Observe que em relação a esta base de autovetores, a matriz de T é uma matriz diagonal.

É claro que as matrizes diagonais $[T]_\beta^\beta$ que foram obtidas nos Exemplos 1 e 2 não o foram por acaso. Dada uma transformação linear qualquer $T: V \to V$, se conseguirmos uma base $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$ formada por autovetores de T, então, como

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \lambda_1 v_1 + 0v_2 + ... + 0v_n \\ T(v_2) &= 0v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + 0v_n \\ &\vdots \\ T(v_n) &= 0v_1 + 0v_2 + ... + \lambda_n v_n, \end{aligned}$$

a matriz $[T]_\beta^\beta$ será uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são os autovalores λ_i, isto é,

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Não precisamos ter necessariamente os λ_i distintos (veja o Exemplo 2). Na verdade, um autovalor aparecerá na diagonal tantas vezes quantas forem os autovetores LI a ele associados.

Por outro lado, se $\gamma = \{u_1, ..., u_n\}$ é uma base de V tal que

$$[T]_\gamma^\gamma = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

note que $u_1, ..., u_n$ são necessariamente autovetores de T com autovalores $a_1, ..., a_n$ respectivamente. De fato, da definição de $[T]_\gamma^\gamma$ temos:

$$T(u_1) = a_1 u_1 + 0u_2 + ... + 0u_n = a_1 u_1$$

Concluímos então que *um operador $T: V \to V$ admite uma base β em relação à qual sua matriz $[T]_\beta^\beta$ é diagonal se, e somente se essa base β for formada por autovetores de T.* É este o motivo da definição que se segue.

7.1.4 Definição: Seja $T: V \to V$ um operador linear. Dizemos que T é um *operador diagonalizável* se existe uma base de V cujos elementos são autovetores de T.

Os operadores dos Exemplos 1 e 2 são, portanto, diagonalizáveis. Vamos dar a seguir um exemplo de um operador não diagonalizável.

Exemplo: Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear cuja matriz em relação à base canônica α é

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Como $P(\lambda) = (3 - \lambda)^2 (-1 - \lambda)$, os autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$. Associado a $\lambda_1 = 3$ conseguimos apenas um autovetor LI, por exemplo, $v = (1, 0, 0)$. Associado a $\lambda_2 = -1$ temos o autovetor LI, $u = (-1, -20, 16)$. Neste caso, temos apenas dois autovetores LI para T, e portanto não existe uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída só de autovetores. Isto significa que em nenhuma base a matriz de T é uma matriz diagonal, ou seja, T *não é diagonalizável.*

7.1.5 Aplicação ao Estudo de Vibrações

Consideremos dois corpos de dimensões desprezíveis e massas m_1 e m_2, respectivamente, presos a 3 molas de constantes elásticas k_1, k_2 e k_3 conforme mostra a Figura 7.1.1. Supondo que o movimento só ocorra na horizontal, como podemos estudar a posição dos dois corpos em função do tempo a partir de uma posição diferente da de equilíbrio?