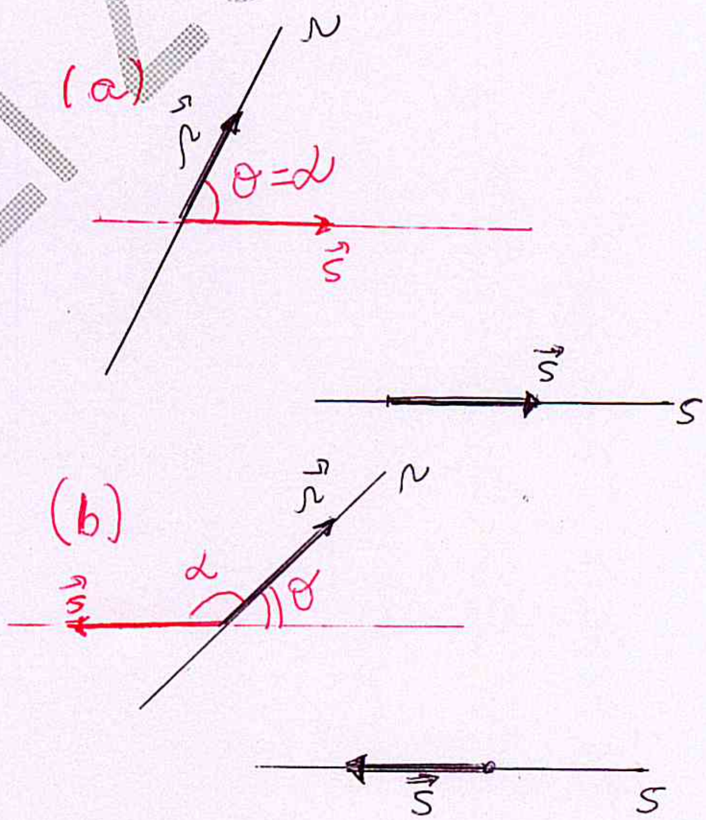
Capítulo 11

ÂNGULOS

Neste capítulo, considere **fixado um sistema ortogonal** de coordenadas cartesianas.

11.1 Ângulo entre Retas

Dadas duas retas não ortogonais **r** e **s**, queremos encontrar a medida θ do ângulo **agudo** entre elas. Para isso, consideremos $\vec{r} \neq \vec{0}$ e $\vec{s} \neq \vec{0}$, respectivamente paralelos a **r** e a **s**. Seja α a medida do ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{s}$. Então:



$$\cos \alpha = \frac{\vec{r} \bullet \vec{s}}{\|\vec{r}\| \, . \, \|\vec{s}\|}; \qquad 0 < \alpha < \pi$$

Analisemos o sinal de $\vec{r} \bullet \vec{s}$:

- ◇ Se $\vec{r} \bullet \vec{s} > 0$, então $\cos \alpha > 0$ e, portanto, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (veja a figura (a)). Daí:

$$\cos \theta = \frac{\vec{r} \bullet \vec{s}}{\|\vec{r}\| \, . \, \|\vec{s}\|} = \frac{|\vec{r} \bullet \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \, . \, \|\vec{s}\|}$$

- ◇ Se $\vec{r} \bullet \vec{s} < 0$, então $\cos \alpha < 0$ e, portanto, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (veja a figura (b)). Daí:

$$\cos \theta = \cos\,(\pi - \alpha) = -\cos\,(\alpha) = -\,\frac{\vec{r} \bullet \vec{s}}{\|\vec{r}\| \, . \, \|\vec{s}\|} = \frac{|\vec{r} \bullet \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \, . \, \|\vec{s}\|}$$

Ou seja, em qualquer um dos casos, vale a fórmula:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{r} \bullet \vec{s}|}{\|\vec{r}\| \,.\, \|\vec{s}\|}, \quad \text{para} \quad 0 < \theta < \tfrac{\pi}{2}$$

11.2 Problemas Resolvidos

1. Ache a medida em radianos do ângulo entre as retas **r**: $X = (1, 1, 9) + \lambda(0, 1, -1)$ e

s: $\begin{cases} x - 1 = y \\ z = 4 \end{cases}$

Solução: Temos $\vec{r} = (0, 1, -1)$, $\vec{s} = (1, 1, 0)$ e, portanto

$$\cos\theta = \frac{|\vec{r} \bullet \vec{s}|}{\|\vec{r}\|\ \|\vec{s}\|} = \frac{|(0,1,-1) \bullet (1,1,0)|}{\|(0,1,-1)\ .\ (1,1,0)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \theta = \tfrac{\pi}{3} \text{ radianos}$$

2. Obtenha os vértices B e C do triângulo equilátero ABC, sendo $A = (1, 1, 0)$ e sabendo que o lado BC está contido na reta **r** de equação vetorial $X = (0, 0, 0) + \lambda(0, 1, -1)$.

Solução: Seja P um dos vértices procurados (B ou C). Então, $P = (0, \lambda, -\lambda)$, uma vez que $P \in \mathbf{r}$. Além disso, o ângulo entre a reta **r** e a reta que passa por $A = (1, 1, 0)$ e P é de 60^0. Como $\vec{r} = (0, 1, -1)$ e $\overrightarrow{AP} = (-1, \lambda - 1, -\lambda)$, segue que:

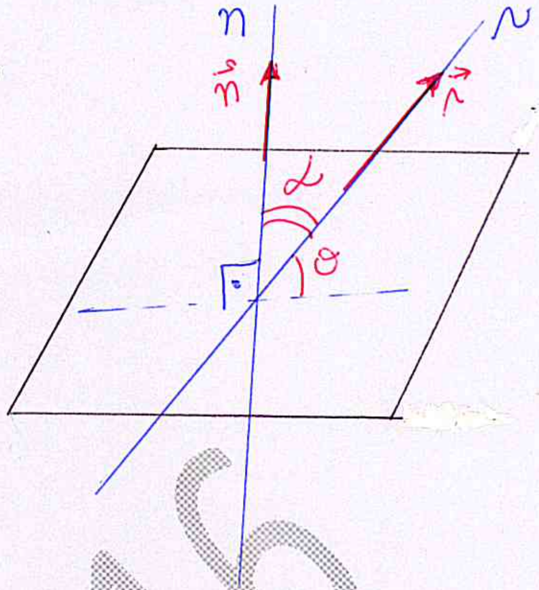
$$\cos 60^0 = \frac{|\vec{r} \bullet \overrightarrow{AP}|}{\|\vec{r}\| \,.\, \|\overrightarrow{AP}\|} = \frac{|(0,1,-1) \bullet (-1,\lambda-1,-\lambda)}{\|(0,1,-1)\| \,.\, \|(-1,\lambda-1,-\lambda)\|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{|\lambda-1+\lambda|}{\sqrt{2}\,\sqrt{1+(\lambda-1)^2+\lambda^2}} = \frac{|2\lambda-1|}{\sqrt{2}\,\sqrt{2(\lambda^2-\lambda+1)}}$$

daí, tirando-se o **mmc** e elevando-se ao quadrado, segue que

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = (2\lambda - 1)^2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^2 - \lambda = 0 \Longrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1$$

Portanto, $P = (0, 0, 0)$ ou $P = (1, 1, -1)$, de onde concluímos que os vértices procurados B e C são $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, -1)$.

11.3 Ângulo entre Reta e Plano



Para encontrar a medida θ do ângulo entre a reta **r** e o plano Π, basta achar a medida do ângulo α entre a reta **r** e uma reta **n** normal ao plano Π, uma vez que $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$. Dessa forma, se $\vec{r}$ é um vetor diretor de **r** e $\vec{n}$ é um vetor normal ao plano Π, segue que:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n} \bullet \vec{r}|}{\|\vec{n}\| \,.\, \|\vec{r}\|}$$

e daí, como α e θ são **complementares**, segue que:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{|\vec{n} \bullet \vec{r}|}{\|\vec{n}\| \,.\, \|\vec{r}\|}, \qquad \text{para} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

11.4 Problemas Resolvidos

1. Ache a medida em radianos do ângulo entre **r**: X = (0, 1, 0) + λ(-1, -1, 0) e Π: y + z - 10 = 0.

Solução: Como $\vec{r}$ = (-1, -1, 0) é um vetor diretor de **r** e $\vec{n}$ = (0, 1, 1) e é um vetor normal a Π, chamando-se de θ o ângulo entre **r** e Π, temos que:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{|\vec{n} \bullet \vec{r}|}{\|\vec{n}\| \,.\, \|\vec{r}\|} = \frac{|(0,1,1) \bullet (-1,-1,0)|}{\|(0,1,1)\| \,.\, \|(-1,-1,0)\|} = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{6}.$$

2. Obtenha equações paramétricas da reta **r** que passa pelo ponto P = (1, 1, 1), é paralela ao plano Π_1: x + 2y - z = 0 e forma com o plano Π_2: x - y + 2z = 1 um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ rd.

Solução: Precisamos apenas obter um vetor diretor da reta **r**. Observe que, como há infinitos vetores paralelos à reta **r**, esse problema é indeterminado; isto é, não admite solução única. Seja $\vec{r}$ = (a, b, c) um vetor diretor da reta **r**. Como $\vec{n}_1$ = (1, 2, -1) é normal a Π_1, temos:

$$r \,//\, \Pi_1 \iff \vec{r} \bullet \vec{n}_1 = 0 \iff a + 2b - c = 0 \iff c = a + 2b$$

Por outro lado, $\vec{n}_2$ = (1, -1, 2) é normal a Π_2 e portanto:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{|\vec{r} \bullet \vec{n}_2|}{\|\vec{r}\| \,.\, \|\vec{n}_1\|} = \frac{|(a,b,a+2b) \bullet (1,-1,2)|}{\sqrt{a^2+b^2+a+2b)^2}\,\sqrt{6}} = \frac{|3a+3b|}{\sqrt{6}\,\sqrt{2a^2+5b^2+4ab}}$$

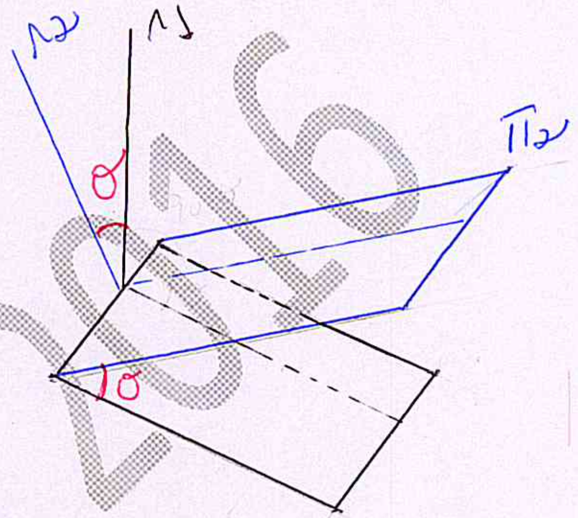
Portanto, elevando-se ao quadrado, e efetuando-se os cálculos, obtém-se **b** $= \mathbf{0}$ e, dessa forma, **c** $=$ **a**. Assim, $\vec{r} = (a, 0, a)$, para $a \in \mathbb{R}^*$. Concluímos, então, quae $\vec{r} = (1, 0, 1)$ é **um** vetor diretor de **r** e, dessa forma:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}, \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{R}.$$

11.5 Ângulo entre Planos

A medida do ângulo θ entre os planos Π_1 e Π_2 é a medida do ângulo entre as retas r_1 e r_2, respectivamente perpendiculares aos planos Π_1 e Π_2.
Observe que: nestas condições, os vetores $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são os respectivos vetores diretores de r_1 e r_2 e, portanto,

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\,\|\vec{n}_2\|}$$



11.6 Problemas Resolvidos

1. Ache a medida θ do ângulo entre os planos Π_1: x - y + z = 20 e Π_2: x + y + z = 0.

Solução: Basta ver que o vetor $\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$ é normal a Π_1 e $\vec{n}_2 = (1, 1, 1)$ é um vetor normal a Π_2. Assim:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\,\|\vec{n}_2\|} = \frac{|(1,-1,1) \bullet (1,1,1)|}{\|(1,-1,1)\|\,\|(1,1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}\,\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \implies \theta = \text{arc cos } \tfrac{1}{3}.$$

2. Obtenha uma equação geral do plano Π que contém a reta **r** e forma com o plano Π_1: x + z = 0 um ângulo de 60^0, sendo r: $\begin{matrix} x - 2y + 2z = 0 \\ 3x - 5y + 7z = 0 \end{matrix}$.

Solução: Sabemos que Π: ax + by + cz + d = 0 é uma equação geral do plano Π. Como **r** está contida em Π, é claro que todo ponto de **r** é também um ponto de Π. É fácil ver que o ponto $(0, 0, 0) \in$ **r** e, portanto, **d** $= \mathbf{0}$. Além disso, $\vec{r} = (1, -2, 2) \wedge (3, -5, 7)$ é um vetor diretor de **r**, uma vez que **r** é a intersecção de dois planos que têm esses vetores como vetores normais. Assim, $\vec{r} = (-4, -1, 1)$ é um vetor diretor de **r**. Como o vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é ortogonal a todos os vetores de Π, em particular é ortogonal a $\vec{r}$, isto é:

$\vec{n} \perp \vec{r} \iff \vec{n} \bullet \vec{r} = 0 \iff (a, b, c) \bullet (-4, -1, 1) = 0 \iff -4a - b + c = 0 \iff c = 4a + b$

Além disso, como o ângulo entre Π e Π_1: $x + z = 0$ é de 60^0, segue que:

$$\tfrac{1}{2} = \cos 60^0 = \frac{|(a, b, 4a+b) \bullet (1,0,1)|}{\sqrt{17a^2+2b^2+8ab}\,\sqrt{2}} = \frac{|5a+b|}{\sqrt{2}\,\sqrt{17a^2+2b^2+8ab}}$$

Efetuando-se os cálculos, obtém-se $\mathbf{a = 0}$ ou $\mathbf{a} = -\frac{4b}{11}$. Ou seja:

$$\vec{n} = (0, b, b) \implies \Pi : x + y = 0$$

ou

$$\vec{n} = (-\tfrac{4b}{11}, b, -\tfrac{5b}{11}) \implies \Pi : 4x + -11y + 5z = 0$$

11.7 Problemas Propostos

Considere fixado um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.

1. Ache o cosseno do ângulo θ entre as retas:

(a) r: $X = (-\frac{5}{2}, 2, 0) + \lambda(\frac{1}{2}, 1, 1)$ s: $\begin{cases} 3x - 2y + 16 = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$

(b) r: $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = \sqrt{2}\lambda \end{cases}$ s: $\begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -5 + \sqrt{2}\lambda \end{cases}$

(c) r: $\begin{cases} \frac{x+2}{3} = 3 - z \\ y = 0 \end{cases}$ s: $\begin{cases} \frac{x+1}{2} = z + 3 \\ y = 0 \end{cases}$

(d) r: $x = \dfrac{1-y}{2} = \dfrac{z}{3}$ s: $\begin{cases} 3x + y - 5z = 0 \\ 2x + 3y - 8z = 1 \end{cases}$

2. Ache a medida em radianos do ângulo θ entre a reta e o plano dados:

(a) r: $\begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ $\quad$ Π: $z = 0$

(b) r: $x = y = z$ $\quad$ Π: $z = 0$

(c) r: $X = (0, 0, 1) + \lambda\,(-1, 1, 0)$ $\quad$ Π: $3x + 4y = 0$

(d) r: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$ $\quad$ Π: $x + y - z - 1 = 0$

(e) r: $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 1 + 2z \end{cases}$ $\quad$ Π: $\sqrt{\frac{45}{7}}\,x + y + 2z - 10 = 0$

3. Ache a medida em radianos do ângulo θ entre os planos:

(a) Π_1: $2x + y - z - 1 = 0$ $\quad$ Π_2: $x - y + 3z - 10 = 0$

(b) Π_1: $X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(-1, 0, 0)$ $\quad$ Π_2: $x + y + z = 0$

(c) Π_1: $X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(1, 1, 1)$ $\quad$ Π_2: $X = (1, 0, 0) + \lambda(-1, 2, 0) + \mu(0, 1, 0)$

4. Ache a reta **r** que intercepta as retas **s** e **t** e forma ângulos congruentes com os eixos coordenados, sabendo que s: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = -\frac{z}{3}$ e t: $\begin{cases} x = -1 + 5\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

5. Ache a reta **h** qua passa pelo ponto $P = (0, 2, 1)$ e forma ângulos congruentes com as retas:

r: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ $\quad$ s: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 3 \end{cases}$ $\quad$ t: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3\lambda \end{cases}$

6. Obtenha equações na forma simétrica da reta **r** que passa pelo ponto P = (1, -2, 3) e que forma ângulos de 45^0 e 60^0 respectivamente com os eixo dos **x** e dos **y**.

7. Ache uma reta **t** que passa por P = (1, 1, 1), intercepta a reta **r**: $\frac{x}{2} = y = z$ e forma com ela um ângulo θ tal que $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

8. Ache um vetor diretor de uma reta paralela ao plano Π: x + y + z = 0 e que forma um ângulo de 45^0 com o plano Π_1: x - y = 0.

9. Ache uma equação geral do plano Π que contém a reta r: $\begin{cases} x = z + 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$ e que forma um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ rd com o plano Π_1: x + 2y - 3z + 2 = 0.

10. Obtenha uma equação geral do plano Π que contém a reta r: $\begin{cases} 3z - x = 1 \\ y - 1 = 1 \end{cases}$ e forma com a reta s: X = (1, 1, 0) + λ(3, 1, 1) um ângulo cuja medida em radianos é $\theta = \text{arc cos}\,\frac{2\sqrt{30}}{11}$.