

## Lista 7 - Geometria Analítica e Álgebra Linear

Profa. Roseli

Considere fixado um sistema de coordenadas ortogonais no plano. Esboçar a figura relativa a cada exercício.

Nos Problemas a seguir, as elipses consideradas têm seu centro na origem do sistema de coordenadas.

1. Para cada uma das seguintes elipses, determinar as coordenadas dos vértices e dos focos, os comprimentos dos eixos maior e menor e a excentricidade. Faça também um esboço do gráfico:

(a)  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

(b)  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$

(c)  $9x^2 + 4y^2 = 36$

(d)  $4x^2 + 9y^2 = 36$

(e)  $16x^2 + 25y^2 = 400$

(f)  $x^2 + 25y^2 = 25$

(g)  $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$

(h)  $4x^2 + 9y^2 = 25$

(i)  $4x^2 + y^2 = 1$

(j)  $4x^2 + 25y^2 = 1$

2. Os pontos  $A_1 = (-4, 0)$  e  $A_2 = (4, 0)$  são dois vértices de uma elipse cujos focos são  $F_1 = (-3, 0)$  e  $F_2 = (3, 0)$ . Determinar sua equação.

3. Os pontos  $A_1 = (0, -6)$  e  $A_2 = (0, 6)$  são dois vértices de uma elipse cujos focos são  $F_1 = (0, -4)$  e  $F_2 = (0, 4)$ . Determinar sua equação.

4. Os focos de uma elipse são os pontos  $F_1 = (-2, 0)$  e  $F_2 = (2, 0)$ . Sabendo que sua excentricidade é  $e = \frac{2}{3}$ , determinar sua equação.

5. Uma elipse que passa pelo ponto  $P = (\sqrt{5}, \frac{14}{3})$  tem como um dos vértices o ponto  $(0, 7)$ . Determinar sua equação e sua excentricidade.

6. Uma elipse passa pelos pontos  $P = (\sqrt{6}, -1)$  e  $Q = (2, \sqrt{2})$  e seu eixo maior coincide com o eixo  $O_x$ . Determinar sua equação.

7. Uma elipse que passa pelo ponto  $P = (\frac{\sqrt{7}}{2}, 3)$  tem seu eixo menor coincidente com o eixo  $O_x$  e o comprimento do seu eixo maior é o dobro do comprimento do seu eixo menor. Determinar sua equação.

Nos Problemas a seguir, as hipérboles consideradas têm seu centro na origem do sistema de coordenadas.

8. Para cada uma das seguintes hipérboles, determinar as coordenadas dos vértices e dos focos, os comprimentos dos eixos transverso e conjugado e a excentricidade. Faça também um esboço do gráfico:

(a)  $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{36} = 1$

(b)  $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{100} = 1$

(c)  $9x^2 - 4y^2 = 36$

(d)  $4x^2 - 9y^2 = 36$

(e)  $9y^2 - 4x^2 = 36$

(f)  $x^2 - 4y^2 = 4$

(g)  $25x^2 - 144y^2 = 3600$

(h)  $16x^2 - 25y^2 = 400$

(i)  $y^2 - x^2 = 16$

(j)  $3x^2 - y^2 = 3$

9. Os vértices de uma hipérbole são os pontos  $A_1 = (-2, 0)$  e  $A_2 = (2, 0)$  e seus focos são  $F_1 = (-3, 0)$  e  $F_2 = (3, 0)$ . Determinar sua equação e sua excentricidade.

10. Os extremos do eixo conjugado de uma hipérbole são os pontos  $(0, -3)$  e  $(0, 3)$ . Sabendo que sua excentricidade é  $\sqrt{2}$ . Determinar sua equação.

11. Os vértices de uma hipérbole são os pontos  $A_1 = (0, -4)$  e  $A_2 = (0, 4)$ . Sabendo que sua excentricidade é  $e = \frac{3}{2}$ , determinar sua equação e as coordenadas de seus focos.

12. O eixo transverso de uma hipérbole coincide com o eixo  $O_x$ . Determinar sua equação, sabendo que ela passa pelos pontos  $P = (3, -2)$  e  $Q = (7, 6)$ .

13. Determinar os pontos de intersecção da reta  $r: 2x - 9y + 12 = 0$  com as assíntotas da hipérbole  $4x^2 - 9y^2 = 11$ .

14. O eixo transverso de uma hipérbole se encontra ao longo do eixo  $O_x$  e uma de suas assíntotas é a reta  $r: 2x + 3\sqrt{2}y = 0$ . Se a hipérbole passa pelo ponto  $P = (3, -1)$ , determinar sua equação.

15. Determinar a distância do foco direito da hipérbole  $16x^2 - 9y^2 = 144$  a cada uma de suas assíntotas.

16. Uma hipérbole tem seu eixo transverso coincidente com o eixo  $O_x$ . Sua excentricidade é  $\frac{\sqrt{6}}{2}$  e ela passa pelo ponto  $P = (2, 1)$ . Determine as equações de suas assíntotas.

17. Uma hipérbole tem seu eixo conjugado coincidente com o eixo  $O_x$ . Sua excentricidade é  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  e ela passa pelo ponto  $P = (-1, 2)$ . Determine as equações de suas assíntotas.

18. Determinar a equação das assíntotas da hipérbole  $4x^2 - 5y^2 = 7$ .

**19.** Demonstrar que, se as assíntotas de uma hipérbole são mutuamente perpendiculares, a hipérbole é equilátera.

**20.** Demonstrar que a excentricidade de qualquer hipérbole equilátera é  $\sqrt{2}$

Nos Problemas a seguir, as parábolas consideradas têm seu vértice na origem do sistema de coordenadas.

**21.** Para cada uma das parábolas a seguir, determinar as coordenadas do foco, a equação da diretriz e fazer um esboço do gráfico.

(a)  $y^2 = -100x$

(b)  $x^2 = 10y$

(c)  $y^2 = 4x$

(d)  $x^2 = -16y$

(e)  $y^2 = 12x$

(f)  $y^2 + 8x = 0$

(g)  $x^2 = 12y$

(h)  $x^2 + 2y = 0$

**22.** Determinar a equação da parábola cujo foco é o ponto  $F = (3, 0)$ .

**23.** Determinar a equação da parábola cujo foco é o ponto  $F = (0, -3)$ .

**24.** Determinar a equação da parábola cuja diretriz é a reta **d:**  $y - 5 = 0$ .

**25.** Determinar a equação da parábola cuja diretriz é a reta **d:**  $x + 5 = 0$ .

**26.** Uma parábola cujo eixo é coincidente com o eixo  $O_x$  passa o pelo ponto  $P = (-2, 4)$ . Determinar sua equação, as coordenadas do seu foco e a equação de sua diretriz.

**27.** Uma corda da parábola  $y^2 - 4x = 0$  se encontra sobre a reta **r:**  $x - 2y + 3 = 0$ . Determinar seu comprimento.

**28.** Determinar o comprimento da corda focal da parábola  $x^2 + 8y = 0$  que é paralela à reta **r:**  $3x + 4y - 7 = 0$ .

**29.** Determinar o comprimento do raio focal do ponto que se encontra sobre a parábola  $y^2 - 9x = 0$  e cuja ordenada é igual a 6.

**30.** Considere a circunferência cujo centro é o ponto  $C = (4, -1)$  e que passa pelo foco da parábola  $x^2 + 16y = 0$ . Mostrar que esta circunferência é tangente à diretriz da parábola.

# RESPOSTAS

1.	vértices	vértices	focos	eixo maior: 2a	eixo menor: 2b	excentricidade
<b>a</b>	$(\pm 10, 0)$	$(0, \pm 6)$	$(\pm 8, 0)$	20	12	$\frac{4}{5}$
<b>b</b>	$(0, \pm 10)$	$(\pm 6, 0)$	$(0, \pm 8)$	20	12	$\frac{4}{5}$
<b>c</b>	$(0, \pm 3)$	$(\pm 2, 0)$	$(0, \pm\sqrt{5})$	6	4	$\frac{\sqrt{5}}{3}$
<b>d</b>	$(\pm 3, 0)$	$(0, \pm 2)$	$(\pm\sqrt{5}, 0)$	6	4	$\frac{\sqrt{5}}{3}$
<b>e</b>	$(\pm 5, 0)$	$(0, \pm 4)$	$(\pm 3, 0)$	10	8	$\frac{3}{5}$
<b>f</b>	$(\pm 5, 0)$	$(0, \pm 1)$	$(\pm\sqrt{24}, 0)$	10	2	$\frac{\sqrt{24}}{5}$
<b>g</b>	$(0, \pm 3)$	$(\pm\sqrt{5}, 0)$	$(0, \pm 2)$	6	$2\sqrt{5}$	$\frac{2}{3}$
<b>h</b>	$(\pm\frac{5}{2}, 0)$	$(0, \pm\frac{5}{3})$	$(\pm\frac{5\sqrt{5}}{6}, 0)$	5	$\frac{10}{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$
<b>i</b>	$(0, \pm 1)$	$(\pm\frac{1}{2}, 0)$	$(0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$	2	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
<b>j</b>	$(\pm\frac{1}{2}, 0)$	$(0, \pm\frac{1}{5})$	$(\pm\frac{21}{10}, 0)$	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{\sqrt{21}}{5}$

2.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

3.  $\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{20} = 1$

4.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

5.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$  e  $e = \frac{2\sqrt{10}}{7}$

6.  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

7.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

8.	vértices	focos	eixo maior: 2a	eixo menor: 2b	excentricidade
a	$(\pm 10, 0)$	$(\pm 2\sqrt{34}, 0)$	20	12	$\frac{\sqrt{34}}{5}$
b	$(0, \pm 6)$	$(0, \pm 2\sqrt{34})$	12	20	$\frac{\sqrt{34}}{3}$
c	$(\pm 2, 0)$	$(\pm\sqrt{13}, 0)$	4	6	$\frac{\sqrt{13}}{2}$
d	$(\pm 3, 0)$	$(\pm\sqrt{13}, 0)$	6	4	$\frac{\sqrt{13}}{3}$
e	$(0, \pm 2)$	$(0, \pm\sqrt{13})$	4	6	$\frac{\sqrt{13}}{2}$
f	$(\pm 2, 0)$	$(\pm\sqrt{5}, 0)$	4	2	$\frac{\sqrt{5}}{2}$
g	$(\pm 12, 0)$	$(\pm 13, 0)$	24	10	$\frac{13}{12}$
h	$(\pm 5, 0)$	$(\pm\sqrt{41}, 0)$	10	8	$\frac{\sqrt{41}}{5}$
i	$(0, \pm 4)$	$(0, \pm 4\sqrt{2})$	8	8	$\sqrt{2}$
j	$(\pm 1, 0)$	$(\pm 2, 0)$	2	$2\sqrt{3}$	2

9.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$  e  $e = \frac{3}{2}$

10.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$

11.  $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$  e  $F = (0, \pm 6)$

12.  $4x^2 - 5y^2 = 16$

13.  $(3, 2)$  e  $(-\frac{3}{2}, 1)$   
1

14.  $2x^2 - 9y^2 = 9$  ou  $\frac{x^2}{\frac{9}{2}} - y^2 = 1$

15. 4 uc

16.  $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} x$

17.  $y = \pm \sqrt{3} x$

18.  $y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5} x$

21.	foco	diretriz
a	$(-25, 0)$	d: $x = 25$
b	$(0, \frac{5}{2})$	d: $y = -\frac{5}{2}$
c	$(1, 0)$	d: $x = -1$
d	$(0, -4)$	d: $y = 4$
e	$(3, 0)$	d: $x = -3$
f	$(-2, 0)$	d: $x = 2$
g	$(0, 3)$	d: $y = -3$
h	$(0, -\frac{1}{2})$	d: $y = \frac{1}{2}$

22.  $y^2 = 12x$

23.  $x^2 = -12y$

24.  $x^2 = -20y$

25.  $y^2 = 20x$

26.  $y^2 = -8x$ ,  $F = (-2, 0)$  e d:  $x = 2$

27.  $4\sqrt{5}$  uc

28.  $\frac{25}{2}$  uc

29.  $\frac{25}{4}$  uc