Theoriesammlung Analysis 2

Danilo Bargen

6. April 2011

HSR
HOCHSCHULE FÜR TECHNIK
RAPPERSWIL

Inhaltsverzeichnis

1 Integralrechnung

1.1 Definition des Integrals

Die Definition des Integrals lautet

$$\int_a^b f = \lim_{n \mapsto \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x \right)$$

mit

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

und

$$x_i = a + i \cdot \Delta x$$

1.2 Summenformeln

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

1.3 Graphische Interpretation von Integralen

Wir betrachten das Integral

$$\int_a^b f$$

Wir nennen die Fläche, welche horizontal durch zwei Abszissen und vertikal durch die Abszissenachse und den Funktionsgraphen begrenzt sind als *Fläche unter dem Funktionsgraphen.* Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

- Wenn $a < b$ ist:
  Dann sind Flächen unter Funktionsgraphen mit positiver Ordinate positiv und solche mit negativen Ordinaten negativ zu zählen.
- Wenn $a > b$ ist:
  Dann sind Flächen unter Funktionsgraphen mit positiver Ordinate negativ und solche mit negativen Ordinaten positiv zu zählen.

1.4 Vorzeichenregeln und Additivität

Falls die beteiligten Integrale existieren, gilt

- Vertauschen der Integralgrenzen ändert das Vorzeichen des Integrals

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

- Aneinanderstossende Integrale können zusammengefasst werden.

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

1.5 Linearitätsregeln für Integrale

Seien f und g auf dem intervall $[a;b]$ integrierbare Funktionen und c eine Konstante. Dann gelten die beiden Linearitätsgesetze:

$$\int_a^b (f+g) = \left(\int_a^b f\right) + \left(\int_a^b g\right)$$

$$\int_a^b (c \cdot f) = c \int_a^b f$$

1.6 Numerische Berechnung von Integralen

1.6.1 Trapezregel

Die allgemeine Formel für die Trapezregel lautet:

$$\int_a^b f = \left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] \Delta x$$

mit

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ und } x_i = a + i \cdot \Delta x$$

1.6.2 Simpson-Regel

Sei f eine auf $[a;b]$ viermal differenzierbare Funktion und n eine gerade Zahl. Ferner sei

$$x_i = a + i \cdot \Delta x \text{ mit } \Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ und } y_i = f(x_i)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + ... + 4y_{n-1} + y_n) \\ &= \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + y_n + 4\sum_{k=1}^{n/2} y_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} y_{2k}\right) \end{aligned}$$

eine Schätzung für das Integral $\int_a^b f$, wobei der Fehler

$$E_n = \left(\int_a^b f\right) - S_n = \frac{b-a}{180}\Delta x^4 f^{(4)}(\xi) = \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)$$

$$\text{für ein } \xi \in [a;b]$$

beträgt.

1.7 Integralfunktion

Gegeben sei eine auf dem Intervall $[a; b]$ integrierbare Funktion f. Dann heisst jede Funktion der Form

$$x \mapsto \int\limits_c^x f$$

für eine Konstante $c \in [a; b]$ eine *Integralfunktion* von f.

1.8 Zusammenhang verschiedener Integralfunktionen

Verschiedene Integralfunktionen derselben Funktion unterscheiden sich nur durch eine Konstante. Wenn also

$$\varphi_c := x \mapsto \int\limits_c^x f \text{ und } \varphi_d := x \mapsto \int\limits_d^x f$$

dann gilt

$$\varphi_d = \varphi_c + k \text{ wobei } k \text{ konstant}$$

2 Fouriertransformation

2.1 Lineares System

Ein System S heisst linear, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind:

- Die Antwort einer Summe von Signalen ist gleich der Summe der Antworten auf die Summanden. Wenn also $x1$ und $x2$ Signale sind, so gilt

$$S(x_1 + x_2) = S(x_1) + S(x_2)$$

- Die Antwort auf ein mit einer Konstanten multipliziertes (verstärktes) Signal ist das Produkt dieser Konstante mit der Antwort des Signals. Wenn also x ein Signal und c eine Konstante ist, dann gilt

$$S(cx) = cS(x)$$

2.2 Zeitinvarianz

Sei S ein System, x ein beliebiges Eingangssignal und

$$\tilde{x} = t \mapsto x(t - \tau)$$

das um τ verzögerte Eingangssignal. Dann ist die Antwort auf das verzögerte Eingangssignal

$$\tilde{y} = S(\tilde{x})$$

Ferner sei

$$y = S(x)$$

die Antwort des Systems auf das Eingangssignal und

$$\hat{y} := t \mapsto y(t - \tau)$$

die verzögerte Antwort auf das Eingangssignal. Nun heisst S *zeitinvariant*, wenn

$$\tilde{y} = \hat{y}$$

2.3 Linearkombinationen gleichperiodischer Funktionen

Linearkombinationen periodischer Funktionen derselben Periode sind ebenfalls periodisch mit dieser Periode. Oder formal: Seien f und g zwei Funktionen mit derselben Periode p und a sowie b zwei Konstanten. Dann ist auch die Funktion

$$af + bg$$

periodisch mit der Periode p.

2.4 Fourier-Entwicklung periodischer Funktionen

2.4.1 Sinus-Kosinus-Form

Wir betrachten ein stückweise stetiges, mit der Grundperiode T periodisches Signal s. Dann heisst die Funktion

$$f_n := t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)]$$

mit

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t)dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(k\omega_1 t)dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(k\omega_1 t)dt$$

für $k \in \{1...n\}$ seine *Fourierentwicklung* der Ordnung n.

ω_1 heisst die *Grundkreisfrequenz*, a_0 die *Konstante*, a_k und b_k die *Koeffizienten.*

2.4.2 Spektral-Form

Neben dieser sogenannten *Sinus-Kosinus-Form* gibt es die für die Praxis wichtigere *Amplituden-Phasen-Form* oder *Spektral-Form*

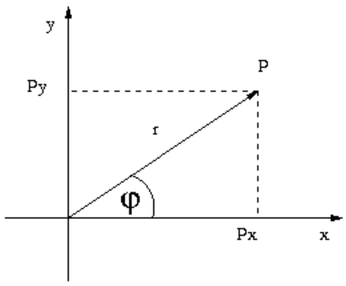
$$f_n := t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k)$$

Die Bestimmungsstücke der Amplituden-Phasen-Form können nicht direkt berechnet werden, sondern auf dem Umweg über die Koeffizienten der Sinus-Kosinus-Form. Dabei gilt folgender Zusammenhang:

- $A_0 = a_0$
- Ein Punkt in der Ebene, der die kartesischen Koordinaten (a_k, b_k) hat, hat die Polarkoordinaten (A_k, φ_k)

2.5 Koordinatentransformation Kartesisch / Polar

Koordinaten aus dem Kartesischen- oder Polarkoordinatensystem können folgendermassen transformiert werden:



$$x = r \cdot \cos \varphi$$
$$y = r \cdot \sin \varphi$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\tan \varphi = \frac{y}{x}$$

Der Radius r aus dem Polarkoordinatensystem entspricht dabei A in der Spektralform einer Fourierentwicklung.

Um den Winkel φ im Interval $(-\pi, \pi]$ zu berechnen, gibt es mehrere Möglichkeiten. Mithilfe des Arkustangens:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{für } x < 0,\ y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{für } x < 0,\ y < 0 \\ +\pi/2 & \text{für } x = 0,\ y > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Oder alternativ mithilfe des Arkuskosinus:

$$\varphi = \begin{cases} +\arccos \frac{x}{r} & \text{für } y \geq 0 \\ -\arccos \frac{x}{r} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

2.6 Fourierreihen

Die Funktion

$$\begin{aligned} f &:= t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)\right] \\ &= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k) \end{aligned}$$

heisst die *Fourierreihe* von s.

2.7 Kriterium von Dirichlet

Sei s ein mit T periodisches Signal, das innerhalb einer Periode aus endlich vielen stetigen Stücken zusammengesetzt ist. Dann konvergieren die Werte der Fourierreihe f und zwar

- an Stellen t, an denen das Signal stetig ist, gegen den Signalwert

$$f(t) = s(t)$$

- an Stellen t, an denen das Signal nicht stetig ist, gegen den Mittelwert der beiden einseitigen Grenzwerte

$$f(t) = \frac{\lim\limits_{\tau \mapsto t-} (f(\tau)) + \lim\limits_{\tau \mapsto t+} (f(\tau))}{2}$$

2.8 Fourierreihen gerader und ungerader Signale

Ein gerades, mit der Periode T periodisches Signal g besitzt eine reine Kosinusreihe

$$f_g := t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t)] \text{ mit } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

wobei

$$a_k = \frac{4}{T} \int\limits_0^{T/2} g(t) \cos(k\omega_1 t) dt$$

gilt.

Ein ungerades, mit der Periode T periodisches Signal u besitzt eine reine Sinusreihe

$$f_u := t \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} [b_k \sin(k\omega_1 t)] \text{ mit } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

wobei

$$b_k = \frac{4}{T} \int\limits_0^{T/2} u(t) \sin(k\omega_1 t) dt$$

gilt.

2.9 Linearität der Fourierkoeffizienten

s_1 und s_2 seien zwei Signale mit derselben Periode T. Die Konstanten ihrer Fourierreihen seien $a_{1,0}$ beziehungsweise $a_{2,0}$ und die Koeffizienten $a_{1,k}$, $b_{1,k}$ beziehungsweise $a_{2,k}$, $b_{2,k}$.

Dann ist die Summe beiden Signale

$$s = s_1 + s_2$$

periodisch mit derselben Periode und für die Konstante a_0, sowie die Koeffizienten a_k und b_k ihrer Fourierreihe gelten folgende Beziehungen:

$$a_0 = a_{1,0} + a_{2,0}$$

$$a_k = a_{1,k} + a_{2,k}$$

$$b_0 = b_{1,k} + b_{2,k}$$

Ist ferner c eine Konstante, so hat auch das Signal

$$\tilde{s} = c \cdot s$$

dieselbe Periode T, und die Konstante und Koeffizienten der Fourierentwicklung sind

$$\tilde{a_0} = c \cdot a_0$$

$$\tilde{a_k} = c \cdot a_k$$

$$\tilde{b_x} = c \cdot b_k$$

Stand Dokument: Bis und mit Kapitel 4.2.3

3 Differentialgleichungen

...