Revisão sobre Sistemas Lineares e Matrizes

Definição: A equação $\alpha_1\ \mathrm{x}_1 + \alpha_2\ \mathrm{x}_2 + ... + \alpha_\mathrm{n}\ \mathrm{x}_\mathrm{n} = \beta,\ \mathrm{n} \geq 1$, sendo $\mathrm{x}_\mathrm{i} \in \mathbb{R}$ variáveis e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\mathrm{n}, \beta \in \mathbb{R}$ é chamada de **equação linear** sobre $\mathbb{R}$, nas incógnitas x_1, x_2, ... , x_n . Uma solução desta equação é uma n-upla de números reais $(\mathrm{b}_1,\ \mathrm{b}_2, ..., \mathrm{b}_\mathrm{n})$ tal que

$$\alpha_1\ \mathrm{b}_1 + \alpha_2\ \mathrm{b}_2 + ... + \alpha_\mathrm{n}\ \mathrm{b}_\mathrm{n} = \beta$$

Por exemplo: Dada a equação linear

$$5\mathrm{x}_1\ -\ 2\mathrm{x}_2\ +\ 3\mathrm{x}_3\ =\ 3,$$

a terna ordenada de números reais $\mathrm{x}_1 = 2$, $\mathrm{x}_2 =$ -1 e $\mathrm{x}_3 =$ -3 é uma solução pois 5.2 - 2.(-1) + 3.(-3) = 10 + 2 - 9 = 3

Definição: Um **sistema linear S** de **m** equações e **n** incógnitas é um conjunto de **m** equações lineares, cada uma com **n** incógnitas (m, n $\geq$ 1), consideradas simultaneamente e descrito por

$$\mathrm{S}\ :\ \begin{cases} \alpha_{11}\ \mathrm{x}_1\ +\ \alpha_{12}\ \mathrm{x}_2\ +\ ...\ +\ \alpha_{1\mathrm{n}}\ \mathrm{x}_\mathrm{n}\ =\ \beta_1 \\ \alpha_{21}\ \mathrm{x}_1\ +\ \alpha_{22}\ \mathrm{x}_2\ +\ ...\ +\ \alpha_{2\mathrm{n}}\ \mathrm{x}_\mathrm{n}\ =\ \beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{\mathrm{m}1}\ \mathrm{x}_1\ +\ \alpha_{\mathrm{m}2}\ \mathrm{x}_2\ +\ ...\ +\ \alpha_{\mathrm{mn}}\ \mathrm{x}_\mathrm{n}\ =\ \beta_\mathrm{m} \end{cases}$$

Quando $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_m = 0$, dizemos que o sistema S é **homogêneo**. Uma solução de S é uma n-upla $(b_1,\ b_1,\ \cdots,\ b_n)$ satisfazendo **cada uma** das **m** equações.

Exemplo: O sistema linear

$$S_1 : \begin{cases} 2\,x_1 + 5\,x_2 + 6\,x_3 = 13 \\ \ x_1 + 2\,x_2 - 3\,x_3 = 0 \\ -3\,x_1 + 4\,x_2 - 7\,x_3 = -6 \end{cases}$$

é não homogêneo e uma solução de S_1 é $(1,\ 1,\ 1)$. Nesse caso, S admite solução única, o que não ocorre, por exemplo, com

$$S_2\ :\ \begin{cases} x\ -\ y\ +\ z\ =\ 1 \\ 2x\ +\ 3y\ -\ z\ =\ 4 \\ x\ +\ 4y\ -\ 2z\ =\ 3 \end{cases}$$

que admite **infinitas soluções**, entre elas: (1, 1, 1) e (-1, 4, 6).

Dado um sistema linear S, podemos ter:

$$S\ :\ \begin{cases} \text{imcompatível :}\quad \text{não admite soluções} \\ \\ \text{compatível :}\ \begin{cases} \text{determinado:}\ \ \text{admite solução única} \\ \\ \text{indeterminado:}\ \ \text{admite mais de uma solução} \end{cases} \end{cases}$$

Assim, nos exemplos anteriores, S_1 é um sistema compatível determinado e S_2 é um sistema compatível indeterminado.

Observe que: Todo sistema linear homogêneo S é **compatível**, uma vez que $(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ é uma solução de S.

Operações Elementares sobre S

Um sistema **S** pode ser modificado por meio das chamadas de **operações elementares** sobre **S**, descritas abaixo:

I. Permutar duas equações;

II. Multiplicar uma das equações por um número real **não nulo**;

III. Somar a uma das equações do sistema uma outra equação multiplicada por um número real.

Se S_1 é obtido a partir de S por um número finito de operações elementares, dizemos que S_1 é um **sistema equivalente** a S (denotamos por $S_1 \sim S$).

Observe que: se $S_1 \sim S$, então toda solução de S_1 é solução de S, e vice-versa. Além disso, S é incompatível $\Longleftrightarrow$ S_1 é incompatível.

Exemplo: Dado o sistema linear S, encontre S_1 tal que $S \sim S_1$.

Solução: S: $\begin{cases} 2x + 5y + 6z = 13 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ -3x + 4y - 7z = -6 \end{cases}$

Definição: Um sistema linear do tipo

$$S\ :\ \begin{cases} \alpha_{1r_1}\, x_{r_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{1n}\, x_n = \beta_1 \\ \qquad\qquad \alpha_{2r_2}\, x_{r_2} + \ldots\ldots\ldots + \alpha_{2n}\, x_n = \beta_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad \alpha_{kr_k}\, x_{r_k} + \ldots + \alpha_{kn}\, x_n = \beta_k \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0\, x_n = \beta_{k+1} \end{cases}$$

com $\alpha_{1r_1} \neq 0$, $\alpha_{2r_2} \neq 0$, ..., $\alpha_{kr_k} \neq 0$ e $r_i > 0$, é **escalonado** se, e somente se, $1 \leq r_i < r_2 < \ldots < r_k \leq n$.

Exemplos: Estão na forma escalonada os seguintes sistemas lineares:

$$S_1 : \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ \quad\ \ y + 3z = 7 \\ \qquad\quad 5z = 2 \end{cases} \qquad\qquad S_2 : \begin{cases} 3x - 2y + 5z - 6t = 4 \\ \quad\ \ 7y + 4z - t = 12 \\ \qquad\quad z + 2t = 1 \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} x + 2y - 2z + 4t - 5w + 3v + 4u = 3 \\ \qquad\quad 5z + \qquad 3w + 2v \qquad = 2 \\ \qquad\qquad\qquad w - 2v + u = 5 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 3u = 7 \end{cases}$$

Exemplo: Obtenha um sistema escalonado equivalente ao sistema linear S abaixo:

Solução: S: $\begin{cases} x + 2y - 3z = 7 \\ 2x - 3y + 5z = 6 \\ 3x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$

Resolução de Sistemas Lineares

Dado um sistema linear S, podemos:

Discutir S:

$$\mathrm{S}: \begin{cases} \text{imcompatível}: \ \ \text{não admite soluções} \\ \\ \text{compatível}: \begin{cases} \text{determinado: admite solução única} \\ \\ \text{indeterminado: admite mais de uma solução} \end{cases} \end{cases}$$

ou

Resolver S: encontrar todas as soluções de S.

Ao escalonarmos um sistema linear **S**, de **m**-equações e **n**-incógnitas, obtemos **uma** das seguintes três situações:

I. Numa das etapas do escalonamento obtemos

$$\mathrm{S}' : \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \\ 0.\mathrm{x}_1 + 0.\mathrm{x}_2 + \dots\dots + 0.\mathrm{x}_\mathrm{n} = \beta_\mathrm{i}, \qquad \beta_\mathrm{i} \neq 0 \\ \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Como S' é incompatível segue que S também é incompatível.

Exemplo 1:

$$S : \begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ 3x - 2y + 5z = 6 \\ 2x - 5y + 7z = 3 \end{cases}$$

II. Obtém-se um sistema escalonado do tipo

$$
S' : \begin{cases} x_1 + \alpha_{12}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{1n}\, x_n = \beta_1 \\ \qquad\quad x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{2n}\, x_n = \beta_2 \\ \\ \qquad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_n = \beta_n \end{cases}
$$

Neste caso o sistema S' é compatível determinado pois podemos encontrar a sua (única) solução de maneira recursiva, a partir da última equação, substituindo os valores na equação anterior. Logo, S também é compatível determinado e admite solução única.

Exemplo 2:

$$
S : \begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ 3x - 2y + 5z = 6 \\ 2x - 5y + 6z = 3 \end{cases}
$$

III. Obtém-se um sistema escalonado do tipo

$$S^{'} : \begin{cases} x_1 + ... + \alpha_{1r_2}\, x_{r_2} + ... + \alpha_{1r_3}\, x_{r_3} + ... + \alpha_{1r_p}\, x_{r_p} + ... + \alpha_{1n}\, x_n = \beta_1 \\ x_{r_2} + ... + \alpha_{2n}\, x_n = \beta_2 \\ x_{r_3} + ... + \alpha_{3n}\, x_n = \beta_3 \\ .... \\ x_{r_p} + ... + \alpha_{pn}\, x_n = \beta_p \end{cases}$$

com $\mathbf{p} < \mathbf{n}$. Neste caso o sistema $S^{'}$ é compatível indeterminado e, portanto S também é compatível indeterminado.

Exemplo 3:

$$S : \begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ 3x - 2y + 5z = 6 \\ 2x - 5y + 7z = 4 \end{cases}$$

Matrizes

Definição: Dados **m, n ≥ 1** dois números inteiros, uma matriz real $m \times n$ é uma sequência dupla de números reais, distribuidos numa tabela do tipo :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Usamos a notação $A = (a_{ij}),\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$. Vamos indicar por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes reais de **m** linhas e **n** colunas e $M_n(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes reais quadradas de ordem **n**. Na matriz A

$$A^{(1)} = (\,a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}\,), \qquad A^{(2)} = (\,a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}\,), \quad \cdots\cdots\cdots,$$

$$A^{(m)} = (\,a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}\,)$$

são as linhas de A e

$$A_{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_{(2)} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad , A_{(n)} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

são as colunas de A.

Operações com Matrizes

Dizemos que duas matrizes $m \times n$, $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, são iguais se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \iff x = 7,\ y = 1 \text{ e } z = 3.$$

Dadas as matrizes $m \times n$, $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, definimos a soma $A + B$ como sendo a matriz cujo termo geral é $a_{ij} + b_{ij}$, isto é,

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

e a multiplicação de uma matriz $m \times n$, $A = (a_{ij})$, por um número real α, resulta a matriz $m \times n$ denotada por $\alpha\, A$ e dada por

$$\alpha\, A = \begin{pmatrix} \alpha\, a_{11} & \alpha\, a_{12} & \cdots & \alpha\, a_{1n} \\ \alpha\, a_{21} & \alpha\, a_{22} & \cdots & \alpha\, a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha\, a_{m1} & \alpha\, a_{m2} & \cdots & \alpha\, a_{mn} \end{pmatrix}$$

Assim, por exemplo, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 8 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$, temos que:

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 10 & 13 \\ 1 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad 3B = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 21 & 24 \\ -9 & 30 \end{pmatrix}$$

Produto de Matrizes

Consideremos as matrizes $A = (a_{ij})$ do tipo $m \times \mathbf{n}$ e $B = (b_{jk})$ do tipo $\mathbf{n} \times p$. O produto $A\,B$ é a matriz $m \times p$ cujo termo geral é dado por

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk} = a_{i1}\, b_{1k} + a_{i2}\, b_{2k} + \cdots + a_{in}\, b_{nk}$$

Dessa forma, considerando as matrizes:

$$\mathrm{A} \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 2} \qquad \mathrm{e} \qquad \mathrm{B} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

a matriz A.B é a matriz 3×4, dada por:

$$\mathrm{A.B} \;=\; \begin{pmatrix} 2.1+1.0 & 2.2+1.1 & 2.3+1.(-1) & 2.4+1.3 \\ (-1).1+0.0 & (-1).2+0.1 & (-1).3+0.(-1) & (-1).4+0.3 \\ 3.1+7.0 & 3.2+7.1 & 3.3+7.(-1) & 3.4+7.3 \end{pmatrix}$$

e, portanto:

$$\mathrm{A.B} \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 11 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 3 & 13 & 2 & 33 \end{pmatrix}$$

Matrizes Especiais

1. A matriz $\mathrm{A} = (\mathrm{a_{ij}}) \in \mathrm{M_n}(\mathbb{R})$, com $\mathrm{a_{ij}} = 0$, se $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$ e $\mathrm{a_{ii}} = 1$, é chamada de matriz **identidade** de ordem **n** e é denotada por $\mathrm{I_n}$. Por exemplo, para $\mathrm{n} = 3$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Dada a matriz $\mathrm{A} = (\mathrm{a_{ij}}) \in \mathrm{M_{m\times n}}(\mathbb{R})$, a **matriz transposta de A**, denotada por $\mathbf{A}^{\mathrm{t}}$, é a matriz $\mathrm{B} = (\mathrm{b_{ij}}) \in \mathrm{M_{n\times m}}(\mathbb{R})$, sendo $\mathrm{b_{ij}} = \mathrm{a_{ji}}$, com $\mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}$; e $\mathrm{j} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$.

Matrizes Inversíveis e Sistemas de Cramer

Definição: Dizemos que uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é **inversível** se, e somente se, existir uma matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ de modo que $A\,B = B\,A = I_n$. Esta matriz, se existir, é chamada de **matriz inversa** de A, e é indicada por A^{-1}.

Podemos determinar a inversa de uma matriz inversível A usando o seguinte conceito: uma matriz B que puder ser obtida a partir de A após um número finito de operações elementares (descritas abaixo) sobre as linhas de A,

(I) Permutar duas linhas de A;

(II) Multiplicar uma linha de A por um número real não nulo;

(III) Somar a uma linha de A uma outra linha de A multiplicada por um número real;

é dita *equivalente* a A (denota-se por $B \sim A$). Além disso, vale o seguinte

Teorema: Uma matriz A é inversível se, e somente se, $I_n \sim A$ e a mesma sucessão de operações elementares que levam A em I_n transformam I_n em A^{-1}.

Exemplo 1: Determine se a matriz é inversível e encontre sua inversa, se possível, sendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Calcule } A\,A^{-1}.$$

O procedimento a ser adotado é o seguinte: se A é uma matriz de ordem $\mathbf{n}$, montamos uma matriz $\mathbf{n} \times \mathbf{2n}$, na qual as primeiras n colunas são as colunas da matriz A e as últimas n colunas são as colunas da matriz identidade de ordem n. No exemplo acima ficamos com a seguinte situação:

$$\left(\begin{array}{rrr:rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Exemplo 2: Determine, se existir, a matriz inversa da matriz A, quando:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solução: Como a matriz A é quadrada de ordem 4, vamos trabalhar com a matriz 4×8, na qual as primeiras quatro colunas são as colunas da matriz A e as últimas quatro colunas são as colunas da matriz identidade de ordem 4. Ficamos, dessa forma, com a seguinte situação:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sistemas de Cramer

Consideremos o sistema linear

$$S \ : \ \begin{cases} a_{11}\, x_1 \ + \ a_{12}\, x_2 \ + \ \cdots \ + \ a_{1n}\, x_n \ = \ b_1 \\ a_{21}\, x_1 \ + \ a_{22}\, x_2 \ + \ \cdots \ + \ a_{2n}\, x_n \ = \ b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\, x_1 \ + \ a_{m2}\, x_2 \ + \ \cdots \ + \ a_{mn}\, x_n \ = \ b_m \end{cases}$$

Fazendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ \text{e} \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

temos que S pode ser escrito na forma matricial $A\,X = B$, sendo que a matriz A é chamada "matriz associada"ao sistema linear S. Chamamos de **sistema de Cramer** a um sistema linear como o anterior, com $\mathbf{m = n}$, cuja matriz associada é inversível. Neste caso, $X = A^{-1}\, B$ é a solução do sistema. Em particular, quando o sistema de Cramer $n \times n$ é homogêneo, ele só admite a solução trivial.

Exemplo: Resolver o sistema de Cramer $\begin{cases} x \ - \ y \ + \ z \ = \ 0 \\ x \ + \ y \qquad \ = \ 2 \\ -x \ + \ 2y \ - \ z = 3 \end{cases}$

Solução: A matriz A associada a S é: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Além disso, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Já sabemos que a matriz A é inversível e sua inversa é:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Logo: S admite solução única, que é dada por:

$$X = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$