unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"Júlio de Mesquita Filho"

Faculdade de Engenharia - Campus de Ilha Solteira

Profª Lilian Yuli Isoda - Depto. de Matemática

Geometria Analítica e Álgebra Linear

Lista de Exercícios 3 de Álgebra Linear

Transformações Lineares

1. Quais das seguintes aplicações do $\mathbb{R}^3$ no $\mathbb{R}^3$ são operadores lineares?

(a) $F_1(x,y,z)=(x-y,x+y,0)$;

(b) $F_2(x,y,z)=(2x-y-z,0,0)$;

(c) $F_3(x,y,z)=(x+y+z,x+y-z,3)$;

(d) $F_3(x,y,z)=(2x^2+3z,-2y,x+z)$.

2. Seja $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ o operador linear tal que $F(1,0,0)=(2,3,1)$; $F(0,1,0)=(5,2,7)$ e $F(0,0,1)=(-2,0,7)$. Determinar $F(x,y,z)$, sendo (x,y,z) um vetor genérico do $\mathbb{R}^3$.

3. Verifique se são operadores lineares no espaço $P_n(\mathbb{R})$:

(a) $F:P_n(\mathbb{R})\to P_n(\mathbb{R})$ tal que $F(f(t))=t\,f'(t)$, $\forall f(t)\in P_n(\mathbb{R})$;

(b) $F:P_n(\mathbb{R})\to P_n(\mathbb{R})$ tal que $F(f(t))=f'(t)+t\,2f''(t)$, $\forall f(t)\in P_n(\mathbb{R})$.

Obs.: f' e f'' denotam as derivadas primeira e segunda de f, respectivamente.

4. Seja $u=(x,y,z,t)$ um vetor genérico do $\mathbb{R}^4$. Quais das aplicações definidas abaixo são operadores lineares do $\mathbb{R}^4$?

(a) $F(u)=u+(1,0,1,0)$

(b) $F(u)=(1,0,1,1)$

(c) $F(u)=(x,y-z,y+z,x+t)$

(d) $F(u)=(\cos x,y,z,t)$

5. Seja F o operador linear do $\mathbb{R}^2$ tal que $F(1,0)=(2,1)$ e $F(0,1)=(1,4)$.

(a) Determinar $F(2,4)$;

(b) Determinar $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $F(x,y)=(2,3)$;

(c) Provar que F é injetor e bijetor.

6. Dados $u_1=(2,-1)$, $u_2=(1,1)$, $u_3=(-1,-4)$, $v_1=(1,3)$, $v_2=(2,3)$ e $v_3=(-5,-6)$ vetores do $\mathbb{R}^2$, decida se existe ou não um operador linear $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $T(u_1)=v_1$, $T(u_2)=v_2$ e $T(u_3)=v_3$.

Núcleo e Imagem da Transformação. Isomorfismo e Automorfismo.

7. Para cada uma das transformações lineares abaixo determinar uma base e a dimensão do núcleo e da imagem:

(a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = x + y - z$;

(b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (2x, x + y)$;

(c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $F(x, y, z) = (x - y - z, x + y + z, 2x - y + z, -y)$;

(d) $F : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ dada por $F(f(t)) = t^2 f''(t)$;

(e) $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $F(X) = MX + X$, sendo $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(f) $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $F(X) = MX - XM$, sendo $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Determinar um operador linear $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{Im} F = [(2,1,1),(1,1,-2)]$.

9. Determinar um operador linear F do $\mathbb{R}^4$ tal que $\operatorname{Ker} F = [(1,1,0,0),(0,0,1,0)]$.

10. Determinar uma aplicação linear F de $M_2(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{Im} F = [(1,1,0),(0,2,3)]$.

11. Determinar uma aplicação linear F de $P_3(\mathbb{R})$ em $P_4(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{Im} F = [t - t^3, t + t^4]$.

12. Determinar uma aplicação linear F de $P_4(\mathbb{R})$ em $P_3(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{Ker} F = [t - t^3, t + t^4]$.

13. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $F(1,0,0) = (1,1,0)$, $F(0,1,0) = (1,1,2)$ e $F(0,0,1) = (0,0,2)$. Determinar uma base para cada um dos seguintes subespaços vetoriais: Ker F, Im F, Ker F ∩ Im F e Ker F + Im F.

14. Mostrar que cada um dos operadores lineares do $\mathbb{R}^3$ é invertível e determinar o isomorfismo inverso nos casos:

(a) $F(x, y, z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z)$; (b) $F(x, y, z) = (x, x - y, 2x + y - z)$.

15. Considere o operador linear F do $\mathbb{R}^3$ definido por $F(1,0,0) = (1,1,1)$, $F(0,1,0) = (1,0,1)$ e $F(0,1,2) = (0,0,4)$. F é invertível? Se for, determine o isomorfismo inverso.

Operações com Transformações.

16. Sejam $F,G \in L(\mathbb{R}^3)$ definidas respectivamente por $F(x,y,z)=(x+y,\ y+z,\ z)$ e $G(x,y,z)=(x+2y,\ y-z,\ x+2z)$. Determine: $F \circ G$; $Ker(F \circ G)$ e $Im(F \circ G)$; uma base e a dimensão de $Ker(F^2 \circ G)$.

17. Sejam $F \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ e $G \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ dadas por $F(x,y)=(0,\ x,\ x-y)$ e $G(x,y,z)=(x-y,\ x+2y+3z)$. Determine $F \circ G \circ F$.

Matriz da Transformação Linear

19. Determine a matriz do operador linear $F \in L(\mathbb{R}^2)$, relativamente à base canônica, sabendo que $F(1,2)=(2,3)$ e $F(-1,1)=(4,5)$.

20. Seja $F \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definida por $F(x,y,z)=(x+z,\ y-2z)$. Determinar $(F)_{B,C}$, sendo $B=\{(1,2,1),\ (0,1,1),\ (0,3,-1)\}$ e $C=\{(1,5),\ (2,-1)\}$.

21. Determinar as matrizes das seguintes aplicações lineares em relação às bases canônicas dos respectivos espaços:

(a) $F \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definida por $F(x,y,z)=(x+y,z)$;

(b) $F \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ definida por $F(x,y)=(x+y,x,x-y)$;

(c) $F \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ definida por $F(x,y,z,t)=2x+y-z+3t$;

(d) $F \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ definida por $F(x)=(x,2x,3x)$.

22. Sabendo que a matriz do operador $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ relativamente à base B = {u, v, w}, sendo $u=(1,1,1),\ v=(1,2,1),\ w=(1,1,3)$, é $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, □determine a matriz de T em relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$.

23. Seja $F \in L(\mathbb{R}^2)$ cuja matriz em relação à base $B=\{(1,0),\ (1,4)\}$ é $(F)_B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Determinar a matriz de F em relação à base canônica, usando a fórmula de mudança de base para operador.

24. Determine $F \in L(\mathbb{R}^2)$ cuja matriz em relação à base $B=\{(1,2),(0,5)\}$ é $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Junho/2016