Capítulo 4

A Equação Geral do Segundo Grau

Neste Capítulo utilizaremos as transformações de coordenadas vistas no Capítulo 3 para estudarmos a equação geral do segundo grau em duas variáveis. Ou seja, faremos um estudo da equação

$$\boxed{\mathrm{A}\,\mathrm{x}^2 + \mathrm{B}\,\mathrm{xy} + \mathrm{C}\,\mathrm{y}^2 + \mathrm{D}\,\mathrm{x} + \mathrm{E}\,\mathrm{y} + \mathrm{F} = 0} \tag{4.1}$$

Quando a equação 4.1 contém o termo misto do 2º grau (isto é, quando $\mathrm{B} \neq 0$), é sempre possível transformá-la, por meio de uma rotação dos eixos coordenados, numa equação do tipo

$$\boxed{\mathrm{A}'\,\mathrm{x}'^2 + \mathrm{C}'\,\mathrm{y}'^2 + \mathrm{D}'\,\mathrm{x}' + \mathrm{E}'\,\mathrm{y}' + \mathrm{F}' = 0} \tag{4.2}$$

na qual pelo menos um dos coeficientes A' ou C' é não nulo e não há o termo misto do 2º grau $\mathrm{x}'\mathrm{y}'$.

Quando a equação 4.2 representa algum lugar geométrico, então esse lugar geométrico é uma secção cônica (circunferência ou elipse ou hipérbole ou parábola) ou um dos casos excepcionais de um ponto ou um par de retas ou ainda o conjunto vazio.

Vejamos, a seguir, um exemplo de cada uma dessas situações:

1. circunferência: $x^2 + y^2 - 1 = 0$
2. elipse: $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$
3. hipérbole: $x^2 - 2y^2 - 1 = 0$
4. parábola: $x - y^2 = 0$
5. conjunto vazio: $x^2 + y^2 + 1 = 0$
6. um único ponto (elipse degenerada) : $x^2 + y^2 = 0$
7. retas concorrentes (hipérbole degenerada): $x^2 - y^2 = 0 \iff (x + y)(x - y) = 0 \iff$ $\iff y = -x$ ou $y = x$
8. uma única reta (parábola degenerada): $x^2 + 2xy + y^2 = 0 \iff (x + y)^2 = 0 \iff$ $\iff y = -x$
9. retas paralelas (parábola degenerada): $x^2 - 4x = 0 \iff x(x - 4) = 0 \iff$ $\iff x = 0$ ou $x = 4$

Nosso objetivo, neste Capítulo, é, dada uma equação do tipo 4.1, reconhecer que tipo de curva ela representa.

Teorema 1: Dada uma equação do tipo 4.1 é sempre possível transformá-la numa equação do tipo 4.2 por meio de uma rotação de um ângulo θ dos eixo coordenados, sendo θ tal que:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A - C}, & \text{se } A \neq C \\ \theta = 45^\circ, & \text{se } A = C \end{cases}$$

Prova: Consideremos uma equação do tipo $A x^2 + B xy + C y^2 + D x + E y + F = 0$. Vamos, através de uma rotação dos eixos coordenados, transformá-la em outra equação, desprovida do termo misto do 2º grau. Substituindo as equações de rotação: $\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \\ y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta \end{cases}$, obtemos:

$$A(x'^2\cos^2\theta - 2x'y'\operatorname{sen}\theta\cos\theta + y'^2\operatorname{sen}^2\theta) + B(x'^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + x'y'\cos^2\theta - x'y'\operatorname{sen}^2\theta - y'^2\cos^2\theta) +$$
$$+ C(x'^2\operatorname{sen}^2\theta + 2x'y'\operatorname{sen}\theta\cos\theta + y'^2\cos^2\theta) + D(x'\cos\theta + y'\operatorname{sen}\theta) + E(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta) +$$
$$+ F = 0$$

e, portanto, $(A\cos^2\theta + B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\operatorname{sen}^2\theta)\,x'^2 +$

$+ (-2A\operatorname{sen}\theta\cos\theta + B\cos^2\theta - B\operatorname{sen}^2\theta + 2C\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\,x'y' +$

$+ (A\operatorname{sen}^2\theta - B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta)\,y'^2 + (D\cos\theta + E\operatorname{sen}\theta)\,x' + (D\operatorname{sen}\theta + E\cos\theta)\,y' +$
$+ F = 0$

Como queremos que, no novo sistema, a equação não apresente o termo misto do segundo grau, devemos impor que o coeficiente de $x'\,y'$ seja zero; isto é:

$$0 = -2A \operatorname{sen}\theta\cos\theta + B\cos^2\theta - B\operatorname{sen}^2\theta + 2C\operatorname{sen}\theta\cos\theta =$$

$$= (-A + C)\,2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$= (C - A)\operatorname{sen}2\theta + B\cos 2\theta$$

Temos dois casos a considerar: $A = C$ e $A \neq C$.

- $A = C \Longrightarrow B\cos 2\theta = 0 \overset{B\neq 0}{\Longrightarrow} \cos 2\theta = 0 \Longrightarrow 2\theta = 90^\circ \Longrightarrow \theta = 45^\circ$
- $A \neq C$

Afirmo que: $\cos 2\theta \neq 0$.

De fato: se $\cos 2\theta = 0$, então $(C - A)\operatorname{sen}2\theta = 0$ e como $C - A \neq 0$, segue que $\operatorname{sen}2\theta = 0$, o que é um absurdo.

Assim:

$$A \neq C \Longrightarrow (C - A)\frac{\operatorname{sen}2\theta}{\cos 2\theta} + B = 0 \Longrightarrow (C - A)\operatorname{tg}2\theta + B = 0 \Longrightarrow \operatorname{tg}2\theta = \frac{B}{A-C} \blacksquare$$

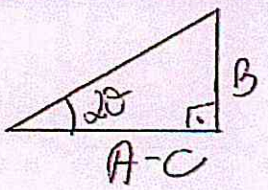
Observações:

1. No Teorema anterior obtivemos as seguintes relações entre os coeficientes das equações 4.1 e 4.2:

$$\begin{cases} A' = A\cos^2\theta + B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\operatorname{sen}^2\theta \\ B' = 2(C - A)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \\ C' = A\operatorname{sen}^2\theta - B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta \\ D' = D\cos\theta + E\operatorname{sen}\theta \\ E' = E\cos\theta - D\operatorname{sen}\theta \\ F' = F \end{cases}$$

2. Se $A \neq C$, então $\operatorname{tg}2\theta \neq 0$ (pois $B \neq 0$) e, portanto $\theta \neq 0$. Para calcular θ, adotamos o seguinte procedimento:

• construimos um triângulo retângulo no qual um dos ângulos é 2θ, o cateto oposto a 2θ tenha medida B e o lado adjascente a 2θ tenha medida A - C e aí calculamos $\cos 2\theta$



• encontramos sen θ e cos θ através das relações:

$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$ e $\text{sen}\,\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$

3. A natureza do lugar geométrico não se altera por transformações de coordenadas.

Exemplo: Por transformações de coordenadas, obtenha a partir da equação dada a seguir em uma outra, que não contenha termos do 1º grau nem termo misto do 2º grau:

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 10y + 9 = 0$$

Solução: Vamos precisar usar translação (para eliminar os termos do 1º grau) e rotação dos eixos coordenados (para eliminar o termo misto do 2º grau). Comecemos com uma translação, fazendo : $x = x' + h$ e $y = y' + k$. Então:

$$3(x'^2 + 2hx' + h^2) - 2(x'y' + kx' + hy' + hk) + 3(y'^2 + 2ky' + k^2) - 2x' - 2h - 10y' - 10k + 9 = 0$$

Ou seja:

$$3x'^2 - 2x'y' + 3y'^2 + (6h - 2k - 2)x' + (-2h + 6k - 10)y' + (3h^2 - 2hk + 3k^2 - 2h - 10k + 9) = 0$$

E, dessa forma, para eliminarmos os termos do 1º grau, devemos ter:

$6h - 2k - 2 = 0$ e $-2h + 6k - 10 = 0$, o que fornece $h = 1$ e $k = 2$.

Logo, a origem do novo sistema de coordenadas deve ser o ponto $O' = (1, 2)$. Vamos calcular o valor do termo independente para $h = 1$ e $k = 2$:

$$3h^2 - 2hk + 3k^2 - 2h - 10k + 9 = 3 - 4 + 12 - 2 - 20 + 9 = -2$$

e, assim, a equação original se transforma em

$$3x'^2 - 2x'y' + 3y'^2 - 2 = 0$$

Vamos, agora, usar rotação dos eixos coordenados para eliminar o termo misto do 2º grau na última equação. Temos que $A' = C' = 3$. Logo, devemos aplicar uma rotação de um ângulo $\theta = 45°$. As equações de rotação são:

	x''	y''
x'	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
y'	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Longrightarrow$ $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' - y'')$ e $y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'' + y'')$

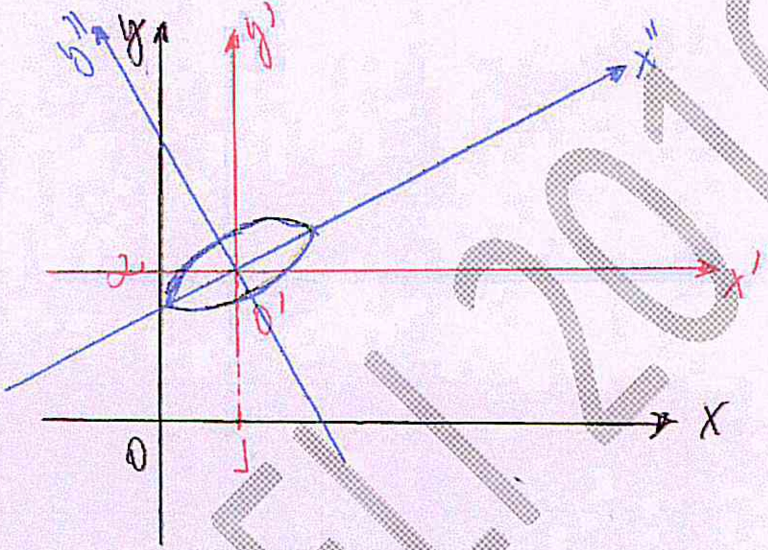
Assim, $x'^2 = \frac{1}{2}(x''^2 - 2\,x''y'' + y''^2)$, $\quad x'y' = \frac{1}{2}(x''^2 - y''^2)$, $\quad y'^2 = \frac{1}{2}(x''^2 + 2\,x''y'' + y''^2)$

Substituindo-se na equação nas variáveis x' e y', obtemos:

$$\tfrac{3}{2}(x''^2 - 2\,x''y'' + y''^2) - (x''^2 - y''^2) + \tfrac{3}{2}(x''^2 + 2\,x''y'' + y''^2) - 2 = 0$$

Logo: $\quad (\tfrac{3}{2} - 1 + \tfrac{3}{2})\,x''^2 + (-3 + 3)\,x'y' + (\tfrac{3}{2} + 1 + \tfrac{3}{2})\,y''^2 = 2$

Ou seja: $\quad 2x''^2 + 4\,y''^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad x''^2 + \dfrac{y''^2}{\frac{1}{2}} = 1$, que é uma elipse com focos no eixo $O'x''$, para a qual $a = 1$ e $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



4.1 O Indicador $I = B^2 - 4AC$

Vimos que, ao rotacionarmos os eixos coordenados de um ângulo θ, a equação geral do segundo grau em duas variáveis

$$A\,x^2 + B\,xy + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0, \qquad B \neq 0 \tag{1}$$

é transformada na equação

$$A'\,x'^2 + B'\,x'\,y' + C'\,y'^2 + D'\,x' + E'\,y' + F' = 0 \tag{2}$$

sendo

$$\left\{\begin{array}{l} A' = A\cos^2\theta + B\,\text{sen}\theta\cos\theta + C\,\text{sen}^2\theta \\ B' = 2(C - A)\,\text{sen}\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) \\ C' = A\,\text{sen}^2\theta - B\,\text{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta \\ D' = D\cos\theta + E\,\text{sen}\theta \\ E' = E\cos\theta - D\,\text{sen}\theta \\ F' = F \end{array}\right. \qquad (3)$$

Escolhendo-se o ângulo θ segundo indica o Teorema 1, a equação (2) da página anterior se transforma na equação a seguir, para a qual $B' = 0$:

$$A'\,x'^2 + C'\,y'^2 + D'\,x' + E'\,y' + F' = 0 \qquad (4)$$

Definições:

[1] Se A' ou C' é igual a zero, dizemos que a equação (4) é do *tipo parabólico*

[2] Se A' e C' têm o mesmo sinal, dizemos que a equação (4) é do *tipo elíptico*

[3] Se A' e C' têm sinais opostos, dizemos que a equação (4) é do *tipo hiperbólico*

Usando-se as três primeiras relações dadas em (3), prova-se que $B'^2 - 4\,A'\,C' = B^2 - 4\,A\,C$ e também que esta relação não depende do valor do ângulo θ (e, por isso, dizemos que o valor de $B^2 - 4\,A\,C$ é *invariante por rotação*).

Teorema 2: A equação geral do segundo grau

$$A\,x^2 + B\,xy + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0,$$

é do tipo parabólico, elíptico ou hiperbólico conforme o número real $B^2 - 4\,A\,C$ seja zero, negativo ou positivo.

Prova: Temos que, ao transformarmos a equação (1) na equação (4), obtemos $B' = 0$ e, portanto, $B^2 - 4\,A\,C = -4\,A'\,C'$.

Dessa forma:

• Se $B^2 - 4\,A\,C = 0$, então $-4\,A'\,C' = 0$ e, portanto, $A' = 0$ ou $C' = 0$, o que significa que a equação (4) (e, portanto, a equação (1)) é do *tipo parabólico*;

• Se $B^2 - 4\,A\,C < 0$, então $-4\,A'\,C' < 0$, ou seja, $A'\,C' > 0$ e, portanto, A' e C' têm sinais iguais, o que significa que a equação (4) (e, portanto, a equação (1)) é do *tipo elíptico*;

• Se $B^2 - 4AC > 0$, então $-4A'C' > 0$, ou seja, $A'C' < 0$ e, portanto, A' e C' têm sinais opostos, o que significa que a equação (4) (e, portanto, a equação (1)) é do *tipo hiperbólico*.

Note que: o número real $B^2 - 4AC$ indica a natureza do lugar geométrico que está sendo analisado e isto nos leva à

Definição: O número real $B^2 - 4AC$ é chamado de *indicador* e denotado por I; isto é, $I = B^2 - 4AC$.

Simplificar uma equação geral do segundo grau em duas variáveis

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

é transformá-la, por meio de rotação e translação dos eixos coordenados, em outra equação mais simples, desprovida do termo misto do segundo grau e dos termos lineares (quando possível). Em geral, é indiferente fazer-se uma rotação seguida de uma translação **ou** uma translação seguida de uma rotação. Porém, há casos em que é necessário, obrigatoriamente, iniciarmos o processo por uma rotação e, a seguir, usarmos a translação dos eixos coordenados. Isto ocorre quando o indicador $I = B^2 - 4AC = 0$. Veremos, a seguir, dois exemplos. No primeiro deles, teremos $I = 0$ e, mesmo assim, começaremos com uma translação dos eixos coordenados. Faremos isto para ilustrar que tipo de problema ocorre quando ignoramos o fato do indicador ser nulo e iniciamos o processo por uma translação. Com o segundo exemplo, queremos descrever o procedimento a ser adotado quando a rotação que temos que fazer é um de ângulo θ tal que $\operatorname{tg} 2\theta$ é um número real negativo.

Exemplo 1: Através de transformações de coordenadas, simplifique a equação:

$$G(x, y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8\sqrt{13}\,x - 14\sqrt{13}\,y + 117 = 0$$

Solução: Começando com uma translação dos eixos coordenados: $\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$

obtemos: $G(x', y') = 4x'^2 - 12x'y' + 9y'^2 + (8h - 12k - 8\sqrt{13})x' + (-12h + 18k - 14\sqrt{13})y' +$
$+ (4h^2 - 12hk + 9k^2 - 8\sqrt{13}\,h - 14\sqrt{13}\,k + 117) = 0$

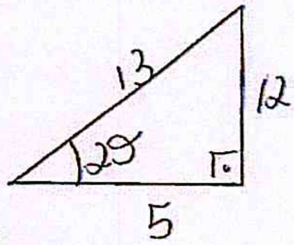
e, portanto, devemos ter:

$$\begin{cases} 2h - 3k - 2\sqrt{13} = 0 \\ 6h - 9k + 7\sqrt{13} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 6h - 9k - 6\sqrt{13} = 0 \\ 6h - 9k + 7\sqrt{13} = 0 \end{cases},$$ que é um sistema incompatível

Note que, nesse caso, temos : $A = 4$, $B = -12$, $C = 9$ e, portanto, $B^2 - 4AC = 0$.

Comecemos, então por uma rotação dos eixos coordenados. Como $A \neq C$, temos que

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{-12}{4-9} = \frac{12}{5}$$



Da figura ao lado, temos que $\cos 2\theta = \frac{5}{13}$ e portanto, usando

as relações da Observação 2, segue que $\cos\theta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{2\sqrt{13}}{13}$.

Assim, as equações de rotação são:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{13}}{13}\,(3\,x' - 2\,y') \\[2ex] y = \frac{\sqrt{13}}{13}\,(2\,x' + 3\,y') \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 = \frac{1}{13}\,(9\,x'^2 - 12\,x'\,y' + 4\,y'^2) \\[2ex] xy = \frac{1}{13}\,(6\,x'^2 + 5\,x'\,y' - 6\,y'^2) \\[2ex] y^2 = \frac{1}{13}\,(4\,x'^2 + 12\,x'\,y' + 9\,y'^2) \end{array}\right.$$

Com as substituições e cálculos necessários, obtemos:

$$G(x', y') = y'^2 - 4\,x' - 2\,y' + 9 = 0$$

Para eliminar um dos termos lineares, vamos usar o método de completar quadrados. Assim:

$$G(x', y') = (y'^2 - 2\,y') - 4\,x' + 9 = (y'^2 - 2\,y' + 1) - 4\,x' + 9 - 1 = (y' - 1)^2 - 4\,x' + 8$$

e, portanto, $\quad G(x', y') = (y' - 1)^2 + 4(x' - 2) = 0$

Fazendo-se: $\quad y'' = y' - 1 \quad$ e $\quad x'' = x' - 2 \quad$ obtém-se $\quad y''^2 + 4\,x' = 0$

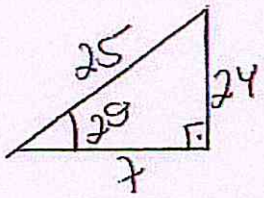
Exemplo 2: Através de transformações de coordenadas, simplifique a equação:

$$G(x, y) = 9\,x^2 - 24\,xy + 16\,y^2 + 3\,x - 4\,y - 6 = 0$$

Solução: Temos que $A = 9$, $B = -24$ e $C = 16$ e portanto o indicador $I = B^2 - 4\,AC = 0$. Logo, devemos começar o processo por uma rotação dos eixos coordenados.

Como $A \neq C$, o ângulo θ a ser utilizado é tal que $\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{B}{A-C} = \frac{-24}{9-16} = \frac{-24}{-7} = \frac{24}{7}$.

Considerando o triângulo retângulo auxiliar abaixo, no qual o cateto oposto ao ângulo 2θ mede



24 e o cateto adjacente a este mesmo ângulo mede 7, concluimos que a hipotenusa mede 25. Assim, $\cos 2\theta = \frac{7}{25}$ e daí segue que

$$\text{sen } \theta = \tfrac{3}{5} \text{ e } \cos \theta = \tfrac{4}{5}.$$

Dessa forma, as equações de rotação são:

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' \\ y = \frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{16}{25}x'^2 - \frac{24}{25}x'y' + \frac{9}{25}y'^2 \\ xy = \frac{12}{25}x'^2 + \frac{7}{25}x'y' - \frac{12}{25}y'^2 \\ y^2 = \frac{9}{25}x'^2 + \frac{24}{25}x'y' + \frac{16}{25}y'^2 \end{cases}$$

e, portanto,

$$9(\tfrac{16}{25}x'^2 - \tfrac{24}{25}x'y' + \tfrac{9}{25}y'^2) - 24(\tfrac{12}{25}x'^2 + \tfrac{7}{25}x'y' - \tfrac{12}{25}y'^2) + 16(\tfrac{9}{25}x'^2 + \tfrac{24}{25}x'y' + \tfrac{16}{25}y'^2) +$$

$$+ 3(\tfrac{4}{5}x' - \tfrac{3}{5}y') - 4(\tfrac{3}{5}x' + \tfrac{4}{5}y') - 6 = 0$$

Ou seja:

$$x'^2\left(\tfrac{144-288+144}{25}\right) + x'y'\left(\tfrac{-216-168+384}{25}\right) + y'^2\left(\tfrac{81+288+256}{25}\right) + x'\left(\tfrac{12}{5} - \tfrac{12}{5}\right) + y'\left(-\tfrac{9}{5} - \tfrac{16}{5}\right) - 6 = 0$$

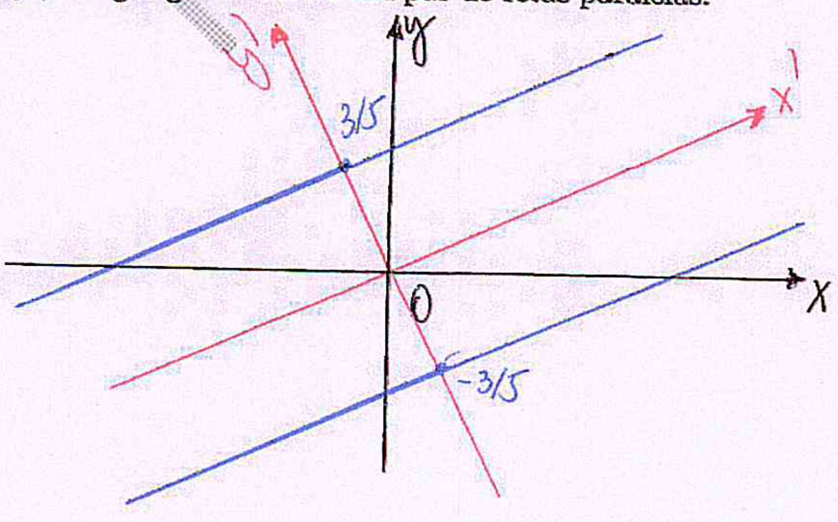
e, portanto, $\frac{625}{25}y'^2 - \frac{25}{5}y' - 6 = 0$; ou seja, $25y'^2 - 5y' - 6 = 0$.

Dividindo por 25 segue que $y'^2 - \frac{1}{5}y' - \frac{6}{25} = 0$.

Completando o quadrado, obtemos $y'^2 - \frac{1}{5}y' + \frac{1}{100} - \frac{1}{100} - \frac{6}{25} = 0$, ou seja, fazendo os cálculos:

$$(y' - \tfrac{1}{10})^2 = \tfrac{1}{4} \Longrightarrow \begin{cases} y' - \frac{1}{10} = \frac{1}{2} \\ y' = -\frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y' = \frac{3}{5} \\ y' = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Ou seja, o lugar geométrico é um par de retas paralelas:



Exemplo 3: Através de transformações de coordenadas, simplifique a equação:

$$G(x, y) = 16\,x^2 - 24\,xy + 9\,y^2 - 85\,x - 30\,y + 175 = 0$$

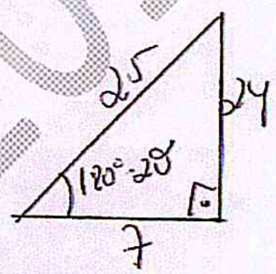
Solução: Temos que A = 16, B = - 24 e C = 9. Como A $\neq$C, segue que a rotação que devemos utilizar é de um ângulo θ tal que tg $(2\theta) = \frac{B}{A-C} = \frac{-24}{16-9} = -\frac{24}{7} < 0$.

Observe que: o ângulo θ satisfaz $0^o \leq \theta \leq 90^o$ e, portanto, $0^o \leq 2\theta \leq 180^o$. Como vimos acima, tg $(2\theta) < 0$ e, portanto, o ângulo 2θ pertence ao segundo quadrante. Isto significa que sen $(2\theta) > 0$ e cos $(2\theta) < 0$.

Mas:

- $\cos(180^o - 2\theta) = -\cos(2\theta)$ e $\text{sen}\,(180^o - 2\theta) = \text{sen}\,(2\theta)$
- $90^o \leq 2\theta \leq 180^o \implies -180^o \leq -2\theta \leq -90^o \implies 0^o \leq 180^o - 2\theta \leq 90^o$

Considerando o triângulo retângulo ao lado, obtemos:



$\text{sen}\,(180^o - 2\theta) = \frac{24}{25} = \text{sen}\,(2\theta)$

$\cos(180^o - 2\theta) = \frac{7}{25} = -\cos(2\theta)$

e, portanto, $\text{sen}\,\theta = \frac{4}{5}$ e $\cos\theta = \frac{3}{5}$.

Utilizando, agora, as equações de rotação, chegaremos em

$$G(x', y') = y'^2 - 3\,x' + 2\,y' + 7 = 0$$

Observe que, na equação acima, não é possível eliminar os dois termos do 1º grau, mas podemos simplificá-la mais, completando quadrados, como segue:

$$(y'^2 + 2\,y') - 3\,x' + 7 = 0$$

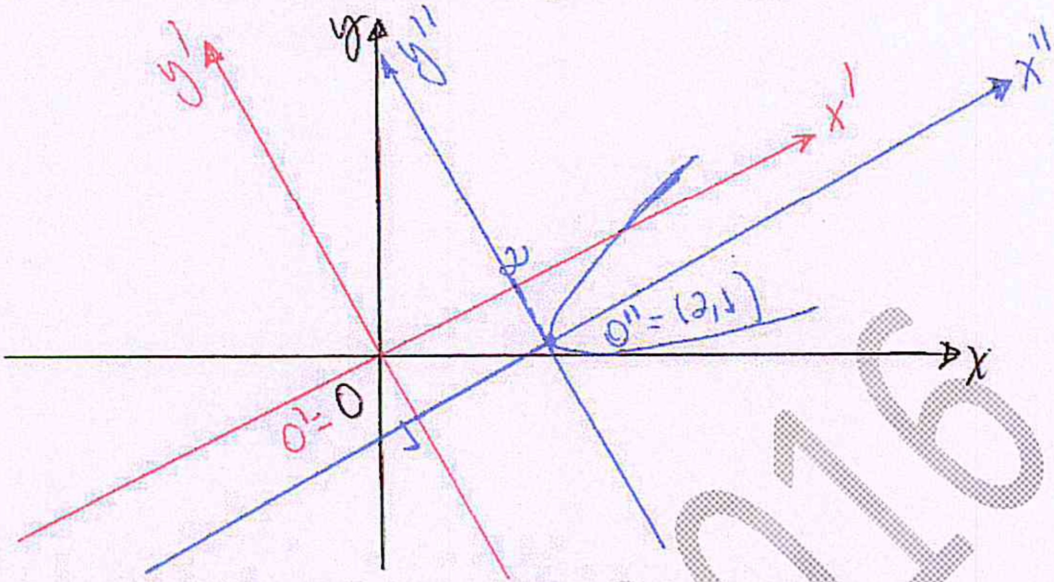
$$(y'^2 + 2\,y' + 1) - 3\,x' + 7 - 1 = 0$$

$$(y' + 1)^2 - 3(x' - 2) = 0$$

Finalmente, fazendo $x'' = x' - 2$ e $y'' = y'$, obtemos $y''^2 - 3\,x'' = 0$, de onde segue que $y''^2 = 3\,x''$, que representa uma parábola com foco no eixo $O'x''$.

Além disso, $4p = 3$ e, portanto $p = \frac{3}{4}$, $F'' = (\frac{3}{4}, 0)$ e d: $x'' = -\frac{3}{4}$.

Ou seja, temos a equação dada representa a parábola abaixo:

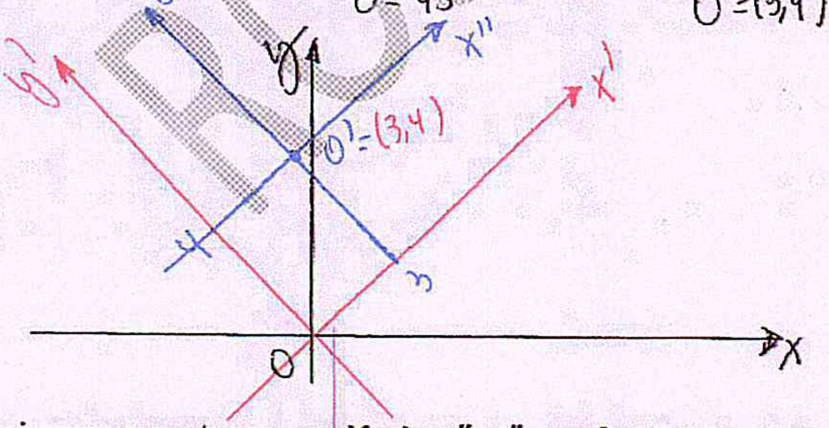


Até agora vimos exemplos de como simplificar equações completas do segundo grau em duas variáveis. Vamos agora estudar o problema inverso: dada uma equação do segundo grau em duas variáveis na forma reduzida, queremos encontrar a equação completa correspondente.

Exemplo 1: Após uma rotação de um ângulo $\theta = 45°$ seguida de uma translação para a nova origem $O' = (3, 4)$, obteve-se a equação $16\, x''^2 - 9\, y''^2 = 144$. Encontre a equação original.

Solução: Foram efetuadas as seguintes transformações de coordenadas:

$$(x,y) \xrightarrow[\theta = 45^\circ]{\text{rotação}} (x', y') \xrightarrow[O' = (3,4)]{\text{translação}} (x'', y'')$$



Precisamos encontrar as variáveis x'', y'' em função das variáveis x, y. Usaremos, para isso, as equações de rotação de $\theta = 45°$:

	x'	y'
x	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
y	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Longrightarrow \qquad x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \quad \text{e} \quad y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) \qquad \text{(I)}$$

e as equações de translação para $O' = (3, 4)$

$$\begin{cases} x' = x'' + 3 \\ y' = y'' + 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x'' = x' - 3 \\ y'' = y' - 4 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo-se as equações (I) nas equações (II), obtemos:

$$\begin{cases} x'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) - 3 \\ y'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) - 4 \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

Substituindo-se, agora, (III) na equação dada no enunciado, obtemos:

$$16[\tfrac{1}{2}(x+y)^2 - 2 \,.\, \tfrac{\sqrt{2}}{2} \,.\, 3 \,.\, (x+y) + 9] - 96[\tfrac{1}{2}(-x+y)^2 - 2 \,.\, \tfrac{\sqrt{2}}{2} \,.\, 4 \,.\, (-x+y) + 16] = 144$$

Ou seja:

$$8(x+y)^2 - 48\sqrt{2}(x+y) + 144 - \tfrac{9}{2}(-x+y)^2 + 36\tfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) - 144 = 144$$

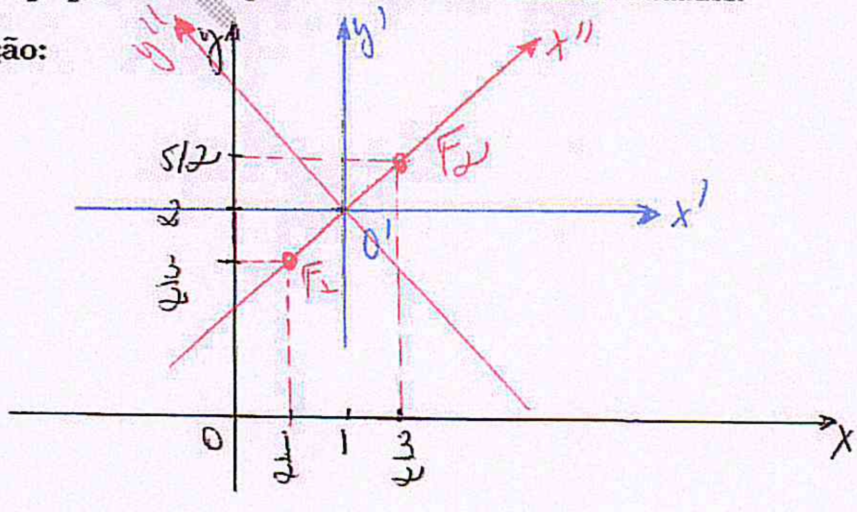
Efetuando-se os cálculos acima, obtemosa equação geral pedida:

$$7x^2 + 50xy + 7y^2 - 168\sqrt{2}\,x - 24\sqrt{2}\,y - 288 = 0$$

Nos dois próximos exemplos, encontraremos a equação geral de uma cônica, conhecendo-se alguns de seus elemetos em novos sistemas de coordenadas.

Exemplo 2: Encontre a equação da elipse cujos focos são os pontos $F_1 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ e $F_2 = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$, sabendo que seu eixo maior mede 2 unidades.

Solução:



Considero o sistema de coordenadas $x''O'y''$ de modo que: $O'x''$ contenha os focos F_1 e F_2 e $O'y''$ seja mediatriz do segmento F_1F_2. Dessa forma, O' é o ponto médio do segmento F_1F_2 e, portanto,

$$O' = \left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2}, \frac{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}}{2}\right) = (1, 2)$$

Como o eixo maior mede 2 unidades, segue que $2a = 2$, e, portanto, $\mathbf{a = 1}$. Além disso:

$$2c = d(F_1, F_2) = \sqrt{(\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{2})^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \implies \mathbf{c = \tfrac{\sqrt{2}}{2}}$$

Como na elipse $b^2 = a^2 - c^2$, segue que $b^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ e, portanto, $\mathbf{b = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

Logo, no sistema $x''O'y''$, a equação desta elipse é $\dfrac{x''^2}{1} + \dfrac{y''^2}{\frac{1}{2}} = 1.$

Ou seja: $x''^2 + 2\,y''^2 = 1$ (I)

Seja $\theta = \angle\,(O'x', O'x'')$. Então: $m_{x''} = \dfrac{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} = 1.$

Ou seja

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\theta = 1 \\ 0^\circ < \theta < 90^\circ \end{cases} \implies \theta = 45^\circ$$

Dessa forma, as equações de rotação são:

	x''	y''
x'	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
y'	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\implies$ $x'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$ e $y'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y')$

Substituindo-se em (I), vem que $\dfrac{x'^2 + 2x'y' + y'^2}{2} + 2\left(\dfrac{x'^2 - 2x'y' + y'^2}{2}\right) = 1$

e, portanto, $x'^2 + 2\,x'\,y' + y'^2 + 2x'^2 - 4\,x'\,y' + 2\,y'^2 = 2$

Dessa forma, $3\,x'^2 - 2\,x'\,y' + 3\,y'^2 - 2 = 0$ (II)

As equações de translação utilizadas foram:

$$\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' + 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

e portanto, substituindo-se em (II), segue que:

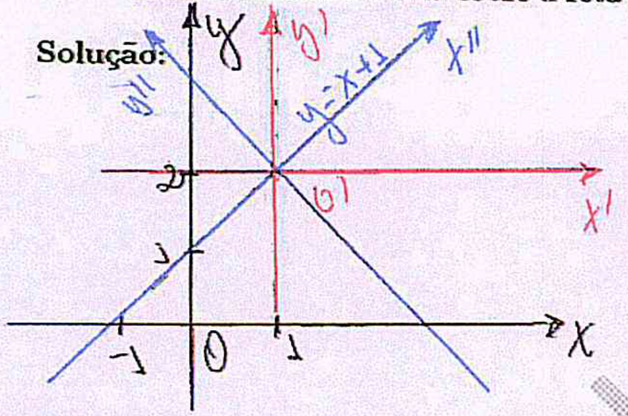
$$3\,(x - 1)^2 - 2\,(x - 1)(y - 2) + 3\,(y - 2)^2 - 2 = 0$$

$$3\,(x^2 - 2\,x + 1) - 2\,(xy - 2\,x - y + 2) + 3\,(y^2 - 4\,y + 4) - 2 = 0, \text{ e daí}$$

$$\mathbf{E:}\quad 3\,x^2 - 2\,xy + 3\,y^2 - 2\,x - 10\,y + 9 = 0$$

Exemplo 3: Encontre a equação da elipse cujo centro é (1, 2), excentricidade é $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e cujo eixo maior mede 2 unidades e está sobre a reta $\mathbf{r:\ y = x + 1}$.

Solução:



Consideremos o sistema de coordenadas cujo eixo x'' é a reta que contém o eixo maior e y'' é a reta perpendicular a x'' passando pelo centro da elipse $O' = (1, 2)$.

Temos que:

$2\,a = 2 \implies \mathbf{a = 1}$ e que $e = \frac{c}{a} \implies \frac{c}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies c = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Na elipse $b^2 = a^2 - c^2 \implies b^2 = \frac{1}{2}$

Assim, em relação ao sistema $x''O'y''$, a equação desta elipse é $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$. Fazendo as substituições e os cálculos necessários, chegamos em

$$x''^2 + 2\,y''^2 = 1 \qquad \text{(I)}$$

Consideremos agora $\theta = \angle(O'x',\ O'x'')$ e a reta $\mathbf{r:\ y = x + 1}$. Então $\operatorname{tg}\theta = m_r = 1$ e, portanto, $\theta = 45^\circ$. Assim, as equações de rotação usadas foram:

	x''	y''
x'	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
y'	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\implies \quad x'' = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(x' + y') \quad \text{e} \quad y'' = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(-\,x' + y')$$

Substituindo-se em (I) e efetuando os cálculos necessários, chegaremos em

$$3\,x'^2 - 2\,x'\,y' + 3\,y'^2 - 2 = 0 \qquad \text{(II)}$$

As equações de translação utilizadas foram:

$$\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' + 2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

Substituindo-se em (II), obtemos a equação da elipse:

$$E: \quad 3\,x^2 - 2\,x\,y + 3\,y^2 - 2\,x - 10\,y + 9 = 0$$

Exemplo 4: Determine a equação da cônica que passa pelos pontos: (1, 2), (2, 0), $(-\frac{1}{7}, \frac{5}{7})$, (0, 0) e (2, -1).

Solução: A equação geral de uma cônica é: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Dizer que um ponto de coordenadas (m, n) é um ponto da cônica significa que suas coordenadas satisfazem a equação da cônica, ou seja, $Am^2 + Bmn + Cn^2 + Dm + En + F = 0$. Assim, usando que os pontos dados acima pertencem à cônica, temos que:

$$\begin{cases} A + B + C + D + E + F = 0 \\ 4\,A + 2\,D + F = 0 \\ \frac{A}{49} - \frac{5\,B}{49} + \frac{25\,C}{49} - \frac{D}{7} + \frac{5\,E}{7} + F = 0 \\ F = 0 \\ 4\,A - 2\,B + C + 2\,D - E = 0 \end{cases}$$

No sistema acima, substituindo-se $F = 0$ nas outras quatro equações e multiplicando-se a terceira equação por 49, ficamos com:

$$\begin{cases} A + B + C + D + E = 0 & (1) \\ 2\,A + D = 0 & (2) \\ A - 5\,B + 25\,C - 7\,D + 35\,E = 0 & (3) \\ 4\,A - 2\,B + C + 2\,D - E = 0 & (4) \end{cases}$$

Resolvendo-se esse novo sistema, obtemos: $D = -2\,A$, $C = 2\,B + E$, $A = -\,3\,B - 4\,E$ e assim $D = 6\,B + 8\,E$. Ou seja, conseguimos obter A, C e D em função de B e E. Substituindo-se, agora, essas expressões em (1), segue que B = - E e, dessa forma, teremos A, B, C e D em função de E. Assim, a equação da cônica é:

$$- E x^2 - E x y - E y^2 + 2 E x + E y = 0$$

E = 0 não fornece a equação de uma cônica. Logo. $E \neq 0$ o que nos permite dividir a última igualdade por (- E) e daí obtemos a equação procurada da cônica que passa pelos pontos dados:

$$x^2 + x y + y^2 - 2 x - y = 0$$

4.1.1 Problemas Propostos

Em cada uma dos problemas a seguir, determinar a natureza do lugar geométrico da equação dada e reduzir a equação à sua forma padrão por transformação de coordenadas. Desenhar o lugar geométrico, quando existir, e todos os conjuntos de eixos coordenados.

(1) $4x^2 - 24xy + 11y^2 + 56x - 58y + 95 = 0$ (R: $x''^2 - 4y''^2 = 4$)

(2) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8\sqrt{13}x - 14\sqrt{13}y + 117 = 0$ (R: $y''^2 - 4x'' = 0$)

(3) $3x^2 - 4xy - 4y^2 + 16x + 16y - 12 = 0$ (R: par de retas concorrentes)

(4) $12x^2 + 12xy + 7y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$ (R: conjunto vazio)

(5) $2x^2 - 12xy + 18y^2 + x - 3y - 6 = 0$ (R: duas retas paralelas)

(6) $8x^2 - 24xy + 15y^2 + 4y - 4 = 0$ (R: $360\, y''^2 - 15\, x''^2 = 98$)

(7) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 2 = 0$ (R: $x''^2 + 2y''^2 = 2$)

(8) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$ (R: $2x'^2 - 2\sqrt{2}y' = 1$)