UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"Júlio de Mesquita Filho"
Faculdade de Engenharia - Campus de Ilha Solteira
Profª Lilian Yuli Isoda - Depto. de Matemática

Geometria Analítica e Álgebra Linear

Lista de Exercícios 2 de Álgebra Linear

Dependência Linear.

1. Mostre que as matrizes $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ são LI.

2. Mostre que os polinômios: $p(x)=x^3-5x^2+1$, $q(x)=2x^4+5x-6$ e $r(x)=x^2-5x+2$ são LI.

3. Seja $P_3(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 3. Estude a dependência linear dos polinômios: $p(x)=x^3-3x^2+5x-1$, $q(x)=x^3-x^2+6x+2$ e $r(x)=x^3-7x^2+4x$.

4. Mostre que os vetores $u=(1,1,1)$, $v=(1,2,1)$ e $w=(2,1,2)$ do $\mathbb{R}^3$ são LD.

5. Verifique se os conjuntos A, B e C geram o mesmo subespaço do $\mathbb{R}^3$, sendo:

$A=\{(1,1,5);(2,3,13)\}$; $B=\{(1,-1,-2);(3,-2,-3)\}$; $C=\{(1,-1,-1);\ (4,-3,-1);\ (3,-1,3)\}$.

Justifique.

Base de um Espaço Vetorial

6. Seja $B=\{(2,1);(1,-1)\}$ uma base do $\mathbb{R}^2$. Encontre as coordenadas do vetor em relação à base B. Idem para $B'=\{(3,5)\ ;\ w=(1,1)\}$.

7. Mostre que os vetores $u=(1,1,1)$; $v=(1,2,3)$ e $w=(1,4,9)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$. Exprima cada um dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ como combinação linear de u, v e w.

8. Determinar as coordenadas do vetor $u=(4,-5,3)\in\mathbb{R}^3$ em relação às seguintes bases:

(a) canônica; **(b)** $\{(1,1,1),(1,2,0),(3,1,0)\}$; **(c)** $\{(1,2,1),(0,3,2),(1,1,4)\}$.

9. Mostre que os polinômios 1, $x-1$, x^2-3x+1 formam uma base de $P_2(\mathbb{R})$. Exprima o polinômio $p(x)=2x^2-5x+6$ como combinação linear dessa base.

10. Exiba uma base para cada um dos seguintes subespaços do $\mathbb{R}^4$:

(a) $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ / \ x=y=z=t\}$ **(b)** $G=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ / \ x=y \ \text{e} \ z=t\}$

(c) $H=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ / \ x=y=z\}$ **(d)** $K=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ / \ x+y+z+t=0\}$

Teorema da Invariância (Dimensão)

11. Obtenha uma base e a dimensão para o subespaço vetorial gerado por cada um dos seguintes conjuntos:

a) $\{(1,2,3,4);\ (3,4,7,10);\ (2,1,3,5)\}$

b) $\{(1,3,5);\ (-1,3,-1);\ (1,21,1)\}$

c) $\{(1,2,3);\ (1,4,9);\ (1,8,27)\}$

12. Determine uma base e a dimensão do subespaço vetorial W de $M_2(\mathbb{R})$, gerado pelos quatro vetores

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & -1\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}5 & 12\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 5\end{pmatrix}$.

b) $A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 5\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -5 & 7\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}1 & -7\\ -5 & 1\end{pmatrix}$.

13. Considere o subespaço U do $\mathbb{R}^3$ definido por $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ x-2y+4z=0\}$. Obtenha uma base $B=\{u_1,\ u_2,\ u_3\}\subset\mathbb{R}^3$ tal que u_1 e u_2 pertençam a U.

Dica: Teorema do Completamento

Método Prático para Determinação de Bases de um Subespaço do $\mathbb{R}^n$

14. Dar uma base e a dimensão do subespaço W de $\mathbb{R}^4$ sendo

$$W=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ / \ x-y=y \ \text{e} \ x-3y+t=0\}.$$

15. Sendo W e U subespaços do $\mathbb{R}^4$ de dimensão 3, que dimensões pode ter $W+U$ se $(1,2,1,0);\ (-1,1,0,1);\ (1,5,2,1)$ é um sistema de geradores de $W\cap U$?

16. Sendo W o subespaço do Exercício 17 e U o subespaço do $\mathbb{R}^4$ gerado por $(1,2,1,3)$ e $(3,1,-1,4)$, determinar uma base e a dimensão de $U+W$ e de $U\cap W$.

17. Achar uma base e a dimensão dos seguintes subespaços do $\mathbb{R}^4$:

(a) $U=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ / \ x-y=0 \ \text{e} \ x+2y+t=0\}$,

(b) $V=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ / x-y+z=-2t \ \text{e} \ x+2y+t=0\}$.

18. No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ consideremos os seguintes subespaços: $U=\{(x,y,z) \ / \ x=0\}$, $V=\{(x,y,z) \ / \ y-2z=0\}$ e $W=[(1,1,0),(0,0,2)]$. Determine uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços: U, V, W, $U\cap V$, $V+W$ e $U+V+W$.

19. Mostre que os polinômios 1, $1+t$, $1-t^2$ e $1-t-t^2-t^3$ formam uma base de $P_3(\mathbb{R})$.

20. Mostre que o conjunto B forma uma base de $M_2(\mathbb{R})$:

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\right\}.$$

21. Determinar uma base e a dimensão do espaço solução de cada um dos sistemas lineares homogêneos:

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \\ 6x + y = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 0 \\ x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - y - z - t = 0 \\ 3x - y + 2z - 4t = 0 \\ 2y + 5z + t = 0 \end{cases}$

22. Ache uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços do $\mathbb{R}^3$:
$U=\{(x,y,z) \ / \ x+y+z=0\}$, $V=\{(x,y,z) \ / \ x=y=z\}$ e $W=\{(x,y,z) \ / \ z=3x\}$.

23. Seja W o subespaço do $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores $u_1=(1,2,-1,3,4)$; $u_2=(2,4,-2,6,8)$; $u_3=(1,3,2,2,6)$; $u_4=(1,4,5,1,8)$ e $u_5=(2,7,3,3,9)$. Encontre uma base para W.

24. Encontre $dim(U+W)$ e $dim(U\cap W)$, sendo que U e W são os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^4$: $U=[(1,1,0,-1),(1,2,3,0),(2,3,3,-1)]$ e $W=[(1,2,2,-1),(2,3,2,-3),(1,3,4,-3)]$.

25. Sejam $U=\{(x,y,z,t) \ / \ y+z+t=0\}$ e $W=\{(x,y,z,t) \ / \ x+y=0,\ z=2t\}$ dois subespaços do $\mathbb{R}^4$. Ache uma base e a dimensão de U, W, $U\cap W$ e $U+W$.

Mudança de Base

26. Considere a base $D=\{1,1-t,1-t2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$. Encontre a matrizes de mudança das bases $M_{C,D}$ e $M_{D,C}$, sendo C a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$.

27. Determine a base B do $\mathbb{R}^2$, sabendo que a matriz de mudança de base $M_{B,D}$ é $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, sendo $D=\{(1,1);\ (0,2)\}$.

28. Seja $B=\{1+t, 1-t2\}$ uma base de $P_2(\mathbb{R})$. Determine a base D, sabendo que a matriz de mudança da base é $M_{B,D}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

29. Considere as bases $B=\{e_1, e_2, e_3\}$ e $D=\{g_1, g_2, g_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ assim relacionadas:

$$\begin{aligned} g_1 &= e_1 - e_2 - e_3 \\ g_2 &= 2e_2 + 3e_3 \\ g_3 &= 3e_1 + e_3 \end{aligned}.$$

a) Determine as matrizes de mudança de base $M_{B,D}$ e $M_{D,B}$.

b) Se um vetor **u** de $\mathbb{R}^3$ apresenta coordenadas 1, 2 e 3 em relação a B, quais são as coordenadas de **u** relativamente a D?

30. Considere o seguinte subespaço vetorial de $M_2(\mathbb{R})$: $U=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \ / \ x-y-z=0\right\}$.

a) Mostrar que os seguintes subconjuntos de $M_2(\mathbb{R})$ são bases de U:

$$B=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{e} \quad D=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

<u>Importante:</u> Não esqueça de verificar que todas as matrizes pertencem ao subespaço U.

b) Achar as matrizes mudança de base $M_{B,D}$ e $M_{D,B}$.

c) Achar uma base E de U de tal maneira que a matriz de mudança de base $M_{E,B}$ seja

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Junho/2016