Capítulo 5

VETORES

5.1 Reta Orientada - Eixos

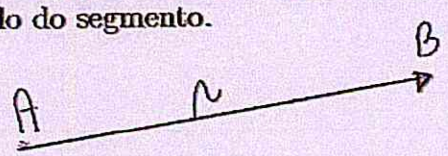
Uma reta r é dita **orientada** quando nela fixamos um sentido de percurso, considerado **positivo** e indicado por uma seta:

O sentido oposto ao fixado é dito **negativo** e uma reta orientada é chamada **eixo**.

5.2 Segmento Orientado

Um segmento orientado é um par ordenado de pontos (A, B), o primeiro chamado de **origem** do segmento e o segundo chamado de **extremidade** do segmento.

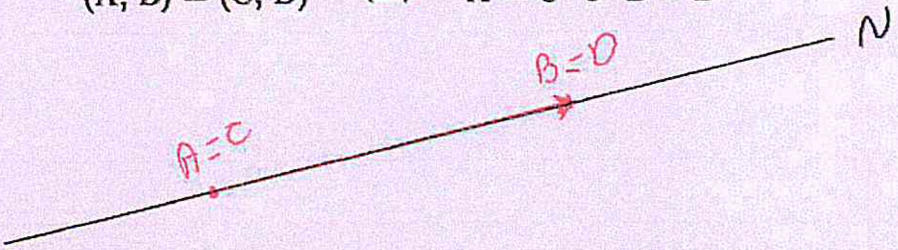
Representação Geométrica: os pontos $A \neq B$ determinam uma única reta **r** que os contém. O segmento orientado (A, B) é representado geometricamente por uma seta que caracteriza visualmente o sentido do segmento.



ROSELI2016

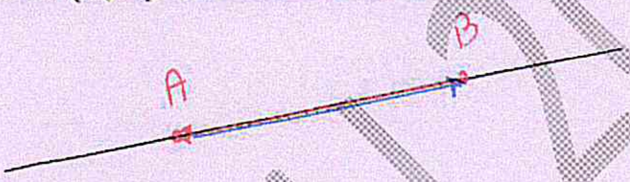
Segmentos Orientados Iguais: Dois segmentos orientados (A, B) e (C, D) são iguais se, e somente se, suas origens coincidem e suas extremidades coincidem; isto é,

$$(A, B) = (C, D) \iff A = C \text{ e } B = D$$



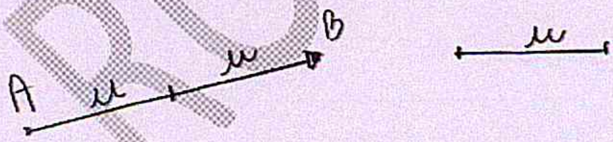
Segmento Orientado Nulo: é um segmento orientado cuja extremidade coincide com a origem; isto é, é um segmento orientado do tipo (A, A).

Segmento Orientado Oposto: se (A, B) é um segmento orientado, o segmento orientado (B, A) é o **oposto** de (A, B). Geometricamente:



Medida de um Segmento: Fixada uma unidade **u** de comprimento, a cada segmento orientado (A, B) associamos um número real **não negativo**, que é a medida do segmento geométrico AB em relação à unidade fixada. Essa medida é o **comprimento** (ou **módulo**) do segmento orientado (A, B) e é indicada por $\overline{AB}$.

Dessa forma, o comprimento do segmento orientado (A, B) (figura abaixo) é 2 uc (uc = unidades de comprimento); isto é, $\overline{AB} = 2$ uc.



<u>Observe que:</u>

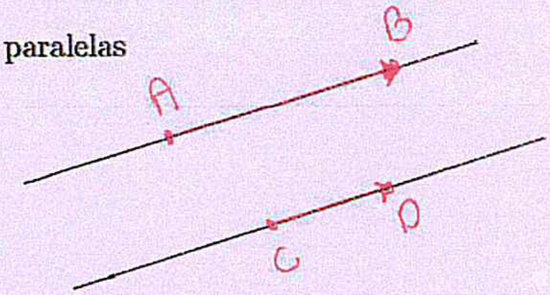
(i) os segmentos nulos têm comprimento zero.

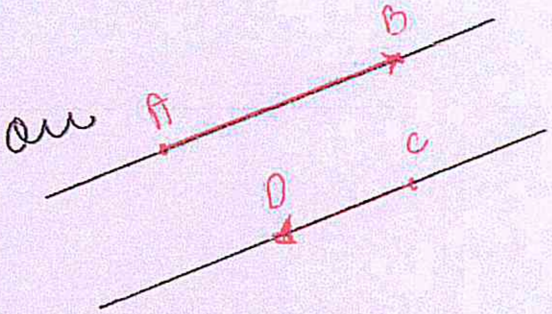
(ii) $\overline{AB} = \overline{BA}$.

(iii) os segmentos orientados (A, B) e (C, D) têm o mesmo comprimento se, e somente se, os segmentos geométricos AB e CD têm o mesmo comprimento.

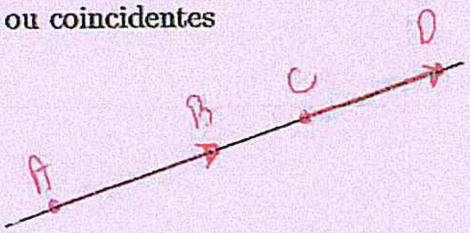
Direção: Dois segmentos orientados **não nulos** (A, B) e (C, D) têm a mesma direção se, e somente se, as retas suportes desses segmentos são

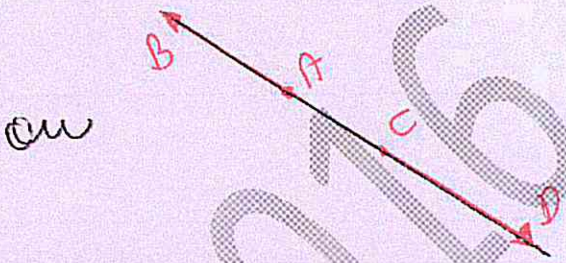
paralelas





ou coincidentes

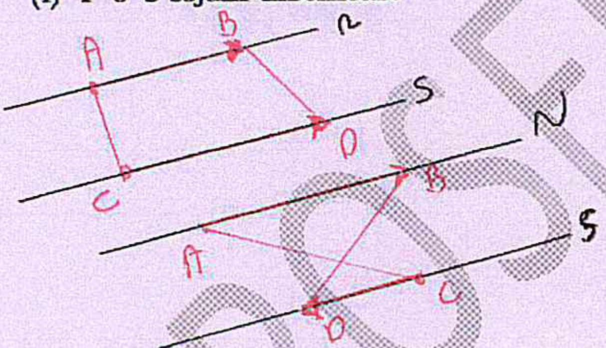




Nesses casos, os segemntos orientados (A, B) e (C, D) são ditos **paralelos**.

Sentido: Sejam r a reta suporte do segmento orientado (A, B) e s a reta suporte do segmento orientado (C, D). Suponha que (A, B) e (C, D) tenham a <u>mesma</u> direção e que:

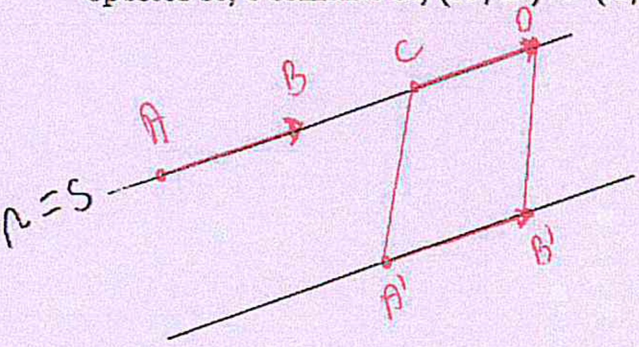
(i) **r** e **s** sejam **distintas**:

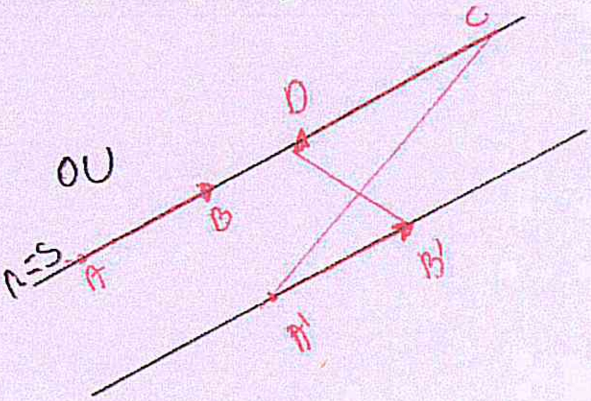


- Se $AC \cap BD = \emptyset$, dizemos que (A, B) e (C, D) têm mesmo sentido.
- Se $AC \cap BD \neq \emptyset$, dizemos que (A, B) e (C, D) têm sentidos opostos.

(ii) **r** e **s** sejam **coincidentes**:

Nesse caso, consideramos o segmento orientado (A′, B′) tal que $A' \notin r$ e (A′, B′) tem a mesma direção e o mesmo sentido de (A, B). Então: (A, B) e (C, D) têm mesmo sentido se, e somente se, (A′, B′) e (C, D) têm mesmo sentido (e, portanto, (A, B) e (C, D) têm sentidos opostos se, e somente se, (A′, B′) e (C, D) têm sentidos opostos).





PROSEL 2016

<u>Observe que:</u>

(i) Só é possível comparar os sentidos de dois segmentos que têm a **mesma direção**;

(ii) Dois segmentos orientados opostos têm sentidos contrários.

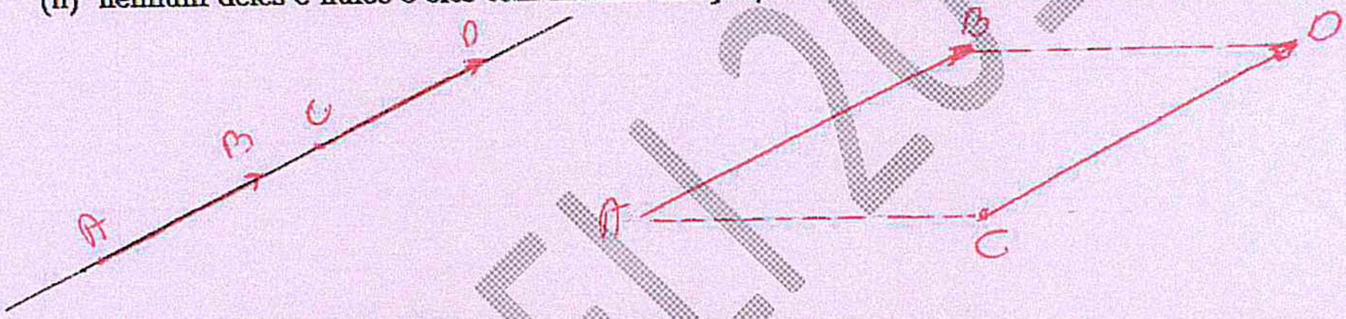
5.3 Segmentos Equipolentes

Dois segmentos orientados (A, B) e (C, D) são ditos **equipolentes** se, e somente se, ocorre um dos seguintes casos:

(i) ambos são nulos

ou

(ii) nenhum deles é nulos e eles têm mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento.



Se os segmentos AB e CD **não pertencem** à mesma reta, para que (A, B) seja equipolente a (C, D) é necessário que AB // CD, ou seja, ABCD deve ser um paralelogramo.

<u>**Observe que:**</u>

(i) Dois segmentos orientados nulos são sempre equipolentes.

(ii) A equipolência dos segmentos (A, B) e (C, D) é denotada por (A, B) $\sim$ (C, D).

Para todos segmentos orientados (A, B), (C, D) e (E, F), a relação de equipolência de segmentos satisfaz às seguintes propriedades:

P_1. (A, B) $\sim$ (A, B) (propriedade <u>reflexiva</u>).

P_2. Se (A, B) $\sim$ (C, D) então (C, D) $\sim$ (A, B) (propriedade <u>simétrica</u>).

P_3. Se (A, B) $\sim$ (C, D) e (C, D) $\sim$ (E,F), então (A, B) $\sim$ (E, F) (propriedade <u>transitiva</u>).

ROSELI 2016

Definição: Fixado um segmento orientado (A, B), chama-se classe de equipolência de (A, B) ao conjunto de todos os segmentos orientados que têm mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento que (A, B). Em outras palavras, a classe de equipolência de (A, B) é o conjunto de todos os segmentos orientados que são equipolentes a (A, B).

Note que:

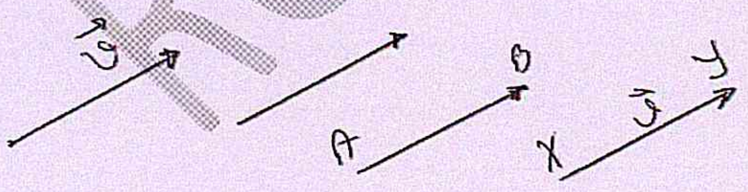
- a propriedade reflexiva garante que (A, B) pertence à classe de equipolência de (A, B);
- a propriedade simétrica garante que se (C, D) pertence à classe de equipolência de (A, B), então (A, B) pertence à classe de equipolência de (C, D) e portanto essas duas classes coincidem;
- a propriedade transitiva garante que todos os segmentos orientados pertencentes à classe de equipolência de (A, B) são equipolentes entre si.

Nomenclatura: Dizemos que o segmento orientado (A, B) é um representante da classe de equipolência de (A, B). Note que qualquer elemento da classe de equipolência de (A, B) pode ser representante da classe.

5.4 Vetor

Vetor determinado pelo segmento orientado (A, B) é a classe de equipolência de (A, B); ou seja, é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a (A, B). Se indicarmos esse conjunto por por $\vec{v}$, podemos escrever:

$$\vec{v} = \{(X, Y) : (X, Y) \sim (A, B)\}$$



Notações: o vetor determinado por (A, B) é indicado por $\overrightarrow{AB}$ ou por $\vec{v}$ e V^3 indica o conjunto de todos os vetores.

ROSELI 2016

Observe que:

(i) um mesmo vetor $\overrightarrow{AB}$ é determinado por uma infinidade de segmentos orientados, todos equipolentes entre si, que são chamados **representantes** desse vetor. Ou seja, um segmento orientado determina um conjunto (o vetor) e qualquer representante determina o mesmo vetor.

(ii) cada ponto do espaço pode ser considerado como origem de um representante de um vetor. Assim, fixado um ponto O do espaço, se considerarmos todos os segmentos orientados com origem em O, estaremos caracterizando, através de representantes, todos os vetores do espaço. Mas: cada um desses segmentos é representante de um único vetor e portanto todos os vetores do espaço estão representados nesse conjunto.

(iii) as características de um vetor $\vec{v}$ são as mesmas de qualquer um de seus representantes, isto é: o **módulo, a direção** e o **sentido** do vetor são o módulo, a direção e o sentido de qualquer um de seus representantes.

Definição: Seja $\vec{u} \in V^3$ arbitrário. Chama-se

(i) **direção de** $\vec{u}$ a direção de qualquer representante de $\vec{u}$;

(ii) **sentido de** $\vec{u}$ o sentido de qualquer representante de $\vec{u}$;

(iii) **norma** (ou módulo ou comprimento) **de** $\vec{u}$ ao comprimento de qualquer representante de $\vec{u}$ ($\|\vec{u}\|$ denota o módulo do vetor $\vec{u}$).

Definições:

(1) Chama-se **vetor nulo** o vetor cujo representante é o segmento orientado nulo.
Notação: $\vec{0}$

(2) • Os vetores **não nulos** $\vec{x}$ e $\vec{y}$ são **paralelos** se um representante de $\vec{x}$ é paralelo a um representante de $\vec{y}$. Notação: $\vec{x} \,//\, \vec{y}$

• Se $\vec{x} \,//\, \vec{y}$, dizemos que $\vec{x}$ e $\vec{y}$ têm mesmo sentido (respectivamente, sentidos opostos) se um representante de $\vec{x}$ e um representante de $\vec{y}$ têm mesmo sentido (respectivamente, sentidos opostos).

• O vetor nulo é considerado paralelo a qualquer vetor.

(3) • Um vetor $\vec{x}$ tal que $\|\vec{x}\| = 1$ é chamado de **vetor unitário**.

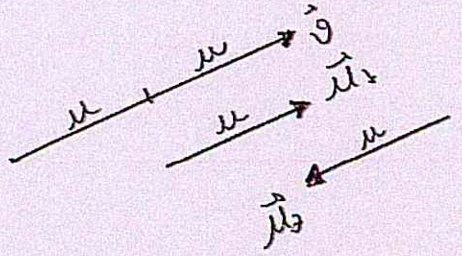
(4) O vetor $\overrightarrow{BA}$ é dito **oposto de** $\overrightarrow{AB}$ (assim como $-\vec{x}$ é o oposto de $\vec{x}$).
Notação: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

ROSELI 2016

Mais algumas definições que serão úteis:

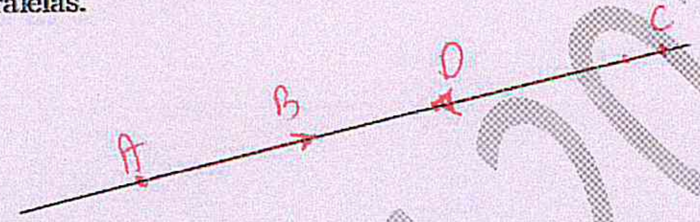
Versor de um vetor **não nulo** $\vec{v}$ é o vetor **unitário** de mesma direção e mesmo sentido que $\vec{v}$.

Por exemplo, seja $\vec{v}$ um vetor tal que $\|\vec{v}\| = 2$.

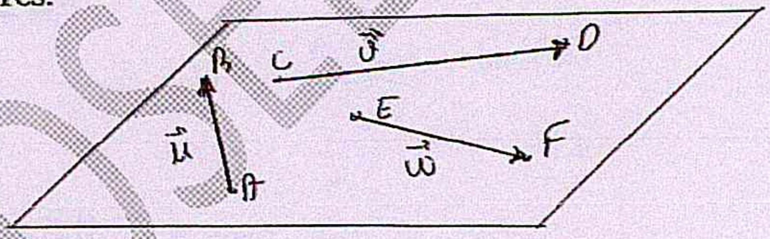


Os vetores $\vec{u_1}$ e $\vec{u_2}$ são unitários, pois ambos têm módulo igual a 1. Além disso, $\vec{u_1}$ e $\vec{u_2}$ têm a mesma direção de $\vec{v}$, mas apenas $\vec{u_1}$ tem o mesmo sentido de $\vec{v}$ e portanto apenas $\vec{u_1}$ é versor de $\vec{v}$.

Vetores Colineares: Os vetores **não nulos** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **colineares** se tiverem a mesma direção. Em outras palavras, se tiverem representantes (A, B) e (C, D) pertencentes a uma mesma reta ou a retas paralelas.



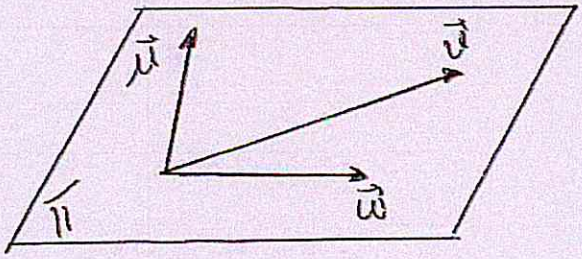
Vetores Coplanares: Se os vetores **não nulos** $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_n}$ $(n \geq 2)$ possuem representantes (respectivamente) (A_1,B_1), (A_2,B_2), $\cdots$, (A_n, B_n) pertencentes a um mesmo plano Π, dizemos que eles são **coplanares**.

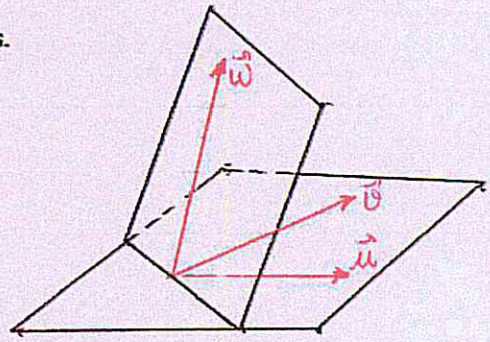


<u>Observe que:</u>

(i) dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ quaisquer são sempre coplanares. Basta fixar um ponto O do espaço e com origem em O considerar um representante de $\vec{u}$ e um representante de $\vec{v}$ pertencentes a um plano Π passando por O.

(ii) três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ podem ou não ser coplanares.



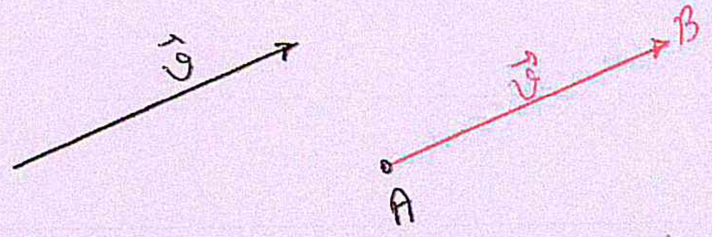


ROSELI 2016

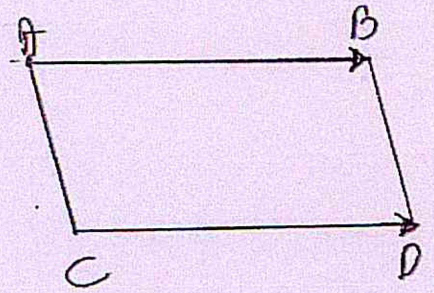
Propriedades:

(1) Dados um ponto **A** e um vetor $\vec{v}$, existe um único segmento orientado (A, B) (isto é, com origem em **A**) que é representante de $\vec{v}$.

(transporte de vetores)



(2) Sejam $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, não nulos, com (A, B) e (C, D) em retas suportes paralelas **distintas**.



Então:

(A, C) $\sim$ (B, D)

e, portanto,

ABCD é um paralelogramo.

5.5 Operações com Vetores

Nesta seção, definiremos duas operações envolvendo vetores, a adição e a multiplicação por escalar, e estudaremos suas propriedades. Para isso, precisaremos da seguinte definição:

Igualdade de vetores: Dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais se, e somente se, (A, B) $\sim$ (C, D).

Vamos definir uma operação, agora, a operação de **adição de vetores**

$$\begin{aligned} + : V^3 \times V^3 &\longrightarrow V^3 \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longmapsto \vec{u} + \vec{v} \end{aligned}$$

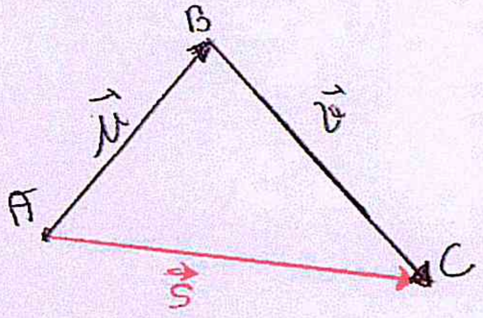
como segue: dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, consideramos um representante (**A, B**) **qualquer** de $\vec{u}$ e **o único** representante (**B, C**) de $\vec{v}$. Os pontos A e C determinam um vetor $\vec{s}$ que é, por definição, a **soma** dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$; isto é

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$$

ROSELI 2016

ou, de outra forma

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$



Propriedades da Adição de Vetores:

A adição de vetores satisfaz às seguintes propriedades, para todos $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ $\in V^3$:

A_1. Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

A_2. Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

A_3. Existência de Elemento Neutro: existe um único vetor $\vec{0}$ tal que para todo vetor $\vec{v}$, vale:

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$$

A_4. Existência de Elemento Oposto: dado um vetor $\vec{v}$, existe um único vetor, denotado por $-\vec{v}$ e chamado de **oposto de** $\vec{v}$, tal que:

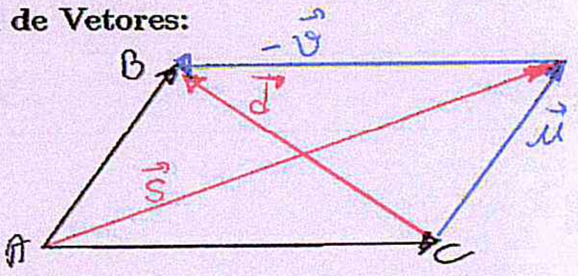
$$\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$$

Diferença de Vetores:

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, chamamos de **diferença** de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e denotamos por $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$ ao vetor $\vec{u} + (-\vec{v})$.

Regra do Paralelogramo para a Soma e a Diferença de Vetores:

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, consideremos seus representantes com mesma origem A, isto é, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Seja D um ponto tal que ACDB é um paralelogramo, como na figura ao lado:



Então, (C, D) é um representante de $\vec{u}$ e (D, B) é um representante de $-\vec{v}$; isto é, $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$ e $-\vec{v} = \overrightarrow{DB}$.

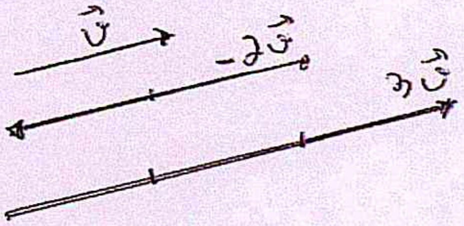
Dessa forma,

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AD} \qquad \text{e} \qquad \vec{d} = \vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{CB}$$

ROSELI 2016

Multiplicação de um Vetor por um Número Real:

Dados um vetor $\vec{v}$ e um número real α, chama-se **produto do número real α pelo vetor** $\vec{v}$ ao **vetor** $\vec{p} = \alpha\vec{v}$ tal que:



(i) $\vec{p} = \vec{0}$, se $\vec{v} = \vec{0}$ ou se $\alpha = 0$

ou

(ii) o vetor $\vec{p}$ é caracterizado por:

<u>módulo:</u> $\|\vec{p}\| = \|\alpha\vec{v}\| = |\,\alpha\,|\,\|\vec{v}\|$;

<u>direção:</u> $\vec{p}$ tem a mesma direção de $\vec{v}$;

<u>sentido:</u> $\vec{p}$ tem o **mesmo sentido** de $\vec{v}$, se $\alpha > 0$ e $\vec{p}$ tem o **sentido oposto** ao de $\vec{v}$, se $\alpha < 0$

<u>Observe que:</u>

(i) se $\alpha = 0$ ou se $\vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha\vec{v} = \vec{0}$;

(ii) se $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, fazendo o número real α percorrer todo o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, obteremos <u>todos os vetores colineares a $\vec{v}$</u> e, portanto, colineares entre si (isto é: qualquer um dos vetores obtidos é um múltiplo escalar (real) do outro). Reciprocamente, dados dois vetores colineares $\vec{u}$ e $\vec{v}$, existe um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$;

(iii) o versor de um vetor $\vec{v} \neq 0$ é o vetor unitário $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$

<u>De fato:</u> É claro que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção, uma vez que $\vec{v}$ é um múltiplo escalar de $\vec{u}$ (basta ver que $\vec{v} = \|\vec{v}\|\vec{u}$). Além disso, o número real $\|\vec{v}\|$ é positivo e, portanto, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm o mesmo sentido. Finalmente:

$$\|\vec{u}\| = \left\|\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right\| = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = 1$$

Propriedades da Multiplicação por um Número Real

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores arbitrários e α e β dois números reais quaisquer. Valem as seguintes propriededes:

M_1. Associativa: $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$

M_2. Distributiva em relação à adição de escalares: $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$

M_3. Distributiva em relação à adição de vetores: $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

M_4. Identidade: $1.\vec{v} = \vec{v}$

ROSELI 2016

Adição de um Ponto com um Vetor:

Dados um ponto P e um vetor $\vec{v}$, chama-se **soma do ponto P com o vetor** $\vec{v}$ o **único** ponto Q tal que $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$; ou seja

$$Q = P + \vec{v} \iff \overrightarrow{PQ} = \vec{v}$$

A soma do ponto P com o oposto do vetor $\vec{v}$ será indicada por **P** - $\vec{v}$; isto é $P + (-\vec{v}) = P - \vec{v}$.

Propriedades:

A adição de ponto com vetor satisfaz às seguintes propriedades, para todos P, Q $\in E^3$ e todos $\vec{u}$, $\vec{v} \in V^3$:

P$_1$. $P + \vec{0} = P$

P$_2$. $P + \vec{u} = P + \vec{v} \implies \vec{u} = \vec{v}$

P$_3$. $(P + \vec{u}) + \vec{v} = P + (\vec{u} + \vec{v})$

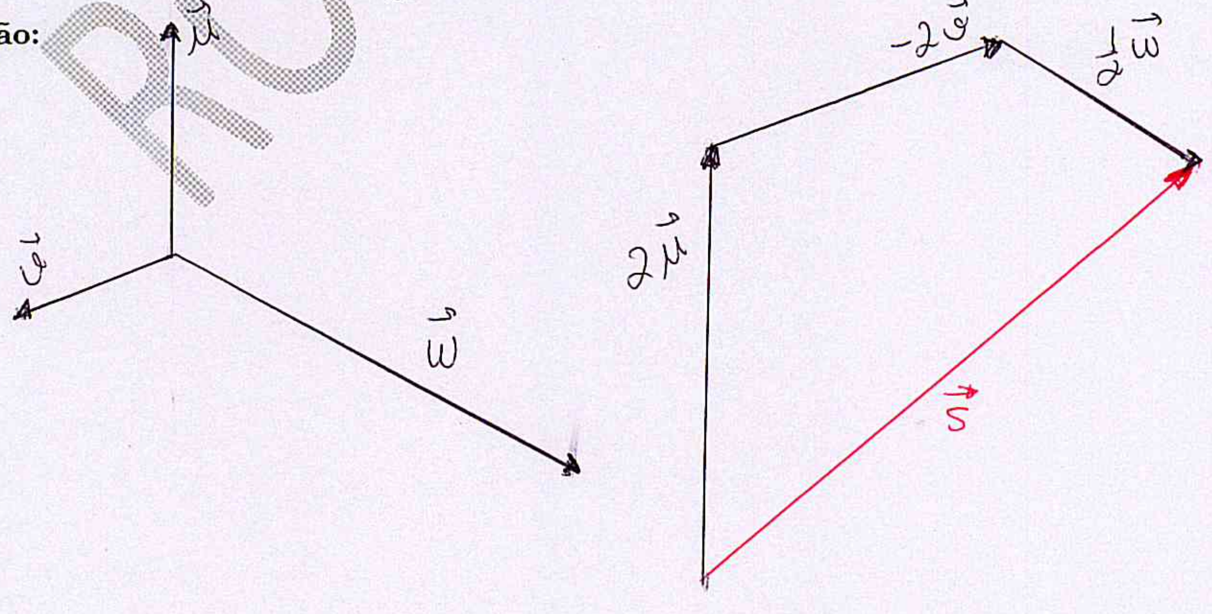
P$_4$. $P + \vec{u} = Q + \vec{u} \implies P = Q$

P$_5$. $(P - \vec{v}) + \vec{v} = P$

5.6 Problemas Resolvidos

1. Construa, a partir dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ dados na figura abaixo, o vetor $\vec{s} = 2\vec{u} - 2\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$

Solução:



ROSELI 2016

2. Considere o paralelogramo ABCD determinado pelos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Sejam M e N os respectivos pontos médios dos lados DC e AB do paralelogramo. Então:

(i) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} =$

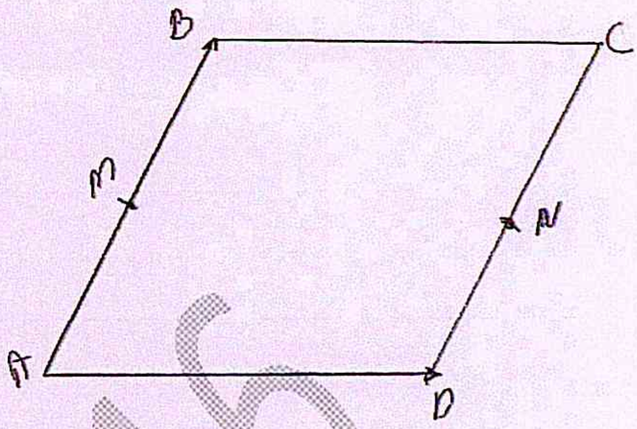
(ii) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} =$

(iii) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} =$

(iv) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BC} =$

(v) $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} =$

(vi) $\overrightarrow{BM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} =$



5.7 Problemas Propostos

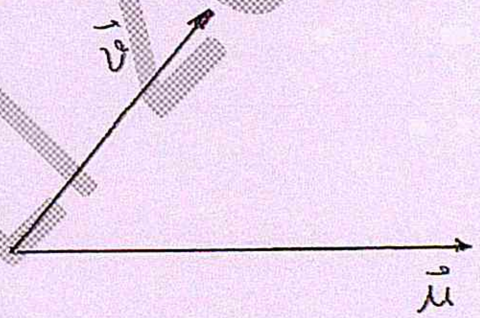
1. Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ como na figura abaixo, construa um representante do vetor:

(i) $\vec{u} - \vec{v}$

(ii) $\vec{v} - \vec{u}$

(iii) $-\vec{v} - 2\vec{u}$

(iv) $3\vec{u} - 2\vec{v}$

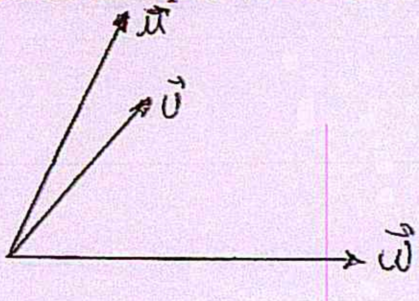


2. Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ como na figura abaixo, construa um representante do vetor:

(i) $4\vec{u} - 3\vec{v} - \vec{w}$

(ii) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

(iii) $2\vec{v} - (\vec{u} + \vec{w})$



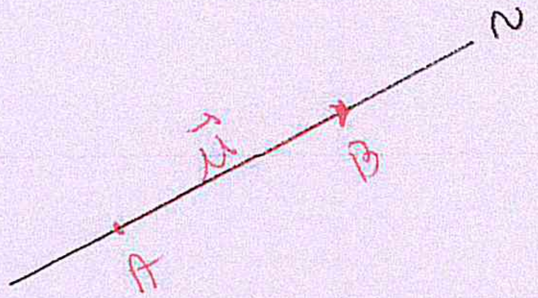
ROSELI2016

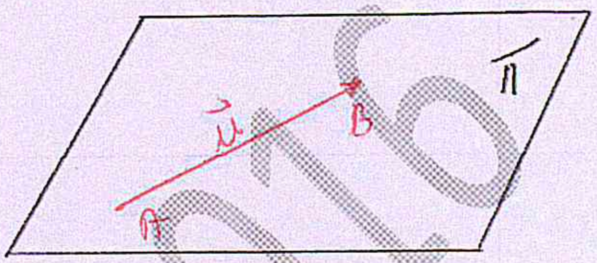
5.8 Dependência Linear:

Veremos, agora, a caracterização geométriuca de dependência e independência linear para conjuntos de vetores de V^3. Mais tarde, em Álgebra Linear, estudaremos a definição geral desses dois conceitos.

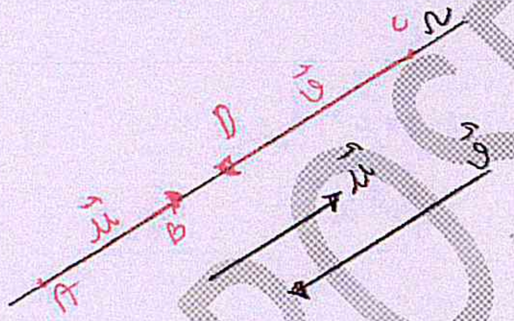
Observações:

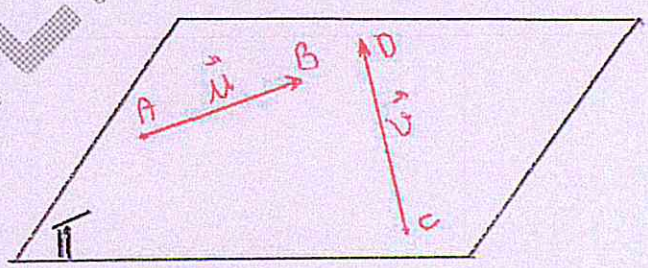
1. Dizemos que um vetor $\vec{u}$ é **paralelo** a uma reta **r** (respectivamente, a um plano Π) se existir um representante $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$ tal que AB está contido em **r** (respectivamente, em Π).



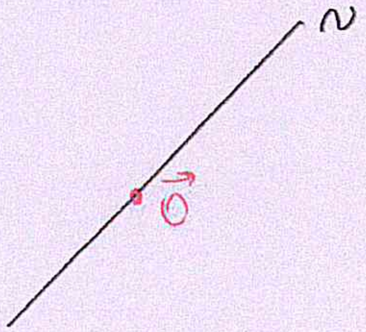


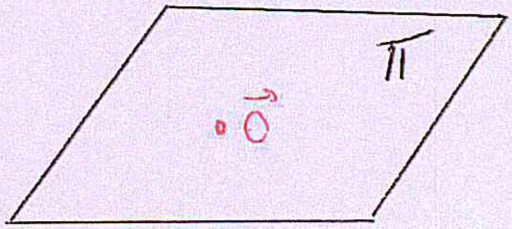
2. Dois vetores paralelos a uma mesma reta são paralelos entre si, mas dois vetores paralelos a um mesmo plano <u>não são necessariamente</u> paralelos entre si.





3. O vetor nulo é paralelo a qualquer reta e a qualquer plano.



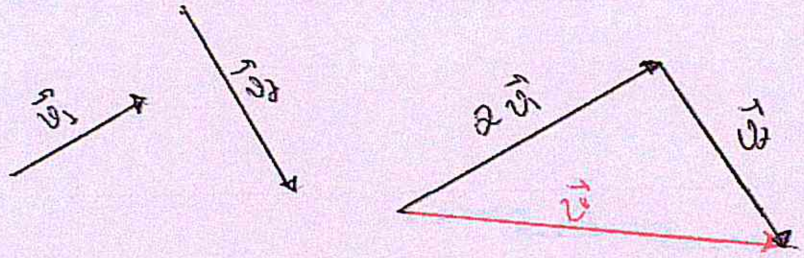


ROSELI 2016

Definição: Dizemos que um vetor $\vec{v} \in V^3$ é uma combinação linear (CL) dos vetores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$, ... , $\vec{v_n}$, $(n \geq 1)$ se existirem números reais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$\vec{v} = \alpha_1\,\vec{v_1} + \alpha_2\,\vec{v_2} + \ldots + \alpha_n\,\vec{v_n}\,, \qquad \text{para } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

Exemplo: O vetor $\vec{v} = 2\,\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ é uma CL dos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, com coeficientes **2** e **1**.



Definição: Dado o conjunto $L = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \ldots, \vec{v_n}\}$, $n \geq 1$, de vetores de V^3, dizemos que L é linearmente independente (**LI**) se uma igualdade do tipo

$$\alpha_1\,\vec{v_1} + \alpha_2\,\vec{v_2} + \ldots + \alpha_n\,\vec{v_n} = \vec{0}, \qquad \text{para } \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\ \mathbb{R},$$

só é possível se $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Caso contrário; isto é, se é possível uma igualdade como a acima **sem** que os números reais envolvidos sejam **TODOS** nulos, dizemos que o conjunto L é linearmente dependente (**LD**).

Caracterização Geométrica da Dependência e da Independência Linear:

Vamos, agora, descrever os conjuntos LI e LD, levando em conta o número **n** de vetores de L.

1º Caso: $\quad n = 1$

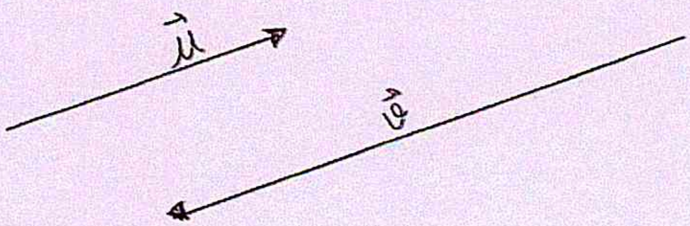
$L = \{\vec{v}\}$ é LD se existe $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha.\vec{v} = \vec{0}$, o que só é possível se $\vec{v} = \vec{0}$.

Ou seja, $L = \{\vec{0}\}$ é LD $\quad$ e $\quad L = \{\vec{v} \neq \vec{0}\}$ é LI.

2º Caso: $\quad n = 2$

$L = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LD se existirem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, **não simultaneamente nulos** satisfazendo a igualdade $\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} = \vec{0}$.

Podemos supor $\alpha \neq 0$. Então teremos $\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\,\vec{v}$; ou seja , $\vec{u} \,//\, \vec{v}$.

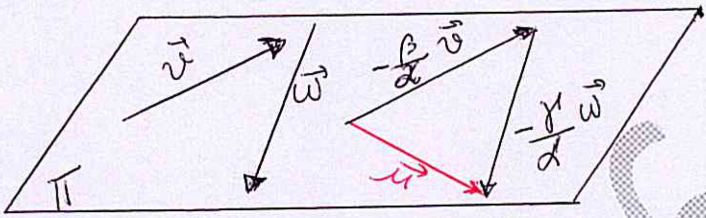


ROSELI 2016

$3^{\underline{o}}$ Caso: $\quad$ **n = 3**

L = {u⃗, v⃗, w⃗} é LD se existirem $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$, **não simultaneamente nulos** satisfazendo a igualdade $\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\vec{w} = \vec{0}$.

Podemos supor $\alpha \neq 0$. Então teremos $\vec{u} = -\frac{\beta}{\alpha}\,\vec{v} - \frac{\gamma}{\alpha}\,\vec{w}$. Assim, se Π é um plano que contém os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, então Π conterá também o vetor $\vec{u}$. Ou seja, L é LD se, e somente se, os vetores $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$ são coplanares.



$4^{\underline{o}}$ Caso: $\quad$ **$n \geq 4$**

Qualquer conjunto com **4 ou mais** elementos de V^3 é **LD**. Mais tarde veremos porquê.

Definição: Uma base no espaço V^3 é uma <u>terna ordenada</u> $B = (\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ de vetores **LI** (ou seja, $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ **não são** coplanares).

Observação: Uma base é uma terna **ordenada** de vetores, ou seja, a ordem em que aparecem os vetores é essencial. Mesmo assim, por abuso de notação, usaremos a notação de conjunto para base; isto é, denotaremos a base B por $B = \{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$

Prova-se que (mais tarde, em Álgebra Linear, faremos isso) se $B = \{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ é uma base de V^3, então todo vetor de V^3 se escreve, de modo único, como combinação linear de $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$. Em outras palavras, existem únicos escalares $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{v} = \alpha_1.\vec{e}_1 + \alpha_2.\vec{e}_2 + \alpha_3.\vec{e}_3$. Tais números reais são chamados de coordenadas de $\vec{v}$ em relação à base B.

Notação: Escreveremos $\vec{v} = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ $\quad$ ou $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ $\quad$ ou ainda $\quad [\vec{v}]_B = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$

Podemos operar vetores, bem como estudar a dependência e independência linear de vetores, usando suas coordenadas, como descrito a seguir.

Fixada uma base $B = \{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ de V^3, se $[\vec{u}]_B = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$, $[\vec{v}]_B = (\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3)$ e $[\vec{w}]_B = (\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então:

$$[\vec{u} + \vec{v}]_B = (\alpha_1 + \beta_1,\ \alpha_2 + \beta_2,\ \alpha_3 + \beta_3)$$

$$[\lambda.\vec{u}]_B = (\lambda.\alpha_1,\ \lambda.\alpha_2,\ \lambda.\alpha_3)$$

$$\vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ LD} \iff \text{as coordenadas de } \vec{u} \text{ e de } \vec{v} \text{ são proporcionais}$$

ROSELI 2016

$$\vec{u},\ \vec{v}\ \text{e}\ \vec{w}\ \text{são LD} \iff \Delta = \det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix} = 0$$

5.9 Problemas Resolvidos

1. Verifique que $L = \{\vec{v},\ -\vec{v}\}$ e se $L_1 = \{\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{u} - \frac{1}{2}\,\vec{v}\}$ são LD.

Solução: L é LD, uma vez que que $1.\vec{v} + (-1).\vec{v} = \vec{0}$; ou seja, é possível escrever o vetor nulo como combunação linear dos vetores de L, com escalares não todos nulos.

Da mesma forma. L_1 é LD, uma vez que $(-1).\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + 1\ .\ (\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}) = \vec{0}$; ou seja, é possível escrever o vetor nulo como combunação linear dos vetores de L_1, com escalares não todos nulos.

2. Verifique que: se $L = \{\vec{u},\ \vec{v}\}$ é LI, então $L_1 = \{\vec{u} + \vec{v},\ \vec{u} - \vec{v}\}$ também é LI.

Solução: Suponhamos que $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) + \beta(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}$, para $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Então

$$(\alpha + \beta).\vec{u} + (\alpha - \beta).\vec{v} = \vec{0}$$

Ou seja, o vetor nulo está escrito como combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o que só é possível se os escalares usados nessa combição linear forem todos iguais a zero. Assim, devemos ter $\alpha + \beta = 0$ e $\alpha - \beta = 0$, o que implica em $\alpha = \beta = 0$. Ou seja, L_1 é LI.

5.10 Problemas Propostos

Todos os vetores estão referidos a uma mesma base.

1. Dados os vetores $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ e $\vec{w} = (-1, -1, 4)$, ache as coordenadas de:

(a) $\vec{u} + \vec{v}$ **(b)** $\vec{u} - 2\,\vec{v}$ **(c)** $\vec{u} + 2\,\vec{v} - 3\,\vec{w}$

2. No Problema 1, verifique se $\vec{u}$ é combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

3. Escreva $\vec{t} = (4, 0, 13)$ como combinação linear dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ do Problema 1.

4. $\vec{u} = (1, -1, 3)$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ e $\vec{w} = (6, 9, 1)$?

ROSELI 2016

5. Decida se os vetores dados são LI ou LD:

(a) $\vec{u} = (0, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$

(b) $\vec{u} = (0, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, 0)$

(c) $\vec{u} = (0, 1, 1)$, $\vec{v} = (0, 3, 1)$

(d) $\vec{u} = (1, -3, 14)$, $\vec{v} = (\frac{1}{14}, -\frac{3}{14}, 1)$

(e) $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (200, 2, 1)$, $\vec{w} = (300, 1, 2)$

(f) $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, -7)$, $\vec{w} = (4, 5, -4)$

(g) $\vec{u} = \vec{0}$

(h) $\vec{u} = (1, 1, 1)$

6. Considere $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base de V^3. Decida se $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ é base de V^3, para
$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$

7. Calcule o valor de **m** para que os vetores abaixo sejam LD:

(a) $\vec{u} = (m, 1, m)$, $\vec{v} = (1, m, 1)$

(b) $\vec{u} = (1 - m^2, 1 - m, 0)$, $\vec{v} = (m, m, m)$

(c) $\vec{u} = (m, 1, m + 1)$, $\vec{v} = (1, 2, m)$, $\vec{w} = (1, 1, 1)$

(d) $\vec{u} = (m, 1, m + 1)$, $\vec{v} = (0, 1, m)$, $\vec{w} = (0, m, 2m)$

Respostas da seção 5.10

1. (3, 0, 6) (-3, -3, -3) (8, 4, -3) **2.** não é

3. $\vec{t} = \vec{u} + 2\,\vec{v} + \vec{w}$ **4.** não

5. LI LI LI LD LI LD LD LI

6. Não é

7. $m = \pm 1$ $M = 0$ ou $m = 1$ não existe m $m = 0$ ou $m = 2$

ROSELI 2016