Lista 11, Capítulo 6 - Geometria Analítica e Álgebra Linear

Profa. Roseli

1. Dados os vetores $\vec{u} = (1, a, -2a - 1)$, $\vec{v} = (a, a - 1, 1)$ e $\vec{w} = (1, -1, 1)$, determine **a** de modo que $\vec{u} \bullet \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w}$.

2. Dados os pontos A = (-1, 0, 2), B = (-4, 1, 1) e C = (0, 1, 3), determinar o vetor $\vec{x}$ tal que $2\vec{x} - \overrightarrow{AB} = \vec{x} + (\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{AB})\overrightarrow{AC}$.

3. Determinar o vetor $\vec{v}$, sabendo que $(3, 7, 1) + 2\vec{v} = (6, 10, 4) - \vec{v}$.

4. Dados os pontos A = (1, 2, 3), B = (-6, -2, 3) e C = (1, 2, 1), determinar o versor do vetor $3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}$.

5. Verificar se os seguintes vetores são unitários: $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

6. Determinar o valor de **n** para que o vetor $\vec{v} = (n, \frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ seja unitário.

7. Seja $\vec{v} = (m + 7)\vec{i} + (m + 2)\vec{j} + 5\vec{k}$. Calcular **m** para que $\|\vec{v}\| = \sqrt{38}$.

8. Dados os pontos A = (1, 0, -1), B = (4, 2, 1) e C = (1, 2, 0), determinar o valor de **m** para que $\|\vec{v}\| = 7$, sendo $\vec{v} = m\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

9. Dados os pontos A = (3, m - 1, -4) e B = (8, 2m - 1, m), determinar **m** de modo que $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{35}$.

10. Calcular o perímetro do triângulo de vértices A = (0, 1, 2), B = (-1, 0, -1) e C = (2, -1, 0).

11. Obter um ponto P do eixo das abscissas eqüidistante dos pontos A = (2, -3, 1) e B = (-2, 1, -1).

12. Seja o triângulo de vértices A = (-1, -2, 4), B = (-4, -2, 0) e C = (3, -2, 1). Determinar o ângulo interno ao vértice B.

13. Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo eqüilátero cujo lado mede 10 cm. Calcular o produto escalar dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

14. Determinar os ângulos do triângulo de cujos vértices são A = (2, 1, 3), B = (1, 0, -1) e C = (-1, 2, 1).

15. Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, m + 2)$ é 60^0, determinar o valor de **m**.

16. Calcular **n** para que seja de 30^0 o ângulo entra os vetores $\vec{u} = (1, n, 2)$ e $\vec{j}$.

17. Dados os vetores $\vec{a} = (2, 1, \alpha)$, $\vec{b} = (\alpha + 2, -5, 2)$ e $\vec{c} = (2\alpha, 8, \alpha)$, determinar o valor de α para que o vetor $\vec{a} + \vec{b}$ seja ortogonal ao vetor $\vec{c} - \vec{a}$.

18. Determinar o vetor $\vec{v}$, paralelo ao vetor $\vec{u} = (1, -1, 2)$, tal que $\vec{v} \bullet \vec{u} = -18$.

19. Determinar o vetor $\vec{v}$ ortogonal ao vetor $\vec{u} = (2, -3, -12)$ e colinear ao vetor $\vec{w} = (-6, 4, -2)$.

20. Determinar o vetor $\vec{v}$, colinear a $\vec{u} = (-4, 2, 6)$, tal que $\vec{v} \bullet \vec{w} = -12$, para $\vec{w} = (-1, 4, 2)$.

21. Provar que os pontos A = (5, 1, 5), B = (4, 3, 2) e C = (-3, -2, 1) são vértices de um triângulo retângulo.

22. Qual o valor de α para que os vetores $\vec{a} = \alpha\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$ e $\vec{b} = (\alpha + 1)\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ sejam ortogonais?

23. Verificar se existe ângulo reto no triângulo ABC, sendo A = (2, 1, 3), B = (3, 3, 5) e C = (0, 4, 1).

24. Determinar o vetor $\vec{v}$, sabendo que $\|\vec{v}\| = 5$, $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Oz, $\vec{v} \bullet \vec{w} = 6$ e $\vec{w} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

25. Determinar um vetor unitário ortogonal a $\vec{v} = (2, -1, 1)$.

26. Determinar um vetor de módulo 5 paralelo ao vetor $\vec{v} = (1, -1, 2)$.

27. O vetor $\vec{v}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2, -1, 3)$ e $\vec{w} = (1, 0, -2)$ e forma um ângulo agudo com o vetor $\vec{j}$. Calcular $\vec{v}$, sabendo que $\|\vec{v}\| = 3\sqrt{6}$.

28. Determinar o vetor $\vec{v}$ ortogonal ao eixo Oz, que satisfaz as condições $\vec{v} \bullet \vec{v}_1 = 10$ e $\vec{v} \bullet \vec{v}_2 = -5$, sendo $\vec{v}_1 = (2, 3, -1)$ e $\vec{v}_2 = (1, -1, 2)$.

29. Determinar o vetor projeção do vetor $\vec{u} = (1, 2, -3)$ na direção de $\vec{v} = (2, 1, -2)$.

30. Calcular o módulo dos vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$, sabendo que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 3$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60^0.

31. Sabendo que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ e que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam um ângulo de $\frac{3\pi}{4}$, determine $\|(2\vec{u} - \vec{v}) \bullet (\vec{u} - 2\vec{v})\|$.

32. O vetor $\vec{v}$ é ortogonal aos vetores $\vec{a} = (1, 2, 0)$ e $\vec{b} = (1, 4, 3)$ e forma um ângulo agudo com o eixo dos x. Determinar $\vec{v}$, sabendo que $\|\vec{v}\| = 14$.

33. Dados os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (-1, 2, 2)$, calcular:

(a) $\vec{w} \wedge \vec{v}$

(b) $\vec{v} \wedge (\vec{w} - \vec{u})$

(c) $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v})$

(d) $(2\vec{u}) \wedge (3\vec{v})$

(e) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet (\vec{u} \wedge \vec{v})$

(f) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet \vec{w}$ e $\vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w})$

(g) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ e $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$

(h) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} \wedge \vec{w})$

34. Dados os vetores $\vec{a} = (1, 2, 1)$ e $\vec{b} = (2, 1, 0)$, calcular:

(a) $2\vec{a} \wedge (\vec{a} + \vec{b})$ **(b)** $(\vec{a} + 2\vec{b}) \wedge (\vec{a} - 2\vec{b})$

35. Dados os pontos A = (2, -1, 2) , B = (1, 2, -1) e C = (3, 2, 1), determinar o vetor $\overrightarrow{CB} \wedge (\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA})$.

36. Determinar um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores $2\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{b} - \vec{a}$, sendo $\vec{a} = (3, -1, -2)$ e $\vec{b} = (1, 0, -3)$.

37. Dados os vetores $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (3, 4, -2)$ e $\vec{c} = (-5, 1, -4)$, mostrar que $\vec{a} \bullet (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \bullet \vec{c}$

38. Determinar o valor de **m** para que o vetor $\vec{w} = (1, 2, m)$ seja simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e a $\vec{v} = (1, -3, -1)$.

39. Dados os vetores $\vec{v} = (a, 5b, -\frac{c}{2})$ e $\vec{w} = (-3a, x, y)$, determinar **x** e **y** para que $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0}$.

40. Determinar um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e a $\vec{v} = (2, -1, 3)$. Nas mesmas condições, determinar um vetor de módulo 5.

41. Sabendo que $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{2}$ e 45^0 é o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$, calcular $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$.

42. Se $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 3\sqrt{3}$, $\|\vec{u}\| = 3$ e 60^0 é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, determinar $\|\vec{v}\|$.

43. Dados os vetores $\vec{a} = (3, 4, 2)$ e $\vec{b} = (2, 1, 1)$, obter um vetor de módulo 3 que seja ao mesmo tempo ortogonal aos vetores $2\vec{a} - \vec{b}$ e $\vec{a} + \vec{b}$.

44. Calcular a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u} = (3, 1, 2)$ e $\vec{v} = (4, -1, 0)$.

45. Mostrar que o quadrilátero cujos vértices são os pontos A = (1, -2, 3), B = (4, 3, -1), C = (5, 7, -3) e D = (2, 2, 1) é um paralelogramo e calcular sua área.

46. Calcular a área do paralelogramo cujos lados são determinados pelos vetores $2\vec{u}$ e $\vec{v}$, sendo $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e $\vec{v} = (1, -3, 2)$.

47. Calcular a área do triângulo de vértices:

(a) A = (-1, 0, 2), B = (-4, 1, 1) e C = (0, 1, 3)

(b) A = (1, 0, 1), B = (4, 2, 1) e C = (1, 2, 0)

(c) A = (2, 3, -1), B = (3, 1, -2) e C = (-1, 0, 2)

(d) A = (-1, 2, -2), B = (2, 3, -1) e C = (0, 1, 1)

48. Calcular a área do paralelogramo que tem um vértice no ponto A = (3, 2, 1) e uma diagonal de extermidades B = (1, 1, -1) e C = (0, 1, 2).

49. Calcular **x**, sabendo que A = (x, 1, 1), B = (1, -1, 0) e C = (2, 1, -1) são vértices de um triângulo de área $\frac{\sqrt{29}}{2}$.

50. Dado o triângulo de vértices A = (0, 1, -1), B = (-2, 0, 1) e C = (1, -2, 0), calcular a altura relativa ao lado BC.

51. Determinar $\vec{v}$ ortogonal ao eixo dos **y** e tal que $\vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{w}$, sendo $\vec{u}$ = (1, 1, -1) e $\vec{w}$ = (2, -1, 1).

52. Dados os vetores $\vec{u}$ = (0, 1, -1), $\vec{v}$ = (2, -2, -2) e $\vec{w}$ = (1, -1, 2), determinar o vetor $\vec{x}$ paralelo a $\vec{w}$ e que satisfaz à condição: $\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v}$.

53. Dados os vetores $\vec{u}$ = (2, 1, 0) e $\vec{v}$ = (3, -6, 9), determinar o vetor $\vec{x}$ que satisfaz a relação $\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{x}$ e que seja ortogonal a $\vec{w}$ = (1, -2, 3).

54. Calcule $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ e $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ diretamente e, a seguir, usando as fórmulas dadas no texto, sendo: $\vec{u} = (1,\ -\frac{3}{2},\ \frac{1}{2})$, $\vec{v}$ = (6, -2, -4) e $\vec{w} = (\frac{1}{7},\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{7})$.

55. Resolva o sistema:

$$S: \begin{array}{l} \vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{0} \\ \vec{x} \bullet \vec{u} = 1, \qquad (\vec{u} \neq \vec{0}) \end{array}$$

(**Sugestão:** Use que $\vec{x} = \alpha\, \vec{u}$, uma vez que $\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{0}$)

56. Resolva o sistema:

$$S: \begin{array}{l} \vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v} \\ \vec{x} \bullet \vec{u} = m, \qquad (\vec{u} \bullet \vec{v} = 0, \quad \vec{u} \neq \vec{0}) \end{array}$$

(**Sugestão:** Calcule $(\vec{x} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u}$)

RESPOSTAS

1. a = $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

2. $\vec{x}$ = (-17, -13, -15)

3. $\vec{v}$ = (1, 1, 1)

4. $(\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9})$

5. $\vec{u}$ não é e $\vec{v}$ é

6. $\pm \frac{\sqrt{5}}{5}$

7. m = -4 ou m = -5

8. m = 3 ou m = $-\frac{13}{5}$

9. m = -1 ou m = -3

10. $2\sqrt{11} + \sqrt{12}$ u.c. = $2(\sqrt{11} + \sqrt{3})$ u.c.

11. P = (1, 0, 0)

12. $\theta = 45^o$

13. 50

14. $\hat{A}$ = arc cos $\frac{5\sqrt{7}}{21}$ $\hat{B}$ = arc cos $\frac{2\sqrt{6}}{9}$ $\hat{C}$ = arc cos $-\frac{\sqrt{42}}{21}$

15. m = -4

16. n = $\sqrt{15}$

17. α = -6 ou α = 3

18. $\vec{v}$ = (-3, 3, -6)

19. qualquer vetor colinear a $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$; isto é, t(3, -2, 1), $\forall$ t $\in \mathbb{R}$

20. $\vec{v}$ = (2, -1, -3)

21. Mostre que $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = 0$

22. α = -3 ou α = 2

23. sim, $\hat{A} = 90^o$

24. $\vec{v}$ = ($\pm$4, 3, 0)

25. um deles é $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

26. $(\frac{5\sqrt{6}}{6}, -\frac{5\sqrt{6}}{6}, \frac{10\sqrt{6}}{6})$

27. $\vec{v} = (2, 7, 1)$

28. $\vec{v} = (-1, 4, 0)$

29. $proj_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{10}{9}\,(2, 1, -2)$

30. $\sqrt{37}$ e $\sqrt{13}$

31. $26 + 15\,\sqrt{2}$

32. $\vec{v} = (12, -6, 4)$

33. (a) (2, 2, -1) (b) (-1, -1, 0) (c) (-2, -2, 2) (d) (6, 6, -6)

(e) 3 (f) -1 e -1 (g) (4, -1, 3) e (1, -4, -6) (h) 1

34. (a) (-2, 4, -6) (b) (4, -8, 12)

35. (112, -8, 12)

36. t (3, 7, 1), t $\in \mathbb{R}$

38. m = -5

39. x = -15b e $y = \frac{3}{2}c$

40. $(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ ou $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ **e** $(\frac{5\sqrt{3}}{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{3})$ ou $(-\frac{5\sqrt{3}}{3}, \frac{5\sqrt{3}}{3}, \frac{5\sqrt{3}}{3})$

41. 3

42. 2

43. $\sqrt{\frac{3}{10}}\,(2, 1, -5)$

44. $\sqrt{117}$ u.a.

45. $\sqrt{89}$ u.a.

46. $6\,\sqrt{5}$ u.a.

47. (a) $\sqrt{6}$ u.a. (b) $\frac{7}{2}$ u.a. (c) $9\,\frac{\sqrt{2}}{2}$ u.a. (d) $2\,\sqrt{6}$ u.a.

48. $\sqrt{74}$ u.a.

49. 3 ou $\frac{1}{5}$

50. $\frac{3\sqrt{35}}{7}$ uc

51. $\vec{v} = (1, 0, 1)$

52. $\vec{x} = (-2, 2, -4)$

53. $\vec{x} = (2b - 9, b, 3)$, $b \in \mathbb{R}$

54. $(1, -2, 1)$ e $\frac{1}{7}(-10, -13, -19)$

55. $\vec{x} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$

56. $\vec{x} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} + \frac{m\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$