Capítulo 8

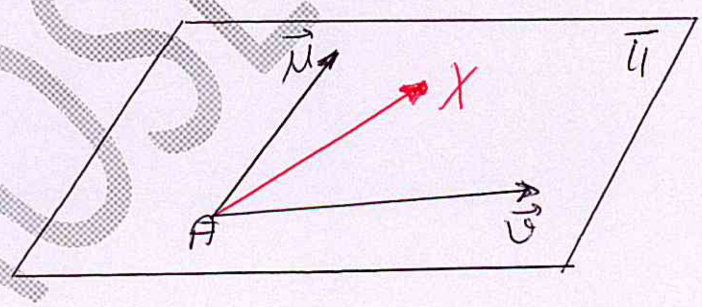
ESTUDO DO PLANO

Neste capítulo, repetiremos para planos um estudo análogo ao que foi feito no Capítulo anterior para as retas.

8.1 Equação Vetorial e Equações Paramétricas do Plano

Seja Π um plano que passa pelo ponto A e é paralelo a dois vetores linearmente independentes $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Um ponto X do espaço pertence ao plano Π se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{AX}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **LD**; isto é, existem números reais λ, μ tais que $\overrightarrow{AX}$ = X - A $= \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. Ou seja,

$$X \in \Pi \iff X = A + \lambda\vec{u} + \mu\,\vec{v} \quad \text{para } \lambda,\ \mu \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(8.1)}$$



Em outras palavras, dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, (8.1) nos dá um ponto X de Π e dado $X \in \Pi$, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que (8.1) se verifica. O plano Π é o conjunto de todos os pontos do espaço que satisfazem (8.1). A equação (8.1) é chamada **uma equação vetorial do plano** Π. Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são chamados **vetores diretores** do plano Π.

Observe que: Se A, B e C são três pontos distintos e não colineares de Π, podemos considerar, por exemplo, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e então $X = A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ é uma equação vetorial de Π.

Consideremos agora um sistema de coordenadas $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ em relação ao qual: $X = (x, y, z)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (m, n, p)$. Da equação (5.1) podemos escrever:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c) + \mu(m, n, p), \quad \text{para } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{5.2}$$

e portanto:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu m \\ y = y_0 + \lambda b + \mu n \\ z = z_0 + \lambda c + \mu p \end{cases}, \quad \text{para } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{5.3}$$

As equações (5.3) são chamadas de **equações paramétricas do plano** Π, em relação ao sistema de coordenadas fixado. O plano Π é o conjunto de pontos (x, y, z) determinados pelas equações paramétricas quando λ, μ variam de $-\infty$ a $+\infty$.

Observe que: Se o plano Π é determinado pelos três pontos **não colineares** $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ e $C = (x_3, y_3, z_3)$, podemos tomar como vetores diretores os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB} =$ $= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ e daí

$$\begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) + \mu(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) + \mu(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1) + \mu(z_3 - z_1) \end{cases}, \quad \text{para } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

são equações paramétricas do plano Π.

8.2 Problemas Resolvidos

1. Ache duas equações vetoriais do plano Π que passa por $A = (-3, -7, 1)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 0)$.

Solução: Uma equação vetorial do plano descrito é:

$$\Pi: \quad X = A + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = (-3, -7, 1) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(-1, 1, 0), \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Observe que a equação acima não é a única equação que descreve o plano Π. Outra equação vetorial do plano descrito é quando consideramos como vetores diretores, por exemplo, os vetores $-\vec{u}$ e $3\vec{v}$:

$$\Pi: \quad X = A + \lambda(-\vec{u}) + \mu(3\vec{v}) = (-3, -7, 1) + \lambda(-1, -1, -1) + \mu(-3, 3, 0), \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

2. Ache uma equação vetorial do plano Π que contém os pontos A = (0, 1, 0), B = (1, 0, 1) e C = (0, 0, 1).

Solução: Os vetores $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1)$ e $\overrightarrow{AC} = (0, -1, 1)$ são **LI** e portanto uma equação vetorial deste plano é: Π: $X = A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$

$$\Pi: \quad X = (0, 1, 0) + \lambda(1, -1, 1) + \mu(0, -1, 1), \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

3. Ache equações paramétricas do plano Π que passa pelo ponto A = (7, 7, 1) e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 0, 1)$.

Solução: É imediato que

$$\begin{cases} x = & 7 & + & \lambda. & 1 & + & \mu. & (-1) \\ y = & 7 & + & \lambda. & 1 & + & \mu. & 0 \\ z = & 1 & + & \lambda. & 1 & + & \mu. & 1 \end{cases}$$

coordenadas de um ponto de Π	coordenadas de $\vec{u}$	coordenadas de $\vec{v}$

ou seja:

$$\begin{cases} x = 7 + \lambda - \mu \\ y = 7 + \lambda \\ z = 1 + \lambda + \mu \end{cases} \qquad \text{para } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

4. Dê uma equação vetorial do plano Π que tem por equações paramétricas

$$\begin{cases} x = -6 + \lambda - \mu \\ y = -1 + 7\lambda - 14\mu \\ z = \ \ 4 - 5\lambda + 2\mu \end{cases}$$

Solução: Dispondo as equações assim:

$$\begin{cases} x = & -6 & + & \lambda. & 1 & + & \mu. & (-1) \\ y = & -1 & + & \lambda. & 7 & + & \mu. & (-14) \\ z = & 4 & + & \lambda. & (-5) & + & \mu. & 2 \end{cases}$$

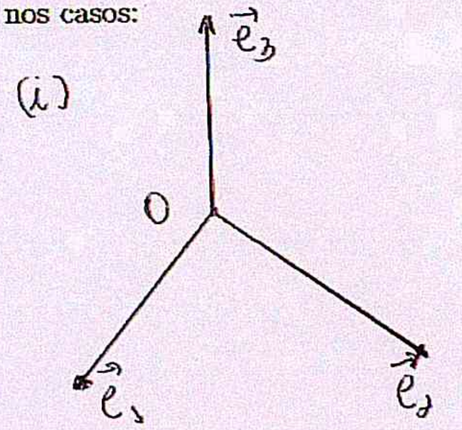
vemos que Π passa por A = (-6, -1, 4) e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (1, 7, -5)$ e $\vec{v} = (-1, -14, 2)$ e, portanto

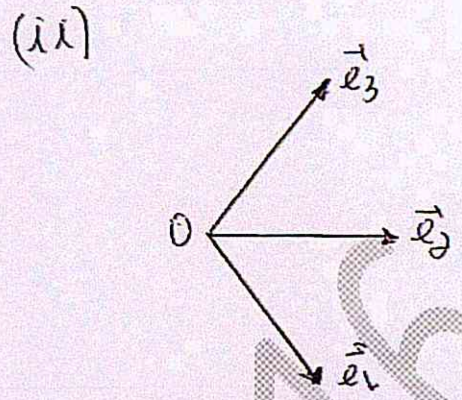
$$\Pi: \quad X = (-6, -1, 4) + \lambda((1, 7, -5) + \mu(-1, -14, 2), \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

é uma equação vetorial do plano Π.

5. Esboce o plano Π que tem por equações paramétricas $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 1 \end{cases}$ para $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$

nos casos:

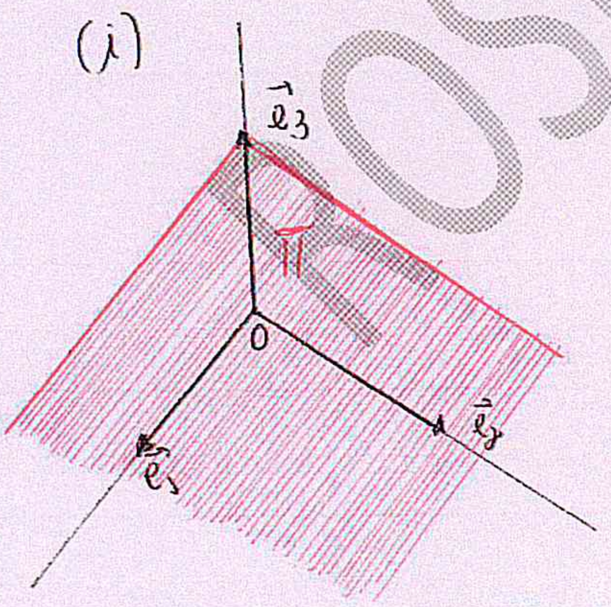


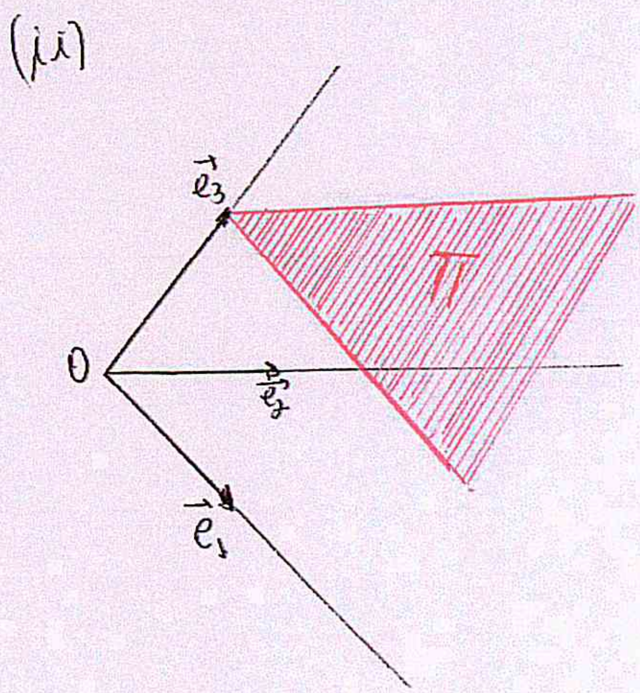


Solução: Escrevendo as equações de Π na seguinte disposição

$$\left\{\begin{array}{lccccccc} x = & 0 & + & \lambda. & 1 & + & \mu. & 0 \\ y = & 0 & + & \lambda. & 0 & + & \mu. & 1 \\ z = & 1 & + & \lambda. & 0 & + & \mu. & 0 \end{array}\right.$$
$$\begin{array}{ccc} \quad A & \quad\quad \vec{u} & \quad\quad \vec{v} \end{array}$$

vemos que Π passa pelo ponto $A = (0, 0, 1)$, e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (1, 0, 0) = \vec{e}_1$ e $\vec{v} = (0, 1, 0)\ \vec{e}_2$. Dessa forma:





8.3 Problemas Propostos

1. Escreva equações vetorial e paramétricas para os planos descritos abaixo:

(a) Π passa por A = (1, 1, 0) e B = (1, -1, -1) e é paralelo ao vetor $\vec{v}$ = (2, 1, 0).

(b) Π passa por A (1, 0, 1) = e B = (0, 1, -1) e é paralelo ao segmento CD, sendo C = (1, 2, 1) e D = (0, 1, 0).

(c) Π passa pelos pontos A = (1, 0, 1), B = (2, 1, -1) e C = (1, -1, 0).

(d) Π passa pelos pontos A = (1, 0, 2), B = (-1, 1, 3) e C = (3, -1, 1).

2. Verifique se $\Pi_1 = \Pi_2$ nos seguintes casos:

(a) Π_1: $X = (1, 2, 1) + \lambda(1, -1, 2) + \mu(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -1)$
Π_2: $X = (1, 2, 1) + \alpha(-1, 1, -2) + \beta(-3, 4, -6)$

(b) Π_1: $X = (1, 1, 1) + \lambda(2, 3, -1) + \mu(-1, 1, 1)$
Π_2: $X = (1, 6, 2) + \alpha(-1, 1, 1) + \beta(2, 3, -1)$

(c) Π_1: $X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0) + \mu(0, 1, 0)$
Π_2: $X = (1, 1, 0) + \alpha(1, 2, 1) + \beta(0, -1, 1)$

(d) Π_1: $X = (2, 1, 3) + \lambda(1, 1, -1) + \mu(1, 0, 1)$
Π_2: $X = (0, 1, 1) + \alpha(1, 3, -5) + \beta(1, -1, 3)$

3. Decomponha o vetor $\vec{v}$ = (1, 2, 4) em duas parcelas tais que uma delas seja paralela ao plano Π: $X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(0, 1, -1)$ e a outra paralela à reta r: $X = (0, 0, 0) +$ $+ \nu(2, 1, 0)$.

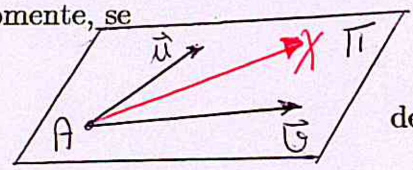
4. Ache dois pontos A e B da intersecção dos planos Π_1 e Π_2 e escreva uma equação vetorial para a reta que passa por A e B, sabendo que Π_1: $X = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1) + \mu(1, 2, 1)$ e Π_2: $X = (0, 0, 0) + \alpha(0, 3, 0) + \beta(-2, -1, -1)$

5. Escreva equações paramétricas para os três planos coordenados.

6. Obtenha equações paramétricas do plano Π que passa pelo ponto A = (1, 1, 2) e é paralelo ao plano Π_1: $X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 2, -1) + \mu(2, 1, 0)$.

8.4 Equação Geral do Plano

Sejam $S = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ um sistema de coordenadas e Π um plano que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$ e é paralelo aos vetores **LI** $\vec{u} = (r, s, t)$ e $\vec{v} = (m, n, p)$. Um ponto $X = (x, y, z)$ pertence ao plano Π se, e somente, se, os vetores $\overrightarrow{AX}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **LD**; isto é, se, e somente, se



$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ r & s & t \\ m & n & p \end{pmatrix} = 0$$

Desenvolvendo-se por Laplace esse determinante relativamente à primeira linha, obtemos:

$$(x - x_0) \det \begin{pmatrix} s & t \\ n & p \end{pmatrix} - (y - y_0) \det \begin{pmatrix} r & t \\ m & p \end{pmatrix} + (z - z_0) \det \begin{pmatrix} r & s \\ m & n \end{pmatrix} = 0$$

e daí, chamando-se: $a := \det \begin{pmatrix} s & t \\ n & p \end{pmatrix}$, $b := -\det \begin{pmatrix} r & t \\ m & p \end{pmatrix}$ e $c := \det \begin{pmatrix} r & s \\ m & n \end{pmatrix}$

obtemos: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

Ou seja: $ax + by + cz + (-ax_0 - by_0 - cz_0) = 0$. Finalmente, chamando-se $d := -ax_0 - by_0 - cz_0$, obtemos a equação:

$$\Pi : ax + by + cz + d = 0 \qquad \textbf{(8.4)}$$

<u>Observe que</u>: Os números reais **a, b e c** são tais que $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ pois, caso contrário, teríamos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ **LD**, contra a hipótese.

A equação (8.4) é chamada **<u>uma</u> equação geral** do plano Π. Em outras palavras, dado um plano Π, existem $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, tais que todos os pontos de Π satisfazem (8.4).

<u>Reciprocamente</u>, dada uma equação $ax + by + cz + d = 0$, com $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, existe um plano Π cuja equação geral é exatamente esta equação dada.

<u>De fato</u>: Como a, b, c não são simultaneamente nulos, podemos supor que, por exemplo, **a** é diferente de zero. Dessa forma, a equação (8.4) é equivalente a $x = -\frac{b}{a} y - \frac{c}{a} z - \frac{d}{a}$

Fazendo:	$y = z = 0$	vem	$x = -\frac{d}{a}$;
	$y = 0, z = 1$	vem	$x = -\frac{c}{a} - \frac{d}{a}$;
	$y = 1, z = 0$	vem	$x = -\frac{b}{a} - \frac{d}{a}$.

e portanto os pontos A = (- $\frac{d}{a}$, 0, 0), B = (- $\frac{c}{a}$ - $\frac{d}{a}$, 0, 1) e C = (- $\frac{b}{a}$ - $\frac{d}{a}$, 1, 0) satisfazem a equação (5.4). Os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ = (- $\frac{c}{a}$, 0, 1) e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ = (- $\frac{b}{a}$, 1, 0) são claramente **LI** e, portanto, os pontos A, B e C não são colineares; isto é, determinam um plano Π, cuja equação geral é dada pelo determinante:

$$\det \begin{pmatrix} x-(-\frac{d}{a}) & y-0 & z-0 \\ -\frac{c}{a} & 0 & 1 \\ -\frac{b}{a} & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

que desenvolvido resulta ax + by + cz + d = 0, como queríamos.

8.5 Problemas Resolvidos

1. Ache uma equação geral do plano Π que passa por A = (9, -1, 0) e é paralelo aos vetores $\vec{u}$ = (0, 1, 0) e $\vec{v}$ = (1, 1, 1).

Solução: É fácil ver que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **LI**, uma vez que suas coordenadas não são proporcionais. Então X = (x, y, z) é um ponto do plano Π se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{AX}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **LD**, ou seja, se, e somente se

$$\det \begin{pmatrix} x-9 & y+1 & z-0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

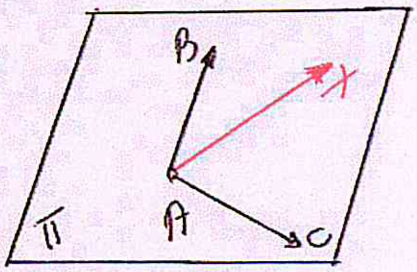
Desenvolvendo o determinante, vem Π: x - z - 9 = 0.

2. Idem para Π passando por A = (1, 0, 1), B = (-1, 0, 1) e C = (2, 1, 2).

Solução: Consideremos os vetores: $\overrightarrow{AB}$ = (-2, 0, 0) e $\overrightarrow{AC}$ = (1, 1, 1)

Como esses vetores são **LI**, uma equação geral de Π é obtida a partir de

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$



que fornece a equação Π: y - z + 1 = 0.

3. Obtenha uma equação geral do plano Π cujas equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda - 3\mu \\ y = 1 + \lambda + \mu \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \text{para } \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$$

Vamos dar para este problema duas soluções distintas.

<u>**Primeira Solução:**</u> (eliminando os parâmetros λ e μ).

Substituindo $z = \lambda$ (que é a terceira equação) nas duas primeiras, segue que:

$$\begin{cases} x = -1 + 2z - 3\mu \\ y = 1 + z + \mu \end{cases} \qquad \text{para } \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$$

Da segunda equação temos que $\mu = y - 1 - z$ e portanto, substituindo-se na primeira equação, obtemos Π: $x + 3y - 5z - 2 = 0$.

<u>**Segunda Solução:**</u> (determinando um ponto de Π e dois vetores **LI** paralelos a Π).

Das equações paramétricas de Π, segue que $A = (-1, 1, 0)$ é um ponto de Π e $\vec{u} = (2, 1, 1)$, $\vec{v} = (-3, 1, 0)$ são dois vetores diretores de Π. Assim, se $X = (x, y, z)$ é um ponto de Π, então:

$$\det\begin{pmatrix} x-(-1) & y-1 & z-0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

e daí resulta Π: $x + 3y - 5z - 2 = 0$.

4. Encontre equações paramétricas do plano Π que tem equação geral Π: $x + 2y - z - 1 = 0$.

<u>**Primeira Solução:**</u> Vamos procurar três pontos **não colineares** de Π. Ou seja, vamos tentar obter três soluções da equação $x + 2y - z - 1 = 0$.

Fazendo	$x = y = 0$	obtemos	$z = -1$	$\Longrightarrow$	$A = (0, 0, -1)$ pertence a Π.
	$x = z = 0$	obtemos	$y = \frac{1}{2}$	$\Longrightarrow$	$B = (0, \frac{1}{2}, 0)$ pertence a Π.
	$y = z = 0$	obtemos	$x = 1$	$\Longrightarrow$	$C = (1, 0, 0)$ pertence a Π.

Como $\overrightarrow{CB} = (-1, \frac{1}{2}, 0)$ e $\overrightarrow{AC} = (1, 0, 1)$ são **LI**, os pontos A, B e C não são colineares e portanto um conjunto de equações paramétricas de Π é dado por:

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \qquad \text{para } \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$$

Segunda Solução: (melhor, pois é mais rápida)

Fazendo $y = \lambda$ e $z = \mu$ e substituindo-se na equação geral dada, obtemos: $x + 2\lambda - \mu - 1 = 0$ e, portanto, $x = 1 - 2\lambda + \mu$. Logo:

$$\Pi : \begin{cases} x = 1 - 2\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \qquad \text{para } \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$$

5. Dar equações paramétricas da reta **r** que é a intersecção dos planos:

$$\Pi : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Primeira Solução: A idéia é chamar uma das variáveis x, y, z de λ e achar as outras em função de λ. Consideremos, então, $x = \lambda$. Assim:

$$\begin{cases} y + z = -\lambda + 1 \\ y - z = -\lambda \end{cases} \implies y = \frac{1}{2} - \lambda, \quad z = \frac{1}{2}$$

e portanto **r** tem equações paramétricas:

$$r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{1}{2} - \lambda \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Observe que: Todos os pontos de **r** têm cota constante igual a $\frac{1}{2}$ e, portanto, z não serve como parâmetro; isto é, não podemos fazer $z = \lambda$.

Segunda Solução: Basta acharmos dois pontos distintos da reta **r**; ou seja, duas soluções distintas para o sistema formado pelas equações dos planos cuja intersecção é a reta **r**. Faça isso!!!

8.6 Problemas Propostos

1. Obtenha equações gerais para os planos Π descritos abaixo:

(a) Π passa por $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

(b) Π passa por $A = (1, 0, 1) =$ e $B = (0, 1, -1)$ e é paralelo ao segmento CD, sendo $C = (1, 2, 1)$ e $D = (0, 1, 0)$.

(c) Π passa pelos pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, -1)$ e $C = (1, -1, 0)$.

(d) Π passa pelos pontos $A = (1, 0, 2)$, $B = (-1, 1, 3)$ e $C = (3, -1, 1)$.

2. Obtenha uma equação geral para o plano Π determinado pelas retas **r** e **s**, quando:

(a) $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = z$ e $s : x - 1 = y = z$

(b) $r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{4}$ e $s: \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{4}$

3. Obtenha uma equação geral para cada um dos planos

(a) $\Pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$ (b) $\Pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda + \mu \end{cases}$

4. Sejam Π_1 o plano que passa pelos pontos $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$, Π_2 o plano que passa por $Q = (-1, -1, 0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (0, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$ e Π_3 o plano de equação vetorial $X = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 1, 0) + \mu(1, 0, 1)$.

(a) Escreva equações gerais de Π_1, Π_2 e Π_3.

(b) Determine o (único) ponto da intersecção $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$.

5. Sejam $P = (4, 1, -1)$ e r: $X = (2, 4, 1) + \lambda(1, -1, 2)$

(a) Mostre que $P \notin r$.

(b) Obtenha uma equação geral do plano Π determinado por **r** e **P**.

6. Verifique se a reta **r** está contida no plano Π nos seguintes casos:

(a) r: $X = (1, 0, 0) + \lambda(2, -1, 0)$ e Π: $x + 2y + 3z = 1$

(b) Π: $X = (1, 4, 1) + \lambda(1, -1, 1) + \mu(-1, 2, -1)$

e **r** passa pelos pontos $A = (2, 3, 2)$ e $B = (0, 0, 1)$

(c) r: $x - 1 = 2y = 4 - z$ e Π: $x + 2y - 2z + 1 = 0$

7. Verifique, em cada um dos casos seguintes, se as retas **r** e **s** são concorrentes. Em caso afirmativo, determine o ponto P comum a elas e escreva uma equação geral do plano Π determinado por elas.

(a) r: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}$ e s: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{2+z}{5}$

(b) r: $\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$ e s: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$

8. Seja o plano Π : $2x - y + 3z + 1 = 0$. Calcular:

(a) O ponto de Π que tem abscissa 4 e ordenada 3;

(b) O ponto de Π que tem abscissa 1 e cota 2;

(c) O valor de k para que o ponto $P = (2, k + 1, k)$ pertença a Π;

(d) O ponto de abscissa zero cuja ordenada é o dobro da cota.

9. Determinar uma equação geral do plano:

(a) paralelo ao plano Π : $2x - 3y - z + 5 = 0$;

(b) paralelo ao eixo dos **z** e qua contém os pontos $A = (0, 3, 1)$ e $B = (2, 0, -1)$;

(c) paralelo ao eixo dos **x** e qua contém os pontos $A = (-2, 0, 2)$ e $B = (0, -2, 1)$;

(d) paralelo ao eixo dos **y** e qua contém os pontos $A = (2, 1, 0)$ e $B = (0, 2, 1)$;

(e) paralelo ao plano xOy e que contém o ponto A = (5, -2, 3);

(f) determinado pelos pontos A = (-1, 2, 0), B = (2, -1, 1) e C = (1, 1, -1);

(g) determinado pelos pontos A = (2, 1, 0), B = (-4, -2, -1) e C = (0, 0, 1);

(h) determinado pelos pontos A = (2, 1, 3), B = (-3, -1, 3) e C = (4, 2, 3).

10. Determinar o valor de α para que os pontos A = (α, -1, 5), B = (7, 2, 1), C = (-1, -3, -1) e D = (1, 0, 3) sejam coplanares.

11. Determinar a equação geral do plano que contém o seguinte par de retas:

(a) r: $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases}$ e s: $\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{z-1}{5} \\ y = -1 \end{cases}$

(b) r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = 3 - z$ e s: $\frac{1-x}{2} = -y - 2 = \frac{z-3}{2}$

(c) r: $\begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 4 \end{cases}$ e s: $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-2}$; $z = 0$

(d) r: $x = z$; $y = -3$ e s: $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$

12. Determinar a equação geral do plano que contém o ponto e a reta dados a seguir:

(a) A = (3, 1, -2) e r: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$

(b) A = (3, -2, -1) e r: $\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 7 = 0 \end{cases}$

(c) A = (1, 2, 1) e **r** é a reta intersecção do plano Π: x - 2y + z - 3 = 0 com o plano yOz.

(d) A = (1, -1, 2) e o eixo dos **z**.

(e) A = (1, -1, 2) e o eixo dos **x**.

13. Dada a equação geral do plano Π: $3x - 2y - z - 6 = 0$, determinar um sistema de equações paramétricas de Π.

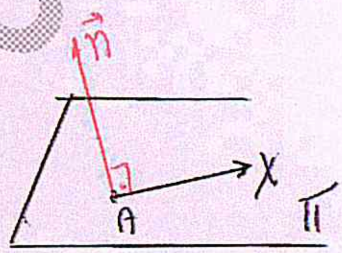
14. Estabelecer equações paramétricas para o plano determinado pelos pontos $A = (1, 1, 0)$, $B = (2, 1, 3)$ e $C = (-1, -2, 4)$.

8.7 Vetor Normal a um Plano

Fixemos um sistema **ortogonal** de coordenadas cartesianas.

Dado um plano Π, chama-se **vetor normal** a Π a qualquer vetor **não nulo** ortogonal a Π. Assim, $\vec{n} \neq \vec{0}$ é um vetor normal a Π se, e somente se, $\vec{n}$ é ortogonal a qualquer vetor paralelo a Π (ou a qualquer vetor diretor de Π). Dessa forma, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores diretores de Π **LI**, o vetor $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é **um** vetor normal a Π.

Vamos, a seguir, obter uma equação geral do plano Π, sabendo que $A = (x_0, y_0, z_0)$ é um ponto de Π e que $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor normal a Π (e, portanto, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$). Consideremos $X = (x, y, z)$ um ponto genérico do espaço. Então:



$$X \in \Pi \iff \overrightarrow{AX} \perp \vec{n}$$

logo:

$$X \in \Pi \iff \overrightarrow{AX} \bullet \vec{n} = 0$$

ou:

$$X \in \Pi \iff (x - x_0)\,a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0$$

e chamando $\mathbf{d = -ax_0 - by_0 - cz_0}$, concluímos que

$$X \in \Pi \iff ax + by + cz + d = 0$$

Observe que esta última equação é uma equação geral do plano Π. O importante aqui é que **os coeficientes de x, y e z nessa equação são as coordenadas de um vetor normal** ao plano Π e $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Reciprocamente: se $ax + by + cz + d = 0$ é uma equação geral de um plano Π, mostremos que $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor normal a Π. Ou seja, vamos mostrar que $\vec{n}$ é ortogonal a qualquer vetor do plano Π. Para isso, consideremos $\vec{v}$ um vetor não nulo de Π. Então existem dois pontos distintos **A** e **B** em Π tais que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Suponhamos que $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$. Então, como $A, B \in \Pi$, segue que:

$$ax_1 + y_1 + z_1 + d = 0 \qquad \text{(I)}$$

e

$$ax_2 + y_2 + z_2 + d = 0 \qquad \text{(II)}$$

Subtraindo-se (I) de (II), obtemos

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0$$

que é exatamente $\vec{n} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$, como queríamos.

8.8 Problemas Resolvidos

Fixemos um sistema **ortogonal** de coordenadas cartesianas.

1. Obtenha uma equação geral do plano Π que passa pelo ponto $A = (1, 0, 2)$ e tem vetor normal $\vec{n} = (1, -1, 4)$.

Primeira Solução: Basta lembrar que

$$X = (x, y, z) \in \Pi \iff \overrightarrow{AX} \bullet \vec{n} = 0$$

e, portanto:

$$X = (x, y, z) \in \Pi \iff (x - 1, y - 0, z - 2) \bullet (1, -1, 4) = 0 \iff x - 1 - y + 4z - 8 = 0$$

Logo, $x - y + 4z - 9 = 0$ é uma equação geral de Π.

Segunda Solução: Como $\vec{n} = (1, -1, 4)$ é um vetor normal a Π, uma equação geral de Π é:

$$\Pi\colon x - y + 4z + d = 0$$

e portanto, para conhecermos uma equação geral deste plano, basta apenas determinarmos o valor de **d**. Mas é dado que o ponto $A = (1, 0, 2)$ é um ponto de Π e, portanto, suas coordenadas devem satisfazer à equação de Π; ou seja:

$$1 - 0 + 4.2 + d = 0 \Longrightarrow d = -9.$$

2. Obtenha uma equação geral do plano Π que passa pelo ponto $A = (0, 1, 2)$ e tem vetores diretores $\vec{u} = (4, 1, 2)$ e $\vec{v} = (2, 1, -2)$.

Solução: Um vetor normal ao plano Π é ortogonal a **todo** vetor de Π e portanto, em particular, é ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. Mas: o vetor $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é um vetor ortogonal, simultaneamente, a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. Logo, $\vec{n}$ é **paralelo** a $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Vamos, então, calcular esse vetor:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = -4\vec{i} + 12\vec{j} + 2\vec{k}$$

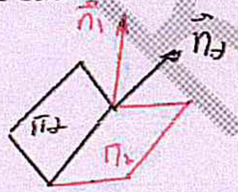
Logo, qualquer vetor **não nulo** paralelo ao vetor (-4, 12, 2) é um vetor normal a Π. Consideremos, então, o vetor $\vec{n} = (2, -6, -1)$ normal a Π. A partir daqui, a solução deste problema é análoga à solução do anterior. Complete o que está faltando!!! (Π: $2x - 6y - z + 8 = 0$)

3. Escreva equações paramétricas para a reta $r = \Pi_1 \cap \Pi_2$, sendo Π_1: $2x - y - 3 = 0$ e Π_2: $3x + y + 2z - 1 = 0$.

Solução: Os vetores $\vec{n}_1 = (2, -1, 0)$ e $\vec{n}_2 = (3, 1, 2)$ são normais, respectivamente, a Π_1 e a Π_2. Dessa forma, como **r** está contida tanto em Π_1 como em Π_2, segue-se que os vetores $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são ortogonais a **r** e, portanto, $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$ é um vetor diretor da reta **r**. Mas:

$$\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

Falta determinarmos, agora, um ponto da reta **r**: fazendo $\mathbf{x = 0}$ na equação de Π_1, obtemos $\mathbf{y = -3}$ e substituindo na equação de Π_2, obtemos $\mathbf{z = 2}$. Assim, o ponto $A = (0, -3, 2)$ pertence tanto ao plano Π_1 como ao plano Π_2 sendo, portanto, um ponto de **r**. Ou seja: **r** passa pelo ponto $A = (0, -3, 2)$ e tem a direção do vetor $\vec{r} = (-2, -4, 5)$. Daí as equações paramétricas de **r** são:



$$\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -3 - 4\lambda\,, \qquad \text{para } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 5\lambda \end{cases}$$

8.9 Problemas Propostos

Fixemos um sistema **ortogonal** de coordenadas cartesianas.

1. Obtenha um vetor normal ao plano Π nos seguintes casos:

(a) Π passa pelos pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$ e $C = (1, 2, 3)$

(b) Π tem equações paramétricas $\begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = 2 - \alpha + \beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(c) Π tem equação geral $x - 2y + 4z + 1 = 0$.

2. Dê uma equação geral do plano Π que passa pelo ponto $P = (1, 1, 2)$ e é paralelo a Π_1: $x - y + 2z + 1 = 0$.

3. Dê uma equação geral do plano Π que passa pela origem e é perpendicular à reta que passa por $A = (1, 1, 1)$ e $B = (2, 1, -1)$.

4. Dê uma equação geral do plano Π que passa pelo ponto $P = (1, 0, 1)$ e é perpendicular à reta r: $X = (0, 0, 1) + \lambda(1, 2, -1)$.

5. Decomponha o vetor $\vec{v} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ paralela e ortogonalmente ao plano $\Pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 \\ z = \lambda - \mu \end{cases}$

6. Escreva uma equação vetorial da reta que passa por $A = (1, 2, 3)$ e é perpendicular ao plano Π: $2x + y - z = 2$.

7. Escreva equações paramétricas da reta intersecção dos planos

$$\Pi_1 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 \\ z = -\lambda - \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \Pi_2 : \begin{cases} x = 1 + \alpha - \beta \\ y = 2\alpha + \beta \\ z = 3 - \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

8. Escreva equações paramétricas da reta que passa pela origem e é perpendicular ao plano Π_1: $X = (1, 0, 0) + \lambda(-1, 1, 1) + \mu(-1, 1, 0)$.