Lista 14, Capítulo 9 - Geometria Analítica e Álgebra Linear

Profa. Roseli

Considere fixado um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.

1. Estude a posição relativa das retas **r** e **s** nos seguintes casos:

(a) r: $X = (1, -1, 1) + \lambda(-2, 1, -1)$ s: $\begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$

(b) r: $\begin{cases} x - y - z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ s: $\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

(c) r: $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$ s: $X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 0)$

(d) r: $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{4} = z$ s: $\begin{cases} 2x - y + 7 = 0 \\ x + y - 6z + 2 = 0 \end{cases}$

(e) r: $X = (8, 1, 9) + \lambda(2, -1, 3)$ s: $X = (3, -4, 4) + \lambda(1, -2, 2)$

(f) r: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+2}{5}$ s: $x = -y = \frac{z-1}{4}$

(g) r: $\frac{x+1}{2} = y = -z$ s: $\begin{cases} x + y + - 3z = 1 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$

(h) r: $x + 3 = \frac{2y-3}{4} = \frac{z-1}{3}$ s: $X = (0, 2, 2) + \lambda(1, 1, -1)$

2. Calcule $\mathbf{m} \in \mathbb{R}$ para que

(a) **r** e **s** sejam paralelas;

(b) **r**, **s** e **t** sejam paralelas a um mesmo plano;

(c) **r** e **t** sejam concorrentes;

(d) **s** e **t** sejam coplanares;

(e) **r** e **s** sejam reversas.

São dadas: r: $\begin{cases} x = my - 1 \\ z = y - 1 \end{cases}$ s: $x = \frac{y}{m} = z$ t: $-x + z = y = -z - 1$

3. No Exercício 1, obtenha, quando possível, uma equação geral para o plano determinado pelas retas **r** e **s**.

4. Nos itens do Exercício 1 em que as retas **r** e **s** são reversas, obtenha uma equação geral para o plano que contém a reta **r** e é paralelo à reta **s**.

5. Determine **m** para que as retas dadas r: X = (1, 0, 2) + λ(2, 1, 3) e s: X = (0, 1, -1) + + λ(1, m, 2m) sejam coplanares e, nesse caso, estude sua posição relativa.

Considere fixado um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.

6. Estude a posição relativa da reta **r** e do plano Π e, quando forem tranversais, obtenha o ponto intersecção P, nos casos:

(a) r: X = (1, 1, 0) + λ(0, 1, 1) $\qquad$ Π: x - y - z = 2

(b) r: $\frac{x-1}{2} = y = z$ $\qquad$ Π: X = (3, 0, 1) + λ(1, 0, 1) + μ(2, 2, 0)

(c) r: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ $\qquad$ Π: X = (0, $\frac{1}{2}$, 0) + λ(1, -$\frac{1}{2}$, 0) + μ(0, 1, 1)

(d) r: $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ $\qquad$ Π: x + y = 2

(e) r: X = (0, 0, 0) + λ(1, 4, 1) $\qquad$ Π: X = (1, -1, 1) + α(0, 1, 2) + β(1, -1, 0)

(f) r: $\frac{x+2}{3}$ = y - 1 = $\frac{z+3}{3}$ $\qquad$ Π: 3x - 6y - z = 0

7. Calcule o valor de **m** para que a reta r: X = (1, 1, 1) + λ(2, m, 1) seja paralela ao plano Π: X = (0, 0, 0) + α(1, 2, 0) + β(1, 0, 1).

8. Calcule **m**, **n** $\in \mathbb{R}$ para que a reta r: X = (n, 2, 0) + λ(2, m, m) esteja contida no plano Π: x - 3y + z = 1.

9. Calcule **m** para que a reta r: $\frac{x-1}{m} = \frac{y}{2} = \frac{z}{m}$ seja transversal ao plano Π: x + my + z = 0.

10. Estude a posição relativa de Π_1 e Π_2 nos casos:

(a) Π_1: X = (1, 1, 1) + λ(0, 1, 1) + μ(-1, 2, 1)
Π_2: X = (1, 0, 0) + λ(1, -1, 0) + μ(-1, -1, -2)

(b) Π_1: 2x - y + 2z - 1 = 0
Π_2: 4x - 2y + 4z = 0

(c) Π_1: x - 2y + 2z - 2 = 0
Π_2: X = (0, 0, 1) + λ(1, 0, 3) + μ(-1, 1, 1)

11. Encontre o valor de **m** para que os planos

Π_1: X = (1, 1, 0) + λ(m, 1, 1) + μ(1, 1, m)

Π_2: 2x + 3y + 2z + n = 0

sejam paralelos distintos, nos casos: (a) n = -5 e (b) n = 1.

12. Mostre que os planos

Π_1: X = (0, 0, 0) + λ(-1, m, 1) + μ(2, 0, 1)

Π_2: X = (1, 2, 3) + α(m, 1, 0) + β(1, 0, m)

são transversais, para todo **m** $\in \mathbb{R}$.

A partir daqui, considere, quando necessário, fixado um sistema **ortogonal** de coordenadas.

13. Obtenha uma equação vetorial para a reta **t** que passa por P e é concorrente com **r** e **s**, nos seguintes casos:

(a) P = (1, 1, 1) r: $x + 3 = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$ s: X = (-2, 0, 4) + λ(1, 1, -1)

(b) P = (-2, 2, 4) r: X = (-1, 1, 3) + λ(-2, -2, 2) s: X = (-2, 4, 4) + λ(1, 2, 3)

(c) P = (1, 0, 6) r: $\begin{matrix} x - y - z + 5 = 0 \\ 2x - z + 4 = 0 \end{matrix}$ s: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{3}$

(d) P = (1, -2, -1) r: $\begin{matrix} z = x - 2 \\ y = 1 - x \end{matrix}$ s: $\begin{matrix} z = x - 1 \\ y = 1 + 2x \end{matrix}$

(e) P = (1, 0, 3) r: X = (1, 0, 0) + λ(3, -1, 2) s: X = (-5, 2, -4) + λ(1, 5, -1)

14. Obtenha uma equação vetorial para a reta **t**, concorrente com **r** e **s**, nos seguintes casos:

(a) **r:** X = (1, 1, -1) + λ(2, 1, -1) **s:** $\begin{matrix} x + y - 3z = 1 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{matrix}$

e **t** é paralela à reta determinada por M = (1, -1, 4) e N = (0, -3, -1)

(b) **r:** $\frac{x+1}{2}$ = y = -z **s:** X = ($\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 0) + λ(5, 4, 3)

e **t:** é paralela ao vetor $\vec{v}$ = (1, 0, 1)

(c) **r:** X = (1, 2, 3) + λ(2, -1, 0) **s:** X = (0, 1, -3) + λ(-1, 1, 2)

e **t** é paralela à reta h: X = (0, 0, 0) + λ ($\frac{43}{9}$, $\frac{86}{27}$, $-\frac{43}{27}$)

15. Obtenha uma equação vetorial para a reta **t** que passa pelo ponto P, é paralela ou contida no plano Π e concorrente com a reta **r** nos seguintes casos:

(a) $P = (1, 1, 0)$ $\quad\Pi$: $2x + y - z - 3 = 0$ $\quad$ r: $X = (1, 0, 0) + \lambda(-1, 0, 1)$

(b) $P = (1, 0, 1)$ $\quad\Pi$: $x - 3y - z = 1$ $\quad$ r: $X = (0, 0, 0) + \lambda(2, 1, -1)$

(c) $P = (1, 2, 1)$ $\quad\Pi$: $x - y = 0$ $\quad$ r: $X = (1, 0, 0) + \lambda(2, 2, 1)$

16. Obtenha uma equação vetorial para a reta **t** contida no plano Π: $x - y + z = 0$ e que é concorrente com as retas r: $\begin{cases} z = x - 2 \\ y = 1 - x \end{cases}$ $\quad$ s : $\begin{cases} z = x - 1 \\ y = 1 + 2x \end{cases}$

17. Obtenha uma equação vetorial para a reta **t** paralela aos planos α e β e concorrente com as retas **r** e **s**, sendo:

r: $x - 2y = z - x = y + 1$ $\quad$ s: $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$

α: $x + 2y + z - 1 = 0$ $\quad$ β: $x + 4y + 2z = 0$

18. Obtenha uma equação geral para o plano que contém a reta r: $X = (1, 1, 0) + \lambda(2, 1, 2)$ e é paralelo à reta s: $\frac{x+1}{2} = y = z + 3$.

19. Obtenha uma equação geral para o plano que passa pelo ponto $P = (1, 3, 4)$ e é paralelo ao plano Π: $x + y + z + 1 = 0$.

20. Projete o ponto $P = (1, 4, 0)$ sobre o plano Π: $x + y - 2z + 1 = 0$, paralelamente à reta r: $X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 4, 1)$.

RESPOSTAS

1. (a) paralelas distintas
   (b) concorrentes em P = (1, -1, 0)
   (c) reversas
   (d) r = s
   (e) concorrentes em P = (-2, 6, -6)
   (f) concorrentes em P = (-2, 2, -7)
   (g) reversas
   (h) reversas

2. (a) m = 1 (b) m = 1 (c) $\forall$ m (d) $\nexists$ m (e) m $\neq$ 0 e m $\neq$ 1

3. (a) 3x - 4y - 10z + 3 = 0
   (b) x - z - 1 = 0
   (e) 4x - y - 3z - 4 = 0
   (f) 17x - 7y - 6z + 6 = 0

4. (c) Π : 4x - 2y - z + 3 = 0
   (g) Π : 7x - 11y + 3z + 7 = 0
   (h) Π : 5x - 4y + z + 20 = 0

5. para m = $\frac{2}{3}$ concorrentes no ponto (-9, -5, -13) e determinam o plano Π : 2x - y - z = 0

6. (a) transversais, P = (1, 0, -1)
   (b) r $\parallel$ Π
   (c) r $\subset$ Π
   (d) r // Π
   (e) r transversal a Π, P = $(-\frac{1}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{1}{9})$
   (f) r // Π

7. m = 2

8. m = 1 e n = 7

9. $\forall$ m $\neq$ 0

10. (a) $\Pi_1 = \Pi_2$ (b) paralelos distintos
    (c) transversais, r = $\Pi_1 \cap \Pi_2$: X = (0, 0, 1) + λ (-6, 7, 10)

11. (a) $\nexists$ m, pois (1, 1, 0) $\in$ $\Pi_1 \cap \Pi_2$, $\forall$ m
    (b) m = $-\frac{5}{2}$

13. (a) t: $X = (1, 1, 1) + \lambda\,(1, -1, -1),\ \lambda \in \mathbb{R}$

(b) t: $X = (-2, 2, 4) + \lambda\,(0, 1, 0),\ \lambda \in \mathbb{R}$

(c) $\nexists$ t, pois $P \in r \cap t$

(d) t: $X = (1, -2, -1) + \lambda\,(1, 2, 1),\ \lambda \in \mathbb{R}$

(e) t: $X = (1, 0, 3) + \lambda\,(6, -2, 7),\ \lambda \in \mathbb{R}$

14. (a) não existe solução

(b) t: $X = (-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}) + \lambda\,(1, 0, 1),\ \lambda \in \mathbb{R}$

(c) t: $X = (6, 10, 0) + \lambda\,(3, 2, -1),\ \lambda \in \mathbb{R}$

15. (a) t: $X = (1, 1, 0) + \lambda\,(1, -3, -1)$

(b) infinitas soluções

(c) r // t, $\nexists$ t

16. $\nexists$ solução, pois s // Π, $s \not\subset \Pi$ e $t \subset \Pi$

17. t: $X = (1, 0, 2) + \lambda\,(0, -1, 2)$

18. Π : x - 2y + 1 = 0

19. Π : x + y + z - 8 = 0

201. Q = (-1, -4, -2)