UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Campus Araranguá - ARA
Departamento de Energia e Sustentabilidade

UNIDADE 6
ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL NÃO VISCOSO

Equação de Euler

- No último capítulo, deduzimos as equações do movimento para um fluido incompressível, com propriedades constantes e newtoniano. Agora, podemos aplicar simplificações a fim de modelar situações práticas.

- Em muitas aplicações, o escoamento pode ser considerado invíscido (sem atrito ou não viscoso), de modo que adota-se μ = 0.

- Assim, as equações de Navier-Stokes são simplificadas. Para a direção x, temos:

Equação genérica (dir. X)

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Equação de Euler (dir. X)

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}$$

Equação de Euler

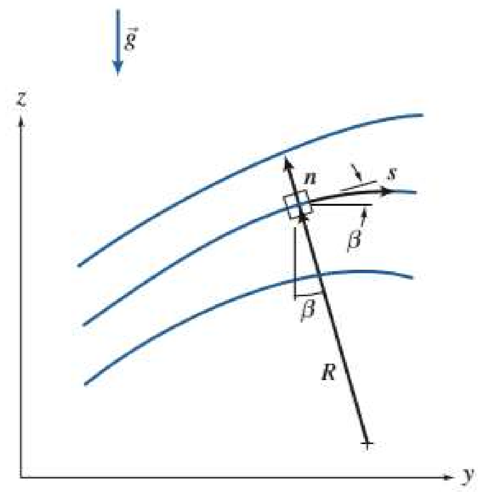
Exemplo: Num escoamento sem atrito e incompressível, o campo de velocidade (m/s) e a força de campo são dados por $\vec{V} = Ax\hat{\imath} - Ay\hat{\jmath}$ e $\vec{g} = -g\hat{k}$; as coordenadas são medidas em metros. A pressão no ponto (0;0;0) é p0. Obtenha uma expressão para o campo de pressão p(x;y;z).

Equação de Euler em coordenadas de LC

- No escoamento em regime permanente, uma partícula fluida move-se ao longo de uma LC (linhas de trajetória e corrente coincidem). Assim, ao descrever o movimento de uma partícula em regime permanente, a distância ao longo de uma LC é uma coordenada lógica para se escrever as equações do movimento.

- Deduziremos a equação de Euler em **coordenadas de LC**. Isso permitirá analisar variações de pressão e velocidade ao longo do escoamento.

- Considere o esquema ao lado.

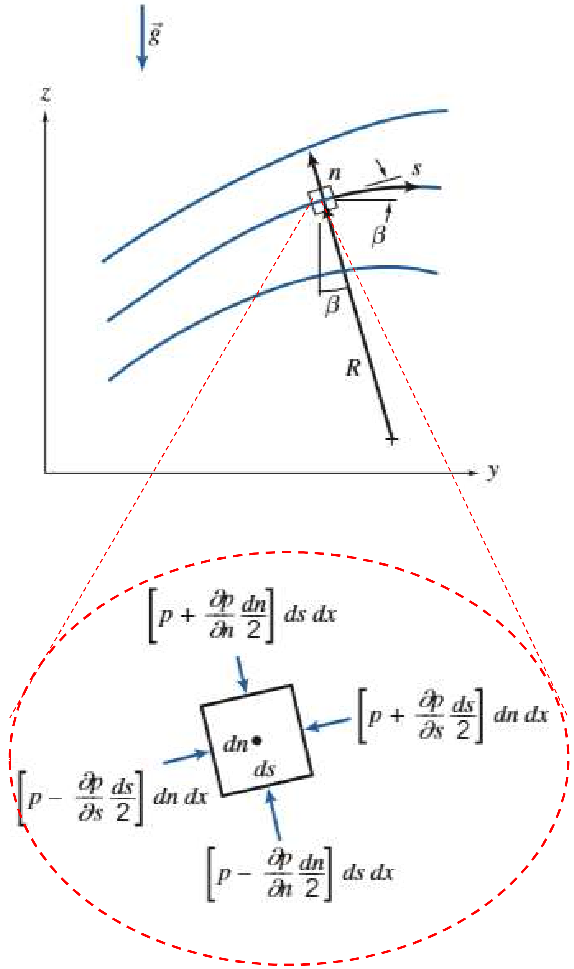


Equação de Euler em coordenadas de LC

- No escoamento em regime permanente, uma partícula fluida move-se ao longo de uma LC (linhas de trajetória e corrente coincidem). Assim, ao descrever o movimento de uma partícula em regime permanente, a distância ao longo de uma LC é uma coordenada lógica para se escrever as equações do movimento.

- Deduziremos a equação de Euler em **coordenadas de LC**. Isso permitirá analisar variações de pressão e velocidade ao longo do escoamento.

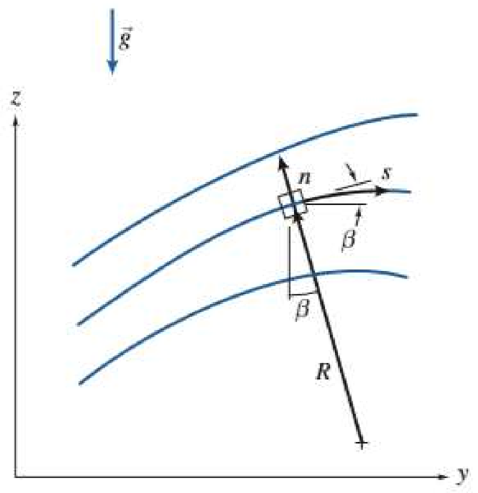
- Considere o esquema ao lado.



Equação de Euler em coordenadas de LC

- Aplicando a 2ª lei de Newton na direção **s** ao elemento de volume dsdndx:

$$dF_{s,s} + dF_{b,s} = dma_s$$

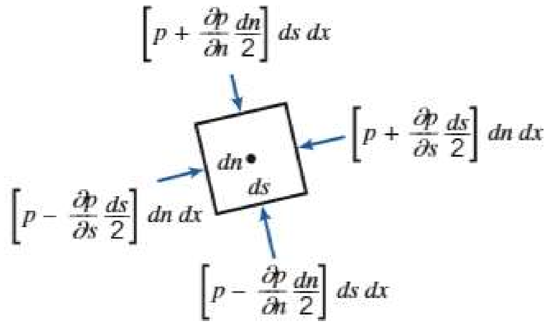


- A aceleração na direção s (as) é:

$$a_s = \frac{dV_s}{dt} = \frac{\partial V_s}{\partial t} + V_s \frac{\partial V_s}{\partial s} \quad \text{análogo a: } a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

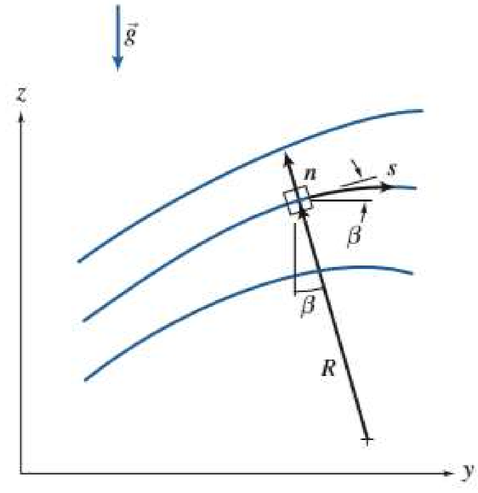
- Como o escoamento é invíscido, as forças de superfície são devidas apenas às pressões nas faces.

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial s}\frac{ds}{2}\right)dndx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s}\frac{ds}{2}\right)dndx - dmg\sin\beta = dm\left(\frac{\partial V_s}{\partial t} + V_s\frac{\partial V_s}{\partial s}\right)$$



Equação de Euler em coordenadas de LC

- Substituindo a densidade e o volume e simplificando:

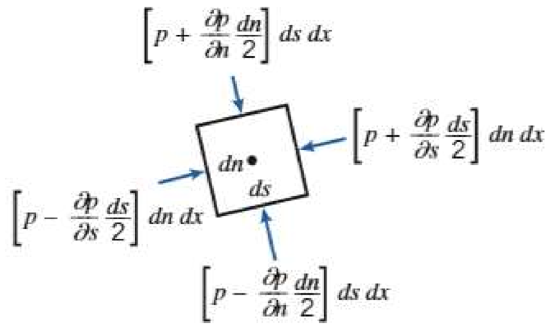


$$\left(p-\frac{\partial p}{\partial s}\frac{ds}{2}\right)dndx-\left(p+\frac{\partial p}{\partial s}\frac{ds}{2}\right)dndx-\rho dxdsdng\sin\beta=\rho dxdsdn\left(\frac{\partial V_s}{\partial t}+V_s\frac{\partial V_s}{\partial s}\right)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial s}-\rho g\sin\beta=\rho\left(\frac{\partial V_s}{\partial t}+V_s\frac{\partial V_s}{\partial s}\right)$$

- Como $\sin\beta=\dfrac{\partial z}{\partial s}$ $\longrightarrow$ $-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial s}-g\dfrac{\partial z}{\partial s}=\dfrac{\partial V_s}{\partial t}+V_s\dfrac{\partial V_s}{\partial s}$

- Em regime permanente e sem desnível $\left(\dfrac{\partial z}{\partial s}=0\right)$



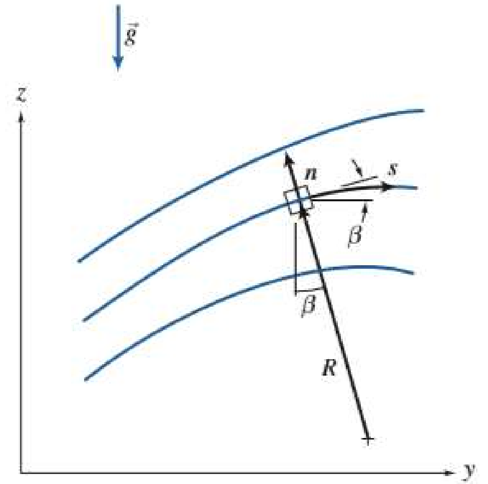
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}=-V_s\frac{\partial V_s}{\partial s}=-V\frac{\partial V}{\partial s}$$

Equação de Euler em coordenadas de LC

- Substituindo a densidade e o volume e simplificando:

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial s}\frac{ds}{2}\right) dndx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s}\frac{ds}{2}\right) dndx - \rho dxdsdng \sin\beta = \rho dxdsdn \left(\frac{\partial V_s}{\partial t} + V_s \frac{\partial V_s}{\partial s}\right)$$

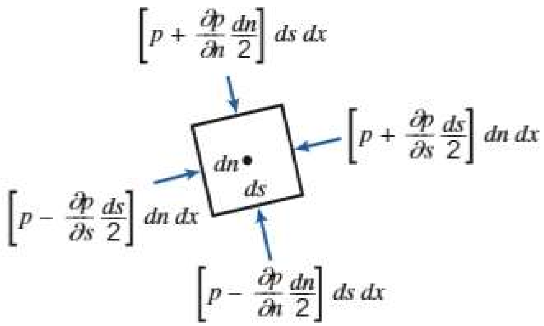
$$-\frac{\partial p}{\partial s} - \rho g \sin\beta = \rho \left(\frac{\partial V_s}{\partial t} + V_s \frac{\partial V_s}{\partial s}\right)$$



- Como $\sin\beta = \dfrac{\partial z}{\partial s} \longrightarrow -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial s} - g\dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{\partial V_s}{\partial t} + V_s \dfrac{\partial V_s}{\partial s}$

- Em regime permanente e sem desnível $\left(\dfrac{\partial z}{\partial s} = 0\right)$

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = -V\frac{\partial V}{\partial s}} \longrightarrow$$ **p e V variam inversamente**



Equação de Euler em coordenadas de LC

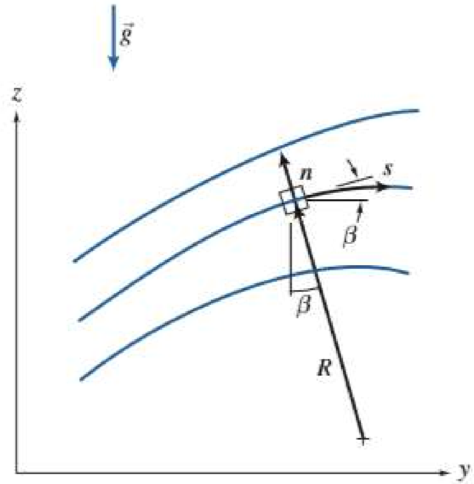
- Para a direção **n**:

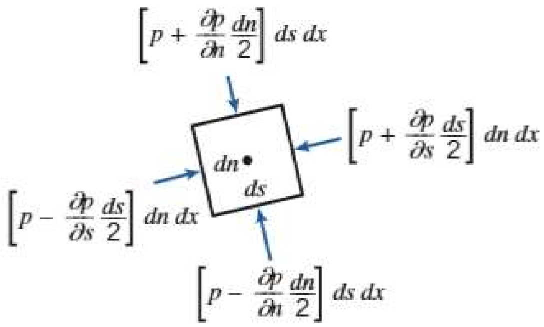
$$dF_{s,n} + dF_{b,n} = dma_n$$

- Expandindo a expressão:

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial n}\frac{dn}{2}\right)dsdx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial n}\frac{dn}{2}\right)dsdx - \rho dxdsdng\cos\beta = \rho dxdsdna_n$$

$$-\frac{\partial p}{\partial n} - \rho g\cos\beta = \rho a_n$$





Equação de Euler em coordenadas de LC

- Para a direção **n**:

$$dF_{s,n} + dF_{b,n} = dma_n$$

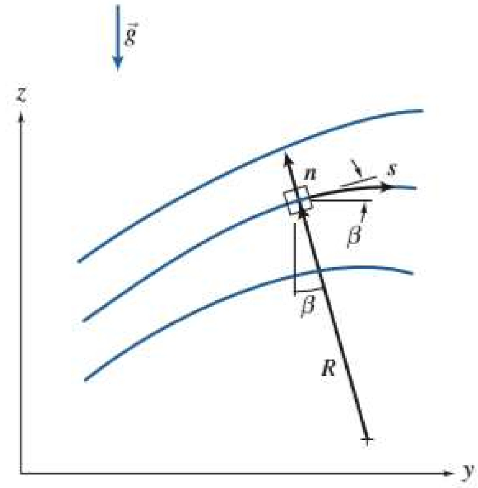
- Expandindo a expressão:

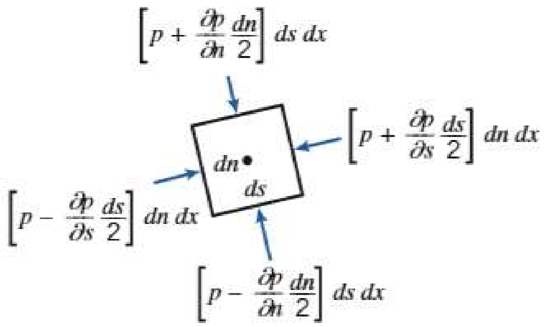
$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial n}\frac{dn}{2}\right) dsdx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial n}\frac{dn}{2}\right) dsdx - \rho dxdsdng\cos\beta = \rho dxdsdna_n$$

$$-\frac{\partial p}{\partial n} - \rho g\cos\beta = \rho a_n$$

- Como $\cos\beta = \dfrac{\partial z}{\partial n}$ e adotando em regime permanente $a_n = -\dfrac{V^2}{R}$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} - g\frac{\partial z}{\partial n} = -\frac{V^2}{R} \xrightarrow{\text{sem desnível}} \boxed{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{V^2}{R}}$$

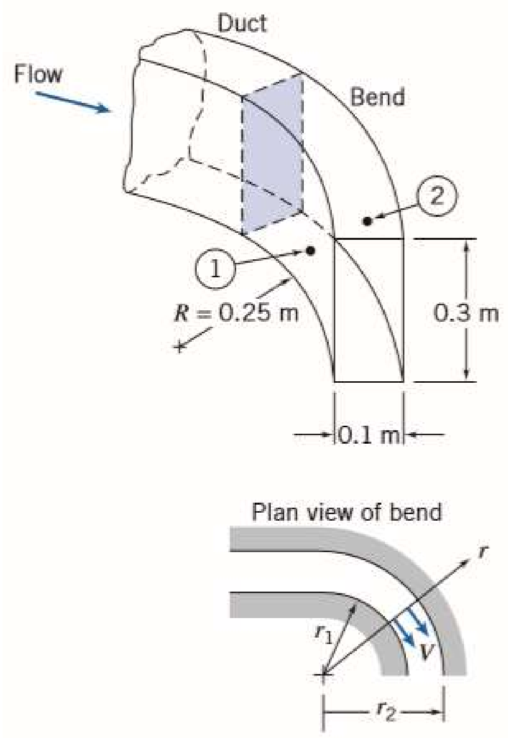




Equação de Euler em coordenadas de LC

Exemplo 6.1: Estimar a vazão volumétrica de ar no duto a partir de medições de pressão na superfície interna e externa da curva:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = 40 mmH_2O$$



Hipóteses: 1) regime permanente;

2) sem atrito (uniforme);

3) incompressível.

Equação de Euler em coordenadas de LC

Aplicando a equação de Euler para a componente **n** (radial) cruzando as linhas de corrente do escoamento, temos:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{V^2}{R} \longrightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = \rho\frac{V^2}{r}$$

Como a seção transversal é constante e não há atrito, a velocidade ao longo da direção s não se altera. Portanto:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = -V\underbrace{\cancel{\frac{\partial V}{\partial s}}}_{0} \longrightarrow \frac{\partial p}{\partial s} = 0 \longrightarrow p = p(r) \longrightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dp}{dr} = \rho\frac{V^2}{r}$$

Separando variáveis e integrando:

$$dp = \rho V^2\frac{dr}{r} \longrightarrow p_2 - p_1 = \rho V^2 \ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$p_2 - p_1 = 1000 * 9{,}81 * \frac{40}{1000} = 392{,}4\ [Pa]$$

$$\rho = 1{,}23\ [kg/m^3]$$

Equação de Euler em coordenadas de LC

Calculando V:

$$V = \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{\rho \ln \frac{r_2}{r_1}}} = \sqrt{\frac{392,4}{1,25 \ln \frac{0,35}{0,25}}} = 30,5 \left[\frac{m}{s}\right]$$

Da definição de vazão volumétrica:

$$\boxed{Q = VA = 30,5 * 0,1 * 0,3 = 0,916 \left[\frac{m^3}{s}\right]}$$

Equação de Bernoulli

- Ao integrar a equação de Euler em regime permanente ao longo de uma LC, obtemos a equação de Bernoulli:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - g\frac{\partial z}{\partial s} = V\frac{\partial V}{\partial s} \quad \text{Eq. Euler ao longo de s (RP)}$$

- Se uma partícula fluida percorre um comprimento ds ao longo de uma LC, podemos escrever:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial s} ds &= dp \\ \frac{\partial z}{\partial s} ds &= dz \\ \frac{\partial V}{\partial s} ds &= dV \end{aligned}\right\} \quad -\frac{dp}{\rho} - gdz - VdV = 0 \xrightarrow{\text{integrando}} \int \frac{dp}{\rho} + \int gdz + \int VdV = 0$$

$$\rho \; constante$$

$$\boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = constante}$$

Equação de Bernoulli

- Condições estabelecidas para dedução da Equação de Bernoulli:

    1. Regime Permanente
    2. Esc. incompressível
    3. Esc. invíscido
    4. Esc. ao longo de uma LC.

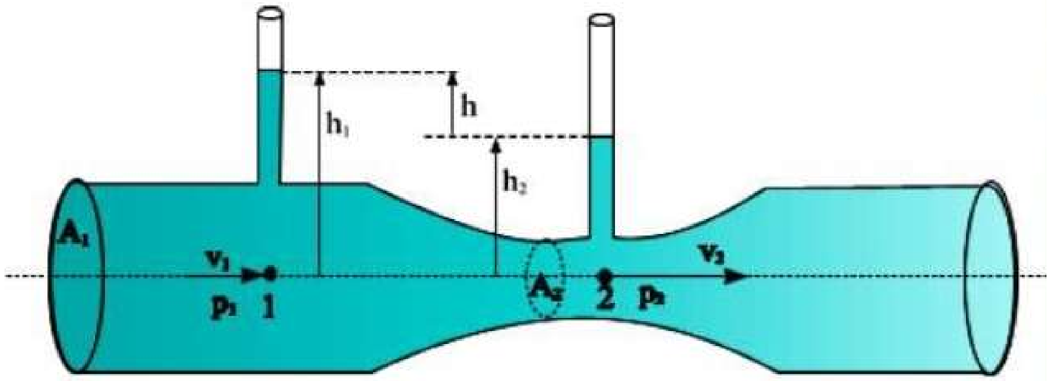
$$\boxed{\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz=constante}$$

- Interpretação física:

As variações de pressão, velocidade e altura se compensam ao longo de uma linha de corrente.

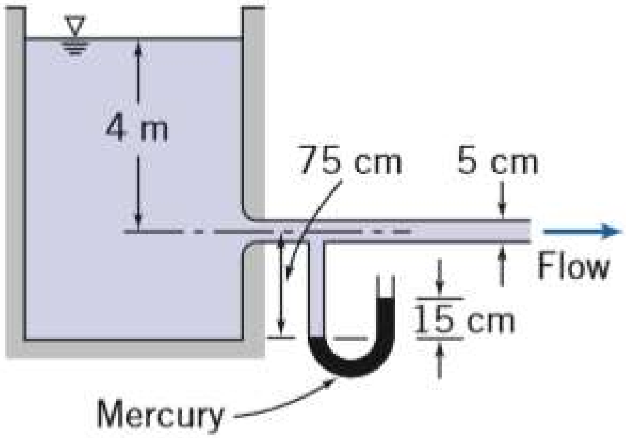
Equação de Bernoulli

Exemplo: O tubo de Venturi é um dispositivo utilizado para medição indireta de velocidade em uma tubulação, a partir de tomadas de pressão. Determine a velocidade em 1 em função do desnível h do manômetro, de g e das áreas A1 e A2.



Equação de Bernoulli

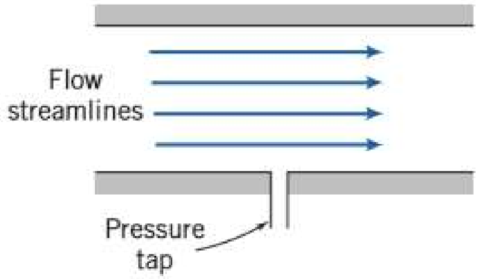
Exemplo: Água flui de um tanque muito grande através de um tubo de 50 mm de diâmetro. O líquido do manômetro é mercúrio. Estime a velocidade no tubo e a vazão de descarga.



Pressões estática, dinâmica e de estagnação

- A pressão explícita na equação de Bernoulli é conhecida como <u>pressão estática</u> ou <u>termodinâmica</u>.

$$\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+gz=constante \longrightarrow p+\rho\frac{V^2}{2}+\rho gz=constante$$



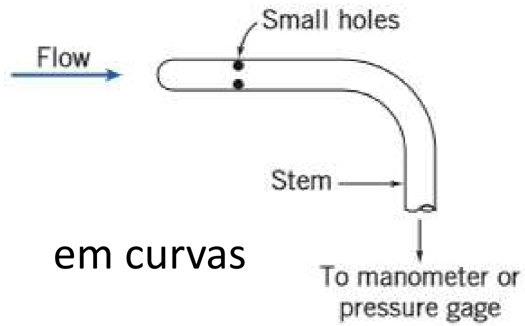
(a) Wall pressure tap

- Como medir essa pressão?

Eq. Euler na direção n $$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}+g\frac{\partial z}{\partial n}=\frac{V^2}{R}$$

Direção na ausência de gravidade e em tubulação reta $$\frac{\partial p}{\partial n}=0$$

em curvas



Pressões estática, dinâmica e de estagnação

- A <u>pressão de estagnação</u> é obtida quando um fluido em movimento é desacelerado até velocidade zero por meio de um processo sem atrito.

- Em um escoamento incompressível, a equação de Bernoulli pode ser utilizada para relacionar variações de velocidade e de pressão ao longo da LC. Desprezando diferença de elevação:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = constante$$

- Se a pressão estática for p em um ponto do escoamento em que a velocidade é V, a pressão de estagnação p_0 onde a velocidade de estagnação é V_0 = 0 pode ser calculada como:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_o}{\rho} + \cancel{\frac{V_o^2}{2}}^{\,0} \longrightarrow \boxed{p_o = p + \rho\frac{V^2}{2}}$$

Pressões estática, dinâmica e de estagnação

- A pressão dinâmica é o déficit entre a pressão de estagnação e a pressão estática. Ela recebe este nome, pois está associada à velocidade do escoamento.

$$p_o = p + \underbrace{\rho \frac{V^2}{2}}_{\text{Pressão dinâmica}}$$

- Resolvendo a expressão acima para a velocidade, temos:

$$V = \sqrt{\frac{2(p_o - p)}{\rho}}$$

- Logo, pode-se determinar a velocidade do escoamento a partir das medições das pressões de estagnação e estática do fluido.

Pressões estática, dinâmica e de estagnação

- A pressão de estagnação é medida com uma sonda chamada de tubo de pitot. A tomada de pressão é acoplada em uma abertura na ponta da sonda, orientada contra o escoamento. A sonda deve estar alinhada com o escoamento.

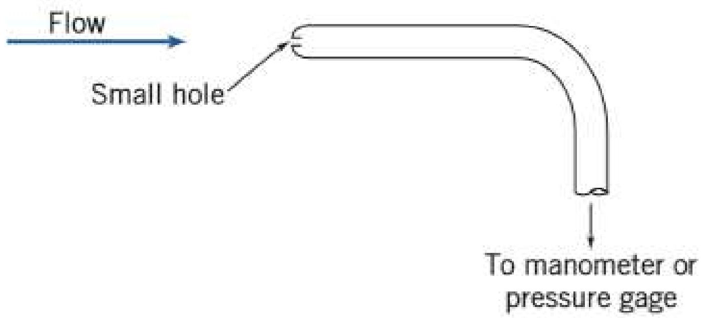
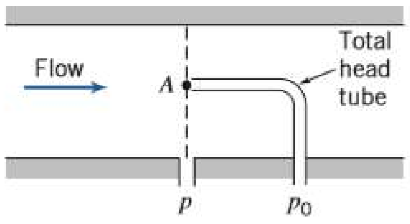
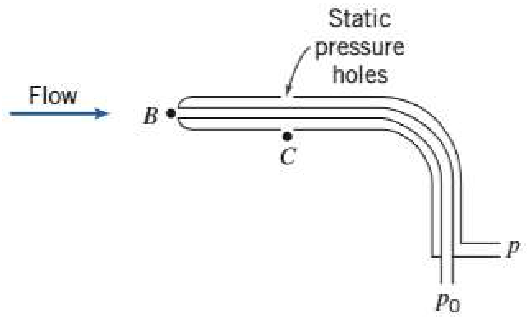


Fig. 6.3 **Measurement of stagnation pressure.**

- Outra possibilidade é utilizar sondas para medição combinada de pressão estática e de estagnação.



(a) Total head tube used with wall static tap



(b) Pitot-static tube

Pressões estática, dinâmica e de estagnação

Exemplo 6.2: Um tubo de pitot é inserido em um escoamento de ar a fim de medir a velocidade (vide figura). A pressão estática é medida no mesmo ponto do escoamento, usando uma tomada de pressão junto à parede. Determine a velocidade do escoamento.