unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"Júlio de Mesquita Filho"

Faculdade de Engenharia - Campus de Ilha Solteira

Profª Lilian Yuli Isoda - Depto. de Matemática

Geometria Analítica e Álgebra Linear

Lista de Exercícios 1 de Álgebra Linear

Espaço vetorial.

1. Em $\mathbb{R}^2$, considere o produto $\alpha * v$ da maneira usual e modifique a soma $u \oplus v$ dos vetores (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pelas seguintes regras:

a) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0)$

b) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + y_2, x_2 + y_1)$

c) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 . x_2, y_1 . y_2)$

d) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (3x_1 + 3x_2, 5x_1 + 5x_2)$

Em cada um dos casos, verifique se são espaços vetoriais. Diga quais os axiomas de espaço vetorial continuam válidos e quais são violados.

2. No conjunto $V = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$, definimos a adição de modo usual e multiplicação por escalar por: $\alpha * (x, y) = (\alpha x, 0)$, sendo $\alpha \in \mathbb{R}$. Nestas condições V é espaço vetorial? Justifique sua resposta.

Subespaço vetorial.

3. Quais dos seguintes conjuntos abaixo são subespaços do R^3 ?

a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; / \; x = 0\}$;

b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; / \; x \text{ é inteiro}\}$;

c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; / \; y \text{ é irracional}\}$;

d) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; / \; x - 3z = 0\}$.

4. Seja $P(\mathbb{R})$ = conjunto de todos os polinômios. Quais dos seguintes conjuntos abaixo são subespaços de $P(\mathbb{R})$?

a) $W = \{p(t) \in P(\mathbb{R}) \; / \; p(t) \text{ tem grau maior que } 2\}$; **b)** $W = \{p(t) \in P(\mathbb{R}) \; / \; p(t) > 0\}$;

c) $W=\{p(t)\in P(\mathbb{R})\ /\ p(0)=2p(1)\}$;

d) $W=\{p(t)\in P(\mathbb{R})\ /\ p(t)+p'(t)=0\}$.

5. Explique porquê os seguintes subconjuntos não são subespaços do $\mathbb{R}^3$:

a) $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x=1\}$;

b) $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x^2+y+z=0\}$;

c) $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x\leqslant y\leqslant z\}$;

d) $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x+y$ é racional$\}$.

6. Sejam $U=\{(x,y,z)\ /\ x=z\}$; $V=\{(x,y,z)\ /\ x=y=0\}$ e $W=\{(x,y,z)\ /\ x+y+z=0\}$ subespaços de $\mathbb{R}^3$. Verifique que $U+V=\mathbb{R}^3$ e $V+W=\mathbb{R}^3$. Em algum destes casos a soma é direta?

Combinação linear

7. Em $\mathbb{R}^3$, exprima o vetor $x=(1,-3,10)$ como combinação linear dos vetores $u=(1,0,0)$; $v=(1,1,0)$ e $w=(2,-3,5)$.

8. Mostre que a matriz $D=\begin{pmatrix}4 & -4\\ -6 & 16\end{pmatrix}$ pode ser escrita como combinação linear das matrizes

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}\ \text{ e }\ C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}.$$

9. Mostre que os polinômios $\{1-t,\ (1-t)^2,\ (1-t)^3,\ 1\}$ geram $P^3(\mathbb{R})$.

10. Encontre um conjunto de geradores para cada um dos seguintes subespaços do $\mathbb{R}^3$ dados abaixo:

a) $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x-2y=0\}$;

b) $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x+z=0\ \text{e}\ x-2y=0\}$;

c) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x+2y-3z=0\}$;

d) $U\cap V$;

e) $V + W$.

11. Verifique se o seguinte conjunto de matrizes gera o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$:

$$S=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right\}.$$

Outubro/2016