Capítulo 12

DISTÂNCIAS

Neste capítulo, considere **fixado um sistema ortogonal** de coordenadas cartesianas.

12.1 Distância de Ponto a Ponto

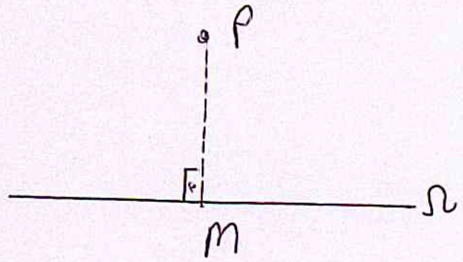
Sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$. A distância entre A e B é dada por:

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{BA}\| = \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)\| \qquad \text{e, portanto:}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

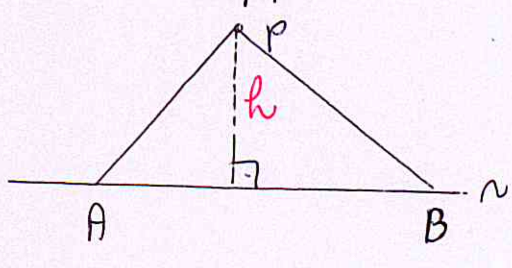
12.2 Distância de Ponto a Reta

Dados uma reta **r** e um ponto $P \notin r$, para calcular a distância $d(P, r)$ de P a **r**, podemos achar o ponto M que é a projeção ortogonal de P sobre **r** e daí calcular $\|\overrightarrow{PM}\|$, que é a distância procurada. Optaremos, entretanto, por um outro procedimento, que evita o cálculo de M. Sejam $A \neq B$ dois pontos **quaisquer** da reta **r**. A área **S** do triângulo ABP é, então, dada por:



$$S = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}\|$$

Por outro lado, a área **S** é dada por:



$$S = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|\, h}{2} \implies \|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AB}\|\, h \implies d(P, r) = h = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

Como A e B são pontos arbitrários da reta **r**, segue que $\overrightarrow{AB}$ é um vetor diretor arbitrário de **r**. Ou seja:

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{r}\|}{\|\vec{r}\|}, \quad \text{para } A \in r \qquad \textbf{(12.1)}$$

12.3 Problemas Resolvidos

1. Calcule a distância do ponto P = (1, 1, -1) à reta r: $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$

Solução: É fácil encontrar A = (-1, -2, -3) $\in$ r e $\vec{r}$ = (1, 1, 2). Assim, $\overrightarrow{AP}$ = (2, 3, 2) e portanto

$$d(P, r) = \frac{\|(2,3,2) \wedge (1,1,2)\|}{\|(1,1,2)\|} = \frac{\|(4,-2,-1)\|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{14}}{2}\ \text{uc}$$

2. Obtenha uma equação vetorial da reta **r** paralela à reta s: X = (1, 1, 0) + λ(2, 1, 2), contida no plano Π: x - 4y + z = 0 e que dista $\frac{\sqrt{20}}{3}$ uc do ponto P = (1, 0, 1).

Solução: Seja X = (x, y, z) um ponto genérico da reta **r**. Como r $\subset$ Π, temos que X $\in$ Π e portanto as coordenadas de X satisfazem a equação de Π, isto é:

$$x - 4y + z = 0 \implies z = -x + 4y$$

Como r // s, qualquer vetor diretor de s também é vetor dirretor de **r** e, portanto, $\vec{r}$ = (2, 1, 2) é um vetor diretor da reta **r**. Além disso, como d(P, r) = $\frac{\sqrt{20}}{3}$, segue que:

$$\frac{\|\overrightarrow{XP} \wedge (2,1,2)\|}{\|(2,1,2)\|} = \frac{\sqrt{20}}{3} = \frac{\|(1-x, -y, x-4y+1) \wedge (2,1,2)\|}{\|(2,1,2)\|} = \frac{\|(-x+2y-1, 4x-8y, -x+2y+1)\|}{\|(2,1,2)\|} =$$

$$= \frac{\|(-x+2y-1, 4x-8y, -x+2y+1)\|}{3} = \frac{\sqrt{18x^2+72y^2-72xy+2}}{3}$$

Elevando-se ao quadrado:

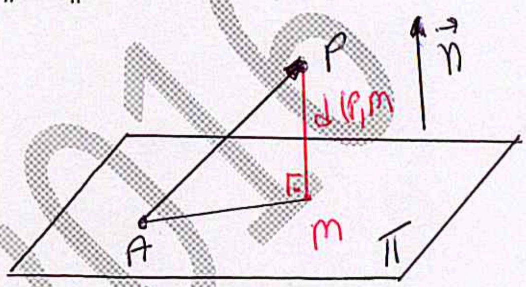
$$18(x^2 + 4y^2 - 4xy) + 2 = 20 \implies (x - 2y)^2 = 1 \implies \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

e assim obtivemos duas soluções:

$$r_1 : \begin{cases} x - 4y + z = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad r_2 : \begin{cases} x - 4y + z = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

12.4 Distância de Ponto a Plano

Dados um ponto P e um plano Π, para encontrar a distância $d(P, \Pi)$ de P a Π, basta achar a projeção ortogonal M de P sobre Π e daí $d(P, \Pi) = \|\overrightarrow{PM}\|$.



Para evitar o cálculo de M, procede-se da seguinte forma: escolha um ponto A de Π e projete ortogonalmente $\overrightarrow{AP}$ sobre um vetor $\vec{n}$ normal a Π. A norma dessa projeção é a distância $d(P, \Pi)$. Como

$$\|\text{proj}_{\vec{n}}\overrightarrow{AP}\| = \left\|\frac{\overrightarrow{AP} \bullet \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\,\vec{n}\right\| = \frac{|\overrightarrow{AP} \bullet \vec{n}|\,\|\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|^2}$$

segue que:

$$d(P, \Pi) = \frac{|\overrightarrow{AP} \bullet \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \tag{12.2}$$

Vamos, a partir de agora, procurar a versão dessa fórmula **em coordenadas**. Para isso, suponhamos que $P = (x_0, y_0, z_0)$ e Π: $ax + by + cz + d = 0$. Então $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor normal a Π. Seja ainda $A = (x_1, y_1, z_1)$ o ponto escolhido em Π. Então $\overrightarrow{AP} = P - A =$ $= (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$ e, portanto:

$$\overrightarrow{AP} \bullet \vec{n} = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1) = ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax_1 + by_1 + cz_1)$$

Como $A \in \Pi$, temos que $ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ e daí $\overrightarrow{AP} \bullet \vec{n} = ax_0 + by_0 + cz_0 + d$

Finalmente, como $\|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ obtemos:

$$d(P, \Pi) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \tag{12.3}$$

12.5 Problemas Resolvidos

1. Calcule a distância do ponto P = (1, 2, -1) ao plano Π: 3x - 4y - 5z + 1 = 0.

Solução: A solução deste problema é a aplicação direta da fórmula (12.3):

$$d(P, \Pi) = \frac{|3.1 - 4.2 - 5.(-1) + 1|}{\sqrt{9+16+25}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{50}}{50} = \frac{\sqrt{2}}{10} \text{ uc}$$

2. Calcule a distância de P = (1, 3, 4) ao plano Π: X = (1, 0, 0) + λ(1, 0, 0) + μ(-1, 0, 3).

Solução: Para resolver este problema, vamos utilizar a fórmula (12.2). Para isso, precisamos conhecer:

- ◇ um vetor normal a Π

  $\vec{n} = (1, 0, 0) \wedge (-1, 0, 3) = (0, -3, 0)$
- ◇ um ponto A ∈ Π: A = (1, 0, 0)
- ◇ e daí segue que $\overrightarrow{AP} = (0, 3, 4)$

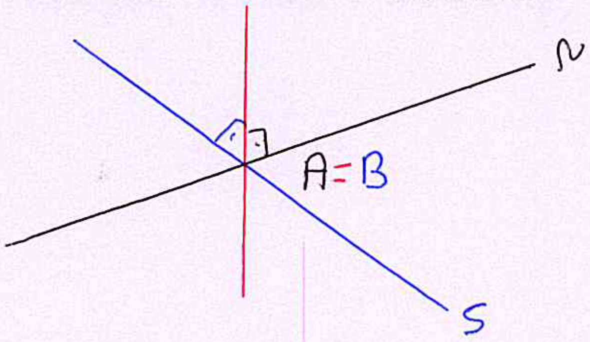
Portanto, por (12.2), temos:

$$d(P, \Pi) = \frac{|(0,3,4) \bullet (0,-3,0)|}{\|(0,-3,0\|} = \frac{|-9|}{3} = 3 \text{ uc}$$

12.6 Distância entre Duas Retas

Dadas as retas **r** e **s**, sua distância d(r, s) é igual à distância entre os pontos A e B em que uma reta perpendicular comum a **r** e a **s** as intercepta. Teremos três casos a considerar:

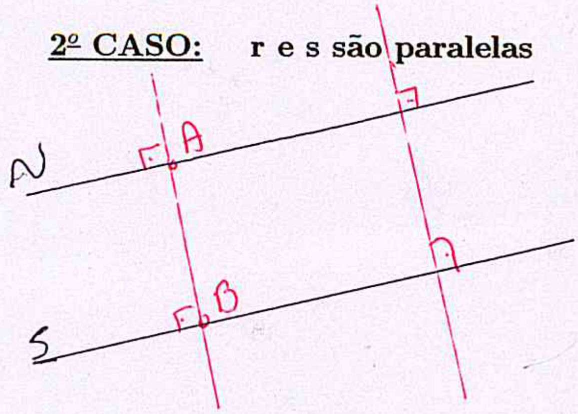
<u>1º CASO:</u> **r e s são concorrentes**



Neste caso, A e B coincidem e portanto

d(r, s) = 0.

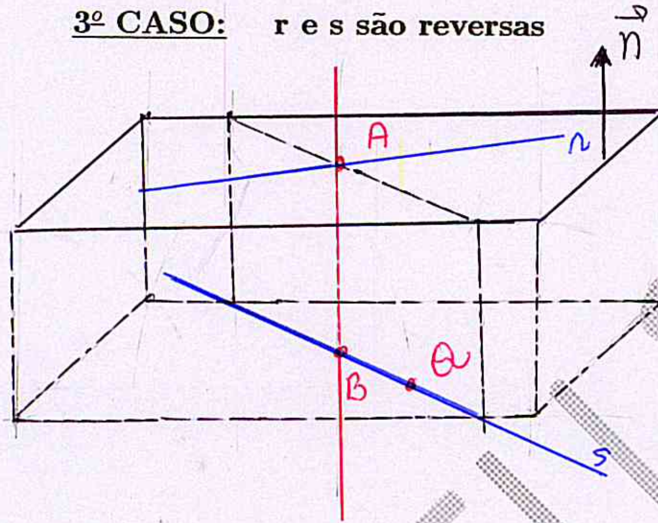
$2^{\underline{o}}$ CASO: **r e s são paralelas**



Neste caso, existem infinitas perpendiculares comuns a **r** e **s** e d(r, s) é igual à distância de qualquer ponto de uma reta à outra reta:

$$d(r, s) = d(P, s), \text{ sendo } P \in \mathbf{r}$$

$3^{\underline{o}}$ CASO: **r e s são reversas**



Neste caso, utilizamos o seguinte método:

1. determinamos o plano Π que contém **r** e é paralelo a s.
2. escolhemos um ponto Q qualquer de s e calculamos d(Q, Π). Daí

$$d(r, s) = d(Q, \Pi)$$

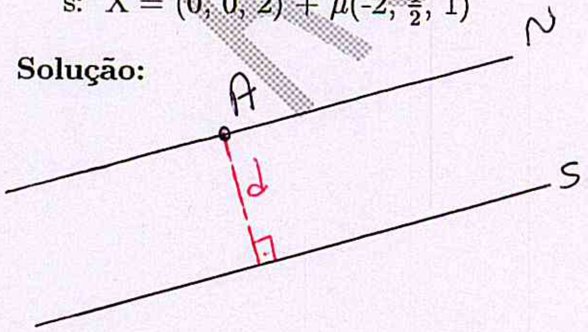
12.7 Problemas Resolvidos

1. Calcule a distância entre as retas paralelas **r** e **s**, sendo:

r: $X = (1, 0, 0) + \lambda(-2, \frac{1}{2}, 1)$

s: $X = (0, 0, 2) + \mu(-2, \frac{1}{2}, 1)$

Solução:



$$d(r, s) = d(A, s) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{s}\|}{\|\vec{s}\|},$$

sendo $A \in \mathbf{r}$ e $B \in \mathbf{s}$.

Consideremos $A = (1, 0, 0) \in \mathbf{r}$ e $B = (0, 0, 2) \in \mathbf{s}$. Então $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, 2)$ e, efetuando-se os cálculos, $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{s} = (-1, -3, -\frac{1}{2})$. Daí segue que $d(r, s) = \sqrt{\frac{41}{21}}$ uc.

2. Calcule a distância entre as retas reversas **r** e **s**, sendo:

$$\text{r: } X = (-1, 2, 0) + \lambda(1, 3, 1) \qquad \text{s: } \begin{cases} 3x - 2z - 3 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

Solução: Começamos encontrando uma equação geral do plano Π que contém **r** e é paralelo a s. Sejam $\vec{r} = (1, 3, 1)$ e $\vec{s} = (3, 0, -2) \wedge (0, 1, -1) = (2, 3, 3)$ vetores diretores de **r** e de s, respectivamente. Como esses vetores são **LI** (pois as retas **r** e **s** são reversas), $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são vetores diretores do plano Π. Além disso, como Π contém a reta **r**, o ponto A = (-1, 2, 0) é um ponto de Π. Assim, se X = (x, y, z) é um ponto genérico de Π, os vetores $\overrightarrow{AX}$, $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são coplanares; isto é, são **LD**. Ou seja:

$$0 = \det \begin{pmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 6x - y - 3z + 8$$

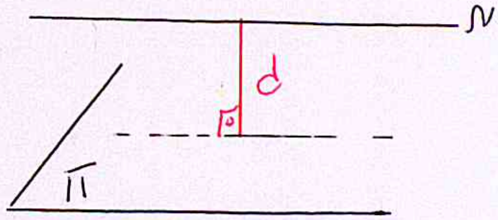
E, portanto:

$$\Pi:\ 6x - y - 3z + 8 = 0 \qquad \Longrightarrow \vec{n} = (6, -1, 3) \text{ é um vetor normal a } \Pi$$

A distância entre **r** e **s** é a distância de B a Π, sendo B um ponto da reta **s**. Para encontra B, fazendo, por exemplo, z = 0 no sistema que define a reta **s**, obtemos x = 1 e y = 2 e, portanto, B = (1, 2, 0) ∈ s. Logo:

$$d(r, s) = d(B, \Pi) = \frac{|6.1 - 1.2 - 3.0 + 8|}{\sqrt{6^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{12}{\sqrt{46}} = \frac{6\sqrt{46}}{23}\text{uc}$$

12.8 Distância entre Reta e Plano



Dados um plano Π e uma reta **r** <u>não contida</u> em Π, temos:

(a) Se r ∩ Π ≠ ∅, então d(r, Π) = 0. Lembre que: r ∩ Π ≠ ∅ se **r** não é paralela a Π; isto é, $\vec{r} \bullet \vec{n} \neq 0$, sendo $\vec{r}$ um vetor direção da reta **r** e $\vec{n}$ um vetor normal ao plano Π.

(b) Se r ∩ Π = ∅, então d(r, Π) = d(P, Π), sendo P um ponto qualquer da reta **r**.

CUIDADO com o seguinte raciocínio errado: **<u>não calcule</u>** a distância de um ponto qualquer de Π a **r**, pois os pontos de **r** estão todos a uma mesma distância de Π, porém os pontos de Π **não estão** todos a uma mesma distância de **r**.

12.9 Distância entre Dois Planos

Sejam Π_1 e Π_2 dois planos. Então:

(a) Se $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset$, então $d(\Pi_1, \Pi_2) = 0$.

(b) Se $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$, então $d(\Pi_1, \Pi_2) = d(P, \Pi_2)$, sendo $P \in \Pi_1$.

12.10 Problema Resolvido

1. Calcule a distância entre os planos $\Pi_1 : \begin{cases} x = 2 - \lambda - \mu \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{cases}$ e Π_2: $x + y + z = \frac{5}{2}$.

Solução: Sejam $\vec{n}_1 = (-1, 0, 1) \wedge (-1, 1, 0) = (-1, -1, -1)$ e $\vec{n}_2 = (1, 1, 1)$ vetores respectivamente normais aos planos Π_1 e Π_2. Como $\vec{n}_1 \,//\, \vec{n}_2$, segue que $\Pi_1 \,//\, \Pi_2$. Resta analisarmos se estes planos são coincidentes. Para isso, tomamos um ponto de um deles e verificamos se pertence ao outro; por exemplo, considero o ponto $A = (2, 0, 0) \in \Pi_1$. Como $2 + 0 + 0 \neq \frac{5}{2}$, $A \notin \Pi_2$ e, portanto,

$$d(\Pi_1, \Pi_2) = d(A, \Pi_2) = \frac{|2+0+0-\frac{5}{2}|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ uc}$$

12.11 Problemas Propostos

Considere fixado um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.

1. Calcule a distância entre os pontos P e Q nos casos

(a) $P = (0, -1, 0)$ $\quad$ $Q = (-1, 1, 0)$

(b) $P = (-1, -3, 4)$ $\quad$ $Q = (1, 2, -8)$

2. Calcule a distância do ponto P à reta **r** nos casos

(a) $P = (0, -1, 0)$ $\quad$ r: $\begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z + 1 \end{cases}$

(b) $P = (1, 0, 1)$ $\quad$ r: $X = (0, 0, 0) + \lambda(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

(c) $P = (1, -1, 4)$ $\quad$ r: $\frac{x-2}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{-2}$

(d) $P = (-2, 0, 1)$ $\quad$ r: $\begin{cases} x = 3\lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 2 \\ z = \lambda \end{cases}$

3. Calcule a distância entre as retas paralelas dadas

(a) r: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{\frac{1}{2}} = z$ $\quad$ s: $X = (0, 0, 2) + \lambda(-2, \frac{1}{2}, 1)$

(b) r: $x = \frac{y-3}{2} = z - 2$ $\quad$ s: $x - 3 = \frac{y+1}{2} = z - 2$

4. Calcule a distância do ponto P ao plano Π nos casos

(a) $P = (0, 0, -6)$ $\quad$ Π: $x - 2y - 2z - 6 = 0$

(b) $P = (1, 1, \frac{15}{6})$ $\quad$ Π: $4x - 6y + 12z + 21 = 0$

(c) $P = (9, 2, -2)$ $\quad$ Π: $X = (0, -5, 0) + \lambda(0, \frac{5}{12}, 1) + \mu(1, 0, 0)$

(d) $P = (0, 0, 0)$ $\quad$ Π: $2x - y + 2z - 3 = 0$

5. Calcule a distância entre os planos paralelos:

(a) Π_1: $2x - y + 2z + 9 = 0$ $\quad$ Π_2: $4x - 2y + 4z - 21 = 0$

(b) Π_1: $\begin{matrix} x = 2 - \lambda - \mu \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{matrix}$ $\quad$ Π_2: $x + y + z = \frac{5}{2}$

(c) Π_1: $x + y + z = 0$ $\quad$ Π_2: $x + y + z + 2 = 0$

6. Calcule a distância entre as retas

(a) r: $\begin{cases} x = z - 1 \\ y = 3z - 2 \end{cases}$ $\quad$ s: $\begin{cases} 3x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$

(b) r: $\frac{x+4}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z+5}{-2}$ s: $\begin{cases} x = 21 + 6\lambda \\ y = -5 - 4\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$

(c) r: $\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ s: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$

7. Ache os pontos de r: $\begin{cases} x + y = 2 \\ x = y + z \end{cases}$ que distam 3 uc do ponto A = (0, 2, 1).

8. Ache os pontos de r: x - 1 = 2y = z que equidistam dos pontos A = (1, 1, 0) e B = (0, 1, 1).

9. Ache os pontos de r: $\begin{cases} x + y = 2 \\ x = y + z \end{cases}$ que distam $\sqrt{\frac{14}{3}}$ de s: x = y = z + 1.

10. Ache os pontos de r: x - 1 = 2y = z que equidistam das retas s: $\begin{cases} x = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ e t: x = y = 0.

11. Obtenha uma equação vetorial da reta **r** paralela a s: $\begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 2 \end{cases}$, concorrente com a reta t: X = (-1, 1, 1) + λ(0, -1, 2) e que dista 1 uc do ponto P = (1, 2, 1).

12. Um quadrado ABCD tem a diagonal BD contida na reta r: $\begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$. Sabendo que A = (0, 0, 0), determine os vértices B, C e D.

13. Ache os pontos da reta r: $\begin{cases} x + y = 2 \\ x = y + z \end{cases}$ que distam $\sqrt{6}$ uc de Π: x - 2y - z = 1.

14. Ache os pontos da reta r: x - 1 = 2y = z que equidistam dos planos Π_1: 2x - 3y - 4z - 3 = 0 e Π_2: 4x - 3y - 2z + 3 = 0.

15. Dê uma equação geral do plano Π que contém a reta r: $X = (1, 0, 1) + \lambda(1, 1, -1)$ e dista $\sqrt{2}$ uc do ponto $P = (1, 1, -1)$.

16. Dê uma equação geral do plano Π que passa pelos pontos $P = (1, 1, -1)$ e $Q = (2, 1, 1)$ e que dista 1 uc da reta r: $X = (1, 0, 2) + \lambda(1, 0, 2)$.

17. Dê uma equação geral do plano Π que passa pelos pontos $A = (1, 1, 1)$ e $B = (0, 2, 1)$ e equidista dos pontos $C = (2, 3, 0)$ e $D = (0, 1, 2)$.