Capítulo 6

PRODUTOS DE VETORES

Neste capítulo estudaremos algumas propriedades geométricas dos vetores e daremos definições e propriedades que serão úteis no desenvolvimento da Geometria Analítica Espacial. Em todo o Capítulo, a menos que seja explicitado o contrário, considere fixado um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

6.1 Produto Escalar

Chama-se **produto escalar** (ou produto interno usual) de dois vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ (representa-se por $\vec{u} \bullet \vec{v}$ e lê-se u escalar v), ao **número real**

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$$

Assim, por exemplo, se $\vec{u} = -3\vec{i} + 5\vec{j} - 8\vec{k}$, $\vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, tem-se

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = (-3).4 + 5.(-2) + (-8).(-1) = -12 - 10 + 8 = -14$$

$$\vec{u} \bullet \vec{u} = (-3).(-3) + 5.5 + (-8).(-8) = 9 + 25 + 64 = 98$$

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = (4).1 + (-2).1 + (-1).2 = 4 - 2 - 2 = 0$$

Observe que: O resultado do produto escalar entre dois vetores pode ser um número real positivo, negativo ou nulo.

Exemplo: Dados os vetores $\vec{u} = (4, \alpha, -1)$ e $\vec{v} = (\alpha, 2, 3)$ e os pontos A = (4, -1, 2) e B = = (3, 2, -1), determine o valor de α para que $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \overrightarrow{BA}) = 5$.

Solução: $\overrightarrow{BA} = A - B = (1, -3, 3)$ e, portanto, $\vec{v} + \overrightarrow{BA} = (\alpha + 1, -1, 6)$. Assim, devemos ter:

$\vec{u} \bullet (\vec{v} + \overrightarrow{BA}) = 4.(\alpha + 1) + \alpha.(-1) + (-1).6 = 5 \iff 4\alpha + 4 - \alpha - 6 = 5 \iff 3\alpha = 7 \iff$

$\iff \alpha = \frac{7}{3}$

6.2 Módulo de um Vetor

O módulo do vetor $\vec{v} = (x, y, z)$, representado por $\|\vec{v}\|$, é o número real **não negativo**

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \bullet \vec{v}}$$

que, em termos de coordenadas se escreve como:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(x, y, z) \bullet (x, y, z)} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Exemplo: Se $\vec{v} = (1, -2, 4)$, então

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21}$$

Observe que:

(i) Versor de um vetor:

Se indicarmos por $\vec{u}$ o versor do vetor não nulo $\vec{v}$ do exemplo anterior, teremos:

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{21}}(1, -2, 4) = \left(\frac{1}{\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}\right)$$

O versor é, na verdade, um vetor unitário, uma vez que:

$$\|\vec{u}\| = \left\|\left(\frac{1}{\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{21}}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{21}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{21}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{21} + \frac{4}{21} + \frac{16}{21}} = 1$$

(ii) Distância entre dois pontos:

A distância **d** entre os pontos $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2)$ é definida por:

$$d = \|\overrightarrow{AB}\| = \|B - A\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

6.3 Problemas Resolvidos

1. Sabendo-se que a distância entre os pontos A = (-1, 2, 3) e B = (1, -1, m) é 7 uc (uc = unidades de comprimento), calcule o valor de **m**.

Solução: $\overrightarrow{AB}$ = B - A = (1 - (-1), -1 - 2, m - 3) = (2, -3, m - 3) e como

$$d = \overrightarrow{AB} = \|(2, -3, m - 3)\| = 7$$

segue que

$$\sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (m-3)^2} = 7$$

e portanto, elevando-se os dois membros ao quadrado, obtemos:

$$4 + 9 + m^2 - 6m + 9 = 49 \Longrightarrow m^2 - 6m - 27 = 0 \Longrightarrow m = -3 \text{ ou } m = 9$$

2. Determine o valor de α para que o vetor $\vec{v} = (\alpha, -\frac{1}{2}, 0)$ seja unitário.

Solução: Devemos ter $\|\vec{v}\| = 1$, ou seja,

$$\sqrt{\alpha^2 + (-\tfrac{1}{2})^2 + 0^2} = 1 \Longleftrightarrow \alpha^2 + (-\tfrac{1}{2})^2 = 1 \Longleftrightarrow \alpha^2 + \tfrac{1}{4} = 1 \Longleftrightarrow \alpha^2 = \tfrac{3}{4} \Longleftrightarrow \alpha = \pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

6.4 Propriedades do Produto Escalar

Para quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ $\in$ V^3 e **m** $\in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades:

P$_1$. $\vec{u} \bullet \vec{u} \geq 0 \quad$ e $\quad \vec{u} \bullet \vec{u} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

P$_2$. $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$ (comutatividade)

P$_3$. $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$ (distributividade em relação à adição de vetores)

P$_4$. $(m\vec{u}) \bullet \vec{v} = m(\vec{u} \bullet \vec{v}) = \vec{u} \bullet (m\vec{v})$

6.5 Problemas Resolvidos

1. Provar que: $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

Solução: $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v}) \bullet (\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u} \bullet (\vec{u}+\vec{v}) + \vec{v} \bullet (\vec{u}+\vec{v})$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \vec{u} \bullet \vec{u} + \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{u} + \vec{v} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

Observe que: De modo análogo ao que foi feito no exemplo anterior, mostra-se que:

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

2. Provar que: $(\vec{u} + \vec{v})\bullet(\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

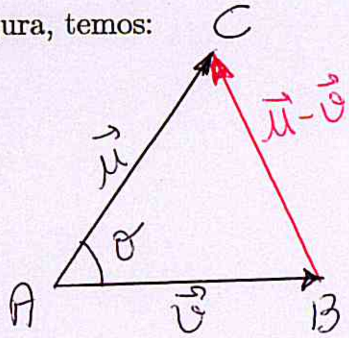
Solução: $(\vec{u} + \vec{v})\bullet(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \bullet (\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v} \bullet (\vec{u} - \vec{v})$

$$(\vec{u} + \vec{v})\bullet(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \bullet \vec{u} - \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \vec{u} - \vec{v} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

6.6 Ângulo de Dois Vetores

Já vimos que o ângulo θ entre dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ varia de 0^0 a 180^0. Vamos agora mostrar que o produto escalar de dois vetores está relacionado com o ângulo formado por eles. Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ são dois vetores que formam um ângulo θ, então $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\theta$

De fato: Aplicando a Lei dos cossenos ao triângulo ABC da figura, temos:



(1) $$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \cos\theta$$

Por outro lado, das propriedades do produto escalar, segue que:

(2) $$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \bullet \vec{v}$$

De (1) e (2), segue que:

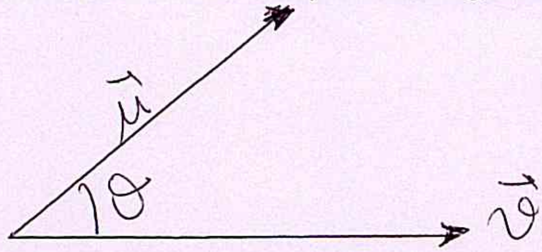
$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \cos\theta = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \bullet \vec{v}$$

e, portanto:

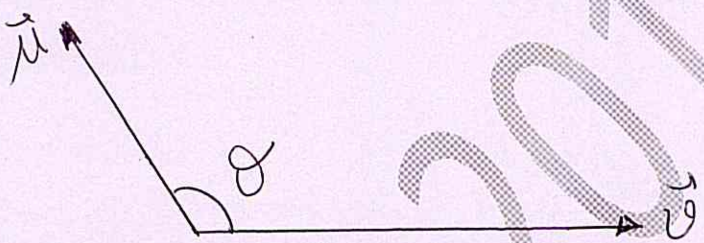
$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\theta \qquad \textbf{(6.1)}$$

Observe que:

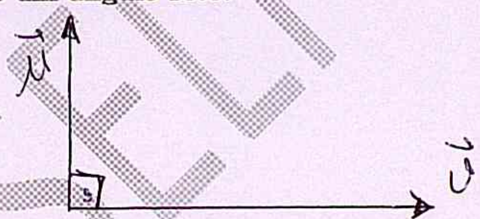
(i) Se $\vec{u} \bullet \vec{v} > 0$, por (6.1), cos θ deve ser um número positivo; isto é, cos $\theta > 0$, o que significa que $0^0 < \theta < 90^0$. Nesse caso, θ é um ângulo agudo ou nulo:



(ii) Se $\vec{u} \bullet \vec{v} < 0$, por (6.1), cos θ deve ser um número negativo; isto é, cos $\theta < 0$, o que significa que $90^0 < \theta < 180^0$. Nesse caso, θ é um ângulo obtuso ou raso:



(iii) Se $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$, por (6.1), cos θ deve ser igual a zero, isto é, cos $\theta = 0$, o que significa que $\theta = 90^0$. Nesse caso, θ é um ângulo reto:



6.6.1 Cálculo do Ângulo de Dois Vetores

Da fórmula (3.3), segue que: $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|}$

6.6.2 Condição de Ortogonalidade de Dois Vetores

Do item (iii) da observação anterior, podemos afirmar que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **ortogonais** se, e somente se, o produto escalar entre eles é nulo; isto é, $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

Exemplo: Os vetores $\vec{u}$ = (-4, 3, -1) e $\vec{v}$ = (-1, 2, 10) são ortogonais, uma vez que $\vec{u} \bullet \vec{v}$ =
= (-4)(-1) + 3.2 + (-1).10 = 4 + 6 - 10 = 0.

6.7 Problemas Resolvidos

1. Calcular o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (1, 1, 4)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 2)$.

Solução: $\cos\theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} = \frac{(1,1,4)\bullet(-1,2,2)}{\sqrt{1^2+1^2+4^2}\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}} = \frac{-1+2+8}{\sqrt{18}\sqrt{9}} = \frac{9}{3\sqrt{2}.3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Portanto: $\theta = \text{arc cos}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^0$.

2. Sabendo-se que o vetor $\vec{v} = (2, 1, -1)$ forma um ângulo de 60^0 com o vetor $\overrightarrow{AB}$ determinado pelos pontos $A = (3, 1, -2)$ e $B = (4, 0, m)$, calcule **m**.

Solução: Da igualdade (3.3), segue que: $\cos 60^0 = \frac{\vec{v} \bullet \overrightarrow{AB}}{\|\vec{v}\| \, \|\overrightarrow{AB}\|}$

mas: $\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 0, m) - (3, 1, -2) = (1, -1, m + 2)$ e $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$

Portanto: $\frac{1}{2} = \frac{(2,1,-1)\bullet(1,-1,m+2)}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+1+m^2+4m+4}} = \frac{2-1-m-2}{\sqrt{6}\sqrt{m^2+4m+6}} = \frac{-m-1}{\sqrt{6}\sqrt{m^2+4m+6}}$

e, dessa forma,

$$(\tfrac{1}{2})^2 = (\tfrac{-m-1}{\sqrt{6}\sqrt{m^2+4m+6}})^2 \iff \tfrac{1}{4} = \tfrac{(-m-1)^2}{6(m^2+4m+6)} \iff 6(m^2 + 4m + 6) = 4(m^2 + 2m + 1) \iff$$

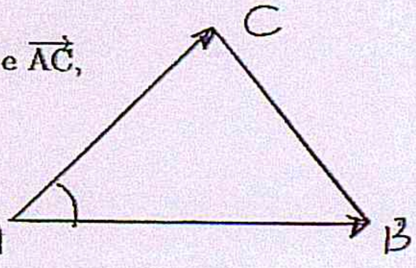
$$\iff m^2 + 8m + 16 = 0 \iff (m + 4)^2 = 0 \iff m = -4 \text{ (raiz dupla)}$$

3. Determinar os ângulos internos do triângulo ABC de vértices $A = (3, -3, 3)$, $B = (2, -1, 2)$ e $C = (1, 0, 2)$.

Solução: Note que o ângulo A é formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$,

o ângulo B é formado pelos vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$

e o ângulo A é formado pelos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.



Logo:

$$\cos\hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \, \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{(-1,2,-1)\bullet(-2,3,-1)}{\sqrt{1+4+1}\,\sqrt{4+9+1}} = \frac{2+6+1}{\sqrt{6}\,\sqrt{14}} = \frac{9}{\sqrt{84}} \cong 0{,}982 \Longrightarrow \hat{A} \cong 10^0 53'$$

Analogamente,

$$\cos\hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \, \|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{(1,-2,1)\bullet(-1,1,0)}{\sqrt{1+4+1}\,\sqrt{1+1+0}} = \frac{-1-2}{\sqrt{6}\,\sqrt{2}} = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \hat{B} = 150^0$$

$$\cos\hat{C} = \frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CA}\| \, \|\overrightarrow{CB}\|} = \frac{(2,-3,1)\bullet(1,-1,0)}{\sqrt{4+9+1}\,\sqrt{1+1}} = \frac{2+3}{\sqrt{14}\,\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{28}} \cong 0{,}9449 \Longrightarrow \hat{C} = 19^0 7'$$

4. Provar que o triângulo de vértices A = (2, 3, 1), B = (2, 1, -1) e C = (2, 2, -2) é um triângulo retângulo.

Solução: A forma mais simples de mostrar a existência de um ângulo reto é mostrar que o produto escalar de dois vetores que determinam os lados do triângulo é nulo. Consideremos os vetores:

$$\overrightarrow{AB} = (0, -2, -2), \qquad \overrightarrow{AC} = (0, -1, -3) \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{BC} = (0, 1, -1)$$

Calculemos:

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = (0, -2, -2) \bullet (0, -1, -3) = 0 + 2 + 6 = 8 \neq 0$$

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} = (0, -2, -2) \bullet (0, 1, -1) = 0 - 2 + 2 = 0$$

o que mostra que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são ortogonais e portanto o ângulo entre eles é um ângulo reto. Logo, o triângulo ABC é um triângulo retângulo.

5. Determinar um vetor não nulo ortogonal a $\vec{v}_1 = (1, -1, 0)$ e a $\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$.

Solução: Seja $\vec{u} = (x, y, z)$ o vetor procurado. Para que $\vec{u}$ seja ortogonal a $\vec{v}_1$ e a $\vec{v}_2$, devemos ter:

$$\vec{u} \bullet \vec{v}_1 = (x, y, z) \bullet (1, -1, 0) = x - y = 0$$

$$\vec{u} \bullet \vec{v}_2 = (x, y, z) \bullet (1, 0, 1) = x + z = 0$$

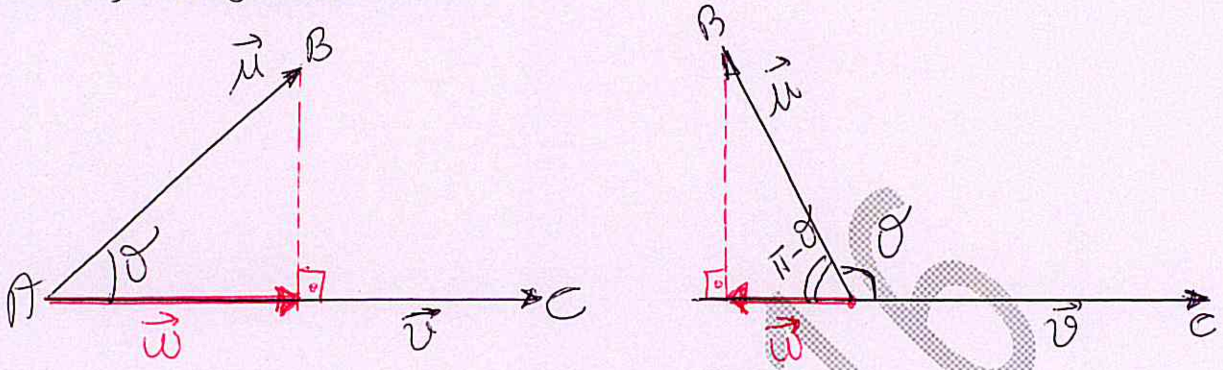
O sistema:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

é compatível indeterminado e portanto não admite solução **única**. Suas soluções satisfazem: $y = x$ e $z = -x$. Isto significa que os vetores ortogonais simultaneamente a $\vec{v}_1$ e a $\vec{v}_2$ são da forma $\vec{u} = (x, x, -x)$ e portanto **um** vetor não nulo ortogonal simultanamente a $\vec{v}_1$ e a $\vec{v}_2$ é o vetor $\vec{u} = (1, 1, -1)$.

6.8 Projeção de um Vetor

Seja θ o ângulo formado pelos vetores **não nulos** $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Vamos calcular o vetor $\vec{w}$ que representa a **projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$**. Na figura a seguir estão ilustradas as duas possíveis situações: θ agudo ou θ obtuso.



A **projeção do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$** é o vetor $\vec{w} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v}$

Notação: $\vec{w} = \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \cdot \vec{v}$

Observe que: dados os vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, existe um único par de vetores $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$ satisfazendo:

(i) $\vec{u} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$;

(ii) $\vec{w}_1$ é **paralelo** ao vetor $\vec{v}$;

(iii) $\vec{w}_2$ é **ortogonal** ao vetor $\vec{v}$.

Basta consideramos $\vec{w}_1 = \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$ e $\vec{w}_2 = \vec{u} - \vec{w}_1$.

6.9 Problemas Resolvidos

1. Determinar o vetor projeção de $\vec{u} = (2, 3, 4)$ sobre $\vec{v} = (1, -1, 0)$.

Solução: Basta utilizarmos a fórmula $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = (\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}).\vec{v}$ para obtermos

$$\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{(2,3,4) \bullet (1,-1,0)}{1^2+(-1)^2}\ (1, -1, 0) = -\tfrac{1}{2}(1, -1, 0) = (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0)$$

2. Sejam os pontos A = (1, 2, -1), B = (-1, 0, -1) e C = (2, 1, 2). Pede-se:

(a) mostrar que o triângulo ABC é retângulo em A;

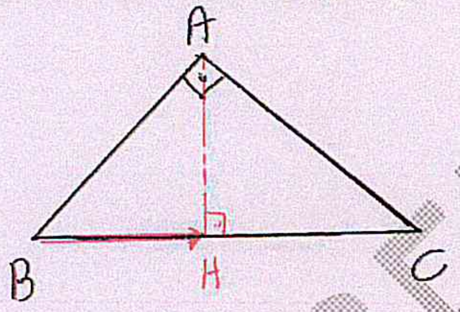
(b) calcular a medida da projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC;

(c) determinar o pé da altura relativa ao vértice A.

Solução: (a) Para mostrar que o ângulo A é um ângulo reto, basta mostrar que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são ortogonais, isto é, $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$. Como $\overrightarrow{AB} = (-2, -2, 0)$ e $\overrightarrow{AC} = (1, -1, 3)$, segue que:

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = (-2, -2, 0) \bullet (1, -1, 3) = -2 + 2 = 0$$

(b) Em primeiro lugar, vamos calcular o vetor projeção do vetor $\overrightarrow{BA}$ sobre o vetor $\overrightarrow{BC}$. Usando a fórmula (3.4), segue que:



$$\mathrm{proj}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA} = \frac{\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}\overrightarrow{BC}$$

e como $\overrightarrow{BA} = (2, 2, 0)$ e $\overrightarrow{BC} = (3, 1, 3)$, vem:

$$\vec{w} = \mathrm{proj}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA} = \frac{(2,2,0) \bullet (3,1,3)}{9+1+9} = \frac{6+2}{19}(3, 1, 3) = \frac{8}{19}(3, 1, 3)$$

A medida da projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC é o módulo do vetor $\vec{w}$; isto é:

$$\|\vec{w}\| = \frac{8\sqrt{19}}{19}$$

(c) Seja H = (x, y, z) o pé da altura relativa ao vértice A. Então:

$$\overrightarrow{BH} = \mathrm{proj}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA} = \frac{8}{19}(3, 1, 3)$$

e, por outro lado,

$$\overrightarrow{BH} = H - B = (x - (-1), y - 0, z - (-1)) = (x + 1, y, z + 1)$$

Portanto, da igualdade de vetores, segue que:

$$\begin{cases} x + 1 = \frac{24}{19} \\ y = \frac{8}{19} \\ z + 1 = \frac{24}{19} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{19} \\ y = \frac{8}{19} \\ z = \frac{5}{19} \end{cases}$$

Ou seja, $H = (\frac{5}{19}, \frac{8}{19}, \frac{5}{19})$.

6.10 Produto Vetorial

Dados os vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, tomados **nesta ordem**, chama-se **produto vetorial** dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e denota-se por $\vec{u} \wedge \vec{v}$, ao **vetor**

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}$$

Cada componente do vetor $\vec{u} \wedge \vec{v}$ pode ser expressa na forma de um determinante de 2ª ordem:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \det\begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix}\vec{i} - \det\begin{pmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{pmatrix}\vec{j} + \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\vec{k}$$

ou ainda:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \det\begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix}\vec{i} + \det\begin{pmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{pmatrix}\vec{j} + \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\vec{k}$$

Efetuando os cálculos acima, obtemos

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (y_1\,z_2 - y_2\,z_1)\,\vec{i} - (x_1\,z_2 - x_2\,z_1)\,\vec{j} + (x_1\,y_2 - x_2\,y_1)\,\vec{i}$$

que é, exatamente, o desenvolvimento de Laplace pela 1ª linha, do determinante da **matriz simbólica**

$$\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

Ou seja, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$

Exemplo: Calcule o produto vetorial dos vetores $\vec{u} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$.

Solução: Basta calcularmos o determinante da matriz simbólica:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

Propriedades do Produto Vetorial:

Veremos que as propriedades do produto vetorial estão intimamente relacionadas com as propriedades dos determinantes. Para isso, consideremos os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

P$_1$. $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$

P$_2$. $\vec{u} \wedge \vec{v} = - \vec{v} \wedge \vec{u}$

P$_3$. $(\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$

P$_4$. $\vec{u} \wedge (\vec{v_1} + \vec{v_2}) = \vec{u} \wedge \vec{v_1} + \vec{u} \wedge \vec{v_2}$

P$_5$. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u}, \vec{v}$ são **LD**.

P$_6$. $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$ e $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$

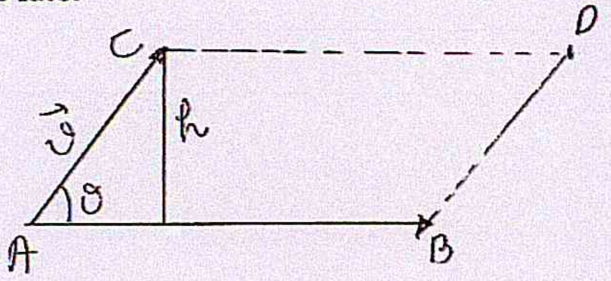
P$_7$. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **LI**, então $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\}$ é **LI**.

P$_8$. Se θ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \operatorname{sen} \theta$

6.11 Interpretação Geométrica do Módulo do Produto Vetorial

Geometricamente, o módulo do produto vetorial dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ mede a área do paralelogramo ABDC determinado pelos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, como mostra a figura a seguir:

De fato:



Sejam ABDC o paralelogramo ao lado, **h** a altura relativa ao lado AB e θ o ângulo entre os lados AB e AC. Chamando de Δ a área do paralelogramo ACDB, temos:

$$\Delta = \|\vec{u}\|.\ h$$

Mas: $h = \|\vec{v}\|.\text{sen}\ \theta$ e, portanto,

$$\Delta = \|\vec{u}\|\ .\ \|\vec{v}\|.\text{sen}\ \theta = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$$

Ou seja: o **módulo do produto vetorial** $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é igual à área do paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

6.12 Problemas Resolvidos

1. Determinar um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2, -6, 3)$ e $\vec{v} = (4, 3, 1)$.

Solução: Seja $\vec{w}$ o vetor procurado. Então $\vec{w}$ é paralelo ao vetor $\vec{u} \wedge \vec{v}$. Calculemos esse vetor:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -6 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = -15\vec{i} + 10\vec{j} + 30\vec{k}$$

Assim, o vetor $\vec{w}$ procurado é paralelo ao vetor $-15\vec{i} + 10\vec{j} + 30\vec{k}$ ou, para simplificar os cálculos, podemos afirmar que $\vec{w}$ é paralelo ao vetor $3\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$. Dessa forma, $\vec{w} = (3a, -2a, -6a)$, sendo $a \in \mathbb{R}$. Como $\vec{w}$ é unitário, segue que:

$$1 = \|\vec{w}\|^2 = 9a^2 + 4a^2 + 36a^2 = 49a^2 \Longrightarrow a = \pm \frac{1}{7}$$

e, portanto, $\vec{w} = (\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{6}{7})$ ou $\vec{w} = (-\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7})$

2. Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2, -1)$ e $\vec{v} = (0, -1, 3)$, calcular a área **A** do paralelogramo determinado por $3\vec{u}$ e $\vec{v} - \vec{u}$.

Solução: Sabemos que: $A = \|3\vec{u} \wedge (\vec{v} - \vec{u})\| = 3\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| - 3\|\vec{u} \wedge \vec{u}\| = 3\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| =$
$= 3\|(5, -3, -1)\| = 3\sqrt{25 + 9 + 1} = 3\sqrt{35}$ ua.

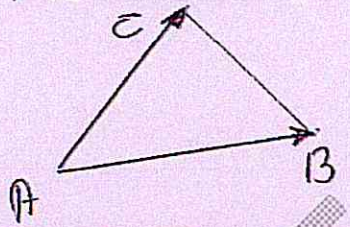
3. Considere os vetores $\vec{u} = (3, 1, -1)$ e $\vec{v} = (a, 0, 2)$. Calcular o valor de a para que a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja igual a $2\sqrt{6}$.

Solução: Devemos ter $2\sqrt{6} = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|(2, -a - 6, -a)\| = \sqrt{4 + (-a - 6)^2 + a^2} =$
$= \sqrt{2a^2 + 12a + 40} \implies a^2 + 6a + 8 = 0 \implies a = -4$ ou $a = -2$.

4. Calcular a área Δ do triângulo de vértices $A = (1, -2, 1)$, $B = (2, -1, 4)$ e $C = (-1, -3, 3)$.

Solução: Temos que: $\Delta = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.

Mas: $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -1, 4) - (1, -2, 1) = (1, 1, 3)$ e $\overrightarrow{AC} = C - A = (-1, -3, 3) - (1, -2, 1) =$
$= (-2, -1, 2)$ e, portanto $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (5, -8, 1)$. Daí:



$$\Delta = \tfrac{1}{2}\|(5, -8, 1)\| = \tfrac{1}{2}\sqrt{25 + 64 + 1} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{90} = \tfrac{3\sqrt{10}}{2} \text{ u.a.}$$

6.13 Duplo Produto Vetorial

Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, vimos que o produto vetorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$ entre eles é um vetor. Assim, se consideramos um outro vetor $\vec{w}$, é possível calcular o produto vetorial entre $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $\vec{w}$.

Definição: Chama-se **duplo produto vetorial** dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ ao vetor $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$.

Observação: De um modo geral, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} \neq \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$, uma vez que o produto vetorial **não** é associativo, em geral .

Expressão para o cálculo do duplo produto vetorial;

Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, prova-se que

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = -(\vec{v} \bullet \vec{w})\vec{u} + (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v}$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \bullet \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \bullet \vec{v})\vec{w}$$

6.14 Produto Misto

Definição: Chama-se **produto misto** dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ ao **número real** $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet \vec{w}$.

Notação: $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet \vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

Prova-se que: se $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, então:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

Observação: O produto misto só tem sentido se, primeiro, calcularmos o produto vetorial e, a seguir, o produto escalar. Dessa forma, podemos eliminar os parêntesis na notação de produto misto; isto é, podemos escrever $\vec{u} \wedge \vec{v} \bullet \vec{w}$ ao invés de $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet \vec{w}$.

Prova-se que: $\vec{u} \wedge \vec{v} \bullet \vec{w} = \vec{u} \bullet \vec{v} \wedge \vec{w}$

6.15 Propriedades do Produto Misto

Para quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in V^3$ e para $\alpha \in \mathbb{R}$ valem as seguintes propriedades:

P$_1$. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \iff \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são LD.

P$_2$. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$

P$_3$. $[\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}] = 0$

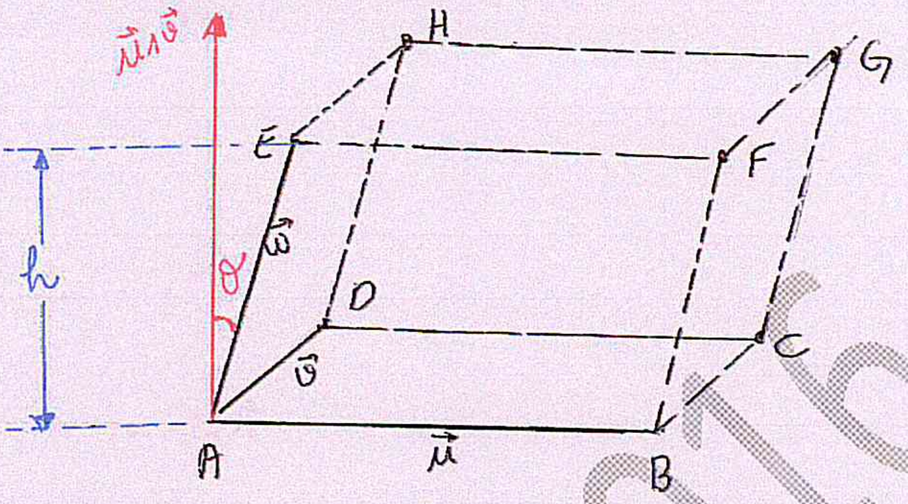
P$_4$. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$

P$_5$. $[\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$

P$_6$. $[\alpha\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \alpha\vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w}] = \alpha[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

Interpretação Geométrica do Produto Misto:

Se θ é a medida do ângulo entre $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $\vec{w}$ e V é o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, então o produto misto entre $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é igual, **em módulo**, a V.



6.16 Problemas Propostos

1. Dados os vetores $\vec{u} = (1, a, -2a -1)$, $\vec{v} = (a, a - 1, 1)$ e $\vec{w} = (1, -1, 1)$, determine a de modo que $\vec{u} \bullet \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w}$.

2. Dados os pontos A = (-1, 0, 2), B = (-4, 1, 1) e C = (0, 1, 3), determinar o vetor $\vec{x}$ tal que $2\vec{x} - \overrightarrow{AB} = \vec{x} + (\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{AB})\overrightarrow{AC}$.

3. Determinar o vetor $\vec{v}$, sabendo que $(3, 7, 1) + 2\vec{v} = (6, 10, 4) - \vec{v}$.

4. Dados os pontos A = (1, 2, 3), B = (-6, -2, 3) e C = (1, 2, 1), determinar o versor do vetor $3\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC}$.

5. Verificar se os seguintes vetores são unitários: $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

6. Determinar o valor de **n** para que o vetor $\vec{v} = (n, \frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ seja unitário.

7. Seja $\vec{v} = (m + 7)\vec{i} + (m + 2)\,\vec{j} + 5\vec{k}$. Calcular **m** para que $\|\vec{v}\| = \sqrt{38}$.

8. Dados os pontos A = (1, 0, -1), B = (4, 2, 1) e C = (1, 2, 0), determinar o valor de **m** para que $\|\vec{v}\| = 7$, sendo $\vec{v} = m\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

9. Dados os pontos A = (3, m - 1, -4) e B = (8, 2m - 1, m), determinar **m** de modo que $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{35}$.

10. Calcular o perímetro do triângulo de vértices A = (0, 1, 2), B = (-1, 0, -1) e C = (2, -1, 0).

11. Obter um ponto P do eixo das abscissas eqüidistante dos pontos A = (2, -3, 1) e B = (-2, 1, -1).

12. Seja o triângulo de vértices A = (-1, -2, 4), B = (-4, -2, 0) e C = (3, -2, 1). Determinar o ângulo interno ao vértice B.

13. Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo eqüilátero cujo lado mede 10 cm. Calcular o produto escalar dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

14. Determinar os ângulos do triângulo de cujos vértices são A = (2, 1, 3), B = (1, 0, -1) e C = (-1, 2, 1).

15. Sabendo que o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, m + 2)$ é 60^0, determinar o valor de **m**.

16. Calcular **n** para que seja de 30^0 o ângulo entra os vetores $\vec{u} = (1, n, 2)$ e $\vec{j}$.

17. Dados os vetores $\vec{a} = (2, 1, \alpha)$, $\vec{b} = (\alpha + 2, -5, 2)$ e $\vec{c} = (2\alpha, 8, \alpha)$, determinar o valor de α para que o vetor $\vec{a} + \vec{b}$ seja ortogonal ao vetor $\vec{c} - \vec{a}$.

18. Determinar o vetor $\vec{v}$, paralelo ao vetor $\vec{u} = (1, -1, 2)$, tal que $\vec{v} \bullet \vec{u} = -18$.

19. Determinar o vetor $\vec{v}$ ortogonal ao vetor $\vec{u} = (2, -3, -12)$ e colinear ao vetor $\vec{w} = (-6, 4, -2)$.

20. Determinar o vetor $\vec{v}$, colinear a $\vec{u} = (-4, 2, 6)$, tal que $\vec{v} \bullet \vec{w} = -12$, para $\vec{w} = (-1, 4, 2)$.

21. Provar que os pontos A = (5, 1, 5), B = (4, 3, 2) e C = (-3, -2, 1) são vértices de um triângulo retângulo.

22. Qual o valor de α para que os vetores $\vec{a} = \alpha\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$ e $\vec{b} = (\alpha + 1)\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ sejam ortogonais?

23. Verificar se existe ângulo reto no triângulo ABC, sendo A = (2, 1, 3), B = (3, 3, 5) e C = (0, 4, 1).

24. Determinar o vetor $\vec{v}$, sabendo que $\|\vec{v}\| = 5$, $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Oz, $\vec{v} \bullet \vec{w} = 6$ e $\vec{w} = 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

25. Determinar um vetor unitário ortogonal a $\vec{v} = (2, -1, 1)$.

26. Determinar um vetor de módulo 5 paralelo ao vetor $\vec{v} = (1, -1, 2)$.

27. O vetor $\vec{v}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2, -1, 3)$ e $\vec{w} = (1, 0, -2)$ e forma um ângulo agudo com o vetor $\vec{j}$. Calcular $\vec{v}$, sabendo que $\|\vec{v}\| = 3\sqrt{6}$.

28. Determinar o vetor $\vec{v}$ ortogonal ao eixo Oz, que satisfaz as condições $\vec{v} \bullet \vec{v}_1 = 10$ e $\vec{v} \bullet \vec{v}_2 = -5$, sendo $\vec{v}_1 = (2, 3, -1)$ e $\vec{v}_2 = (1, -1, 2)$.

29. Determinar o vetor projeção do vetor $\vec{u} = (1, 2, -3)$ na direção de $\vec{v} = (2, 1, -2)$.

30. Calcular o módulo dos vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$, sabendo que $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 3$ e o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de 60^0.

31. Sabendo que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ e que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam um ângulo de $\frac{3\pi}{4}$, determine $\|(2\vec{u} - \vec{v}) \bullet (\vec{u} - 2\vec{v})\|$.

32. O vetor $\vec{v}$ é ortogonal aos vetores $\vec{a} = (1, 2, 0)$ e $\vec{b} = (1, 4, 3)$ e forma um ângulo agudo com o eixo dos x. Determinar $\vec{v}$, sabendo que $\|\vec{v}\| = 14$.

33. Dados os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (-1, 2, 2)$, calcular:

(a) $\vec{w} \wedge \vec{v}$

(b) $\vec{v} \wedge (\vec{w} - \vec{u})$

(c) $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v})$

(d) $(2\vec{u}) \wedge (3\vec{v})$

(e) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet (\vec{u} \wedge \vec{v})$

(f) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet \vec{w}$ e $\vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w})$

(g) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ e $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$

(h) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} \wedge \vec{w})$

34. Dados os vetores $\vec{a} = (1, 2, 1)$ e $\vec{b} = (2, 1, 0)$, calcular:

(a) $2\vec{a} \wedge (\vec{a} + \vec{b})$ **(b)** $(\vec{a} + 2\vec{b}) \wedge (\vec{a} - 2\vec{b})$

35. Dados os pontos $A = (2, -1, 2)$, $B = (1, 2, -1)$ e $C = (3, 2, 1)$, determinar o vetor $\overrightarrow{CB} \wedge (\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA})$.

36. Determinar um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores $2\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{b} - \vec{a}$, sendo $\vec{a} = (3, -1, -2)$ e $\vec{b} = (1, 0, -3)$.

37. Dados os vetores $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (3, 4, -2)$ e $\vec{c} = (-5, 1, -4)$, mostrar que $\vec{a} \bullet (\vec{b} \wedge \vec{c}) =$ $= (\vec{a} \wedge \vec{b}) \bullet \vec{c}$

38. Determinar o valor de **m** para que o vetor $\vec{w} = (1, 2, m)$ seja simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e a $\vec{v} = (1, -3, -1)$.

39. Dados os vetores $\vec{v} = (a, 5b, -\frac{c}{2})$ e $\vec{w} = (-3a, x, y)$, determinar **x** e **y** para que $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{0}$.

40. Determinar um vetor unitário simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e a $\vec{v} = (2, -1, 3)$. Nas mesmas condições, determinar um vetor de módulo 5.

41. Sabendo que $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{2}$ e 45^0 é o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$, calcular $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$.

42. Se $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 3\sqrt{3}$, $\|\vec{u}\| = 3$ e 60^0 é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, determinar $\|\vec{v}\|$.

43. Dados os vetores $\vec{a} = (3, 4, 2)$ e $\vec{b} = (2, 1, 1)$, obter um vetor de módulo 3 que seja ao mesmo tempo ortogonal aos vetores $2\vec{a} - \vec{b}$ e $\vec{a} + \vec{b}$.

44. Calcular a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u} = (3, 1, 2)$ e $\vec{v} = (4, -1, 0)$.

45. Mostrar que o quadrilátero cujos vértices são os pontos A = (1, -2, 3), B = (4, 3, -1), C = (5, 7, -3) e D = (2, 2, 1) é um paralelogramo e calcular sua área.

46. Calcular a área do paralelogramo cujos lados são determinados pelos vetores $2\vec{u}$ e $\vec{v}$, sendo $\vec{u} = (2, -1, 0)$ e $\vec{v} = (1, -3, 2)$.

47. Calcular a área do triângulo de vértices:

(a) A = (-1, 0, 2), B = (-4, 1, 1) e C = (0, 1, 3)

(b) A = (1, 0, 1), B = (4, 2, 1) e C = (1, 2, 0)

(c) A = (2, 3, -1), B = (3, 1, -2) e C = (-1, 0, 2)

(d) A = (-1, 2, -2), B = (2, 3, -1) e C = (0, 1, 1)

48. Calcular a área do paralelogramo que tem um vértice no ponto A = (3, 2, 1) e uma diagonal de extermidades B = (1, 1, -1) e C = (0, 1, 2).

49. Calcular **x**, sabendo que A = (x, 1, 1), B = (1, -1, 0) e C = (2, 1, -1) são vértices de um triângulo de área $\frac{\sqrt{29}}{2}$.

50. Dado o triângulo de vértices A = (0, 1, -1), B = (-2, 0, 1) e C = (1, -2, 0), calcular a altura relativa ao lado BC.

51. Determinar $\vec{v}$ ortogonal ao eixo dos **y** e tal que $\vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{w}$, sendo $\vec{u} = (1, 1, -1)$ e $\vec{w} = (2, -1, 1)$.

52. Dados os vetores $\vec{u} = (0, 1, -1)$, $\vec{v} = (2, -2, -2)$ e $\vec{w} = (1, -1, 2)$, determinar o vetor $\vec{x}$ paralelo a $\vec{w}$ e que satisfaz à condição: $\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v}$.

53. Dados os vetores $\vec{u} = (2, 1, 0)$ e $\vec{v} = (3, -6, 9)$, determinar o vetor $\vec{x}$ que satisfaz a relação $\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{x}$ e que seja ortogonal a $\vec{w} = (1, -2, 3)$.

54. Calcule $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ e $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ diretamente e, a seguir, usando as fórmulas dadas no texto, sendo: $\vec{u} = (1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, $\vec{v} = (6, -2, -4)$ e $\vec{w} = (\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7})$.

55. Resolva o sistema:

$$S : \begin{cases} \vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{0} \\ \vec{x} \bullet \vec{u} = 1, \qquad (\vec{u} \neq \vec{0}) \end{cases}$$

(**Sugestão:** Use que $\vec{x} = \alpha\,\vec{u}$, uma vez que $\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{0}$)

56. Resolva o sistema:

$$S : \begin{cases} \vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v} \\ \vec{x} \bullet \vec{u} = m, \qquad (\vec{u} \bullet \vec{v} = 0, \quad \vec{u} \neq \vec{0}) \end{cases}$$

(**Sugestão:** Calcule $(\vec{x} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u}$)