Capítulo 9

POSIÇÃO RELATIVA DE RETAS E PLANOS

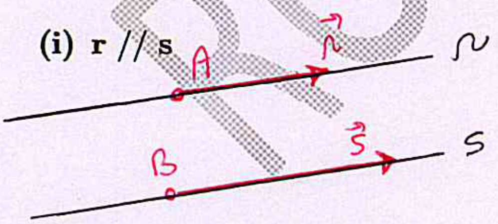
Neste capítulo, estudaremos as posições relativas entre duas retas, entre reta e plano e entre dois planos.

9.1 Reta e Reta

Queremos, neste parágrafo, resolver o seguinte problema: dadas duas retas **r** e **s**, decidir se **r** e s são paralelas (coincidentes ou não), concorrentes ou reversas.

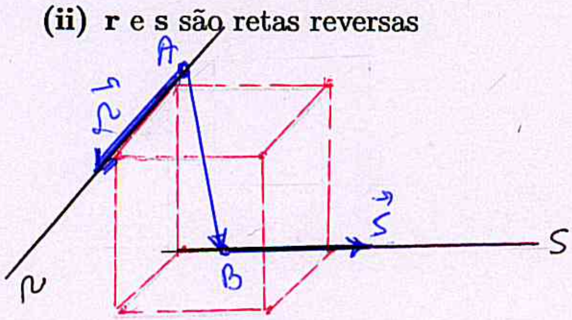
Fixemos um sistema de coordenadas $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ em relação ao qual $\vec{r} = (a, b, c)$ é um vetor diretor e $A = (x_1, y_1, z_1)$ é um ponto fixado de uma reta **r** e $\vec{s} = (m, n, p)$ é um vetor diretor e $B = (x_2, y_2, z_2)$ é um ponto fixado de uma reta **s**. Temos, então que:

(i) $\mathbf{r} \,//\, \mathbf{s}$



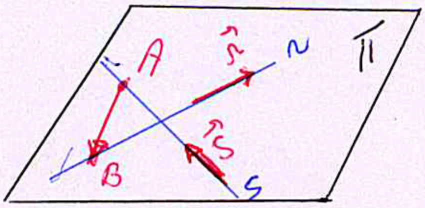
$$r \,//\, s \iff \vec{r} \,//\, \vec{s} \iff \vec{r} \text{ e } \vec{s} \text{ são LD} \iff$$
$$\iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R} : \vec{r} = \lambda \vec{s}$$

(ii) **r** e **s** são retas reversas



$$\mathbf{r} \text{ e } \mathbf{s} \text{ reversas} \iff \vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{AB} \text{ são LI} \iff$$
$$\iff \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{pmatrix} \neq 0$$

(iii) **r** e s são retas concorrentes



r e s concorrentes $\Longleftrightarrow$ $\vec{r}$, $\vec{s}$ são LI **e** $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\overrightarrow{AB}$ são LD $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \ \vec{r},\ \vec{s} \text{ são LI e } \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{pmatrix} = 0$$

<u>**Resumindo**</u>: Dadas as retas **r** e **s**, escolha vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$, respectivamente paralelos a **r** e a **s**. Temos, então, duas possibilidades: $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são **LI** ou $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são **LD**. Então:

◇ Se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são **LI**, escolha um ponto A de **r** e um ponto B de **s** e verifique se $\vec{r}$, $\vec{s}$ e $\overrightarrow{AB}$ são **LI**. Em caso afirmativo, **r** e **s** são **reversas**. Se, por outro lado, $\vec{r}$, $\vec{s}$ e $\overrightarrow{AB}$ são **LD**, então **r** e **s** são **concorrentes**.

◇ Se $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são **LD**, então as retas **r** e **s** são paralelas. Escolha um ponto A da reta **r** e verifique se A pertence a **s**. Se A ∈ **s**, então **r** = **s**. Caso contrário, **r** e **s** são retas paralelas e distintas.

9.2 Problemas Resolvidos

1. Estude a posição relativa das retas

r: X = (1, 2, 3) + λ (0, 1, 3) (λ ∈ ℝ) e s: X = (0, 1, 0) + λ (1, 1, 1) (λ ∈ ℝ).

Solução: Temos que:

A = (1, 2, 3) ∈ r	B = (0, 1, 0) ∈ s
$\vec{r}$ = (0, 1, 3) : vetor diretor de r	$\vec{s}$ = (1, 1, 1) : vetor diretor de s

Como os vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são **LI**, segue que as retas **r** e **s** são reversas ou concorrentes. Passemos, então, a analisar os vetores $\vec{r}$, $\vec{s}$ e $\overrightarrow{AB}$. Para isso, do cálculo do determinante:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

segue que os vetores $\vec{r}$, $\vec{s}$ e $\overrightarrow{AB}$ são **LI** e, portanto, as retas **r** e **s** são reversas.

2. Estude a posição relativa das retas
r: X = (1, 2, 3) + λ (0, 1, 3) (λ ∈ ℝ) e s: X = (1, 3, 6) + λ (0, 2, 6) (λ ∈ ℝ).

Solução: Temos que:

$$\begin{cases} A = (1,2,3) \in r \\ \vec{r} = (0,1,3) : \text{vetor diretor de r} \end{cases} \qquad \begin{cases} B = (1,3,6) \in s \\ \vec{s} = (1,1,1) : \text{vetor diretor de s} \end{cases}$$

Como os vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são **LD**, segue que as retas **r** e **s** são paralelas, podendo ser coincidentes ou não. Verifiquemos se o ponto A = (1, 2, 3) é um ponto da reta s. Para isso, devemos verificar se existe um número real λ_0 para o qual (1, 2, 3) = (1, 3, 6) + λ_0 (0, 2, 6); isto é:

r = **s** $\Longleftrightarrow$ A = (1, 2, 3) $\in$ s $\Longleftrightarrow$ (1, 2, 3) = (1, 3, 6) + λ_0 (0, 2, 6), para algum $\lambda_0 \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow$(1, 2, 3) - (1, 3, 6) = λ_0 (0, 2, 6), para algum $\lambda_0 \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$ (0, -1, -3) = λ_0 (0, 2, 6), para algum $\lambda_0 \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$ λ_0 = -1

Em outras palavras, A $\in$ s e, portanto, **r** e **s** são retas coincidentes.

3. Estude a posição relativa das retas

$$r\colon X = (1,\ 2,\ 3) + \lambda\,(0,\ 1,\ 3) \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \end{cases}$$

Solução: Temos que determinar um vetor não nulo paralelo à reta s, que é dada como a intersecção de dois planos. Se o sistema fixado fosse ortogonal, bastaria, para isso, considerar o produto vetorial dos vetores normais aos planos que determinam a reta s. Assim, para determinar $\vec{s}$, tomemos dois pontos distintos de s: fazendo z = 0 nas equações de s, obtemos x = 1 e y = 5; fazendo agora z = 1, obtemos x = 1 e y = 4. Concluímos, assim, que os pontos B = (1, 5, 0) e C = (1, 4, 1) são dois pontos distintos de s e, dessa forma, $\overrightarrow{BC}$ é um vetor diretor de s. Assim:

$$\begin{cases} A = (1,2,3) \in r \\ \vec{r} = (0,1,3) : \text{vetor diretor de r} \end{cases} \qquad \begin{cases} B = (1,5,0) \in s \\ \vec{s} = (0,-1,1) : \text{vetor diretor de s} \end{cases}$$

Como os vetores $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são **LI**, segue que as retas **r** e **s** são reversas ou concorrentes. Passemos, então, a analisar os vetores $\vec{r}$, $\vec{s}$ e $\overrightarrow{AB}$. Para isso, do cálculo do determinante:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = 0$$

segue que os vetores $\vec{r}$, $\vec{s}$ e $\overrightarrow{AB}$ são **LD** e, portanto, as retas **r** e **s** são concorrentes.

9.3 Problemas Propostos

Considere fixado um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.

1. Estude a posição relativa das retas **r** e **s** nos seguintes casos:

(a) r: $X = (1, -1, 1) + \lambda(-2, 1, -1)$ s: $\begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$

(b) r: $\begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ s: $\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

(c) r: $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$ s: $X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 0)$

(d) r: $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{4} = z$ s: $\begin{cases} 2x - y + 7 = 0 \\ x + y - 6z + 2 = 0 \end{cases}$

(e) r: $X = (8, 1, 9) + \lambda(2, -1, 3)$ s: $X = (3, -4, 4) + \lambda(1, -2, 2)$

(f) r: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+2}{5}$ s: $x = -y = \frac{z-1}{4}$

(g) r: $\frac{x+1}{2} = y = -z$ s: $\begin{cases} x + y + - 3z = 1 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$

(h) r: $x + 3 = \frac{2y-3}{4} = \frac{z-1}{3}$ s: $X = (0, 2, 2) + \lambda(1, 1, -1)$

2. Calcule $\mathbf{m} \in \mathbb{R}$ para que

(a) **r** e **s** sejam paralelas;

(b) **r**, **s** e **t** sejam paralelas a um mesmo plano;

(c) **r** e **t** sejam concorrentes;

(d) **s** e **t** sejam coplanares;

(e) **r** e **s** sejam reversas.

São dadas: r: $\begin{cases} x = my - 1 \\ z = y - 1 \end{cases}$ s: $x = \frac{y}{m} = z$ t: $-x + z = y = -z - 1$

3. No Exercício 1, obtenha, quando possível, uma equação geral para o plano determinado pelas retas **r** e **s**.

4. Nos itens do Exercício 1 em que as retas **r** e **s** são reversas, obtenha uma equação geral para o plano que contém a reta **r** e é paralelo à reta **s**.

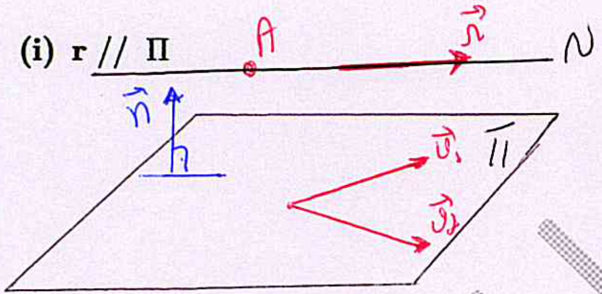
5. Determine **m** para que as retas dadas r: X = (1, 0, 2) + λ(2, 1, 3) e s: X = (0, 1, -1) + + λ(1, m, 2m) sejam coplanares e, nesse caso, estude sua posição relativa.

9.4 Reta e Plano

O problema que queremos resolver agora é: dados uma reta **r** e um plano Π, decidir se **r** está contida em Π, se é paralela a Π ou transversal a Π (isto é, $r \cap \Pi = \{P\}$).

Fixemos um sistema de coordenadas $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ em relação ao qual $\vec{r}$ é um vetor diretor e A é um ponto fixado de uma reta **r** e $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ são vetores diretores de um plano Π. Temos, então, duas situações possíveis:

(i) r // Π



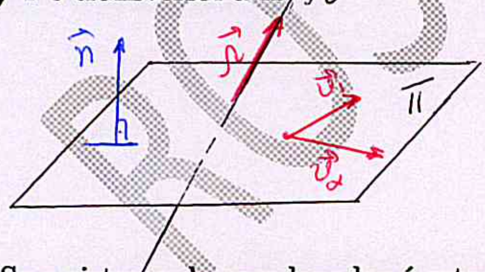
$r \,//\, \Pi \iff \vec{r}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ são LD

No caso em que $r \,//\, \Pi$ e $A \in \Pi$, tem-se $r \subset \Pi$.

Se o sistema de coordenadas é ortogonal e $\vec{n}$ é um vetor normal a Π, então:

$$r \,//\, \Pi \iff \vec{r} \perp \vec{n} \iff \vec{r} \bullet \vec{n} = 0$$

(ii) r é transversal a Π



r e Π são transversais $\iff \vec{r}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ são LI

Se o sistema de coordenadas é ortogonal e $\vec{n}$ é um vetor normal a Π, então:

$$r \text{ é transversal a } \Pi \iff \vec{r} \textbf{ não é } \text{ortogonal a } \vec{n} \iff \vec{r} \bullet \vec{n} \neq 0$$

Observação: Um outro modo de estudar a posição relativa entre uma reta **r** e um plano Π é estudar a intersecção $r \cap \Pi$:

◇ $r \subset \Pi \iff r \cap \Pi$ contém infinitos pontos.

◇ $r // \Pi$ e $r \not\subset \Pi \iff r \cap \Pi = \emptyset$

◇ r transversal a Π $\iff r \cap \Pi = \{P\}$

9.5 Problemas Resolvidos

1. Considerando o plano Π: X = (1, 1, 3) + λ(1, -1, 1) + μ(0, 1, 3) e a reta **r:** X = (1, 1, 1) + + α(3, 2, 1), estude a posição relativa de **r** e Π.

Primeira Solução: Os vetores $\vec{u}$ = (1, -1, 1) e $\vec{v}$ = (0, 1, 3) são vetores diretores do plano Π e $\vec{r}$ = (3, 2, 1) é um vetor diretor da reta **r**. Basta analisar a dependência linear destes vetores. Como

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -17 \neq 0$$

segue que os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{r}$ são **LI** e, portanto, a reta **r** é transversal ao plano Π.

Segunda Solução: Conhecendo o ponto A = (1, 1, 3) do plano Π, obtemos a seguinte equação geral de Π:

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & y-1 & z-3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

e daí segue que Π: 4x + 3y - z - 4 = 0. Logo, $\vec{n}$ = (4, 3, -1) é um vetor normal a Π e portanto $\vec{n} \bullet \vec{r}$ = (4, 3, 1) • (3, 2, 1) = 4.3 + 3.2 + 1.1 = 12 + 6 + 1 = 17 $\neq$ 0; ou seja, **r** é transversal a Π.

2. Considerando o plano Π: X = (1, 0, 1) + λ(1, 1, 1) + μ(0, 0, 3) e a reta **r:** X = (2, 2, 1) + + α(3, 3, 0), estude a posição relativa de **r** e Π.

Solução: Os vetores $\vec{u}$ = (1, 1, 1) e $\vec{v}$ = (0, 0, 3) são vetores diretores do plano Π e um vetor diretor da reta **r** é $\vec{r}$ = (3, 3, 0). Estes vetores são **LD**, uma vez que

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3\\ 3 & 3 & 0\end{pmatrix} = 0$$

Isto significa que $\mathbf{r} \subset \Pi$ ou $\mathbf{r} \mathbin{//} \Pi$. Para decidir esta questão, basta tomarmos um ponto de **r** e analisar se ele pertence a Π. O ponto A = (2, 2, 1) é um ponto de **r** e

$$(2, 2, 1) \in \Pi \iff (2, 2, 1) = (1, 0, 1) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(0, 0, 3) \iff \begin{cases} 2 = 1 + \lambda \\ 2 = \lambda \\ 1 = 1 + \lambda + 3\mu \end{cases}$$

Como o sistema obtido é incompatível, segue que $A \notin \Pi$ e, portanto $\mathbf{r} \mathbin{//} \Pi$.

3. Considerando o plano Π: x + y - 2 = 0 e a reta **r:** X = (1, 1, 0) + α(1, -1, 1), estude a posição relativa de **r** e Π.

Solução: Temos que $\vec{r}$ = (1, -1, 1) e $\vec{n}$ = (1, 1, 0) são, respectivamente, um vetor diretor de **r** e um vetor normal a Π. Como $\vec{r} \bullet \vec{n}$ = 1.1 + (-1).1 = 0, segue que estes vetores são ortogonais e, portanto, $\mathbf{r} \subset \Pi$ ou $\mathbf{r} \mathbin{//} \Pi$. Além disso, A = (1, 1, 0) $\in$ **r** satisfaz a equação de Π (uma vez que 1 + 1 - 2 = 0) e, portanto, $\mathbf{r} \subset \Pi$.

9.6 Problemas Propostos

Considere fixado um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.

1. Estude a posição relativa da reta **r** e do plano Π e, quando forem tranversais, obtenha o ponto intersecção P, nos casos:

(a) r: X = (1, 1, 0) + λ(0, 1, 1) Π: x - y - z = 2

(b) r: $\frac{x-1}{2} = y = z$ Π: X = (3, 0, 1) + λ(1, 0, 1) + μ(2, 2, 0)

(c) r: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ Π: X = (0, $\frac{1}{2}$, 0) + λ(1, -$\frac{1}{2}$, 0) + μ(0, 1, 1)

(d) r: $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ Π: x + y = 2

(e) r: X = (0, 0, 0) + λ(1, 4, 1) Π: X = (1, -1, 1) + α(0, 1, 2) + β(1, -1, 0)

(f) r: $\frac{x+2}{3}$ = y - 1 = $\frac{z+3}{3}$ Π: 3x - 6y - z = 0

2. Calcule o valor de **m** para que a reta r: X = (1, 1, 1) + λ(2, m, 1) seja paralela ao plano Π: X = (0, 0, 0) + α(1, 2, 0) + β(1, 0, 1).

3. Calcule **m**, **n** $\in \mathbb{R}$ para que a reta r: X = (n, 2, 0) + λ(2, m, m) esteja contida no plano Π: x - 3y + z = 1.

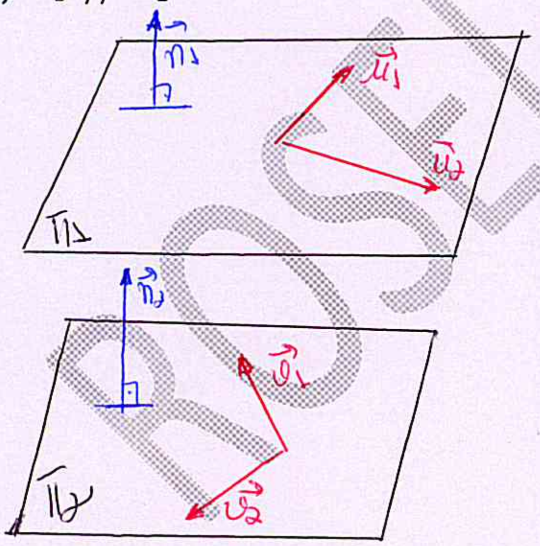
4. Calcule **m** para que a reta r: $\frac{x-1}{m} = \frac{y}{2} = \frac{z}{m}$ seja transversal ao plano Π: x + my + z = 0.

9.7 Plano e Plano

O problema que queremos resolver agora é: dados os planos Π_1 e Π_2, decidir se $\Pi_1 = \Pi_2$ ou se Π_1 e Π_2 são paralelos distintos ou Π_1 e Π_2 são transversais. Neste último caso, a interseçcão $\Pi_1 \cap \Pi_2$ é uma reta.

Fixado um sistema de coordenadas (O, $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$), consideremos o plano Π_1, com vetores diretores $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ e o plano Π_2, com vetores diretores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Temos as seguintes possíveis situações:

(i) Π_1 // Π_2

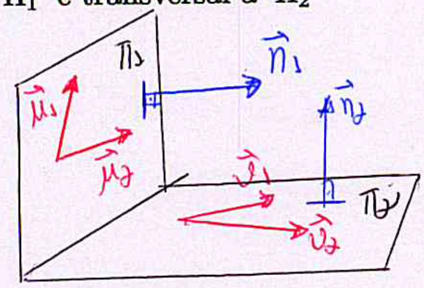


$$\Pi_1 \ // \ \Pi_2 \iff \vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ são LD}$$
$$\text{e} \quad \vec{u}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ são LD}$$

Se o sistema de coordenadas é ortogonal e $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ são vetores respectivamente normais a Π_1 e a Π_2, então:

$$\Pi_1 \ // \ \Pi_2 \iff \vec{n}_1 \ // \ \vec{n}_2$$

(ii) Π_1 é transversal a Π_2



Π_1 é transversal a Π_2 $\iff$ $\vec{u}_1,\ \vec{v}_1,\ \vec{v}_2$ são LI

ou $\vec{u}_2,\ \vec{v}_1,\ \vec{v}_2$ são LI

Se o sistema de coordenadas é ortogonal e $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ são vetores respectivamente normais a Π_1 e a Π_2, então:

$$\Pi_1 \text{ é transversal a } \Pi_2 \iff \vec{n}_1,\ \vec{n}_2 \text{ são LI.}$$

Nesse caso, a intersecção entre Π_1 e Π_2 é uma reta **r**, cujo vetor diretor é **paralelo** a $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$.

9.8 Problemas Resolvidos

Considere fixado um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.

1. Estude a posição relativa dos planos

Π_1: X = (1, 0, 1) + λ (1, 1, 1) + μ(0, 1, 0) e Π_2: X = (0, 0, 0) + α (1, 0, 1) + β(-1, 0, 3).

Solução: Inicialmente, obtemos equações gerais de Π_1 e de Π_2 (faça isso!!!):

$$\Pi_1:\ x - z = 0 \qquad\qquad \Pi_2:\ y = 0$$

ou seja:

$$\Pi_1:\ 1.x + 0.y + (-1).z = 0 \qquad\qquad \Pi_2:\ 0.x + 1.y + 0.z = 0$$

Então: $\vec{n}_1 = (1, 0, -1)$ e $\vec{n}_2 = (0, 1, 0)$ são vetores normais a Π_1 e a Π_2, respectivamente. Como $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são LI, segue que os planos Π_1 e Π_2 são transversais e, portanto, $\Pi_1 \cap \Pi_2$ é uma reta **r**. Uma maneira (existem outras) de encontrar equações paramétricas dessa reta **r** é resolvendo o sistema formado pelas equações de Π_1 e Π_2:

$$r: \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} ; \quad \overset{\lambda := z}{\Longrightarrow} \quad r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

2. Estude a posição relativa dos planos

Π_1: $2x - y + z - 1 = 0$ e Π_2: $x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - 9 = 0$.

Solução: Das equações de Π_1 e de Π_2 os vetores normais a estes planos são, respectivamente, $\vec{n}_1 = (2, -1, 1)$ e $\vec{n}_2 = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Como $\vec{n}_1 = 2\,\vec{n}_1$, segue que estes vetores são LD, e, portanto, os planos Π_1 e Π_2 são paralelos. Na equação de Π_1, fazendo $x = y = 0$, obtemos $z = 1$ e, portanto, $A = (0, 0, 1) \in \Pi_1$. Como as coordenadas de A não satisfazem a equação de Π_2, segue que $A \notin \Pi_2$ e daí conclui-se que Π_1 e de Π_2 são planos paralelos distintos.

3. Estude a posição relativa dos planos Π_1: $X = (0, 1, 6) + \lambda\,(1, 0, 1) + \mu\,(4, 1, -6)$ e
Π_2: $X = (36, -6, -28) + \lambda\,(0, 1, 10) + \mu\,(8, -1, -2)$

Solução: Das equações de Π_1 e de Π_2, temos que $\vec{u}_1 = (1, 0, 1)$ e $\vec{u}_2 = (4, -1, -6)$ são vetores diretores de Π_1 e $\vec{v}_1 = (0, 1, 10)$ e $\vec{v}_2 = (8, -1, -2)$. Devemos analisar a dependência linear de $L_1 = \{\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ e depois, se necessário, de $L_2 = \{\vec{u}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Fazendo os cálculos, conclui-se que L_1 é LD e, dessa forma, precisamos analisar a dependência linear de L_2. Novamente, fazendo os cálculos, obtém-se que L_2 é LD. Assim, $\Pi_1 \,//\, \Pi_2$. Resta, então, analisar se estes planos são coincidentes ou não. Das equações deos planos, segue que $A = (0, 1, 6) \in \Pi_1$ e facilmente verifica-se que $A \in \Pi_2$. Assim, $\Pi_1 = \Pi_2$.

9.9 Problemas Propostos

1. Estude a posição relativa de Π_1 e Π_2 nos casos:

(a) Π_1: $X = (1, 1, 1) + \lambda(0, 1, 1) + \mu(-1, 2, 1)$
Π_2: $X = (1, 0, 0) + \lambda(1, -1, 0) + \mu(-1, -1, -2)$

(b) Π_1: $2x - y + 2z - 1 = 0$
Π_2: $4x - 2y + 4z = 0$

(c) Π_1: $x - 2y + 2z - 2 = 0$
Π_2: $X = (0, 0, 1) + \lambda(1, 0, 3) + \mu(-1, 1, 1)$

2. Encontre o valor de **m** para que os planos

Π_1: $X = (1, 1, 0) + \lambda(m, 1, 1) + \mu(1, 1, m)$

Π_2: $2x + 3y + 2z + n = 0$

sejam paralelos distintos, nos casos: (a) $n = -5$ e (b) $n = 1$.

3. Mostre que os planos

$$\Pi_1\text{: } X = (0,\ 0,\ 0) + \lambda(-1,\ m,\ 1) + \mu(2,\ 0,\ 1)$$

$$\Pi_2\text{: } X = (1,\ 2,\ 3) + \alpha(m,\ 1,\ 0) + \beta(1,\ 0,\ m)$$

são transversais, para todo $\mathbf{m} \in \mathbb{R}$.

A partir daqui, considere, quando necessário, fixado um sistema **ortogonal** de coordenadas.

4. Obtenha uma equação vetorial para a reta **t** que passa por P e é concorrente com **r** e **s**, nos seguintes casos:

(a) $P = (1,\ 1,\ 1)$ r: $x + 3 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$ s: $X = (-2,\ 0,\ 4) + \lambda(1,\ 1,\ -1)$

(b) $P = (-2,\ 2,\ 4)$ r: $X = (-1,\ 1,\ 3) + \lambda(-2,\ -2,\ 2)$ s: $X = (-2,\ 4,\ 4) + \lambda(1,\ 2,\ 3)$

(c) $P = (1,\ 0,\ 6)$ r: $\begin{cases} x - y - z + 5 = 0 \\ 2x - z + 4 = 0 \end{cases}$ s: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{3}$

(d) $P = (1,\ -2,\ -1)$ r: $\begin{cases} z = x - 2 \\ y = 1 - x \end{cases}$ s: $\begin{cases} z = x - 1 \\ y = 1 + 2x \end{cases}$

(e) $P = (1,\ 0,\ 3)$ r: $X = (1,\ 0,\ 0) + \lambda(3,\ -1,\ 2)$ s: $X = (-5,\ 2,\ -4) + \lambda(1,\ 5,\ -1)$

5. Obtenha uma equação vetorial para a reta **t**, concorrente com **r** e **s**, nos seguintes casos:

(a) **r:** $X = (1,\ 1,\ -1) + \lambda(2,\ 1,\ -1)$ **s:** $\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$

e **t** é paralela à reta determinada por $M = (1,\ -1,\ 4)$ e $N = (0,\ -3,\ -1)$

(b) **r:** $\frac{x+1}{2} = y = -z$ **s:** $X = (\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 0) + \lambda(5,\ 4,\ 3)$

e **t:** é paralela ao vetor $\vec{v} = (1,\ 0,\ 1)$

(c) **r:** $X = (1,\ 2,\ 3) + \lambda(2,\ -1,\ 0)$ **s:** $X = (0,\ 1,\ -3) + \lambda(-1,\ 1,\ 2)$

e **t** é paralela à reta h: $X = (0,\ 0,\ 0) + \lambda(\frac{43}{9},\ \frac{86}{27},\ -\frac{43}{27})$

6. Obtenha uma equação vetorial para a reta **t** que passa pelo ponto P, é paralela ou contida no plano Π e concorrente com a reta **r** nos seguintes casos:

(a) $P = (1, 1, 0)$ $\quad \Pi$: $2x + y - z - 3 = 0$ $\quad$ r: $X = (1, 0, 0) + \lambda(-1, 0, 1)$

(b) $P = (1, 0, 1)$ $\quad \Pi$: $x - 3y - z = 1$ $\quad$ r: $X = (0, 0, 0) + \lambda(2, 1, -1)$

(c) $P = (1, 2, 1)$ $\quad \Pi$: $x - y = 0$ $\quad$ r: $X = (1, 0, 0) + \lambda(2, 2, 1)$

7. Obtenha uma equação vetorial para a reta **t** contida no plano Π: $x - y + z = 0$ e que é concorrente com as retas r: $\begin{cases} z = x - 2 \\ y = 1 - x \end{cases}$ $\quad$ s: $\begin{cases} z = x - 1 \\ y = 1 + 2x \end{cases}$

8. Obtenha uma equação vetorial para a reta **t** paralela aos planos α e β e concorrente com as retas **r** e **s**, sendo:

r: $x - 2y = z - x = y + 1$ $\quad$ s: $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$

α: $x + 2y + z - 1 = 0$ $\quad$ β: $x + 4y + 2z = 0$

9. Obtenha uma equação geral para o plano que contém a reta r: $X = (1, 1, 0) + \lambda(2, 1, 2)$ e é paralelo à reta s: $\frac{x+1}{2} = y = z + 3$.

10. Obtenha uma equação geral para o plano que passa pelo ponto $P = (1, 3, 4)$ e é paralelo ao plano Π: $x + y + z + 1 = 0$.

11. Projete o ponto $P = (1, 4, 0)$ sobre o plano Π: $x + y - 2z + 1 = 0$, paralelamente à reta r: $X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 4, 1)$.