

# Theoriesammlung Analysis 2

Danilo Bargaen

21. August 2011

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Integralrechnung</b>	<b>3</b>
1.1	Definition des Integrals . . . . .	3
1.2	Summenformeln . . . . .	3
1.3	Graphische Interpretation von Integralen . . . . .	3
1.4	Vorzeichenregeln und Additivität . . . . .	3
1.5	Numerische Berechnung von Integralen . . . . .	4
1.5.1	Trapezregel . . . . .	4
1.5.2	Fassregel . . . . .	4
1.5.3	Simpson-Regel . . . . .	4
1.6	Integralfunktion . . . . .	5
1.7	Zusammenhang verschiedener Integralfunktionen . . . . .	5
1.8	Hauptsatz der Infinitesimalrechnung . . . . .	5
1.9	Stammfunktion . . . . .	5
1.10	Unbestimmtes Integral . . . . .	5
1.11	Integralfunktion - Stammfunktion . . . . .	5
1.12	Berechnung von Integralen mit Hilfe von Stammfunktionen . . . . .	6
1.13	Linearitätsregeln von Integralen . . . . .	6
1.14	Integrale von Verkettungen mit linearen Funktionen . . . . .	6
1.15	Integral des Produktes mit der eigenen Ableitung . . . . .	6
1.16	Fläche zwischen Funktionsgraphen . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Fouriertransformation</b>	<b>6</b>
2.1	Linearkombinationen gleichperiodischer Funktionen . . . . .	6
2.2	Fourier-Entwicklung periodischer Funktionen . . . . .	7
2.2.1	Sinus-Kosinus-Form . . . . .	7
2.2.2	Spektral-Form . . . . .	7
2.3	Koordinatentransformation Kartesisch / Polar . . . . .	7
2.4	Fourierreihen . . . . .	8
2.5	Kriterium von Dirichlet . . . . .	8
2.6	Fourierreihen gerader und ungerader Signale . . . . .	9
2.7	Linearität der Fourierkoeffizienten . . . . .	9
2.8	Spiegelung des Signalgraphen an der Ordinatenachse (Zeitumkehr) . . . . .	10
2.9	Zeitskalierung . . . . .	10
2.10	Zeitverschiebung . . . . .	11
2.11	Fourierintegral . . . . .	11
2.12	Satz von Dirichlet . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Differenzialgleichungen</b>	<b>12</b>
3.1	Die Differenzialgleichung . . . . .	12
3.1.1	Explizite Differenzialgleichungen . . . . .	12
3.1.2	Separierbare Differenzialgleichung . . . . .	12
3.1.3	Lineare Differenzialgleichung . . . . .	13
3.2	Methode von Euler . . . . .	13
3.3	Verfahren von Runge-Kutta . . . . .	13
3.4	Linearität der Lösungen homogener lineare Differenzialgleichungen . . . . .	14
3.5	Allgemeine Lösung der homogene Lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung . . . . .	14
3.6	Inhomogene lineare Differenzialgleichungen . . . . .	15

# 1 Integralrechnung

## 1.1 Definition des Integrals

Die Definition des Integrals lautet

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x \right)$$

mit

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

und

$$x_i = a + i \cdot \Delta x$$

## 1.2 Summenformeln

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

## 1.3 Graphische Interpretation von Integralen

Wir betrachten das Integral

$$\int_a^b f$$

Wir nennen die Fläche, welche horizontal durch zwei Abszissen und vertikal durch die Abszissenachse und den Funktionsgraphen begrenzt sind als *Fläche unter dem Funktionsgraphen*. Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

- Wenn  $a < b$  ist:  
Dann sind Flächen unter Funktionsgraphen mit positiver Ordinate positiv und solche mit negativen Ordinaten negativ zu zählen.
- Wenn  $a > b$  ist:  
Dann sind Flächen unter Funktionsgraphen mit positiver Ordinate negativ und solche mit negativen Ordinaten positiv zu zählen.

## 1.4 Vorzeichenregeln und Additivität

Falls die beteiligten Integrale existieren, gilt

- Vertauschen der Integralgrenzen ändert das Vorzeichen des Integrals

$$\int_a^b f = - \int_b^a f$$

- Aneinanderstossende Integrale können zusammengefasst werden.

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

## 1.5 Numerische Berechnung von Integralen

### 1.5.1 Trapezregel

Die allgemeine Formel für die Trapezregel lautet:

$$\int_a^b f = \left[ \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right] \Delta x$$

mit

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ und } x_i = a + i \cdot \Delta x$$

### 1.5.2 Fassregel

Bei der Fassregel wird die zu integrierende Funktion  $\int_a^b$  mit einer quadratischen Funktion, die durch die Punkte  $a$ ,  $b$  und  $\frac{b-a}{2}$  geht, approximiert.

$$\int_a^b f \approx \int_a^b q = \frac{y_a + 4y_m + y_b}{3} \Delta x$$

wobei

$$y_a = f(a), y_m = f\left(\frac{a+b}{2}\right), y_b = f(b), \Delta x = \frac{b-a}{2}$$

### 1.5.3 Simpson-Regel

Sei  $f$  eine auf  $[a; b]$  viermal differenzierbare Funktion und  $n$  eine gerade Zahl. Ferner sei

$$x_i = a + i \cdot \Delta x \text{ mit } \Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ und } y_i = f(x_i)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 4y_{n-1} + y_n) \\ &= \frac{\Delta x}{3} \left( y_0 + y_n + 4 \sum_{k=1}^{n/2} y_{2k-1} + 2 \sum_{k=1}^{n/2-1} y_{2k} \right) \end{aligned}$$

eine Schätzung für das Integral  $\int_a^b f$ , wobei der Fehler

$$E_n = \left( \int_a^b f \right) - S_n = \frac{b-a}{180} \Delta x^4 f^{(4)}(\xi) = \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)$$

für ein  $\xi \in [a; b]$

beträgt.

## 1.6 Integralfunktion

Gegeben sei eine auf dem Intervall  $[a; b]$  integrierbare Funktion  $f$ . Dann heisst jede Funktion der Form

$$x \mapsto \int_c^x f$$

für eine Konstante  $c \in [a; b]$  eine *Integralfunktion* von  $f$ .

## 1.7 Zusammenhang verschiedener Integralfunktionen

Verschiedene Integralfunktionen derselben Funktion unterscheiden sich nur durch eine Konstante. Wenn also

$$\varphi_c := x \mapsto \int_c^x f \text{ und } \varphi_d := x \mapsto \int_d^x f$$

dann gilt

$$\varphi_d = \varphi_c + k \text{ wobei } k \text{ konstant}$$

## 1.8 Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

Die Ableitung einer Integralfunktion einer stetigen Funktion ist gleich der integrierten Funktion.

$$\left( x \mapsto \int_a^x f \right)' = f$$

## 1.9 Stammfunktion

Sei  $f$  eine reelle Funktion. wenn es eine Funktion  $F$  gibt, so dass  $f$  ihre Ableitungsfunktion ist, also

$$F' = f$$

gilt, dann heisst  $F$  eine *Stammfunktion* von  $f$ .

## 1.10 Unbestimmtes Integral

Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion  $f$  nennt man ihr *unbestimmtes Integral* und bezeichnet es mit

$$\int f \text{ (ohne Grenzen)}$$

Auch von Termen gibt es das unbestimmte Integral. Wenn etwa  $T$  ein Term und  $x$  eine Variable ist, schreibt man

$$\int T dx$$

## 1.11 Integralfunktion - Stammfunktion

Jede Integralfunktion einer stetigen Funktion ist eine Stammfunktion von ihr.

## 1.12 Berechnung von Integralen mit Hilfe von Stammfunktionen

Sei  $f$  eine auf dem Intervall  $[a; b]$  stetige Funktion und  $F$  eine Stammfunktion von ihr. Dann gilt

$$\int_a^b f = F \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

## 1.13 Linearitätsregeln von Integralen

Seien  $f$  und  $g$  Funktionen und  $c$  eine Konstante. Dann gelten folgende Linearitätsregeln:

$$\begin{aligned}\int (f + g) &= \int f + \int g \\ \int cf &= c \int f\end{aligned}$$

## 1.14 Integrale von Verkettungen mit linearen Funktionen

Sei  $f$  eine integrierbare Funktion und  $F$  eine Stammfunktion von ihr. Dann gilt

$$\int f(ax + b)dx = \frac{F(ax + b)}{a} + c$$

wobei  $c$  eine beliebige Konstante ist.

## 1.15 Integral des Produktes mit der eigenen Ableitung

Eine Stammfunktion des Produktes einer Funktion mit ihrer eigenen Ableitungsfunktion ist gleich dem halben Quadrat dieser Funktion.

Beispiel:

$$\int \sin(x) \cos(x) dx = \frac{\sin(x)^2}{2} + c$$

## 1.16 Fläche zwischen Funktionsgraphen

$f$  und  $g$  seien Funktionen, die im Intervall  $[a; b]$  stetig sind. Dann ist die Fläche, welche oben und unten durch die Graphen der Funktionen  $f$  und  $g$ , sowie links und rechts durch die Abszissen  $a$  respektive  $b$  begrenzt wird, durch

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

gegeben.

# 2 Fouriertransformation

## 2.1 Linearkombinationen gleichperiodischer Funktionen

Linearkombinationen periodischer Funktionen derselben Periode sind ebenfalls periodisch mit dieser Periode. Oder formal: Seien  $f$  und  $g$  zwei Funktionen mit derselben Periode  $p$  und  $a$  sowie  $b$  zwei Konstanten. Dann ist auch die Funktion

$$af + bg$$

periodisch mit der Periode  $p$ .

## 2.2 Fourier-Entwicklung periodischer Funktionen

### 2.2.1 Sinus-Kosinus-Form

Wir betrachten ein stückweise stetiges, mit der Grundperiode  $T$  periodisches Signal  $s$ . Dann heisst die Funktion

$$f_n := t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)]$$

mit

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(k\omega_1 t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(k\omega_1 t) dt$$

für  $k \in \{1 \dots n\}$  seine *Fourierentwicklung* der Ordnung  $n$ .

$\omega_1$  heisst die *Grundkreisfrequenz*,  $a_0$  die *Konstante*,  $a_k$  und  $b_k$  die *Koeffizienten*.

### 2.2.2 Spektral-Form

Neben dieser sogenannten *Sinus-Kosinus-Form* gibt es die für die Praxis wichtigere *Amplituden-Phasen-Form* oder *Spektral-Form*

$$f_n := t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k)$$

Die Bestimmungsstücke der Amplituden-Phasen-Form können nicht direkt berechnet werden, sondern auf dem Umweg über die Koeffizienten der Sinus-Kosinus-Form. Dabei gilt folgender Zusammenhang:

- $A_0 = a_0$
- Ein Punkt in der Ebene, der die kartesischen Koordinaten  $(a_k, b_k)$  hat, hat die Polarkoordinaten  $(A_k, \varphi_k)$

## 2.3 Koordinatentransformation Kartesisch / Polar

Koordinaten aus dem Kartesischen- oder Polarkoordinatensystem können folgendermassen transformiert werden:

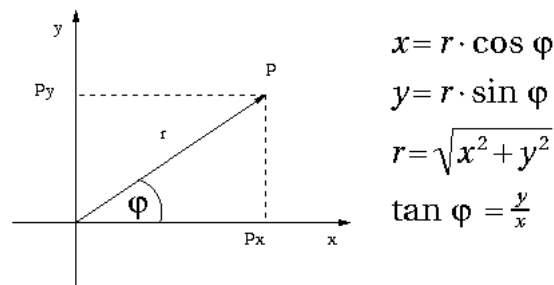


Abbildung 1: Zusammenhänge Kartesische Koordinaten / Polarkoordinaten

Übertragen auf die Fourierreihen entspricht in der Grafik:

- $a_k = x$  (Sinus-Kosinus-Form)
- $b_k = y$  (Sinus-Kosinus-Form)
- $A_k = r$  (Spektralform)
- $\phi_k = \phi$  (Spektralform)

Um den Winkel  $\varphi$  im Intervall  $(-\pi, \pi]$  zu berechnen, gibt es mehrere Möglichkeiten. Mithilfe des Arkustangens:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{für } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{für } x < 0, y < 0 \\ +\pi/2 & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

Falls man den Radius  $r$  bzw.  $A$  schon weiss, kann man auch den Arkuskosinus verwenden:

$$\varphi = \begin{cases} +\arccos \frac{x}{r} & \text{für } y \geq 0 \\ -\arccos \frac{x}{r} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

## 2.4 Fourierreihen

Die Funktion

$$\begin{aligned} f &:= t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)] \\ &= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k) \end{aligned}$$

heisst die *Fourierreihe* von  $s$ .

## 2.5 Kriterium von Dirichlet

Sei  $s$  ein mit  $T$  periodisches Signal, das innerhalb einer Periode aus endlich vielen stetigen Stücken zusammengesetzt ist. Dann konvergieren die Werte der Fourierreihe  $f$  und zwar

- an Stellen  $t$ , an denen das Signal stetig ist, gegen den Signalwert

$$f(t) = s(t)$$



- an Stellen  $t$ , an denen das Signal nicht stetig ist, gegen den Mittelwert der beiden einseitigen Grenzwerte

$$f(t) = \frac{\lim_{\tau \rightarrow t-} (f(\tau)) + \lim_{\tau \rightarrow t+} (f(\tau))}{2}$$

## 2.6 Fourierreihen gerader und ungerader Signale

Ein gerades, mit der Periode  $T$  periodisches Signal  $g$  besitzt eine reine Kosinusreihe

$$f_g := t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t)] \quad \text{mit } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

wobei

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} g(t) \cos(k\omega_1 t) dt$$

gilt.

Ein ungerades, mit der Periode  $T$  periodisches Signal  $u$  besitzt eine reine Sinusreihe

$$f_u := t \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} [b_k \sin(k\omega_1 t)] \quad \text{mit } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

wobei

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \sin(k\omega_1 t) dt$$

gilt.

## 2.7 Linearität der Fourierkoeffizienten

$s_1$  und  $s_2$  seien zwei Signale mit derselben Periode  $T$ . Die Konstanten ihrer Fourierreihen seien  $a_{1,0}$  beziehungsweise  $a_{2,0}$  und die Koeffizienten  $a_{1,k}$ ,  $b_{1,k}$  beziehungsweise  $a_{2,k}$ ,  $b_{2,k}$ .

Dann ist die Summe beiden Signale

$$s = s_1 + s_2$$

periodisch mit derselben Periode und für die Konstante  $a_0$ , sowie die Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  ihrer Fourierreihe gelten folgende Beziehungen:

$$a_0 = a_{1,0} + a_{2,0}$$

$$a_k = a_{1,k} + a_{2,k}$$

$$b_0 = b_{1,k} + b_{2,k}$$

Ist ferner  $c$  eine Konstante, so hat auch das Signal

$$\tilde{s} = c \cdot s$$

dieselbe Periode  $T$ , und die Konstante und Koeffizienten der Fourierentwicklung sind

$$\tilde{a}_0 = c \cdot a_0$$

$$\tilde{a}_k = c \cdot a_k$$

$$\tilde{b}_k = c \cdot b_k$$

## 2.8 Spiegelung des Signalgraphen an der Ordinatenachse (Zeitumkehr)

Das Signal  $s$  sei periodisch mit der Periode  $T$  und seine Fourierreihe sei

$$\begin{aligned} f &:= t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)] \\ &= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \phi_k) \text{ mit } \omega_1 = \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

Dann hat das Signal

$$\tilde{s} := t \mapsto s(-t)$$

die Fourierreihe

$$\begin{aligned} \tilde{f} &:= t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) - b_k \sin(k\omega_1 t)] \\ &= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \phi_k) \end{aligned}$$

**Merke:** Durch die Spiegelung an der Ordinatenachse ändern die Koeffizienten der Sinusglieder und die Phasen das Vorzeichen, während alle anderen Bestimmungstücke unverändert bleiben.

## 2.9 Zeitskalierung

Das Signal  $s$  sei periodisch mit der Periode  $T$  und seine Fourierreihe sei

$$\begin{aligned} f &:= t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)] \\ &= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \phi_k) \text{ mit } \omega_1 = \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

Dann hat das Signal

$$\tilde{s} := t \mapsto s(ct) \text{ für } c > 0$$

die Fourierreihe

$$\begin{aligned} \tilde{f} &:= t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_2 t) + b_k \sin(k\omega_2 t)] \\ &= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_2 t - \phi_k) \end{aligned}$$

wobei

$$\omega_2 = c\omega_1$$

ist.

**Merke:** Durch die zeitliche Skalierung ändert einzige die Grundkreisfrequenz, während die Fourierkoeffizienten, die Amplituden und die Phasen unverändert bleiben.

## 2.10 Zeitverschiebung

Das Signal  $s$  sei periodisch mit der Periode  $T$  und seine Fourierreihe sei

$$\begin{aligned} f &:= t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)] \\ &= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \phi_k) \text{ mit } \omega_1 = \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

Dann hat das Signal

$$\tilde{s} := t \mapsto s(t - \tau)$$

die Fourierreihe

$$\begin{aligned} t &\mapsto \tilde{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\tilde{a}_k \cos(k\omega_1 t) + \tilde{b}_k \sin(k\omega_1 t)] \\ &= t \mapsto \tilde{A}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \cos(k\omega_1 t - \tilde{\phi}_k) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 &= a_0 \\ \tilde{a}_k &= a_k \cos(k\gamma) - b_k \sin(k\gamma) \\ \tilde{b}_k &= a_k \sin(k\gamma) + b_k \cos(k\gamma) \\ \tilde{A}_k &= A_k \\ \tilde{\phi}_k &= \phi_k + k\gamma \end{aligned}$$

wobei

$$\gamma = \frac{\tau}{T} \times 2\pi$$

ist.

**Merke:** Bei einer zeitlichen Verzögerung des Signals ändern nur die Phasen, während die Konstante und die Amplituden gleich bleiben.

## 2.11 Fourierintegral

$s$  sei ein Signal, welches absolut integrierbar ist, das heisst, für welches das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt$$

existiert. Dann existieren auch die beiden Integrale

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(\omega t) dt \\ b(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(\omega t) dt \end{aligned}$$

Die Funktion

$$f := t \mapsto \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t)] d\omega$$

$$= t \mapsto \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos(\omega t - \phi(\omega))] d\omega$$

heisst die *Fouriertransformierte* oder das *Fourierintegral* von  $s$ . Die erste Form heisst *Sinus-Kosinus-Form*, die zweite *Spektralform* oder *Amplituden-Phasen-Form*. Wenn  $(a(\omega), b(\omega))$  die kartesischen Koordinaten eines Punktes in der Ebene sind, dann sind  $(A(\omega), \phi(\omega))$  die Polarkoordinaten dieses Punktes.

## 2.12 Satz von Dirichlet

Mit den Bezeichnungen der obigen Definition gilt:

- Wenn  $s$  an der Stelle  $t$  stetig ist, so ist  $f(t) = s(t)$
- Wenn nicht, so ist  $f(t) = \frac{1}{2} \left( \lim_{\tau \rightarrow t-} (s(\tau)) + \lim_{\tau \rightarrow t+} (s(\tau)) \right)$

## 3 Differenzialgleichungen

### 3.1 Die Differenzialgleichung

Eine Gleichung zwischen einer Funktion und ihren Ableitungsfunktionen heisst *Differenzialgleichung*. Die höchste vorkommende Ableitung heisst die *Ordnung* der Differenzialgleichung. Eine Differenzialgleichung hat in der Regel unendlich viele Lösungen. Die Lösungsmenge nennt man aus historischen Gründen auch die *allgemeine Lösung* und eine einzelne Lösung eine *spezielle Lösung*. Zusätzliche Bedingungen, welche dazu dienen, aus der allgemeinen Lösung eine spezielle auszuwählen, heissen *Randbedingungen* oder *Anfangsbedingungen* (wenn das Argument die Zeit darstellt). Eine Differenzialgleichung mit Randbedingungen wird auch als *Randwertproblem* oder *Anfangswertproblem* bezeichnet.

**Merke:** Angewandte Probleme, bei denen eine ganze Funktion gesucht ist, führen auf Differenzialgleichungen.

#### 3.1.1 Explizite Differenzialgleichungen

Eine Differenzialgleichung, in der die höchste Ableitung isoliert auf einer Seite des Gleichheitszeichens steht, heisst *explizit*. Eine explizite Differenzialgleichung für die Funktion  $f$  hat also die Gestalt

$$f^{(n)}(x) = G\left(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)\right)$$

im Spezialfall einer Differenzialgleichung 1. Ordnung somit

$$f'(x) = G(x, f(x))$$

In diesem Fall ist die rechte Seite also nur vom Argument  $x$  und vom Wert  $fx$  der gesuchten Funktion abhängig; die Ableitung hingegen kommt rechts nicht vor.

#### 3.1.2 Separierbare Differenzialgleichung

Eine Differenzialgleichung für die Funktion  $f$  heisst *separierbar*, wenn sie auf die Form

$$f'(x) = \frac{g(x)}{h(f(x))}$$

gebracht werden kann.

### 3.1.3 Lineare Differenzialgleichung

Eine Differenzialgleichung für die Funktion  $f$  der Form

$$a_0 f(x) + a_1 f'(x) + a_2 f''(x) + \cdots + a_n f^{(n)}(x) = s(x)$$

oder

$$\sum_{k=0}^n a_k f^{(k)}(x) = s(x)$$

wobei die  $a_k$  gegebene Konstanten und  $s$  eine vorgegebene Funktion ist, heisst *lineare Differenzialgleichung* mit konstanten Koeffizienten. Die  $a_k$  heissen die *Koeffizienten*,  $s$  die *Störfunktion*.

Wenn die Störfunktion die Nullfunktion ist, heisst die Differenzialgleichung *homogen*, andernfalls *inhomogen*.

### 3.2 Methode von Euler

Gegeben sei eine explizite Differenzialgleichung 1. Ordnung für die Funktion  $f$

$$f'(x) = G(x, y) = G(x, f(x))$$

und ein Punkt  $P_n = (x_n, y_n)$  des Graphen einer speziellen Lösung.

Der Punkt  $P_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1})$  wird wie folgt bestimmt:

Man wählt ein  $\Delta x$  mit kleinem Betrag und berechnet

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x$$

$$y_{n+1} = y_n + s_n \Delta x$$

mit

$$s_n = G(x_n, y_n)$$

### 3.3 Verfahren von Runge-Kutta

Gegeben sei eine explizite Differenzialgleichung 1. Ordnung für die Funktion  $f$

$$f'(x) = G(x, f(x))$$

und ein Punkt  $P_n = (x_n, y_n)$  des Graphen einer speziellen Lösung.

Der Punkt  $P_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1})$  wird wie folgt bestimmt:

Man wählt ein  $\Delta x$  mit kleinem Betrag. Die Abszisse von  $P_{n+1}$  ist

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x$$

Die Ordinate ist

$$y_{n+1} = y_n + s \Delta x$$

mit

$$s = \frac{s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4}{6}$$

wobei

$$1. \quad s_1 = G(x_n, y_n)$$

$$2. \quad s_2 = G\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + s_1 \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$3. \quad s_3 = G\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + s_2 \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$4. \quad s_4 = G(x_n + \Delta x, y_n + s_3 \Delta x)$$

### 3.4 Linearität der Lösungen homogener linearer Differenzialgleichungen

1. Wenn  $f_1$  und  $f_2$  Lösungen einer homogenen linearen Differenzialgleichung sind, so ist auch ihre Summe  $f_1 + f_2$  eine Lösung.
2. Ist ferner  $f$  eine Lösung und  $c$  eine Konstante, so ist auch das Produkt  $c \cdot f$  eine Lösung.

Man kann die beiden Gesetze auch so zusammenfassen:

Wenn  $f_1$  und  $f_2$  Lösungen einer homogenen linearen Differenzialgleichung sind, so ist auch jede Linearkombination  $c_1 f_1 + c_2 f_2$ , wobei  $c_1$  und  $c_2$  Konstanten sind, eine Lösung.

### 3.5 Allgemeine Lösung der homogenen linearen Differenzialgleichung zweiter Ordnung

Gegeben sei die homogene lineare Differenzialgleichung

$$c_2 f''(x) + c_1 f'(x) + c_0 f(x) = 0$$

Um sie zu lösen, formuliert man zuerst ihre *charakteristische Gleichung*.

$$c_2 s^2 + c_1 s + c_0 = 0$$

Nun sind drei Fälle zu unterscheiden:

- Wenn die charakteristische Gleichung **zwei verschiedene** Lösungen  $s_1$  und  $s_2$  besitzt (die Diskriminante  $b^2 - 4ac$  also positiv ist), so lautet die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$f := x \mapsto A e^{s_1 x} + B e^{s_2 x}$$

mit frei wählbaren Konstanten  $A$  und  $B$ .

- Wenn die charakteristische Gleichung **nur eine** Lösung  $s_1$  besitzt (die Diskriminante  $b^2 - 4ac$  also Null ist), so lautet die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$f := x \mapsto (Ax + B) e^{s_1 x}$$

mit frei wählbaren Konstanten  $A$  und  $B$ .

- Wenn die charakteristische Gleichung keine Lösung hat (die Diskriminante  $b^2 - 4ac$  also negativ ist) so lautet die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$f := x \mapsto e^{rx} (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))$$

mit frei wählbarem  $A$  und  $B$ , respektive in der Amplituden-Phasen-Form

$$f := x \mapsto C e^{rx} \cos(\omega x - \phi)$$

mit frei wählbarem  $C$  und  $\phi$ .

Um die Parameter  $r$  und  $\omega$  zu bestimmen, bringt man die rechte Seite der Lösungsformel für die charakteristische Gleichung auf die Form

$$s = a \pm \sqrt{b}$$

Dann ist

$$r = a \text{ und } \omega = \sqrt{-b}$$

### 3.6 Inhomogene lineare Differenzialgleichungen

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differenzialgleichung für  $f$

$$\sum_{k=0}^n a_k f^{(k)}(x) = s(x)$$

ist die Summe einer partikulären Lösung und der allgemeinen Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\sum_{k=0}^n a_k f^{(k)}(x) = 0$$