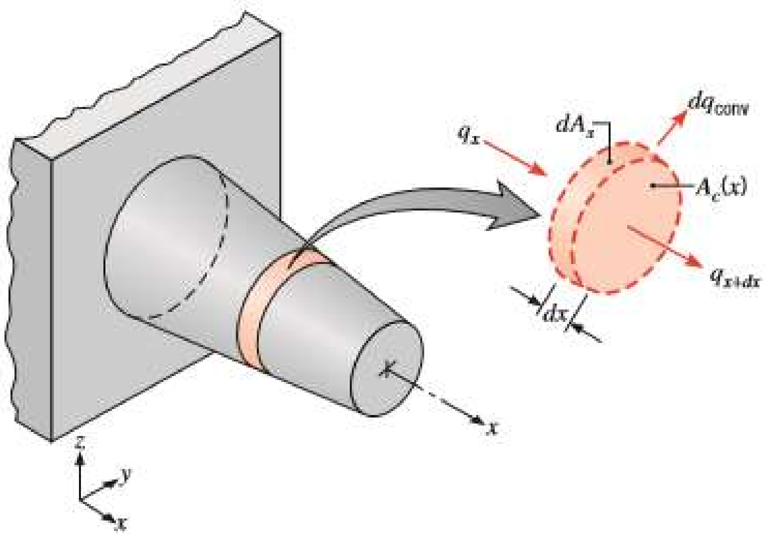
$$\dot{Q}_x = -kA_c\frac{dT}{dx}$$

$$\dot{Q}_{x+dx} = -kA_c\frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx}\left(-kA_c\frac{dT}{dx}\right)dx$$

$$d\dot{Q}_{conv} = hdA_s(T - T_\infty)$$

Equação da Condução de Calor na Aleta

Substituindo os termos no balanço de energia:

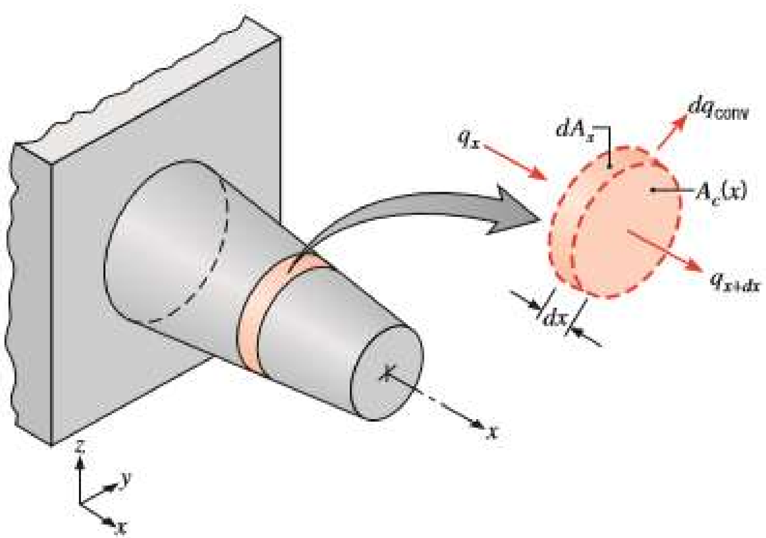


$$\dot{Q}_x = \dot{Q}_{x+dx} + d\dot{Q}_{conv}$$

$$-kA_c\frac{dT}{dx} = -kA_c\frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx}\left(-kA_c\frac{dT}{dx}\right)dx + hdA_s(T - T_\infty)$$

Equação da Condução de Calor na Aleta

Substituindo os termos no balanço de energia:



$$\dot{Q}_x = \dot{Q}_{x+dx} + d\dot{Q}_{conv}$$

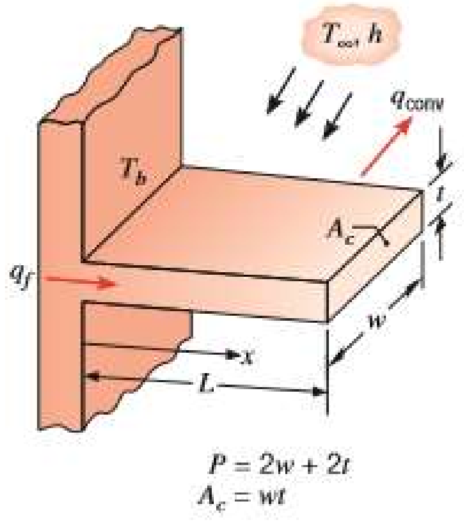
$$\cancel{-kA_c\frac{dT}{dx}} = \cancel{-kA_c\frac{dT}{dx}} + \frac{d}{dx}\left(-kA_c\frac{dT}{dx}\right)dx + hdA_s(T - T_\infty)$$

$$\boxed{k\frac{d}{dx}\left(A_c\frac{dT}{dx}\right)dx - hdA_s(T - T_\infty) = 0}$$

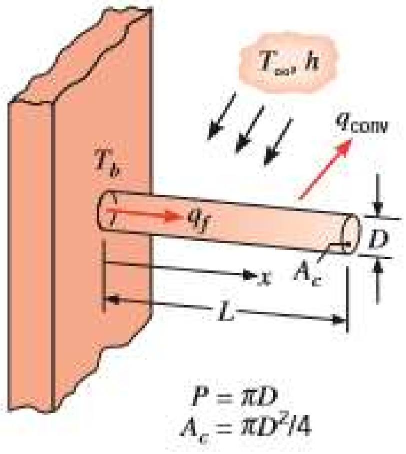
Equação geral para aleta com área constante ou variável.

Equação da Condução de Calor na Aleta

Assumindo aleta de área de seção transversal constante:



retangular



piniforme

$$k\frac{d}{dx}\left(A_c\frac{dT}{dx}\right)dx - hdA_s(T - T_\infty) = 0$$

$$dA_s = Pdx \qquad A_c = A = constante$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA}(T - T_\infty) = 0$$

Equação da Condução de Calor na Aleta

Para simplificar a equação, impomos uma mudança de variável (θ = excesso de temperatura):

$$\theta = T - T_\infty \longrightarrow \frac{d\theta}{dT} = 1 \longrightarrow d\theta = dT \longrightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{dT}{dx}$$

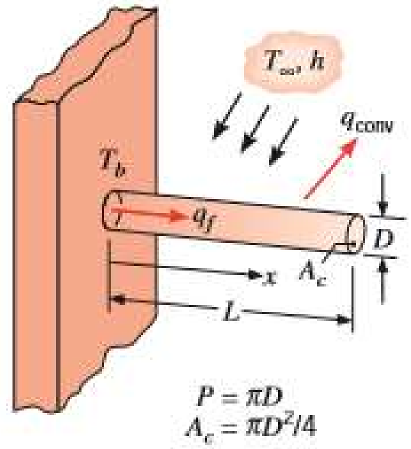
e fazendo: $$m^2 = \frac{hP}{kA}$$

temos:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA}(T - T_\infty) = 0 \xrightarrow{\text{Se transforma em}} \boxed{\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0}$$

Equação da Condução de Calor na Aleta

A solução geral da EDO $\dfrac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$ é:



$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

onde C_1 e C_2 são determinadas através das condições de contorno.

<u>CC1</u>: Na base da aleta, $T(x = 0) = T_b$, ou seja: $\boxed{\theta(0) = T_b - T_\infty = \theta_b}$

<u>CC2</u>: Na extremidade da aleta há 4 situações físicas possíveis:

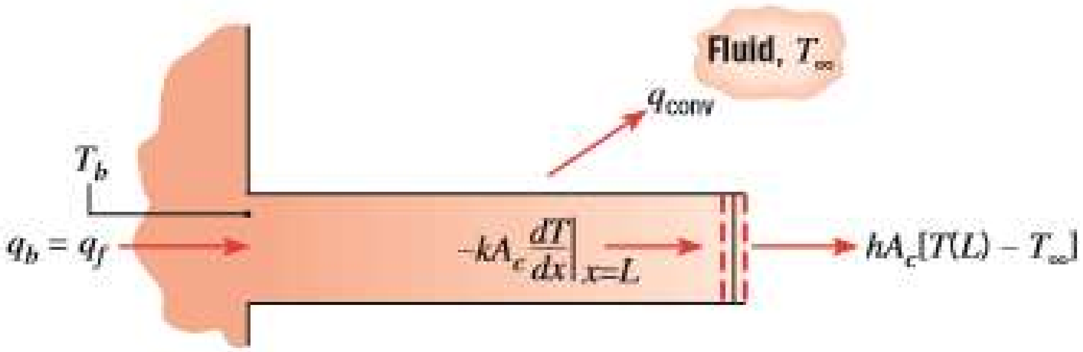
Equação da Condução de Calor na Aleta

A) Convecção: $h\theta(L) = -k \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L}$

B) Adiabática (isolada): $k \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = 0$

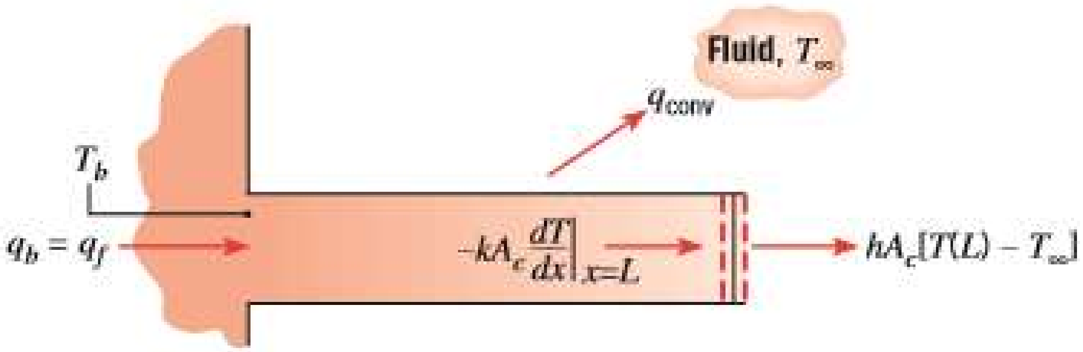
C) Temperatura prescrita: $\theta(L) = \theta_L$

D) Aleta infinita: $\theta(L) = 0$



Equação da Condução de Calor na Aleta

A) Convecção: $h\theta(L) = -k\left.\dfrac{d\theta}{dx}\right|_{x=L}$



B) Adiabática (isolada): $k\left.\dfrac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = 0$

C) Temperatura prescrita: $\theta(L) = \theta_L$

D) Aleta infinita: $\theta(L) = 0$

Equação da Condução de Calor na Aleta

Combinando as condições de contorno com a equação geral: $\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$

$$\theta(0) = \theta_b \longrightarrow \theta_b = C_1 + C_2$$

$$h\theta(L) = -k \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} \longrightarrow h(C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL}) = km(C_2 e^{-mL} - C_1 e^{mL})$$

Equação da Condução de Calor na Aleta

Combinando as condições de contorno com a equação geral: $\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$

$$\theta(0) = \theta_b \quad \longrightarrow \quad \theta_b = C_1 + C_2$$

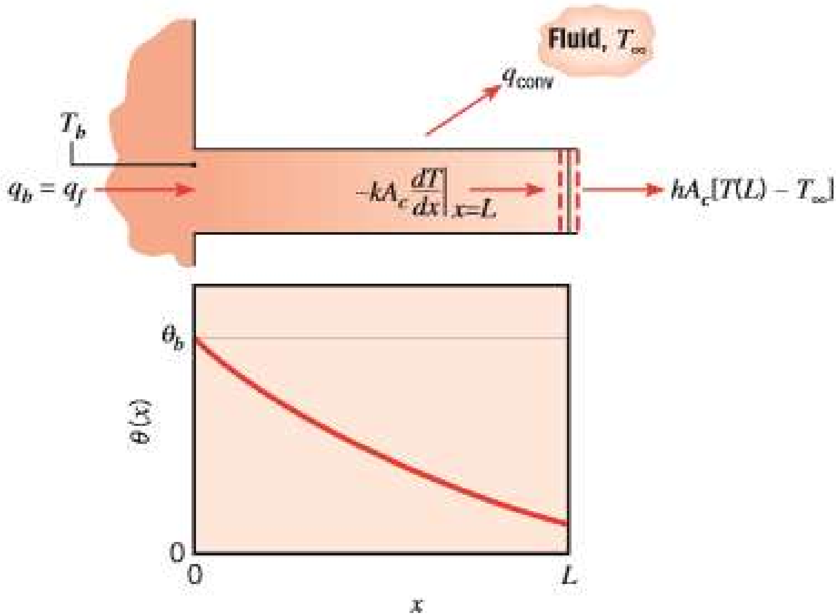
$$h\theta(L) = -k \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} \quad \longrightarrow \quad h(C_1 e^{mL} + C_2 e^{-m} \ ) = km(C_2 e^{-mL} - C_1 e^{mL})$$

$$\boxed{\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x) + (h/km)\sinh m(L-x)}{\cosh mL + (h/km)\sinh mL}}$$

Equação da Condução de Calor na Aleta

A distribuição de temperatura tem a forma:

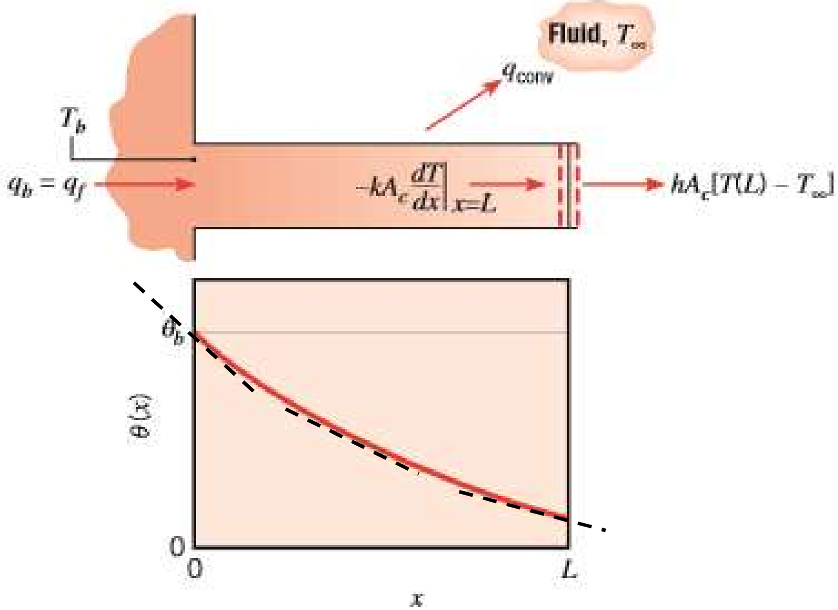
$$\theta(x) = \frac{\cosh m(L-x) + (h/km)\sinh m(L-x)}{\cosh mL + (h/km)\sinh mL}\theta_b$$



Equação da Condução de Calor na Aleta

A distribuição de temperatura tem a forma:

$$\theta(x) = \frac{\cosh m(L-x) + (h/km)\sinh m(L-x)}{\cosh mL + (h/km)\sinh mL}\theta_b$$

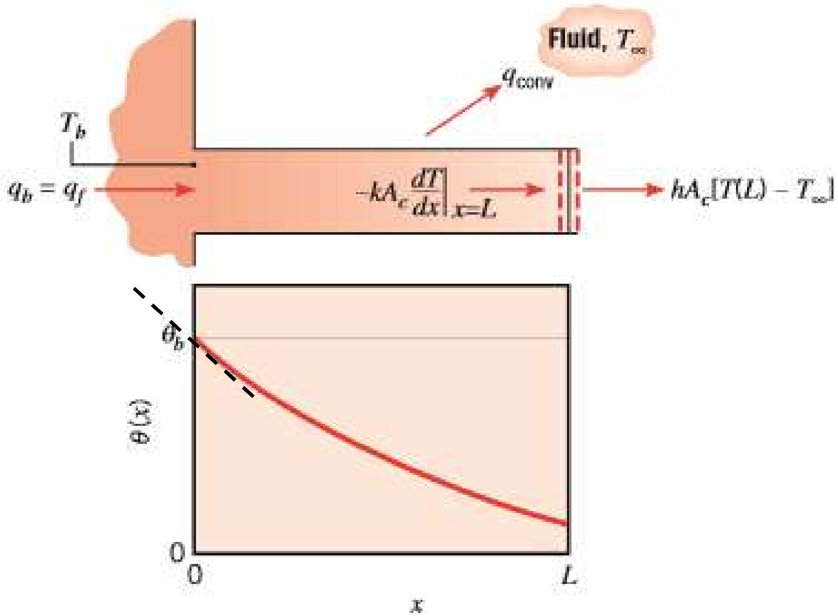


Note que a derivada diminui ao longo do comprimento da aleta.

Equação da Condução de Calor na Aleta

Para calcular a taxa de transferência de calor na aleta, podemos aplicar a Lei de Fourier em sua base:

$$\dot{Q}_a = \dot{Q}_b = -kA\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = -kA\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0}$$



$$\boxed{\dot{Q}_a = \sqrt{hPkA}\,\theta_b\,\frac{\sinh mL + (h/km)\cosh mL}{\cosh mL + (h/km)\sinh mL}}$$

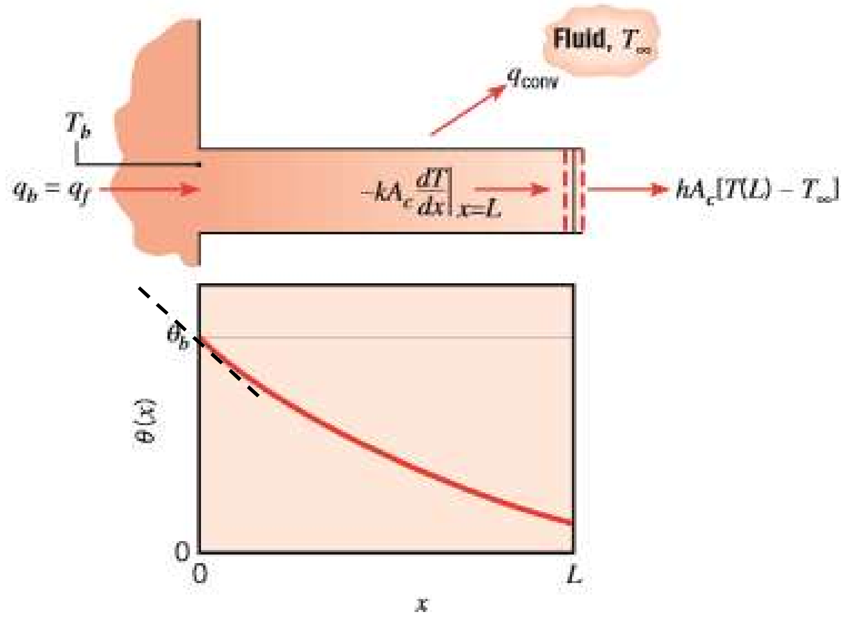
Equação da Condução de Calor na Aleta

Para calcular a taxa de transferência de calor na aleta, podemos aplicar a Lei de Fourier em sua base:

$$\dot{Q}_a = \dot{Q}_b = -kA\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = -kA\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0}$$

$$\boxed{\dot{Q}_a = \sqrt{hPkA}\,\theta_b \frac{\sinh mL + (h/km)\cosh mL}{\cosh mL + (h/km)\sinh mL}}$$

M



Equação da Condução de Calor na Aleta

Case	Tip Condition ($x = L$)	Temperature Distribution θ/θ_b	Fin Heat Transfer Rate q
A	Convection heat transfer: $h\theta(L) = -kd\theta/dx\vert_{x=L}$	$\dfrac{\cosh m(L-x) + (h/mk)\sinh m(L-x)}{\cosh mL + (h/mk)\sinh mL}$ (3.75)	$M\dfrac{\sinh mL + (h/mk)\cosh mL}{\cosh mL + (h/mk)\sinh mL}$ (3.77)
B	Adiabatic: $d\theta/dx\vert_{x=L} = 0$	$\dfrac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$ (3.80)	$M\tanh mL$ (3.81)
C	Prescribed temperature: $\theta(L) = \theta_L$	$\dfrac{(\theta_L/\theta_b)\sinh mx + \sinh m(L-x)}{\sinh mL}$ (3.82)	$M\dfrac{(\cosh mL - \theta_L/\theta_b)}{\sinh mL}$ (3.83)
D	Infinite fin ($L \rightarrow \infty$): $\theta(L) = 0$	e^{-mx} (3.84)	M (3.85)

$\theta \equiv T - T_\infty$ $\quad m^2 \equiv hP/kA_c$

$\theta_b = \theta(0) = T_b - T_\infty$ $\quad M \equiv \sqrt{hPkA_c}\theta_b$

3.106) Um longo bastão circular de alumínio tem uma de suas extremidades fixa a uma parede quente e transfere calor por convecção para um fluido frio.

(a) Se o diâmetro do bastão for triplicado, qual é o aumento percentual da taxa de remoção de calor pelo bastão?
(b) Se um bastão de cobre com o mesmo diâmetro for usado em lugar do bastão de alumínio, qual é o aumento percentual da taxa da remoção de calor pelo bastão?

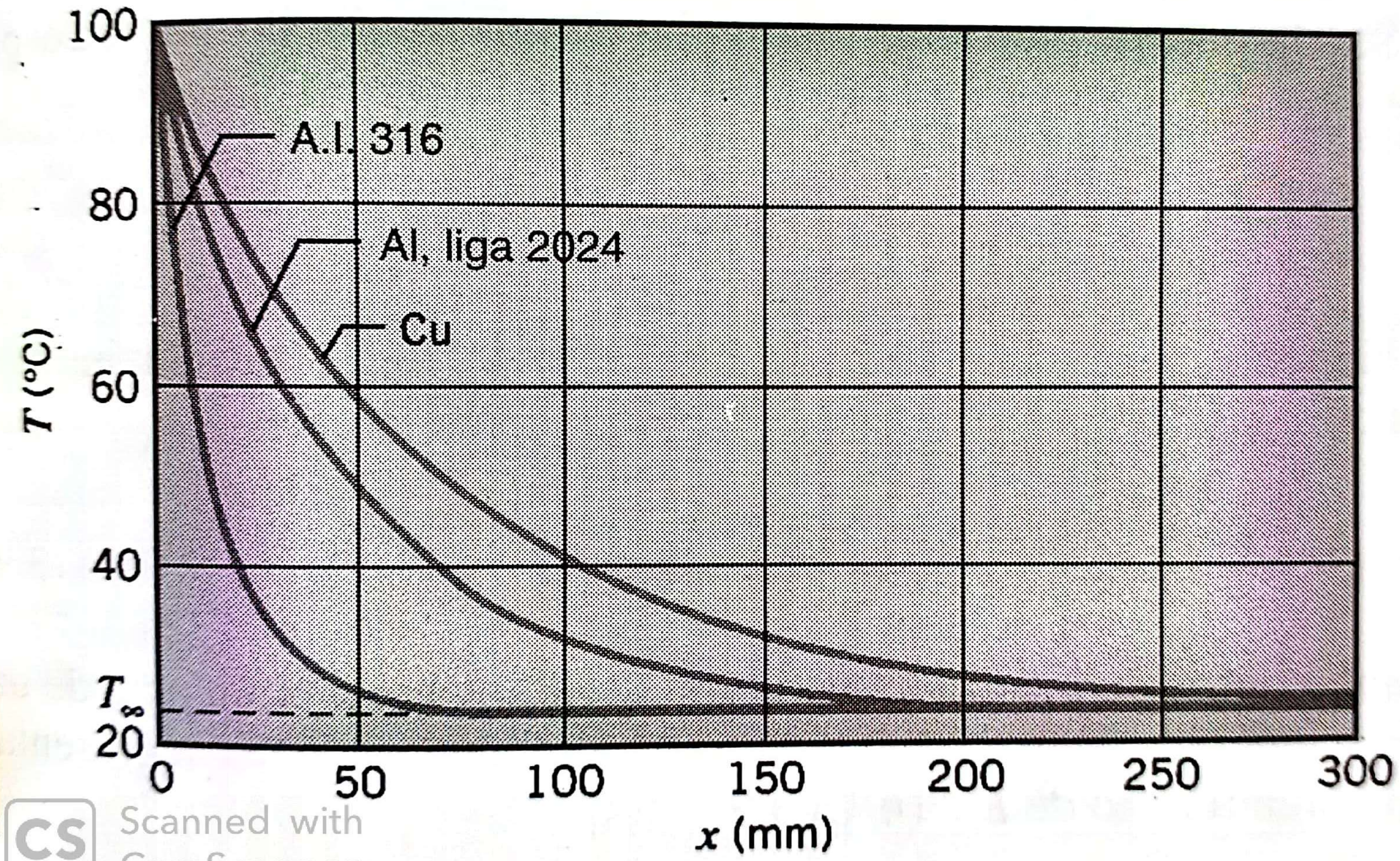
Um bastão muito longo com 5 mm de diâmetro possui uma de suas extremidades mantida a 100 °C. A superfície do bastão está exposta ao ar ambiente a 25 °C, onde há um coeficiente de transferência de calor por convecção de 100 $W/m^2.K$.

(a) Determine a distribuição de temperatura e a perda de calor em bastões de cobre, liga de alumínio e aço inoxidável.

(b) Quais devem ser os comprimentos dos bastões para que possam ser considerados infinitos?

Condutividade térmica dos materiais envolvidos @ 65 °C

- Cobre: 398 W/m.K
- Liga Al: 180 W/m.K
- Aço inox: 14 W/m.K


100
80
60
40
20
T_∞
T (°C)
A.I. 316
Al, liga 2024
Cu
0
50
100
150
200
250
300
x (mm)

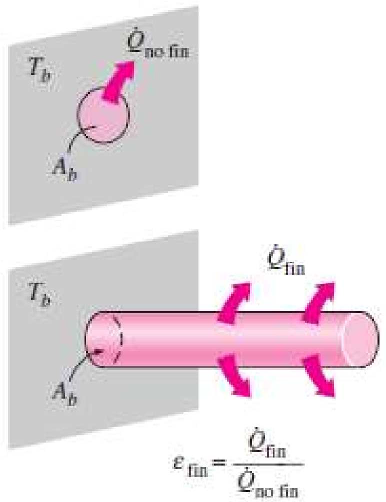
Desempenho da Aleta

Uma medida de desempenho da aleta é a **efetividade, $\boldsymbol{\varepsilon_a}$**.

$$\varepsilon_a = \frac{\dot{Q}_a}{\dot{Q}_{base}} = \frac{\dot{Q}_a}{hA_{base}\theta_b}$$

→ Taxa de transferência de calor da aleta

→ Taxa de transferência de calor sem aleta



Para aleta de seção uniforme e aproximação de comprimento infinito:

$$\varepsilon_a = \frac{kP}{hA_{base}}$$

A efetividade aumenta com:

- Maior k
- Maior P/A_{base}
- Menor h

Valor típico:
$\varepsilon_a \geq 2$

Desempenho da Aleta

Outra medida de desempenho da aleta é a **eficiência, $\boldsymbol{\eta_a}$**.

$$\eta_a = \frac{\dot{Q}_a}{\dot{Q}_{max}} = \frac{\dot{Q}_a}{hA_s\theta_b}$$

→ Taxa de transferência de calor da aleta

→ Taxa de transferência de calor ideal da aleta

Desempenho da Aleta

Outra medida de desempenho da aleta é a **eficiência, $\boldsymbol{\eta_a}$**.

$$\eta_a = \frac{\dot{Q}_a}{\dot{Q}_{max}} = \frac{\dot{Q}_a}{hA_s\theta_b}$$

$\dot{Q}_a \longrightarrow$ Taxa de transferência de calor da aleta

$hA_s\theta_b \longrightarrow$ Taxa de transferência de calor ideal da aleta

Para uma aleta de seção reta constante e com extremidade adiabática (caso B):

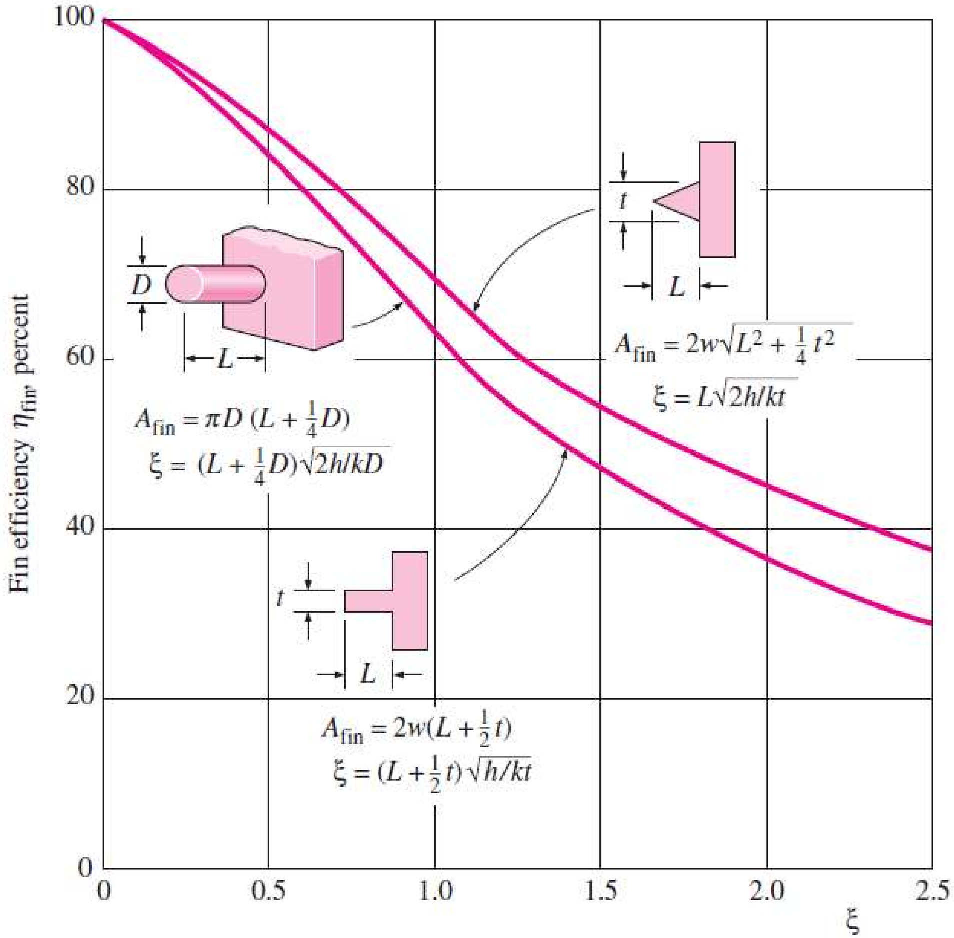
$$\eta_a = \frac{\dot{Q}_a}{hA_s\theta_b} = \frac{M \tanh mL}{hPL\theta_b} = \frac{\tanh mL}{mL} \Rightarrow \begin{array}{c} \eta_a \to 0 \; quando \; L \to \infty \\ \eta_a \to 1 \; quando \; L \to 0 \end{array}$$

Para extremidade com convecção (caso A):

$$\eta_a = \frac{\tanh mL_c}{mL_c}$$

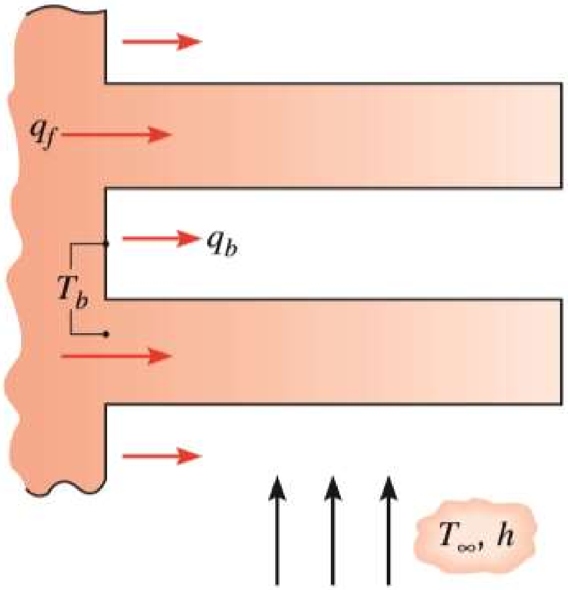
$$\boxed{L_c = L + A_c/P}$$

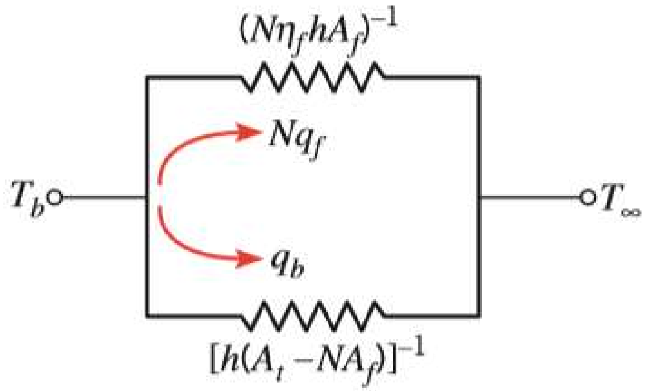
Desempenho da Aleta



Desempenho da Aleta

Associando o conceito de eficiência da aleta com resistência térmica, podemos avaliar a troca de calor de uma superfície aletada:





$$\dot{Q} = \frac{T_b - T_\infty}{R_{eq}}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{1/hA_{base}} + \frac{1}{1/N\eta_f hA_f}$$

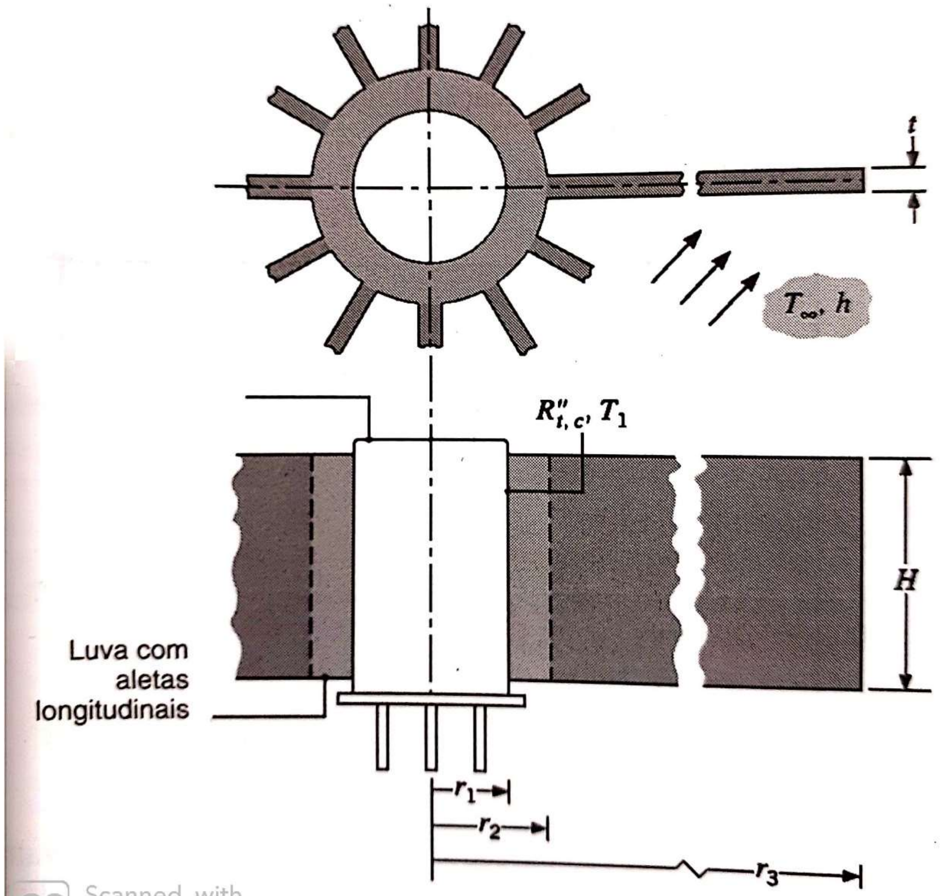
$$A_{base} = A_t - NA_f$$

A_t é a área total exposta ao fluido.
A_f é a área de superfície da aleta.

Exemplo: A transferência de calor a partir de um transistor pode ser aumentada pela sua colocação no interior de uma luva de alumínio (k = 200 W/m.K) que possui 12 aletas longitudinais usinadas sobre a superfície externa. O raio e a altura do transistor são r1 = 2 mm e H = 6 mm, respectivamente, enquanto as aletas possuem comprimento L = r3 – r2 = 10 mm e espessura t = 0,7 mm. A espessura da luva é de r2 – r1 = 1 mm, e a resistência de contato na interface luva-transistor é igual a R"c = 10^-3 m².K/W. Ar escoa sobre o conjunto a uma temperatura de 20 °C e o coeficiente de troca de calor por convecção é 25 W/m².K.

(a) Esboce o circuito térmico equivalente referente à transferência de calor da superfície do transistor para o ar. Identifique as resistências.

(b) Avalie cada uma das resistências do circuito. Calcule a taxa de transferência de calor se a temperatura superficial do transistor é 80°C.



t
T_∞, h
$R''_{t,c}, T_1$
H
Luva com
aletas
longitudinais
r_1
r_2
r_3