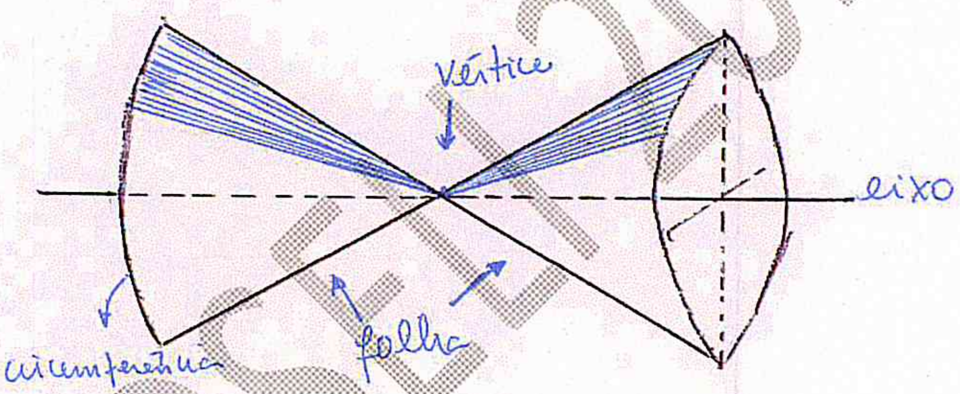
Capítulo 2

Estudo das Cônicas

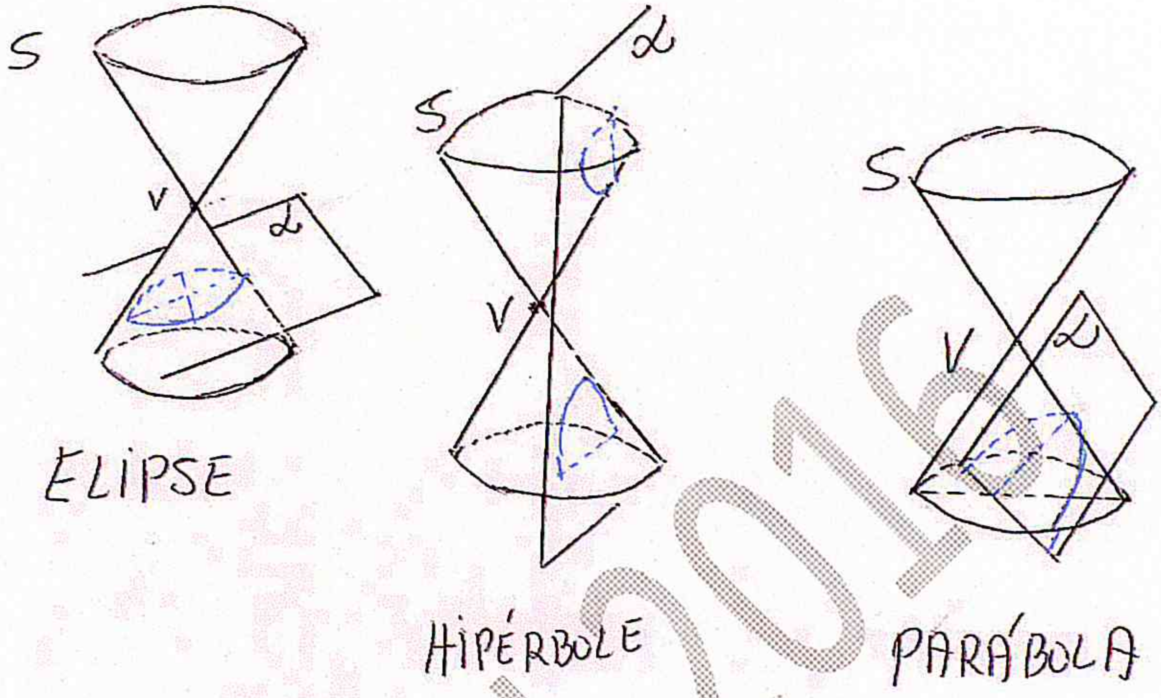
Este Capítulo é dedicado ao estudo das curvas planas: elipse, hipérbole e parábola. Estas curvas podem ser obtidas como intersecção de um plano α com uma superfície cônica S circular reta como a desenhada abaixo:



O plano α pode interceptar a superfície cônica S, não passando pelo vértive V, de três maneiras diferentes (abaixo descritas) e cada uma dessas maneiras distintas dá origem a uma curva plana distinta, a saber:

- a **elipse** (ou a **circunferência**) é obtida quando o plano α não é paralelo a uma geratriz (reta de S que passa por V) e corta apenas uma das folhas de S.
- a **hipérbole** é obtida quando o plano α não é paralelo a uma geratriz e corta as duas folhas de S. Nesse caso, o plano α interceptará a superficie S em duas partes separadas (uma em cada folha) e cada uma delas é chamada um **ramo da hipérbole**.
- a **parábola** é obtida quando o plano α é paralelo a uma geratriz de S.

As curvas que acabamos de descrever são chamadas de **secções cônicas** ou, mais simplesmente, de **cônicas**.



2.1 A Elipse

2.1.1 Definição

Sejam F_1 e F_2 pontos fixos num plano e $a \in \mathbb{R}$ um número real tal que $2a > d(F_1, F_2)$. Chama-se *elipse* ao lugar geométrico dos pontos P do plano tais que

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

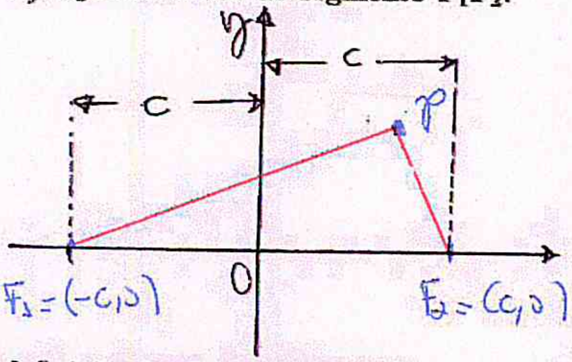
Os pontos F_1 e F_2 são chamados de *focos* da elipse.

Observe que: a definição de elipse **não envolve** sistemas de coordenadas e isto vai tornar possível a escolha de sistemas adequados, como veremos a seguir.

2.1.2 Equação Reduzida da Elipse

1º Caso: os focos estão sobre o eixo O_x

Considera-se o sistema de coordenadas de modo que o eixo O_x contenha os focos F_1 e F_2 e o eixo O_y seja mediatriz do segmento F_1F_2.



Sejam $2c = d(F_1, F_2)$ e

$P = (x, y)$ um ponto arbitrário da elipse.

Pela definição da elipse, temos que:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Ou seja:

$$\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = 2a$$

e, portanto

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

e agora, elevando-se ambos os membros ao quadrado, obtemos

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + [(x - c)^2 + y^2]$$

e assim

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

ou seja, cancelando-se os termos iguais e dividindo-se por 4:

$$cx = a^2 - a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} \implies cx - a^2 = - a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Elevando-se novamente ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

Logo

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2\underbrace{(a^2 - c^2)}_{\neq 0}$$

Portanto:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Fazendo-se $b^2 := a^2 - c^2$, obtemos a chamada **equação reduzida da elipse com focos no eixo O_x**:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{2.1}$$

Observações:

1. A equação acima também é chamada **primeira equação padrão** ou **equação reduzida da elipse com focos no eixo O_x**.
2. Como $a > c > 0$, segue que $a > b$.

2º Caso: os focos estão sobre o eixo O_y

Considera-se o sistema de coordenadas de modo que o eixo O_y contenha os focos F_1 e F_2 e o eixo O_x seja mediatriz do segmento F_1F_2. De modo análogo ao que foi feito para o 1º Caso, chamando-se $b^2 = a^2 - c^2$, obtemos a **equação reduzida da elipse com focos no eixo O_y**

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1} \tag{2.2}$$

2.1.3 Esboço do Gráfico da Elipse

1º Caso: os focos estão sobre o eixo O_x

Temos que:
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ b^2 = a^2 - c^2 \\ d(F_1, F_2) = 2c < 2a \end{cases}$$

Para esboçar o gráfico da elipse com focos no eixo O_x, estudaremos algumas de suas propriedades que são obtidas através da análise de sua equação, a saber:

1. $-a \leqslant x \leqslant a$ **e** $-b \leqslant y \leqslant b$

<u>De fato</u>: Resolvendo a equação da elipse para x, obtemos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

e, portanto,

$$x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$$

Como x é real, devemos ter $b^2 - y^2 \geq 0$; ou seja:

$y^2 - b^2 \leqslant 0 \iff y^2 \leqslant b^2 \iff |y| \leqslant b \iff -b \leq y \leq b$

Analogamente mostra-se que $-a \leq x \leqslant a$

2. **Simetria:** as variáveis **x** e **y** aparecem na equação da elipse elevadas ao quadrado; logo, quando trocamos **x** por **-x** ou **y** por **-y** não alteramos a equação. Ou seja: se o ponto (x, y) é um ponto da elipse (e, portanto, satisfaz à sua equação), então os pontos (-x, y), (x, -y) e (-x, -y) também são pontos da elipse. Assim, o gráfico da elipse com focos no eixo O_x é simétrico em relação aos eixos coordenados e em relação à origem do sistema de coordenadas.

3. **Intersecção com os eixos coordenados:**

(i) **com o eixo O_x:**

Fazendo $y = 0$, obtemos $x = \pm\, a$.

Logo, a elipse com focos no eixo O_x intercepta este eixo nos pontos

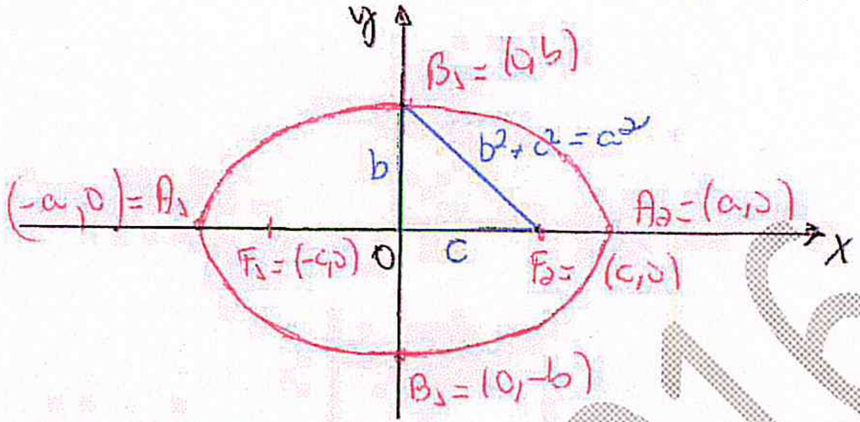
$$A_1 = (-a, 0) \quad \text{e} \quad A_2 = (a, 0)$$

(ii) com o eixo O_y:

Fazendo $x = 0$, obtemos $y = \pm\, b$.

Logo, a elipse com focos no eixo O_x intercepta o eixo O_y nos pontos

$$B_1 = (0, -b) \quad \text{e} \quad B_2 = (0, b)$$



2º Caso: os focos estão sobre o eixo O_y

Temos que:
$$\begin{cases} \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \\ b^2 = a^2 - c^2 \\ d(F_1, F_2) = 2c \end{cases}$$

Assim como no 1º Caso, para esboçar o gráfico da elipse com focos no eixo O_y, é necessário estudarmos algumas das propriedades que são obtidas através da análise da equação da elipse. Analogamente ao que foi feito para uma elipse com focos no eixo O_x, para elipses com focos no eixo O_y obtemos:

1. $-b \leq x \leq b$ e $-a \leq y \leq a$

2. **Simetria:** também o gráfico da elipse com focos no eixo O_y é simétrico em relação aos eixos coordenados e em relação à origem do sistema de coordenadas.

3. **Intersecção com os eixos coordenados:**

(i) com o eixo O_x:

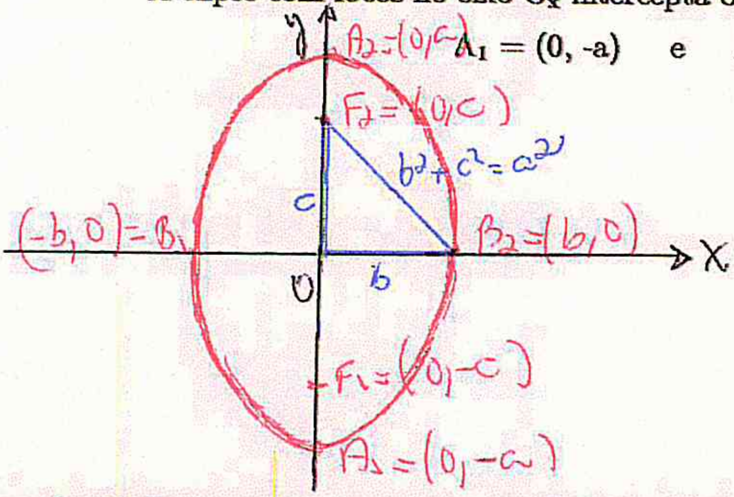
A elipse com focos no eixo O_y intercepta este eixo nos pontos

$$B_1 = (-b, 0) \quad \text{e} \quad B_2 = (b, 0)$$

(ii) com o eixo O_y:

A elipse com focos no eixo O_x intercepta o eixo O_y nos pontos

$$A_1 = (0, \text{-}a) \quad \text{e} \quad A_2 = (0, a)$$



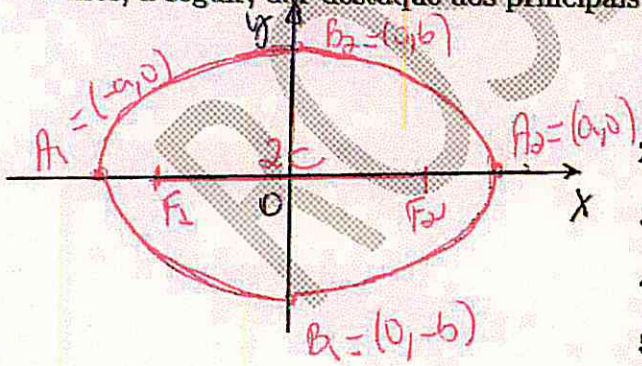
Observação: Dada a equação de uma elipse na sua forma reduzida, é possível determinar sua posição relativa aos eixos coordenados analisando os denominadores do termos x^2 e y^2: os focos da elipse estão sobre o eixo coordenado correspondente à variável cujo denominador é maior. Assim, por exemplo, a elipse

$$x^2 + \frac{y^2}{3} = 1 \quad \text{tem seus focos sobre o eixo } O_y$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \quad \text{tem seus focos sobre o eixo } O_x$$

2.1.4 Elementos da Elipse

Vamos, a seguir, dar destaque aos principais elementos de uma elipse.



1. **focos:** são os pontos $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$
2. **distância focal:** é a distância **2c** entre os focos
3. **eixo focal:** é a reta que passa pelos focos
4. **vértices:** são os pontos $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{B_1}$ e $\mathbf{B_2}$
5. **centro:** é o ponto médio do segmento F_1F_2
6. **eixo normal:** é a reta que contém o centro da elipse e é perpendicular ao seu eixo focal
7. **eixo maior:** é o segmento A_1A_2, de comprimento **2a**
8. **eixo menor:** é o segmento B_1B_2, de comprimento **2b**

9. excentricidade: é o número e, $0 < e < 1$, dado por $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$

10. corda: é qualquer segmento retilíneo que une dois pontos distintos da elipse

11. corda focal: é uma corda que passa por um dos focos da elipse

12. lactus rectum: é uma corda focal perpendicular ao eixo focal, de comprimento é $\frac{2b^2}{a}$

Observação: Quando os focos de uma elipse coincidem, tem-se $c = 0$ e, portanto, $b^2 = a^2$. Assim, a equação de tal elipse é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2$$

que representa uma circunferência de centro na origem do sistema de coordenadas e raio **a**. Observe que, neste caso, a excentricidade e é nula.

2.1.5 Problemas Resolvidos

1. Determine os focos, os vértices, a medida dos eixos, a excentricidade e esboce o gráfico das seguintes elipses:

(i) $9x^2 + 25y^2 = 225$

Solução: Vamos reduzir a equação dada à forma padrão. Para isto, dividimos ambos os membros da equação por 225 e obtemos a equação

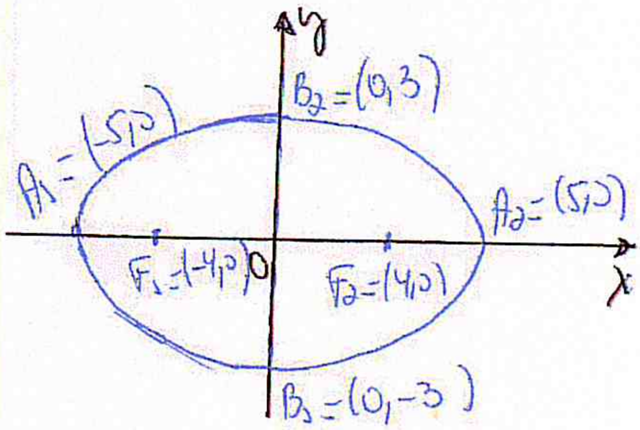
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \; : \text{ elipse com focos sobre o eixo } O_x$$

Logo:

$$\begin{cases} a^2 = 25 \Longrightarrow a = 5 \\ b^2 = 9 \Longrightarrow b = 3 \end{cases} \Longrightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \quad \Longrightarrow \quad c = 4$$

e daí concluímos que, para esta elipse:

- **focos:** $F_1 = (-4, 0)$ e $F_2 = (4, 0)$
- **vértices:** $A_1 = (-5, 0)$, $A_2 = (5, 0)$
  $B_1 = (0, -3)$ e $B_2 = (0, 3)$
- **eixo maior:** $2a = 10$
- **eixo menor:** $2b = 6$
- **excentricidade:** $e = \frac{4}{5}$



(ii) $4x^2 + y^2 - 16 = 0$

Solução: Novamente, devemos reduzir a equação dada à forma padrão. Para isto, dividimos ambos os membros da equação por 16 e obtemos a equação

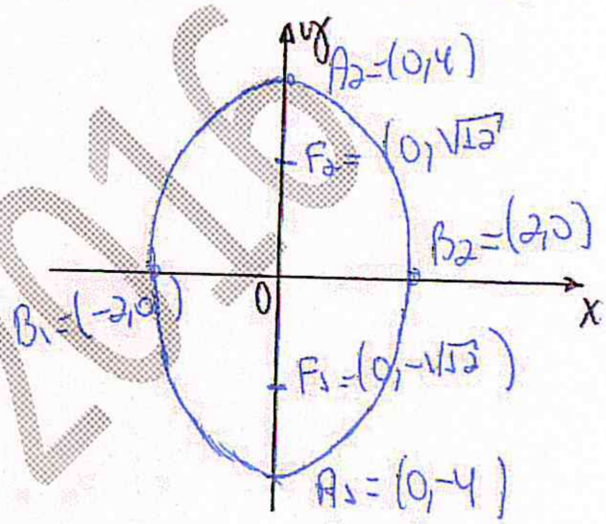
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \; : \text{ elipse com focos sobre o eixo } O_y$$

Logo:

$$\begin{cases} a^2 = 16 \implies a = 4 \\ b^2 = 4 \implies b = 2 \end{cases} \implies c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12 \implies c = \sqrt{12}$$

e daí concluimos que, para esta elipse:

- **focos:** $F_1 = (0, -\sqrt{12})$ e $F_2 = (0, \sqrt{12})$
- **vértices:** $A_1 = (0, -4)$, $A_2 = (0, 4)$
  $B_1 = (-2, 0)$ e $B_2 = (2, 0)$
- **eixo maior:** $2a = 8$
- **eixo menor:** $2b = 4$
- **excentricidade:** $e = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

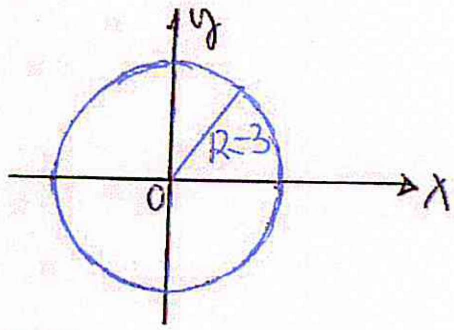


(iii) $x^2 + y^2 - 9 = 0$

Solução: A forma padrão desta equação é:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

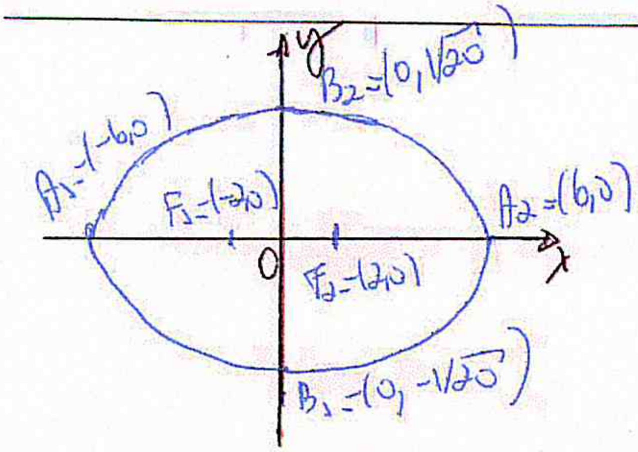
que representa uma circunferência de centro na origem e raio $\mathbf{R = 3}$. Logo: $a^2 = b^2 = 9$, o que significa que $c = 0$; isto é, os dois focos coincidem com o centro $C = (0, 0)$ da circunferência, as medidas dos eixos maior e menor são iguais ao raio $R = 3$ e sua excentricidade é $e = 0$.



2. Escreva a equação e esboce o gráfico das elipses a seguir, sabendo que:

(i) $F_1 = (-4, 0)$, $F_2 = (4, 0)$ e eixo maior mede 12 unidades.

Solução: Os focos desta elipse estão sobre o eixo O_x, $c = 4$ e $2a = 12 \implies a = 6$.

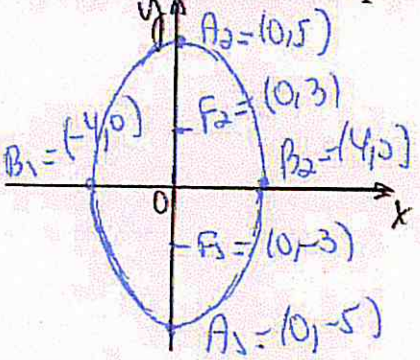


Portanto: $A_1 = (-6, 0)$ e $A_2 = (6, 0)$.
Além disso, $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20$
e, assim, a equação desta elipse é

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

(ii) $F_1 = (0, -3)$, $F_2 = (0, 3)$ e eixo menor mede 8 unidades.

Solução: Os focos desta elipse estão sobre o eixo O_y, $c = 3$ e $2b = 8 \Longrightarrow b = 4$.

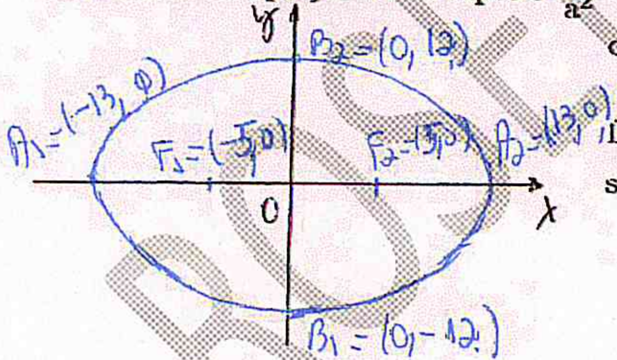


Logo: $B_1 = (-4, 0)$ e $B_2 = (4, 0)$. Além disso, $a^2 = b^2 + c^2 = 16 + 9 = 25$ e, portanto, a equação desta elipse é

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

(iii) Focos: $F = (\pm\, 5, 0)$ e vértices: $(\pm\, 13, 0)$.

Solução: A equação desta elipse é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, uma vez que seus focos estão sobre o eixo O_x. Além disso, $c = 5$ e $a = 13$.



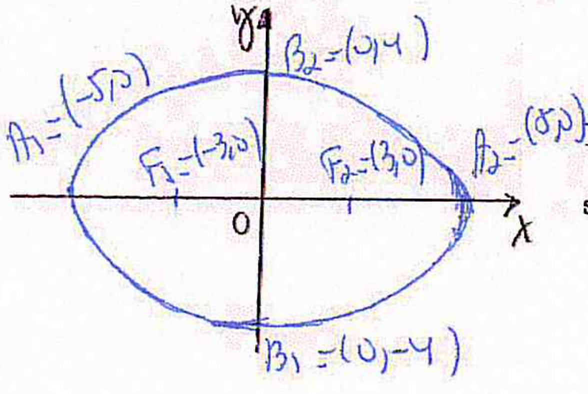
Logo, $b^2 = a^2 - c^2 = 169 - 25 = 144$ e, portanto, sua equação é

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$$

(iv) Vértices: $(\pm\, 5, 0)$, excentricidade $e = \frac{3}{5}$ e focos em O_x.

Solução: A equação desta elipse é $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Além disso, $a = 5$ e dessa forma

$$\frac{3}{5} = \frac{c}{5} \Longrightarrow c = 3.$$



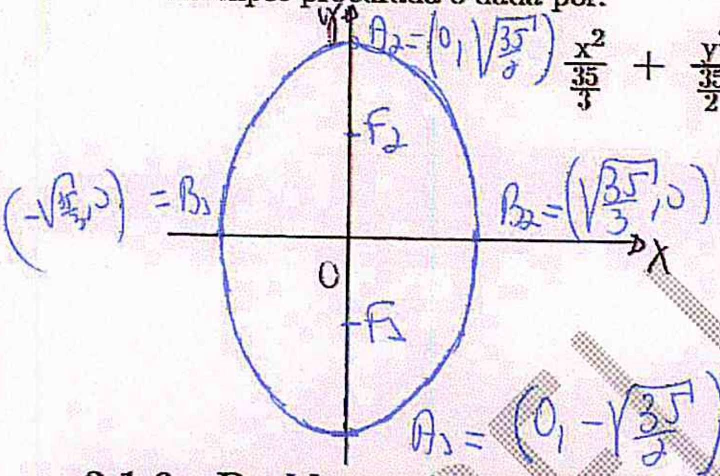
Logo, $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$ e, portanto, sua equação é $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

(v) seu centro é a origem, seus focos estão sobre um dos eixos coordenados e a elipse passa pelos pontos $P = (3, 2)$ e $Q = (1, 4)$.

Solução: A equação desta elipse é da forma $\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2} = 1$. Logo:

$$\begin{cases} \frac{9}{A^2} + \frac{4}{B^2} = 1 \\ \frac{1}{A^2} + \frac{16}{B^2} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 9B^2 + 4A^2 = A^2B^2 \\ B^2 + 16A^2 = A^2B^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 36B^2 + 16A^2 = 4A^2B^2 \\ -B^2 - 16A^2 = -A^2B^2 \end{cases}$$

e portanto, somando-se as duas equações do último sistema, obtemos $35B^2 = 3A^2B^2$, o que implica em $A^2 = \frac{35}{3}$, uma vez que $B \neq 0$. Da segunda equação do segundo sistema acima segue que $B^2 = A^2B^2 - 16A^2$. Assim, $B^2 = -\frac{16A^2}{1 - A^2}$. Substituindo-se, nesta última expressão, o valor encontrado para A^2, obtemos $B^2 = \frac{35}{2}$. Dessa forma, a equação reduzida da elipse procurada é dada por:



$$\frac{x^2}{\frac{35}{3}} + \frac{y^2}{\frac{35}{2}} : \text{elipse com focos sobre o eixo } O_y.$$

2.1.6 Problemas Propostos

Nos Problemas a seguir, as elipses consideradas têm seu centro na origem do sistema de coordenadas.

1. Para cada uma das seguintes elipses , determinar as coordenadas dos vértices e dos focos, os comprimentos dos eixos maior e menor e a excentricidade. Faça também um esboço do gráfico:

(a) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

(b) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{100} = 1$

(c) $9x^2 + 4y^2 = 36$

(d) $4x^2 + 9y^2 = 36$

(e) $16x^2 + 25y^2 = 400$

(f) $x^2 + 25y^2 = 25$

(g) $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0$

(h) $4x^2 + 9y^2 = 25$

(i) $4x^2 + y^2 = 1$

(j) $4x^2 + 25y^2 = 1$

2. Os pontos $A_1 = (-4, 0)$ e $A_2 = (4, 0)$ são dois vértices de uma elipse cujos focos são $F_1 = (-3, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$. Determinar sua equação.

3. Os pontos $A_1 = (0, -6)$ e $A_2 = (0, 6)$ são dois vértices de uma elipse cujos focos são $F_1 = (0, -4)$ e $F_2 = (0, 4)$. Determinar sua equação.

4. Os focos de uma elipse são os pontos $F_1 = (-2, 0)$ e $F_2 = (2, 0)$. Sabendo que sua excentricidade é $e = \frac{2}{3}$, determinar sua equação.

5. Uma elipse que passa pelo ponto $P = (\sqrt{5}, \frac{14}{3})$ tem como um dos vértices o ponto $(0, 7)$. Determinar sua equação e sua excentricidade.

6. Uma elipse passa pelos pontos $P = (\sqrt{6}, -1)$ e $Q = (2, \sqrt{2})$ e seu eixo maior coincide com o eixo O_x. Determinar sua equação.

7. Uma elipse que passa pelo ponto $P = (\frac{\sqrt{7}}{2}, 3)$ tem seu eixo menor coincidente com o eixo O_x e o comprimento do seu eixo maior é o dobro do comprimento do seu eixo menor. Determinar sua equação.

2.2 A Hipérbole

2.2.1 Definição

Sejam F_1 e F_2 pontos fixos num plano e $a \in \mathbb{R}$ um número real tal $0 < 2a < d(F_1, F_2)$. Chama-se *hipérbole* ao lugar geométrico dos pontos P do plano tais que

$$| d(P, F_1) - d(P, F_2) | = 2a$$

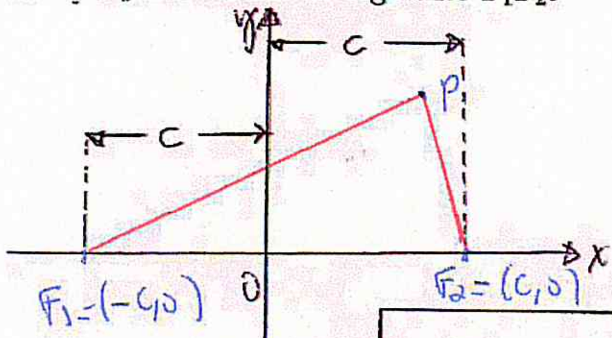
Os pontos F_1 e F_2 são chamados de *focos* da hipérbole.

Observe que: assim como na definição de elipse, a definição de hipérbole **não envolve** sistemas de coordenadas e novamente isto vai tornar possível a escolha de sistemas adequados, como veremos a seguir.

2.2.2 Equação Reduzida da Hipérbole

1º Caso: os focos estão sobre o eixo O_x

Considera-se o sistema de coordenadas de modo que o eixo O_x contenha os focos F_1 e F_2 e o eixo O_y seja mediatriz do segmento F_1F_2.



Sejam $2c = d(F_1, F_2)$, $b^2 := c^2 - a^2$

Se $P = (x, y)$ um ponto arbitrário da hipérbole, então

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \tag{2.3}$$

<u>**De fato:**</u> É fácil ver que, pelo modo como foi escolhido o sistema de coordenadas, $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Além disso, como $P = (x, y)$ é um ponto da hipérbole, por definição temos que $|\, d(P, F_1) - d(P, F_2)\, | = 2a$ e, portanto:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a$$

Logo: $$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

e, portanto: $$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros da igualdade acima, obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = [(x-c)^2 + y^2] \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2$$

Efetuando-se os cálculos, resulta em $\quad cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

Elevando-se novamente ao quadrado e efetuando-se os cálculos necessários, obtemos:

$$(c^2 - a^2)\, x^2 - a^2 y^2 = a^2 (c^2 - a^2)$$

Como $c > a > 0$, segue que $c^2 - a^2 \neq 0$ e, dessa forma, podemos dividir ambos os membros da última igualdade por $a^2(c^2 - a^2)$. Assim:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 \quad \xRightarrow{b^2 = c^2 - a^2} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \blacksquare$$

Observação: A equação 2.3 é chamada **equação reduzida da hipérbole com focos no eixo O_x.**

2º Caso: os focos estão sobre o eixo O_y

Considera-se o sistema de coordenadas de modo que o eixo O_y contenha os focos F_1 e F_2 e o eixo O_x seja mediatriz do segmento F_1F_2. De modo análogo ao que foi feito para o 1º Caso, obtemos a **equação reduzida da hipérbole com focos no eixo O_y**

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1} \tag{2.4}$$

2.2.3 Esboço do Gráfico da Hipérbole

1º Caso: os focos estão sobre o eixo O_x

Temos que:
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ b^2 = c^2 - a^2 \\ d(F_1, F_2) = 2c > 2a > 0 \end{cases}$$

Para esboçar o gráfico da hipérbole com focos no eixo O_x, estudaremos algumas de suas propriedades que são obtidas através da análise de sua equação, a saber:

1. **$x \leq -a$ ou $x \geq a$ e y é qualquer**

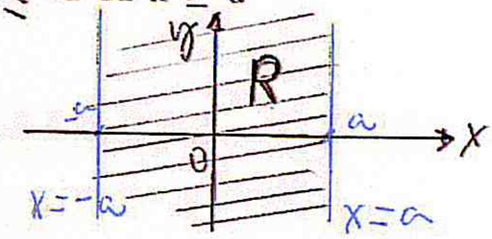
   De fato: Resolvendo a equação da hipérbole para x, obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2}$$

   e como $\frac{y^2}{b^2} \geq 0$, segue que $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$

   Assim:

$$x^2 \geq a^2 \iff |x| \geq |a| = a \iff x \leq -a \text{ ou } x \geq a$$



Geometricamente, este resultado significa que não há pontos da hipérbole com focos em O_x pertencentes à região R compreendida entre as retas $x = -a$ e $x = a$.

Além disso, temos que $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \implies y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ e como $x^2 - a^2 \geq 0$, segue que $y^2 \geq 0$, o que ocorre para todo valor de **y**.

2. **Simetria:** Como na elipse, as variáveis **x** e **y** aparecem elevadas ao quadrado e, portanto, temos aqui a mesma conclusão a que havíamos chegado para o caso da elipse: o gráfico da hipérbole com focos no eixo O_x é simétrico em relação aos eixos coordenados e em relação à origem do sistema de coordenadas.

3. **Intersecção com os eixos coordenados:**

(i) **com o eixo O_x:**

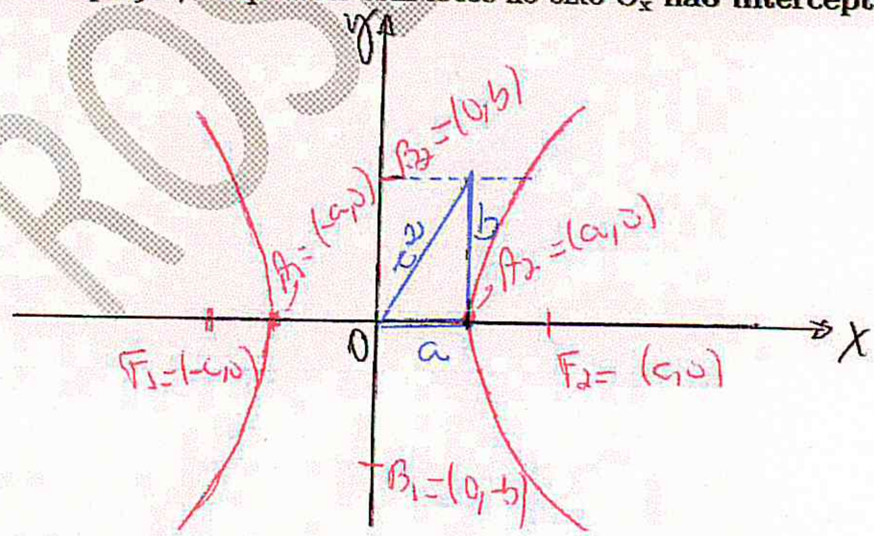
Fazendo $y = 0$, obtemos $x^2 = a^2$ e, portanto, $x = \pm a$.

Logo, a hipérbole com focos no eixo O_x intercepta este eixo nos pontos

$$A_1 = (-a, 0) \quad \text{e} \quad A_2 = (a, 0)$$

(ii) **com o eixo O_y:**

Fazendo $x = 0$, obtemos $y^2 = -b^2$. Como não existe solução para esta equação, a hipérbole com focos no eixo O_x **não intercepta o eixo O_y**.



2º Caso: os focos estão sobre o eixo O_y

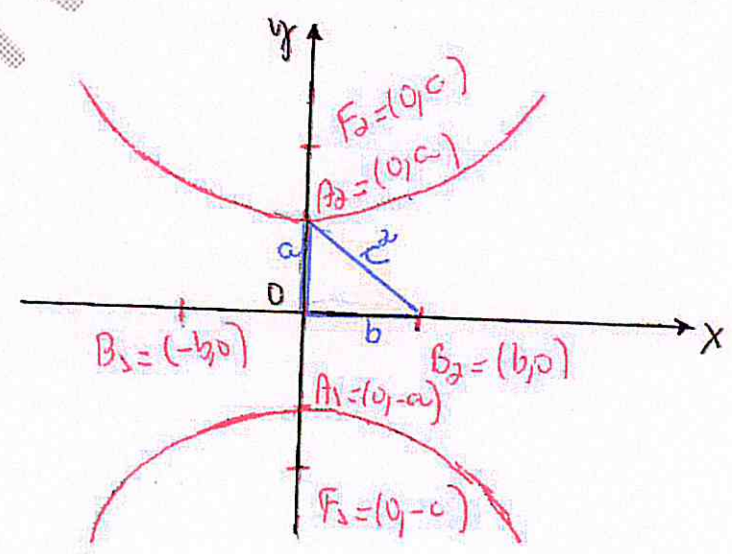
Temos que:
$$\begin{cases} \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \\ b^2 = c^2 - a^2 \\ d(F_1, F_2) = 2c > 2a > 0 \end{cases}$$

Assim como no 1º Caso, para esboçar o gráfico da hipérbole com focos no eixo O_y, é necessário estudarmos algumas das propriedades que são obtidas através da análise da equação da hipérbole. Analogamente ao que foi feito para uma elipse com focos no eixo O_x, para hipérboles com focos no eixo O_y obtemos:

1. **$y \leq$ -a ou $y \geq a$ e x é qualquer**
   Geometricamente, este resultado significa que não há pontos da hipérbole com focos em O_y pertencentes à região R compreendida entre as retas $y = -a$ e $y = a$.

2. **Simetria:** também o gráfico da hipérbole com focos no eixo O_y é simétrico em relação aos eixos coordenados e em relação à origem do sistema de coordenadas.

3. **Intersecção com os eixos coordenados:**
   (i) **com o eixo O_x:**
   A hipérbole com focos no eixo O_y **não intercepta o eixo Ox.**
   (ii) **com o eixo O_y:**
   A hipérbole com focos no eixo O_y intercepta este eixo O_y nos pontos
   $$A_1 = (0, -a) \quad e \quad A_2 = (0, a)$$



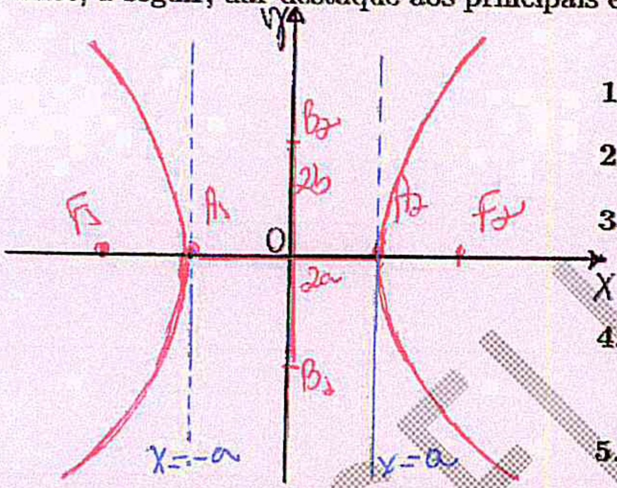
Observação: Dada a equação da hipérbole na sua forma reduzida, é possível determinar sua posição relativa aos eixos coordenados analisando o sinal dos coeficientes dos termos x^2 e y^2: os focos da hipérbole estão sobre o eixo coordenado correspondente à variável cujo coeficiente é positivo. Assim, por exemplo, a hipérbole

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \quad \text{tem seus focos sobre o eixo } O_x$$

$$\frac{y^2}{\frac{1}{3}} - \frac{x^2}{\frac{1}{4}} = 1 \quad \text{tem seus focos sobre o eixo } O_y$$

2.2.4 Elementos da Hipérbole

Vamos, a seguir, dar destaque aos principais elementos de uma hipérbole.



1. **focos:** são os pontos F_1 e F_2
2. **eixo focal:** é a reta que passa pelos focos
3. **vértices:** são os pontos A_1 e A_2, nos quais o eixo focal intercepta a hipérbole
4. **eixo transverso:** segmento retilíneo que une os vértices. Seu comprimento é **2a**
5. **centro:** é o ponto médio do eixo transverso
6. **eixo normal:** é a reta perpendicular ao eixo focal passando pelo centro da hipérbole
7. **eixo conjugado:** é o segmento retilíneo, de comprimento **2b**, que une os pontos:
   - $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$, se os focos estão em O_x
   - $B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$, se os focos estão em O_y
8. **excentricidade:** é o número e, $e > 1$, dado por $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1$
9. **corda:** é qualquer segmento retilíneo que une dois pontos distintos da hipérbole
10. **corda focal:** é uma corda que passa por um dos focos da hipérbole
11. **lactus rectum:** é uma corda focal perpendicular ao eixo focal, de comprimento é $\frac{2b^2}{a}$

2.2.5 Assíntotas da Hipérbole

A reta **r:** $y = ax + b$ é dita uma **assíntota** à curva $y = f(x)$ se, e somente se,

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \qquad \text{e/ou} \qquad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Essas condições implicam que, quando $x \to +\infty$ e/ou quando $x \to -\infty$, a distância entre o ponto $(x, f(x))$ na curva e o ponto $(x, ax + b)$ na reta tende para zero.

1º Caso: os focos da hipérbole estão sobre o eixo O_x

Neste caso, as assíntotas da hipérbole são as retas de equações:

$$\boxed{y = -\frac{b}{a}x \qquad \text{e} \qquad y = \frac{b}{a}x} \tag{2.5}$$

<u>**De fato**</u>: A equação desta hipérbole é da forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e, portanto

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Considere as funções: $f(x) = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ e $g(x) = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Temos:

$$g(x) - \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}(\sqrt{x^2 - a^2} - x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} [g(x) - \frac{b}{a}x] = \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - a^2} - x] \overset{x \geq 0}{=} \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - a^2} - \sqrt{x^2}]$$

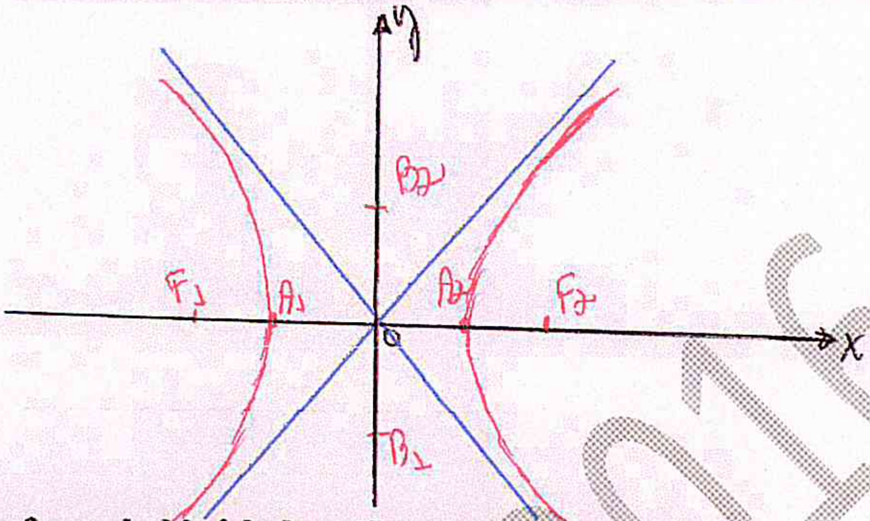
Mas: $$\sqrt{x^2 - a^2} - \sqrt{x^2} = \frac{(\sqrt{x^2 - a^2} - \sqrt{x^2})(\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{x^2})}{\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{x^2}} = \frac{(x^2 - a^2) - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{x^2}} =$$

$$= -\frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{x^2}} \quad \text{e, dessa forma,}$$

$$\lim_{x \to +\infty} [g(x) - \frac{b}{a}x] = -\frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{x^2}} = 0$$

Omitiremos as demonstrações dos outros casos, por serem completamente análogas a que foi feita acima. ■

Vejamos como fica o gráfico da hipérbole com focos em O_x e de suas assíntotas:

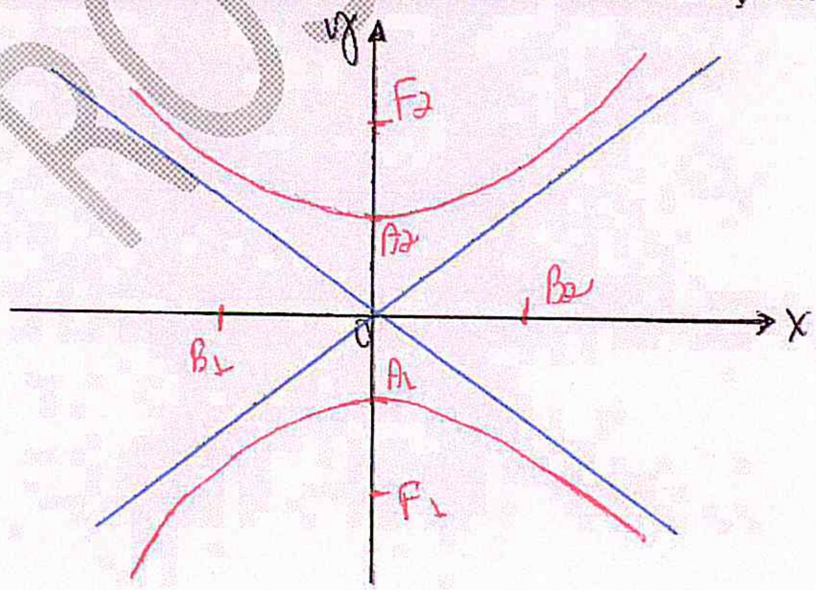


2º Caso: os focos da hipérbole estão sobre o eixo O_y

Analogamente ao que foi feito para o 1º, mostra-se que, neste caso, as assíntotas da hipérbole são as retas de equações:

$$\boxed{y = -\frac{a}{b}x \quad \text{e} \quad y = \frac{a}{b}x} \tag{2.6}$$

Vejamos, agora, como fica o gráfico da hipérbole com focos em O_y e de suas assíntotas:

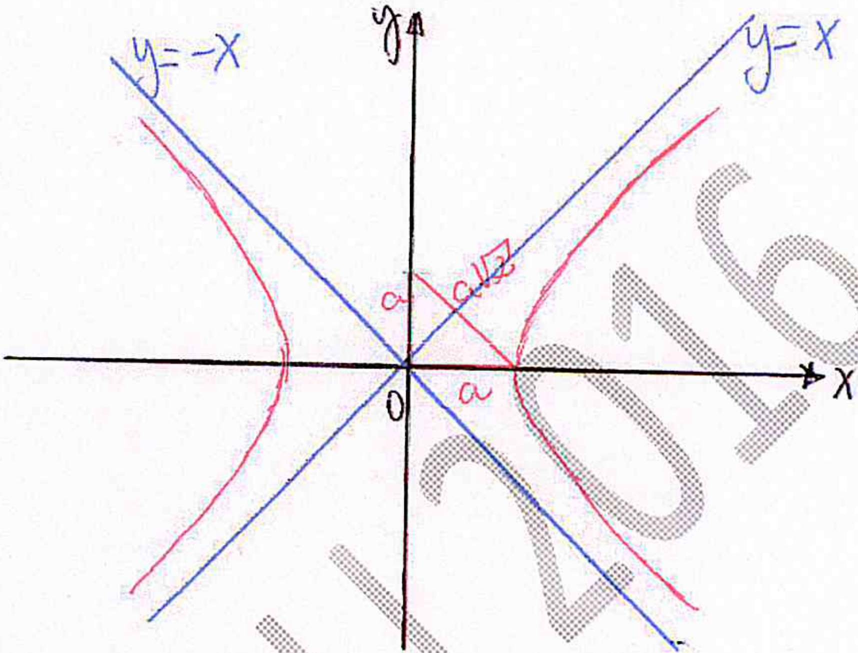


Observação: Quando **a = b**, a hipérbole é chamada **hipérbole equilátera**. Neste caso, os eixos transverso e conjugado têm o mesmo comprimento **2a** e a equação da hipérbole é

$$x^2 - y^2 = a^2, \quad \text{se os focos estão sobre o eixo } O_x$$

$$y^2 - x^2 = a^2, \quad \text{se os focos estão sobre o eixo } O_y$$

Graficamente:



2.2.6 Problemas Resolvidos

1. Determine os focos, os vértices, a medida dos eixos, a excentricidade, as equações das assíntotas e esboce o gráfico das seguintes hipérboles:

(i) $9x^2 - 7y^2 - 63 = 0$

Solução: Vamos reduzir a equação dada à forma padrão. Para isso, dividimos ambos os membros da equação $9x^2 - 7y^2 = 63$ por 63 e obtemos:

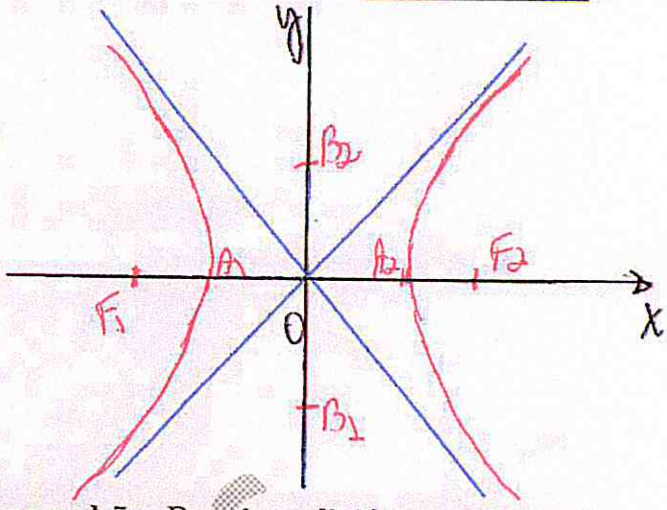
$$\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1 \; : \; \text{hipérbole com focos sobre o eixo } O_x$$

Logo:

$$\begin{cases} a^2 = 7 \implies a = \sqrt{7} \\ b^2 = 9 \implies b = 3 \end{cases} \implies c^2 = a^2 + b^2 = 7 + 9 = 16 \implies c = 4$$

e daí concluímos que, para esta hipérbole:

- **focos:** $F_1 = (-4, 0)$ e $F_2 = (4, 0)$
- **vértices:** $A_1 = (-\sqrt{7}, 0)$ e $A_2 = (\sqrt{7}, 0)$
- **eixo transverso:** $2a = 2\sqrt{7}$
- **eixo conjugado:** $2b = 6$
- **excentricidade:** $e = \frac{4}{\sqrt{7}}$
- **assíntotas:** $y = \pm \frac{3}{\sqrt{7}} x$



(ii) $x^2 - 4y^2 + 16 = 0$

Solução: Vamos reduzir a equação dada à forma padrão. Para isso, dividimos ambos os membros da equação $x^2 - 4y^2 = -16$ por -16 e obtemos:

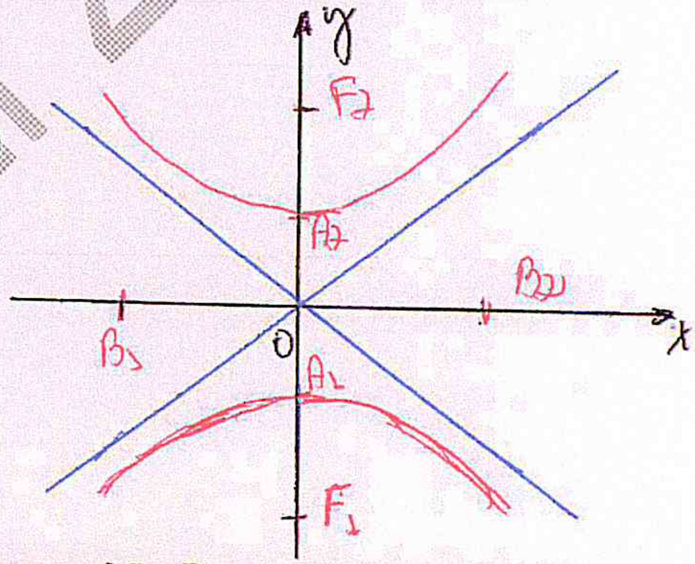
$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1 \; : \text{ hipérbole com focos sobre o eixo } O_y$$

Logo:

$$\begin{cases} a^2 = 4 \implies a = 2 \\ b^2 = 16 \implies b = 4 \end{cases} \implies c^2 = a^2 + b^2 = 20 \implies c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

e daí concluímos que, para esta hipérbole:

- **focos:** $F_1 = (0, -2\sqrt{5})$ e $F_2 = (0, 2\sqrt{5})$
- **vértices:** $A_1 = (0, -2)$ e $A_2 = (0, 2)$
- **eixo transverso:** $2a = 4$
- **eixo conjugado:** $2b = 8$
- **excentricidade:** $e = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$
- **assíntotas:** $y = \pm \frac{1}{2} x$



(iii) $x^2 - y^2 = 4$

Solução: Vamos reduzir a equação dada à forma padrão. Para isso, dividimos ambos os membros da equação $x^2 - y^2 = 4$ por 4 e obtemos:

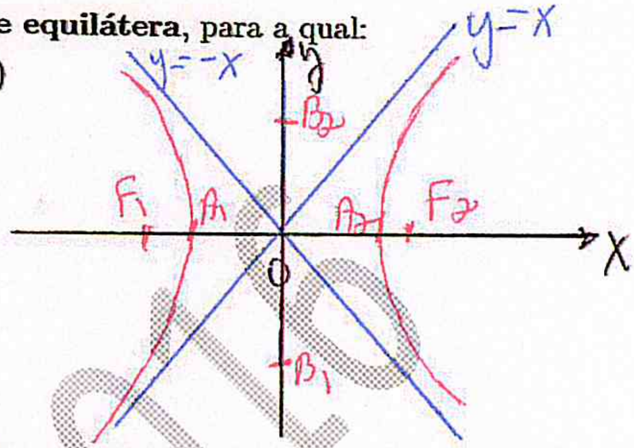
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1 \; : \text{ hipérbole com focos sobre o eixo } O_x$$

Logo:

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 = 4 \implies a = 2 \\ b^2 = 4 \implies b = 2 \end{array}\right. \implies c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 4 = 8 \implies c = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Como $a = b = 2$, trata-se de uma **hipérbole equilátera**, para a qual:

- **focos:** $F_1 = (-2\sqrt{2}, 0)$ e $F_2 = (2\sqrt{2}, 0)$
- **vértices:** $A_1 = (-2, 0)$ e $A_2 = (2, 0)$
- **eixo transverso:** $2a = 4$
- **eixo conjugado:** $2b = 4$
- **excentricidade:** $e = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$
- **assíntotas:** $y = \pm x$



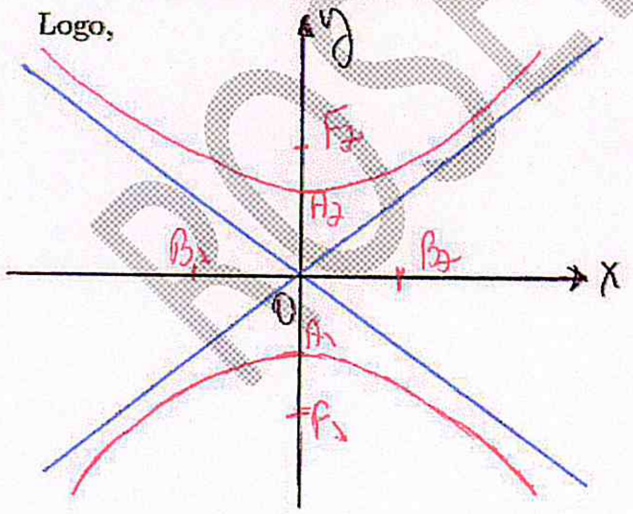
2. Escreva as equações da hipérbole, de suas assíntotas e faça um esboço do gráfico, quando:

(i) $F_1 = (0, -3)$, $F_2 = (0, 3)$ e o eixo transverso mede 4 uc (unidades de comprimento).

Solução:

- os focos desta hipérbole estão sobre o eixo O_y e $c = 3$.
- o eixo tranverso mede 4 uc $\implies$ $2a = 4$ $\implies$ $a = 2$
- na hipérbole vale a relação $b^2 = c^2 - a^2$ $\implies$ $b^2 = 9 - 4 = 5$

Logo,



equação da hipébole: $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{5} = 1$

assíntotas: $y = \pm\dfrac{a}{b}x = \pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}x$

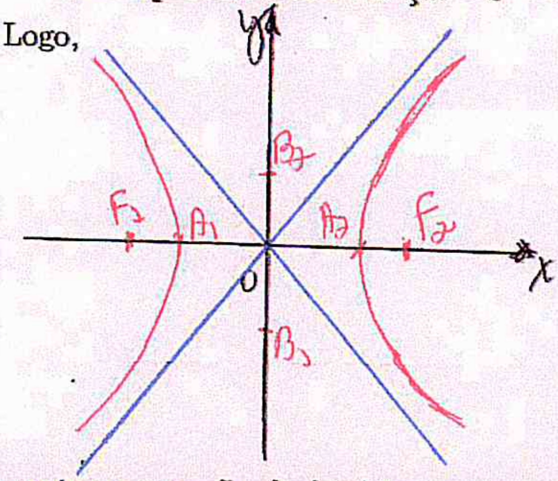
(ii) $F_1 = (-\sqrt{13}, 0)$, $F_2 = (\sqrt{13}, 0)$ e o eixo conjugado mede 4 uc.

Solução:

- os focos desta hipérbole estão sobre o eixo O_x e $c = \sqrt{13}$.

- o eixo conjugado mede 4 uc $\Longrightarrow$ $2b = 4$ $\Longrightarrow$ $b = 2$
- na hipérbole vale a relação $b^2 = c^2 - a^2$ $\Longrightarrow$ $a^2 = 13 - 4 = 9$ $\Longrightarrow$ $a = 3$

Logo,



equação da hipébole: $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

assíntotas: $y = \pm\dfrac{b}{a}\,x = \pm\dfrac{2}{3}\,x$

3. Encontre a equação da hipérbole cuja excentricidade é $e = 2$, sabendo que seus focos coincidem com os da elipse de equação:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Solução: Vamos analisar as duas cônicas separadamente.

Elipse: Da equação da elipse segue que

- os focos da elipse estão sobre o eixo O_x
- $a = 5$ e $b = 9$
- na elipse vale a relação $b^2 = a^2 - c^2$ $\Longrightarrow$ $c^2 = 25 - 9 = 16$ $\Longrightarrow$ $c = 4$
- focos da elipse: $F_1 = (-4, 0)$ e $F_2 = (4, 0)$

Hipérbole:

- os focos coincidem com os da elipse e, portanto, estão sobre o eixo O_x
- focos da hipérbole: $F_1 = (-4, 0)$ e $F_2 = (4, 0)$ $\Longrightarrow$ $c = 4$
- a excentricidade ddesta hipérbole é $e = 2$ $\Longrightarrow$ $2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{2} = 2$ $\Longrightarrow$ $a = 2$
- na hipérbole vale a relação $b^2 = c^2 - a^2$ $\Longrightarrow$ $b^2 = 16 - 4 = 12$

Logo, a equação da hipérbole procurada é

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

4. Uma hipérbole tem seu centro na origem do sistema de coordenadas e seu eixo transverso coincide com o eixo O_x. Se a excentricidade desta hipérbole é $e = \frac{\sqrt{6}}{2}$ e ela passa pelo ponto $P = (2, 1)$, determine sua equação.

Solução:

- os focos desta hipérbole estão sobre o eixo O_x.
- $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2} \implies c = \frac{\sqrt{6}}{2}\, a$
- na hipérbole vale a relação $b^2 = c^2 - a^2 \implies b^2 = \frac{6a^2}{4} - a^2 = \frac{a^2}{2}$

  Logo,

$$\text{equação da hipébole:} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\frac{a^2}{2}} = 1 \implies x^2 - 2y^2 = a^2$$

- como o ponto $P = (2, 1)$ pertence à hipérbole, suas coordenadas devem satisfazer à equação $x^2 - 2\,y^2 = a^2$ e, portanto, devemos ter:

  $2^2 - 1^2 = a^2$; isto é, $a^2 = 2 \implies b^2 = 1$; isto é, a equação da hipérbole procurada é

$$\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$$

2.2.7 Problemas Propostos

Nos Problemas a seguir, as hipérboles consideradas têm seu centro na origem do sistema de coordenadas.

1. Para cada uma das seguintes hipérboles, determinar as coordenadas dos vértices e dos focos, os comprimentos dos eixos transverso e conjugado e a excentricidade. Faça também um esboço do gráfico:

(a) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{36} = 1$ **(b)** $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{100} = 1$

(c) $9x^2 - 4y^2 = 36$ **(d)** $4x^2 - 9y^2 = 36$

(e) $9y^2 - 4x^2 = 36$ **(f)** $x^2 - 4y^2 = 4$

(g) $25x^2 - 144y^2 = 3600$ **(h)** $16x^2 - 25y^2 = 400$

(i) $y^2 - x^2 = 16$ **(j)** $3x^2 - y^2 = 3$

2. Os vértices de uma hipérbole são os pontos $A_1 = (-2, 0)$ e $A_2 = (2, 0)$ e seus focos são $F_1 = (-3, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$. Determinar sua equação e sua excentricidade.

3. Os extremos do eixo conjugado de uma hipérbole são os pontos $(0, -3)$ e $(0, 3)$. Sabendo que sua excentricidade é $\sqrt{2}$. Determinar sua equação.

4. Os vértices de uma hipérbole são os pontos $A_1 = (0, -4)$ e $A_2 = (0, 4)$. Sabendo que sua excentricidade é $e = \frac{3}{2}$, determinar sua equação e as coordenadas de seus focos.

5. O eixo transverso de uma hipérbole coincide com o eixo O_x. Determinar sua equação, sabendo que ela passa pelos pontos $P = (3, -2)$ e $Q = (7, 6)$.

6. Determinar os pontos de intersecção da reta **r:** $2x - 9y + 12 = 0$ com as assíntotas da hipérbole $4x^2 - 9y^2 = 11$.

7. O eixo transverso de uma hipérbole se encontra ao longo do eixo O_x e uma de suas assíntotas é a reta **r:** $2x + 3\sqrt{2}\ y = 0$. Se a hipérbole passa pelo ponto $P = (3, -1)$, determinar sua equação.

8. Determinar a distância do foco direito da hipérbole $16x^2 - 9y^2 = 144$ a cada uma de suas assíntotas.

9. Uma hipérbole tem seu eixo transverso coincidente com o eixo O_x. Sua excentricidade é $\frac{\sqrt{6}}{2}$ e ela passa pelo ponto $P = (2, 1)$. Determine as equações de suas assíntotas.

10. Uma hipérbole tem seu eixo conjugado coincidente com o eixo O_x. Sua excentricidade é $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e ela passa pelo ponto $P = (-1, 2)$. Determine as equações de suas assíntotas.

11. Determinar a equação das assíntotas sda hipérbole $4x^2 - 5y^2 = 7$.

12. Demonstrar que, se as assíntotas de uma hipérbole são mutuamente perpendiculares, a hipérbole é equilátera.

13. Demonstrar que a excentricidade de qualquer hipérbole equilátera é $\sqrt{2}$

2.3 A Parábola

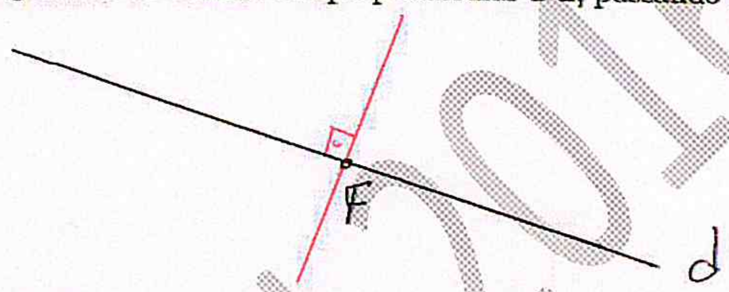
2.3.1 Definição

Sejam uma reta **d** e F um ponto fixo do plano, tal que $F \notin d$. Chama-se *parábola* ao lugar geométrico dos pontos P do plano que são equidistantes da reta **d** e do ponto **F**.

A reta **d** é chamada *diretriz* e o ponto **F** é chamado *foco* da parábola.

Observe que:

1. Se $F \in d$, o lugar geométrico é uma reta perpendicular a **d**, passando por F.

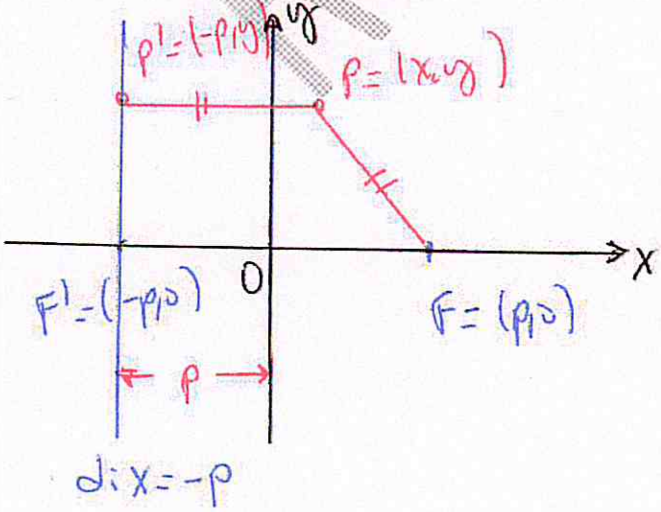


2. A definição de parábola, assim como as definições de elipse e de hipérbole, **não envolve** sistemas de coordenadas e isto vai tornar possível a escolha de sistemas adequados, como veremos a seguir.

2.3.2 Equação Reduzida da Parábola

1º Caso: o foco está sobre o eixo O_x

Considera-se o sistema de coordenadas de modo que o eixo O_x contenha o foco F, seja perpendicular à diretriz **d** e o eixo O_y seja mediatriz de FF', sendo $F' = d \cap O_x$.



Observe que: da maneira como foi escolhido o sistema de coordenadas, a origem O do sistema é um ponto da parábola.

Sejam P = (x, y) um ponto arbitrário da parábola e F = (p, 0). Nesse caso, a equação da diretriz é **d:** x = - p. Da definição de parábola, temos que:

$$d(P, d) = d(P, F)$$

Seja P′ ∈ d o ponto intersecção da diretriz **d** com a reta que passa por P e é perpendicular à diretriz **d**. Então:

$$P' = (-p, y) \quad \text{e} \quad d(P, d) = d(P, P')$$

Mas:

$$d(P, P') = \sqrt{(x + p)^2 + (y - y)^2} = \sqrt{(x + p)^2} = |x + p|$$

Por outro lado,

$$d(P, F) = \sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$$

e, portanto, devemos ter:

$$|x + p| = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$$

Elevando-se ao quadrado ambos os membros desta última igualdade, obtemos:

$$x^2 + 2px + p^2 = x^2 - 2px + p^2 + y^2$$

e, portanto

$$\boxed{\begin{array}{l} y^2 = 4px \\ d: \ x = -p \end{array}} \qquad (2.7)$$

Observação: A equação 2.7 é chamada **equação reduzida da parábola com foco em** O_x.

2º Caso: o foco está sobre o eixo O_y

Considera-se o sistema de coordenadas de modo que o eixo O_y contenha o foco F e seja perpendicular à diretriz **d** e o eixo O_x seja mediatriz do segmento FF', sendo $F' = d \cap O_y$. De modo análogo ao que foi feito para o 1º Caso, obtemos a **equação reduzida da parábola com foco no eixo O_y**

$$\boxed{\begin{aligned} x^2 &= 4py \\ d: \ y &= -p \end{aligned}} \tag{2.8}$$

Observação: A equação 2.8 é chamada **equação reduzida da parábola com foco em O_y.**

2.3.3 Esboço do Gráfico da Parábola

1º Caso: o foco está sobre o eixo O_x

Temos que: $\begin{cases} y^2 = 4px \\ d: x = -p \\ F = (p, 0) \ \text{e} \ F' = (-p, 0) \end{cases}$

Para esboçar o gráfico da parábola com focos no eixo O_x, estudaremos algumas de suas propriedades que são obtidas através da análise de sua equação, a saber:

1. **Simetria:** A equação da parábola com foco em O_x não se altera quando trocamos y por -y; ou seja, o gráfico da parábola com foco no eixo O_x é simétrico em relação a este eixo.

2. **Intersecção com os eixos coordenados:**
   (i) com o eixo O_x:
   Fazendo $y = 0$, obtemos $x = 0$.
   Logo, a parábola com foco no eixo O_x intercepta este eixo no ponto $V = (0, 0)$.

(ii) com o eixo O_y:

Fazendo $x = 0$, obtemos $y = 0$. Conclui-se, dessa forma, que o **único** ponto da parábola que intercepta **ambos os eixos coordenados** é o ponto $V = (0, 0)$.

3. Domínio das variáveis x e y:

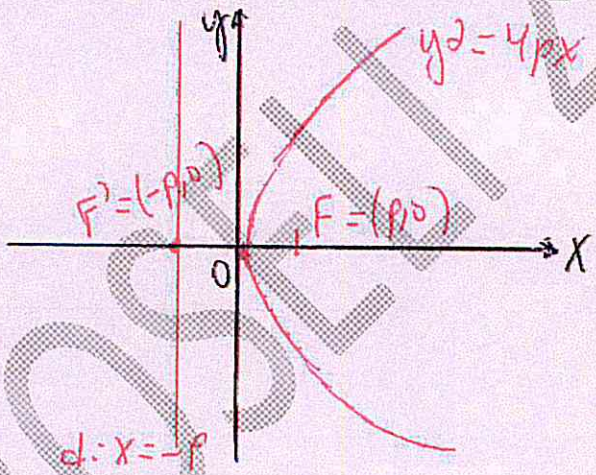
(i) domínio da variável y:

Da equação $y^2 = 4px$, vemos que não há restrições para os valores de **y**.

(ii) domínio da variável x:

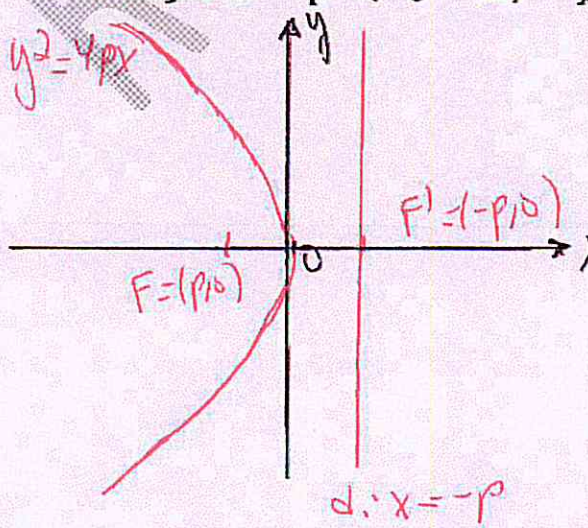
Da equação $y^2 = 4px$, segue que $px \geq 0$. Como consequência, o produto do parâmetro **p** pela abscissa **x** de um ponto **P** da parábola deverá ser sempre positivo e nulo só se $x = 0$. Assim: **p** e **x** devem ter sempre o mesmo sinal. Teremos, então, duas possibilidades a considerar:

Situação 1: $\mathbf{p > 0 \implies x \geq 0}$



$p > 0 \implies$ a curva é aberta à direita

Situação 2: $\mathbf{p < 0 \implies x \leq 0}$



$p < 0 \implies$ a curva é aberta à esquerda

2º Caso: o foco está sobre o eixo O_y

$$\text{Temos que:}\begin{cases} x^2 = 4py \\ d : y = -p \\ F = (0,\ p) \text{ e } F' = (0,\ -p) \end{cases}$$

Assim como no 1º caso, para esboçar o gráfico da parábola com foco no eixo O_y, devemos estudar algumas de suas propriedades que são obtidas através da análise de sua equação.

1. **Simetria:** A equação da parábola com foco em O_y não se altera quando trocamos x por $-x$; ou seja, o gráfico da parábola com foco no eixo O_y é simétrico em relação a este eixo.

2. **Intersecção com os eixos coordenados:**

   (i) **com o eixo O_x:**

   Fazendo $y = 0$, obtemos $x = 0$.

   Logo, a parábola com foco no eixo O_x intercepta este eixo no ponto $V = (0,0)$.

   (ii) **com o eixo O_y:**

   Fazendo $x = 0$, obtemos $y = 0$. Conclui-se, dessa forma, que o **único** ponto da parábola que intercepta **ambos os eixos coordenados** é o ponto $V = (0,0)$.

3. **Domínio das variáveis x e y:**

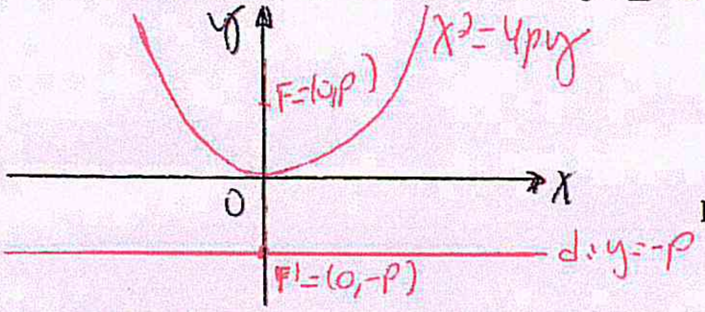
   (i) **domínio da variável x:**

   Da equação $x^2 = 4\,py$, vemos que não há restrições para os valores de x.

   (ii) **domínio da variável y:**

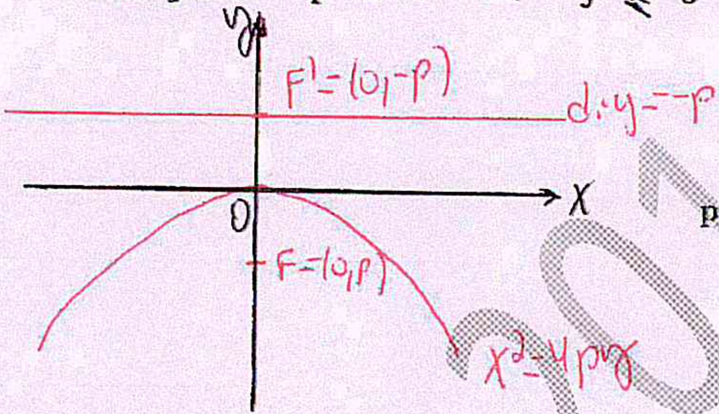
   Da equação $x^2 = 4py$, segue que $py \geq 0$. Como conseqüência, o produto do parâmetro $\mathbf{p}$ pela ordenada $\mathbf{y}$ de um ponto $\mathbf{P}$ da parábola deverá ser sempre positivo e nulo só se $y = 0$. Assim: $\mathbf{p}$ e $\mathbf{y}$ devem ter sempre o mesmo sinal. Teremos, então, duas possibilidades a considerar:

Situação 1: $\mathbf{p > 0 \implies y \geq 0}$



$\mathbf{p > 0 \implies}$ **a curva é aberta para cima**

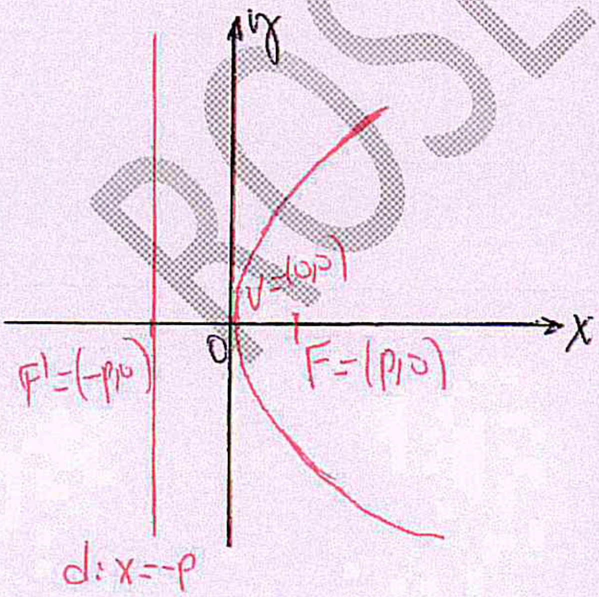
Situação 2: $\mathbf{p < 0 \implies y \leqslant 0}$



$\mathbf{p < 0 \implies}$ **a curva é aberta para baixo**

2.3.4 Elementos da Parábola

Vamos, a seguir, dar destaque aos principais elementos de uma parábola.



1. **foco:** é o ponto fixo **F**
2. **diretriz:** é a reta fixa **d**
3. **vértice:** é o ponto médio do segmento FF′
4. **eixo:** é a reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz
5. **corda:** segmento retilíneo unindo quaisquer dois pontos da parábola
6. **corda focal:** qualquer corda que passa pelo foco
7. **raio focal:** segmento retilíneo que une qualquer ponto da parábola ao seu foco

2.3.5 Problemas Resolvidos

1. Determine as coordenadas do foco, a equação da diretriz e esboce o gráfico da parábola:

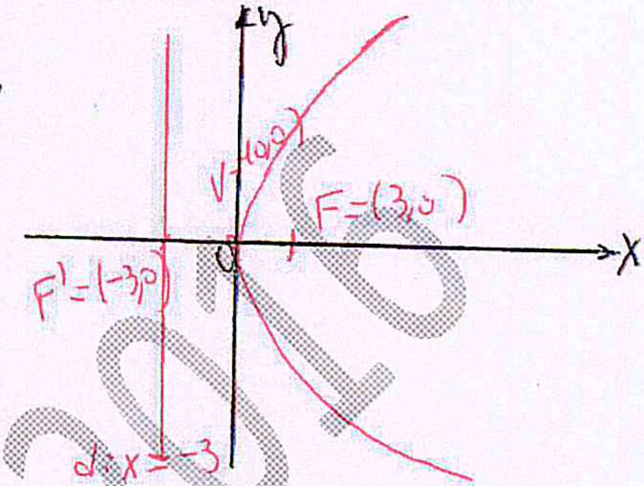
(i) $y^2 = 12x$

Solução: O foco desta parábola está no eixo O_x. Além disso,

$$4p = 12 \implies p = 3$$

e daí concluimos que, para esta parábola,

- **foco:** $F = (3, 0)$
- **diretriz:** d: $x = -3$



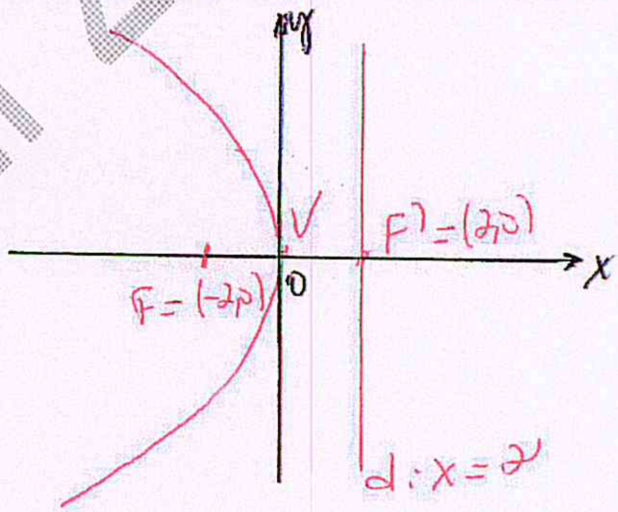
(ii) $y^2 + 8x = 0$

Solução: Reduzindo a equação dada à forma padrão, obtemos: $y^2 = -8x$. O foco desta parábola está no eixo O_x. Além disso,

$$4p = -8 \implies p = -2$$

e daí concluimos que, para esta parábola,

- **foco:** $F = (-2, 0)$
- **diretriz:** d: $x = 2$



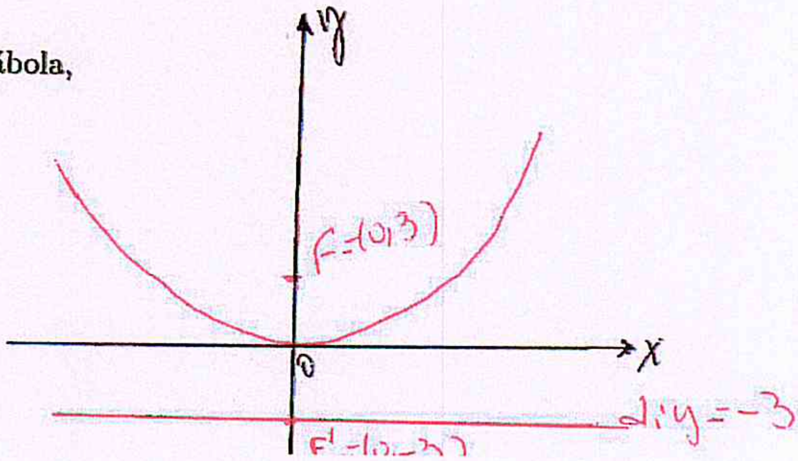
(iii) $x^2 = 12y$

Solução: O foco desta parábola está no eixo O_y. Além disso,

$$4p = 12 \implies p = 3$$

e daí concluimos que, para esta parábola,

- **foco:** $F = (0, 3)$
- **diretriz:** d: $y = -3$



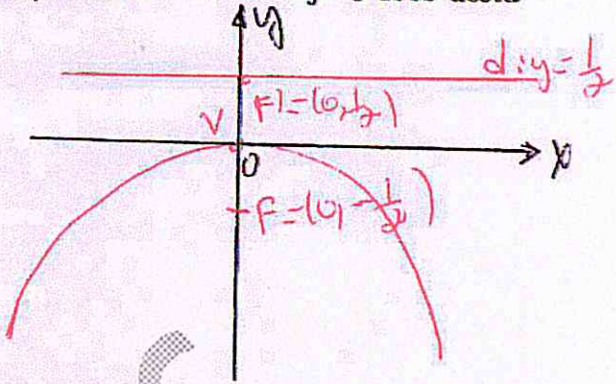
(iv) $x^2 + 2y = 0$

Solução: Reduzindo a equação dada à forma padrão, obtemos: $x^2 = -2y$. O foco desta parábola está no eixo O_y. Além disso,

$$4p = -2 \implies p = -\frac{1}{2}$$

e daí concluimos que, para esta parábola,

- **foco:** $F = (0, -\frac{1}{2})$
- **diretriz:** d: $y = \frac{1}{2}$



2. Escreva a equação da parábola que tem foco no ponto $F = (-7, 0)$ e cuja diretriz é a reta **d:** $x - 7 = 0$.

Solução: O foco desta parábola está sobre o eixo O_x e, portanto, sua equação é do tipo

$$y^2 = 4px$$

diretriz: **d:** $x = 7 \implies -p = 7 \implies p = -7$

parábola: $y^2 = -28x$

3. Uma parábola cujo vértice está na origem e cujo eixo é coincidente com o eixo O_x passa pelo ponto $P = (-3, \sqrt{24})$. Determine a equação da parábola, as coordenadas do seu foco e a equação de sua diretriz.

Solução: O eixo desta parábola é O_x e, portanto, seu foco está em O_x. Logo, $F = (p, 0)$ e a equação da parábola é $y^2 = 4px$.

Como $P = (-3, \sqrt{24})$ é um ponto da parábola, as coordenadas de P satisfazem sua equação; isto é:

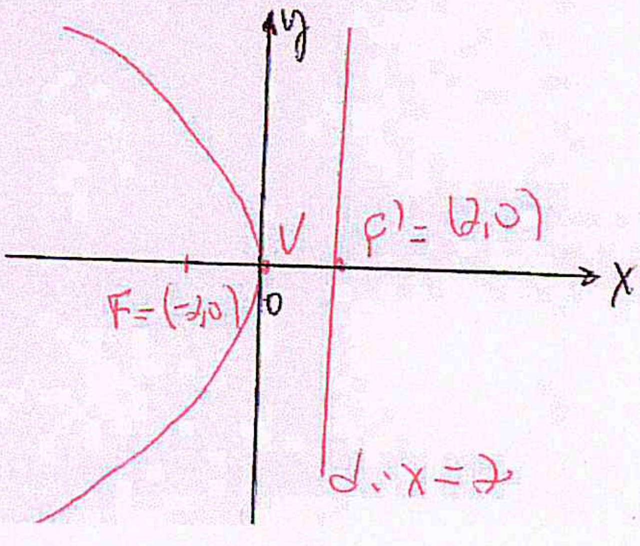
$$(\sqrt{24})^2 = 4p.(-3) \implies p = -2$$

Logo:

parábola: $y^2 = -8x$

foco: $F = (-2, 0)$

diretriz: **d:** $x = 2$



2.3.6 Problemas Propostos

Nos Problemas a seguir, as parábolas consideradas têm seu foco na origem do sistema de coordenadas.

1. Para cada uma das parábolas a seguir, determinar as coordenadas do foco, a equação da diretriz e fazer um esboço do gráfico.

(a) $y^2 = -100x$ **(b)** $x^2 = 10y$

(c) $y^2 = 4x$ **(d)** $x^2 = -16y$

(e) $y^2 = 12x$ **(f)** $y^2 + 8x = 0$

(g) $x^2 = 12y$ **(h)** $x^2 + 2y = 0$

2. Determinar a equação da parábola cujo foco é o ponto $F = (3, 0)$.

3. Determinar a equação da parábola cujo foco é o ponto $F = (0, -3)$.

4. Determinar a equação da parábola cuja diretriz é a reta **d:** $y - 5 = 0$.

5. Determinar a equação da parábola cuja diretriz é a reta **d:** $x + 5 = 0$.

6. Uma parábola cujo eixo é coincidente com o eixo O_x passa o pelo ponto $P = (-2, 4)$. Determinar sua equação, as coordenadas do seu foco e a equação de sua diretriz.

7. Uma corda da parábola $y^2 - 4x = 0$ se encontra sobre a reta **r:** $x - 2y + 3 = 0$. Determinar seu comprimento.

8. Determinar o comprimento da corda focal da parábola $x^2 + 8y = 0$ que é paralela à reta **r:** $3x + 4y - 7 = 0$.

9. Determinar o comprimento do raio focal do ponto que se encontra sobre a parábola $y^2 - 9x = 0$ e cuja ordenada é igual a 6.

10. Considere a circunferência cujo centro é o ponto $C = (4, -1)$ e que passa pelo foco da parábola $x^2 + 16y = 0$. Mostrar que esta circunferência é tangente à diretriz da parábola.

Respostas dos Problemas Propostos

secção 2.1.6, p.58

1.	**vértices**	**vértices**	**focos**	**eixo maior: 2a**	**eixo menor: 2b**	**excentricidade**
a	$(\pm 10, 0)$	$(0, \pm 6)$	$(\pm 8, 0)$	20	12	$\frac{4}{5}$
b	$(0, \pm 10)$	$(\pm 6, 0)$	$(0, \pm 8)$	20	12	$\frac{4}{5}$
c	$(0, \pm 3)$	$(\pm 2, 0)$	$(0, \pm\sqrt{5})$	6	4	$\frac{\sqrt{5}}{3}$
d	$(\pm 3, 0)$	$(0, \pm 2)$	$(\pm\sqrt{5}, 0)$	6	4	$\frac{\sqrt{5}}{3}$
e	$(\pm 5, 0)$	$(0, \pm 4)$	$(\pm 3, 0)$	10	8	$\frac{3}{5}$
f	$(\pm 5, 0)$	$(0, \pm 1)$	$(\pm\sqrt{24}, 0)$	10	2	$\frac{\sqrt{24}}{5}$
g	$(0, \pm 3)$	$(\pm\sqrt{5}, 0)$	$(0, \pm 2)$	6	$2\sqrt{5}$	$\frac{2}{3}$
h	$(\pm\frac{5}{2}, 0)$	$(0, \pm\frac{5}{3})$	$(\pm\frac{5\sqrt{5}}{6}, 0)$	5	$\frac{10}{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$
i	$(0, \pm 1)$	$(\pm\frac{1}{2}, 0)$	$(0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$	2	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
j	$(\pm\frac{1}{2}, 0)$	$(0, \pm\frac{1}{5})$	$(\pm\sqrt{\frac{21}{10}}, 0)$	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{\sqrt{21}}{5}$

2. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

3. $\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{20} = 1$

4. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$

5. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$ e $e = \frac{2\sqrt{10}}{7}$

6. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

7. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

secção 2.2.7, p.71

1.	vértices	focos	eixo maior: 2a	eixo menor: 2b	excentricidade
a	$(\pm 10, 0)$	$(\pm 2\sqrt{34}, 0)$	20	12	$\frac{\sqrt{34}}{5}$
b	$(0, \pm 6)$	$(0, \pm 2\sqrt{34})$	12	20	$\frac{\sqrt{34}}{3}$
c	$(\pm 2, 0)$	$(\pm\sqrt{13}, 0)$	4	6	$\frac{\sqrt{13}}{2}$
d	$(\pm 3, 0)$	$(\pm\sqrt{13}, 0)$	6	4	$\frac{\sqrt{13}}{3}$
e	$(0, \pm 2)$	$(0, \pm\sqrt{13})$	4	6	$\frac{\sqrt{13}}{2}$
f	$(\pm 2, 0)$	$(\pm\sqrt{5}, 0)$	4	2	$\frac{\sqrt{5}}{2}$
g	$(\pm 12, 0)$	$(\pm 13, 0)$	24	10	$\frac{13}{12}$
h	$(\pm 5, 0)$	$(\pm\sqrt{41}, 0)$	10	8	$\frac{\sqrt{41}}{5}$
i	$(0, \pm 4)$	$(0, \pm 4\sqrt{2})$	8	8	$\sqrt{2}$
j	$(\pm 1, 0)$	$(\pm 2, 0)$	2	$2\sqrt{3}$	2

2. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ e $e = \frac{3}{2}$

3. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$

4. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$ e $F = (0, \pm 6)$

5. $4x^2 - 5y^2 = 16$

6. $(3, 2)$ e $(-\frac{3}{2}, 1)$

7. $2x^2 - 9y^2 = 9$ ou $\frac{x^2}{\frac{9}{2}} - y^2 = 1$

8. 4 uc

9. $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

10. $y = \pm\sqrt{3}x$

11. $y = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}x$

secção 2.3.6, p.81

1.	foco	diretriz
a	(-25, 0)	d: $x = 25$
b	$\left(0, \frac{5}{2}\right)$	d: $y = -\frac{5}{2}$
c	(1, 0)	d: $x = -1$
d	(0, -4)	d: $y = 4$
e	(3, 0)	d: $x = -3$
f	(-2, 0)	d: $x = 2$
g	(0, 3)	d: $y = -3$
h	$(0, -\frac{1}{2})$	d: $y = \frac{1}{2}$

2. $y^2 = 12x$

3. $x^2 = -12y$

4. $x^2 = -20y$

5. $y^2 = 20x$

6. $y^2 = -8x$, $F = (-2, 0)$ e d: $x = 2$

7. $4\sqrt{5}$ uc

8. $\frac{25}{2}$ uc

9. $\frac{25}{4}$ uc