

Theoriesammlung Analysis 2

Danilo Bargaen

7. Juli 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Integralrechnung	3
1.1	Definition des Integrals	3
1.2	Summenformeln	3
1.3	Graphische Interpretation von Integralen	3
1.4	Vorzeichenregeln und Additivität	3
1.5	Linearitätsregeln für Integrale	4
1.6	Numerische Berechnung von Integralen	4
1.6.1	Trapezregel	4
1.6.2	Simpson-Regel	4
1.7	Integralfunktion	5
1.8	Zusammenhang verschiedener Integralfunktionen	5
2	Fouriertransformation	5
2.1	Lineares System	5
2.2	Zeitinvarianz	5
2.3	Linearkombinationen gleichperiodischer Funktionen	6
2.4	Fourier-Entwicklung periodischer Funktionen	6
2.4.1	Sinus-Kosinus-Form	6
2.4.2	Spektral-Form	6
2.5	Koordinatentransformation Kartesisch / Polar	7
2.6	Fourierreihen	7
2.7	Kriterium von Dirichlet	7
2.8	Fourierreihen gerader und ungerader Signale	8
2.9	Linearität der Fourierkoeffizienten	8
2.10	Spiegelung des Signalgraphen an der Ordinatenachse (Zeitumkehr)	9
2.11	Zeitskalierung	9
2.12	Zeitverschiebung	10
3	Differentialgleichungen	11

1 Integralrechnung

1.1 Definition des Integrals

Die Definition des Integrals lautet

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x \right)$$

mit

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

und

$$x_i = a + i \cdot \Delta x$$

1.2 Summenformeln

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

1.3 Graphische Interpretation von Integralen

Wir betrachten das Integral

$$\int_a^b f$$

Wir nennen die Fläche, welche horizontal durch zwei Abszissen und vertikal durch die Abszissenachse und den Funktionsgraphen begrenzt sind als *Fläche unter dem Funktionsgraphen*. Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

- Wenn $a < b$ ist:
Dann sind Flächen unter Funktionsgraphen mit positiver Ordinate positiv und solche mit negativen Ordinaten negativ zu zählen.
- Wenn $a > b$ ist:
Dann sind Flächen unter Funktionsgraphen mit positiver Ordinate negativ und solche mit negativen Ordinaten positiv zu zählen.

1.4 Vorzeichenregeln und Additivität

Falls die beteiligten Integrale existieren, gilt

- Vertauschen der Integralgrenzen ändert das Vorzeichen des Integrals

$$\int_a^b f = - \int_b^a f$$

- Aneinanderstossende Integrale können zusammengefasst werden.

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

1.5 Linearitätsregeln für Integrale

Seien f und g auf dem Intervall $[a; b]$ integrierbare Funktionen und c eine Konstante. Dann gelten die beiden Linearitätsgesetze:

$$\int_a^b (f + g) = \left(\int_a^b f \right) + \left(\int_a^b g \right)$$

$$\int_a^b (c \cdot f) = c \int_a^b f$$

1.6 Numerische Berechnung von Integralen

1.6.1 Trapezregel

Die allgemeine Formel für die Trapezregel lautet:

$$\int_a^b f = \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right] \Delta x$$

mit

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ und } x_i = a + i \cdot \Delta x$$

1.6.2 Simpson-Regel

Sei f eine auf $[a; b]$ viermal differenzierbare Funktion und n eine gerade Zahl. Ferner sei

$$x_i = a + i \cdot \Delta x \text{ mit } \Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ und } y_i = f(x_i)$$

Dann ist

$$S_n = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 4y_{n-1} + y_n)$$

$$= \frac{\Delta x}{3} \left(y_0 + y_n + 4 \sum_{k=1}^{n/2} y_{2k-1} + 2 \sum_{k=1}^{n/2-1} y_{2k} \right)$$

eine Schätzung für das Integral $\int_a^b f$, wobei der Fehler

$$E_n = \left(\int_a^b f \right) - S_n = \frac{b-a}{180} \Delta x^4 f^{(4)}(\xi) = \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)$$

für ein $\xi \in [a; b]$

beträgt.

1.7 Integralfunktion

Gegeben sei eine auf dem Intervall $[a; b]$ integrierbare Funktion f . Dann heisst jede Funktion der Form

$$x \mapsto \int_c^x f$$

für eine Konstante $c \in [a; b]$ eine *Integralfunktion* von f .

1.8 Zusammenhang verschiedener Integralfunktionen

Verschiedene Integralfunktionen derselben Funktion unterscheiden sich nur durch eine Konstante. Wenn also

$$\varphi_c := x \mapsto \int_c^x f \text{ und } \varphi_d := x \mapsto \int_d^x f$$

dann gilt

$$\varphi_d = \varphi_c + k \text{ wobei } k \text{ konstant}$$

2 Fouriertransformation

2.1 Lineares System

Ein System S heisst linear, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind:

- Die Antwort einer Summe von Signalen ist gleich der Summe der Antworten auf die Summanden. Wenn also x_1 und x_2 Signale sind, so gilt

$$S(x_1 + x_2) = S(x_1) + S(x_2)$$

- Die Antwort auf ein mit einer Konstanten multipliziertes (verstärktes) Signal ist das Produkt dieser Konstante mit der Antwort des Signals. Wenn also x ein Signal und c eine Konstante ist, dann gilt

$$S(cx) = cS(x)$$

2.2 Zeitinvarianz

Sei S ein System, x ein beliebiges Eingangssignal und

$$\tilde{x} = t \mapsto x(t - \tau)$$

das um τ verzögerte Eingangssignal. Dann ist die Antwort auf das verzögerte Eingangssignal

$$\tilde{y} = S(\tilde{x})$$

Ferner sei

$$y = S(x)$$

die Antwort des Systems auf das Eingangssignal und

$$\hat{y} := t \mapsto y(t - \tau)$$

die verzögerte Antwort auf das Eingangssignal. Nun heisst S *zeitinvariant*, wenn

$$\tilde{y} = \hat{y}$$

2.3 Linearkombinationen gleichperiodischer Funktionen

Linearkombinationen periodischer Funktionen derselben Periode sind ebenfalls periodisch mit dieser Periode. Oder formal: Seien f und g zwei Funktionen mit derselben Periode p und a sowie b zwei Konstanten. Dann ist auch die Funktion

$$af + bg$$

periodisch mit der Periode p .

2.4 Fourier-Entwicklung periodischer Funktionen

2.4.1 Sinus-Kosinus-Form

Wir betrachten ein stückweise stetiges, mit der Grundperiode T periodisches Signal s . Dann heisst die Funktion

$$f_n := t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)]$$

mit

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(k\omega_1 t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(k\omega_1 t) dt$$

für $k \in \{1 \dots n\}$ seine *Fourierentwicklung* der Ordnung n .

ω_1 heisst die *Grundkreisfrequenz*, a_0 die *Konstante*, a_k und b_k die *Koeffizienten*.

2.4.2 Spektral-Form

Neben dieser sogenannten *Sinus-Kosinus-Form* gibt es die für die Praxis wichtigere *Amplituden-Phasen-Form* oder *Spektral-Form*

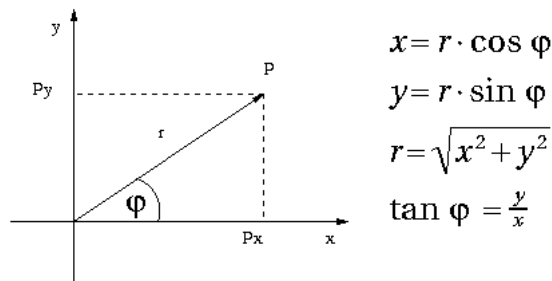
$$f_n := t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k)$$

Die Bestimmungsstücke der Amplituden-Phasen-Form können nicht direkt berechnet werden, sondern auf dem Umweg über die Koeffizienten der Sinus-Kosinus-Form. Dabei gilt folgender Zusammenhang:

- $A_0 = a_0$
- Ein Punkt in der Ebene, der die kartesischen Koordinaten (a_k, b_k) hat, hat die Polarkoordinaten (A_k, φ_k)

2.5 Koordinatentransformation Kartesisch / Polar

Koordinaten aus dem Kartesischen- oder Polarkoordinatensystem können folgendermassen transformiert werden:



Der Radius r aus dem Polarkoordinatensystem entspricht dabei A in der Spektralform einer Fourierentwicklung.

Um den Winkel φ im Intervall $(-\pi, \pi]$ zu berechnen, gibt es mehrere Möglichkeiten. Mithilfe des Arkustangens:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{für } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{für } x < 0, y < 0 \\ +\pi/2 & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

Falls man den Radius r bzw. A schon weiss, kann man auch den Arkuskosinus verwenden:

$$\varphi = \begin{cases} +\arccos \frac{x}{r} & \text{für } y \geq 0 \\ -\arccos \frac{x}{r} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

2.6 Fourierreihen

Die Funktion

$$\begin{aligned}
 f &:= t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)] \\
 &= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k)
 \end{aligned}$$

heisst die *Fourierreihe* von s .

2.7 Kriterium von Dirichlet

Sei s ein mit T periodisches Signal, das innerhalb einer Periode aus endlich vielen stetigen Stücken zusammengesetzt ist. Dann konvergieren die Werte der Fourierreihe f und zwar

- an Stellen t , an denen das Signal stetig ist, gegen den Signalwert

$$f(t) = s(t)$$

- an Stellen t , an denen das Signal nicht stetig ist, gegen den Mittelwert der beiden einseitigen Grenzwerte

$$f(t) = \frac{\lim_{\tau \rightarrow t-} (f(\tau)) + \lim_{\tau \rightarrow t+} (f(\tau))}{2}$$

2.8 Fourierreihen gerader und ungerader Signale

Ein gerades, mit der Periode T periodisches Signal g besitzt eine reine Kosinusreihe

$$f_g := t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t)] \quad \text{mit } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

wobei

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} g(t) \cos(k\omega_1 t) dt$$

gilt.

Ein ungerades, mit der Periode T periodisches Signal u besitzt eine reine Sinusreihe

$$f_u := t \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} [b_k \sin(k\omega_1 t)] \quad \text{mit } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

wobei

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \sin(k\omega_1 t) dt$$

gilt.

2.9 Linearität der Fourierkoeffizienten

s_1 und s_2 seien zwei Signale mit derselben Periode T . Die Konstanten ihrer Fourierreihen seien $a_{1,0}$ beziehungsweise $a_{2,0}$ und die Koeffizienten $a_{1,k}$, $b_{1,k}$ beziehungsweise $a_{2,k}$, $b_{2,k}$.

Dann ist die Summe beiden Signale

$$s = s_1 + s_2$$

periodisch mit derselben Periode und für die Konstante a_0 , sowie die Koeffizienten a_k und b_k ihrer Fourierreihe gelten folgende Beziehungen:

$$a_0 = a_{1,0} + a_{2,0}$$

$$a_k = a_{1,k} + a_{2,k}$$

$$b_0 = b_{1,k} + b_{2,k}$$

Ist ferner c eine Konstante, so hat auch das Signal

$$\tilde{s} = c \cdot s$$

dieselbe Periode T , und die Konstante und Koeffizienten der Fourierentwicklung sind

$$\tilde{a}_0 = c \cdot a_0$$

$$\tilde{a}_k = c \cdot a_k$$

$$\tilde{b}_k = c \cdot b_k$$

2.10 Spiegelung des Signalgraphen an der Ordinatenachse (Zeitumkehr)

Das Signal s sei periodisch mit der Periode T und seine Fourierreihe sei

$$\begin{aligned} f &:= t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)] \\ &= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \phi_k) \text{ mit } \omega_1 = \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

Dann hat das Signal

$$\tilde{s} := t \mapsto s(-t)$$

die Fourierreihe

$$\begin{aligned} \tilde{f} &:= t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) - b_k \sin(k\omega_1 t)] \\ &= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \phi_k) \end{aligned}$$

Merke: Durch die Spiegelung an der Ordinatenachse ändern die Koeffizienten der Sinusglieder und die Phasen das Vorzeichen, während alle anderen Bestimmungstücke unverändert bleiben.

2.11 Zeitskalierung

Das Signal s sei periodisch mit der Periode T und seine Fourierreihe sei

$$\begin{aligned} f &:= t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)] \\ &= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \phi_k) \text{ mit } \omega_1 = \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

Dann hat das Signal

$$\tilde{s} := t \mapsto s(ct) \text{ für } c > 0$$

die Fourierreihe

$$\begin{aligned} \tilde{f} &:= t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_2 t) + b_k \sin(k\omega_2 t)] \\ &= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_2 t - \phi_k) \end{aligned}$$

wobei

$$\omega_2 = c\omega_1$$

ist.

Merke: Durch die zeitliche Skalierung ändert einzige die Grundkreisfrequenz, während die Fourierkoeffizienten, die Amplituden und die Phasen unverändert bleiben.

2.12 Zeitverschiebung

Das Signal s sei periodisch mit der Periode T und seine Fourierreihe sei

$$\begin{aligned} f &:= t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)] \\ &= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \phi_k) \text{ mit } \omega_1 = \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

Dann hat das Signal

$$\tilde{s} := t \mapsto s(t - \tau)$$

die Fourierreihe

$$\begin{aligned} t &\mapsto \tilde{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\tilde{a}_k \cos(k\omega_1 t) + \tilde{b}_k \sin(k\omega_1 t)] \\ &= t \mapsto \tilde{A}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \cos(k\omega_1 t - \tilde{\phi}_k) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 &= a_0 \\ \tilde{a}_k &= a_k \cos(k\gamma) - b_k \sin(k\gamma) \\ \tilde{b}_k &= a_k \sin(k\gamma) + b_k \cos(k\gamma) \\ \tilde{A}_k &= A_k \\ \tilde{\phi}_k &= \phi_k + k\gamma \end{aligned}$$

wobei

$$\gamma = \frac{\tau}{T} \times 2\pi$$

ist.

Merke: Bei einer zeitlichen Verzögerung des Signals ändern nur die Phasen, während die Konstante und die Amplituden gleich bleiben.

Stand Dokument: Bis und mit Kapitel 4.2.3

3 Differentialgleichungen

...