

Lista 16, Capítulo 11 - Geometria Analítica e Álgebra Linear

Profa. Roseli

Considere fixado um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.

1. Ache o cosseno do ângulo  $\theta$  entre as retas:

$$(a) \quad r: X = \left(-\frac{5}{2}, 2, 0\right) + \lambda\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) \qquad s: \begin{cases} 3x - 2y + 16 = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$$

$$(b) \quad r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = \sqrt{2}\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -5 + \sqrt{2}\lambda \end{cases}$$

$$(c) \quad r: \begin{cases} \frac{x+2}{3} = 3 - z \\ y = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} \frac{x+1}{2} = z + 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$(d) \quad r: x = \frac{1-y}{2} = \frac{z}{3} \qquad s: \begin{cases} 3x + y - 5z = 0 \\ 2x + 3y - 8z = 1 \end{cases}$$

2. Ache a medida em radianos do ângulo  $\theta$  entre a reta e o plano dados:

$$(a) \quad r: \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \qquad \Pi: z = 0$$

$$(b) \quad r: x = y = z \qquad \Pi: z = 0$$

$$(c) \quad r: X = (0, 0, 1) + \lambda(-1, 1, 0) \qquad \Pi: 3x + 4y = 0$$

$$(d) \quad r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \qquad \Pi: x + y - z - 1 = 0$$

$$(e) \quad r: \begin{cases} x + y = 2 \\ x = 1 + 2z \end{cases} \qquad \Pi: \frac{45}{7}x + y + 2z - 10 = 0$$

3. Ache a medida em radianos do ângulo  $\theta$  entre os planos:

(a)  $\Pi_1: 2x + y - z - 1 = 0$

$\Pi_2: x - y + 3z - 10 = 0$

(b)  $\Pi_1: X = (1, 0, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(-1, 0, 0)$

$\Pi_2: x + y + z = 0$

(c)  $\Pi_1: X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(1, 1, 1)$      $\Pi_2: X = (1, 0, 0) + \lambda(-1, 2, 0) + \mu(0, 1, 0)$

4. Ache a reta  $r$  que intercepta as retas  $s$  e  $t$  e forma ângulos congruentes com os eixos

coordenados, sabendo que  $s: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = -\frac{z}{3}$  e  $t: \begin{matrix} x = -1 + 5\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{matrix}$

5. Ache a reta  $h$  que passa pelo ponto  $P = (0, 2, 1)$  e forma ângulos congruentes com as retas:

$$\begin{array}{lll} r: & \begin{matrix} x = \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{matrix} & s: \begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 3 \end{matrix} & t: \begin{matrix} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3\lambda \end{matrix} \end{array}$$

6. Obtenha equações na forma simétrica da reta  $r$  que passa pelo ponto  $P = (1, -2, 3)$  e que forma ângulos de  $45^\circ$  e  $60^\circ$  respectivamente com os eixos dos  $x$  e dos  $y$ .

7. Ache uma reta  $t$  que passa por  $P = (1, 1, 1)$ , intercepta a reta  $r: \frac{x}{2} = y = z$  e forma com ela um ângulo  $\theta$  tal que  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

8. Ache um vetor diretor de uma reta paralela ao plano  $\Pi: x + y + z = 0$  e que forma um ângulo de  $45^\circ$  com o plano  $\Pi_1: x - y = 0$ .

9. Ache uma equação geral do plano  $\Pi$  que contém a reta  $r: \begin{matrix} x = z + 1 \\ y = z - 1 \end{matrix}$  e que forma um ângulo de  $\frac{\pi}{3}$  rad com o plano  $\Pi_1: x + 2y - 3z + 2 = 0$ .

10. Obtenha uma equação geral do plano  $\Pi$  que contém a reta  $r: \begin{matrix} 3z - x = 1 \\ y - 1 = 1 \end{matrix}$  e forma com a reta  $s: X = (1, 1, 0) + \lambda(3, 1, 1)$  um ângulo cuja medida em radianos é  $\theta = \arccos \frac{2\sqrt{30}}{11}$ .

# RESPOSTAS

1. (a)  $\cos \theta = \frac{20}{21}$

(b)  $\cos \theta = \frac{1}{2}, \quad \theta = 60^\circ$

(c)  $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \theta = 45^\circ$

(d)  $\cos \theta = 0, \quad \theta = 90^\circ$

2. (a)  $\theta = \frac{\pi}{4} \text{ rd}$  (b)  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$  (c)  $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{10}$  (d)  $\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$  (e)  $\theta = \frac{\pi}{6} \text{ rd}$

3. (a)  $\cos \theta = \frac{\sqrt{66}}{33}$  (b)  $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$  (c)  $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4. r:  $X = (\frac{5}{2}, 2, -\frac{3}{2}) + \lambda (1, 1, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

**ou** r:  $X = (-3, -\frac{5}{3}, 4) + \lambda (1, 1, -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

**ou** r:  $X = (\frac{7}{5}, \frac{19}{5}, -\frac{2}{5}) + \lambda (-1, 1, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

**ou** r:  $X = (\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}) + \lambda (-1, 1, -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

5. h:  $X = (0, 2, 1) + \lambda (1, -1, -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

**ou** h:  $X = (0, 2, 1) + \lambda (7, -1, -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

**ou** h:  $X = (0, 2, 1) + \lambda (3, -1, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

**ou** h:  $X = (0, 2, 1) + \lambda (3, 1, -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

6. r:  $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$

**ou** r:  $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-1}$

**ou** r:  $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$

**ou** r:  $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{-1}$

7. t:  $X = (1, 1, 1) + \lambda (4, -1, -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

**ou** t:  $X = (1, 1, 1) + \lambda (0, 1, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

8.  $(-2 + \sqrt{3}, 1, 1 - \sqrt{3})$  ou  $(-2 - \sqrt{3}, 1, 1 + \sqrt{3})$

9.  $\Pi : 2x - 3y + z - 5 = 0$  ou  $\Pi : 3x - y - 2z - 4 = 0$

10.  $\Pi : x + y - 3z - 1 = 0$  ou  $\Pi : x - y - 3z + 3 = 0$