UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Departamento de Matemática

GEOMETRIA ANALÍTICA e ÁLGEBRA LINEAR

ENGENHARIA MECÂNICA

PARTE I

Roseli Arbach F. de Oliveira

Luis Antônio F. de Oliveira

ISa, março de 2016

Dedicamos

este e todo trabalho de nossas vidas

a nossos filhos, Fábio e Ricardo,

cujas existências sempre nos

deram força pra seguir adiante.

Apresentação

O presente texto tem como objetivo facilitar o acompanhamento da disciplina semestral *Geometria Analítica e Álgebra Linear* para o curso de Engenharia Mecânica, ministrada pelo Departamento de Matemática da UNESP de Ilha Solteira, para o 1º ano do curso de Engenharia Mecânica. Ele foi elaborado tomando inicialmente como base as notas de aulas da disciplina *Geometria Analítica Plana* ministrada ao longo dos anos para o curso de Licenciatura em Matemática e também a apostila de Álgebra Linear utilizada para os três curso de Engenharia. Nele abordamos o conteúdo programático previsto para a disciplina e já estão propostas listas de exercícios, no final de cada tópico e/ou capítulo.

Todas as sugestões que contribuam para tornar o texto mais claro e completo serão bem vindas e por elas ficaremos muito gratos.

Roseli Arbach Fernandes de Oliveira

Luis Antônio Fernandes de Oliveira

ISa, março de 2016.

ÍNDICE

1. PONTO, RETA E CIRCUNFERÊNCIA NO PLANO

1.1 Coordenadas 1

1.1.1 Coordenadas sobre uma Reta 1

1.1.2 Coordenadas Cartesianas Ortogonais 2

1.1.3 Distância entre Dois Pontos do Plano 5

1.1.4 Problemas Resolvidos 5

1.1.5 Problemas Propostos 11

1.2 Declividade da Reta 12

1.2.1 Ângulos Entre Duas Retas 14

1.2.2 Problemas Propostos 15

1.3 Equações da Reta e da Circunferência 18

1.3.1 Equação e Lugar Geométrico 18

1.4 A Reta 19

1.4.1 Equação da Reta 19

1.4.2 Equação da Reta Passando por Dois Pontos 20

1.4.3 Problemas Propostos 22

1.4.4 A Forma Geral da Equação da Reta 24

1.4.5 Problemas Resolvidos 24

1.4.6 Distância de um Ponto a uma Reta 26

1.4.7 Problemas Propostos 28

1.5 A Circunferência 29

1.6 Equação Reduzida da Circunferência 29

1.6.1 Problemas Propostos 31

1.6.2 Equação Geral da Circunferência 33

1.6.3 Problemas Resolvidos 34

1.6.4 Posições Relativas entre Retas e Circunferências 37

1.6.5 Problemas Resolvidos 38

1.6.6 Problemas Resolvidos 40

1.6.7 Problemas Propostos 43

2. ESTUDO DAS CÔNICAS

2.1 A Elipse 46

2.1.1 Definição 46

2.1.2 Equação Reduzida da Elipse 47

2.1.3 Esboço do Gráfico da Elipse 49

2.1.4 Elementos da Elipse 51

2.1.5 Problemas Resolvidos 52

2.1.6 Problemas Propostos 55

2.2 A Hipérbole 56

2.2.1 Definição 56

2.2.2 Equação Reduzida da Hipérbole 57

2.2.3 Esboço do Gráfico da Hipérbole 58

2.2.4 Elementos da Hipérbole 61

2.2.5 Assíntotas da Hipérbole 62

2.2.6 Problemas Resolvidos 64

2.2.7 Problemas Propostos 68

2.3 A Parábola 70
2.3.1 Definição 70
2.3.2 Equação Reduzida da Parábola 70
2.3.3 Esboço do Gráfico da Parábola 72
2.3.4 Elementos da Parábola 75
2.3.5 Problemas Resolvidos 76
2.3.6 Problemas Propostos 78
Respostas dos Problemas Propostos 79

3. TRANSFORMAÇÕES DE COORDENADAS
3.1 Transformações 82
3.1.1 Definição 82
3.1.2 Translação dos Eixos Coordenados 82
3.1.3 Problemas Resolvidos 84
3.1.4 Problemas Propostos 86
3.2 Equação da Elipse com Centro no Ponto (h, k) 87
3.2.1 Problemas Resolvidos 89
3.2.2 Problemas Propostos 94
3.3 Equação da Hipérbole com Centro no Ponto (h, k) 96
3.3.1 Problemas Resolvidos 97
3.3.2 Problemas Propostos 100
3.4 Equação da Parábola com Centro no Ponto (h, k) 101
3.4.1 Problemas Resolvidos 102
3.4.2 Problemas Propostos 104

3.5 Rotação dos Eixos Coordenados 105

3.5.1 Problemas Resolvidos 108

3.5.2 Problemas Propostos 110

Respostas dos Problemas Propostos 111

4. A EQUAÇÃO GERAL DO SEGUNDO GRAU

4.1 O Indicador $I = B^2 - 4AC$ 119

4.1.1 Problemas Propostos 130

Capítulo 1

Ponto, Reta e Circunferência no Plano

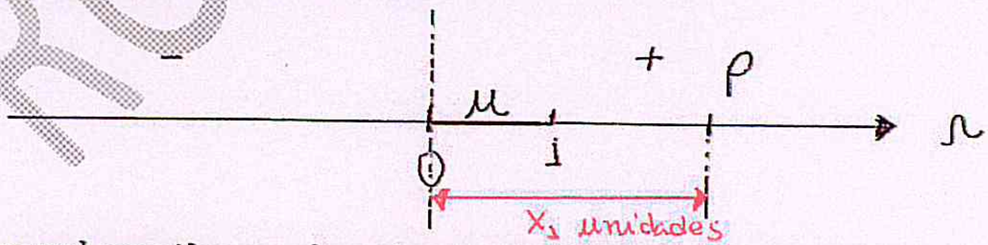
Neste Capítulo, apresentaremos alguns conceitos fundamentais e faremos um estudo detalhado de duas curvas que são de grande importância na Geometria Analítica Plana: a reta e a circunferência.

1.1 Coordenadas

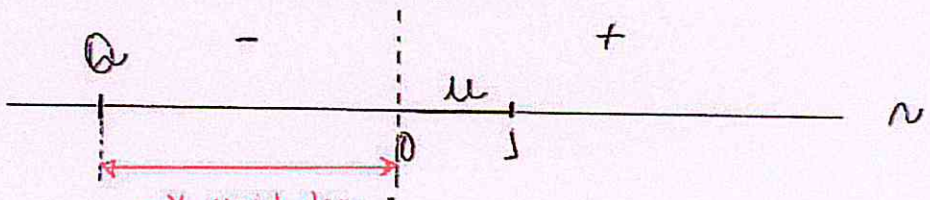
1.1.1 Coordenadas sobre uma Reta

O conjunto do números reais pode ser representado geometricamente através dos pontos de uma reta **r**, da maneira descrita a seguir: primeiramente, fixamos sobre a reta **r** um ponto arbitrário **O** e a ele associamos o número real 0. Escolhemos um sentido como sendo positivo (geralmente, à direita de O) e uma unidade **u** de comprimento.

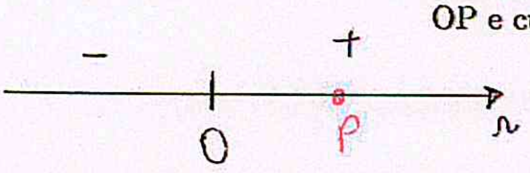
Dado um número real **positivo** x_1, ele será representado sobre a reta **r** por um ponto P à direita de **O**, distando $|\ x_1\ | = x_1$ unidades do ponto **O**.



Dado um número real **negativo** x_2, ele será representado sobre a reta **r** por um ponto Q à esquerda de **O**, distando $|\ x_2\ | = -x_2$ unidades do ponto **O**.



Reciprocamente, dado um ponto qualquer P sobre a reta **r**, ele representa um único número real x_1, cujo valor absoluto é igual ao comprimento do segmento OP e cujo sinal é



positivo, se P estiver à **direita** de O

negativo, se P estiver à **esquerda** de O

Definição: O sistema definido é chamado **sistema linear de coordenadas.**

Nomenclatura: reta **r** : eixo do sistema de coordenadas

ponto **O** : origem do sistema

número real $\mathbf{x_1}$ associado ao ponto P : coordenada de P

Notação: Se um ponto P tem coordenada x_1, escrevemos $P(x_1)$ ou $P = (x_1)$.

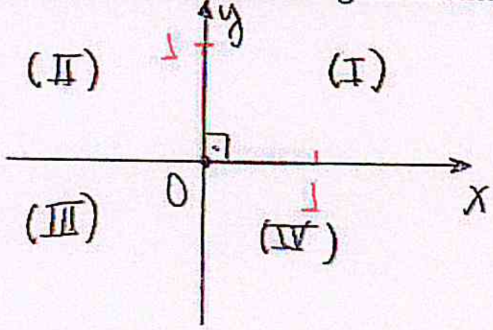
Definição: Dados $P = (x_1)$ e $Q = (x_2)$ dois pontos arbitrários sobre a reta r, a distância de P a Q, denotada por **d(P, Q)**, é o número real **positivo ou nulo** dado por:

$$d(P, Q) = | x_2 - x_1 |$$

1.1.2 Coordenadas Cartesianas Ortogonais

Analogamente ao que foi feito para os números reais, o conjunto dos pares ordenados de números reais pode ser representado geometricamente através de pontos do plano. Esta correspondência é estabelecida por meio de Sistemas de Coordenadas Cartesianas, que passamos a descrever a seguir:

Neste sistema, são consideradas duas retas perpendiculares em um ponto **O**, denominado **origem** do sistema. Estas retas dividem o plano em quatro regiões, chamadas quadrantes e numeradas conforme figura abaixo. Além disso, chamamos a reta:



horizontal de **eixo das abscissas** (ou eixo dos **x**);

vertical de **eixo das ordenadas** (ou eixo dos **y**);

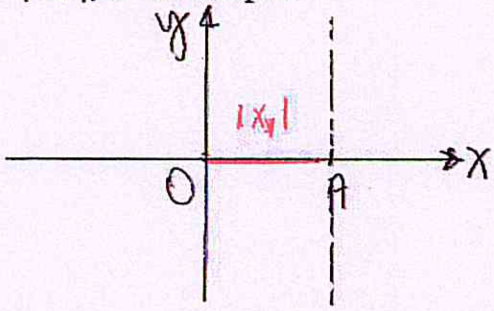
A orientação **positiva** dos eixo dos x é à **direita** de O;

A orientação **positiva** dos eixo dos **y** é **acima** de O.

Fixa-se, também, uma unidade **u** de comprimento em cada uma dos eixos. De modo geral, escolhe-se a mesma unidade para ambos os eixos.

Veremos, a seguir, como obter uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e o conjunto de pares ordenados de números reais:

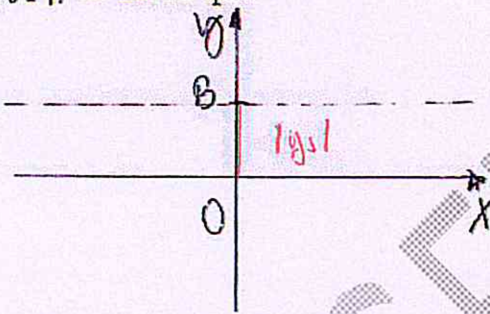
Dado um par ordenado de números reais (x_1, y_1), associamos a ele o ponto P do plano obtido do seguinte modo: sobre o eixo dos **x**, marcamos o ponto A cuja distância ao ponto O seja $|\, x_1 \,|$, de modo que:



- A está à direita de O, se x_1 é positivo;
- A está à esquerda de O, se x_1 é negativo.

Traçamos, pelo ponto A, uma reta **r** paralela ao eixo dos **y**.

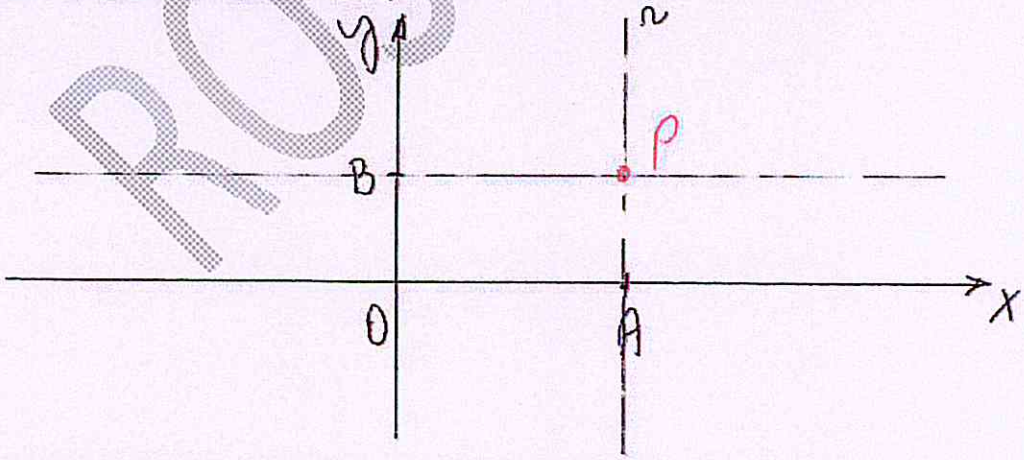
A seguir, sobre o eixo dos **y**, marcamos o ponto B cuja distância ao ponto O seja $|\, y_1 \,|$, de modo que:



- B está acima de O, se y_1 é positivo;
- B está abaixo de O, se y_1 é negativo.

Traçamos, pelo ponto B, uma reta s paralela ao eixo dos x.

O ponto P, intersecção das retas **r** e **s**, é o **único** ponto do plano que está associado ao par ordenado de números reais (x_1, y_1).



Reciprocamente, dado um ponto P do plano, associamos a ele **um único** par ordenado de números reais (x, y), obtido como descrito a seguir:

$$x = \begin{cases} \text{distância de P ao eixo dos y, se P está à direita do eixo y} \\ \text{-(distância de P ao eixo dos y), se P está à esquerda do eixo y} \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} \text{distância de P ao eixo dos x, se P está acima do eixo x} \\ \text{-(distância de P ao eixo dos x), se P está abaixo do eixo x} \end{cases}$$

O número real **x** obtido como acima descrito é chamado de **abscissa** (ou coordenada **x**) do ponto P e o número real **y** é chamado de **ordenada** (ou coordenada **y**) do ponto P. O par ordenado (x, y) é chamado de **coordenada** do ponto P. Se um ponto P do plano tem coordenadas (x, y), denotamos por P(x, y) ou P = (x, y).

É fácil ver que cada quadrante está relacionado com os sinais das coordenadas dos pontos do plano: dado um ponto P = (x, y), temos:

$x > 0$ e $y > 0$ $\Longleftrightarrow$ P está no 1º quadrante

$x < 0$ e $y > 0$ $\Longleftrightarrow$ P está no 2º quadrante

$x < 0$ e $y < 0$ $\Longleftrightarrow$ P está no 3º quadrante

$x > 0$ e $y < 0$ $\Longleftrightarrow$ P está no 4º quadrante

Ou seja:

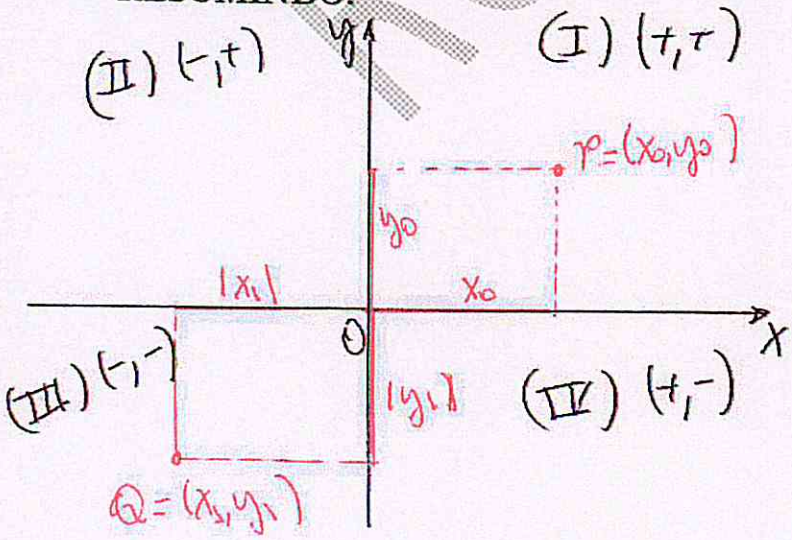
1º quadrante : (+ , +)

2º quadrante : (- , +)

3º quadrante : (- , -)

4º quadrante : (+ , -)

RESUMINDO:



O: origem do sistema de coordenadas

O_x (ou Ox): eixo das abscissas

O_y (ou Oy): eixo das ordenadas

eixos O_x e O_y: eixos coordenados

x_0: abscissa do ponto P

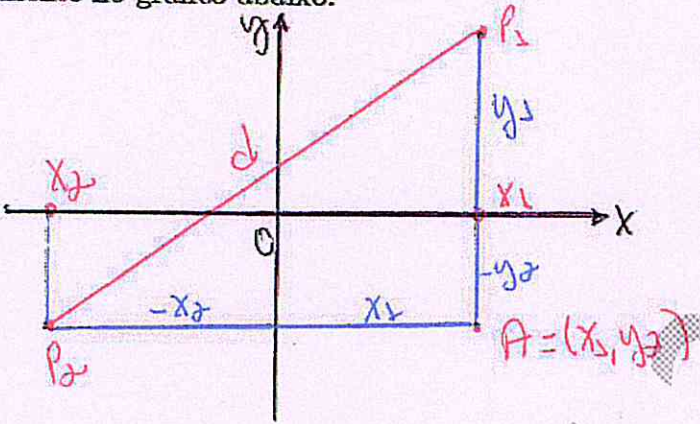
y_0: ordenada do ponto P

(x_0, y_0) : coordenadas do ponto P

Observe que: A cada ponto P do plano está associado **um único** par ordenado de números reais (x_0, y_0). Reciprocamente, a cada par ordenado de números reais (x_0, y_0) está associado um único ponto P do plano coordenado. Em outras palavras, existe uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano coordenado e o conjunto dos pares ordenados de números reais.

1.1.3 Distância entre Dois Pontos do Plano

Sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ dois pontos quaisquer do plano, representados geometricamente no gráfico abaixo:



Sejam $d = d(P_1, P_2)$ a distância entre eles e $A = (x_1, y_2)$. Do Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo P_1AP_2, segue que:

$$d^2 = d^2(P_1, A) + d^2(P_2, A)$$

Mas: $d(P_1, A) = | y_1 - y_2 |$ e $d(P_2, A) = | x_1 - x_2 |$ e portanto

$$\boxed{d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} \tag{1.1}$$

1.1.4 Problemas Resolvidos

1. Determine o valor de **k** para que o ponto $A = (k^2 - 1, 2k + 1)$ perteça ao 2º quadrante.

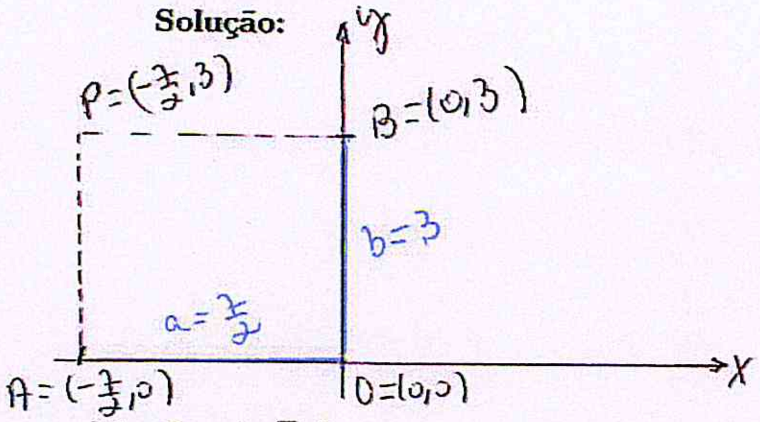
Solução: Para que o ponto a pertença ao 2º quadrante, a abscissa de A deve ser negativa e sua ordenada deve ser positiva. Logo, devemos ter

$$\begin{cases} k^2 - 1 < 0 \\ 2k + 1 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -1 < k < 1 \\ k > -\frac{1}{2} \end{cases} \iff -\tfrac{1}{2} < k < 1$$

2. As retas que passam por um ponto P do plano e são perpendiculares aos eixos coordenados formam, com os eixos, um retângulo. Encontre o perímetro deste retângulo quando:

[a] $P = (-\frac{7}{2}, 3)$

Solução:

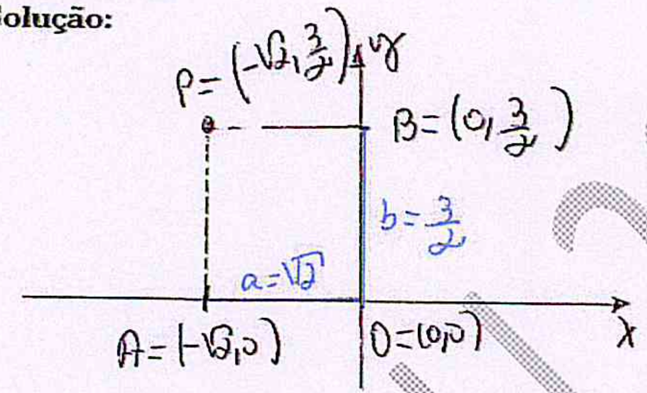


Sejam **p** o perímetro do retângulo ao lado, **a** a medida do segmento OA e **b** a medida do segmento OB. Então:

$$p = 2(a + b) = 2(\tfrac{7}{2} + 3) =$$
$$= 7 + 6 = 13 \text{ uc.}$$

[b] $P = (-\sqrt{2}, \frac{3}{2})$

Solução:

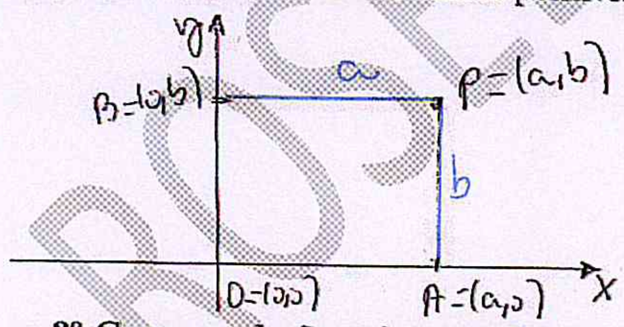


Sejam **p** o perímetro do retângulo ao lado, **a** a medida do segmento OA e **b** a medida do segmento OB. Então:

$$p = 2(a + b) = 2(\sqrt{2} + \tfrac{3}{2}) =$$
$$= (2\sqrt{2} + 3) \text{ uc.}$$

[c] P = (a, b), sendo a, b números reais de mesmo sinal.

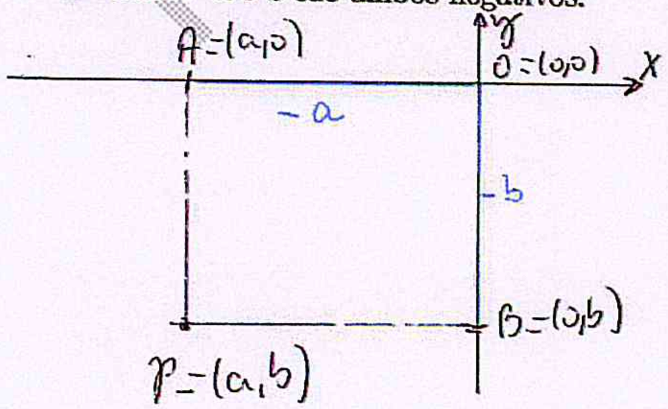
Solução: 1º Caso: a e b são ambos positivos:



Seja **p** o perímetro do retângulo ao lado. A medida do segmento OA é **a** uc e a medida do segmento OB é **b** uc. Então:

$$p = 2(a + b) = (2a + 2b) \text{ uc.}$$

2º Caso: a e b são ambos negativos:



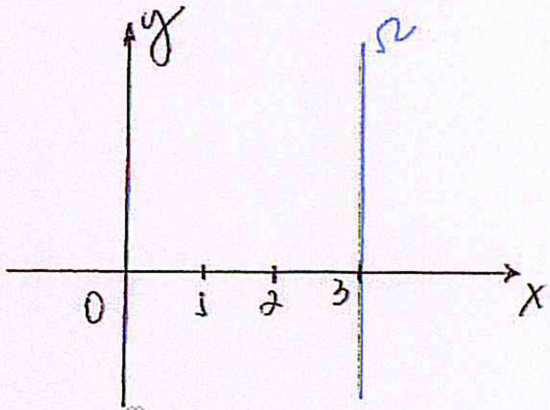
Seja **p** o perímetro do retângulo ao lado. A medida do segmento OA é **-a** uc e a medida do segmento OB é **-b** uc. Então:

$$p = 2[-a + (-b)] = (-2a - 2b) \text{ uc.}$$

3. Represente no plano os pontos P = (x, y) tais que

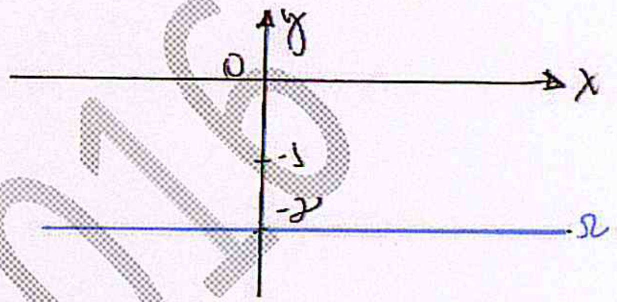
[a] $x = 3$

Solução: Os pontos que devemos representar são da forma P = (3, y), com $y \in \mathbb{R}$; ou seja, são os pontos que estão sobre a reta <u>vertical</u> **r** ao lado:



[b] $y = -2$

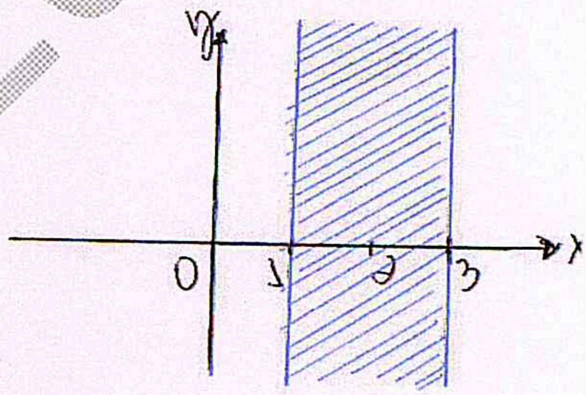
Solução: Os pontos que devemos representar são da forma P = (x, -2), com $x \in \mathbb{R}$; ou seja, são os pontos que estão sobre a reta <u>horizontal</u> s ao lado:



4. Represente no plano os pontos P = (x, y) tais que

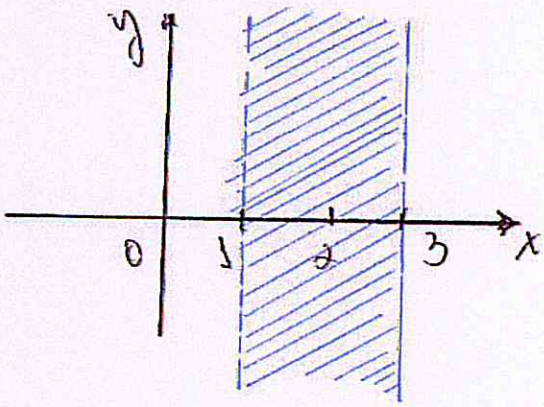
[a] $1 \leqslant x \leqslant 3$

Solução: Os pontos que devemos representar são da forma P = (x, y), com a ordenada **y** arbitrária e a abscissa **x** restrita ao intervalo fechado $1 \leqslant x \leqslant 3$. Ou seja, são os pontos que pertencem à faixa (infinita) hachurada ao lado:



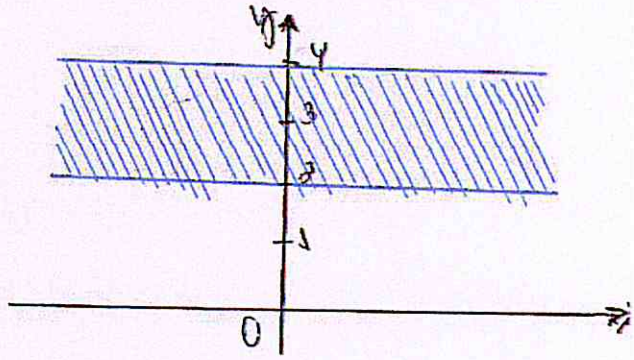
[b] $1 < x < 3$

Solução: Os pontos que devemos representar são da forma P = (x, y), com a ordenada **y** arbitrária e a abscissa **x** restrita ao intervalo aberto $1 < x < 3$. Observe que, por se tratar de um intervalo aberto, **x** não pode ser igual a **1** nem a **3**. Ou seja, são os pontos que pertencem à faixa (infinita) hachurada ao lado:



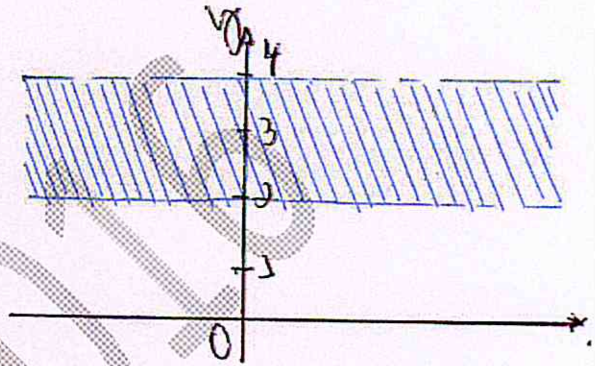
[c] $2 \leqslant y \leqslant 4$

Solução: Os pontos que devemos representar são da forma $P = (x, y)$, com a abscissa x arbitrária e a ordenada y restrita ao intervalo fechado $2 \leqslant x \leqslant 4$. Ou seja, são os pontos que pertencem à faixa (infinita) hachurada ao lado:



[d] $2 < y < 4$

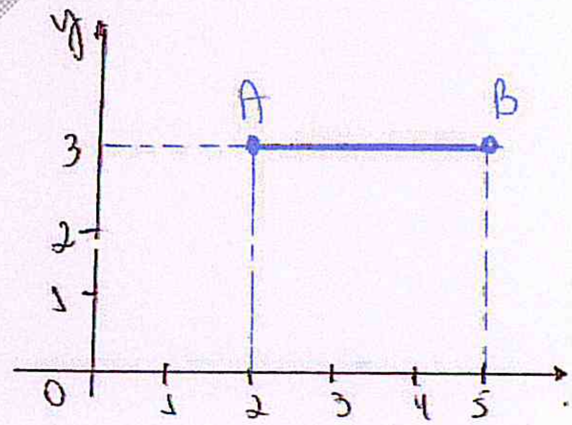
Solução: Os pontos que devemos representar são da forma $P = (x, y)$, sendo a abscissa x arbitrária e a ordenada y restrita ao intervalo aberto $2 < y < 4$. Novamente, como o intervalo descrito é aberto, y não pode assumir os valores **2** e **4**. Ou seja, são os pontos que pertencem à faixa (infinita) hachurada ao lado:



5. Represente no plano os pontos $P = (x, y)$ tais que

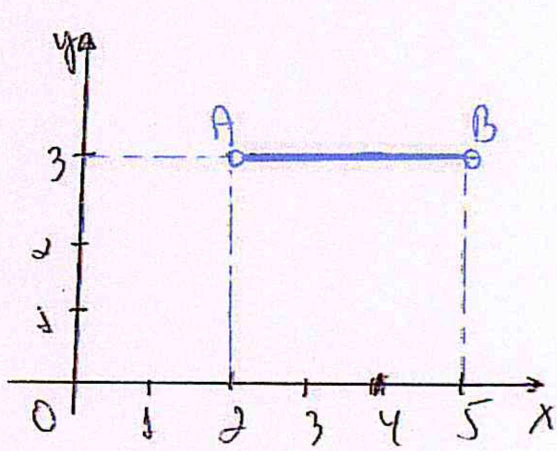
[a] $2 \leqslant x \leqslant 5$ e $y = 3$

Solução: Queremos encontrar a região do plano na qual estão os pontos satisfazendo $P = (x, 3)$, com $2 \leqslant x \leqslant 5$; isto é, os pontos que pertencem à intersecção entre a região determinada pela condição $2 \leqslant x \leqslant 5$ e a reta horizontal $y = 3$. Os pontos que satisfazem a estas condições estão sobre o segmento AB no desenho ao lado:



[b] $2 < x < 5$ e $y = 3$

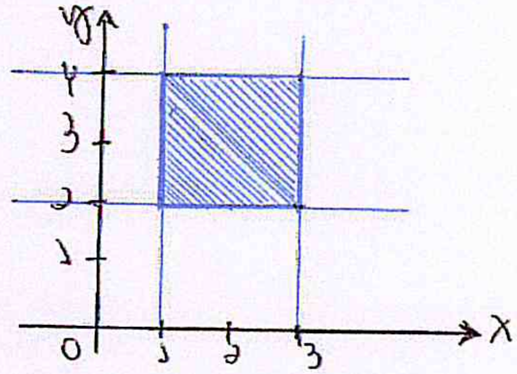
Solução: Queremos encontrar a região do plano na qual estão os pontos satisfazendo $P = (x, 3)$, com $2 < x < 5$; isto é, os pontos que pertencem à intersecção entre a região determinada pela condição $2 < x < 5$ e a reta horizontal $y = 3$. Os pontos que satisfazem a estas condições estão sobre o segmento AB no desenho ao lado:



6. Represente no plano os pontos $P = (x, y)$ tais que

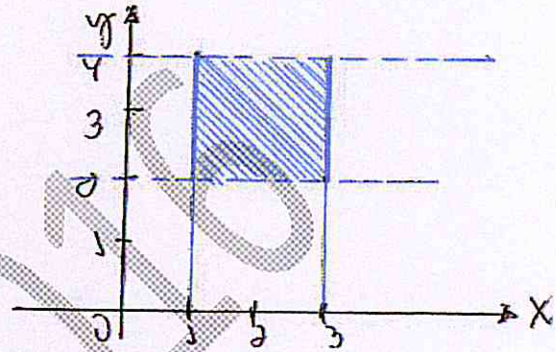
[a] $1 \leqslant x \leqslant 3$ e $2 \leqslant y \leqslant 4$.

Solução: Devemos encontrar a região do plano na qual estão os pontos $P = (x, y)$ que pertencem à intersecção entre as regiões acima descritas. Note que **x** pode assumir os valores **1** e **3**, assim como **y** pode assumir os valores **2** e **4**.



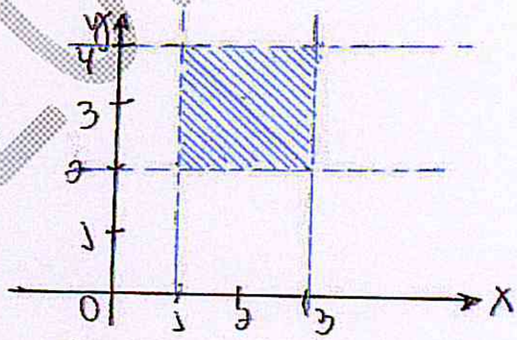
[b] $1 \leqslant x \leqslant 3$ e $2 < y < 4$.

Solução: Queremos, agora, encontrar a região do plano na qual estão os pontos $P = (x, y)$ pertencentes à intersecção entre as regiões acima descritas. Note que **x** pode assumir os valores **1** e **3**, mas **y** não pode assumir os valores **2** e **4**.



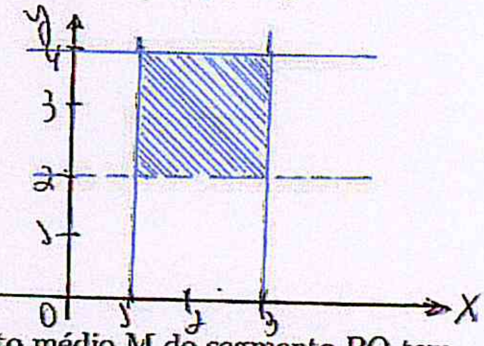
[c] $1 < x < 3$ e $2 < y < 4$.

Solução: Na região descrita, tanto a abscissa **x** não pode assumir os valores **1** e **3**, como a ordenada **y** não pode assumir os valores **2** e **4**. Obtemos, dessa forma, a região ao lado.



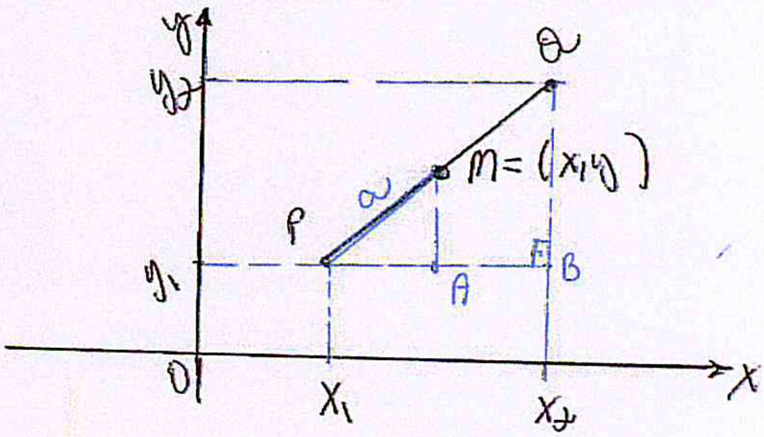
[d] $1 \leqslant x \leqslant 3$ e $2 < y \leqslant 4$.

Solução: Na região descrita, a abscissa **x** pode assumir os valores **1** e **3**, assim como a ordenada **y** não pode assumir o valor **2** mas pode assumir o valor **4**.



7. Dados os pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, mostre o ponto médio M do segmento PQ tem coordenadas $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Solução: Consideremos a figura ao lado, na qual a representa a medida do segmento PM. Da Geometria Elementar, sabemos que os triângulos PAM e PBQ são semelhantes



e, portanto,

$$\frac{a}{2a} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \iff \frac{1}{2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \iff x_2 - x_1 = 2(x - x_1) \iff$$
$$\iff x_2 - x_1 = 2x - 2x_1 \iff 2x = x_1 + x_2 \iff x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

De modo análogo, mostra-se que $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ e, portanto, o ponto médio M do segmento PQ é dado por:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

8. Determine um ponto P do plano que seja equidistante dos pontos $A = (1, 5)$, $B = (0, 6)$ e $C = (-1, 1)$.

Solução: Seja $P = (x, y)$ o ponto procurado. Devemos ter:

$$d(P, A) = d(P, B) = d(P, C)$$

Ou seja: $$d^2(P, A) = d^2(P, B) = d^2(P, C)$$

Mas:

- $d^2(P, A) = (x - 1)^2 + (y - 5)^2 = x^2 + y^2 - 2x - 10y + 26$ **(1)**
- $d^2(P, B) = (x - 0)^2 + (y - 6)^2 = x^2 + y^2 - 12y + 36$ **(2)**
- $d^2(P, C) = [x - (-1)]^2 + (y - 1)^2 = x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2$ **(3)**

De **(1)** e **(2)** segue que $-2x - 10y + 26 = -12y + 36$ e, portanto

$$x - y + 5 = 0$$

Analogamente, de **(1)** e **(3)** e de **(2)** e **(3)** seguem, respectivamente, as equações:

$$x - 3y - 6 = 0$$

$$x + 5y - 17 = 0$$

Ficamos, então, com o sistema:

$$\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \\ x + 5y - 17 = 0 \end{cases} \iff x = -\tfrac{4}{3} \quad e \quad y = \tfrac{11}{3} \iff P = (-\tfrac{4}{3}, \tfrac{11}{3})$$

1.1.5 Problemas Propostos

Considere fixado um sistema de coordenadas ortogonais no plano.

1. Localize os seguintes pontos do plano:

(a) A = (0, -6), B = (0, 0), C = (0, 1) e D = (0, 7)

(b) A = (-4, 0), B = (2, 0), C = (3.5, 0) e D = (15, 0)

(c) A = (4, -2), B = (4, 0), C = (4, 1) e D = (4, 5)

(d) A = (-1, -3), B = (-1, 1), C = (-1, 3) e D = (-1, 7)

2. A *projeção* de um ponto sobre uma reta é o pé da perpendicular traçada do ponto à reta. Encontre as coordenadas da porjeção do ponto P = (x, y) :

(a) sobre o eixo dos **x**; (**R:** x)

(b) sobre o eixo dos **y**. (**R:** y)

3. A *projeção* de um segmento de reta AB sobre uma reta **r** é o segmento que liga as projeções dos pontos extremos A e B sobre a reta **r**. Ache o comprimento das projeções sobre os eixos coordenados dos segmentos de reta ligando os pontos:

(a) A = (3, 9) e B = (5, -2); (**R:** sobre O_x: 2 uc e sobre O_y: 11 uc)

(b) A = (-1, 0) e B = (5, 0); (**R:** sobre O_x: 6 uc e sobre O_y: 0 uc)

(c) A = (-1, -5) e B = (3, 8). (**R:** sobre O_x: 4 uc e sobre O_y: 13 uc)

4. Calcular o perímetro do quadrilátero de vértices A = (-3, -1), B = (0, 3), C = (3, 4) e D = (4, -1). **(R:** $(12 + \sqrt{10} + \sqrt{26})$ uc)

5. Mostrar que os ponto A = (-2, -1), B = (2, 2) e C = (5, -2) são vértices de um triângulo isósceles.

6. Mostrar que os pontos A = (2, -2), B = (-8, 4) e C = (5, 3) são vértices de um triângulo retângulo e calcular sua área.

7. Um segmento retilíneo de comprimento 5 tem (3, -2) como um extremo. Sendo 6 a abscissa do outro extremo, determinar sua ordenada. (Duas soluções.) **(R:** -6 ou 2)

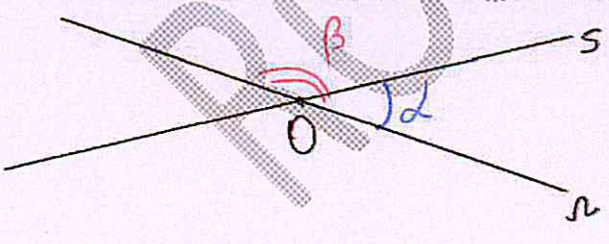
8. Determinar a equação algébrica que expressa a condição de ser o ponto (x, y) equidistante dos dois pontos A = (-3, 5) e B = (7, -9). **(R:** $5x - 7y - 24 = 0$)

9. Um segmento retilíneo tem um de seus extremos no ponto P = (7, 8) e seu ponto médio é o ponto M = (4, 3). Determine o outro extremo do segmento. **(R:** (1, -2))

10. Os pontos médios dos lados de um triâgulo são (2, 5), (4, 2) e (1, 1). Determine as coordenadas dos três vértices deste triângulo. **(R:** (3, -2), (5, 6) e (-1, 4))

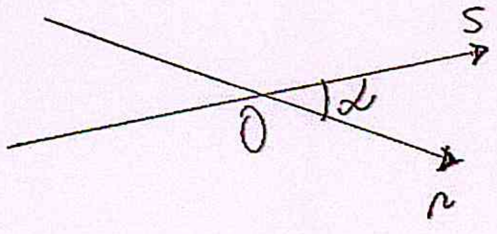
1.2 Declividade da Reta

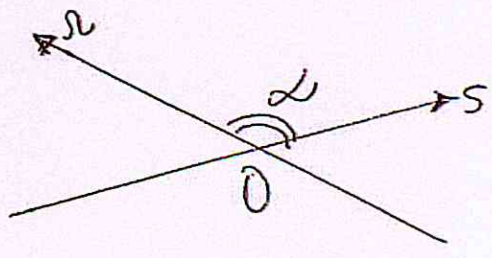
Duas linhas retas **r** e s que se interceptam formam entre si dois pares de ângulos opostos pelo vértice, como mostra a figura abaixo. Assim, a expressão "ângulo entre duas linhas retas " não é precisa, uma vez que podemos estar nos referindo tanto ao ângulo α quanto ao ângulo β. Para que não ocorra esta ambiguidade, para estabelecer a próxima definição, consideraremos **retas orientadas**.



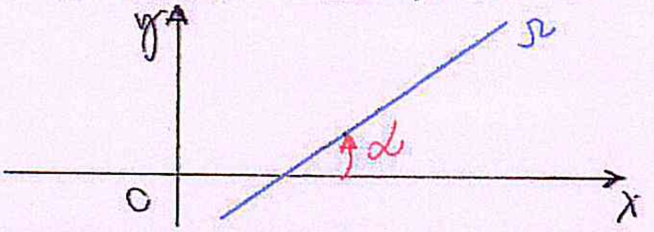
Definição: O *ângulo* entre duas retas orientadas **r** e s é o ângulo entre os lados das retas que estão orientados positivamente.

Notação: $\alpha = \angle(\mathrm{r}, \mathrm{s})$.





Definição: O *ângulo de inclinação* de uma dada reta **r não paralela ao eixo O_x** é o ângulo que esta reta forma com o semi-eixo positivo O_x, medido de O_x para **r**, no sentido anti-horário. Se **r** $\parallel O_x$, o ângulo de inclinação de **r** é 0°.



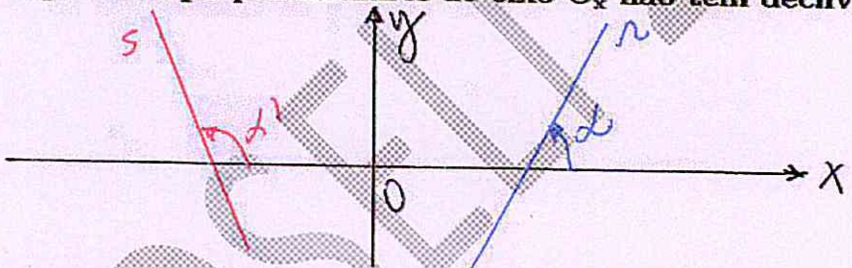
Observe que: se $\alpha = \angle(r, O_x)$, então

$$0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$$

Definição: O *coeficiente angular* (ou *declividade*) de uma reta **r** é a tangente do seu ângulo de inclinação.

Notação: Dada uma reta **r**, denotamos seu coeficiente angular por $\mathbf{m_r}$ ou, mais simplesmente, por **m**. Logo $m_r = \text{tg}\,\alpha$

Observação: A declividade pode assumir **qualquer** valor real, uma vez que o ângulo de inclinação α de uma reta satisfaz $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$. Se o ângulo α é agudo, a declividade é positiva (veja reta **r** da Figura abaixo). Se o ângulo α é obtuso, a declividade é negativa (veja reta s da Figura abaixo). Uma reta coincidente com ou paralela ao eixo O_y é perpendicular ao eixo O_x e portanto seu ângulo de inclinação é 90°. Como não está definida a tangente de 90°, concluimos que **retas perpendiculares ao eixo O_x não têm declividade.**



Além disso, se $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ são dois pontos distintos de uma reta **r**, então a declividade de **r** é dada por:

$$\boxed{m_r = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2} \qquad (1.2)$$

Exemplo: Determine a declividade e o ângulo de inclinação da reta **r** que passa pelos pontos $P = (0, -2)$ e $Q = (1, -1)$.

Solução: Seja **m** a declividade da reta **r**. Temos que $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ e, portanto, podemos aplicar a fórmula 1.2 dada no Teorema anterior. Assim:

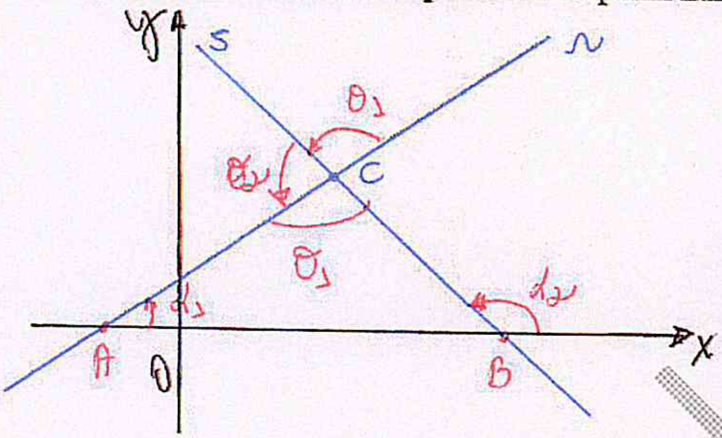
$$m = \frac{-1-(-2)}{1-0} = \frac{-1+2}{1} = 1 \quad \Longrightarrow m = 1$$

Dessa forma, se $0^o \leq \alpha \leq 180^o$ é o ângulo de inclinação da reta **r**, então

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 \Longrightarrow \alpha = 45^o$$

1.2.1 Ângulo Entre Duas Retas

Sejam **r** e **s** duas retas que se interceptam num ponto C, como ilustra a figura abaixo, formando



entre si ângulos suplementares θ_1 e θ_2 . Sejam:

$$A = r \cap O_x$$

$$B = s \cap O_x.$$

Os ângulos θ_1 e θ_2 são identificados por **arcos orientados** no sentido anti-horário (ou positivo, como na Trigonometria).

Definição: Nas condições acima, a reta a partir da qual o ângulo é orientado é chamada *reta origem*. A reta para a qual o ângulo é orientado é chamada *reta extremidade*. As declividades destas retas são chamadas, respectivamente, de , *declividade origem* e *declividade extremidade*.

Indiquemos por m_r e m_s as declividades de **r** e de **s**, respectivamente. Valem os seguintes resultados:

(1) Considerando $m_r m_s \neq -1$,

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{m_s - m_r}{1 + m_r m_s} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}$$

(2) Sejam **r** e **s** duas retas no plano, com respectivos coeficientes angulares m_r e m_s. Então:

$$\mathbf{r} \quad \text{é } \textbf{paralela} \text{ a} \quad \mathbf{s} \quad \Longleftrightarrow \quad m_r = m_s.$$

$$\mathbf{r} \quad \text{é } \textbf{perpendicular} \text{ a} \quad \mathbf{s} \quad \Longleftrightarrow \quad m_r . m_s = -1.$$

Exemplo: Duas retas se interceptam formando um ângulo de 45°, para o qual a reta origem passa pelos pontos (-2, 1) e (9, 7) e a reta extermidade passa pelo ponto (3, 9) e pelo ponto A cuja abscissa é -2. Determine a ordenada do ponto A.

Solução: Sejam A = (-2, b), **r** a reta origem e s a reta extremidade . Então:

$$m_r = \frac{7-1}{9+2} = \frac{6}{11}$$

$$m_s = \frac{9-b}{3-(-2)} = \frac{9-b}{5}$$

Assim, pelo Teorema 2,

$$1 = \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\frac{9-b}{5} - \frac{6}{11}}{1 + \frac{6}{11}\cdot\frac{9-b}{5}} = \frac{\frac{99-11b-30}{55}}{\frac{55+54-6b}{55}} = \frac{69 - 11b}{109 - 6b}$$

e, dessa forma,

$$109 - 6b = 69 - 11b \implies 5b = 69 - 109 = -40 \implies b = -8$$

Assim: a ordenada do ponto A é -8.

1.2.2 Problemas Propostos

Considere fixado um sistema de coordenadas ortogonais no plano. Esboçar a figura relativa a cada exercício.

1. Determinar a declividade e o ângulo de inclinação da reta determinada pelos pontos A = (-3, 2) e B = (7, -3). **(R:** $m = -\frac{1}{2}$ e $\theta = \text{arc tg} -\frac{1}{2}$)

2. Os vértices de um triângulo são os ponto A = (2, -2), B = (-1, 4) e C = (4, 5). Determinar a declividade de cada um de seus lados. **(R:** -2, $\frac{7}{2}$, e $\frac{1}{5}$)

3. Mostrar, por meio de declividades, que os pontos A = (9, 2), B = (11, 6), C = (3, 5) e D = (1, 1) são os vértices de um paralelogramo.

4. Uma reta de declividade 3 passa pelo ponto A = (3, 2). Sabendo que a abscissa de um outro ponto B da reta é 4, determine a ordenada de B. (**R:** 5)

5. Uma reta de declividade -2 passa pelo ponto P = (2, 7) e pelos pontos A e B. Se a ordenada de A é 3 e a abscissa de B é 6, encontrar a abscissa de A e a ordenada de B. (**R:** 4 e -1)

6. Três vértices de um paralelogramo são os pontos A = (-1, 4), B = (1, -1) e C = (6, 1). Determinar o quatro vértice. (**R:** (4, 6))

7. Determinar os ângulos do triângulo cujos vértices são A = (-2, 1), B = (3, 4) e C = (5, -2).

(**R:** $\text{arc tg } \frac{18}{13} \simeq 54^\circ\ 10'$, $\text{arc tg } 4{,}5 \simeq 77^\circ\ 28'$ e $\text{arc tg } \frac{9}{8} \simeq 48^\circ\ 22'$)

8. Mostrar que os pontos A = (1, 1), B = (5, 3), C = (8, 0) e D = (4, -2) são os vértices de um paralelogramo.

9. Mostrar que os pontos A = (1, 1), B = (5, 3) e C = (6, -4) são os vértices de um triângulo isósceles e determinar um de seus ângulos iguais.

10. Determinar os ângulos do quadrilátero cujos vértices são A = (2, 5), B = (7, 3), C = (6, 1) e D =(0, 0).

(**R:** 90°, $\text{arc tg } 12$, $\text{arc tg } -\frac{11}{8}$ e $\text{arc tg } \frac{28}{17}$)

11. Duas retas se interceptam formando um ângulo de 135° para o qual a reta extremidade tem uma declividade -3. Determinar a declividade da reta origem. (**R:** $m = -\frac{1}{2}$)

12. Por meio de declividades, mostrar que os três pontos A = (6, -2), B = (2, 1) e C = (-2, 4) são colineares.

13. Uma reta passa pelos pontos A = (-2, -2) e B = (4, 1). Calcular a ordenada de um ponto desta reta, cuja abscissa é 10. (**R:** 4)

14. Determinar a equação que deve satisfazer qualquer ponto P = (x, y) para estar situado sobre a reta que passa pelos pontos A = (2, -1) e B = (7, 3). (**R:** r: $4x - 5y - 13 = 0$)

15. Determinar a equação que deve satisfazer qualquer ponto P = (x, y) para estar situado sobre a reta que passa pelo ponto A = (3, -1) e tem declividade igual a 4.

(R: r: 4x - y - 13 = 0)

16. Mostrar que a reta **r** que passa pelos pontos A = (-2, 5) e B = (4, 1) é perpendicular à reta s que passa pelos pontos C = (-1, 1) e D = (3, 7).

17. A reta **r** passa pelos pontos A = (3, 2) e B = (-4, -6) e a reta s passa pelo ponto C = (-7, 1) e pelo ponto D cuja ordenada é -6. Determinar a abscissa do ponto D, sabendo que r é perpendiucular a s. **(R: 1)**

18. Mostrar que os três pontos A = (2, 5), B = (8, -1) e C = (-2, 1) são vértices de um triângulo retângulo e determinar seus ângulos agudos.

19. Mostrar que os quatro pontos A = (2, 4), B = (7, 3), C = (6, -2) e D = (1, -1) são vértices de um quadrado e que suas diagonais se dividem mutuamente ao meio e são perpendiculares uma a outra.

20. Mostrar que os quatro pontos A = (2, 2), B = (5, 6), C = (9, 9) e D = (6, 5) são vértices de um losango e que suas diagonais se cortam mutuamente ao meio e são perpendiculares uma a outra.

1.3 Equações da Reta e da Circunferência

1.3.1 Equação e Lugar Geométrico

Existem dois problemas, que são inversos um do outro, fundamentais na Geometria Analítica:

1. Dada uma equação, determinar sua representação geométrica;
2. Dada uma figura ou uma condição geométrica, determina qual é sua equação.

Embora sejam dois problemas distintos, eles estão tão ligados que, juntos, constituem o problema fundamental da Geometria Analítica. Veremos, no decorrer do Curso, que, após termos encontrado a equação para uma condição geométrica, em geral é possível, através de um estudo detalhado desta equação, determinar características e propriedades geométricas para a condição dada inicialmente.

Considere uma equação em duas variáveis, do tipo: $f(x, y) = 0$. De um modo geral, esta equação é satisfeita para infinitos pares de valores reais x e y. Considerando cada um desses pares de números reais como um ponto $P = (x, y)$ do plano, temos a seguinte definição:

Definição: O *lugar geométrico* (ou *gráfico*) de uma equação de duas variáveis $f(x, y) = 0$ é a curva que contém **todos, e somente estes**, pontos cujas coordenadas satisfazem a equação dada.

Definição: Dizemos que um ponto cujas coordenadas satisfazem a uma equação do tipo $f(x, y) = 0$ **pertence** ao lugar geométrico da equação.

Exemplos:

1. O lugar geométrico da equação $x^2 + y^2 = 0$ é um único ponto: a origem
2. A equação $x^2 + y^2 + 4 = 0$ não define lugar geométrico no sistema de coordenadas cartesianas reais.

Iniciaremos, a partir de agora, o estudo detalhado de algumas curvas que são de grande importância na Geometria Analítica.

1.4 A Reta

O lugar geométrico de uma equação do 1º grau em duas variáveis é uma linha reta. Reciprocamente, uma reta é representada por uma equação do 1º grau em duas variáveis; ou seja, por uma equação do tipo

$$ax + by + c = 0$$

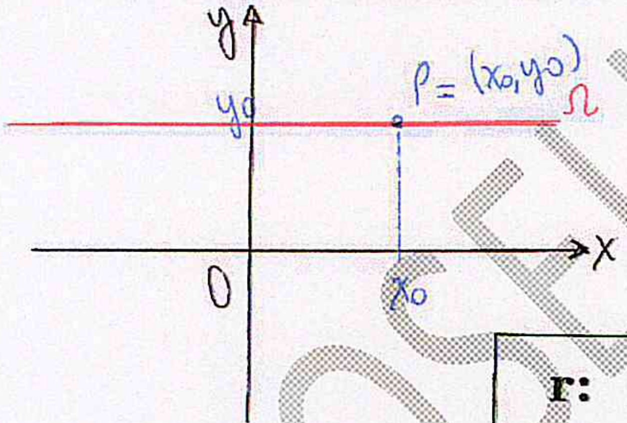
sendo a, b, c $\in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 \neq 0$

Nosso próximo objetivo é encontrar a equação que descreve uma dada reta quando conhecemos alguns elementos desta reta, por exemplo: um ponto e sua declividade ou dois pontos distintos.

1.4.1 Equação da Reta

Consideraremos três casos, a saber:

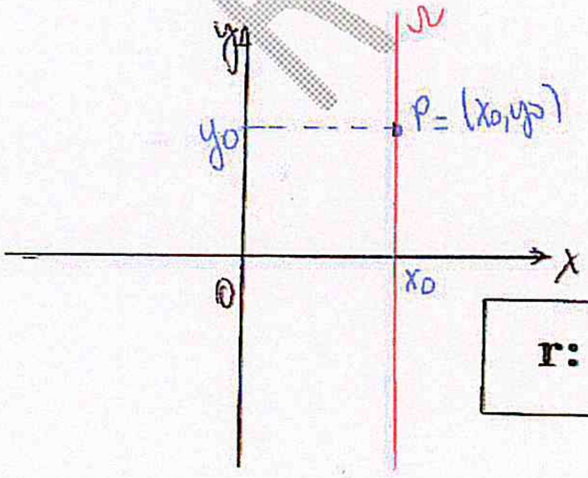
1º Caso: A reta **r** é paralela ao eixo Ox:



Esta situação é descrita pelo gráfico ao lado. Neste caso, a característica da reta **r** é que todos os seus pontos têm a mesma ordenada y_0 e, portanto, a equação de **r** é:

$$\boxed{\mathbf{r}: \quad y = y_0} \tag{1.3}$$

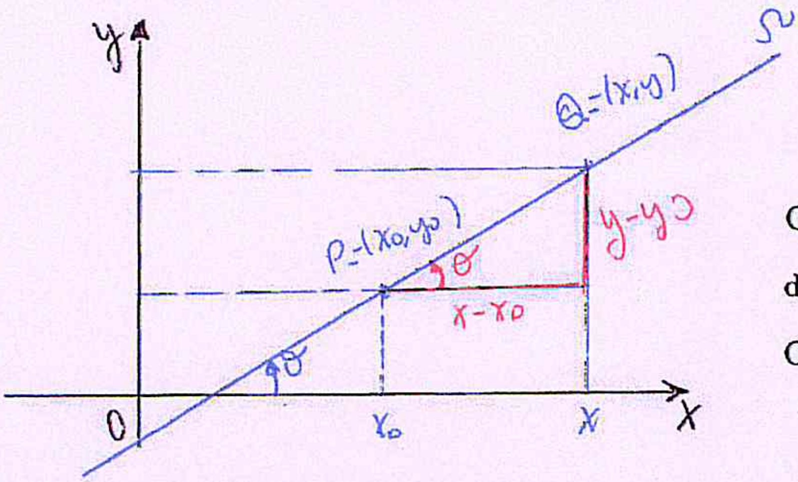
2º Caso: A reta **r** é paralela ao eixo Oy:



Esta situação é descrita pelo gráfico ao lado. Neste caso, a característica da reta **r** é que todos os seus pontos têm a mesma abscissa x_0 e, portanto, a equação de **r** é:

$$\boxed{\mathbf{r}: \quad x = x_0} \tag{1.4}$$

3º Caso: A reta **r** tem declividade $\mathbf{m} \neq 0$:



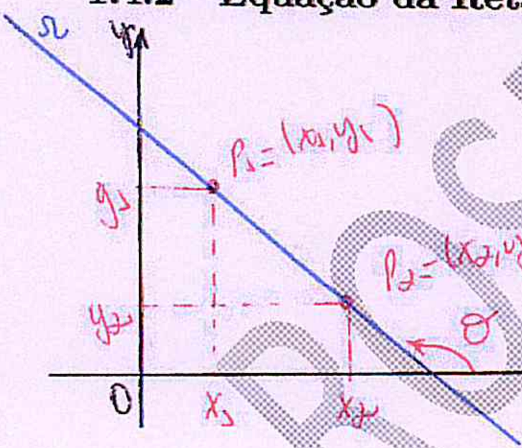
Neste caso, temos a chamada forma *ponto-declividade* da equação da reta. Consideremos $P = (x_0, y_0)$ um ponto fixo de **r** e $Q = (x, y)$ um ponto arbitrário de **r**. O coeficiente angular de **r** é dado por :

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Longrightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

Assim, a equação da reta **r** é dada por:

$$\boxed{\mathbf{r:} \quad y - y_0 = m(x - x_0)} \tag{1.5}$$

1.4.2 Equação da Reta Passando por Dois Pontos



Sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_1, y_1)$ dois pontos distintos de uma reta **r**. Chamando de θ o ângulo de inclinação desta reta, conforme figura ao lado, teremos que sua declividade será:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \text{se } x_1 \neq x_2$$

Dessa forma, conhecemos o ponto $P_1 = (x_1, y_1)$ e a declividade da reta **r** e, portanto, sua equação é dada por:

$$\mathbf{r:} \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad \text{para } x_1 \neq x_2.$$

Observação: Da igualdade $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, segue que

$$(y - y_1).(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$

e portanto
$$x_2y - x_2y_1 - x_1y - xy_2 + xy_1 + x_1y_2 = 0$$

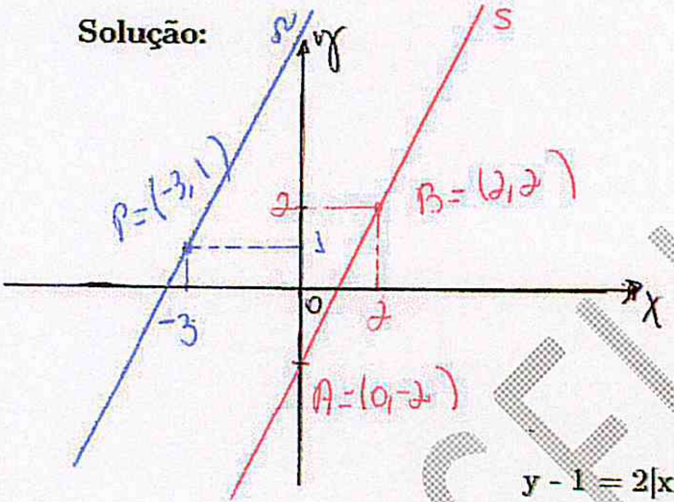
Ou seja:
$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + 1.(x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

que é, exatamente, o desenvolvimento pela 1ª linha, do determinante:

$$\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Exemplo 1: Determinar a equação da reta **r** que contém o ponto P = (-3, 1) e é paralela à reta s que passa pelos pontos A = (0, -2) e B = (2, 2).

Solução:



Como as retas **r** e s são paralelas, suas declividades coincidem; isto é, $m_r = m_s$. Mas:

$$m_s = \frac{2-(-2)}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$$

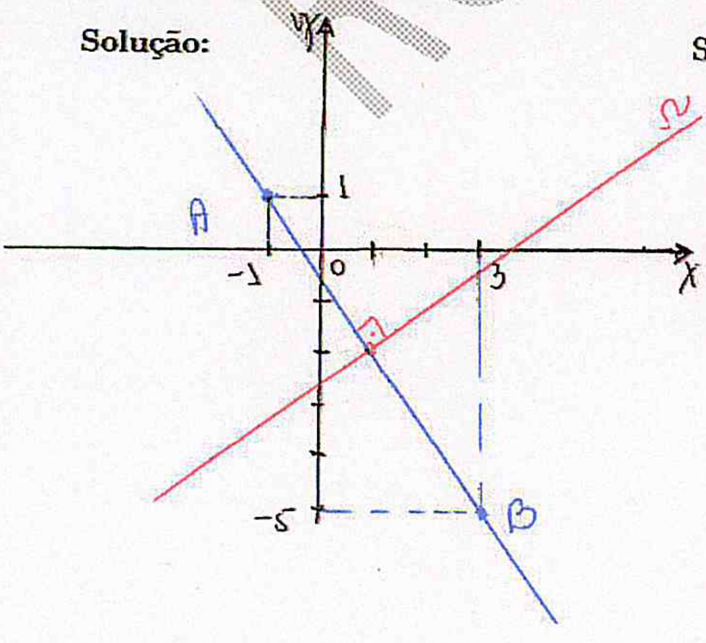
Assim, pela forma ponto-declividade da equação da reta, segue que a reta **r** tem equação:

$$y - 1 = 2[x - (-3)] = 2(x + 3)$$

Ou seja:
$$r: \quad 2x - y + 7 = 0$$

Exemplo 2: Determinar a equação da mediatriz do segmento de reta cujos extremos são os pontos A = (-1, 1) e B = (3, -5).

Solução:



Sejam **r** a reta procurada, **t** a reta determinada por A e B e **M** o ponto médio do segmento de reta cujos extremos são os pontos A e B. Já vimos que $M = (\frac{-1+3}{2}, \frac{1-5}{2}) = (1, -2)$. Além disso, a declividade de m_t da reta t é

$$m_t = \frac{-5-1}{3-(-1)} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Como **r** e **t** são perpendiculares, a declividade m_r da reta **r** é $m_r = \frac{2}{3}$ e, portanto, como a reta **r** passa pelo ponto M, pela forma ponto-declividade da equação da reta, segue que a equação de **r** é:

$$y - (-2) = \frac{2}{3}\,(x - 1)$$

que se reduz a

$$r: \quad 2x - 3y - 8 = 0$$

1.4.3 Problemas Propostos

Considere fixado um sistema de coordenadas ortogonais no plano.

1. Determinar a equação da reta **r** que passa pelo ponto $P = (1, 5)$ e tem declividade $m = 2$.
(**R:** $2x - y + 3 = 0$)

2. Determinar a equação da reta **r** que passa pelo ponto $P = (-6, -3)$ e tem um ângulo de inclinação de 45°. (**R:** $x - y + 3 = 0$)

3. Determinar a equação da reta **r** cuja declividade é $m = -3$ e que intercepta o eixo O_y no ponto de ordenada -2. (**R:** $3x + y + 2 = 0$)

4. Determinar a equação da reta **r** que passa pelos pontos $P = (4, 2)$ e $Q = (-5, 7)$.
(**R:** $5x + 9y - 38 = 0$)

5. Os vértices de um quadrilátero são $A = (0, 0)$, $B = (2, 4)$, $C = (6, 7)$ e $D = (8, 0)$. Determinar as equações de seus lados.
(**R:** $2x - y = 0$, $7x + 2y - 56 = 0$, $3x - 4y + 10 = 0$ e $y = 0$)

6. Uma reta **r** intercepta os eixos O_x e O_y, respectivamente, nos pontos 2 e -3. Determinar sua equação. (**R:** $3x - 2y - 6 = 0$)

7. Determinar a equação da mediatriz do segmento de reta cujos extremos são os pontos $A = (-3, 2)$ e $B = (1, 6)$. (**R:** $x + y - 3 = 0$)

8. Uma reta **r** passa pelo ponto P = (7, 8) e é paralela ao segmento de reta de extremidades A = (-2, 2) e B = (3, -4). Determinar a equação de **r**. (**R:** $6x + 5y - 82 = 0$)

9. Determinar a equação da mediatriz da porção da reta **r**: $5x + 3y - 15 = 0$ que é determinada pela intersecção de **r** com os eixos coordenados. (**R:** $3x - 5y + 8 = 0$)

10. Considere o triângulo cujos vértices são os pontos A = (-2, 1), B = (4, 7) e C = (6, -3).

(a) Determinar as equações dos lados deste triângulo;
(**R:** $x - y + 3 = 0$, $5x + y - 27 = 0$, $x + 2y = 0$)

(b) Determinar a equação da reta que passa pelo ponto A e é paralela ao lado oposto BC;
(**R:** $5x + y + 9 = 0$)

(c) Determinar os vértices do triângulo formado pelas retas que passam pelos vértices A, B e C e são paralelas aos lados opostos; (**R:** (-4, 11), (12, 3), e (0, -9))

(d) Determinar as coordenadas do pé da altura relativa ao lado AC. Utilize este valor para calcular a área deste triângulo. (**R:** $Q = (\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$ e 36 ua)

11. Determinar a equação da reta **r** cuja declividade é m = -4 e que passa pelo ponto intersecção das retas **s**: $2x + y - 8 = 0$ e **t**: $3x - 2y + 9 = 0$. (**R:** $4x + y - 10 = 0$)

12. As equações dos lados de um quadrilátero são **r**: $3x - 8y + 36 = 0$, **s**: $x + y - 10 = 0$, **t**: $3x - 8y - 19 = 0$ e **h**: $x + y + 1 = 0$. Mostrar que a figura é um paralelogramo e determinar as coordenadas de seus vértices. (**R:** (-4, 3), (4, 6), (9, 1) e (1, -2))

13. Determinar a área do triângulo retângulo formado pelos eixos coordenados e pela reta cuja equação é **r**: $5x + 4y + 20 = 0$. (**R:** 10 ua)

14. O ponto P de ordenada 10 está sobre a reta **r** de declividade 3 e que passa pelo ponto A = (7, -2). Determinar a abscissa de P. (**R:** 11)

15. Determinar os valores do coeficientes **a** e **b** na equação $ax + by + 4 = 0$, sabendo que a reta que ela representa passa pelos pontos P = (-3, 1) e B = (1, 6). (**R:** $a = \frac{20}{19}$ e $b = -\frac{16}{19}$)

1.4.4 A Forma Geral da Equação da Reta

Vimos que o lugar geométrico de uma equação do 1º grau em duas variáveis é uma linha reta e que, reciprocamente, uma reta **r** é representada por uma equação do 1º grau em duas variáveis; ou seja, por uma equação do tipo

$$\boxed{\mathbf{r:} \quad \mathrm{ax + by + c = 0}} \tag{1.6}$$

sendo a, b, c $\in \mathbb{R}$ e $a^2 + b^2 \neq 0$

A equação 1.6 é chamada *forma geral da equação de uma reta* e pode ser obtida através do desenvolvimento da equação da reta que passa por dois pontos distintos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$.

1.4.5 Exercícios Resolvidos

1. Determine a equação geral da reta **r** que passa pelo ponto $P = (-\sqrt{2}, 4)$ e tem declividade m = -3.

Solução: Pela forma ponto-declividade, a equação da reta **r** é dada por:

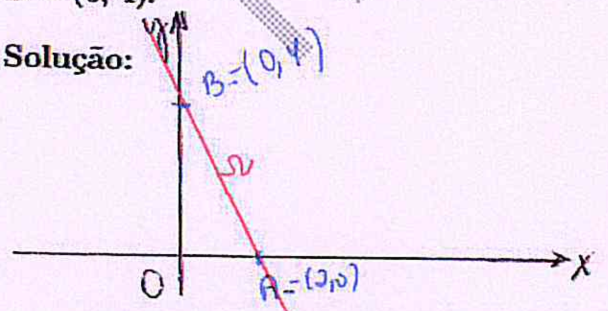
$$y - 4 = -3\,[\,x - (-\sqrt{2})\,] = -3\,(\,x + \sqrt{2}\,) = -\,3\,x - 3\,\sqrt{2}$$

Logo, a equação geral de **r** será:

$$\mathbf{r:} \quad 3x + y + (3\,\sqrt{2} - 4) = 0$$

2. Ache a equação geral da reta **r** que intercepta os eixos coordenados nos pontos A = (2, 0) e B = (0, 4).

Solução:



Se **m** é o coeficiente angular de **r**, então

$$m = \frac{4-0}{0-2} = -2.$$

Logo, a equação de **r** é:

$$y - 0 = -2\,(x - 2) = -2\,x + 4$$

e portanto a equação geral de **r** é dada por $\quad \mathbf{r:} \quad 2x + y - 4 = 0$

3. Determine a equação geral da reta **r** que passa por P = (2, -3) e é paralela à reta **s** que passa pelos pontos A = (4, -1) e B = (2, -2).

1ª Solução: Como as retas **r** e **s** são paralelas, seus coeficientes angulares coincidem; isto é,

$$m_r = m_s = \frac{-2-(-1)}{2-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Assim a reta procurada **r** tem coeficiente angular $m_r = \frac{1}{2}$ e passa pelo ponto P = (2, -3) e portanto sua equação geral é:

$$\mathbf{r:} \quad y - (-3) = \tfrac{1}{2}(x - 2) \iff 2y + 6 = x - 2$$

$$\mathbf{r:} \quad x - 2y - 8 = 0$$

2ª Solução: Seja Q = (x, y) um outro ponto da reta **r**. Como $m_r = m_s = \frac{1}{2}$, segue que:

$$\frac{1}{2} = m_r = \frac{y-(-3)}{x-2} = \frac{y+3}{x-2}$$

e portanto

$$2(y + 3) = x - 2 \implies \mathbf{r:} \quad x - 2y - 8 = 0$$

4. Determine a equação geral da reta **r** que passa por P = (-1, -3) e é perpendicular à reta **s:** $3x - 4y + 11 = 0$.

Solução: Como **r** e **s** são perpendiculares, temos que $m_r.m_s = -1$. Mas:

$$m_s = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} \implies m_r = -\frac{4}{3}$$

Como a reta **r** passa pelo ponto P = (-1, -3), segue que:

$$y - (-3) = -\tfrac{4}{3}[x - (-1)] \implies 3y + 9 = -4x - 4$$

e, dessa forma,

$$\mathbf{r:} \quad 4x + 3y + 13 = 0$$

5. Encontre a, b, c $\in \mathbb{R}$ de modo que os pontos P = (1, -4) e Q = (-3, 2) pertençam à reta **r**: ax + by + c = 0.

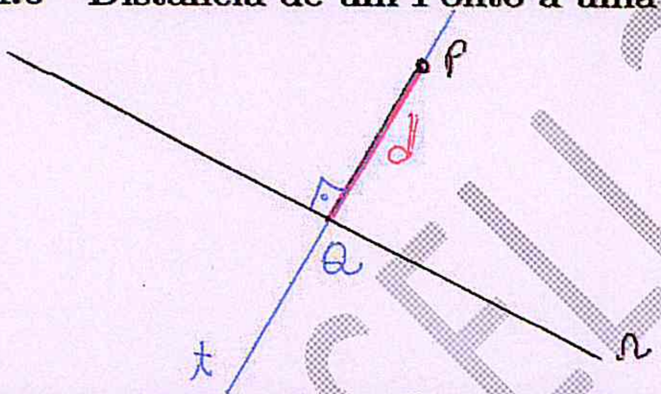
Solução: As coordenadas de P e de Q devem satisfazer a equação ax + by + c = 0. Logo, devemos ter:

$$\begin{cases} a.1 + b.(-4) + c = 0 \\ a.(-3) + b.2 + c = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a - 4b + c = 0 \\ -3a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

Resolvendo-se o sistema acima, obtemos $a = \frac{3b}{2}$ e $c = \frac{5b}{2}$, com $b \in \mathbb{R}^*$.

Note que: $b \neq 0$ pois, caso contrário, teríamos $a^2 + b^2 = 0$, contra o fato de ax + by + c = 0 ser a equação de uma reta. Assim, fazendo-se, por exemplo, b = 2, obtemos que para a = 3, b = 2 e c = 5 os pontos P e Q pertencem à reta **r**.

1.4.6 Distância de um Ponto a uma Reta



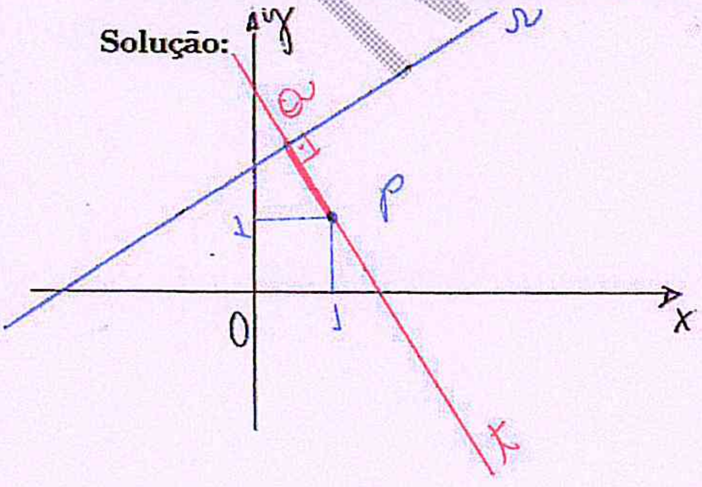
Sejam **r** uma reta e P um ponto fora dela.

Definição: A *distância* do ponto P à reta **r** é igual à distância do ponto P ao ponto Q, sendo Q o ponto intersecção entre a reta **r** e a reta **t** que passa por P e é perpendicular a **r**.

Ou seja: $d(P, r) := d(P, Q), \quad Q = r \cap t, \quad t \perp r, \quad P \in t$

Exemplo 1: Calcule a distância **d** entre a reta **r**: 2x - 3y + 5 = 0 e o ponto P = (1, 1).

Solução:



Note que: 2.1 - 3.1 + 5 = 4 $\Longrightarrow$ P $\notin$ r.

Vamos encontrar a equação da reta **t** tal que:

$t \perp r$ e $P \in t$.

$$t \perp r \Longrightarrow m_t = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{\frac{-2}{-3}} = -\frac{3}{2}$$

Assim, a reta **t** tem coeficiente angular $m_t = -\frac{3}{2}$ e passa pelo ponto $P = (1, 1)$ e, portanto, sua equação é dada por:

$$\textbf{t:} \quad y - 1 = -\tfrac{3}{2}(x - 1) \implies 2y - 2 = -3x + 3$$

e dessa forma a equação desta reta é $\quad \textbf{t:} \quad 3x + 2y - 5 = 0.$

Seja, agora, $Q = (x_0, y_0) = r \cap t$. Então as coordenadas do ponto Q devem satisfazer às equações de **r** e de **t**; ou seja, devemos ter:

$$\begin{cases} 2x_0 - 3y_0 + 5 = 0 \\ 3x_0 + 2y_0 - 5 = 0 \end{cases} \implies x_0 = \frac{5}{13} \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{25}{13}$$

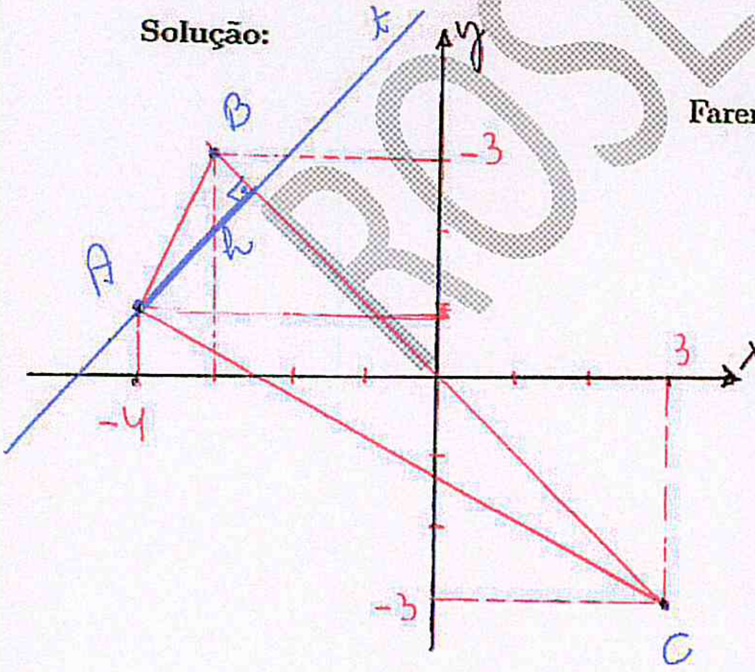
Assim, se $d = d(P, r)$, $P = (1, 1)$, tem-se:

$$d^2 := d^2(P, Q) = \left(\tfrac{5}{13} - 1\right)^2 + \left(\tfrac{25}{13} - 1\right)^2 = \frac{64 + 144}{(13)^2} = \frac{208}{(13)^2} = \frac{16}{13}$$

e, portanto, $\quad d = \frac{4\sqrt{13}}{13}$ uc.

Exemplo 2: Sabendo que os vértices de um triângulo são os pontos $A = (-4, 1)$, $B = (-3, 3)$ e $C = (3, -3)$, determine a altura relativa ao lado BC e sua área.

Solução:



Queremos encontrar **h**.

Faremos isso seguindo os passos abaixo, considerando:

1. **r:** reta que passa por B e C : **r:** $x + y = 0$
2. **t:** reta que passa por A e é perpendicular a **r**

$$m_t . m_r = -1 \implies m_t = 1$$

3. **t:** $x - y + 5 = 0$
4. $D = r \cap t \implies D = \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$
5. $h = d(A, D) \implies h = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
6. $A_\Delta = \frac{d(B, C).h}{2} \implies A_\Delta = 9$ uc

Observação: Há uma fórmula para o cálculo da distância de um ponto $P \notin r$ a uma reta r. Considere a reta **r** de equação **r : ax + by + c = 0**, sendo $a.b \neq 0$ (isto é, $a \neq 0$ e $b \neq 0$). Seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto tal que $\mathbf{P} \notin \mathbf{r}$, então:

$$d(P, r) = \frac{\|ax_0 + by_0 + c\|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

1.4.7 Problemas Propostos

1. Determinar a equação geral da reta **r** sabendo que suas intersecções com os eixos coordenados são, respectivamente, os pontos A = (3, 0) e B = (0, -5). (**R:** 5x - 3y - 15 = 0)

2. Determinar o valor de **k** para que a reta **r:** kx + (k - 1)y - 18 = 0 seja paralela à reta s: 4x + 3y + 7 = 0. (**R:** 4)

3. Calcular a declividade da reta **r:** 7x - 9y + 2 = 0 e suas intersecções com os eixos coordenados O_x e O_y. (**R:** $m = \frac{7}{9}$, $(-\frac{2}{7}, 0)$, $(0, \frac{2}{9})$)

4. Calcular a declividade, o ângulo de inclinação e as intersecções com os eixos coordenados da reta **r** que passa pelo ponto P = (2, 3) e é perpendicular à reta s: 2x - 7y + 2 = 0.
(**R:** $-\frac{7}{2}$, $\text{arc tg}(-\frac{7}{2}) \simeq 105° 57'$, $(\frac{22}{7}, 0)$, $(0, 10)$)

5. Determinar o valor de **k** para que a reta **r:** 4x + 5y + k = 0 forme com os eixos coordenados um triângulo retângulo de área 2,5 ua (ua = unidades de área). (**R:** ± 10)

6. Determinar os valores reais de **a** e de **b** para que as retas **r:** ax + (2 - b)y - 23 = 0 e s: (a - 1)x + by + 15 = 0 passem pelo ponto P = (2, -3). (**R:** a = 4 e b = 7)

7. Mostrar que as retas **r:** 2x - y - 1 = 0, **s:** x - 8y + 37 = 0, **t:** 2x - y - 16 = 0 e **h:** x - 8y + 7 = 0 formam um paralelogramo. A seguir, determinar as equações de suas diagonais. (**R:** x - 2y + 1 = 0 e x + 2y - 13 = 0)

8. Mostrar que as retas **r:** 5x - y - 6 = 0, **s:** x + 5y - 22 = 0, **t:** 5x - y - 32 = 0 e **h:** x + 5y + 4 = 0 formam um quadrado.

9. Determinar o ângulo formado pelas retas **r:** $4x - 9y + 11 = 0$ e **s:** $3x + 2y - 7 = 0$.
(**R:** arc tg $\frac{35}{6}$)

10. Determinar as equações das retas que passam pelo ponto $P = (2, -1)$ e formam, cada uma, um ângulo de 45° com a reta **r:** $2x - 3y + 7 = 0$.

(**R:** $5x - y - 11 = 0$ e $x + 5y + 3 = 0$)

1.5 A Circunferência

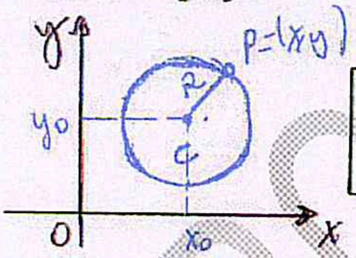
Uma *circunferência* γ é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão a uma distância constante **R** de um ponto fixo **C** no referido plano.

Nomenclatura: **C** : centro da circunferência

R : raio da circunferência

1.6 Equação Reduzida da Circunferência

A circunferência γ cujo centro é o ponto $C = (x_0, y_0)$ e cujo raio é a constante dada $R > 0$ tem por equação



$$\boxed{\gamma : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2} \tag{1.7}$$

Nomenclatura: A equação $\gamma : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ é chamada *equação reduzida da circunferência* γ de centro $C = (x_0, y_0)$ e raio R.

Observe que: A circunferência γ cujo centro é o ponto $C = (0, 0)$ e cujo raio é a constante dada R tem por equação $\gamma : x^2 + y^2 = R^2$

Exemplo: A circunferência de centro $C = (7{,}32, -5{,}4)$ e raio $R = \sqrt{31}$ tem equação

$$(x - 7{,}32)^2 + (y + 5{,}4)^2 = 31$$

Exercício 1: Encontre a equação do lugar geométrico dos centros das circunferências que passam por $A = (1, 0)$ e $B = (2, 1)$.

Solução:

Seja $C = (x, y)$ o centro de uma circunferência que passa por A e B. Então: $d(C, A) = d(C, B)$.

Mas:

$$d(C,A) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2}$$

$$d(C,B) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}$$

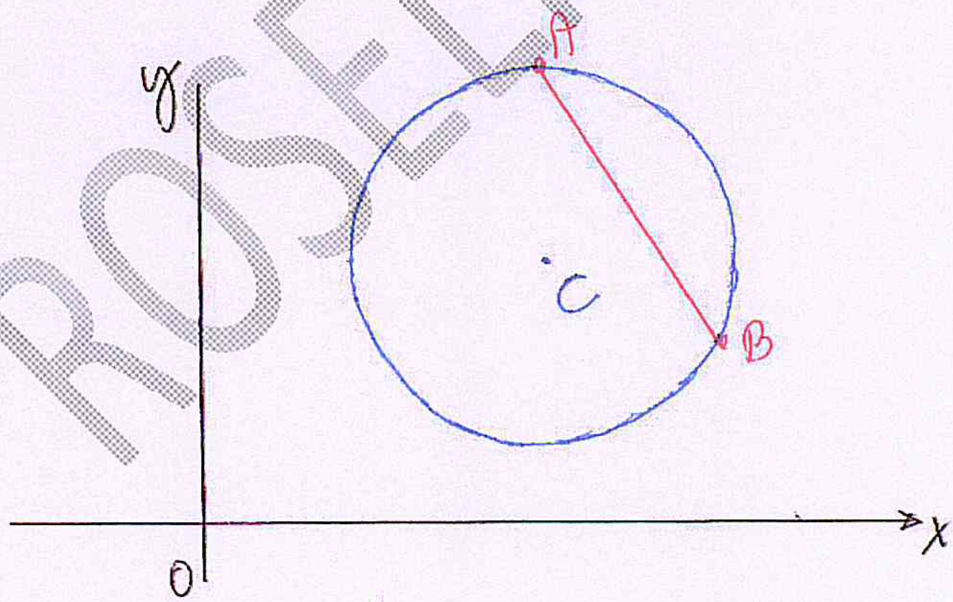
e portanto:

$$(x - 1)^2 + y^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$$

Ou seja: $x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 \Longrightarrow -2x = -4x - 2y + 4$. Logo, a equação do lugar geométrico procurado é $x + y - 2 = 0$, ou seja, a equação de uma reta.

Exercício 2: No Exercício anterior, determine as coordenadas do ponto P intersecção entre o lugar geométrico encontrado e a reta que passa pelos pontos A e B. (Resposta: $P = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.)

Definição: Chama-se *corda* de uma circunferência γ a qualquer segmento retilíneo que une dois pontos distintos sobre a circunferência. Uma corda que passa pelo centro da circunferência é chamada de *diâmetro* e seu comprimento é o dobro do raio da circunferência.



1.6.1 Problemas Propostos

1. Escrever a equação da circunferência cujo centro é o ponto C = (-1, -2) e cujo raio é R = 6. **(R:** $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 36$)

2. Um circunferência γ tem diâmetro cujos extremos são os ponto A = (2, 3) e B = (-4, -5). Encontrar sua equação. **(R:** $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$)

3. Escrever a equação da circunferência γ cujo centro é o ponto C = (7, -6) e que passa pelo ponto A = (2, 2). **(R:** $(x - 7)^2 + (y + 6)^2 = 89$)

4. Escrever a equação da circunferência tangente ao eixo O_y, cujo centro é o ponto C = (2, -4). **(R:** $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 4$)

5. Uma circunferência γ tem seu centro no ponto C = (0, -2) e é tangente à reta **r:** $5x - 12y + 2 = 0$. Encontrar sua equação. **(R:** $x^2 + (y + 2)^2 = 4$)

6. Determinar a equação de uma circunferência γ cujo centro é o ponto C = (-4, -1) e que é tangente à reta **r:** $3x + 2y - 12 = 0$. **(R:** $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 52$)

7. A equação de uma circunferência é: $\gamma : (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$. Mostrar que o ponto A = (2, -5) se encontra no interior da circunferência e que o ponto B = (-4, 1) no seu exterior.

8. Determinar a equação da circunferência γ cujo raio é 5 e cujo centro é a intersecção das retas **r:** $3x - 2y - 24 = 0$ e **s:** $2x + 7y + 9 = 0$. **(R:** $(x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 25$)

9. Determinar a equação da circunferência que passa pelo ponto P = (7, -5) e cujo centro é a intersecção das retas **r:** $7x - 9y - 10 = 0$ e **s:** $2x - 5y + 2 = 0$. **(R:** $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 58$)

10. Uma corda da circunferência $\gamma : x^2 + y^2 = 25$ se encontra sobre a reta **r:** $x - 7y + 25 = 0$. Encontrar o comprimento da corda. **(R:** $\sqrt{50}$ uc $\simeq$ 7,07 uc)

11. Determinar a equação da circunferência γ cujo centro se encontra sobre o eixo O_x e que passa pelos pontos A = (1, 3) e B = (4, 6). **(R:** $(x - 7)^2 + y^2 = 45$)

12. Considere o triângulo de vértices A = (-1, 0), B = $(2, \frac{9}{4})$ e C = (5, 0). Determinar a equação da circunferência

(a) cujo centro é o ponto A e que é tangente ao lado BC; **(R:** $(x + 1)^2 + y = \frac{324}{25}$**)**

(b) que passa pelos pontos médios dos lados do triângulo. **(R:** $(x - 2)^2 + (y - \frac{25}{16})^2 = \frac{625}{256}$**)**

13. Determinar a equação da circunferência γ cujo centro se encontra sobre o eixo O_y e que passa pelos pontos A = (2, 2) e B = (6, -4). **(R:** $x^2 + (y + \frac{11}{13})^2 = \frac{325}{9}$**)**

14. Determinar a equação da circunferência γ que passa pelos pontos A = (-3, 3) e B = (1, 4) e cujo centro se encontra sobre a reta **r:** 3x - 2y - 23 = 0.

(R: $(x - 2)^2 + (y + \frac{17}{2})^2 = \frac{629}{4}$**)**

15. Encontrar a equação de uma corda da circunferência $\gamma : x^2 + y^2 = 50$, sabendo que o ponto médio desta corda é P = (-2, 4). **(R:** x - 2y + 10 = 0**)**

16. Dada a circunferência $\gamma : (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 20$, encontrar a equação da reta tangente γ no ponto P = (6, 7). **(R:** x + 2y - 20 = 0**)**

17. Considere a circunferência de equação $\gamma : (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$. Encontrar a equação da reta que passa pelo ponto P = (3, 3) e é tangente γ. (Existem duas soluções.)

(R: x + 2y - 9 = 0 e x - 2y + 3 = 0**)**

18. Determinar a equação da circunferência γ que passa pelo ponto A = (7, -5) e é tangente à reta **r:** x - y - 4 = 0 no ponto P = (3, -1). **(R:** $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 8$**)**

19. Determinar a equação da circunferência γ cujo centro está sobre a **t:** 6x + 7y - 16 = 0 e que é tangente a cada uma das retas **r:** 8x + 15y + 7 = 0 e **s:** 3x - 4y - 18 = 0. (Existem duas soluções.) **(R:** $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 1$ e $(x - 3)^2 + (y + \frac{2}{7})^2 = \frac{121}{49}$**)**

1.6.2 Equação Geral da Circunferência

Considere uma circunferência γ de equação:

$$\gamma: \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Desenvolvendo-se os quadrados, obtemos:

$$x^2 - 2x_0.x + x_0^2 + y^2 - 2y_0.y + y_0^2 = R^2$$

Ou seja: $$x^2 + y^2 - 2x_0.x - 2y_0.y + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) = 0$$

Chamando-se:

- $D = -2x_0$
- $E = -2y_0$
- $F = x_0^2 + y_0^2 - R^2$

obtemos a chamada **forma geral da equação da circunferência:**

$$\boxed{\gamma: \; x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0} \tag{1.8}$$

Observação: Pelo que vimos acima, a equação de qualquer circunferência γ pode ser escrita na forma $\gamma: \; x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, sendo D, E, F $\in \mathbb{R}$. Surge, então, uma pergunta natural: dada uma equação do tipo 1.8, é sempre verdade que essa é a equação de uma circunferência? Veremos, a seguir, que nem sempre isto ocorre.

Passemos, agora, a analisar sob que condições uma equação da forma $\gamma: \; x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa uma circunferência. Para isso, vamos reescrevê-la na forma:

$$(x^2 + Dx) + (y^2 + Ey) + F = 0$$

Completando-se os quadrados, obtemos:

$$(x^2 + Dx + \tfrac{D^2}{4}) - \tfrac{D^2}{4} + (y^2 + Ey + \tfrac{E^2}{4}) - \tfrac{E^2}{4} + F = 0$$

Ou seja

$$(x + \tfrac{D}{2})^2 + (y + \tfrac{E}{2})^2 = \tfrac{D^2 + E^2}{4} - F = \tfrac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

Podem ocorrer três situações:

1º Caso: $\mathbf{D^2 + E^2 - 4F > 0}$

Nesse caso, a equação 1.8 representa uma circunferência cujo centro é o ponto $C = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ e cujo raio é dado por $R = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$

2º Caso: $\mathbf{D^2 + E^2 - 4F = 0}$

Nesse caso, a equação 1.8 representa o ponto $C = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$

Nomenclatura: circunferência de raio zero ou circunferência ponto ou circunferência nula.

3º Caso: $\mathbf{D^2 + E^2 - 4F < 0}$

Nesse caso, a equação 1.8 não define lugar geométrico.

Nomenclatura: circunferência imaginária.

Observação: A equação de uma circunferência é determinada por três condições independentes, uma vez que para obter sua equação, basta conhecermos três elementos, a saber:

- para a equação na forma reduzida: as coordenadas do centro $C = (x_0, y_0)$ e o seu raio R.
- para a equação na geral: os coeficientes D, E e F.

1.6.3 Problemas Resolvidos

1. Dada a circunferência $\gamma: \quad x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + 3y - \frac{47}{4} = 0$, determine as coordenadas de seu centro C e determine seu raio R.

Solução: Para determinar o raio e as coordenadas do centro desta circunferência, devemos encontrar sua equação na forma reduzida. Para isto, vamos reescrever a equação dada na forma:

$$(x^2 - 2\sqrt{2}x\ ) + (y^2 + 3y) = \tfrac{47}{4}$$

Completando os quadrados, obtemos:

$$(x^2 - 2\sqrt{2}x + 2) + (y^2 + 3y + \tfrac{9}{4}) = \tfrac{47}{4} + 2 + \tfrac{9}{4} \implies (x - \sqrt{2})^2 + (y + \tfrac{3}{2})^2 = \tfrac{47+8+9}{4} = 16$$

Logo: $C = (\sqrt{2}, -\frac{3}{2})$ e $R = 4$.

2. Determine a equação, o centro C e o raio R da circunferência γ que passa pelos pontos $M = (-1, 1)$, $N = (3, 5)$ e $P = (5, -3)$.

1ª Solução: A equação geral desta circunferência é:

$$\gamma:\ x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

e, portanto, as coordenadas dos pontos M, N e P devem satisfazer a esta equação; ou seja:

$$\begin{cases} 1 + 1 - D + E + F = 0 \\ 9 + 25 + 3D + 5E + F = 0 \\ 25 + 9 + 5D - 3E + F = 0 \end{cases} \implies D = -\frac{32}{5},\ E = -\frac{8}{5}\ \text{e}\ F = -\frac{34}{5}$$

Ou seja, a equação geral desta circunferência é $\gamma : x^2 + y^2 - \frac{32}{5}x - \frac{8}{5}y - \frac{34}{5} = 0$; isto é:

$$\gamma:\ 5x^2 + 5y^2 - 32x - 8y - 34 = 0$$

Como no exemplo anterior, o centro C e o raio R de γ são obtidos por meio de completamento de quadrados. Efetuando-se os cálculos nacessários, obtemos que $C = (\frac{16}{5}, \frac{4}{5})$ e $R = \frac{\sqrt{442}}{5}$.

2ª Solução: Para esta segunda solução, utilizaremos a equação reduzida da circunferência:

$$\gamma:\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

e, novamente, as coordenadas dos pontos M, N e P devem satisfazer a esta equação; ou seja:

$$\begin{cases} (-1 - x_0)^2 + (1 - y_0)^2 = R^2 \\ (3 - x_0)^2 + (5 - y_0)^2 = R^2 \\ (5 - x_0)^2 + (-3 - y_0)^2 = R^2 \end{cases} \implies x_0 = \frac{16}{5},\ y_0 = \frac{4}{5}\ \text{e}\ R = \frac{\sqrt{442}}{5}$$

3. Determine a equação da circunferência γ cujo centro se encontra sobre a reta dada por **r:** $3x + 7y + 2 = 0$ e que passa pelos pontos $A = (6, 2)$ e $B = (8, 0)$.

Solução: O centro C desta circunferência tem coordenadas $C = (x_0, \frac{-3x_0 - 2}{7})$, uma vez que pertence à reta **r**. Além disso, como A e B são pontos da circunferência γ, devemos ter $d(A, C) = D(B, C)$ e, portanto, $d^2(A, C) = d^2(B, C)$. Como:

$$\begin{aligned} d^2(A,C) &= (6 - x_0)^2 + [2 - (\tfrac{-3x_0 - 2}{7})]^2 \\ d^2(B,C) &= (8 - x_0)^2 + [0 - (\tfrac{-3x_0 - 2}{7})]^2 \end{aligned}$$

segue que $$(6 - x_0)^2 + [2 + (\tfrac{3x_0 + 2}{7})]^2 = (8 - x_0)^2 + (\tfrac{3x_0 + 2}{7})^2$$

e portanto $$(6 - x_0)^2 + 4 + \tfrac{4}{7}(3x_0 + 2) + (\tfrac{3x_0 + 2}{7})^2 = (8 - x_0)^2 + (\tfrac{3x_0 + 2}{7})^2$$

ou seja $$(6 - x_0)^2 + 4 + \tfrac{4}{7}(3x_0 + 2) = (8 - x_0)^2$$

daí segue que $$7(6 - x_0)^2 + 28 + 4(3x_0 + 2) = 7(8 - x_0)^2$$

ou seja $$7(36 - 12x_0 + x_0^2) + 28 + 12x_0 + 8 = 7(64 - 16x_0 + x_0^2)$$

e assim $$(-84 + 12 + 112)x_0 = 448 - 252 - 36 \implies x_0 = 4 \quad \text{e} \quad y_0 = -2$$

Além disso, $R^2 = d^2(B, C) = (8 - 4)^2 + [0 - (-2)]^2 = 16 + 4 = 20$; isto é

$$\gamma: \ (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 20$$

4. Verifique se as equações abaixo determinam uma circunferência. Em caso afirmativo, determine o centro C e o raio R da circunferência.

(a) $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$

Solução: A equação dada pode ser reescrita na forma $x^2 + y^2 - 3x + 5y + \frac{7}{2} = 0$, ou ainda, na forma: $(x^2 - 3x) + (y^2 + 5y) + \frac{7}{2} = 0$. Completando os quadrados, obtemos:

$$(x^2 - 3x + \tfrac{9}{4}) + (y^2 + 5y + \tfrac{25}{4}) = -\tfrac{7}{2} + \tfrac{9}{4} + \tfrac{25}{4} = \tfrac{-14+34}{4} = 5$$

ou seja:

$$(x - \tfrac{3}{2})^2 + (y + \tfrac{5}{2})^2 = 5$$

que representa a circunferência γ de centro $C = (\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$ e raio $R = \sqrt{5}$.

(b) $16x^2 + 16y^2 - 64x + 8y + 177 = 0$

Solução: A equação dada pode ser reescrita na forma $x^2 + y^2 - 4x + \frac{1}{2}y + \frac{177}{16} = 0$. Ou seja:

$$D = -4, \quad E = \tfrac{1}{2} \quad e \quad F = \tfrac{177}{4}$$

Assim: $D^2 + E^2 - 4F = 16 + \frac{1}{4} - 177 < 0$ e, portanto, a equação dada não determina uma circunferência.

1.6.4 Posições Relativas Entre Retas e Circunferências

Dadas uma reta **r** e uma circunferência γ, estudar a posição relativa entre elas é estudar a intersecção $r \cap \gamma$. Algebricamente, isto é equivalente a estudar o sistema formado pelas equações de **r** e de γ. Passemos a este estudo:

Consideremos uma reta **r:** $ax + by + c = 0$ e uma circunferência cuja equação é dada por $\gamma : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. Seja o sistema:

$$S : \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \end{cases}$$

Com o sistema S podem ocorrer três situações, a saber:

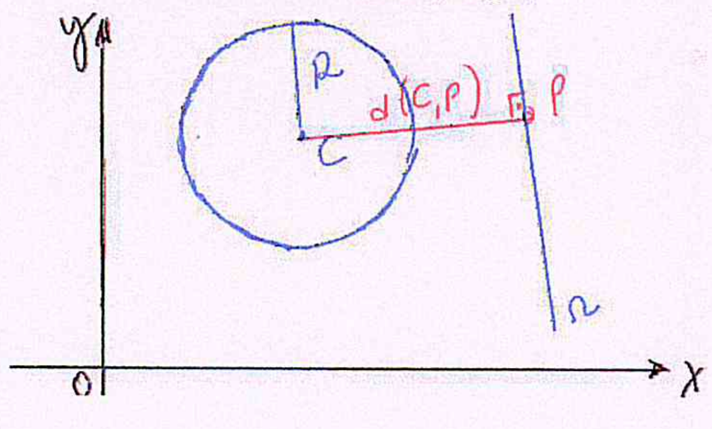
1. o sistema S não admite solução;

2. o sistema S admite solução **única**;

3. o sistema S admite **duas** soluções.

Geometricamente, estas situações se traduzem da seguinte forma:

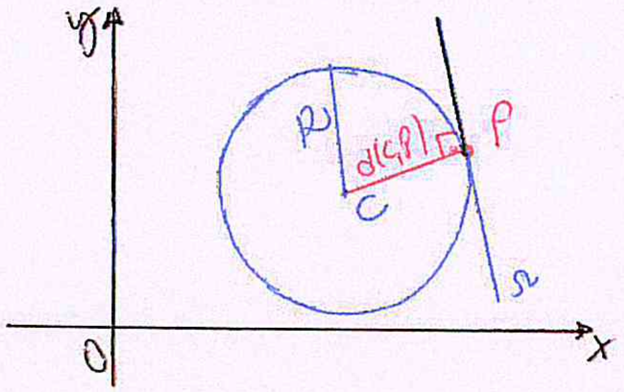
1. o sistema S não admite solução:



Neste caso, $d(C, r) > R$

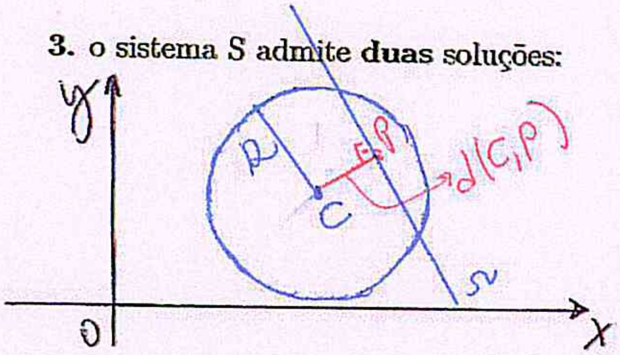
A reta **r** é dita **externa** à circunferência γ.

2. o sistema S admite solução **única**:



Neste caso, $d(C, r) = R$
A reta **r** é dita **tangente** à circunferência γ.

3. o sistema S admite **duas** soluções:



Neste caso, $d(C, r) < R$
A reta **r** é dita **secante** à circunferência γ.

1.6.5 Problemas Resolvidos

1. Estude a posição relativa entre a reta **r**: $3x + 2y + 12 = 0$ e a circunferência de equação $\gamma: x^2 + y^2 + 4x + 6y = 0$.

1ª Solução: Temos que resolver o sistema

$$S: \begin{cases} 3x + 2y + 12 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x + 6y = 0 \end{cases} \implies x = \frac{-2y - 12}{3}$$

Substituindo-se a expressão encontrada para a variável **x** na segunda equação do sistema S, obtemos:

$$\frac{4y^2 + 48y + 144}{9} + y^2 + 4\left(\frac{-2y-12}{3}\right) + 6y = 0 \implies 4y^2 + 48y + 144 + 9y^2 + 12(-2y - 12) + 54y = 0$$

Efetuando-se os cálculos, segue que $y(y + 6) = 0 \implies y = 0$ ou $y = -6$ o que implica em $x = -4$ ou $x = 0$.

Logo, a reta **r** intercepta a circunferência γ em dois pontos: $A = (-4, 0)$ e $B = (0, -6)$. Ou seja, a reta **r** é secante a circunferência γ.

2ª Solução: Vamos analisar d(C, r) , sendo C o centro da circunferência γ.

Completando os quadrados na equação de γ, obtemos

$$\gamma: (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$$

e portanto C = (-2, -3) e R = $\sqrt{13}$. Para calcular d(C, r), temos que:

- encontrar a equação da reta **t** que passa por C e é perpendicular a **r**:

$$\textbf{r}: \ 3x + 2y + 12 = 0 \implies m_r = -\tfrac{3}{2} \implies m_t = \tfrac{2}{3}$$

e, portanto, $\textbf{t}: \ y - (-3) = \tfrac{2}{3}[x - (-2)] \implies \textbf{t}: \ 2x - 3y - 5 = 0$

- encontrar o ponto P = **r** ∩ **t**:

O ponto P procurado é solução do sistema linear:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 12 = 0 \\ 2x - 3y - 5 = 0 \end{cases} \implies x = -2, \ y = -3 \implies P = (-2, -3) = C$$

- calcular d(C, P):

$d(C, P) = d(C, C) = 0 < R \implies$ a reta **r** é secante à circunferência γ.

2. Dadas a circunferência $\gamma: (x - 1)^2 + y^2 = 4$ e a reta **r**: $x = k$, pergunta-se: para que valores de **k** a circunferência γ intercepta a reta **r** em dois pontos distintos?

Solução: Queremos encontrar os valores de **k** para os quais o sistema

$$S: \begin{cases} x = k \\ (x - 1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$ admite duas soluções distintas.

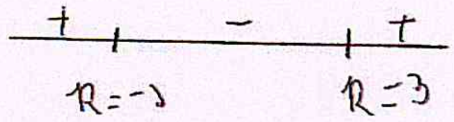
Substituindo-se o valor da variável **x** na segunda equação de S, obtemos

$$(k - 1)^2 + y^2 = 4 \iff k^2 - 2k + 1 + y^2 = 4 \iff y^2 = -k^2 + 2k + 3$$

Ou seja: queremos encontra os valores de **k** para os quais $-k^2 + 2k + 3 > 0$. Mas:

$$-k^2 + 2k + 3 > 0 \iff k^2 - 2k - 3 < 0$$

As raízes da a equação $k^2 - 2k - 3 = 0$ são: $k = -1$ e $k = 3$. Logo:



A expressão $k^2 - 2k - 3$ é negativa para os valores de **k** que estão **entre** as raízes; ou seja,

$$k^2 - 2k - 3 < 0 \iff -1 < k < 3.$$

Dessa forma, devemos ter $k \in (-1, 3)$ para que a reta **r:** $x = k$ seja secante à circunferência $\gamma : (x - 1)^2 + y^2 = 4$.

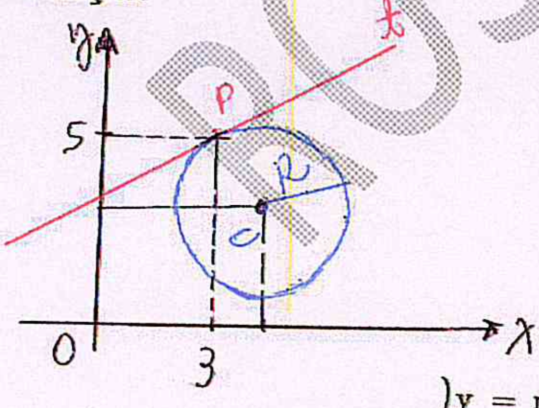
Observação: A reta **t** tangente a uma circunferência γ no ponto de contato P satisfaz a uma importante propriedade: **t é** perpendicular ao raio de γ traçado pelo ponto P. Há três tipos de problemas que podem ser considerados:

1. a determinação da equação da reta que é tangente a uma circunferência dada, conhecido o ponto de contato
2. a determinação da equação da reta que é tangente a uma circunferência dada, conhecida a declividade da reta
3. traçar, a partir de um ponto conhecido e externo a uma dada circunferência, uma tangente a esta circunferência.

1.6.6 Problemas Resolvidos

1. Determinar a equação da reta **t** tangente à circunferência $\gamma : x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$ no ponto $P = (3, 5)$.

Solução:



A equação de uma reta **t** que passa pelo ponto P é:

$$\mathbf{t}: \; y - 5 = m(x - 3)$$

Se conhecermos o valor de **m** e o problema estará resolvido. Como **t** é tangente a γ, o sistema abaixo deve ter solução única:

$$S : \begin{cases} y = mx - 3m + 5 \\ x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0 \end{cases}$$

Substituindo a expressão de **y** na segunda equação do sistema S, obtemos a igualdade:

$$x^2 + (mx - 3m + 5)^2 - 8x - 6(mx - 3m + 5) + 20 = 0$$

que, efetuandos os cálculos, se reduz a $(m^2 + 1)x^2 - (6m^2 - 4m + 8)x + (9m^2 - 12m + 15) = 0$

Assim, para que a reta **t** seja tangente à circunferência γ, a equação acima deve ter solução única; isto é, o discriminante Δ deve ser igual a zero. Mas:

$$\Delta = 0 \iff (6m^2 - 4m + 8)^2 - 4\,(m^2 + 1)(9m^2 - 12m + 15) = 0 \iff (2m - 1)^2 = 0$$

e, portanto, $\Delta = 0 \iff m = \frac{1}{2}$, o que significa que a equação da reta tangente **t** é dada por $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y + 5$; isto é

$$\mathbf{t}:\ x - 2y + 7 = 0$$

2. Determinar a equação da reta **t** cuja declividade é $m = 1$ e que é tangente à circunferência $\gamma:\ x^2 + y^2 - 10x + 2y + 18 = 0$.

Solução: A equação da reta **t** procurada é da forma **t:** $y = x + k$, sendo k um parâmetro a ser determinado. Como a reta **t** é tangente à circunferência γ, a intersecção entre **t** e γ se reduz a um único ponto. Seja $P = \mathbf{t} \cap \gamma$. Algebricamente, P é a solução do sistema S formado pelas equações de **t** e de γ; isto é, P é a única solução de

$$S:\begin{cases} y = x + k \\ x^2 + y^2 - 10x + 2y + 18 = 0 \end{cases}$$

Substituindo a expressão de **y** na segunda equação

do sistema S, obtemos a igualdade:

$$x^2 + (x + k)^2 - 10x + 2(x + k) + 18 = 0$$

que, efetuandos os cálculos, se reduz a $2x^2 + (2k - 8)x + (k^2 + 2k + 18) = 0$. Novamente, a condição de tangência é $\Delta = 0$; assim:

$$\Delta = 0 \iff (2k - 8)^2 - 4.2(k^2 + 2k + 18) = 0 \iff k^2 + 12k + 20 = 0$$

Logo: $\Delta = 0 \iff k = -2$ ou $k = -10$

e, portanto, as duas soluções para este problema são:

$$\mathbf{t}:\ y = x - 2 \quad \text{ou} \quad \mathbf{t}:\ y = x - 10$$

3. Determinar a equação da reta **t** que passa pelo ponto $P = (8, 6)$ e é tangente à circunferência $\gamma:\ x^2 + y^2 + 2x + 2y - 24 = 0$.

Solução: A equação da reta **t** procurada é da forma **t:** $y - 6 = m(x - 8)$, sendo o parâmetro **m** a declividade de **t** a ser determinada. Como a reta **t** é tangente à circunferência γ, a intersecção entre **t** e γ se reduz a um único ponto. Seja $P = t \cap \gamma$. Algebricamente, P é a solução do sistema S formado pelas equações de **t** e de γ; isto é, P é a única solução de

$$S:\begin{cases} y = mx - 8m + 6 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y - 24 = 0 \end{cases}$$

Substituindo a expressão de **y** na segunda equação

do sistema S, obtemos a igualdade:

$$x^2 + (mx - 8m + 6)^2 + 2x + 2(mx - 8m + 6) - 24 = 0$$

que, efetuandos os cálculos, se reduz a

$$(m^2 + 1)x^2 + (-16m^2 + 14m + 2)x + (64m^2 - 112m + 24) = 0$$

Novamente, a condição de tangência é $\Delta = 0$; assim:

$$\Delta = 0 \iff (-16m^2 + 14m + 2)^2 - 4(m^2 + 1)(64m^2 - 112m + 24) = 0 \iff 55m^2 - 126m + 23 = 0$$

Logo: $\Delta = 0 \iff k = \frac{23}{11}$ ou $k = \frac{1}{5}$

e, portanto, as duas soluções para este problema são:

t: $23x - 11y - 118 = 0$ ou **t:** $x - 5y + 22 = 0$

1.6.7 Problemas Propostos

1. Determinar a equação da reta **t** tangente à circunferência $\gamma: x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$ no ponto $P = (-1, 6)$. (**R:** $2x - 3y + 20 = 0$)

2. Determinar as equações da retas que têm declividade $m = -\frac{3}{2}$ e são tangentes à circunferência $\gamma: 4x^2 + 4y^2 + 8x + 4y - 47 = 0$. (**R:** $3x + 2y - 9 = 0$ e $3x + 2y + 17 = 0$)

3. Determinar a equação da reta **t** tangente à circunferência $\gamma: x^2 + y^2 - 8x + 3 = 0$ no ponto $P = (6, 3)$. (**R:** $2x + 3y - 21 = 0$)

4. Determinar as equações da retas que passam pelo ponto $P = (-2, 7)$ e são tangentes à circunferência $\gamma: x^2 + y^2 + 2x - 8y + 12 = 0$.

(**R:** $2x - y + 11 = 0$ e $x + 2y - 12 = 0$)

5. Dada a circunferência $\gamma: x^2 + y^2 + 4x - 10y + 21 = 0$, determinar as equações das retas tangentes a ela e que são paralelas à reta **r:** $5x - 5y + 31 = 0$.

(**R:** $x - y + 3 = 0$ e $x - y + 11 = 0$)

6. Determinar as equações das retas tangentes à circunferência $\gamma: x^2 + y^2 + 6x - 8 = 0$ que são perpendiculares à reta **r:** $4x - y + 31 = 0$.

(**R:** $x + 4y + 20 = 0$ e $x + 4y - 14 = 0$)

7. Determinar as equações da retas que passam pelo ponto $P = (6, -4)$ e são tangentes à circunferência $\gamma: x^2 + y^2 + 2x - 2y - 35 = 0$.

(**R:** $6x + y - 32 = 0$ e $x - 6y - 30 = 0$)

8. A partir do ponto $P = (-5, 4)$ são traçadas tangentes à circunferência $\gamma: x^2 + y^2 - 10x + 7 = 0$. Determinar o ângulo agudo formado por estas tangentes.

(**R:** $\text{arc tg } \frac{21}{20} \simeq 46^\circ 24'$)

9. Considere a circunferência $\gamma: x^2 + y^2 = 5$ e a reta **r**: $x - 2y + k = 0$, $k \in \mathbb{R}$. Determine o valor de **k** para que:

(i) a reta **r** seja tangente à circunferência γ; (**R:** $k = \pm 5$)

(ii) a reta **r** seja secante à circunferência γ; (**R:** $-5 < k < 5$)

(iii) a reta **r** não intercepte a circunferência γ. (**R:** $k < -5$ ou $k > 5$)

10. Considere a circunferência $\gamma: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ e a reta **r**: $y = mx + 3$, $m \in \mathbb{R}$. Determine o valor de **m** para que:

(i) a reta **r** seja tangente à circunferência γ; (**R:** $m = 0$ ou $m = -\frac{12}{5}$)

(ii) a reta **r** seja secante à circunferência γ; (**R:** $-\frac{12}{5} < m < 0$)

(iii) a reta **r** não intercepte a circunferência γ. (**R:** $m < -\frac{12}{5}$ ou $m > 0$)