Capítulo 7

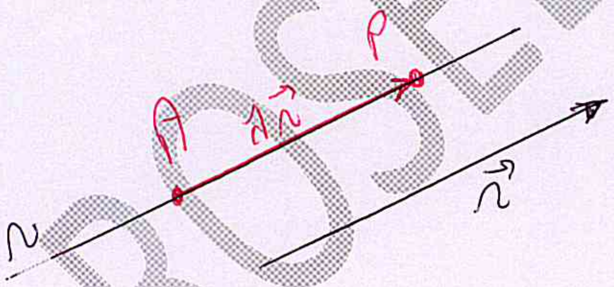
ESTUDO DA RETA

Neste capítulo, iniciaremos o estudo da Geometria Analítica Espacial.

7.1 Equação Vetorial da Reta

Seja **r** uma reta que passa pelo ponto A e tem a direção do vetor **não nulo** $\vec{r}$. Um ponto P do espaço pertence à reta **r** se, e somente se, os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\vec{r}$ são **LD**; isto é, existe um número real λ tal que $\overrightarrow{AP} = P - A = \lambda\vec{r}$. Em outras palavras,

$$P \in r \iff P = A + \lambda\vec{r}, \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{R} \tag{7.1}$$



Se $P = (x, y, z)$, $A = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{r} = (a, b, c)$, a equação (7.1) pode ser reescrita na forma:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c), \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{R} \tag{7.2}$$

Qualquer uma das equações (7.1) e (7.2) é chamada **uma equação vetorial da reta r**. O vetor $\vec{r}$ é chamado **um vetor diretor** da reta r e λ é denominado **parâmetro**. A cada valor de λ corresponde um único ponto da reta **r** e, reciprocamente, dado um ponto P da reta **r**, existe um único número real λ_0 tal que $P = A + \lambda_0\vec{r}$.

Exemplo: Determinar uma equação vetorial da reta **r** que passa pelo ponto A = (3, 0, -5) e tem a direção do vetor $\vec{r} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

Solução: Seja P = (x, y, z) ∈ r um ponto genérico da reta r. De (4.2), segue que

$$(x, y, z) = (3, 0, -5) + \lambda\,(2, 2, -1), \qquad \text{para } \lambda \in \mathbb{R}$$

Isto significa que quando λ varia de -∞ a +∞, o ponto P descreve toda reta **r**. Dessa forma, por exemplo, fazendo-se λ = 2:

$$(x, y, z) = (3, 0, -5) + 2(2, 2, -1)$$
$$(x, y, z) = (3, 0, -5) + (4, 4, -2)$$
$$(x, y, z) = (7, 4, -7)$$

Ou seja: o ponto P = (7, 4, -7) é um ponto da reta **r**.

7.2 Equações Paramétricas da Reta

Consideremos no espaço um sistema de coordenadas $S = \{(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, P = (x, y, z) um ponto genérico, $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto dado e $\vec{r} = (a, b, c)$ um vetor direção de uma mesma reta **r**. Da equação (4.2):

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c), \qquad \text{para } \lambda \in \mathbb{R}$$

segue que:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}, \qquad \text{para } \lambda \in \mathbb{R} \tag{4.3}$$

As equações (4.3) são chamadas de **equações paramétricas da reta r**, em relação ao sistema de coordenadas fixado. A reta **r** é o conjunto de pontos (x, y, z) determinados pelas equações paramétricas quando λ varia de -∞ a +∞.

Exemplo: As equações paramétricas da reta **r** que passa pelo ponto A = (3, -1, 2) e é paralela ao vetor $\vec{r} = (-3, -2, 1)$ são:

$$\begin{cases} x = 3 - 3\lambda \\ y = -1 - 2\lambda , \qquad \text{para } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

Para se obter um ponto desta reta, basta atribuir ao parâmetro λ qualquer valor real. Assim por exemplo, para $\lambda = 3$, temos

$$\begin{cases} x = 3 - 3.3 = -6 \\ y = -1 - 2.3 = -7 \\ z = 2 + 1.3 = 5 \end{cases}$$

o que mostra que o ponto P = (-6, -7, 5) é um ponto da reta **r**. O ponto A = (3, -1, 2), que sabemos pertencer a esta reta **r**, é obtido quando igualamos o parâmetro λ a zero. Já o ponto B = (0, 3, 4) **não pertence** à reta **r**, uma vez que:

(0, 3, 4) $\in$ r $\Longleftrightarrow$ existe um número real λ_0 para o qual (0, 3, 4) = (3, -1, 2) + λ_0(-3, -2, 1) $\Longleftrightarrow$ (0, 3, 4) - (3, -1, 2) = λ_0(-3, -2, 1) $\Longleftrightarrow$ (-3, 4, 2) = λ_0(-3, -2, 1), o que não ocorre, pois os vetores (-3, 4, 2) e (-3, -2, 1) são **LI**.

7.3 Reta Definida por Dois Pontos

A reta definida pelos pontos **distintos** A = (x_1, y_1, z_1) e B = (x_2, y_2, z_2) é a reta que passa pelo ponto A (ou B) e tem a direção do vetor $\overrightarrow{AB}$ = (x_2 - x_1 , y_2 - y_1, z_2 - z_1).

Exemplo: A reta **r** determinada pelos pontos A = (1, -2, -3) e B = (3, 1, -4) tem a direção do vetor $\vec{r} = \overrightarrow{AB}$ = (2, 3, -1) e as equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + 3\lambda , \qquad \text{para } \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -3 - \lambda \end{cases}$$

representam esta reta **r**, passando pelo ponto A e com a direção do vetor $\vec{r} = \overrightarrow{AB}$. Analogamente, as equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 3 + 2\mu \\ y = 1 + 3\mu , \qquad \text{para } \mu \in \mathbb{R} \\ z = -4 - \mu \end{cases}$$

representam a mesma reta **r**, passando pelo ponto B e com a direção do vetor $\vec{r} = \overrightarrow{AB}$.

Observe que:

(i) embora os sistemas sejam diferentes, eles permitem encontrar todos os pontos da mesma reta, fazendo λ, μ variarem de $-\infty$ a $+\infty$. Por exemplo, para $\lambda = 1$ no primeiro sistema, obtemos P = (3, 1, -4). Esse mesmo ponto é obtido se fizermos $\mu = 0$ no segundo sistema.

(ii) Assim como o vetor $\vec{r} = (2, 3, -1)$ é um vetor diretor da reta **r**, qualquer vetor $\alpha\vec{r}$, para $\alpha \neq 0$, também é um vetor diretor de reta **r**. Dessa forma, por exemplo, para $\alpha = 2$ e $\alpha = -1$, as equações:

$$\begin{cases} x = 3 + 4\mu \\ y = 1 + 6\mu \\ z = -4 - 2\mu \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 3 - 2\mu \\ y = 1 - 3\mu \\ z = -4 + \mu \end{cases}$$

ainda representam a **mesma** reta **r**.

7.4 Equações da Reta na Forma Simétrica

Das equações paramétricas (4.3) de uma reta, supondo que a.b.c $\neq 0$, segue que:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{x-x_0}{a} \\ \lambda = \frac{y-y_0}{b} \\ \lambda = \frac{z-z_0}{c} \end{cases}$$

de onde obtém-se:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

que são chamadas as **equações simétricas** da reta **r** que passa pelo ponto $A = (x_0, y_0, z_0)$ e tem a direção do vetor $\vec{r} = (a, b, c)$.

Exemplo: As equações simétricas da reta que passa pelo ponto A = (3, 0, -5) e tem a direção do vetor $\vec{r} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ são:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{-1}$$

7.5 Problemas Propostos

1. Verificar se os pontos P = (5, -5, 6) e Q = (4, -1, 12) pertencem à reta

$$r: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-2}$$

2. Determinar o ponto P = (4, b, c) pertencente à reta

$$r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}.$$

3. Determinar **m** e **n** para que o ponto P = (3, m, n) pertença à reta

$$r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 - t \\ z = -4 + t \end{cases}$$

4. Determinar os pontos da reta r: $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-2}$ que têm (a) abscissa 5; (b) ordenada 4; (c) cota 1.

5. Calcular o ponto P = (2, y, z) pertencente à reta determinada por A = (3, -1, 4) e B = (4, -3, -1).

6. Mostrar que os pontos A = (-1, 4, -3), B = (2, 1, 3) e C = (4, -1, 7) são colineares.

7. Qual deve der o valor de **m** para que os pontos A = (3, m, 1), B = (1, 1, -1) e C = (-2, 10, -4) pertençam à mesma reta?

8. Determinar um ponto e um vetor diretor de cada uma das seguintes retas:

(a) $\begin{cases} \frac{x+1}{3} = \frac{z-3}{4} \\ y = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x = 2y \\ z = 3 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y = -x \\ z = 3 + x \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x = 2t \\ y = -1 \\ z = 2 - t \end{cases}$ (f) $x = y = z$

9. Determinar as equações das seguintes retas:

(a) reta que passa por $A = (1, -2, 4)$ e é paralela ao eixo dos x;

(b) reta que passa por $A = (4, -1, 2)$ e tem a direção do vetor $\vec{i} - \vec{j}$;

(c) reta que passa pelos pontos $A = (2, -3, 4)$ e $N = (2, -1, 3)$

10. Representar graficamente as retas cujas equações são:

(a) $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -10 + 5t \\ z = 9 - 3t \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 2t \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 \\ z = -5 - 5t \end{cases}$

(d) $\begin{cases} z = 2y \\ x = 3 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} y = 2x \\ z = 3 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} y = -3x + 6 \\ z = -x + 4 \end{cases}$ (h) $\begin{cases} y = 3 \\ z = 2x \end{cases}$ (i) $\begin{cases} x = -3 \\ y = 4 \end{cases}$