Gabarito

Universidade Estadual Paulista-"Júlio de Mesquita Filho"
Departamento de Matemática-FEIS-UNESP
1º Trabalho Geometria Analítica e Álgebra Linear 1º Semestre - 2017
Prof. Edson Donizete de Carvalho

Nome: **RA:**

Neste trabalho, fixaremos o sistema de cordenadas ortonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ no espaço.

1) Sejam r e s retas no espaço e u_r e u_s vetores diretores de r e s, respectivamente. A medida agular entre r e s é dada por $\theta = ang(u_r, u_s)$ onde $\theta \in [0, \pi/2]$. Dadas as retas abaixo no espaço:

$$r : X = (1,0,0) + \lambda(1,2,1) | \lambda \in \mathbb{R},$$

$$s : X = (1,0,0) + \mu(0,1,1) | \mu \in \mathbb{R}.$$

(i) Calcule o produto escalar entre u_r e u_s. (1,0 ponto)

(ii) Calcule o produto vetorial entre u_r e u_s. (1,0 ponto)

(iii) Calcule o ângulo entre as retas r e s. (1,0 ponto)

(iv) Determine a equação vetorial ou paramétrica do plano π determinado pelas retas r e s.(1,5 pontos)

(v) Note pela figura acima que $\overrightarrow{OC} // \vec{u_s}$ e que $\overrightarrow{AC} \perp \vec{u_s}$. Logo, existe um escalar λ tal que $\overrightarrow{OC} = \lambda \vec{u_s}$ e $\overrightarrow{AC}.\vec{u_s} = 0$. Mostre que $\lambda = \frac{\vec{u_r}.\vec{u_s}}{\|\vec{u_s}\|^2}$. Na literatura, o vetor $\overrightarrow{OC}$ é chamado de projeção ortogonal de $\vec{u_r}$ na direção de $\vec{u_s}$ e denotado por $proj_{\vec{u_s}}^{\vec{u_r}} = (\frac{\vec{u_r}.\vec{u_s}}{\|\vec{u_s}\|^2})\vec{u_s}$. (1,5 pontos)

(vi) Nestes termos, determine a projeção ortogonal de $\vec{u_r}$ na direção de $\vec{u_s}$. (1,0 ponto)

2) Consideremos um plano π no espaço. Chamamos de vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$ a π a qualquer vetor não nulo ortogonal a π. Dado um ponto $A = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$ e um ponto $X = (x, y, z)$ no espaço, temos que $X \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AX} \perp \vec{n}$, ou que equivale a $X \in \pi \Leftrightarrow (x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0$, chamando $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. Ou seja, $X \in \pi \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$ (Equação geral do plano).
Utilize o fato de que se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores diretores do plano π então $\vec{n} // \vec{u} \wedge \vec{v}$ para se obter a equação geral do plano π referente ao Exercício 1.(3,0 pontos)

Bom Trabalho!!

Gabarito - 1º Trabalho de AL 16 AL

1) $r: X = (1,0,0) + \lambda(1,2,1) \mid \lambda \in \mathbb{R}$

$s: X = (1,0,0) + \mu(0,1,1) \mid \mu \in \mathbb{R}$

Temos que $\vec{u}_r = (1,2,1)$ e $\vec{u}_s = (0,1,1)$ os vetores diretores das retas r e s, respectivamente.

(i) Assim, o produto escalar entre $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_s$ é dado por:

$$\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s = (1,2,1)\cdot(0,1,1) = 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 1\cdot 1 = 3.$$

(ii) Já o produto vetorial entre $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_s$ é dado por:

$$\vec{u}_r \wedge \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} = (1,-1,1)$$

(iii) Como ângulo θ entre as retas r e s foi definido por $\theta = \operatorname{ang}(\vec{u}_r, \vec{u}_s)$, segue-se então que:

$$\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s = \|\vec{u}_r\| \, \|\vec{u}_s\| \cos\theta \Rightarrow$$

$$3 = \|(1,2,1)\| \, \|(0,1,1)\| \cos\theta \Rightarrow$$

$$3 = \sqrt{1^2+2^2+1^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2} \cos\theta \Rightarrow$$

$3 = \sqrt{6}\cdot\sqrt{2}\cos\theta \Rightarrow 3 = \sqrt{12}\cos\theta \Rightarrow$

$3 = \sqrt{2^2\cdot 3}\cos\theta \Rightarrow 3 = 2\sqrt{3}\cos\theta \Rightarrow$

$\frac{3}{2\sqrt{3}} = \cos\theta \Rightarrow \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \cos\theta \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\theta \Rightarrow$

$\boxed{\theta = \frac{\pi}{6}\ rad}$

Logo, o ângulo entre as retas r e s é dado por $\frac{\pi}{6}$ rad.

(iv) Note que $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{1}$. Assim, $(\vec{u}_r, \vec{u}_s)$ é LI.

Como $A = (1,0,0) \in \pi$,

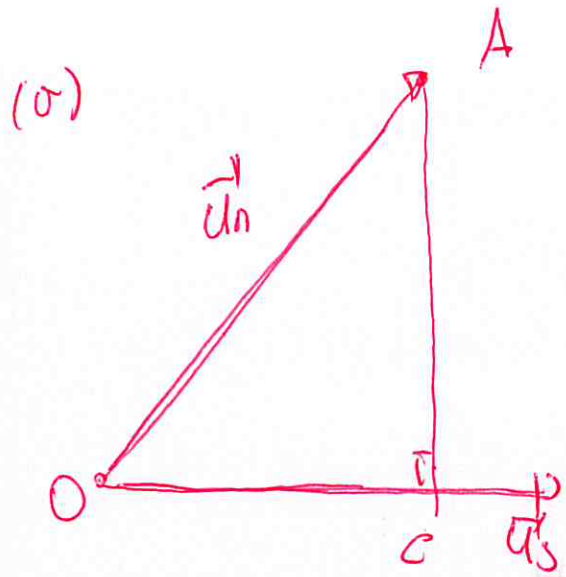
Temos, então que $A \in \pi$, e $\vec{u}_r, \vec{u}_s \parallel \pi$ e $(\vec{u}_r, \vec{u}_s)$ é LI.

Desta forma, a equação vetorial do plano π é dado por:

$\pi: X = A + \lambda \vec{u}_r + \mu \vec{u}_s \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Logo, $X = (1,0,0) + \lambda(1,2,1) + \mu(0,1,1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(i)



Temos que $\vec{OC} = \lambda\vec{u}$.

Mas, $\vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$.

Assim, $\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$.

Do fato de que $\vec{AC} \perp \vec{u_s}$, temos que $(\lambda\vec{u_s} - \vec{u_n})\cdot\vec{u_s} = \vec{0} \Rightarrow$

$\lambda\vec{u_s}\cdot\vec{u_s} - \vec{u_n}\cdot\vec{u_s} = 0 \Rightarrow \lambda\|\vec{u_s}\|^2 - \vec{u_n}\cdot\vec{u_s} = 0 \Rightarrow$

$\lambda\|\vec{u_s}\|^2 = \vec{u_n}\cdot\vec{u_s} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\vec{u_n}\cdot\vec{u_s}}{\|\vec{u_n}\|^2}}$

Assim, o vetor $\vec{OC}$ é dado por

$\vec{OC} = \left(\frac{\vec{u_n}\cdot\vec{u_s}}{\|\vec{u_s}\|^2}\right)\cdot\vec{u_s}$.

Denotado por $proj_{\vec{u_s}}\vec{u_n} = \left(\frac{\vec{u_n}\cdot\vec{u_s}}{\|\vec{u_s}\|^2}\right)\vec{u_s}$.

Também chamado de projeção ortogonal de $\vec{u_n}$ na direção de $\vec{u_s}$.

(ii) Pelo item (i), temos $\vec{u_n}\cdot\vec{u_s} = 3$.

Assim, $proj_{\vec{u_s}}\vec{u_n} = \left(\frac{\vec{u_n}\cdot\vec{u_s}}{\|\vec{u_s}\|^2}\right)\cdot\vec{u_s} = \frac{3}{\|(0,1,1)\|^2}\cdot(0,1,1)$

$= \frac{3}{(\sqrt{1^2+1^2})^2}\cdot(0,1,1) = \frac{3}{2}(0,1,1) = (\cancel{0,\tfrac{3}{2},2})$

$= \left(0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0 \iff$

$ax + by + cz + d = 0$, onde

$d = -ax_0 - by_0 - cz_0$.

Ou melhor, $X \in \pi \iff ax + by + cz + d = 0$.

A equação $ax + by + cz + d = 0$ é chamada equação geral do plano π.

Para obtermos a equação geral do plano π referente ao Exercício 1, precisamos de um ponto $A \in \pi$ e um vetor normal π.

Note que o vetor normal $\vec{n}$ não é único

Um ponto A de π conhecido pelo item (iv) da questão 1 é $A = (1, 0, 0)$.

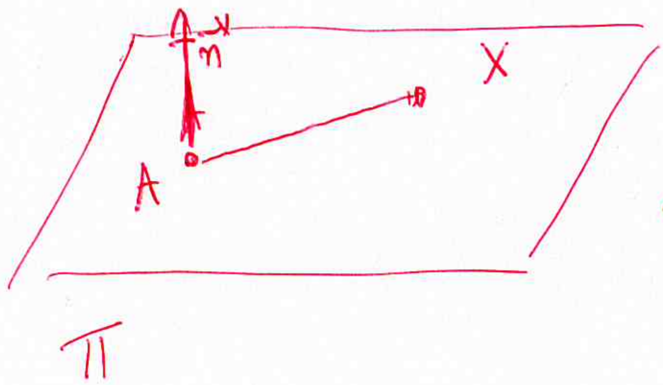
Pelo item (ii) da questão 1, vimos que $\vec{w} = \vec{u}_n \wedge \vec{u}_s = (1, -1, 1)$.

Mas, $\vec{u}_n \wedge \vec{u}_s \perp \vec{u}_n$ e $\vec{u}_s \wedge \vec{u}_s \perp \vec{u}_s$.

Questão 2:

Dizemos que $\vec{n}=(a,b,c)$ é um vetor normal à Π se $\vec{n}\perp\vec{w}$ para todo vetor $\vec{w}$ paralelo ao plano Π.

Logo, temos um critério para decidir se dado $X=(x,y,z)\in E^3$ (espaço) pertence a Π.



Assim, se $X\in\Pi \iff \vec{AX}\perp\vec{n}$.

Mas, $\vec{AX} = X - A = (x,y,z)-(x_0,y_0,z_0) =$
$= (x-x_0,\, y-y_0,\, z-z_0)$.

Porém, se $\vec{AX}\perp n$ então $\vec{AX}\cdot\vec{n}=0$, ou seja,

$(x-x_0,\, y-y_0,\, z-z_0)(a,b,c)=0 \iff$

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \iff$

Como $(\vec{u}_\pi, \vec{u}_s)$ é LI, tem-se $\vec{w}$ é ortogonal a qualquer dois vetores LI paralelo a π.

Então, basta tomar o vetor normal $\vec{n} \parallel \vec{w}$.

Em particular, tomando $\vec{n} = (1,-1,1)$.

Temos que para todo $X = (x,y,z)$, $A = (1,0,0) \in \pi$.

$\vec{AX} \perp \vec{n}$, ou seja, $(x-1, y-0, z-0)(1,-1,1) = 0$

$\Rightarrow (x-1, y, z)(1,-1,1) = 0 \Rightarrow x-1-y+z = 0$

$\Rightarrow \boxed{x-y+z-1=0}$

Logo, a equação do plano π é dada por: $\pi: x-y+z-1=0$