

Concluimos então que *um operador*  $T: V \rightarrow V$  *admite uma base*  $\beta$  *em relação à qual sua matriz*  $[T]^\beta_\beta$  *é diagonal se, e somente se essa base*  $\beta$  *for formada por autovetores de*  $T$ . É este o motivo da definição que se segue.

**7.1.4 Definição:** Seja  $T: V \rightarrow V$  um operador linear. Dizemos que  $T$  é um operador *diagonalizável* se existe uma base de  $V$  cujos elementos são autovetores de  $T$ .

Os operadores dos Exemplos 1 e 2 são, portanto, diagonalizáveis. Vamos dar a seguir um exemplo de um operador não diagonalizável.

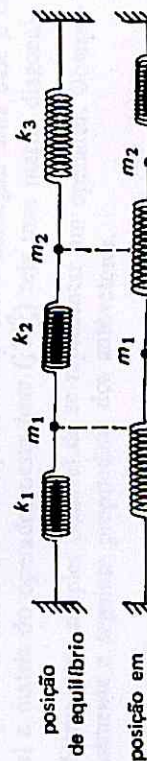
**Exemplo:** Seja  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a transformação linear cuja matriz em relação à base canônica  $\alpha$  é

$$[T]^\alpha_\alpha = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Como  $P(\lambda) = (3 - \lambda)^2 (-1 - \lambda)$ , os autovalores são  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = -1$ . Associado a  $\lambda_1 = 3$  conseguimos apenas um autovetor LI, por exemplo,  $v = (1, 0, 0)$ . Associado a  $\lambda_2 = -1$  temos o autovetor LI,  $u = (-1, -20, 16)$ . Neste caso, temos apenas dois autovetores LI para  $T$ , e portanto não existe uma base de  $\mathbb{R}^3$  constituída só de autovetores. Isto significa que em nenhuma base a matriz de  $T$  é uma matriz diagonal, ou seja,  $T$  não é diagonalizável.

### 7.1.5 Aplicação ao Estudo de Vibrações

Consideremos dois corpos de dimensões desprezíveis e massas  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente, presos a 3 molas de constantes elásticas  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  conforme mostra a Figura 7.1.1. Supondo que o movimento só ocorra na horizontal, como podemos estudar a posição dos dois corpos em função do tempo a partir de uma posição diferente da de equilíbrio?



Observe que em relação a esta base de autovetores, a matriz de  $T$  é uma matriz diagonal.

É claro que as matrizes diagonais  $[T]^\beta_\beta$  que foram obtidas nos Exemplos 1 e 2 não o foram por acaso. Dada uma transformação linear qualquer  $T: V \rightarrow V$ , se conseguirmos uma base  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$  formada por autovetores de  $T$ , então, como

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_n \\ T(v_2) &= 0v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + 0v_n \\ &\vdots \\ T(v_n) &= 0v_1 + 0v_2 + \dots + \lambda_n v_n, \end{aligned}$$

a matriz  $[T]^\beta_\beta$  será uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são os autovalores  $\lambda_i$ , isto é,

$$[T]^\beta_\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Não precisamos ter necessariamente os  $\lambda_i$  distintos (veja o Exemplo 2). Na verdade, um autovalor aparecerá na diagonal tantas vezes quantas forem os autovetores LI a ele associados.

Por outro lado, se  $\gamma = \{u_1, \dots, u_n\}$  é uma base de  $V$  tal que

$$[T]^\gamma_\gamma = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

note que  $u_1, \dots, u_n$  são necessariamente autovetores de  $T$  com autovalores  $a_1, \dots, a_n$  respectivamente. De fato, da definição de  $[T]^\gamma_\gamma$  temos:

$$T(u_1) = a_1 u_1 + 0u_2 + \dots + 0u_n = a_1 u_1$$