Lista 8 - Geometria Analítica e Álgebra Linear

Profa. Roseli

Em cada uma dos problemas a seguir, desenhe ambos os conjuntos de eixos coordenados e, quando possível, esboce o gráfico do lugar geométrico encontrado.

1. Por uma translação dos eixos coordenados para a nova origem indicada, transforme a equação dada a seguir:

(a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0, \quad O' = (-1, 3)$ (R: $x'^2 + y'^2 = 4$)

(b) $3x^2 + 2y^2 + 12x - 4y + 8 = 0, \quad O' = (-2, 1)$ (R: $3x'^2 + 2y'^2 = 6$)

(c) $4x^2 - y^2 - 8x - 10y - 25 = 0, \quad O' = (1, -5)$ (R: $4x'^2 - y'^2 = 4$)

(d) $y^3 - x^2 + 3y^2 - 4x + 3y - 3 = 0, \quad O' = (-2, -1)$ (R: $y'^3 - x'^2 = 0$)

(e) $xy - 3x + 4y - 13 = 0, \quad O' = (-4, 3)$ (R: $x'y' = 1$)

2. Usando as equações de translação dos eixos coordenados, transforme cada uma das equações a seguir em outra desprovida de termos do 1º grau.

(a) $2x^2 + y^2 + 16x - 4y + 32 = 0$ (R: $2x'^2 + y'^2 = 4$)

(b) $3x^2 + 2y^2 + 18x - 8y + 29 = 0$ (R: $3x'^2 + 2y'^2 = 6$)

(c) $3x^2 - 2y^2 - 42x - 4y + 133 = 0$ (R: $3x'^2 - 2y'^2 = 12$)

(d) $xy - x + 2y - 10 = 0$ (R: $x'y' = 8$)

(e) $8x^3 + 24x^2 - 4y^2 + 24x - 12y - 1 = 0$ (R: $2x'^3 - y'^2 = 0$)

3. Usando o método de completar quadrados, transforme cada uma das equações a seguir em outra desprovida de termos do 1º grau.

(a) $4x^2 + 4y^2 + 32x - 4y + 45 = 0$ (R: $x'^2 + y'^2 = 5$)

(b) $2x^2 + 5y^2 - 28x + 20y + 108 = 0$ (R: $2x'^2 + 5y'^2 = 10$)

(c) $x^2 - 3y^2 + 6x + 6y + 3 = 0$ (R: $x'^2 - 3y'^2 = 3$)

(d) $12x^2 + 18y^2 - 12x + 12y - 1 = 0$ (R: $2x'^2 + 3y'^2 = 1$)

(e) $12x^2 - 18y^2 - 12x - 12y - 5 = 0$ (R: $2x'^2 - 3y'^2 = 1$)

4. Simplificar a equação dada, por meio de uma translação dos eixos coordenados:

(a) $x^2 + 8x - 3y + 10 = 0$ (R: $x'^2 - 3y' = 0$)

(b) $16x^2 + 16y^2 + 8x - 48y + 5 = 0$ (R: $x'^2 + y'^2 = 2$)

(c) $72x^2 + 36y^2 - 48x + 36y - 55 = 0$ (R: $2x'^2 + y'^2 = 2$)

(d) $y^2 - 6x^2 - 24x - 2y - 32 = 0$ (R: $y'^2 - 6x'^2 = 9$)

(e) $30xy + 24x - 25y - 80 = 0$ (R: $x'y' = 2$)

Em cada uma dos problemas a seguir, desenhe ambos os conjuntos de eixos coordenados e esboce o gráfico da elipse encontrada.

5. Os vértices do eixo maior de uma elipse são os pontos (1, 1) e (7, 1) e sua excentricidade é $e = \frac{1}{3}$. Determinar a equação desta elipse, as coordenadas de seus focos e os comprimentos de seus eixos maior e menor e de cada latus rectum.

6. Os focos de uma elipse são os pontos (-4, -2) e (-4, -6) e o comprimento de cada latus rectum é 6 uc. Determinar a equação desta elipse e sua excentricidade.

7. Os vértices de uma elipse são os pontos (1, -6) e (9, -6) e o comprimento de cada latus rectum é $\frac{9}{2}$ uc. Determinar a equação desta elipse, as coordenadas de seus focos e sua excentricidade.

8. Os focos de uma elipse são os pontos (3, 8) e (3, 2) e o comprimento de seu eixo menor é 8. Determinar a equação da elipse, as coordenadas de seus vértices e sua excentricidade.

9. O centro de uma elipse é o ponto (2, -4) e o vértice e o foco no mesmo semi-eixo são os pontos (-2, -4) e (-1, -4), respectivamente. Determinar a equação da elipse, sua excentricidade, os comprimentos de seu eixo menor e de cada latus rectum.

Nos Exercícios 10 a 13, reduza a equação da elipse dada à 2ª forma padrão e determine as coordenadas do centro, dos vértices, dos focos, a excentricidade e comprimentos dos eixos maior e menor e de cada latus rectum. (Respostas no final da Lista).

10. $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0.$ (E: $\frac{(x-3)^2}{4} + (y+2)^2 = 1$)

11. $4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0.$ (E: $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$)

12. $x^2 + 4y^2 - 10x - 40y + 109 = 0.$ (E: $\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$)

13. $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0.$ (E: $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$)

14. Por translação dos eixos coordenados, reduza à forma padrão a equação da elipse:

$x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0.$ (**R:** $\frac{x'^2}{4} + y'^2 = 1$)

15. Por translação dos eixos coordenados, reduza à forma padrão a equação da elipse:

$9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0.$ (**R:** $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1$)

16. Determinar os comprimentos dos raios focais do ponto $P = (2, 1)$ sobre a elipse $9x^2 + y^2 + - 18x - 2y + 1 = 0$. (**R:** 3 uc)

17. O ponto médio de uma corda da elipse $x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0$ é $(5, 2)$. Determine a equação da corda. (**R:** $x + 2y - 9 = 0$)

18. Determinar e identificar a equação do lugar geométrico de um ponto do plano que se move de maneira que sua distância ao eixo O_y é sempre igual a duas vezes sua distância ao ponto $P = (3, 2)$. (**R:** $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{3} = 1$)

19. De cada ponto da circunferência $\boldsymbol{\gamma}$: $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$ é traçada uma perpendicular ao diâmetro que é paralelo ao eixo O_x. Determinar e identificar a equação do lugar geométrico dos pontos médios destas perpendiculares. (**R:** $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$)

20. A base de um triângulo é fixa sendo que seus extremos são os pontos $A = (0, 0)$ e $B = (6, 0)$. Determinar e identificar a equação do lugar geométrico do vértice oposto, sabendo que o produto das tangentes dos ângulos da base é sempre igual a 4. (**R:** $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$)

Em cada uma dos problemas a seguir, desenhe ambos os conjuntos de eixos coordenados e esboce o gráfico da hipérbole encontrada.

21. Os vértices de uma hipérbole são $(-1, 3)$ e $(3, 3)$ e sua excentricidade é $\frac{3}{2}$. Determine a equação desta hipérbole, as coordenadas dos seus focos, os comprimentos dos seus eixos transverso e conjugado e o comprimento de cada latus rectum.

22. Os vértices de uma hipérbole são $(-2, 2)$ e $(-2, -4)$ e o comprimento de cada latus rectum é 2 uc. Determine a equação da hipérbole, as coordenadas dos seus focos e sua excentricidade.

23. O centro de uma hipérbole é o ponto $O' = (2, -2)$ e um dos seus vértices é o ponto $(0, -2)$. Se o comprimento de cada latus rectum é 8 uc, determinar a equação da hipérbole, o comprimento do eixo conjugado e sua excentricidade.

24. Os focos de uma hipérbole são $(4, -2)$ e $(4, -8)$ e o comprimento do seu eixo transverso é 4 uc. Determine a equação da hipérbole, o comprimento de cada latus rectum e sua excentricidade.

25. O centro de uma hipérbole é o ponto $O' = (4, 5)$ e um de seus focos é o ponto $(8, 5)$. Se a excentricidade desta hipérbole é 2, determine sua equação e os comprimentos de seus eixos transverso e conjugado.

26. Os vértices de uma hipérbole são (-3, 2) e (-3, -2) e o comprimento de seu eixo conjugado é 6 uc. Determinar a equação da hipérbole, as coordenadas de seus focos e sua excentricidade.

Nos Problemas 27 a 31, reduza a equação dada à 2ª forma padrão da equação da hipérbole e determine as coordenadas do centro, dos vértices, dos focos, os comprimentos dos eixos transverso e conjugado, de cada latus rectum, a excentricidade e as equações das assíntotas.

27. $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$. (R: $\frac{(x-2)^2}{9} - (y-2)^2 = 1$)

28. $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$. (R: $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+4)^2}{9} = 1$)

29. $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$. (R: duas retas concorrentes: **r:** $x - 2y - 1 = 0$ e **s:** $x + 2y - 1 = 0$)

30. $9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y + 29 = 0$. (R: $\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$)

31. $3x^2 - y^2 + 30x + 78 = 0$. (R: $\frac{y^2}{3} - (x+5)^2 = 1$)

32. Determinar o ângulo agudo formado pelas assíntotas da hipérbole

$$9x^2 - y^2 - 36x - 2y + 44 = 0. \qquad \text{(R: } 36^o\ 52'\text{)}$$

33. O eixo focal de uma hipérbole é paralelo ao eixo O_x e suas assíntotas são as retas de equações **r:** $2x + y - 3 = 0$ e **s:** $2x - y - 1 = 0$. Determine a equação da hipérbole, sabendo que ela passa pelo ponto $P = (4, 6)$. (R: $4x^2 - y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$)

34. Determinar a equação e identificar o lugar geométrico de um ponto do plano que se move de maneira que sua distância ao ponto $A = (3, 2)$ é sempre igual a três vezes sua distância à reta **r:** $y + 1 = 0$. (R: $x^2 - 8y^2 - 6x - 22y + 4 = 0$ ou $\frac{(y-\frac{11}{8})^2}{\frac{81}{64}} - \frac{(x-3)^2}{\frac{81}{8}} = 1$)

35. Determinar a equação da parábola cujo vértice e foco são, respectivamente, os pontos $V = (-4, 3)$ e $F = (-1, 3)$. Determinar também as equações de sua diretriz e do seu eixo e o comprimento de seu latus rectum.

36. Determinar a equação da parábola cujo vértice e foco são, respectivamente, os pontos $V = (3, 3)$ e $F = (3, 1)$. Determinar também as equações de sua diretriz e do seu eixo e o comprimento de seu latus rectum.

37. A diretriz de uma parábola é a reta **d:** $y - 1 = 0$ e seu foco é o ponto $F = (4, -3)$. Determinar a equação desta parábola.

38. A diretriz de uma parábola é a reta **d:** $x + 5 = 0$ e seu vértice é o ponto $V = (0, 3)$. Determinar a equação desta parábola.

Em cada uma dos problemas 39 a 43, reduzir a equação dada à forma padrão da equação da parábola e determinar as coordenadas do vértice e do foco, a equaçõoes de sua diretriz e do seu eixo e o comprimento do latus rectum.

39. $4y^2 - 48x - 20y = 71$

40. $9x^2 + 24x + 72y + 16 = 0$

41. $y^2 + 4x = 7$

42. $4y^2 + 48y + 12x = 159$

43. $y = ax^2 + bx + c$ (**P:** $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{1}{a}(y + \frac{b^2-4ac}{4a})$, vértice: $V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$)

44. Usando uma translação dos eixos coordenados, mostre que o lugar geométrico da equação $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$ é uma parábola.

45. Utilizando a equação $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, determine a equação da parábola cujo eixo é paralelo ao eixo O_x e que passa pelos pontos $A = (\frac{3}{2}, -1)$, $B = (0, 5)$ e $C = (-6, -7)$.

46. Determine as coordenadas do vértice e do foco, as equações da diretriz e do eixo e o comprimento do latus rectum da parábola do exercício anterior.

47. Determinar a equação da parábola cujo eixo é paralelo a O_x e que passa pelos três pontos: $A = (0, 0)$, $B = (8, -4)$ e $C = (3, 1)$.

48. Determinar a equação da parábola cujo vértice é o ponto $V = (4, -1)$, cujo eixo é a reta **r:** $y + 1 = 0$ e que passa pelo ponto $P = (3, -3)$.

49. Determinar o comprimento do eixo focal do ponto cuja ordenada é igual a 3 e que se encontra sobre a parábola $y^2 + 4x + 2y - 19 = 0$.

Em cada um dos Exercícios a seguir, desenhe o lugar geométrico e ambos os conjuntos de eixos.

50. Determinar as novas coordenadas do ponto $A = (3, -4)$ quando os eixos coordenados são girados de um ângulo de 30º. (R: $(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2, -2\sqrt{3} - \frac{3}{2})$)

51. Determinar as novas coordenadas dos pontos $A = (1, 0)$ e $B = (0, 1)$ quando os eixos coordenados são girados de um ângulo de 90º. (R: respectivamente, (0, -1) e (1, 0))

Nos Exercícios 52 a 57, transforme a equação dada por uma rotação dos eixos coordenados do ângulo indicado.

52. $2x + 5y - 3 = 0$; $\theta = \text{arc tg}(\frac{5}{2})$ (R: $\sqrt{29}\,x' - 3 = 0$)

53. $x^2 - 2xy + y^2 - x = 0$; $\theta = 45^o$ (R: $2y'^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' = 0$)

54. $\sqrt{3}\,y^2 + 3xy - 1 = 0$; $\theta = 60^o$ (R: $3\sqrt{3}\,x'^2 - \sqrt{3}\,y'^2 - 2 = 0$)

55. $5x^2 + 3xy + y^2 - 4 = 0$; $\theta = \text{arc sen}(\frac{\sqrt{10}}{10})$ (R: $11x'^2 + y'^2 - 8 = 0$)

56. $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 20 = 0$; $\theta = \text{arc tg } 0{,}75$ (R: $4x'^2 - y'^2 - 4 = 0$)

57. $x^4 + y^4 + 6x^2y^2 - 32 = 0$; $\theta = 45^o$ (R: $x'^4 + y'^4 = 16$)

58. Por uma rotação dos eixos coordenados, transforme a equação $2x - y - 2 = 0$ em outra desprovida do termo x'. (R: $\sqrt{5}\,y' + 2 = 0$)

59. Por uma rotação dos eixos coordenados, transforme a equação $x + 2y - 2 = 0$ em outra desprovida do termo y'. (R: $\sqrt{5}\,x' - 2 = 0$)

Nos Exercícios de 60 a 65 por uma rotação dos eixos coordenados transforme a equação dada em outra desprovida do termo $x'y'$.

60. $4x^2 + 4xy + y^2 + \sqrt{5}\,x = 1$ (R: $5x'^2 + 2x' - y' = 1$)

61. $9x^2 + 3xy + 9y^2 = 5$ (R: $21x'^2 + 15y'^2 - 10 = 0$)

62. $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 2$ (R: $6x'^2 + y'^2 - 2 = 0$)

63. $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$ (R: $x' + 3y' = 0$ ou $x' - 3y' = 0$)

64. $x^2 - 2xy + y^2 - 4 = 0$ (R: $y' = \pm\sqrt{2}$)

65. $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 25x = 0$ (R: $5x'^2 + 4x' - 3y' = 0$)

RESPOSTAS

5. E: $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1$; Focos: (3, 1) e (5, 1); eixo maior: 6 uc;

eixo menor: $4\sqrt{2}$ uc; latus rectum: $\frac{16}{3}$ uc

6. E: $\frac{(y+4)^2}{16} + \frac{(x+4)^2}{12} = 1$ e $e = \frac{1}{2}$

7. E: $\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y+6)^2}{9} = 1$; Focos: $(5 \pm \sqrt{7}, -6)$; $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$

8. E: $\frac{(y-5)^2}{25} + \frac{(x-3)^2}{16} = 1$; Vértices: (3, 0) e (3, 10); $e = \frac{3}{5}$

9. E: $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{7} = 1$; $e = \frac{3}{4}$; eixo menor: $2b = 2\sqrt{7}$ uc; latus rectum: $\frac{2b^2}{a} = \frac{7}{2}$ uc

	centro	**vértices**	**vértices**	**focos**	**2a**	**2b**	**latus rectum**	**e**
10	(3, -2)	(1, -2) e (5, -2)	(3, -3) e (3, -1)	$(3 \pm\sqrt{3}, -2)$	4 uc	2 uc	1 uc	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
11	(-4, 1)	(-7, 1) e (-1, 1)	(-4, -1) e (-4, 3)	$(-4 \pm\sqrt{5}, 1)$	6 uc	4 uc	$\frac{8}{3}$ uc	$\frac{\sqrt{5}}{3}$
12	(5, 5)	(1, 5) e (9, 5)	(5, 3) e (5, 7)	$(5 \pm 2\sqrt{3}, 5)$	8 uc	4 uc	2 uc	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
13	(0, 1)	(0, -2) e (0, 4)	(-3, 1) e (3, 1)	$(0, 1 \pm\sqrt{5})$	6 uc	4 uc	$\frac{8}{3}$ uc	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

21. H: $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1$; Focos: (-2, 3) e (4, 3); eixo maior: 4 uc;

eixo menor: $2\sqrt{5}$ uc; latus rectum: 5 uc

22. H: $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{3} = 1$; Focos: $(-2, -1 - 2\sqrt{3})$ e $(-2, -1 + 2\sqrt{3})$;

excentricidade: $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

23. H: $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{8} = 1$; eixo conjugado: $2b = 4\sqrt{2}$ uc; excentricidade: $e = \sqrt{3}$

24. H: $\frac{(y+5)^2}{4} - \frac{(x-4)^2}{5} = 1$; latus rectum: 5 uc; excentricidade: $e = \frac{3}{2}$

25. H: $\frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{12} = 1$; eixo transverso: $2a = 4$ uc; eixo conjugado: $2b = 3\sqrt{3}$ uc

26. H: $\frac{y^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$; Focos: $(-3, -\sqrt{13})$ e $(-3, \sqrt{13})$; excentricidade: $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$

OBSERVAÇÃO: Não consegui colocar aqui as respostas dos Exercícios 27 a 31. Confira com seus colegas que têm a apostila as respostas dos exercícos da secção 3.32, p.100, de 7 a 11.

35. (y - 3)^2 = 12(x + 4); **diretriz d:** x = -7; **eixo:** y = 3; 12 uc.

36. (x - 3)^2 = -8(y - 3); **diretriz d:** y = 5; **eixo:** x = 3; 8 uc.

37. (x - 4)^2 = -8(y + 1)

38. y^2 - 20x - 6y + 9 = 0

	Equação da Parábola	**vértice**	**foco**	**Equação da diretriz**	**Equação do eixo**	**latus rectum**
39	$(y - \frac{5}{2})^2 = 12\ (x + 2)$	$(-2, \frac{5}{2})$	$(1, \frac{5}{2})$	$x = -5$	$y = \frac{5}{2}$	12 uc
40	$(x + \frac{4}{3})^2 = -\ 8y$	$(-\frac{4}{3}, 0)$	$(-\frac{4}{3}, -2)$	$y = 2$	$x = -\frac{4}{3}$	8 uc
41	$y^2 = -4(x - \frac{7}{4})$	$(\frac{7}{4}, 0)$	$(\frac{3}{4}, 0)$	$x = \frac{11}{4}$	$y = 0$	4 uc
42	$(y + 6)^2 = -3(x - \frac{101}{4})$	$(\frac{101}{4}, -6)$	$(\frac{49}{2}, -6)$	$x = 26$	$y = -6$	3 uc
43			$(-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2+4ac+1}{4a})$	$y = \frac{-b^2+4ac-1}{4a}$	$x = -\frac{b}{2a}$	$\frac{1}{a}$ uc

44. $x'^2 = 6y'$

45. (y - 1)^2 = -8(x - 2)

46. V = (2, 1), F = (0, 1), **d:** x = 4, eixo: **r:** y = 1, latus rectum: 8 uc

47. (y + 1)^2 = x + 1

48. (y + 1)^2 = -4(x - 4)

49. 5 uc