Lista 13, Capítulo 8 - Geometria Analítica e Álgebra Linear

Profa. Roseli

1. Escreva equações vetorial e paramétricas para os planos descritos abaixo:

(a) Π passa por A = (1, 1, 0) e B = (1, -1, -1) e é paralelo ao vetor $\vec{v}$ = (2, 1, 0).

(b) Π passa por A (1, 0, 1) = e B = (0, 1, -1) e é paralelo ao segmento CD, sendo C = (1, 2, 1) e D = (0, 1, 0).

(c) Π passa pelos pontos A = (1, 0, 1), B = (2, 1, -1) e C = (1, -1, 0).

(d) Π passa pelos pontos A = (1, 0, 2), B = (-1, 1, 3) e C = (3, -1, 1).

2. Verifique se $\Pi_1 = \Pi_2$ nos seguintes casos:

(a) Π_1: X = (1, 2, 1) + λ(1, -1, 2) + μ(-$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, -1)
Π_2: X = (1, 2, 1) + α(-1, 1, -2) + β(-3, 4, -6)

(b) Π_1: X = (1, 1, 1) + λ(2, 3, -1) + μ(-1, 1, 1)
Π_2: X = (1, 6, 2) + α(-1, 1, 1) + β(2, 3, -1)

(c) Π_1: X = (0, 0, 0) + λ(1, 1, 0) + μ(0, 1, 0)
Π_2: X = (1, 1, 0) + α(1, 2, 1) + β(0, -1, 1)

(d) Π_1: X = (2, 1, 3) + λ(1, 1, -1) + μ(1, 0, 1)
Π_2: X = (0, 1, 1) + α(1, 3, -5) + β(1, -1, 3)

3. Decomponha o vetor $\vec{v}$ = (1, 2, 4) em duas parcelas tais que uma delas seja paralela ao plano Π: X = (1, 1, 0) + λ(1, 0, 1) + μ(0, 1, -1) e a outra paralela à reta r: X = (0, 0, 0) + + ν(2, 1, 0).

4. Ache dois pontos A e B da intersecção dos planos Π_1 e Π_2 e escreva uma equação vetorial para a reta que passa por A e B, sabendo que Π_1: X = (1, 0, 0) + λ(0, 1, 1) + μ(1, 2, 1) e Π_2: X = (0, 0, 0) + α(0, 3, 0) + β(-2, -1, -1)

5. Escreva equações paramétricas para os três planos coordenados.

6. Obtenha equações paramétricas do plano Π que passa pelo ponto A = (1, 1, 2) e é paralelo ao plano Π_1: X = (1, 0, 0) + λ(1, 2, -1) + μ(2, 1, 0).

7. Obtenha equações gerais para os planos Π descritos abaixo:

(a) Π passa por A = (1, 1, 0) e B = (1, -1, -1) e é paralelo ao vetor $\vec{v}$ = (2, 1, 0).

(b) Π passa por A = (1, 0, 1) = e B = (0, 1, -1) e é paralelo ao segmento CD, sendo C = (1, 2, 1) e D = (0, 1, 0).

(c) Π passa pelos pontos A = (1, 0, 1), B = (2, 1, -1) e C = (1, -1, 0).

(d) Π passa pelos pontos A = (1, 0, 2), B = (-1, 1, 3) e C = (3, -1, 1).

8. Obtenha uma equação geral para o plano Π determinado pelas retas **r** e **s**, quando:

(a) $\mathrm{r} : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = z$ e $\mathrm{s} : x - 1 = y = z$

(b) $\mathrm{r} : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{4}$ e $\mathrm{s}: \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{4}$

9. Obtenha uma equação geral para cada um dos planos

$$\text{(a)}\ \Pi : \begin{array}{l} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - \mu \end{array} \qquad \text{(b)}\ \Pi : \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda + \mu \end{array}$$

10. Sejam Π_1 o plano que passa pelos pontos A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0) e C = (0, 0, 1), Π_2 o plano que passa por Q = (-1, -1, 0) e é paralelo aos vetores $\vec{u}$ = (0, 1, -1) e $\vec{v}$ = (1, 0, 1) e Π_3 o plano de equação vetorial X = (1, 1, 1) + λ(-2, 1, 0) + μ(1, 0, 1).

(a) Escreva equações gerais de Π_1, Π_2 e Π_3.

(b) Determine o (único) ponto da intersecção $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$.

11. Sejam P = (4, 1, -1) e r: X = (2, 4, 1) + λ(1, -1, 2)

(a) Mostre que $P \notin r$.

(b) Obtenha uma equação geral do plano Π determinado por **r** e **P**.

12. Verifique se a reta **r** está contida no plano Π nos seguintes casos:

(a) r: X = (1, 0, 0) + λ(2, -1, 0) e Π: x + 2y + 3z = 1

(b) Π: X = (1, 4, 1) + λ(1, -1, 1) + μ(-1, 2, -1)

e **r** passa pelos pontos A = (2, 3, 2) e B = (0, 0, 1)

(c) r: x - 1 = 2y = 4 - z e Π: x + 2y - 2z + 1 = 0

13. Verifique, em cada um dos casos seguintes, se as retas **r** e **s** são concorrentes. Em caso afirmativo, determine o ponto P comum a elas e escreva uma equação geral do plano Π determinado por elas.

(a) r: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}$ e s: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{2+z}{5}$

(b) r: $\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$ e s: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$

14. Seja o plano Π : 2x - y + 3z + 1 = 0. Calcular:

(a) O ponto de Π que tem abscissa 4 e ordenada 3;

(b) O ponto de Π que tem abscissa 1 e cota 2;

(c) O valor de k para que o ponto P = (2, k + 1, k) pertença a Π;

(d) O ponto de abscissa zero cuja ordenada é o dobro da cota.

15. Determinar uma equação geral do plano:

(a) paralelo ao plano Π : 2x - 3y - z + 5 = 0;

(b) paralelo ao eixo dos **z** e qua contém os pontos A = (0, 3, 1) e B = (2, 0, -1);

(c) paralelo ao eixo dos **x** e qua contém os pontos A = (-2, 0, 2) e B = (0, -2, 1);

(d) paralelo ao eixo dos **y** e qua contém os pontos A = (2, 1, 0) e B = (0, 2, 1);

(e) paralelo ao plano xOy e que contém o ponto A = (5, -2, 3);

(f) determinado pelos pontos A = (-1, 2, 0), B = (2, -1, 1) e C = (1, 1, -1);

(g) determinado pelos pontos A = (2, 1, 0), B = (-4, -2, -1) e C = (0, 0, 1);

(h) determinado pelos pontos A = (2, 1, 3), B = (-3, -1, 3) e C = (4, 2, 3).

16. Determinar o valor de α para que os pontos A = (α, -1, 5), B = (7, 2, 1), C = (-1, -3, -1) e D = (1, 0, 3) sejam coplanares.

17. Determinar a equação geral do plano que contém o seguinte par de retas:

(a) r: $\begin{array}{l} \mathrm{y = 2x - 3} \\ \mathrm{z = -x + 2} \end{array}$ e s: $\begin{array}{l} \frac{\mathrm{x}-1}{3} = \frac{\mathrm{z}-1}{5} \\ \mathrm{y = -1} \end{array}$

(b) r: $\frac{\mathrm{x}-1}{2} = \frac{\mathrm{y}+2}{3} = 3 - z$ e s: $\frac{1-\mathrm{x}}{2}$ = -y - 2 = $\frac{\mathrm{z}-3}{2}$

(c) r: $\begin{array}{l} \mathrm{x} = -3 + \lambda \\ \mathrm{y} = -\lambda \\ \mathrm{z} = 4 \end{array}$ e s: $\frac{\mathrm{x}+2}{2} = \frac{\mathrm{y}-1}{-2}$; z = 0

(d) r: x = z; y = -3 e s: $\begin{array}{l} \mathrm{x} = -\lambda \\ \mathrm{y} = 1 \\ \mathrm{z} = 2 - \lambda \end{array}$

18. Determinar a equação geral do plano que contém o ponto e a reta dados a seguir:

(a) A = (3, 1, -2) e r: $\begin{array}{l} \mathrm{x} = \lambda \\ \mathrm{y} = 2 - \lambda \\ \mathrm{z} = 3 + 2\lambda \end{array}$

(b) A = (3, -2, -1) e r: $\begin{array}{l} \mathrm{x + 2y + z - 1 = 0} \\ \mathrm{2x + y - z + 7 = 0} \end{array}$

(c) A = (1, 2, 1) e **r** é a reta intersecção do plano Π: x - 2y + z - 3 = 0 com o plano yOz.

(d) A = (1, -1, 2) e o eixo dos **z**.

(e) A = (1, -1, 2) e o eixo dos **x**.

19. Dada a equação geral do plano Π: 3x - 2y - z - 6 = 0, determinar um sistema de equações paramétricas de Π.

20. Estabelecer equações paramétricas para o plano determinado pelos pontos A = (1, 1, 0), B = (2, 1, 3) e C = (-1, -2, 4).

Fixemos um sistema **ortogonal** de coordenadas cartesianas.

21. Obtenha um vetor normal ao plano Π nos seguintes casos:

(a) Π passa pelos pontos A = (1, 1, 1), B = (1, 0, 1) e C = (1, 2, 3)

(b) Π tem equações paramétricas $\begin{array}{l} x = 1 + 2\alpha \\ y = 2 - \alpha + \beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{array} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(c) Π tem equação geral x - 2y + 4z + 1 = 0.

22. Dê uma equação geral do plano Π que passa pelo ponto P = (1, 1, 2) e é paralelo a Π_1: x - y + 2z + 1 = 0.

23. Dê uma equação geral do plano Π que passa pela origem e é perpendicular à reta que passa por A = (1, 1, 1) e B = (2, 1, -1).

24. Dê uma equação geral do plano Π que passa pelo ponto P = (1, 0, 1) e é perpendicular à reta r: X = (0, 0, 1) + λ(1, 2, -1).

25. Decomponha o vetor $\vec{v} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ paralela e ortogonalmente ao plano $\Pi : \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = -2 \\ z = \lambda - \mu \end{array}$

26. Escreva uma equação vetorial da reta que passa por A = (1, 2, 3) e é perpendicular ao plano Π: 2x + y - z = 2.

27. Escreva equações paramétricas da reta intersecção dos planos

$$\Pi_1 : \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -2 \\ z = -\lambda - \mu \end{array} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \Pi_2 : \begin{array}{l} x = 1 + \alpha - \beta \\ y = 2\alpha + \beta \\ z = 3 - \beta \end{array} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

28. Escreva equações paramétricas da reta que passa pela origem e é perpendicular ao plano Π_1: X = (1, 0, 0) + λ(-1, 1, 1) + μ(-1, 1, 0).

RESPOSTAS

1. (a) Π : X = (1, 1, 0) + λ (0, 2, 1) + μ (2, 1, 0) $\quad \Pi : \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = 1 + 2\lambda + \mu \\ z = \lambda \end{cases}, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$

   (b) Π : X = (1, 0, 1) + λ (1, -1, 2) + μ (1, 1, 1) $\quad \Pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -\lambda + \mu \\ z = 1 + 2\lambda + \mu \end{cases}, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$

   (c) Π : X = (1, 0, 1) + λ (1, 1, -2) + μ (1, 2, -1) $\quad \Pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = 1 - 2\lambda - \mu \end{cases}, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$

   (d) os pontos A, B e C determinam infinitos planos

2. (a) sim (b) sim (c) não (d) sim

3. (11, 7, 4) + (-10, -5, 0)

4. A = (-2, -4, -1), B = (4, 5, 2), X = (4, 5, 2) + λ (2, 3, 1), $\lambda \in \mathbb{R}$

5. $xOy : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases} \quad xOz : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \mu \end{cases} \quad yOz : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$

6. $\begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 1 + 2\lambda + \mu \\ z = 2 - \lambda \end{cases}, \quad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$

7. (a) x - 2y + 4z + 1 = 0 (c) 3x - y + z - 4 = 0

   (b) 3x - y - 2z - 1 = 0 (d) plano não determinado

8. (a) x - y - 1 = 0 (b) 8x - 4y - z + 4 = 0

9. (a) 2x - y - 3z + 7 = 0 (b) y - 2 = 0

10. (a) Π_1 : x + y + z - 1 = 0 $\quad \Pi_2$: x - y - z = 0 $\quad \Pi_3$: x + 2y - z - 2= 0

    (b) P = $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{6})$

11. (b) Π : 8x + 6y - z - 39 = 0

12. (a) sim (b) não (c) não

13. (a) Sim, P = (-2, 2, -7), Π : 17x - 7y - 6z + 6 = 0

(b) Sim, $P = (-2, 6, -6)$, $\Pi : 4x - y - 3z - 4 = 0$

14. (a) (4, 3, -2) (b) (1, 9, 2) (c) k = -2 (d) (0, -2, -1)

15. (a) $2x - 3y - z + d = 0$ (e) $z + 3 = 0$

(b) $3x + 2y - 6 = 0$ (f) $4x + 5y + 3z - 6 = 0$

(c) $y - 2z + 4 = 0$ (g) $x - 2y = 0$

(d) $x + 2z - 2 = 0$ (h) $z - 3 = 0$

16. $\alpha = -3$

17. (a) $5x - 4y - 3z - 6 = 0$ (c) $2x + 2y + z + 2 = 0$

(b) $5x - 2y + 4z - 21 = 0$ (d) $2x + y - 2z + 3 = 0$

18. (a) $7x + 11y + 2z - 28 = 0$ (d) $x + y = 0$

(b) $2x + 3y + z + 1 = 0$ (e) $2y + z = 0$

(c) $6x - 2y + z - 3 = 0$

19. $\begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda + 3\mu \end{cases}$, $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$

20. $\begin{cases} x = 1 + \lambda + 3\mu \\ y = 1 + 3\mu \\ z = 3\lambda - \mu \end{cases}$, $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$

21. (a) $\vec{n} = (1, 0, 0)$ (b) $\vec{n} = (1, 4, 2)$ (c) $\vec{n} = (1, -2, 4)$

22. $\Pi : x - y + 2z - 4 = 0$

23. $\Pi : x - 2z = 0$

24. $\Pi : x + 2y - z = 0$

25. $\vec{w}_1 = (-3, 0, 5)$ e $\vec{w}_2 = (0, 4, 0)$

26. $r : X = (1, 2, 3)\ \lambda\ (2, 1, -1),\ \lambda \in \mathbb{R}$

27. $r : \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = -2 \\ z = 5 + 2\lambda \end{cases}$, $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$

28. $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$, $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$