Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

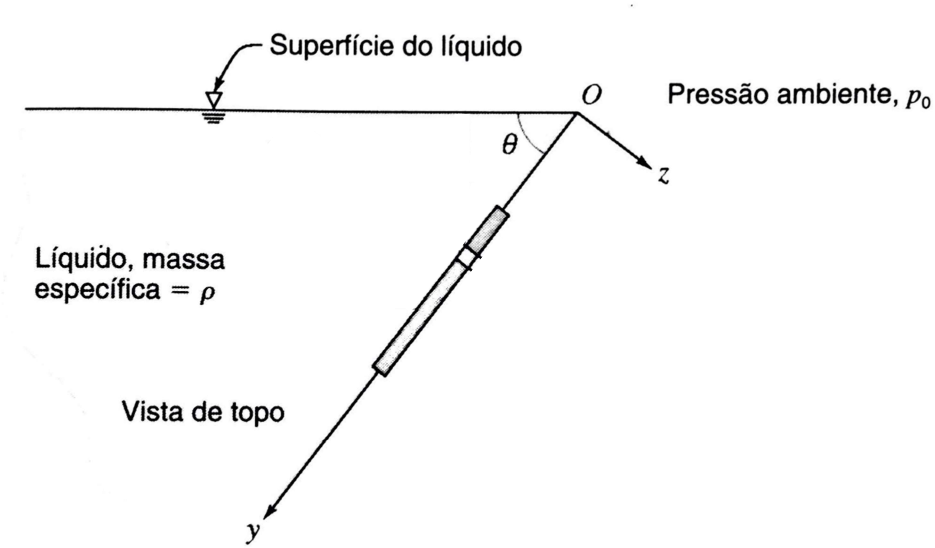
Já sabemos como determinar a distribuição de pressão em um fluido estático.

Assim, podemos examinar a força que atua sobre uma superfície submersa.

Para especificar totalmente a força resultante sobre uma superfície submersa, devemos informar:

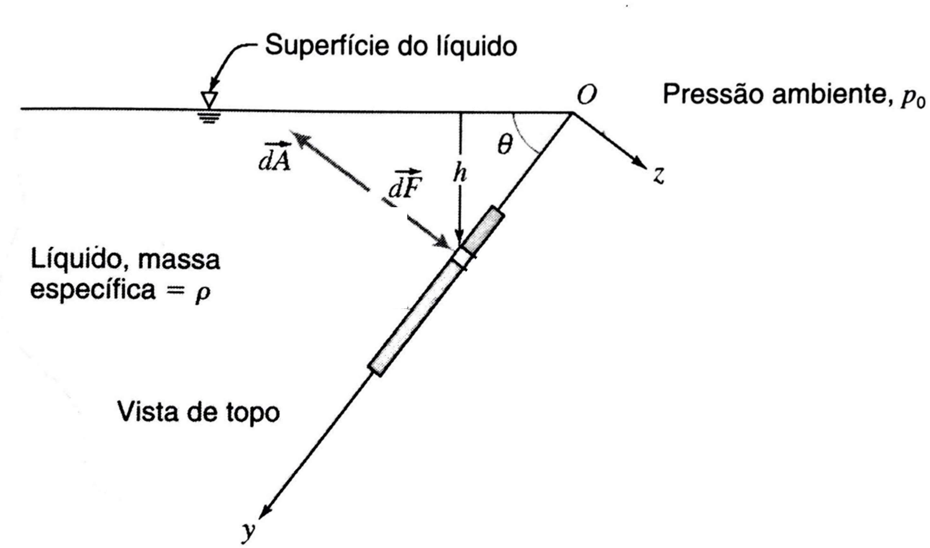
1. Magnitude da força;
2. Sentido da força;
3. Linha de ação da força.

Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas



Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

$$dF = pdA$$

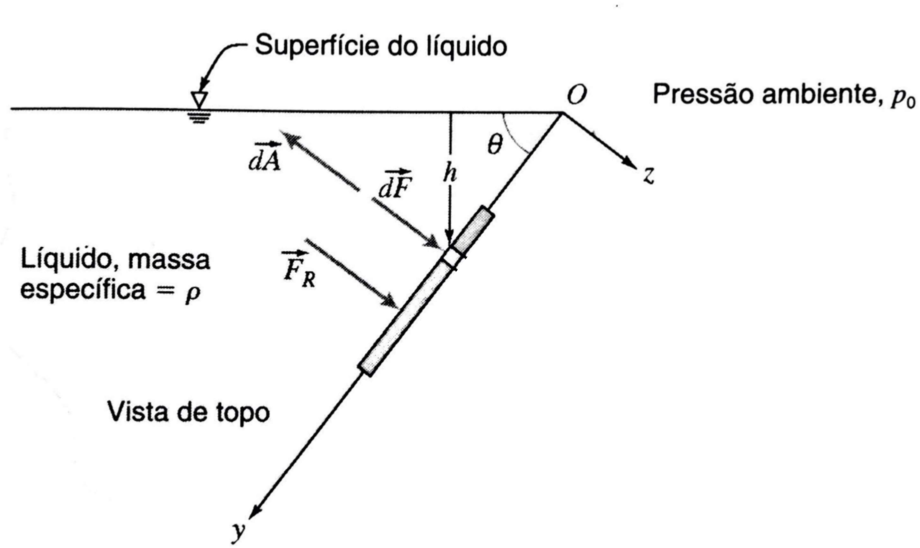


Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

$$dF = p dA$$

Força resultante, F_R:

$$F_R = \int_A dF = \int_A p dA$$



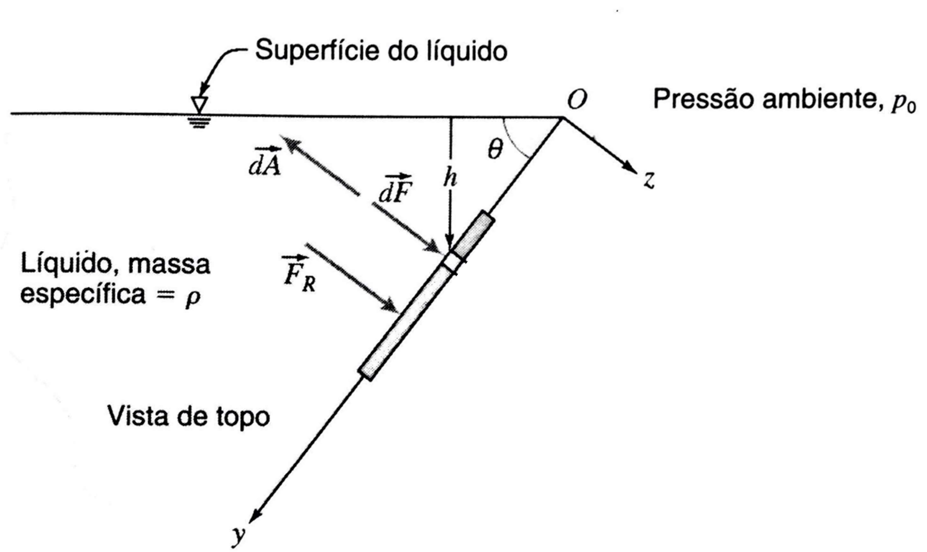
Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

$$F_R = \int_A pdA$$

em que p vem de:

$$\frac{dp}{dh} = \rho g$$

$$p = p_0 + \int_0^h \rho g dh = p_0 + \rho g h$$



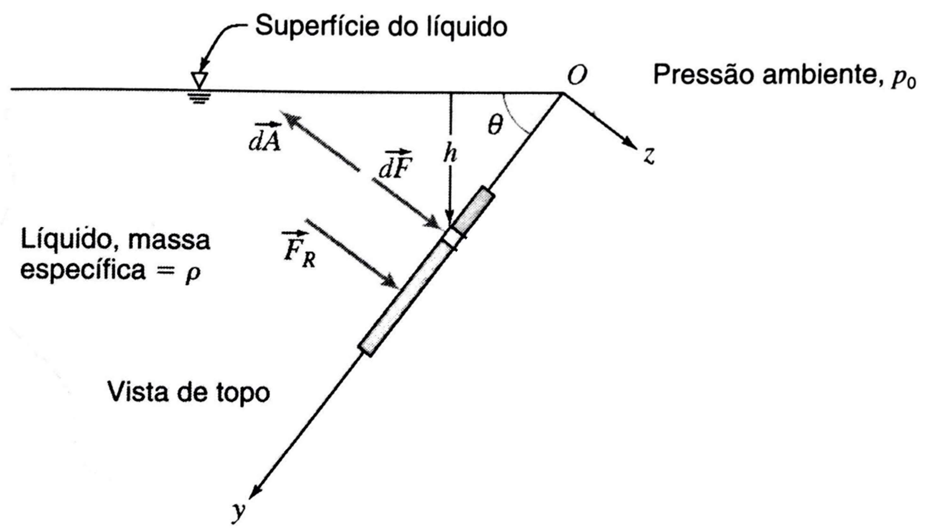
Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

$$F_R = \int_A p dA$$

$$p = p_0 + \rho g h$$

A profundidade h é escrita em termos de y.

$$F_R = \int_A (p_0 + \rho g y \sin\theta) dA$$



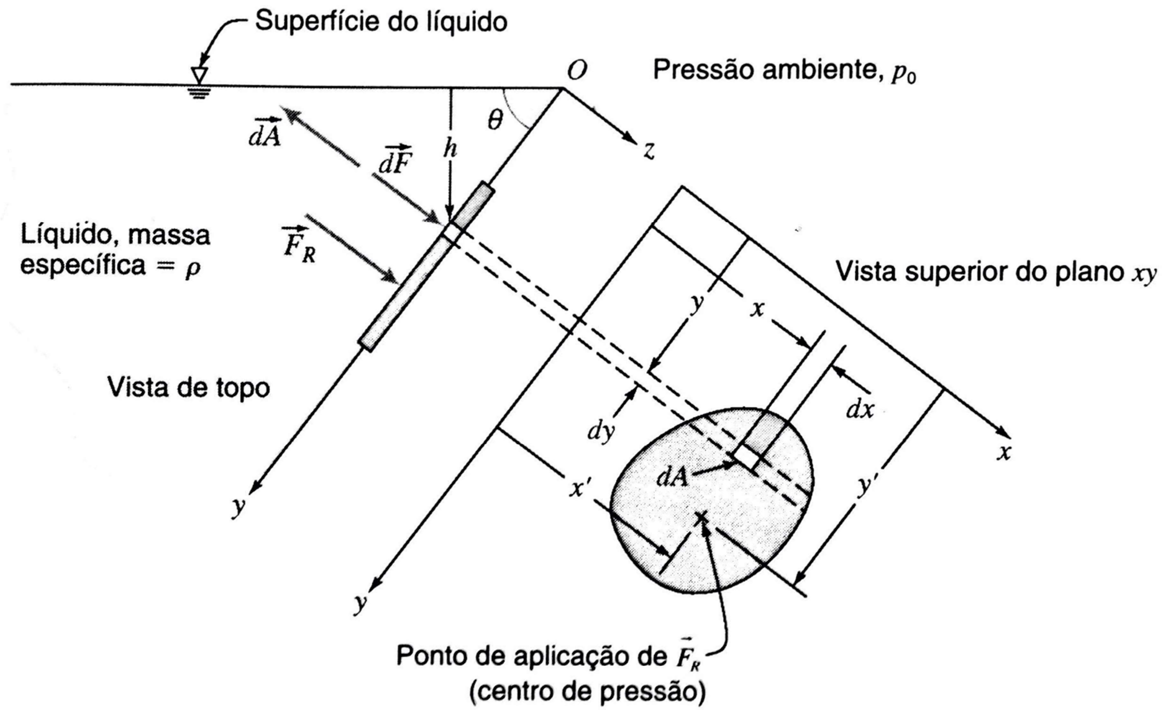
Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

$$F_R = \int_A p dA$$

$$p = p_0 + \rho g h$$

A profundidade h é escrita em termos de y.

$$F_R = \int_A (p_0 + \rho g y \sin\theta) dA$$

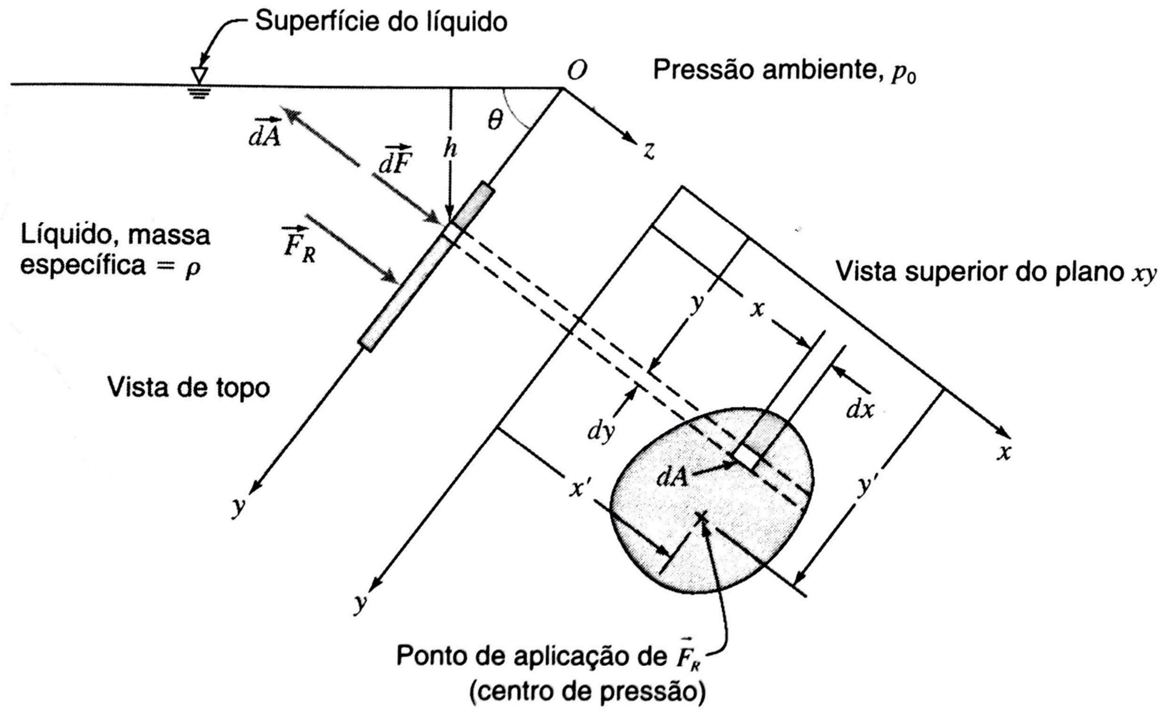


A área dA é escrita em termos das mesmas coordenadas de p.

Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

O ponto de aplicação da $\vec{F}_R$ (centro de pressão), é tal que o momento gerado por essa força em relação a qualquer eixo seja o mesmo gerado pelas forças distribuídas.

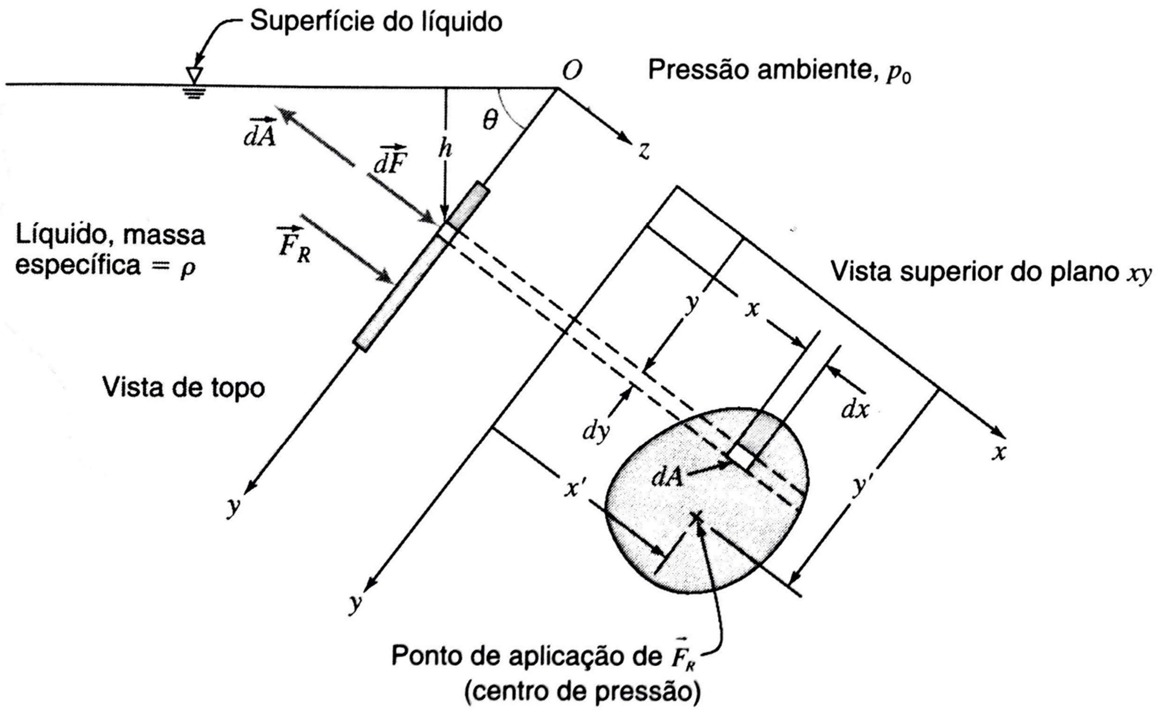
$$\overrightarrow{r'} \times \vec{F}_R = \int \vec{r} \times d\vec{F} = \int_A \vec{r} \times p\, dA\hat{k}$$



Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

O ponto de aplicação da $\vec{F}_R$ (centro de pressão), é tal que o momento gerado por essa força em relação a qualquer eixo seja o mesmo gerado pelas forças distribuídas.

$$\underbrace{\overrightarrow{r'} \times \vec{F}_R}_{\text{Momento de } \vec{F}_R} = \int \underbrace{\vec{r} \times d\vec{F}}_{\text{Momento de cada } d\vec{F}} = \int_A \vec{r} \times p\, dA\hat{k}$$



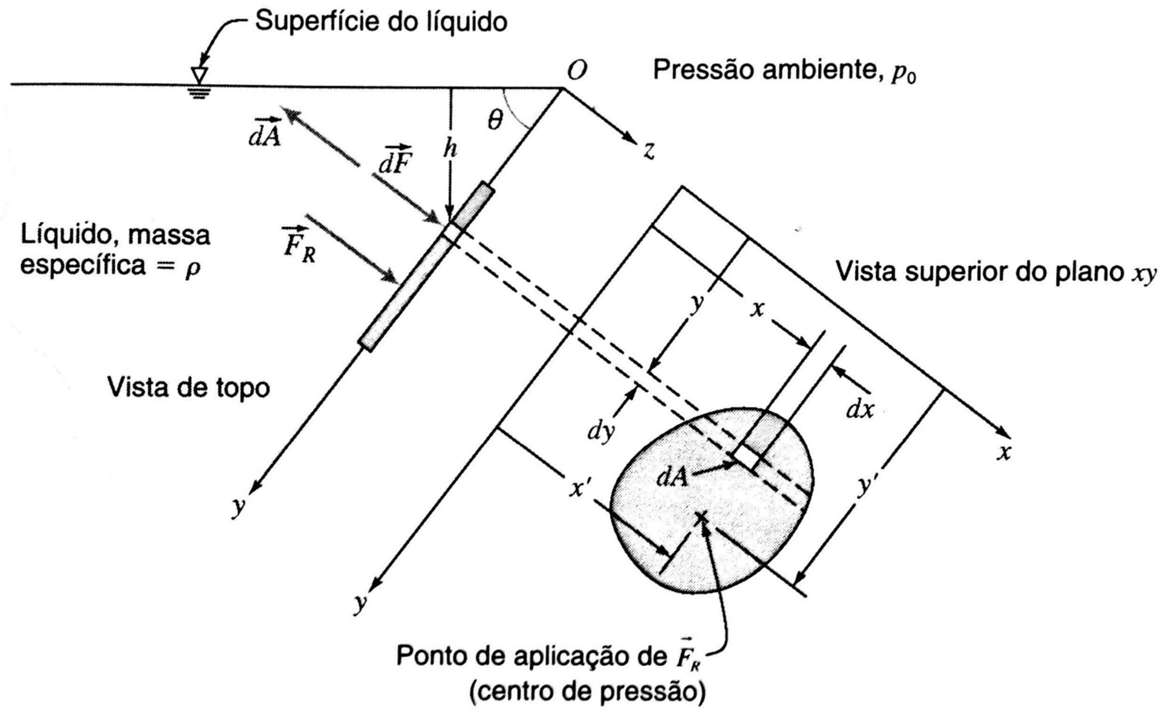
Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

O ponto de aplicação da $\vec{F}_R$ (centro de pressão), é tal que o momento gerado por essa força em relação a qualquer eixo seja o mesmo gerado pelas forças distribuídas.

$$\underbrace{\overrightarrow{r'} \times \vec{F}_R}_{\text{Momento de } \vec{F}_R} = \int \underbrace{\vec{r} \times d\vec{F}}_{\text{Momento de cada } d\vec{F}} = \int_A \vec{r} \times p\, dA\hat{k}$$

$$\overrightarrow{r'} = \hat{\imath}x' + \hat{\jmath}y' \qquad \vec{r} = \hat{\imath}x + \hat{\jmath}y$$

$$\vec{F}_R = F_R\hat{k}$$

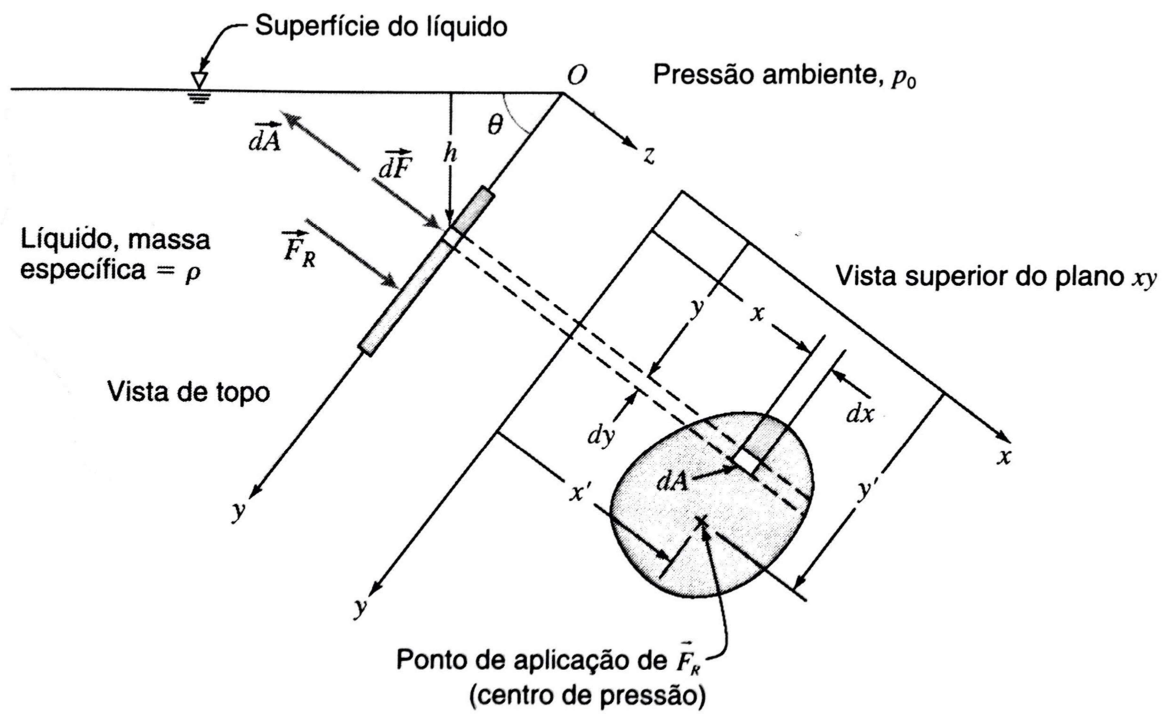


Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Substituindo, temos:

$$(\hat{\imath}x' + \hat{\jmath}y') \times F_R\hat{k} = \int (\hat{\imath}x + \hat{\jmath}y) \times d\vec{F}$$

$$= \int_A (\hat{\imath}x + \hat{\jmath}y) \times p\, dA\hat{k}$$



Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

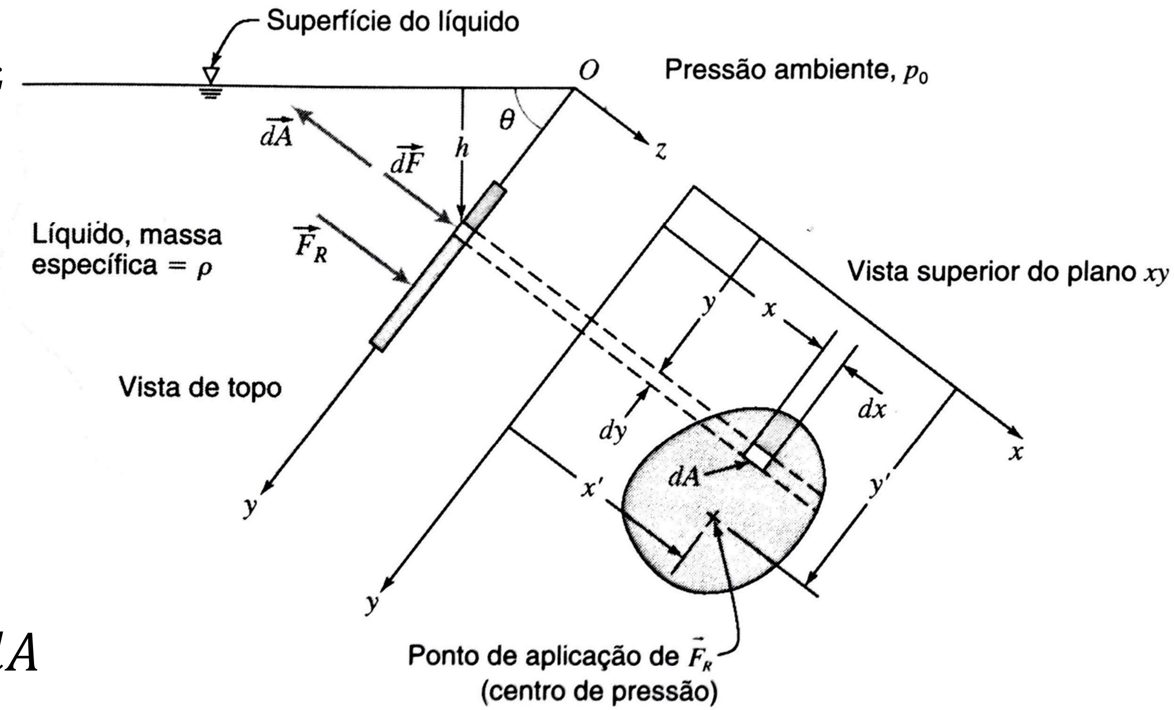
Substituindo, temos:

$$(\hat{\imath}x' + \hat{\jmath}y') \times F_R\hat{k} = \int (\hat{\imath}x + \hat{\jmath}y) \times d\vec{F}$$

$$= \int_A (\hat{\imath}x + \hat{\jmath}y) \times p\, dA\hat{k}$$

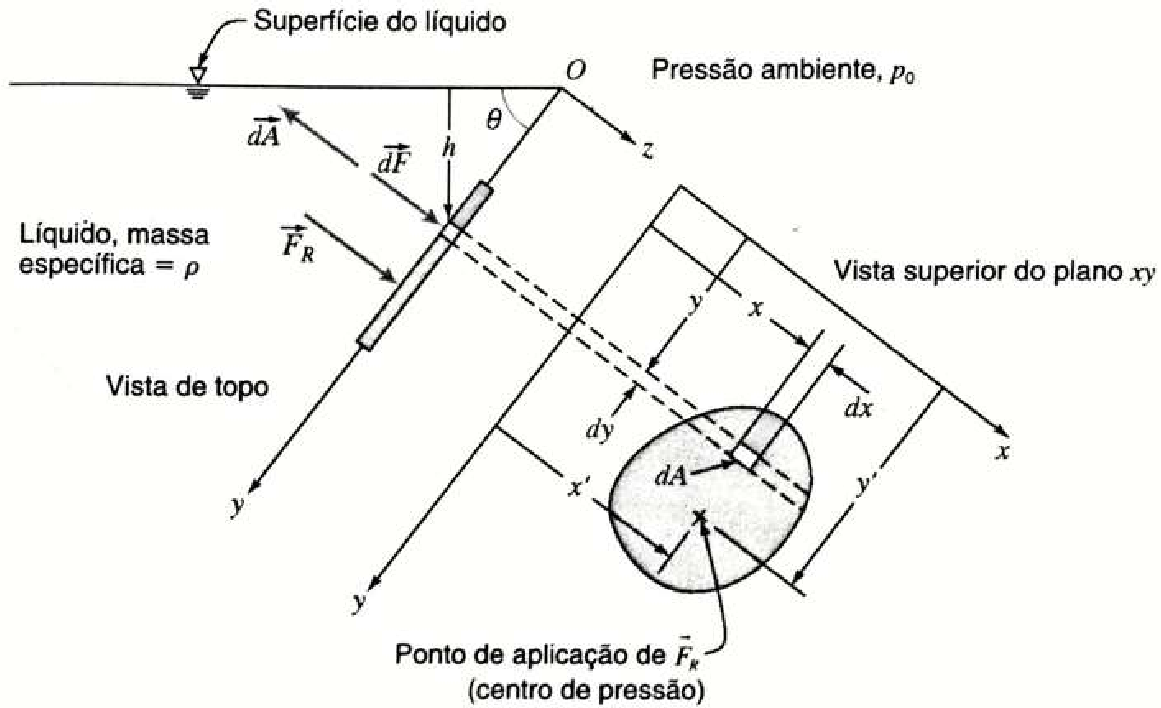
Resolvendo os produtos vetoriais:

$$-\hat{\jmath}x'F_R + \hat{\imath}y'F_R = \int_A (-\hat{\jmath}xp + \hat{\imath}yp)\, dA$$



Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

$$-\hat{\jmath}x'F_R + \hat{\imath}y'F_R = \int_A (-\hat{\jmath}xp + \hat{\imath}yp)\, dA$$



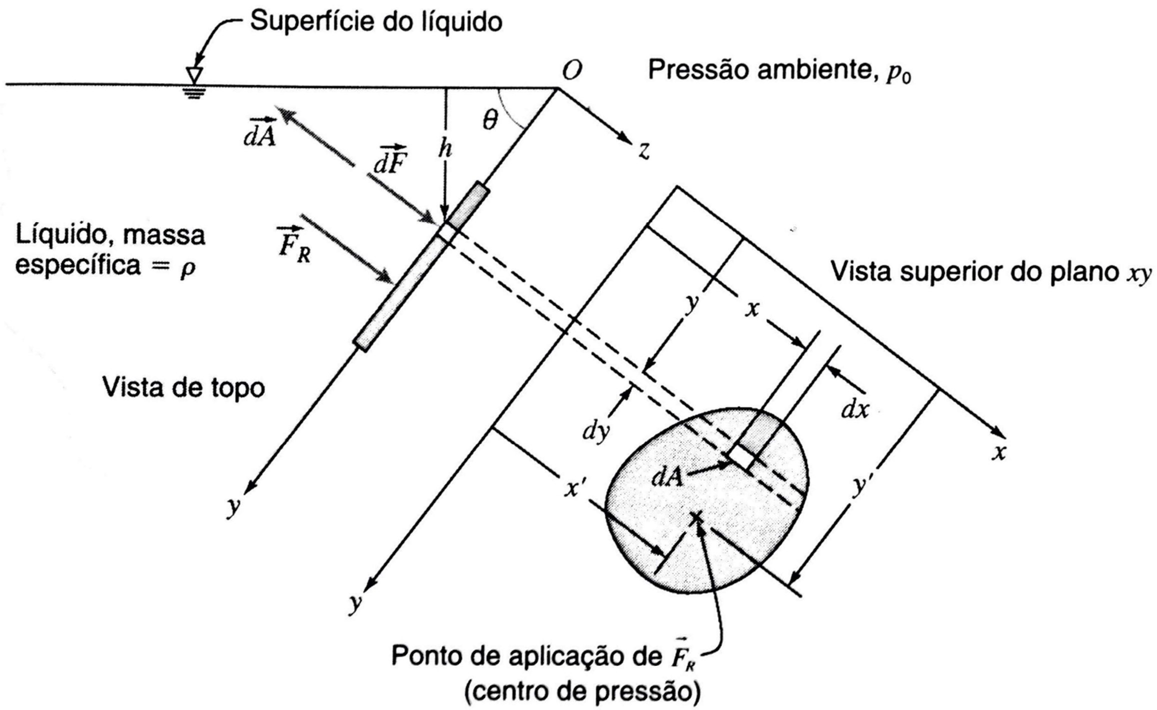
Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

$$\boxed{-\hat{j}x'F_R} + \boxed{\hat{\imath}y'F_R} = \int_A \left(\boxed{-\hat{j}xp} + \boxed{\hat{\imath}yp}\right) dA$$

Formando equações escalares:

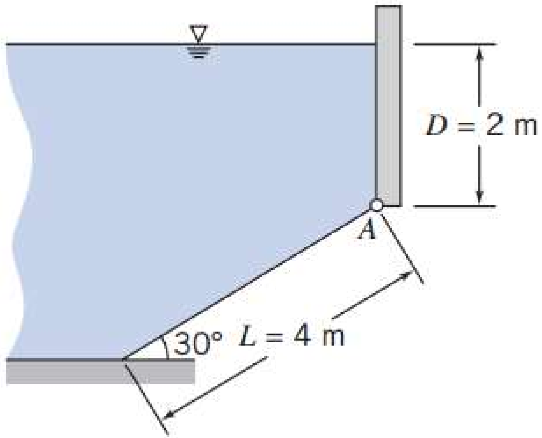
$$\boxed{x'F_R = \int_A xp\, dA}$$

$$\boxed{y'F_R = \int_A yp\, dA}$$



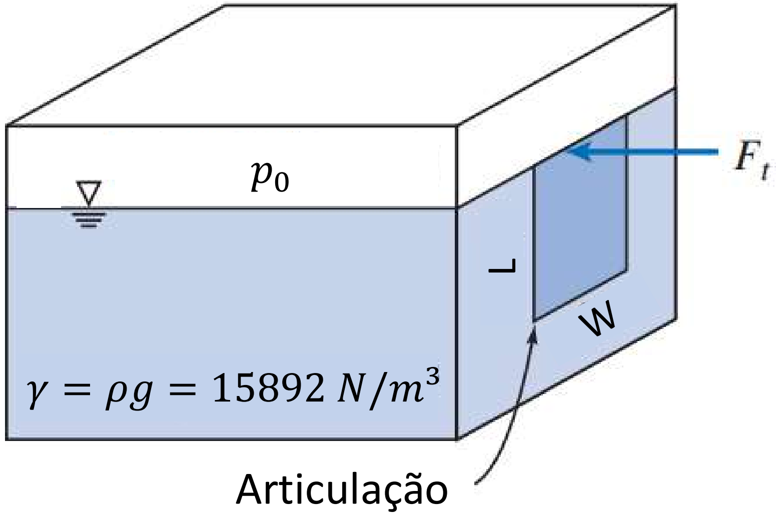
Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Exemplo: Superfície articulada em A tem 5 metros de largura. Determinar força resultante sobre a superfície inclinada.



Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Exemplo: A porta lateral do tanque é articulada na borda inferior. Uma pressão $p_0 = 4{,}8\ kPa$ (man) é aplicada na superfície livre do líquido. Determinar a força F_t para manter a porta fechada (w = 0,61 m; L = 0,914 m)



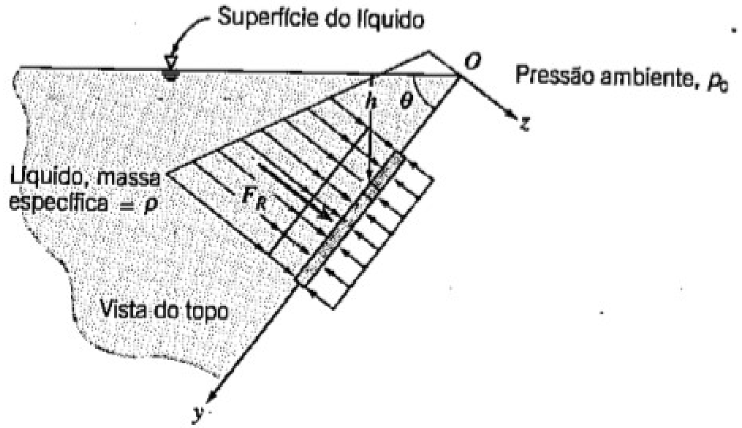
Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.

Trata-se de uma alternativa ao método apresentado anteriormente e consiste em utilizar equações recursivas para calcular a força e o seu ponto de aplicação sobre uma superfície plana submersa.

Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.



1. Cálculo da força

A distribuição de pressão na face superior é a soma da pressão p_0 uniforme com a pressão hidrostática do líquido:

$$p = p_0 + \rho g h$$

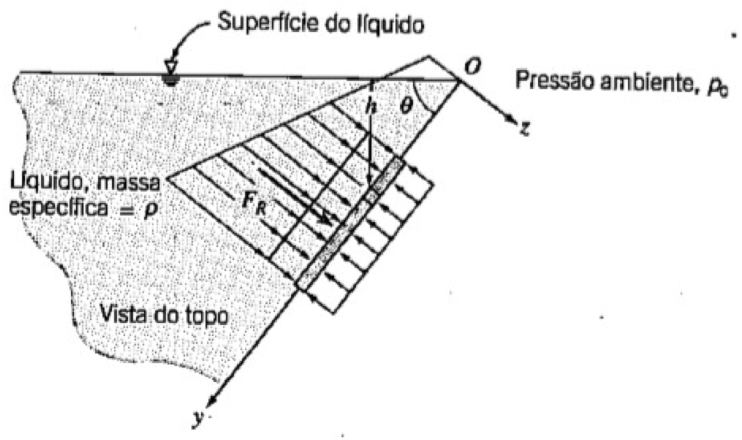
Consequentemente, a força resultante nessa mesma face é:

$$F_R = \int_A p dA = \int_A (p_0 + \rho g h) dA = \int_A (p_0 + \rho g y \sin\theta) dA = p_0 \int_A dA + \rho g \sin\theta \int_A y dA$$

$$F_R = p_0 A + \rho g \sin\theta \int_A y dA$$

Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.



1. Cálculo da força

$$F_R = p_0 A + \rho g \sin\theta \int_A y dA \longrightarrow \int_A y dA = y_c A$$

sendo y_c (ou $\bar{y}$) o **centróide** da área A (centro geométrico). Logo,

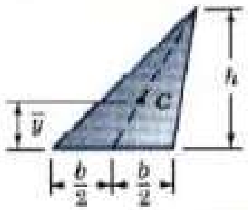
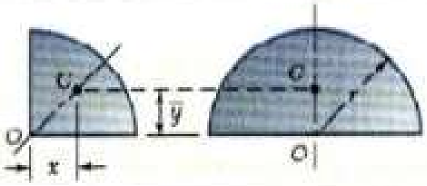
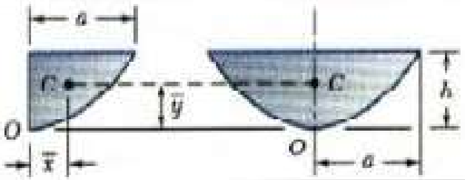
$$F_R = p_0 A + \rho g \sin\theta \, y_c A = (p_0 + \rho g h_c)A = p_c A$$

Conhecendo o formato da superfície e o fluido, determina-se facilmente a força.

Se p_0 atuar dos dois lados da placa, ela não contribui para a força líquida sobre a placa.

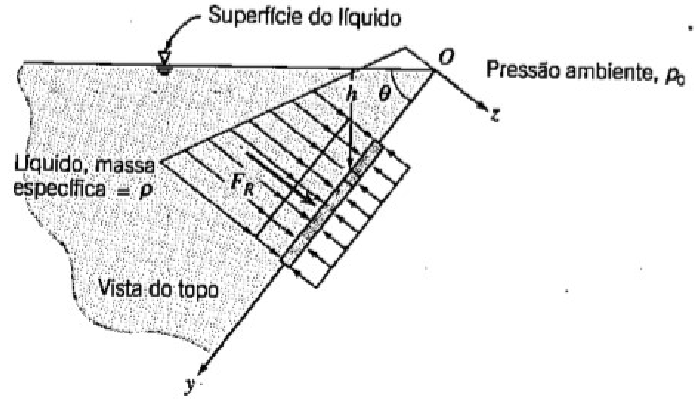
Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Centroids of Common Shapes of Areas

Shape		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Area
Triangular area			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarter-circular area		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicircular area		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Quarter-elliptical area		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Semielliptical area		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Semiparabolic area		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Parabolic area		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$

Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.



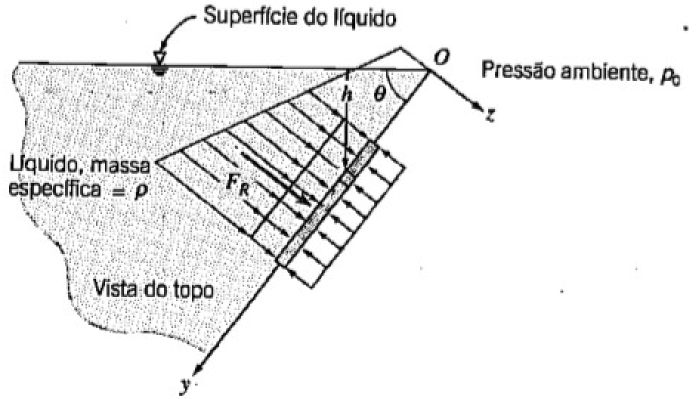
2. Linha de ação

Partindo da relação $y'F_R = \int_A yp\, dA$

$$y'F_R = \int_A y(p_0 + \rho g y \sin\theta)\, dA = p_0 \int_A y\, dA + \rho g \sin\theta \int_A y^2\, dA$$

Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.



2. Linha de ação

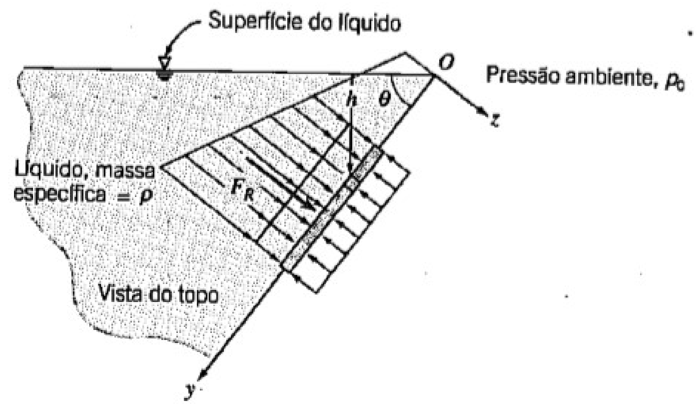
Partindo da relação $y'F_R = \int_A yp\,dA$

$$y'F_R = \int_A y(p_0 + \rho g y \sin\theta)\,dA = p_0 \int_A y\,dA + \rho g \sin\theta \int_A y^2\,dA$$

$y_c A$

Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.



2. Linha de ação

Partindo da relação $y'F_R = \int_A yp\,dA$

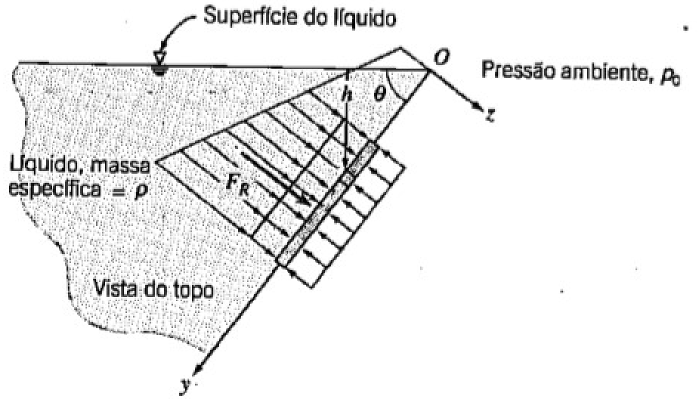
$$y'F_R = \int_A y(p_0 + \rho g y \sin\theta)\,dA = p_0 \int_A y\,dA + \rho g \sin\theta \int_A y^2\,dA$$

$y_c A$

Momento de inércia, Ixx

Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.



2. Linha de ação

Partindo da relação $y' F_R = \int_A yp \, dA$

$$y' F_R = \int_A y(p_0 + \rho g y \sin\theta) \, dA = p_0 \int_A y \, dA + \rho g \sin\theta \int_A y^2 \, dA$$

$y_c A$

Momento de inércia, Ixx

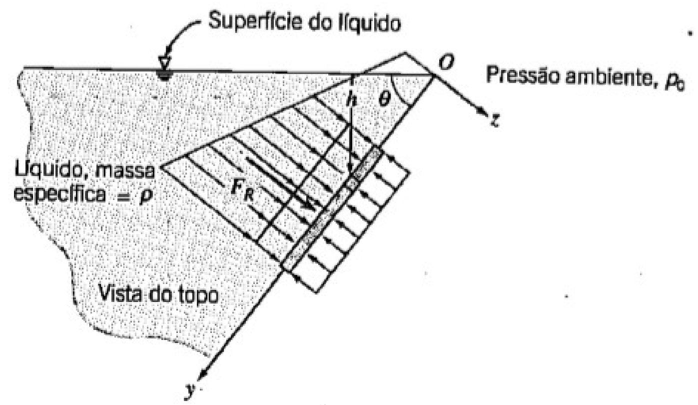
Teorema dos Eixos Paralelos

$$I_{xx} = I_{\hat{x}\hat{x}} + A y_c^2$$

onde: $I_{\hat{x}\hat{x}} = momento\ de\ inércia\ em\ relação\ ao\ eixo\ x\ que\ passa\ pelo\ centróide.$

Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.



2. Linha de ação

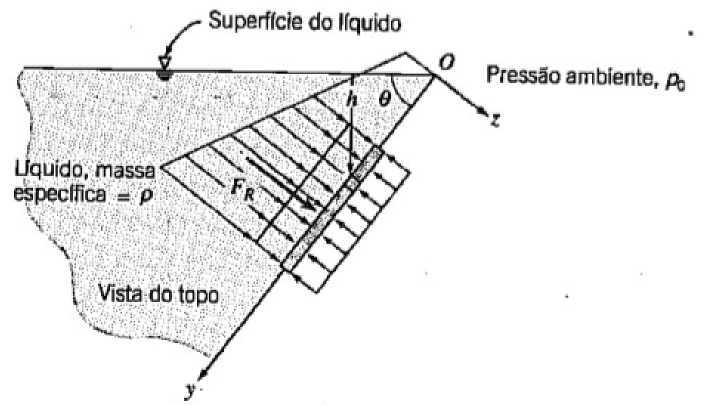
Portanto:

$$y'F_R = p_0 \int_A y\, dA + \rho g \sin\theta \int_A y^2\, dA = p_0 y_c A + \rho g \sin\theta\, I_{xx}$$

$$y'F_R = p_0 y_c A + \rho g \sin\theta\, (I_{\hat{x}\hat{x}} + A y_c^2) = y_c(p_0 A + \rho g y_c \sin\theta\, A) + \rho g \sin\theta\, I_{\hat{x}\hat{x}}$$

Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.



2. Linha de ação

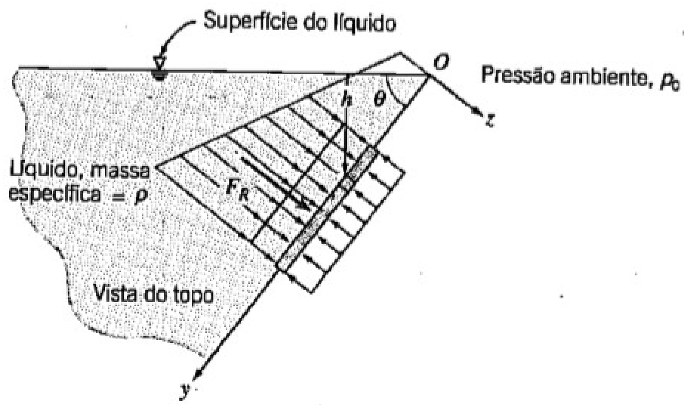
Portanto:

$$y' F_R = p_0 \int_A y\, dA + \rho g \sin\theta \int_A y^2\, dA = p_0 y_c A + \rho g \sin\theta\, I_{xx}$$

$$y' F_R = p_0 y_c A + \rho g \sin\theta\,(I_{\hat{x}\hat{x}} + A y_c^2) = y_c(\underbrace{p_0 A + \rho g y_c \sin\theta\, A}_{F_R}) + \rho g \sin\theta\, I_{\hat{x}\hat{x}}$$

Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.



2. Linha de ação

Portanto:

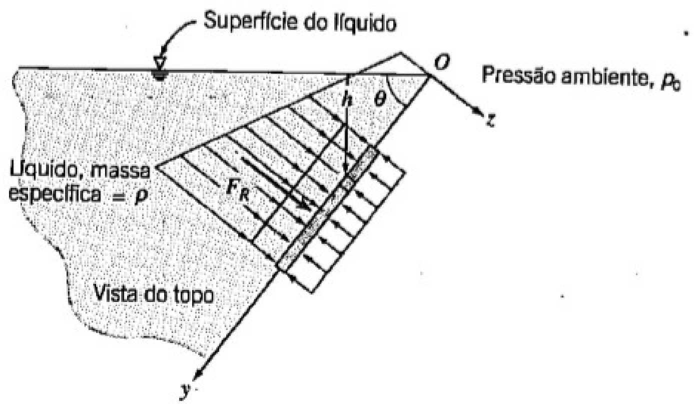
$$y'F_R = p_0 \int_A y\, dA + \rho g \sin\theta \int_A y^2\, dA = p_0 y_c A + \rho g \sin\theta\, I_{xx}$$

$$y'F_R = p_0 y_c A + \rho g \sin\theta\, (I_{\hat{x}\hat{x}} + A y_c^2) = y_c(p_0 A + \rho g y_c \sin\theta\, A) + \rho g \sin\theta\, I_{\hat{x}\hat{x}}$$

$$y'F_R = y_c F_R + \rho g \sin\theta\, I_{\hat{x}\hat{x}} \longrightarrow \boxed{y' = y_c + \frac{\rho g \sin\theta\, I_{\hat{x}\hat{x}}}{F_R}}$$

Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.



2. Linha de ação

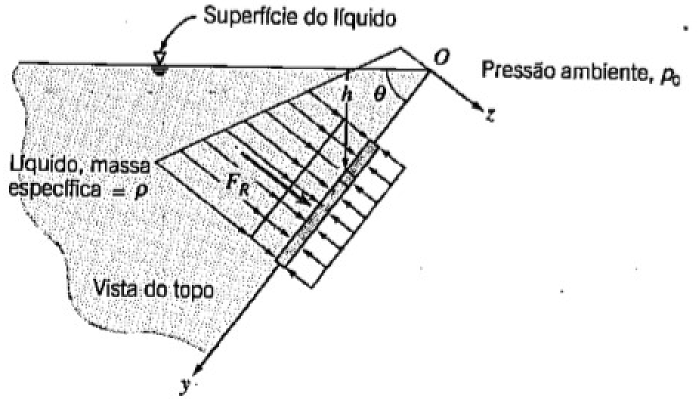
Para mesma pressão ambiente dos dois lados (p_0 = 0):

$$y' F_R = y_c (p_0 A + \rho g y_c \sin\theta\, A) + \rho g \sin\theta\, I_{\hat{x}\hat{x}}$$

$$y' F_R = y_c \rho g y_c \sin\theta\, A + \rho g \sin\theta\, I_{\hat{x}\hat{x}} \quad \text{onde} \quad F_R = \rho g y_c \sin\theta\, A$$

Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.



2. Linha de ação

Para mesma pressão ambiente dos dois lados (p_0 = 0):

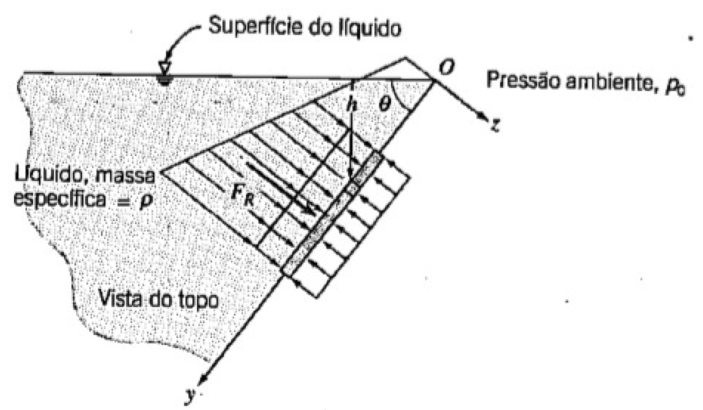
$$y' F_R = y_c(p_0 A + \rho g y_c \sin\theta\, A) + \rho g \sin\theta\, I_{\hat{x}\hat{x}}$$

$$y' F_R = y_c \rho g y_c \sin\theta\, A + \rho g \sin\theta\, I_{\hat{x}\hat{x}}$$ onde $$F_R = \rho g y_c \sin\theta\, A$$

$$\boxed{y' = y_c + \frac{I_{\hat{x}\hat{x}}}{y_c A}}$$

Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.



2. Linha de ação

Replicando o desenvolvimento para obtenção de x':

$$x' F_R = \int_A xp\, dA = \int_A x(p_0 + \rho g y \sin\theta)\, dA = \int_A (xp_0 + \rho g xy \sin\theta)\, dA$$

$$x' F_R = p_0 \int_A x\, dA + \rho g \sin\theta \int_A xy\, dA$$

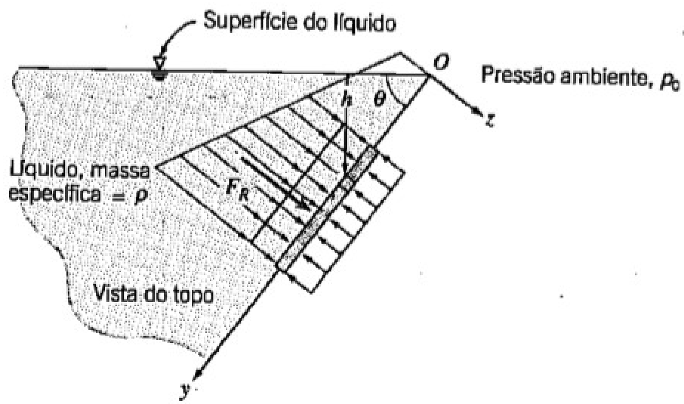
Produto de inércia, Ixy

$x_c A$

Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.

2. Linha de ação



Replicando o desenvolvimento para obtenção de x':

$$x' F_R = \int_A xp\,dA = \int_A x(p_0 + \rho g y \sin\theta)\,dA = \int_A (xp_0 + \rho g x y \sin\theta)\,dA$$

$$x' F_R = p_0 \int_A x\,dA + \rho g \sin\theta \int_A xy\,dA$$

$x_c A$

Produto de inércia, Ixy

Teorema dos Eixos Paralelos

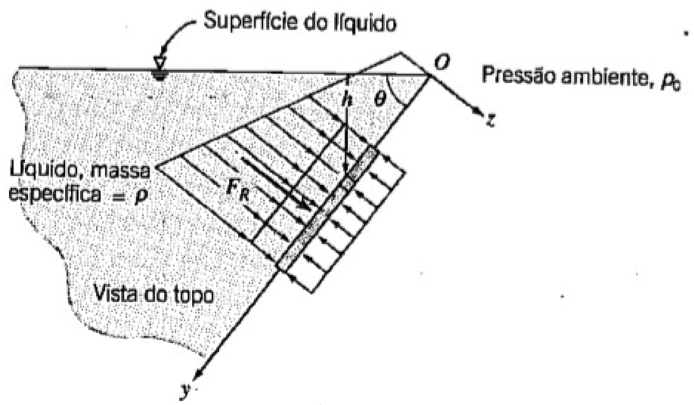
$$I_{xy} = I_{\hat{x}\hat{y}} + A x_c y_c$$

onde:

$I_{\hat{x}\hat{y}} = produto\ de\ inércia\ da\ área\ em\ relação\ ao\ par\ de\ eixos\ \hat{x}\hat{y}\ que\ passam\ pelo\ centróide.$

Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.



2. Linha de ação

Replicando o desenvolvimento para obtenção de x':

$$x' F_R = p_0 x_c A + \rho g \sin\theta \, I_{xy}$$

Aplicando manipulação análoga àquela para obtenção de y':

$$\boxed{x' = x_c + \frac{\rho g \sin\theta \, I_{\hat{x}\hat{y}}}{F_R}}$$

Teorema dos Eixos Paralelos

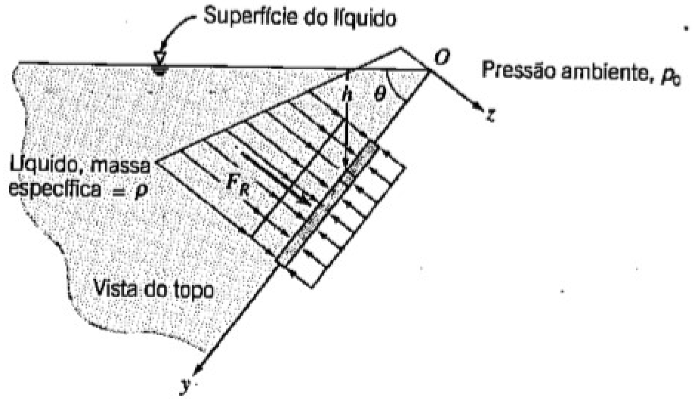
$$I_{xy} = I_{\hat{x}\hat{y}} + A x_c y_c$$

onde:

$I_{\hat{x}\hat{y}} = produto\ de\ inércia\ da\ área\ em\ relação\ ao\ par\ de\ eixos\ \hat{x}\hat{y}\ que\ passam\ pelo\ centróide.$

Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Equações recursivas para o cálculo da força e do ponto de aplicação sobre superfícies planas submersas.



2. Linha de ação

Replicando o desenvolvimento para obtenção de x':

$$x' F_R = p_0 x_c A + \rho g \sin\theta \, I_{xy}$$

Aplicando manipulação análoga àquela para obtenção de y':

Teorema dos Eixos Paralelos

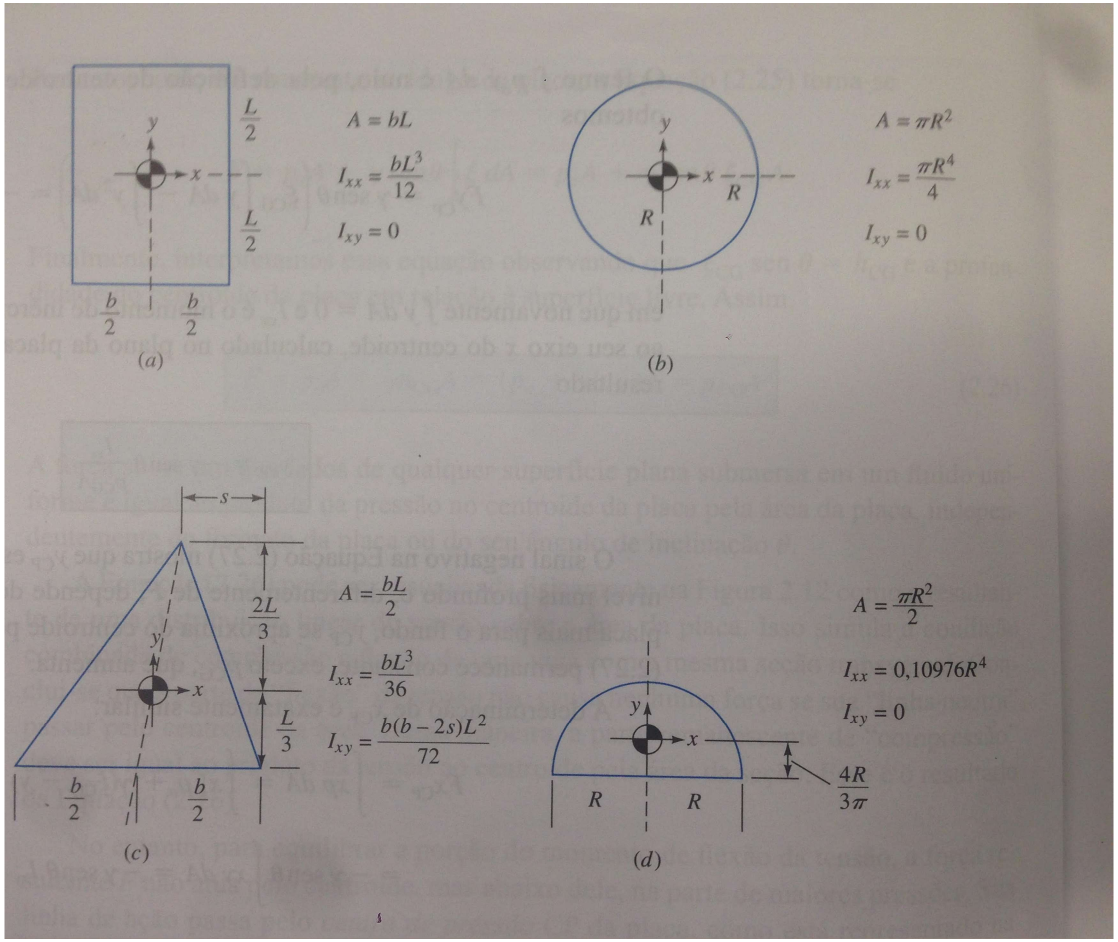
$$I_{xy} = I_{\hat{x}\hat{y}} + A x_c y_c$$

onde:

$I_{\hat{x}\hat{y}} = produto\ de\ inércia\ da\ área\ em\ relação\ ao\ par\ de\ eixos\ \hat{x}\hat{y}\ que\ passam\ pelo\ centróide.$

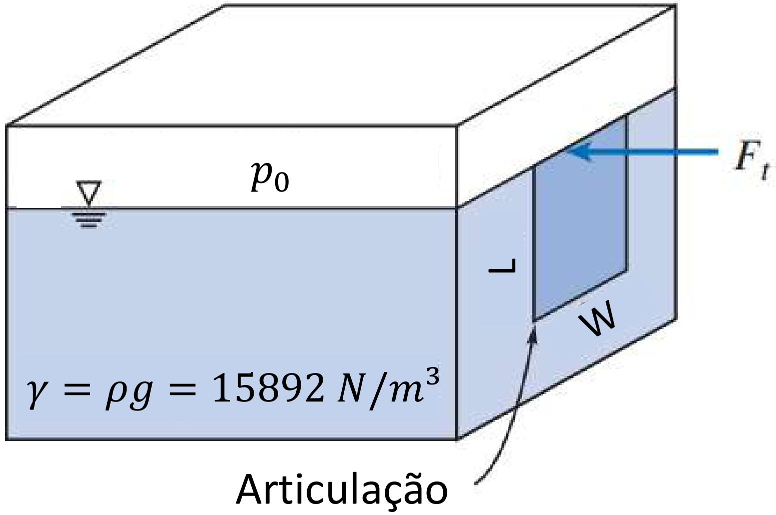
$$\boxed{x' = x_c + \frac{\rho g \sin\theta \, I_{\hat{x}\hat{y}}}{F_R}} \xrightarrow{\text{Se } p_0 = 0} \boxed{x' = x_c + \frac{I_{\hat{x}\hat{y}}}{y_c A}}$$

Momentos e produtos de inércia em relação aos eixos que passam pelo centróide.



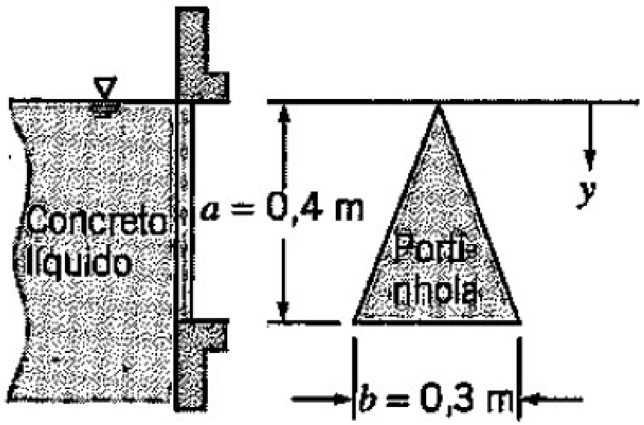
Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Exemplo: A porta lateral do tanque é articulada na borda inferior. Uma pressão $p_0 = 4{,}8\ kPa$ (man) é aplicada na superfície livre do líquido. Determinar a força F_t para manter a porta fechada (w = 0,61 m; L = 0,914 m)



Forças hidrostáticas sobre superfícies submersas

Exemplo: Calcule a força resultante sobre a comporta abaixo (densidade do concreto = 2500 kg/m³).

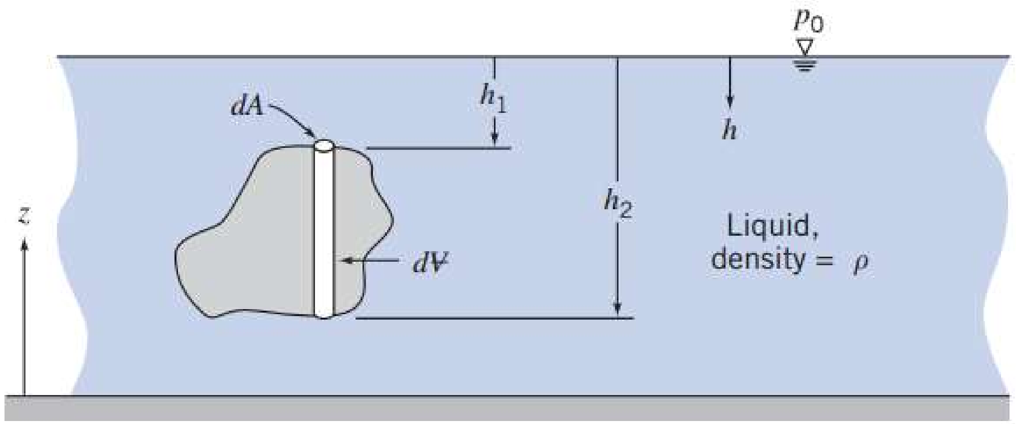


Empuxo


<u>Conceito</u>: Força vertical que atua sobre um objeto imerso (ou parcialmente imerso) em um meio fluido devido à distribuição de pressão ao seu redor.

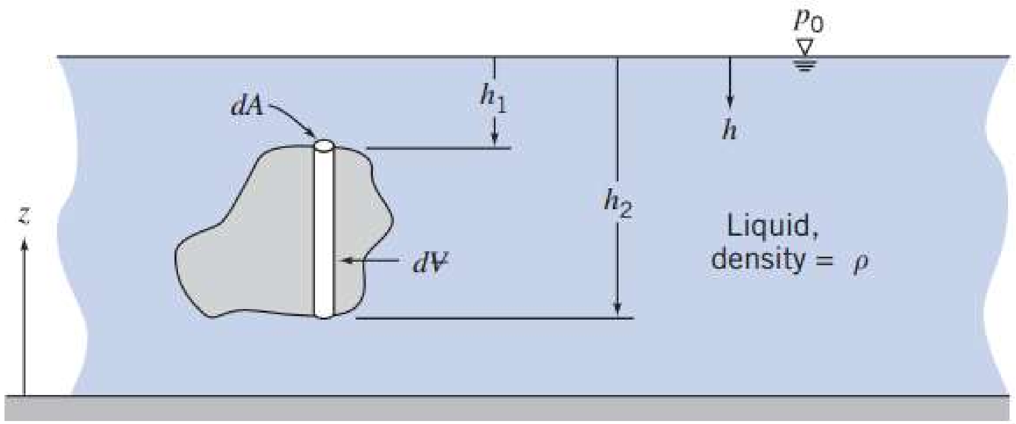
Empuxo

Dedução matemática do conceito de empuxo:



Empuxo

Dedução matemática do conceito de empuxo:



A variação da pressão no fluido é dada por:

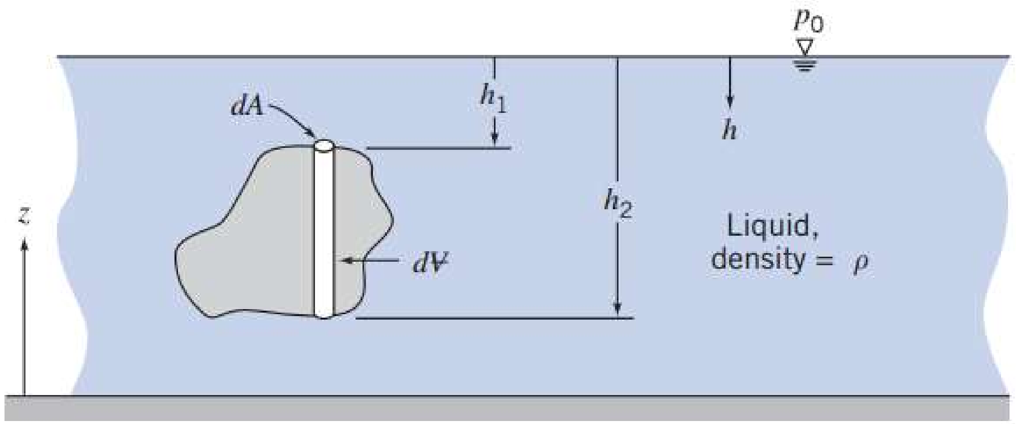
$$\frac{dp}{dh} = \rho g$$

Se ρ for constante:

$$p = p_0 + \rho g h$$

Empuxo

Dedução matemática do conceito de empuxo:



A força líquida vertical devido à pressão hidrostática que atua sobre o elemento é:

$$dF_z = (p_0 + \rho g h_2)dA - (p_0 + \rho g h_1)dA$$

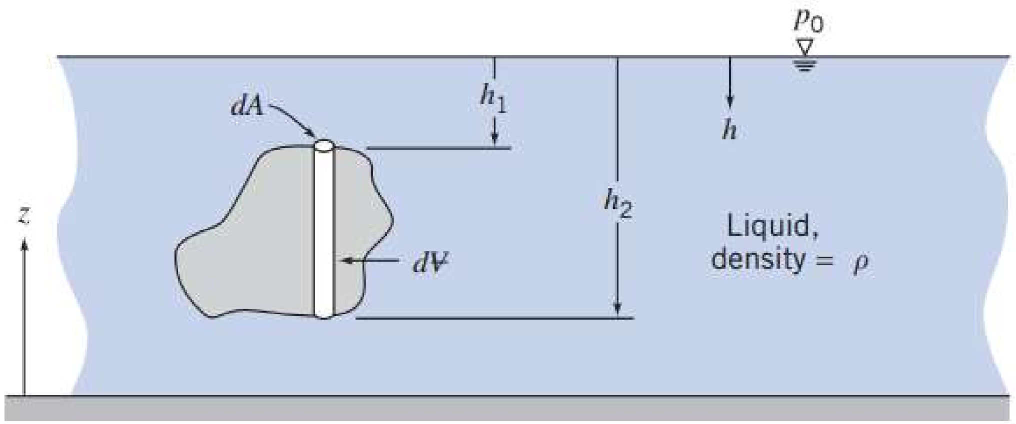
$$= \rho g (h_2 - h_1) dA$$

Como $d\forall = (h_2 - h_1)dA$:

$$F_z = \int dF_z = \int_{\forall} \rho g d\forall = \rho g \forall$$

Empuxo

Dedução matemática do conceito de empuxo:



O empuxo sobre o objeto é igual ao **peso do fluido** deslocado.

A força líquida vertical devido à pressão hidrostática que atua sobre o elemento é:

$$dF_z = (p_0 + \rho g h_2)dA - (p_0 + \rho g h_1)dA$$

$$= \rho g(h_2 - h_1)dA$$

Como $d\forall = (h_2 - h_1)dA$:

$$F_z = \int dF_z = \int_{\forall} \rho g d\forall = \rho g \forall$$

Empuxo

Exemplo: Um balão de ar quente deve ser capaz de suspender uma cesta de 300 kg. Determine a temperatura que o ar deve ser aquecido para efetuar essa tarefa. (Considerar o balão como uma esfera de diâmetro igual a 15 m).