Capítulo 10

PERPENDICULARISMO E ORTOGONALIDADE

Nos capítulos anteriores, somente em alguns casos foi necessário supor que o sistema de coordenadas fosse ortogonal. Neste e nos próximos capítulos esta hipótese é essencial. A menos que explicitemos o contrário, considere **fixado um sistema ortogonal** $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

10.1 Reta e Reta

Para decidir se duas retas são ortogonais, consideramos vetores diretores dessas retas e verificamos se eles são ortogonais. Lembre que: retas **ortogonais** podem ser concorrentes ou reversas, enquanto que retas **perpendiculares** são, necessariamente, concorrentes.

10.2 Problemas Resolvidos

1. Verifique se as retas r: $X = (1, 1, 1) + \lambda(2, 1, -3)$ e s: $X = (0, 1, 0) + \alpha(-1, 2, 0)$ são ortogonais. Em caso afirmativo, verifique se são perpendiculares.

Solução: Temos que: $\vec{r} \bullet \vec{s} = (2, 1, -3) \bullet (-1, 2, 0) = 2.(-1) + 1.2 + (-3).0 = -2 + 2 = 0$ e, portanto, **r** e **s** são ortogonais. Para verificar se são perpendiculares, basta verificar se são concorrentes. Há duas maneiras de se fazer isso: a primeira é resolvendo-se o sistema formado pelas equações de **r** e **s**. A outra maneira é verificando se **r** e **s** são coplanares, ou seja, considerando os pontos $A = (1, 1, 1) \in r$, $B = (0, 1, 0) \in s$, estudamos a dependência linear dos vetores $\vec{r}$, $\vec{s}$ e $\overrightarrow{BA} = (1, 0, 1)$. Vejamos:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 11 \neq 0$$

o que mostra que $\vec{r}$, $\vec{s}$ e $\overrightarrow{BA}$ são **LI** e, portanto, **r** e **s** são reversas; logo não são perpendiculares.

2. Verifique se as retas **r** e **s** são ortogonais. Em caso afirmativo, verifique se são perpendiculares, sendo:

$$r: \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Solução: Os vetores diretores de **r** e **s** são, respectivamente, $\vec{r} = (0, 4, 2)$ e $\vec{s} = (1, 1, -1)$ (**faça esses cálculos!!!**). Como $\vec{r} \bullet \vec{s} = 0.1 + 4.1 + 2.(-1) = 4 - 2 = 2 \neq 0$, as retas $\vec{r}$ e $\vec{s}$ **não são** ortogonais.

3. Ache equações paramétricas da reta **r** que passa por $P = (-1, 3, 1)$ e é perpendicular à reta s: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$.

Solução: Procuremos o ponto $Q = r \cap s =$ pé da perpendicular. O ponto $A = (1, 1, 0) \in s$ e $\vec{s} = (2, 3, 1)$ é um vetor diretor de **s** e, portanto, uma equação vetorial de **s** é dada por s: $X = (1, 1, 0) + \lambda(2, 3, 1)$. Dessa forma, como Q pertence a **s**, segue que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$Q = (1 + 2\lambda, 1 + 3\lambda, \lambda)$$

e portanto um vetor diretor de **r** é:

$$\vec{r} = \overrightarrow{PQ} = (2 + 2\lambda, -2 + 3\lambda, \lambda - 1)$$

Como **r** e **s** são perpendiculares, devemos ter $\vec{r} \perp \vec{s}$; ou seja:

$0 = \vec{r} \bullet \vec{s} = (2 + 2\lambda, -2 + 3\lambda, \lambda - 1) \bullet (2, 3, 1) = (2 + 2\lambda).2 + (-2 + 3\lambda).3 + (\lambda - 1).1 = 4 + 4\lambda - 6 + 9\lambda + \lambda - 1 = 14\lambda - 3 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{3}{14}$ e, portanto, $\overrightarrow{PQ} = (\frac{34}{14}, -\frac{19}{14}, -\frac{11}{14})$. Então um sistema de equações paramétricas de **r** é dado por:

$$r: \begin{cases} x = -1 + 34\lambda \\ y = \ \ 3 - 19\lambda \\ z = \ \ 1 - 11\lambda \end{cases}$$

10.3 Problemas Propostos

1. Verifique se as retas **r** e **s** são ortogonais; em caso afirmativo, se são também perpendiculares.

(a) r: $X = (1, 2, 3) + \lambda(1, 2, 1)$ s: $X = (2, 4, 4) + \lambda(-1, 1, -1)$

(b) r: $X = (0, 1, 0) + \lambda(3, 1, 4)$ s: $X = (-1, 1, 0) + \lambda(1, 0, 1)$

(c) r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{7}$ s: $X = (1, 3, 0) + \lambda(0, -7, 5)$

(d) r: $x + 3 = y = \frac{z}{3}$ s: $\frac{x-4}{2} = \frac{4-y}{-1} = -z$

(e) r: $\begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -5 - 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ s: $\frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{-5}$

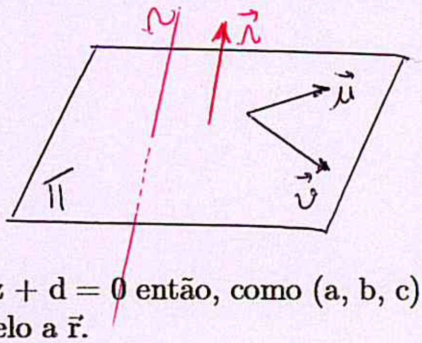
2. Ache equações na forma simétrica (quando existir) da reta **t** perpendicular comum às retas reversas

(a) $r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x + y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

(b) $r:\ x = y - 1 = z + 3$ e s: $2x - y = y + z = 2x - z - 1$

10.4 Reta e Plano

Para decidir se uma reta **r** e um plano Π são perpendiculares, o procedimento é o seguinte: considere os vetores:



$\vec{r}$: paralelo a r

$\vec{u}$ e $\vec{v}$: **LI** e paralelos ao plano Π

Então: $\mathbf{r} \perp \Pi \iff \vec{u} \wedge \vec{v} \,//\, \vec{r}$

Se for conhecida uma equação geral do plano Π: $ax + by + cz + d = 0$ então, como (a, b, c) é um vetor normal a Π, basta verificarmos se este vetor é paralelo a $\vec{r}$.

10.5 Problemas Resolvidos

1. Verifique se **r** e Π são perpendiculares, sendo r: $X = (0, 1, 0) + \lambda(1, 1, 3)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ e Π: $X = (3, 4, 5) + \lambda(6, 7, 8) + \mu(9, 10, 11)$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

Solução: Um vetor normal ao plano Π é $\vec{n} = (6, 7, 8) \wedge (9, 10, 11) = (-3, 6, -3)$. Como um vetor diretor da reta **r** é $\vec{r} = (1, 1, 3)$, que não é paralelo a $\vec{n}$, segue que **r** e Π não são perpendiculares.

2. Verifique se **r** e Π são perpendiculares, sendo Π: $x + 2z = 14$ e r: $\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$

Solução: Um vetor paralelo a **r** é $\vec{r} = (2, -1, -1) \wedge (2, 1, -1) = (2, 0, 4)$. Por outro lado, um vetor normal a Π é $\vec{n} = (1, 0, 2)$. Como $\vec{r} = 2\vec{n}$, vemos que $\mathbf{r} \perp \Pi$.

10.6 Problemas Propostos

1. Verifique se **r** é perpendicular a Π nos casos

(a) r: $X = (3, 1, 4) + \lambda(1, -1, 1)$ Π: $X = (1, 1, 1) + \lambda(0, 1, 0) + \mu(1, 1, 1)$

(b) r: $X = (3, 1, 4) + \lambda(-1, 0, 1)$ Π: $X = (1, 1, 1) + \lambda(0, 2, 0) + \mu(1, 1, 1)$

(c) r: $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $\Pi: 6x - 6y + 2z - 1 = 0$

(d) r: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ $\Pi: x - y + z = 1$

(e) r: $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ $\Pi: 2x - 2y + 4z = 1$

2. Ache equações paramétricas da reta **r** que passa por P e é perpendicular ao plano Π nos casos:

(a) $P = (1, -1, 0)$ Π: $X = (1, -1, 1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(1, 1, 1)$

(b) $P = (1, 3, 7)$ Π: $2x - y + z = 6$

3. Ache uma equação geral do plano Π que passa por P e é perpendicular à reta **r** nos seguintes casos:

(a) P = (0, 1, -1) r: X = (0, 0, 0) + λ(1, -1, 1)

(b) P = (1, 1, -1) r: $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$

(c) P = (0, 0, 0) r passa por A = (1, -1, 1) e B = (-1, 1, -1)

4. Ache o ponto Q, simétrico do ponto P em relação à reta **r** nos seguintes casos:

(a) P = (0, 2, 1) r: X = (1, 0, 0) + λ(0, 1, -1)

(b) P = (1, 1, -1) r: $\frac{x+2}{3} = y = z$

(c) P = (0, 0, -1) r: $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$

5. Ache o ponto Q, simétrico do ponto P em relação ao plano Π nos seguintes casos:

(a) P = (1, 4, 2) Π: x - y + z - 2 = 0

(b) P = (1, 1, 1) Π: 4y - 2z + 3 = 0

6. Determine a projeção ortogonal

(a) do ponto P = (4, 0, 1) sobre o plano Π: 3x - 4y + 2 = 0

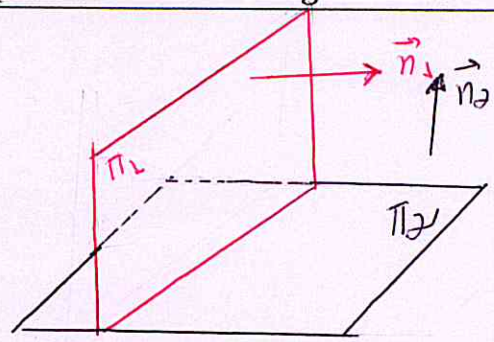
(b) da reta r: x + 1 = y + 2 = 3z - 3 sobre o plano Π: x - y + 2z = 0

7. Dados os planos Π_1: x - y + z + 1 = 0 e Π_2: x + y - z - 1 = 0, determine o plano Π que contém $\Pi_1 \cap \Pi_2$ e é ortogonal ao vetor (1, 1, -1).

8. Ache o vértice B do triângulo retângulo ABC sabendo que

- A = (1, 1, 1) e a cota de C é maior do que a de A;
- a hipotenusa AC mede $\sqrt{3}$ uc e é ortogonal ao plano x + y - z - 10 = 0;
- o lado AB é ortogonal ao plano 2x - y - z = 0.

10.7 Plano e Plano



Se $\vec{n}_1$ é normal ao plano Π_1 e

$\vec{n}_2$ é normal ao plano Π_2, então

$\Pi_1 \perp \Pi_2$ se, e somente se, $\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2 = 0$.

10.8 Problema Resolvido

Verificar se são perpendiculares os planos

Π_1: $X = (0, 0, 1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(-1, -1, 1)$ Π_2: $2x - 7y + 16z = 40$.

Solução: Um vetor normal a Π_1 é $\vec{n}_1 = (1, 0, 1) \wedge (-1, -1, 1) = (1, -2, -1)$. Um vetor normal a Π_2 é $\vec{n}_2 = (2, -7, 6)$. Como $\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2 = (1, -1, -1) \bullet (2, -1, 16) = 1.2 + (-1).(-1) + (-1).16 = = 0$, segue que $\Pi_1 \perp \Pi_2$.

10.9 Problemas Propostos

1. Verifique se os planos dados são perpendiculares nos casos:

(a) Π_1: $X = (1, -3, 4) + \lambda(1, 0, 3) + \mu(0, 1, 3)$ Π_2: $X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 6) + \mu(1, -1, 0)$

(b) Π_1: $X = (1, 1, 1) + \lambda(-1, 0, -1) + \mu(4, 1, 1)$ Π_2: $X = (3, 1, 1) + \lambda(1, -3, -1) + \mu(3, 1, 0)$

(c) Π_1: $X = (4, 3, 1) + \lambda(-1, 0, -1) + \mu(3, 1, 0)$ Π_2: $y - 3z = 0$

(d) Π_1: $x + y - z - 2 = 0$ Π_2: $4x - 2y + 2z = 0$

2. Ache uma equação geral do plano Π que passa por $P = (2, 1, 0)$ e é perpendicular aos planos Π_1: $x + 2y - 3z + 4 = 0$ e Π_2: $8x - 4y + 16z - 1 = 0$.

3. Dados os planos Π_1: $x - y + z + 1 = 0$, Π_2: $x + y - z - 1 = 0$ e Π_3: $x + y + 2z - 2 = 0$, ache uma equação do plano Π que contém $\Pi_1 \cap \Pi_2$ e é perpendicular a Π_3.