Capítulo 3

Transformações de Coordenadas

É muito freqüente, em Geometria Analítica, a necessidade de se passar de um sistema de coordenadas S, adotado inicialmente, para outro sistema mais conveniente S′. Essa maior conveniência pode ter origem em vários fatores. Por exemplo, da não ortogonalidade do sistema S pode surgir a necessidade da escolha de um novo sistema S′ ortogonal. Ou ainda, um novo sistema de coordenadas escolhido conveniente pode facilitar bastante os cálculos algébricos. Neste Capítulo, estudaremos como se alteram as coordenadas de pontos e as equações de lugares geométricos quando mudamos de um sistema de coordenadas para outro. Estudaremos dois tipos de transformações de coordenadas: a translação e a rotação dos eixos coordenados.

3.1 Transformações

3.1.1 Definição

Uma *transformação* é uma operação por meio da qual uma relação, expressão ou figura é mudada em outra, de acordo com uma lei dada. Essa lei dada é expressa por uma ou mais equações, que são chamadas *equações de transformação*.

3.1.2 Translação dos eixos coordenados

Sejam $S = \{O, x, y\}$ e $S' = \{O', x', y'\}$ dois sistemas de coordenadas no plano. Suponha que S' foi obtido a partir de S da seguinte maneira: xOy foi movido para a posição $x'O'y'$, de modo que o eixo $O'x'$ é paralelo e tem a mesma orientação que o eixo Ox e o eixo $O'y'$ é paralelo e tem a mesma orientação que o eixo Oy.

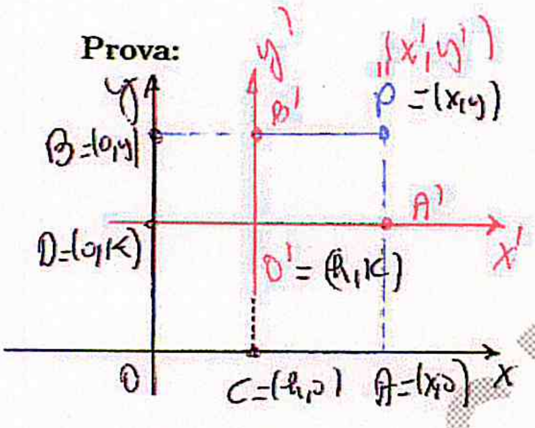
A operação acima descrita de mover os eixos coordenados no plano coordenado para uma nova posição, de modo que os novos eixos sejam paralelos aos antigos eixos, respectiva e semelhantemente orientados, é chamada de ***translação dos eixos coordenados.***

Em todo este Capítulo está fixado um sistema de coordenadas cartesianas $S = \{O, x, y\}$.

Teorema 1: Se os eixos são transladados para uma nova origem $O' = (h, k)$ e se as coordenadas de um ponto P no sistema antigo e no sistema novo são (x, y) e (x', y'), respectivamente, então as equações de transformação das coordenadas antigas para as coordenadas novas são dadas por:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x' + h \\ y &= y' + k \end{aligned}} \qquad (3.1)$$

Prova:



Consideremos o sistema de coordenadas $S' = \{O', x', y'\}$ obtido transladando-se a origem do sistema S para o ponto O', cujas coordenadas em relação ao sistema S são (h, k), isto é, $O' = (h, k)$. Seja P um ponto arbitrário do plano, cujas coordenadas em relação a S e a S' são, respectivamente, (x, y) e (x', y').

Consideremos os pontos:

$$\begin{cases} A = (x,0),\ \ B = (0,y),\ \ C = (h,0),\ \ D = (0,k): & \text{coordenadas no sistema antigo} \\ A' = (x',0'),\ \ B' = (0',y'): & \text{coordenadas no sistema novo} \end{cases}$$

Assim, do gráfico acima, segue que:

$$\overline{O'A'} = \overline{CA} = x' \qquad \overline{O'B'} = \overline{DB} = y'$$

$$\overline{DO'} = \overline{OC} = h \qquad \overline{CO'} = \overline{OD} = k$$

e, portanto,

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

■

3.1.3 Problemas Resolvidos

1. Determine a equação da curva $x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x + 4y - 5 = 0$ depois que a origem do sistema de coordenadas foi transladada para o ponto $O' = (1, 2)$.

Solução: As equações de translação são: $\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' + 2 \end{cases}$

Substituindo-se na equação dada, obtemos:

$$(x' + 1)^3 - 3(x' + 1)^2 - (y' + 2)^2 + 3(x' + 1) + 4(y' + 2) - 5 = 0$$

e, portanto,

$$(x'^3 + 3x'^2 + 3x' + 1) - (3x'^2 + 6x' + 3) - (y'^2 + 4y' + 4) + (3x' + 3) + (4y' + 8) - 5 = 0$$

Ou seja:

$$x'^3 + (3 - 3)x'^2 - y'^2 + (3 - 6 + 3)\, x' + (-4 + 4)y' + (1 - 3 - 4 + 3 + 8 - 5) = 0$$

Dessa forma: $x'^3 - y'^2 = 0$

Observação: No Problema 1 a nova origem foi especificada. Usualmente, as coordenadas da nova origem devem ser determinadas, como está descrito no próximo exemplo.

2. Utilizando uma translação dos eixos coordenados, elimine os termos do 1º grau na equação $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$.

Solução: Consideremos a translação dos eixos coordenados para o ponto $O' = (h, k)$. As equações de translação são:

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

Logo, substituindo-se na equação dada, obtemos:

$$(x' + h)^2 + (y' + k)^2 - 2(x' + h) + 6(y' + k) + 5 = 0$$

$$x'^2 + 2hx' + h^2 + y'^2 + 2ky' + k^2 - 2x' - 2h + 6y' + 6k + 5 = 0$$

E, portanto:

$$x'^2 + y'^2 + (2h - 2)\, x' + (2k + 6)\, y' + \underline{(h^2 + k^2 - 2h + 6k + 5)} = 0$$

Como queremos que esta última equação não contenha termos do 1º grau, devemos escolher h e **k** de modo a ter:

$$\begin{cases} 2h - 2 = 0 \\ 2k + 6 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad h = 1 \quad \text{e} \quad k = -3$$

e, dessa forma,

$$h^2 + k^2 - 2h + 6k + 5 = (1)^2 + (-3)^2 - 2(1) + 6(-3) + 5 = 1 + 9 - 2 - 18 + 5 = 15 - 20 = -5$$

Portanto, considerando o novo sistema de coordenadas com origem no ponto $O' = (1, -3)$, obtemos a equação:

$$x'^2 + y'^2 = 5 \quad : \text{ circunferência com centro em } O' = (1, -3) \text{ e raio } \sqrt{5}$$

<u>Note que:</u> O termo grifado na solução do Problema 2 é exatamente a equação dada inicialmente, trocando-se: a variável **x** pela abscissa **h** da nova origem e a variável **y** pela ordenada **k** da nova origem. Isto sempre ocorre quando efetuamos uma translação dos eixos coordenados: o termo independente da equação nas novas coordenadas é igual à equação dada inicialmente, trocando-se **x** por **h** e **y** por **k**.

Observação: No caso de equações do segundo grau desprovidas do termo misto do 2º grau (isto é, sem o termo **xy**), como o do Problema 2, é possível efetuar a transformação de coordenadas pelo método de **completar quadrados.** Vejamos como ficaria a solução do Problema 2, por esse método:

2ª Solução: A equação dada: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$ pode ser reescrita na forma $(x^2 - 2x) + (y^2 + 6y) + 5 = 0$. Completando os quadrados, obtemos:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) + 5 - 1 - 9 = 0$$

e, portanto, $$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 1$$

Substituindo-se: $x - 1 = x'$ e $y + 3 = y'$ obtemos as equações de translação:

$$\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 3 \end{cases} \quad \text{e a equação dada no novo sistema de coordenadas: } x'^2 + y'^2 = 1$$

No Problema 2, o enunciado definia o tipo de simplificação desejada. Quando isto não ocorre, procuramos efetuar o maior número de simplificações possíveis, como ilustra o próximo exemplo:

3. Por uma translação dos eixos coordenados, simplificar a equação: $y^2 - 4x - 6y + 17 = 0$.

Solução: Substituindo na equação dada as equações de translação: $x = x' + h$ e $y = y' + k$, obtemos: $(y' + k)^2 - 4(x' + h) - 6(y' + k) + 17 = 0$. Efetuando-se os cálculos necessários, se escreve na forma:

$$y'^2 - 4x' + (2k - 6)y' + (k^2 - 4h - 6k + 17) = 0 \qquad (\Delta)$$

Vamos, agora, determinar os valores de **h** e de **k** que tornarão a equação (Δ) mais simples. Note que: não podemos eliminar o termo x', uma vez que seu coeficiente é -4. Mas, neste caso, é possível eliminar tanto o termo y' como o termo constante. Para isto, basta fazermos:

$$\begin{cases} \mathbf{2k - 6 = 0} \\ \mathbf{k^2 - 4h - 6k + 17 = 0} \end{cases} \Longrightarrow \quad \mathbf{h = 2 \text{ e } k = 3}$$

Para os valores acima encontrados para **h** e **k**, a equação (Δ) se reduz a $y'^2 - 4x' = 0$, que sabemos ser uma parábola com foco no eixo $O'_{x'}$.

3.1.4 Problemas Propostos

Em cada uma dos problemas a seguir, desenhe ambos os conjuntos de eixos coordenados e, quando possível, esboce o gráfico do lugar geométrico encontrado.

1. Por uma translação dos eixos coordenados para a nova origem indicada, transforme a equação dada a seguir:

(a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$, $O' = (-1, 3)$ (R: $x'^2 + y'^2 = 4$)

(b) $3x^2 + 2y^2 + 12x - 4y + 8 = 0$, $O' = (-2, 1)$ (R: $3x'^2 + 2y'^2 = 6$)

(c) $4x^2 - y^2 - 8x - 10y - 25 = 0$, $O' = (1, -5)$ (R: $4x'^2 - y'^2 = 4$)

(d) $y^3 - x^2 + 3y^2 - 4x + 3y - 3 = 0$, $O' = (-2, -1)$ (R: $y'^3 - x'^2 = 0$)

(e) $xy - 3x + 4y - 13 = 0$, $O' = (-4, 3)$ (R: $x'y' = 1$)

2. Usando as equações de translação dos eixos coordenados, transforme cada uma das equações a seguir em outra desprovida de termos do 1º grau.

(a) $2x^2 + y^2 + 16x - 4y + 32 = 0$ (R: $2x'^2 + y'^2 = 4$)

(b) $3x^2 + 2y^2 + 18x - 8y + 29 = 0$ (R: $3x'^2 + 2y'^2 = 6$)

(c) $3x^2 - 2y^2 - 42x - 4y + 133 = 0$ (R: $3x'^2 - 2y'^2 = 12$)

(d) $xy - x + 2y - 10 = 0$ (R: $x'y' = 8$)

(e) $8x^3 + 24x^2 - 4y^2 + 24x - 12y - 1 = 0$ (R: $2x'^3 - y'^2 = 0$)

3. Usando o método de completar quadrados, transforme cada uma das equações a seguir em outra desprovida de termos do 1º grau.

(a) $4x^2 + 4y^2 + 32x - 4y + 45 = 0$ (R: $x'^2 + y'^2 = 5$)

(b) $2x^2 + 5y^2 - 28x + 20y + 108 = 0$ (R: $2x'^2 + 5y'^2 = 10$)

(c) $x^2 - 3y^2 + 6x + 6y + 3 = 0$ (R: $x'^2 - 3y'^2 = 3$)

(d) $12x^2 + 18y^2 - 12x + 12y - 1 = 0$ (R: $2x'^2 + 3y'^2 = 1$)

(e) $12x^2 - 18y^2 - 12x - 12y - 5 = 0$ (R: $2x'^2 - 3y'^2 = 1$)

4. Simplificar a equação dada, por meio de uma translação dos eixos coordenados:

(a) $x^2 + 8x - 3y + 10 = 0$ (R: $x'^2 - 3y' = 0$)

(b) $16x^2 + 16y^2 + 8x - 48y + 5 = 0$ (R: $x'^2 + y'^2 = 2$)

(c) $72x^2 + 36y^2 - 48x + 36y - 55 = 0$ (R: $2x'^2 + y'^2 = 2$)

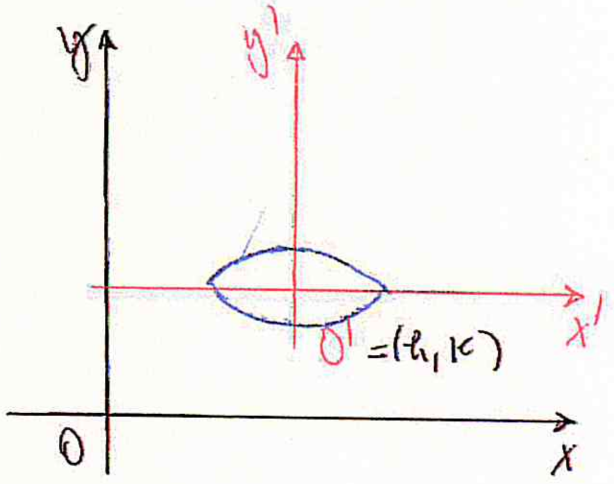
(d) $y^2 - 6x^2 - 24x - 2y - 32 = 0$ (R: $y'^2 - 6x'^2 = 9$)

(e) $30xy + 24x - 25y - 80 = 0$ (R: $x'y' = 2$)

3.2 Equação da Elipse com Centro no Ponto (h, k)

Veremos, agora, como fica a equação de uma elipse quando o seu centro não é a origem do sistema de coordenadas. Teremos dois casos a considerar, a saber:

1º Caso: o eixo maior é paralelo ao eixo O_x



Em relação ao sistema $x'O'y'$ a equação desta elipse é:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

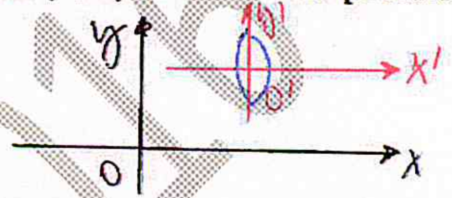
As equações de translação são:

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

e daí segue que:

$$\boxed{E: \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1} \tag{3.2}$$

A equação 3.2 é chamada **equação da elipse com centro em (h, k) e eixo maior paralelo a O_x**.



2º Caso: o eixo maior é paralelo ao eixo O_y

Analogamente ao caso anterior, obtemos a **equação da elipse com centro em (h, k) e eixo maior paralelo a O_y**:

$$\boxed{E: \quad \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1} \tag{3.3}$$

Observações: **1.** Cada uma das equações 3.2 e 3.3 é também chamada de **2ª forma padrão da equação da elipse.**

2. Em todos os problemas deste Capítulo, usaremos a letra A para designar um dos vértices pertencentes ao eixo maior e a letra B para designar um dos vértices pertencentes ao eixo menor da elipse estudada.

3. Suponha que um ponto P tenha coordenadas (x, y) em relação ao sistema S e (x′, y′) em relação ao sistema $S' = \{O', x', y'\}$, sendo $O' = (h, k)$. As equações de translação são

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

E, assim: $P = (x, y) = (x' + h, y' + k) = (x', y') + (h, k)$

Dessa forma, dada a elipse $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$, com $x = x' + h$ e $y = y' + k$, seus focos estão no eixo $O'x'$ e, portanto, denotando por F' os focos no sistema S' e por $F = (x, y)$ os focos no sistema S, segue que: $F' = (\pm\, c, 0) = (x', y')$

e, portanto, $F = (x, y) = (x' + h, y' + k) = (x', y') + (h, k) = (\pm\, c, 0) + (h, k)$

Ou seja: $F = (\pm\, c + h, k)$

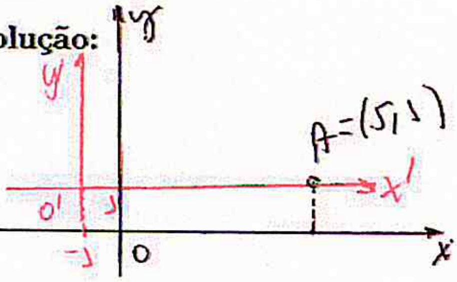
Analogamente, mostra-se que: $A = (\pm\, a + h, k)$ e $B = (h, \pm\, b + k)$.

Exercício: Refaça os cálculos da Observação 3 para uma elipse com focos no eixo paralelo ao eixo O_y.

3.2.1 Problemas Resolvidos

1. Determine a equação da elipse de centro $C = (-1, 1)$, um dos vértices $A = (5, 1)$ e excentricidade $e = \frac{2}{3}$.

Solução:



A equação desta elipse é da forma:

$$\frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$$

pois seu eixo maior é paralelo a O_x. Sabemos que:

$$a = d(C, A_2) = \sqrt{(5+1)^2 + (1-1)^2} = 6$$

Além disso, temos que $e = \frac{c}{a} \implies \frac{2}{3} = \frac{c}{6} \implies c = 4$

Finalmente, na elipse vale a relação $b^2 = a^2 - c^2$, e, portanto, $b^2 = 36 - 16 = 20$. Dessa forma, a elipse procurada tem equação:

$$E: \frac{(x+1)^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{20} = 1$$

2. Os extremos do eixo maior de uma elipse são os pontos $A_1 = (-3, -1)$ e $A_2 = (-3, 7)$ e sua excentricidade é $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Determine a equação desta elipse, os comprimentos dos seus eixos maior e menor, o comprimento da cada latus rectum e as coordenadas dos seus focos.

Solução:

O eixo maior desta elipse é paralelo ao eixo O_y e o seu centro é o ponto médio do segmento A_1A_2; isto é, seu centro é o ponto $C = (\frac{-3-3}{2}, \frac{7-1}{2}) =$ $= (-3, 3)$. Assim, a equação desta elipse é da forma:

$$\frac{(x+3)^2}{b^2} + \frac{(y-3)^2}{a^2} = 1$$

Além disso,

- $2a = d(A_1, A_2) = \sqrt{(3-3)^2 + (7+1)^2} = 8 \implies \mathbf{a = 4}$
- $e = = \frac{c}{a} \implies \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{c}{4} \implies \mathbf{c = 2\sqrt{3}}$

Na elipse vale a relação: $b^2 = a^2 - c^2 \implies b^2 = 16 - 12 = 4 \implies \mathbf{b = 2}$

Dessa forma:

Equação da elipse: $$E: \frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

eixo maior: $2a = 8$ uc

eixo menor: $2b = 4$ uc

latus rectum: $\frac{2b^2}{a} = \frac{2.2^2}{4} = 2$ uc

Além disso,

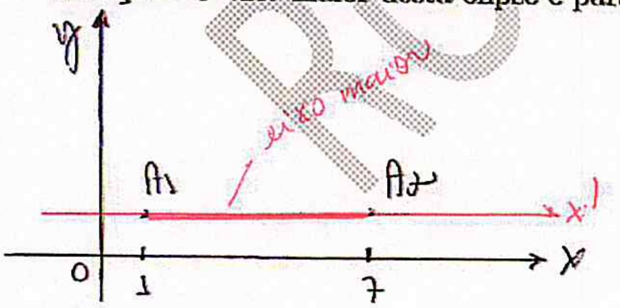
$$F_1' = (0, -c) = (0, -2\sqrt{3}) \quad \text{e} \quad F_2' = (0, c) = (0, 2\sqrt{3}) \quad \text{e} \quad C = (h, k) = (-3, 3)$$

de onde segue que

$$F_1 = F_1' + C = (0, -2\sqrt{3}) + (-3, 3) \implies F_1 = (-3, 3 - 2\sqrt{3})$$
$$F_2 = F_2' + C = (0, 2\sqrt{3}) + (-3, 3) \implies F_2 = (-3, 3 + 2\sqrt{3})$$

3. Os vértices de uma elipse com eixo focal paralelo a O_x são $A_1 = (1, 1)$ e $A_2 = (7, 1)$ e sua excentricidade é $e = \frac{1}{3}$. Determine a equação desta elipse, os comprimentos dos seus eixos maior e menor, o comprimento de cada latus rectum e as coordenadas dos seus focos.

Solução: O eixo maior desta elipse é paralelo ao eixo O_x e o seu centro é o ponto médio do segmento A_1A_2; isto é, seu cento é o ponto



$$C = \left(\frac{1+7}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = (4, 1).$$

Assim, a equação desta elipse é da forma:

$$\frac{(x-4)^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1.$$

Além disso,

- $2a = d(A_1, A_2) = \sqrt{(7-1)^2 + (1-1)^2} = 6 \implies \mathbf{a = 3}$
- $e = = \frac{c}{a} \implies \frac{1}{3} = \frac{c}{3} \implies \mathbf{c = 1}$

Na elipse vale a relação: $b^2 = a^2 - c^2 \implies b^2 = 9 - 1 = 8 \implies \mathbf{b = 2\sqrt{2}}$

Dessa forma:

Equação da elipse: $$\text{E:}\ \frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1$$

eixo maior: $2a = 6$ uc

eixo menor: $2b = 4\sqrt{2}$ uc

latus rectum: $\frac{2b^2}{a} = \frac{2.(2\sqrt{2})^2}{3} = \frac{2.4.2}{3} = \frac{16}{3}$ uc

Além disso,

$$F_1' = (-c, 0) = (-1, 0) \quad \text{e} \quad F_2' = (c, 0) = (1, 0) \quad \text{e} \quad C = (h, k) = (4, 1)$$

de onde segue que

$$F_1 = F_1' + C = (-1, 0) + (4, 1) \implies F_1 = (3, 1)$$
$$F_2 = F_2' + C = (1, 0) + (4, 1) \implies F_2 = (5, 1)$$

4. Reduzir a equação da elipse $x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0$ à forma padrão e determinar as coordenadas do seu centro, dos seus vértices e dos seus focos.

1ª Solução: completando os quadrados

A equação dada pode ser reescrita na forma:

$$(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 3y) + 6 = 0$$

Completando-se os quadrados em cada uma das parcelas acima, obtemos:

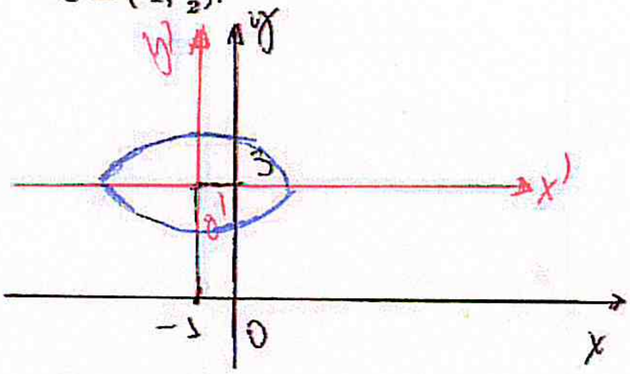
$$(x^2 + 2x + 1) + 4(y^2 - 3y + \tfrac{9}{4}) + 6 - 1 - 9 = 0$$

isto é: $$(x + 1)^2 + (y - \tfrac{3}{2})^2 = 4$$

e, portanto, a equação padrão desta elipse é:

$$\text{E:}\ \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-\frac{3}{2})^2}{1} = 1$$

Ou seja: trata-se de uma elipse com eixo focal paralelo ao eixo O_x e com centro no ponto $C = (-1, \frac{3}{2})$.



Temos que:

$$a^2 = 4 \implies \mathbf{a = 2}$$

$$b^2 = 1 \implies \mathbf{b = 1}$$

Na elipse: $b^2 = a^2 - c^2 \implies c^2 = a^2 - b^2$

e, assim, $c^2 = 4 - 1 = 3 \implies \mathbf{c = \sqrt{3}}$

Dessa forma:

$$F_1' = (-c, 0) \implies F_1 = F_1' + C = (-\sqrt{3}, 0) + (-1, \tfrac{3}{2}) \implies \mathbf{F_1 = (-1-\sqrt{3}, \tfrac{3}{2})}$$

$$F_2' = (c, 0) \implies F_2 = F_2' + C = (\sqrt{3}, 0) + (-1, \tfrac{3}{2}) \implies \mathbf{F_2 = (-1+\sqrt{3}, \tfrac{3}{2})}$$

$$A_1' = (-a, 0) \implies A_1 = A_1' + C = (-2, 0) + (-1, \tfrac{3}{2}) \implies \mathbf{A_1 = (-3, \tfrac{3}{2})}$$

$$A_2' = (a, 0) \implies A_2 = A_2' + C = (2, 0) + (-1, \tfrac{3}{2}) \implies \mathbf{A_1 = (1, \tfrac{3}{2})}$$

$$B_1' = (0, -b) \implies B_1 = B_1' + C = (0, -1) + (-1, \tfrac{3}{2}) \implies \mathbf{B_1 = (-1, \tfrac{1}{2})}$$

$$B_2' = (0, b) \implies B_2 = B_2' + C = (0, 1) + (-1, \tfrac{3}{2}) \implies \mathbf{B_1 = (-1, \tfrac{5}{2})}$$

2ª Solução: utilizando translação dos eixos coordenados

As equações de translação são: $\begin{cases} \mathbf{x = x' + h} \\ \mathbf{y = y' + k} \end{cases}$

Logo, substituindo-se na equação da elipse dada no enunciado, temos:

$$(x' + h)^2 + 4(y' + k)^2 + 2(x' + h) - 12(y' + k) + 6 = 0$$

e portanto, efetuando-se os cálculos:

$$x'^2 + 4y'^2 + (2h + 2)x' + (8k - 12)y' + (h^2 + 4k^2 + 2h - 12k + 6) = 0 \qquad (\Delta)$$

Devemos ter: $\begin{cases} \mathbf{2h + 2 = 0 \implies h = -1} \\ \mathbf{8k - 12 = 0 \implies k = \frac{3}{2}} \end{cases}$

Dessa forma:

$h^2 + 4k^2 + 2h - 12k + 6 = 1 + 4.\frac{9}{4} + 2.(-1) - 12.\frac{3}{2} + 6 = 1 + 9 - 2 - 18 + 6 = 16 - 20 = -4$

Substituindo-se em (Δ), obtemos:

$$x'^2 + 4y'^2 - 4 = 0 \implies \frac{x'^2}{4} + y'^2 = 1$$

Ou seja: $$\mathbf{E:}\ \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-\frac{3}{2})^2}{1} = 1$$

Daqui para a frente, a solução é exatamente igual à 1ª solução.

5. Dada a elipse $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$, determinar as coordenadas do seu centro, dos seus vértices, dos seus focos e os comprimentos dos seus semi-eixos e de cada latus rectum.

Solução: A equação dada pode ser reescrita na forma:

$$4(x^2 - 12x) + 9(y^2 + 8y) + 144 = 0$$

Completando-se os quadrados em cada uma das parcelas acima, obtemos:

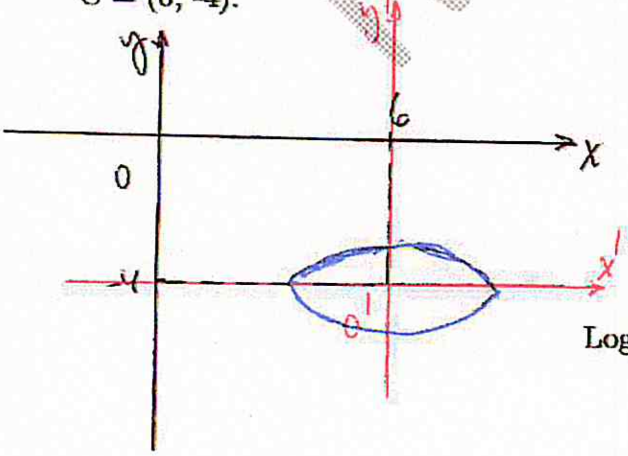
$$4(x^2 - 12x + 36) + 9(y^2 + 8y + 16) + 144 - 144 - 144 = 0$$

isto é: $$4(x-6)^2 + 9(y+4)^2 = 144$$

e, portanto, a equação reduzida desta elipse é:

$$\mathbf{E:}\ \frac{(x-6)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$$

Ou seja: trata-se de uma elipse com eixo focal paralelo ao eixo O_x e com centro no ponto $C = (6, -4)$.



Temos que:

$$a^2 = 36 \implies \mathbf{a = 6}$$

$$b^2 = 16 \implies \mathbf{b = 4}$$

Na elipse: $b^2 = a^2 - c^2 \implies c^2 = a^2 - b^2$

Logo: $c^2 = 36 - 16 = 20 = 4\times5 \implies \mathbf{c = 2\sqrt{5}}$

Assim:

focos:

$F_1' = (-c, 0) \implies F_1 = F_1' + C = (-2\sqrt{5}, 0) + (6, -4) \implies \mathbf{F_1 = (6-2\sqrt{5},\ -4)}$

$F_2' = (c, 0) \implies F_2 = F_2' + C = (2\sqrt{5}, 0) + (6, -4) \implies \mathbf{F_2 = (6+2\sqrt{5},\ -4)}$

vértices:

$A_1' = (-a, 0) \implies A_1 = A_1' + C = (-6, 0) + (6, -4) \implies \mathbf{A = (0, -4)}$

$A_2' = (a, 0) \implies A_2 = A_2' + C = (6, 0) + (6, -4) \implies \mathbf{A = (12, -4)}$

$B_1' = (0, -b) \implies B_1 = B_1' + C = (0, -4) + (6, -4) \implies \mathbf{B = (6, -8)}$

$B_2' = (0, b) \implies B_2 = B_2' + C = (0, 4) + (6, -4) \implies \mathbf{B = (6, 0)}$

semi-eixos:

maior: $a = 6$ uc e menor: $b = 4$ uc

latus rectum:

$\frac{2b^2}{a} = \frac{2.4^2}{6} = \frac{16}{3}$ uc

3.2.2 Problemas Propostos

Em cada uma dos problemas a seguir, desenhe ambos os conjuntos de eixos coordenados e esboce o gráfico da elipse encontrada.

1. Os vértices do eixo maior de uma elipse são os pontos $(1, 1)$ e $(7, 1)$ e sua excentricidade é $e = \frac{1}{3}$. Determinar a equação desta elipse, as coordenadas de seus focos e os comprimentos de seus eixos maior e menor e de cada latus rectum.

2. Os focos de uma elipse são os pontos $(-4, -2)$ e $(-4, -6)$ e o comprimento de cada latus rectum é 6 uc. Determinar a equação desta elipse e sua excentricidade.

3. Os vértices de uma elipse são os pontos $(1, -6)$ e $(9, -6)$ e o comprimento de cada latus rectum é $\frac{9}{2}$ uc. Determinar a equação desta elipse, as coordenadas de seus focos e sua excentricidade.

4. Os focos de uma elipse são os pontos $(3, 8)$ e $(3, 2)$ e o comprimento de seu eixo menor é 8. Determinar a equação da elipse, as coordenadas de seus vértices e sua excentricidade.

5. O centro de uma elipse é o ponto $(2, -4)$ e o vértice e o foco no mesmo semi-eixo são os pontos $(-2, -4)$ e $(-1, -4)$, respectivamente. Determinar a equação da elipse, sua excentricidade, os comprimentos de seu eixo menor e de cada latus rectum.

Nos Exercícios 6 a 9, reduza a equação da elipse dada à 2ª forma padrão e determine as coordenadas do centro, dos vértices, dos focos, a excentricidade e comprimentos dos eixos maior e menor e de cada latus rectum. (Respostas no final do Capítulo).

6. $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0.$ (E: $\frac{(x-3)^2}{4} + (y+2)^2 = 1$)

7. $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0.$ (E: $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$)

8. $x^2 + 4y^2 - 10x - 40y + 109 = 0.$ (E: $\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$)

9. $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0.$ (E: $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$)

10. Por translação dos eixos coordenados, reduza à forma padrão a equação da elipse:

$x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0.$ (R: $\frac{x'^2}{4} + y'^2 = 1$)

11. Por translação dos eixos coordenados, reduza à forma padrão a equação da elipse:

$9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0.$ (R: $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1$)

12. Determinar os comprimentos dos raios focais do ponto $P = (2, 1)$ sobre a elipse $9x^2 + y^2 +$ $- 18x - 2y + 1 = 0.$ (R: 3 uc)

13. O ponto médio de uma corda da elipse $x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0$ é $(5, 2)$. Determine a equação da corda. (R: $x + 2y - 9 = 0$)

14. Determinar e identificar a equação do lugar geométrico de um ponto do plano que se move de maneira que sua distância ao eixo O_y é sempre igual a duas vezes sua distância ao ponto $P = (3, 2)$. (R: $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{3} = 1$)

15. De cada ponto da circunferência γ: $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$ é traçada uma perpendicular ao diâmetro que é paralelo ao eixo O_x. Determinar e identificar a equação do lugar geométrico dos pontos médios destas perpendiculares. (R: $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$)

16. A base de um triângulo é fixa sendo que seus extremos são os pontos $A = (0, 0)$ e $B = (6, 0)$. Determinar e identificar a equação do lugar geométrico do vértice oposto, sabendo que o produto das tangentes dos ângulos da base é sempre igual a 4. (R: $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$)

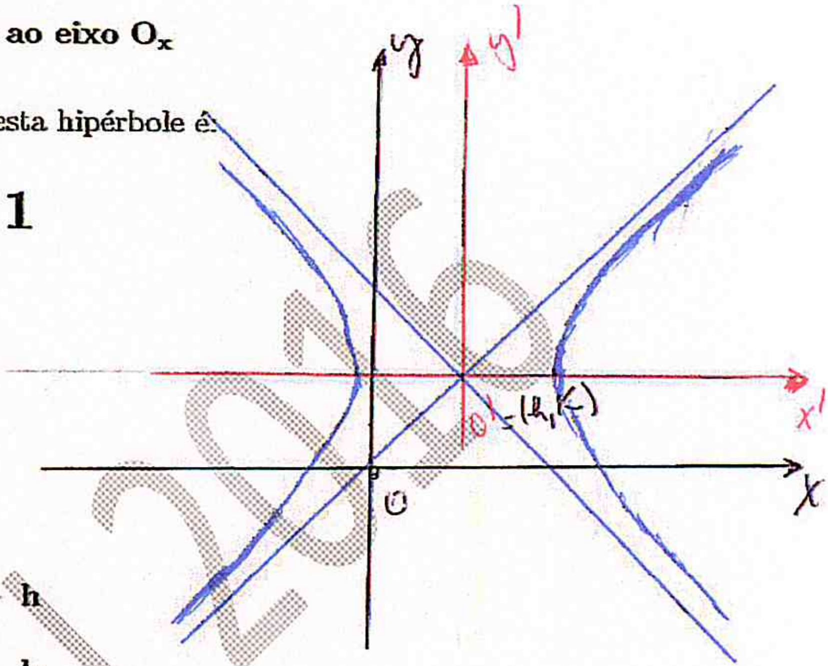
3.3 Equação da Hipérbole com Centro no Ponto (h, k)

Veremos, agora, como fica a equação de uma hipérbole quando o seu centro não é a origem do sistema de coordenadas. Teremos dois casos a considerar, a saber:

1º Caso: o eixo transverso é paralelo ao eixo O_x

Em relação ao sistema $x'O'y'$ a equação desta hipérbole é:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$



e as equações de suas assíntotas são:

$$y' = \pm \frac{b}{a} x'$$

As equações de translação são:

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

e daí segue que:

$$\boxed{\begin{array}{c} H: \dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \\ \text{assíntotas:} \quad y = k \pm \frac{b}{a}(x - h) \end{array}} \qquad (3.4)$$

A equação 3.4 é chamada **equação da hipérbole com centro em (h, k) e eixo transverso paralelo a O_x**.

2º Caso: o eixo transverso é paralelo ao eixo O_y

Analogamente ao caso anterior, obtemos a **equação da hipérbole com centro em (h, k) e eixo transverso paralelo a O_y**:

$$\boxed{\begin{array}{c} H: \quad \dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \\[2ex] \text{assíntotas:} \quad y = k \pm \frac{a}{b}(x - h) \end{array}} \tag{3.5}$$

Observação: Cada uma das equações 3.4 e 3.5 é também chamada de **2ª forma padrão da equação da hipérbole.**

3.3.1 Problemas Resolvidos

1. Esboçar o gráfico, escrever as equações das assíntotas, encontrar as coordenadas dos focos e dos vértices da hipérbole:

$$H: \frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y+4)^2}{16} = 1$$

Solução: O centro desta hipérbole é $O' = (h, k) = (-2, -4)$. O eixo transverso é paralelo ao eixo O_x e

$$a^2 = 9 \implies a = 3$$
$$b^2 = 16 \implies b = 4$$

Na hipérbole: $b^2 = c^2 - a^2 \implies c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25 \implies c = 5.$

As assíntotas desta hipérbole são as retas de equações $y = -4 \pm \frac{4}{3}(x + 2)$, ou seja, são as retas **r:** $4x - 3y - 4 = 0$ e **s:** $4x + 3y + 20 = 0$. Além disso,

$$F'_1 = (-c, 0) = (-5, 0) \quad \text{e} \quad F'_2 = (c, 0) = (5, 0)$$
$$A'_1 = (-a, 0) = (-3, 0) \quad \text{e} \quad A'_2 = (a, 0) = (3, 0)$$

e como $(x, y) = (x', y') + (h, k)$, segue que:

focos:

- $F_1 = (-5 - 2, -4) = (-7, -4)$
- $F_2 = (5 - 2, -4) = (3, -4)$

vértices:

- $A_1 = (-3 - 2, -4) = (-5, -4)$
- $A_2 = (3 - 2, -4) = (1, -4)$

Assíntotas: **r:** $4x - 3y + 6 = 0$ e **s:** $4x + 3y + 20 = 0$

2. Usando translação dos eixos coordenados, simplificar a equação:

$$x^2 - 3y^2 + 6x + 6y + 3 = 0$$

Solução: Substituindo-se as equações de translação $\begin{matrix} x = x' + h \\ y = y' + k \end{matrix}$ na equação acima, teremos que:

$$(x' + h)^2 - 3(y' + k)^2 + 6(x' + h) + 6(y' + k) + 3 = 0$$

e portanto $x'^2 + 2hx' + h^2 - 3y'^2 - 6ky' - 3k^2 + 6x' + 6h + 6y' + 6k + 3 = 0$

Ou seja:

$$x'^2 - 3y'^2 + (2h + 6)x' + (-6k + 6)y' + (h^2 - 3k^2 + 6h + 6k + 3) = 0$$

Queremos eliminar os termos do 1º grau; isto é, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2h + 6 = 0 \\ -6k + 6 = 0 \end{cases} \implies h = -3 \quad e \quad k = 1$$

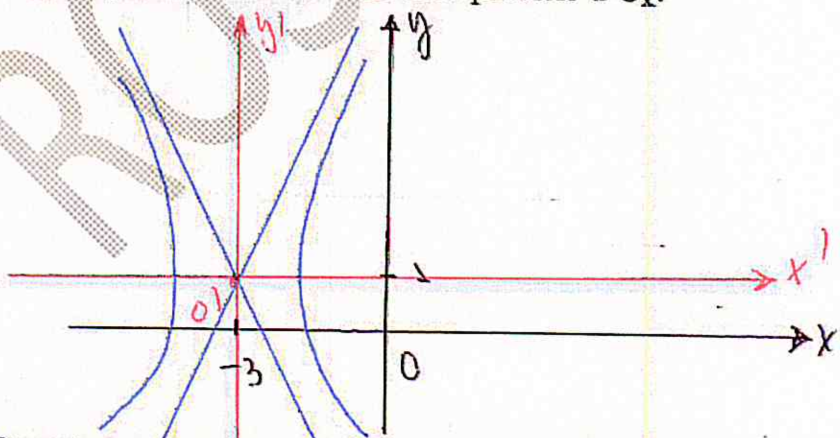
Portanto, transladando a origem do sistema de coordenadas para o ponto $O' = (-3, 1)$ teremos:

$$h^2 - 3k^2 + 6h + 6k + 3 = 9 - 3 - 18 + 6 + 3 = -3$$

e daí segue que:

$$x'^2 - 3y'^2 = 3 \implies \frac{x'^2}{3} - y'^2 = 1,$$

que representa uma hipérbole com focos no eixo paralelo a O_x.



Observação: Se quisermos escrever a equação da hipérbole obtida no Problema 2 utilizando as coordenadas antigas, teremos: $H: \dfrac{(x+3)^2}{3} - (y - 1)^2 = 1$

3. Discutir o lugar geométrico da equação:

$$9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$$

Solução: Vamos reduzir a equação dada à forma padrão, usando o método de completar quadrados. Assim: $9(x^2 - 6x) - 4(y^2 - 2y) = -113$

e portanto $9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) = -113 + 81 - 4$

Daí segue que $9(x - 3)^2 - 4(y - 1)^2 = -36$

Dividindo-se a última equação por -36, obtemos a equação da hipérbole

$$\text{H:}\quad \frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1$$

com eixo focal paralelo ao eixo O_y e cujo centro é o ponto $O' = (3, 1)$. Além disso, temos que

$$a^2 = 9 \quad \text{e} \quad b^2 = 4 \implies a = 3 \quad \text{e} \quad b = 2.$$

Como na hipérbole $c^2 = a^2 + b^2$, segue que $c = \sqrt{13}$. Dessa forma:

focos:

- $F_1 = F_1' + O' = (0, -\sqrt{13}) + (3, 1) = (3, 1 - \sqrt{13})$
- $F_2 = F_2' + O' = (0, \sqrt{13}) + (3, 1) = (3, 1 + \sqrt{13})$

vértices:

- $A_1 = A_1' + O' = (0, -3) + (3, 1) = (3, -2)$
- $A_2 = A_2' + O' = (0, 3) + (3, 1) = (3, 4)$

eixo transverso:

- $2a = 6$ uc

eixo conjugado:

- $2b = 4$ uc

latus rectum

- $\frac{2b^2}{a} = \frac{8}{3}$ uc

excentricidade:

- $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$

assíntotas:

- $y - 1 = \pm \frac{3}{2}(x - 3) \implies \begin{cases} 3x - 2y - 7 = 0 \\ \quad\text{e} \\ 3x + 2y - 11 = 0 \end{cases}$

3.3.2 Problemas Propostos

Em cada uma dos problemas a seguir, desenhe ambos os conjuntos de eixos coordenados e esboce o gráfico da hipérbole encontrada.

1. Os vértices de uma hipérbole são (-1, 3) e (3, 3) e sua excentricidade é $\frac{3}{2}$. Determine a equação desta hipérbole, as coordenadas dos seus focos, os comprimentos dos seus eixos transverso e conjugado e o comprimento de cada latus rectum.

2. Os vértices de uma hipérbole são (-2, 2) e (-2, -4) e o comprimento de cada latus rectum é 2 uc. Determine a equação da hipérbole, as coordenadas dos seus focos e sua excentricidade.

3. O centro de uma hipérbole é o ponto $O' = (2, -2)$ e um dos seus vértices é o ponto (0, -2). Se o comprimento de cada latus rectum é 8 uc, determinar a equação da hipérbole, o comprimento do eixo conjugado e sua excentricidade.

4. Os focos de uma hipérbole são (4, -2) e (4, -8) e o comprimento do seu eixo transverso é 4 uc. Determine a equação da hipérbole, o comprimento de cada latus rectum e sua excentricidade.

5. O centro de uma hipérbole é o ponto $O' = (4, 5)$ e um de seus focos é o ponto (8, 5). Se a excentricidade desta hipérbole é 2, determine sua equação e os comprimentos de seus eixos transverso e conjugado.

6. Os vértices de uma hipérbole são (-3, 2) e (-3, -2) e o comprimento de seu eixo conjugado é 6 uc. Determinar a equação da hipérbole, as coordenadas de seus focos e sua excentricidade.

Nos Problemas 7 a 11, reduza a equação dada à 2ª forma padrão da equação da hipérbole e determine as coordenadas do centro, dos vértices, dos focos, os comprimentos dos eixos transverso e conjugado, de cada latus rectum, a excentricidade e as equações das assíntotas.

7. $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$. (R: $\frac{(x-2)^2}{9} - (y-2)^2 = 1$)

8. $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$. (R: $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+4)^2}{9} = 1$)

9. $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$. (R: duas retas concorrentes: **r:** $x - 2y - 1 = 0$ e **s:** $x + 2y - 1 = 0$)

10. $9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y + 29 = 0$. (R: $\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$)

11. $3x^2 - y^2 + 30x + 78 = 0$. (R: $\frac{y^2}{3} - (x+5)^2 = 1$)

12. Determinar o ângulo agudo formado pelas assíntotas da hipérbole

$$9x^2 - y^2 - 36x - 2y + 44 = 0. \qquad \text{(R: } 36^\circ\ 52'\text{)}$$

13. O eixo focal de uma hipérbole é paralelo ao eixo O_x e suas assíntotas são as retas de equações **r:** $2x + y - 3 = 0$ e **s:** $2x - y - 1 = 0$. Determine a equação da hipérbole, sabendo que ela passa pelo ponto $P = (4, 6)$. (R: $4x^2 - y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$)

14. Determinar a equação e identificar o lugar geométrico de um ponto do plano que se move de maneira que sua distância ao ponto $A = (3, 2)$ é sempre igual a três vezes sua distância à reta **r:** $y + 1 = 0$. (R: $x^2 - 8y^2 - 6x - 22y + 4 = 0$ ou $\frac{(y-\frac{11}{8})^2}{\frac{81}{64}} - \frac{(x-3)^2}{\frac{81}{8}} = 1$)

3.4 Equação da Parábola com Vértice no Ponto (h, k)

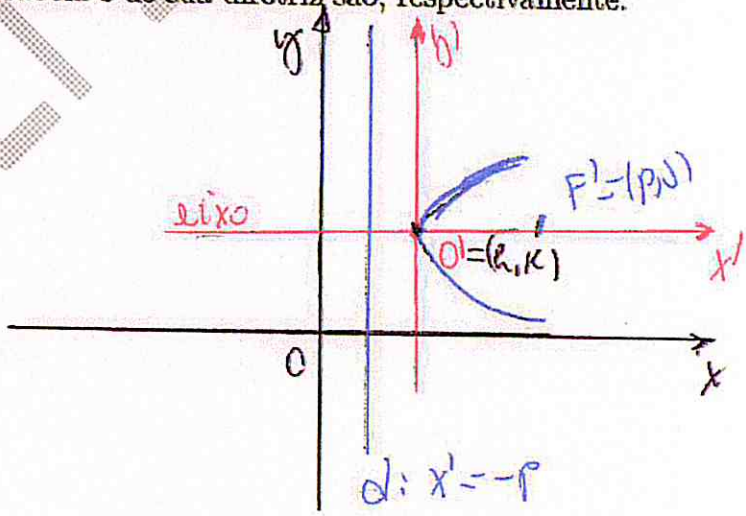
Veremos, agora, como fica a equação de uma parábola quando o seu vértice não é a origem do sistema de coordenadas. Teremos dois casos a considerar, a saber:

1º Caso: o eixo da parábola é paralelo ao eixo O_x

Em relação ao sistema $x'O'y'$ a equação desta parábola e de sua diretriz são, respectivamente:

$$y'^2 = 4px'$$

$$d: \quad x' = -p$$



As equações de translação são:

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

e portanto obtemos:

$$\boxed{\begin{array}{c} P: \quad (y - k)^2 = 4p(x - h) \\ \text{diretriz:} \quad d: \quad x = h - p \end{array}} \qquad (3.6)$$

A equação 3.6 é chamada **equação da parábola com vértice em (h, k) e eixo paralelo a O_x**.

2º Caso: o eixo da parábola é paralelo ao eixo O_y

Analogamente ao caso anterior, obtemos a **equação da parábola com vértice em (h, k) e eixo paralelo a O_y**:

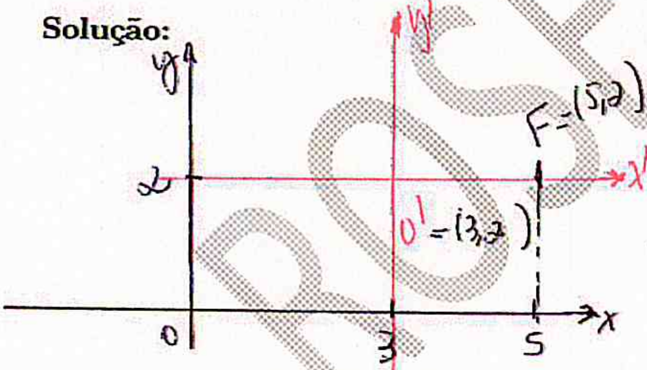
$$\boxed{\begin{array}{l} P: \quad (x - h)^2 = 4p(y - k) \\ \text{diretriz:} \quad \mathbf{d}: \quad y = k - p \end{array}} \qquad (3.7)$$

Observação: Cada uma das equações 3.6 e 3.7 é também chamada de **2ª forma padrão da equação da parábola.**

3.4.1 Problemas Resolvidos

1. Determine a equação da parábola e de sua diretriz, sabendo que seu vértice é $V = (3, 2)$ e seu foco é $F = (5, 2)$.

Solução:



O eixo desta parábola é paralelo a O_x e, portanto, sua equação é da forma:

$$(y - 2)^2 = 4p(x - 3)$$

Além disso, temos que:

$$|\,p\,| = d(V, F) = 2$$

Então: $|\,p\,| = 2$ e como o foco desta parábola está à direita do vértice, segue que $p = 2$. Logo, $h - p = 3 - 2 = 1$ e, portanto:

$$P: \quad (y - 2)^2 = 8(x - 3)$$

$$d: \quad x = 1$$

2. Dada a parábola $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$, determine as coordenadas do seu vértice, do seu foco e a equação de sua diretriz.

Solução: Vamos usar o método de completar quadrados. A equação dada pode ser reescrita na forma:

$$4(x^2 - 5x) - 24y + 97 = 0$$

e, portanto, $\quad 4(x^2 - 5x + \frac{25}{4}) - 24y + 97 - 25 = 0 \implies 4(x - \frac{5}{2})^2 = 24\,y - 72$

Logo: $\quad 4(x - \frac{5}{2})^2 = 24(y - 3) \implies (x - \frac{5}{2})^2 = 6(y - 3)$

Ou seja, trata-se de uma parábola com foco no eixo paralelo ao eixo O_y. Logo, sua equação é do tipo $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ e sua diretriz tem equação $d\colon\ y = k - p$. Além disso:

$$4p = 6 \implies p = \frac{3}{2}$$

Dessa forma:

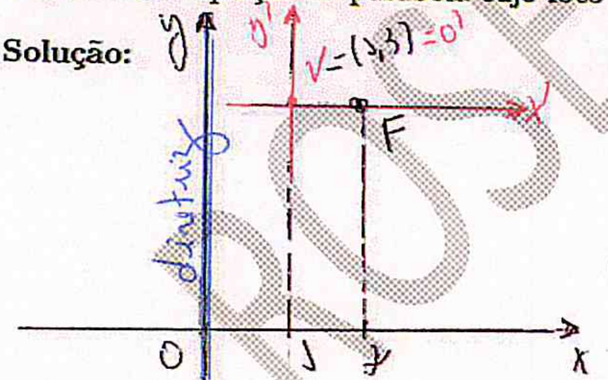
vértice: $O' = (h, k) = (\frac{5}{2}, 3)$

foco: $F = F' + O' = (0, \frac{3}{2}) + (\frac{5}{2}, 3) = (\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$

diretriz d: $y = \frac{3}{2}$

3. Escreva a equação da parábola cujo foco é $F = (2, 3)$ e cuja diretriz é a reta **d:** $x = 0$.

Solução:



O eixo desta parábola é paralelo a O_x e, portanto, sua equação é da forma:

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

e a equação de sua diretriz é:

$$x = h - p \implies h - p = 0 \implies h = p$$

O vértice da parábola é o ponto médio do segmento que une $(0, 3)$ a $F = (2, 3)$. Logo, $V = (h, k) = (1, 3)$ e, dessa forma, $h = p = 1$. Logo:

$$\mathbf{P}\colon \quad (y - 3)^2 = 4(x - 1)$$

3.4.2 Problemas Propostos

1. Determinar a equação da parábola cujo vértice e foco são, respectivamente, os pontos V = (-4, 3) e F = (-1, 3). Determinar também as equações de sua diretriz e do seu eixo e o comprimento de seu latus rectum.

2. Determinar a equação da parábola cujo vértice e foco são, respectivamente, os pontos V = (3, 3) e F = (3, 1). Determinar também as equações de sua diretriz e do seu eixo e o comprimento de seu latus rectum.

3. A diretriz de uma parábola é a reta **d:** $y - 1 = 0$ e seu foco é o ponto F = (4, -3). Determinar a equação desta parábola.

4. A diretriz de uma parábola é a reta **d:** $x + 5 = 0$ e seu vértice é o ponto V = (0, 3). Determinar a equação desta parábola.

Em cada uma dos problemas 5 a 9, reduzir a equação dada à forma padrão da equação da parábola e determinar as coordenadas do vértice e do foco, a equaçõoes de sua diretriz e do seu eixo e o comprimento do latus rectum.

5. $4y^2 - 48x - 20y = 71$

6. $9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0$

7. $y^2 + 4x = 7$

8. $4y^2 + 48y + 12x = 159$

9. $y = ax^2 + bx + c$ (**P:** $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{1}{a}(y + \frac{b^2-4ac}{4a})$, vértice: $V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$)

10. Usando uma translação dos eixos coordenados, mostre que o lugar geométrico da equação $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$ é uma parábola.

11. Utilizando a equação $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, determine a equação da parábola cujo eixo é paralelo ao eixo O_x e que passa pelos pontos $A = (\frac{3}{2}, -1)$, $B = (0, 5)$ e $C = (-6, -7)$.

12. Determine as coordenadas do vértice e do foco, as equações da diretriz e do eixo e o comprimento do latus rectum da parábola do exercício anterior.

13. Determinar a equação da parábola cujo eixo é paralelo a O_x e que passa pelos três pontos: $A = (0, 0)$, $B = (8, -4)$ e $C = (3, 1)$.

14. Determinar a equação da parábola cujo vértice é o ponto $V = (4, -1)$, cujo eixo é a reta r: $y + 1 = 0$ e que passa pelo ponto $P = (3, -3)$.

15. Determinar o comprimento do eixo focal do ponto cuja ordenada é igual a 3 e que se encontra sobre a parábola $y^2 + 4x + 2y - 19 = 0$.

3.5 Rotação dos Eixos Coordenados

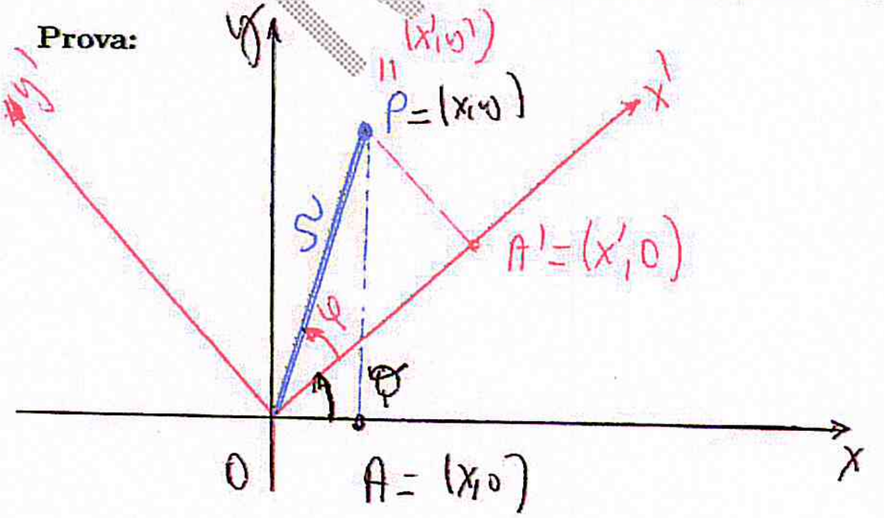
Chama-se *rotação dos eixos coordenados* a operação de girar os eixos coordenados de um ângulo θ mantendo a origem fixa, para $0° \leqslant \theta \leqslant 90°$. Ou seja, o sistema $S = \{O, x, y\}$ é transformado no sistema $S' = \{O, x', y'\}$ através de um "giro" de um ângulo θ.

Vamos, agora, obter as equações de rotação. Para isso, suponhamos que o sistema antigo $S = \{O, x, y\}$ foi transformado no sistema novo $S' = \{O, x', y'\}$, através de uma rotação de um ângulo θ. Vale o resultado:

Teorema 2: Suponhamos que os eixos coordenados são rotacionados de um ângulo θ em torno de sua origem O como ponto fixo, $0° \leqslant \theta \leqslant 90°$. Se as coordenadas de um ponto $P \neq 0$ do plano são (x, y) e (x', y') antes e depois da rotação, respectivamente, então as equações de transformação das coordenadas antigas para as coordenadas novas são dadas por:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x' \cos\theta - y' \,\text{sen}\,\theta \\ y &= x' \,\text{sen}\,\theta + y' \cos\theta \end{aligned}} \qquad (3.8)$$

Prova:



Vamos determinar

x e **y**

em função de

x', **y'** e $\boldsymbol{\theta}$

Consideremos a reta **t** determinada pelos pontos O e P. Chamemos de **r** o comprimento do segmento OP e de φ o ângulo entre o eixo $O_{x'}$ e a reta **t**; isto é,

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \overline{\mathbf{OP}} \\ \varphi = \angle(\mathbf{O}_{\mathbf{x}'}, \mathbf{t}) \end{cases}$$

Consideremos também os pontos $\begin{cases} \mathbf{A} = (\mathbf{x}, \mathbf{0}): & \text{coordenadas no sistema antigo} \\ \mathbf{A}' = (\mathbf{x}', \mathbf{0}): & \text{coordenadas no sistema novo} \end{cases}$

O triângulo: $\triangle$ OA′P é retângulo em A′ e portanto:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{x'}{r} & (1) \\ \operatorname{sen}\varphi = \frac{y'}{r} & (2) \end{cases}$$

Da mesma forma, o triângulo: $\triangle$ OAP é retângulo em A e portanto:

$$\begin{cases} \cos(\varphi+\theta) = \frac{x}{r} & (3) \\ \operatorname{sen}(\varphi+\theta) = \frac{y}{r} & (4) \end{cases}$$

De (3) e de (4), temos que:

$$\begin{cases} \cos\varphi.\cos\theta - \operatorname{sen}\varphi.\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{r} & (5) \\ \operatorname{sen}\varphi.\cos\theta + \operatorname{sen}\theta.\cos\varphi = \frac{y}{r} & (6) \end{cases}$$

Substituindo-se (1) e (2) em (5) e (6), segue que

$$\begin{cases} \frac{x'}{r}\cos\theta - \frac{y'}{r}\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{r} \\ \frac{y'}{r}\cos\theta + \frac{x'}{r}\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \end{cases}$$

e daí segue que:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x}' \cos\theta - \mathbf{y}' \,\text{sen}\,\theta \\ \mathbf{y} = \mathbf{x}' \,\text{sen}\,\theta + \mathbf{y}' \cos\theta \end{cases}$$ ■

Observação 1: A partir das equações de rotação 3.8, é possível obter $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{y}'$ em função de $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e θ:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{x} \cos\theta + \mathbf{y} \,\text{sen}\,\theta \\ \mathbf{y}' = -\mathbf{x} \,\text{sen}\,\theta + \mathbf{y} \cos\theta \end{cases} \tag{3.9}$$

As equações 3.8 e 3.9 podem ser obtidas a partir da tabela abaixo, na qual os elementos da 2ª coluna são obtidos derivando-se os elementos da 1ª coluna:

	$\mathbf{x}'$	$\mathbf{y}'$
$\mathbf{x}$	$\cos\theta$	$-\text{sen}\,\theta$
$\mathbf{y}$	$\text{sen}\,\theta$	$\cos\theta$

Observação 2: Para resolver problemas envolvendo rotação dos eixos coordenados, precisamos relembrar algumas relações trigonométricas:

$$\begin{cases} \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \\ \text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta \,.\, \cos\theta \\ \cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta \end{cases}$$

e, como conseqüência, obtemos as relações:

$$\begin{cases} \text{sen}\,\theta = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}} \\ \cos\theta = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}} \end{cases}$$

Por exemplo, para obter que $\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$ basta notar que:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$$

e, portanto

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \quad \Longrightarrow \quad \cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

3.5.1 Problemas Resolvidos

1. Por uma rotação dos eixos coordenados, transforme a equação dada em outra desprovida do termo $x'y'$: $\quad 7x^2 - 6\sqrt{3}\,xy + 13y^2 = 16$

Solução: As equações de rotação são: $\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x'}\cos\theta - \mathbf{y'}\,\text{sen}\,\theta \\ \mathbf{y} = \mathbf{x'}\,\text{sen}\,\theta + \mathbf{y'}\cos\theta \end{cases}$

Substituindo na equação original, obtemos:

$7(x'^2\cos^2\theta - 2x'y'\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + y'^2\,\text{sen}^2\theta) - 6\sqrt{3}\,(x'^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + x'y'\cos^2\theta - x'y'\,\text{sen}^2\theta +$
$- y'^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta) + 13(x'^2\,\text{sen}^2\theta + 2x'y'\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + y'^2\cos^2\theta) = 16$

Logo:

$$(7\cos^2\theta - 6\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + 13\,\text{sen}^2\theta)\,x'^2 +$$
$$+ (-14\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - 6\sqrt{3}\cos^2\theta + 6\sqrt{3}\,\text{sen}^2\theta + 26\,\text{sen}\,\theta\cos\theta)\,x'y' +$$
$$+ (7\,\text{sen}^2\theta + 6\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + 13\cos^2\theta)\,y'^2 = 16$$

e, portanto:

$$(7 + 6\,\text{sen}^2\theta - 3\sqrt{3}\,\text{sen}\,2\theta)\,x'^2 +$$
$$+ (6\,\text{sen}\,2\theta - 6\sqrt{3}\cos 2\theta)\,x'y' + (7 + 3\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + 6\cos^2\theta)\,y'^2 = 16 \qquad (\boldsymbol{\Delta})$$

Vamos tentar eliminar o termo misto do 2º grau; isto é, vamos impor que o coeficiente do termo $x'y'$ seja zero. Ficamos, dessa forma, com a igualdade:

$$6\,\text{sen}\,2\theta - 6\sqrt{3}\cos 2\theta = 0$$

Observe que: $\cos 2\theta \neq 0$, pois, caso contrário, da igualdade acima teríamos que $\text{sen}\,2\theta = \cos 2\theta = 0$, o que é um absurdo. Assim, podemos dividir a igualdade acima por $\cos 2\theta$ e, portanto:

$$\text{tg } 2\theta = \sqrt{3} \implies 2\theta = 60^\circ \implies \theta = 30^\circ \implies \begin{cases} \text{sen } \theta = \frac{1}{2} \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Podemos, agora, calcular os coeficientes que aparecem em (Δ):

- $7 + 6 \text{ sen}^2 \theta - 3\sqrt{3} \text{ sen } 2\theta = 7 + 6.\frac{1}{4} - 3\sqrt{3}.\ 2.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 7 + \frac{3}{2} - \frac{9}{2} = 7 - \frac{6}{2} = 4$
- $7 + 3\sqrt{3} \text{ sen } \theta \cos \theta + 6 \cos^2 \theta = 7 + 3\sqrt{3}.2.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + 6.\frac{3}{4} = 7 + \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 7 + 9 = 16$

Substituindo os valores acima encontrados em (Δ), obtemos:

$$4x'^2 + 16y'^2 = 16$$

e, portanto:

$$\frac{x'^2}{4} + y'^2 = 1$$

Ou seja: trata-se de uma elipse com centro

origem, focos no eixo $O_{x'}$ e semi-eixos

$a = 2$ uc e $b = 1$ uc.

Daremos, a seguir, um exemplo no qual utilizaremos as equações inversas das equações de rotação. Ficará claro que os Exemplos 1 e 2 têm naturezas opostas.

Exemplo 2: Por uma rotação de 45° dos eixos coordenados, uma certa equação é transformada na equação $4x'^2 - 9y'^2 = 36$. Encontre a equação original.

Solução: As equações de rotação são:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \end{cases} \implies \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) \end{cases}$$

Logo: $x'^2 = \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2)$ e $y'^2 = \frac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2)$

e, portanto, $4.\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) - \frac{9}{2}(x^2 + 2xy + y^2) = 36$

Ou seja:

$$(2 - \tfrac{9}{2})\, x^2 + (4+9)\, xy + (2 - \tfrac{9}{2})\, y^2 = 36 \quad \Longrightarrow \quad -\tfrac{5}{2}\, x^2 + 13\, xy - \tfrac{5}{2}\, y^2 = 36$$

e daí segue que a equação original é $5x^2 - 26\, xy + 5\, y^2 - 72 = 0$

3.5.2 Problemas Propostos

Em cada um dos Exercícios a seguir, desenhe o lugar geométrico e ambos os conjuntos de eixos.

1. Determinar as novas coordenadas do ponto $A = (3, -4)$ quando os eixos coordenados são girados de um ângulo de 30°. (R: $(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2, -2\sqrt{3} - \frac{3}{2})$)

2. Determinar as novas coordenadas dos pontos $A = (1, 0)$ e $B = (0, 1)$ quando os eixos coordenados são girados de um ângulo de 90°. (R: respectivamente, $(0, -1)$ e $(1, 0)$)

Nos Exercícios 3 a 8, transforme a equação dada por uma rotação dos eixos coordenados do ângulo indicado.

3. $2x + 5y - 3 = 0$; $\theta = \text{arc tg}(\frac{5}{2})$ (R: $\sqrt{29}\, x' - 3 = 0$)

4. $x^2 - 2xy + y^2 - x = 0$; $\theta = 45°$ (R: $2y'^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\, x' + \frac{\sqrt{2}}{2}\, y' = 0$)

5. $\sqrt{3}\, y^2 + 3xy - 1 = 0$; $\theta = 60°$ (R: $3\sqrt{3}\, x'^2 - \sqrt{3}\, y'^2 - 2 = 0$)

6. $5x^2 + 3xy + y^2 - 4 = 0$; $\theta = \text{arc sen}(\frac{\sqrt{10}}{10})$ (R: $11x'^2 + y'^2 - 8 = 0$)

7. $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 20 = 0$; $\theta = \text{arc tg } 0{,}75$ (R: $4x'^2 - y'^2 - 4 = 0$)

8. $x^4 + y^4 + 6x^2y^2 - 32 = 0$; $\theta = 45°$ (R: $x'^4 + y'^4 = 16$)

9. Por uma rotação dos eixos coordenados, transforme a equação $2x - y - 2 = 0$ em outra desprovida do termo x'. (R: $\sqrt{5}\, y' + 2 = 0$)

10. Por uma rotação dos eixos coordenados, transforme a equação $x + 2y - 2 = 0$ em outra desprovida do termo y'. (R: $\sqrt{5}\, x' - 2 = 0$)

Nos Exercícios de 11 a 16, por uma rotação dos eixos coordenados transforme a equação dada em outra desprovida do termo $x'y'$.

11. $4x^2 + 4xy + y^2 + \sqrt{5}\,x = 1$ (R: $5x'^2 + 2x' - y' = 1$)

12. $9x^2 + 3xy + 9y^2 = 5$ (R: $21x'^2 + 15y'^2 - 10 = 0$)

13. $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 2$ (R: $6x'^2 + y'^2 - 2 = 0$)

14. $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$ (R: $x' + 3y' = 0$ ou $x' - 3y' = 0$)

15. $x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$ (R: $y' = \pm\sqrt{2}$)

16. $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 25x = 0$ (R: $5x'^2 + 4x' - 3y' = 0$)

Respostas dos Problemas Propostos

secção 3.2.2, p. 94

1. E: $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1$; Focos: $(3, 1)$ e $(5, 1)$; eixo maior: 6 uc;

eixo menor: $4\sqrt{2}$ uc; latus rectum: $\frac{16}{3}$ uc

2. E: $\frac{(y+4)^2}{16} + \frac{(x+4)^2}{12} = 1$ e $e = \frac{1}{2}$

3. E: $\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y+6)^2}{9} = 1$; Focos: $(5 \pm \sqrt{7}, -6)$; $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$

4. E: $\frac{(y-5)^2}{25} + \frac{(x-3)^2}{16} = 1$; Vértices: $(3, 0)$ e $(3, 10)$; $e = \frac{3}{5}$

5. E: $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{7} = 1$; $e = \frac{3}{4}$; eixo menor: $2b = 2\sqrt{7}$ uc; latus rectum: $\frac{2b^2}{a} = \frac{7}{2}$ uc

	centro	vértices	vértices	focos	2a	2b	latus rectum	e
6	(3, -2)	(1, -2) e (5, -2)	(3, -3) e (3, -1)	$(3 \pm\sqrt{3}, -2)$	4 uc	2 uc	1 uc	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
7	(-4, 1)	(-7, 1) e (-1, 1)	(-4, -1) e (-4, 3)	$(-4 \pm\sqrt{5}, 1)$	6 uc	4 uc	$\frac{8}{3}$ uc	$\frac{\sqrt{5}}{3}$
8	(5, 5)	(1, 5) e (9, 5)	(5, 3) e (5, 7)	$(5 \pm 2\sqrt{3}, 5)$	8 uc	4 uc	2 uc	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
9	(0, 1)	(0, -2) e (0, 4)	(-3, 1) e (3, 1)	$(0, 1 \pm\sqrt{5})$	6 uc	4 uc	$\frac{8}{3}$ uc	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

secção 3.3.2, p. 100

1. H: $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1$; Focos: (-2, 3) e (4, 3); eixo maior: 4 uc;

   eixo menor: $2\sqrt{5}$ uc; latus rectum: 5 uc

2. H: $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{3} = 1$; Focos: $(-2, -1 - 2\sqrt{3})$ e $(-2, -1 + 2\sqrt{3})$;

   excentricidade: $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

3. H: $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{8} = 1$; eixo conjugado: $2b = 4\sqrt{2}$ uc; excentricidade: $e = \sqrt{3}$

4. H: $\frac{(y+5)^2}{4} - \frac{(x-4)^2}{5} = 1$; latus rectum: 5 uc; excentricidade: $e = \frac{3}{2}$

5. H: $\frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{12} = 1$; eixo transverso: $2a = 4$ uc; eixo conjugado: $2b = 3\sqrt{3}$ uc

6. H: $\frac{y^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$; Focos: $(-3, -\sqrt{13})$ e $(-3, \sqrt{13})$; excentricidade: $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$

	centro	vértices	focos	2a	2b	latus rectum	e	assíntotas
7	(2, 2)	(-1, 2) (5, 2)	$(2 - \sqrt{10}, 2)$ $(2 + \sqrt{10}, 2)$	6 uc	2 uc	$\frac{2}{3}$ uc	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	$x + 3y - 8 = 0$ $x - 3y + 4 = 0$
8	(-4, 2)	(-4, 0) (-4, 4)	$(-4, 2 - \sqrt{13})$ $(-4, 2 + \sqrt{13})$	4 uc	6 uc	9 uc	$\frac{\sqrt{13}}{2}$	$2x + 3y + 2 = 0$ $2x - 3y + 14 = 0$
10	(-3, 2)	(-5, 2) (-1, 2)	$(-3 - \sqrt{13}, 2)$ $(-3 + \sqrt{13}, 2)$	4 uc	6 uc	9 uc	$\frac{\sqrt{13}}{2}$	$3x - 2y + 13 = 0$ $3x + 2y + 5 = 0$
11	(-5, 0)	$(-5, \pm\sqrt{3})$	$(-5, \pm 2)$	$2\sqrt{3}$ uc	2 uc	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ uc	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}x + y + 5\sqrt{3} = 0$ $\sqrt{3}x - y + 5\sqrt{3} = 0$

secção 3.4.2, p. 104

1. $(y - 3)^2 = 12(x + 4)$; **diretriz d:** $x = -7$; **eixo:** $y = 3$; 12 uc.

2. $(x - 3)^2 = -8(y - 3)$; **diretriz d:** $y = 5$; **eixo:** $x = 3$; 8 uc.

3. $(x - 4)^2 = -8(y + 1)$

4. $y^2 - 20x - 6y + 9 = 0$

	Equação da Parábola	vértice	foco	Equação da diretriz	Equação do eixo	latus rectum
5	$(y - \frac{5}{2})^2 = 12\ (x + 2)$	$(-2, \frac{5}{2})$	$(1, \frac{5}{2})$	$x = -5$	$y = \frac{5}{2}$	12 uc
6	$(x + \frac{4}{3})^2 = -\ 8y$	$(-\frac{4}{3}, 0)$	$(-\frac{4}{3}, -2)$	$y = 2$	$x = -\frac{4}{3}$	8 uc
7	$y^2 = -4(x - \frac{7}{4})$	$(\frac{7}{4}, 0)$	$(\frac{3}{4}, 0)$	$x = \frac{11}{4}$	$y = 0$	4 uc
8	$(y + 6)^2 = -3(x - \frac{101}{4})$	$(\frac{101}{4}, -6)$	$(\frac{49}{2}, -6)$	$x = 26$	$y = -6$	3 uc
9			$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2+4ac+1}{4a}\right)$	$y = \frac{-b^2+4ac-1}{4a}$	$x = -\frac{b}{2a}$	$\frac{1}{a}$ uc

10. $x'^2 = 6y'$

11. $(y - 1)^2 = -8(x - 2)$

12. $V = (2, 1)$, $F = (0, 1)$, **d:** $x = 4$, eixo: **r:** $y = 1$, latus rectum: 8 uc

13. $(y + 1)^2 = x + 1$

14. $(y + 1)^2 = -4(x - 4)$

15. 5 uc