Universidade Estadual Paulista-"Júlio de Mesquita Filho"
Departamento de Matemática-FEIS-UNESP
Lista de Álgebra Linear - 2017
Prof. Edson Donizete de Carvalho

1) Sejam V e W espaços vetorias, onde 0_V e 0_W denotam os vetores nulos dos espaços vetorias V e W, respectivamente.

(i) Mostre que se $T : V \to W$ uma transformação linear então $T(0_V) = 0_W$.

(ii) Mostre que se $T : V \to W$ é uma função tal que $T(0_V) \neq 0_W$ então T não é uma transformação linear.

(iii) Se $T : V \to W$ é uma função tal que $T(0_V) = 0_W$, podemos afirmar que T é uma transformação linear? Justifique sua resposta.

2) Sejam V um espaço vetorial.

(i) Mostre que a aplicação $T : V \to V$ dada por $T(v) = 0, \ \forall v \in V$ é uma transformação linear.

(ii) Mostre que a aplicação $T : V \to V$ dada por $T(v) = v, \ \forall v \in V$ é uma transformação linear.

3) Seja $T : V \to V$ um operador linear e seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V.

(i) Se $T(v_i) = v_i$ para todo i, mostre que $T = I$ é o operador identidade, isto é, $I(v) = v \ \forall v \in V$.

(ii) Se $T(v_i) = 0$ para todo i, mostre que $T = 0$ é a transformação nula.

4) Seja $T : V \to W$ uma tranformação linear. Dê uma demostração cuidadosa do fato $T(v - v_1) = T(v) - T(v_1)$ para todo v, v_1 em V.

5) Seja $\mathbb{P}_n$ (o espaço vetorial formado pelos polinômios de grau $\leq \ n$) e $D : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ a aplicação derivada dada por $D(f) = f'$, onde f' denota a derivada do polinômio f. Mostre que D é uma aplicação linear.

6) Uma tranformação linear $T : V \to \mathbb{R}$ é chamada de funcioanal linear. Se V é o espaço vetorial formado pelas funções integráveis em $\mathbb{F}[0, 1]$, mostre que $T(f) = \int_0^1 f(t)dt$ define um funcional linear.

7) Suponha que $T : V \to W$ seja uma tranformação linear. Se $T(v_1 + 2v_2) = w_1$ e $T(3v_1 - 5v_2) = w_2$, ache $T(v_1)$ e $T(v_2)$ em termos de w_1 e w_2.

8) (i) Mostre o polinômio $6 - 11x - 3x^2$ é escrito como combinação linear dos polinômios $3 - 5x$ e $1 - x + 2x^2$.

(ii) Sabendo que $T(3 - 5x) = 2$ e que $T(1 - x + 2x^2) = 1 + x$ e que $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ é uma transformação linear. Então, encontre $T(6 - 11x - 3x^2)$.

9) Seja $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \mathbb{R}^m$ e A uma matriz real qualquer de ordem $m \times n$. Definamos a transformação $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por $T_A(v) = A.v$ onde v denota o vetor coluna dada por v

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

Mostre que T_A é uma tranformação linear.

Observação 1: O importante resultado que o Exercício anterior estabelece é de que toda matriz real de ordem $m \times n$ está associado a uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$.

10) A implicação inversa do último Exercício e da Observação 1 é verdadeira? Isto é, uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ pode ser representada por uma matriz de ordem $m \times n$. Justifique sua resposta.

11) Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere a transformação dada por $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Mostre T_A é uma transformação linear.

12) Considere as transformações no plano dadas por expansão, rotação, translação, reflexaçao, translação. Nos próximos itens encontre a matriz de 2×2 assoaciada a T, determine em cada caso se T é uma transformações linear e represente geometricamente.

(i) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(v) = \alpha.v \ \ \forall v \in \mathbb{R}^2$, onde α é um número real positivo.

(ii)$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x, -y)$.

(iii) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (-x, -y)$.

(iv)$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + \alpha y, y) \ \ \alpha \in \mathbb{R}$.

(iv)$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + a, y + b)$, onde $a, b \in \mathbb{R}$.

13) Sejam V e W espaços vetorias e $T : V \to W$ uma transformação linear.

(i) Mostre que $Ker(T)$ é um subespaço vetorial de V .

(ii) Mostre $Im(T)$ é um subespaço vetorial de W.

14) Sejam V e W espaços vetorias e $T : V \to W$ uma transformação linear. Pelo Exercício anterior, sabemos que $Ker(T)$ é um subespaços vetorial de V. Então a partir de uma base dada pelo conjunto $v_1, \ldots, v_n$ do $Ker(T)$, podemos complementar este conjunto de modo a obter uma base de V dada por $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots w_m\}$. Nestas condições resolva os seguintes itens:

(i) Mostre que $\{T(w_1), \dots T(w_m)\}$ é uma base da $Im(T)$.

(ii) Mostre que $dim\ \ Ker(T) + dim\ \ Im(T) = dimV$.

(iii) Mostre que se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de V e se T é injetora e a $dimV = dimW$ então $\{T(v_1), \dots T(v_n)\}$ é uma base de W.(”T leva base em base”).

15) Considerando a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x - 2y, z, x + y)$, mostre que conjunto $\{(1, 0, 1), (-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, sabendo que $(1, 0, 1) = T(1, 0, 0), (-2, 0, 1) = T(0, 1, 0)$ e $(0, 1, 0) = T(0, 0, 1)$.

16) Dada uma transformação linear $T : V \to W$, dizemos que T é um isomorfismo caso T seja ao mesmo tempo injetora e sobrejetora. Neste caso, também dizemos que os espaços vetorias V e W são isomorfos e denotamos por $V \cong W$.

(i) Seja V um espaço vetorial mostre $V \cong V$.

(ii) Mostre $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

(iii) Mostre que a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x - 2y, z, x + y)$ é um isomorfismo.

(iv) Calcule a inversa T^{-1} do item (iii) e mostre que T^{-1} é um isomorfismo.

(v) Se $T : V \to W$ é um isomorfismo, sempre podemos afirmar que existe T^{-1} e que ela também é um isomorfismo? Justifique sua resposta.

17) Seja A a matriz associada a transformação linear T dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Podemos afirmar que T é um isomorfismo? Justifique a resposta.

18) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma reflexão, através da reta $y = 3x$.

(i) Encontre $T(x, y)$.

(ii) Encontre a base β de $\mathbb{R}^2$ tal que $[T]^\beta_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

19) Encontre a matriz de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + y, x - z)$ com relação às bases conônicas de $\mathbb{R}^3$.

20) Sejam V e W espaços vetorias de dimensão finita com bases α e β, respctivamente. Se $T : V \to W$ é a transformação nula então $[T]^\beta_\alpha = 0$.

21) (Aplicação em Teoria de Códigos)

(i) A partir de um corpo finito $\mathbb{F}_q$ (corpo com q elementos), defini-se um código linear $\mathcal{C}$ como sendo um subespaço vetorial de $\mathbb{F}_q^n$. Os elementos de $\mathcal{C}$ são formados por n-uplas, e são chamados de *palavras-códigos*.

(ii) Dada a transformação linear $T : \mathbb{F}_2^6 \to \mathbb{F}_2^3$ dada por
$T(x_1, \dots, x_6) = (x_1 + x_4, x_1 + x_2 + x_3 + x_5, x_1 + x_2 + x_6)$ defina $\mathcal{C}$ como sendo o núcleo de T. Decida se os vetores $(1, 0, 0, 1, 1, 1)$ e $(0, 1, 0, 1, 0, 1)$ pertencem ou não a $\mathcal{C}$.