Theoriesammlung Analysis 2

Danilo Bargen

22. August 2011

HSR
HOCHSCHULE FÜR TECHNIK
RAPPERSWIL

Inhaltsverzeichnis

1 Integralrechnung

1.1 Definition des Integrals

Die Definition des Integrals lautet

$$\int_a^b f = \lim_{n \mapsto \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x \right)$$

mit

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

und

$$x_i = a + i \cdot \Delta x$$

1.2 Summenformeln

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

1.3 Graphische Interpretation von Integralen

Wir betrachten das Integral

$$\int_a^b f$$

Wir nennen die Fläche, welche horizontal durch zwei Abszissen und vertikal durch die Abszissenachse und den Funktionsgraphen begrenzt sind als *Fläche unter dem Funktionsgraphen*. Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

- Wenn $a < b$ ist:
  Dann sind Flächen unter Funktionsgraphen mit positiver Ordinate positiv und solche mit negativen Ordinaten negativ zu zählen.
- Wenn $a > b$ ist:
  Dann sind Flächen unter Funktionsgraphen mit positiver Ordinate negativ und solche mit negativen Ordinaten positiv zu zählen.

1.4 Vorzeichenregeln und Additivität

Falls die beteiligten Integrale existieren, gilt

- Vertauschen der Integralgrenzen ändert das Vorzeichen des Integrals

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

- Aneinanderstossende Integrale können zusammengefasst werden.

$$\int\limits_a^b f + \int\limits_b^c f = \int\limits_a^c f$$

1.5 Numerische Berechnung von Integralen

1.5.1 Trapezregel

Die allgemeine Formel für die Trapezregel lautet:

$$\int\limits_a^b f = \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right] \Delta x$$

mit

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ und } x_i = a + i \cdot \Delta x$$

1.5.2 Fassregel

Bei der Fassregel wird die zu integrierende Funktion $\int_a^b$ mit einer quadratischen Funktion, die durch die Punkte a, b und $\frac{b-a}{2}$ geht, approximiert.

$$\int\limits_a^b f \approx \int\limits_a^b q = \frac{y_a + 4y_m + y_b}{3} \Delta x$$

wobei

$$y_a = f(a),\ y_m = f\left(\frac{a+b}{2}\right),\ y_b = f(b),\ \Delta x = \frac{b-a}{2}$$

1.5.3 Simpson-Regel

Sei f eine auf $[a;b]$ viermal differenzierbare Funktion und n eine gerade Zahl. Ferner sei

$$x_i = a + i \cdot \Delta x \text{ mit } \Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ und } y_i = f(x_i)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + ... + 4y_{n-1} + y_n) \\ &= \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + y_n + 4\sum_{k=1}^{n/2} y_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} y_{2k} \right) \end{aligned}$$

eine Schätzung für das Integral $\int\limits_a^b f$, wobei der Fehler

$$E_n = \left(\int\limits_a^b f \right) - S_n = \frac{b-a}{180} \Delta x^4 f^{(4)}(\xi) = \frac{(b-a)^5}{180 n^4} f^{(4)}(\xi)$$

$$\text{für ein } \xi \in [a;b]$$

beträgt.

1.6 Integralfunktion

Gegeben sei eine auf dem Intervall $[a;b]$ integrierbare Funktion f. Dann heisst jede Funktion der Form

$$x \mapsto \int\limits_c^x f$$

für eine Konstante $c \in [a;b]$ eine *Integralfunktion* von f.

1.7 Zusammenhang verschiedener Integralfunktionen

Verschiedene Integralfunktionen derselben Funktion unterscheiden sich nur durch eine Konstante. Wenn also

$$\varphi_c := x \mapsto \int\limits_c^x f \text{ und } \varphi_d := x \mapsto \int\limits_d^x f$$

dann gilt

$$\varphi_d = \varphi_c + k \text{ wobei } k \text{ konstant}$$

1.8 Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

Die Ableitungsfunktion einer Integralfunktion einer stetigen Funktion ist gleich der integrierten Funktion.

$$\left(x \mapsto \int\limits_a^x f \right)' = f$$

1.9 Stammfunktion

Sei f eine reelle Funktion. wenn es eine Funktion F gibt, so dass f ihre Ableitungsfunktion ist, also

$$F' = f$$

gilt, dann heisst F eine *Stammfunktion* von f.

1.10 Unbestimmtes Integral

Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f nennt man ihr *unbestimmtes Integral* und bezeichnet es mit

$$\int f \text{ (ohne Grenzen)}$$

Auch von Termen gibt es das unbestimmte Integral. Wenn etwa T ein Term und x eine Variable ist, schreibt man

$$\int T dx$$

1.11 Integralfunktion - Stammfunktion

Jede Integralfunktion einer stetigen Funktion ist eine Stammfunktion von ihr.

1.12 Berechnung von Integralen mit Hilfe von Stammfunktionen

Sei f eine auf den Intervall $[a; b]$ **stetige** Funktion und F eine Stammfunktion von ihr. Dann gilt

$$\int_a^b f = F\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

1.13 Integrationsregeln

1.13.1 Linearitätsregel

Seien f und g Funktionen und c eine Konstante. Dann gelten folgende Linearitätsregeln:

$$\int (f+g) = \int f + \int g$$

$$\int cf = c \int f$$

1.13.2 Integrale von Verkettungen mit linearen Funktionen

Sei f eine integrierbare Funktion und F eine Stammfunktion von ihr. Dann gilt

$$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$$

wobei c eine beliebige Konstante ist.

1.13.3 Produktregel

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)dx = (f(x) \cdot g(x))\Big|_a^b - \int f'(x) \cdot g(x)dx$$

1.13.4 Produkt mit der eigenen Ableitung

Eine Stammfunktion des Produktes einer Funktion mit ihrer eigenen Ableitungsfunktion ist gleich dem halben Quadrat dieser Funktion.

Beispiel:

$$\int \sin(x)\cos(x)dx = \frac{\sin(x)^2}{2} + c$$

1.13.5 Quotientenregel

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln(|f(x)|)\Big|_a^b$$

1.13.6 Substitutionsregel

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

1.14 Fläche zwischen Funktionsgraphen

f und g seien Funktionen, die im Intervall $[a;b]$ stetig sind. Dann ist die Fläche, welche oben und unten durch die Graphen der Funktionen f und g, sowie links und rechts durch die Abszissen a respektive b begrenzt wird, durch

$$\int\limits_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

gegeben.

2 Fouriertransformation

2.1 Linearkombinationen gleichperiodischer Funktionen

Linearkombinationen periodischer Funktionen derselben Periode sind ebenfalls periodisch mit dieser Periode. Oder formal: Seien f und g zwei Funktionen mit derselben Periode p und a sowie b zwei Konstanten. Dann ist auch die Funktion

$$af + bg$$

periodisch mit der Periode p.

2.2 Fourier-Entwicklung periodischer Funktionen

2.2.1 Sinus-Kosinus-Form

Wir betrachten ein stückweise stetiges, mit der Grundperiode T periodisches Signal s. Dann heisst die Funktion

$$f_n := t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)]$$

mit

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int\limits_0^T s(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int\limits_0^T s(t) \cos(k\omega_1 t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int\limits_0^T s(t) \sin(k\omega_1 t) dt$$

für $k \in \{1...n\}$ seine *Fourierentwicklung* der Ordnung n.

ω_1 heisst die *Grundkreisfrequenz*, a_0 die *Konstante*, a_k und b_k die *Koeffizienten*.

2.2.2 Spektral-Form

Neben dieser sogenannten *Sinus-Kosinus-Form* gibt es die für die Praxis wichtigere *Amplituden-Phasen-Form* oder *Spektral-Form*

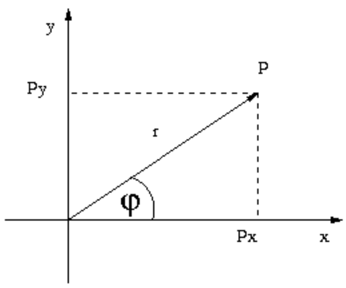
$$f_n := t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k)$$

Die Bestimmungsstücke der Amplituden-Phasen-Form können nicht direkt berechnet werden, sondern auf dem Umweg über die Koeffizienten der Sinus-Kosinus-Form. Dabei gilt folgender Zusammenhang:

- $A_0 = a_0$
- Ein Punkt in der Ebene, der die kartesischen Koordinaten (a_k, b_k) hat, hat die Polarkoordinaten (A_k, φ_k)

2.3 Koordinatentransformation Kartesisch / Polar

Koordinaten aus dem Kartesischen- oder Polarkoordinatensystem können folgendermassen transformiert werden:



$$x = r \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \cdot \sin\varphi$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\tan\varphi = \frac{y}{x}$$

Abbildung 1: Zusammenhänge Kartesische Koordinaten / Polarkoordinaten

Übertragen auf die Fourierreihen entspricht in der Grafik:

- $a_k = x$ (Sinus-Kosinus-Form)
- $b_k = y$ (Sinus-Kosinus-Form)
- $A_k = r$ (Spektralform)
- $\phi_k = \phi$ (Spektralform)

Um den Winkel φ im Interval $(-\pi, \pi]$ zu berechnen, gibt es mehrere Möglichkeiten. Mithilfe des Arkustangens:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & \text{für } x < 0,\ y \geq 0 \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi & \text{für } x < 0,\ y < 0 \\ +\pi/2 & \text{für } x = 0,\ y > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Falls man den Radius r bzw. A schon weiss, kann man auch den Arkuskosinus verwenden:

$$\varphi = \begin{cases} +\arccos\frac{x}{r} & \text{für } y \geq 0 \\ -\arccos\frac{x}{r} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

2.4 Fourierreihen

Die Funktion

$$\begin{aligned} f &:= t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)] \\ &= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k) \end{aligned}$$

heisst die *Fourierreihe* von s.

2.5 Kriterium von Dirichlet

Sei s ein mit T periodisches Signal, das innerhalb einer Periode aus endlich vielen stetigen Stücken zusammengesetzt ist. Dann konvergieren die Werte der Fourierreihe f und zwar

- an Stellen t, an denen das Signal stetig ist, gegen den Signalwert

$$f(t) = s(t)$$

- an Stellen t, an denen das Signal nicht stetig ist, gegen den Mittelwert der beiden einseitigen Grenzwerte

$$f(t) = \frac{\lim\limits_{\tau \mapsto t-} (f(\tau)) + \lim\limits_{\tau \mapsto t+} (f(\tau))}{2}$$

2.6 Fourierreihen gerader und ungerader Signale

Ein gerades, mit der Periode T periodisches Signal g besitzt eine reine Kosinusreihe

$$f_g := t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t)] \text{ mit } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

wobei

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} g(t) \cos(k\omega_1 t) dt$$

gilt.

Ein ungerades, mit der Periode T periodisches Signal u besitzt eine reine Sinusreihe

$$f_u := t \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} [b_k \sin(k\omega_1 t)] \text{ mit } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

wobei

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \sin(k\omega_1 t) dt$$

gilt.

2.7 Linearität der Fourierkoeffizienten

s_1 und s_2 seien zwei Signale mit derselben Periode T. Die Konstanten ihrer Fourierreihen seien $a_{1,0}$ beziehungsweise $a_{2,0}$ und die Koeffizienten $a_{1,k}$, $b_{1,k}$ beziehungsweise $a_{2,k}$, $b_{2,k}$.

Dann ist die Summe beiden Signale

$$s = s_1 + s_2$$

periodisch mit derselben Periode und für die Konstante a_0, sowie die Koeffizienten a_k und b_k ihrer Fourierreihe gelten folgende Beziehungen:

$$a_0 = a_{1,0} + a_{2,0}$$

$$a_k = a_{1,k} + a_{2,k}$$

$$b_0 = b_{1,k} + b_{2,k}$$

Ist ferner c eine Konstante, so hat auch das Signal

$$\tilde{s} = c \cdot s$$

dieselbe Periode T, und die Konstante und Koeffizienten der Fourierentwicklung sind

$$\tilde{a_0} = c \cdot a_0$$

$$\tilde{a_k} = c \cdot a_k$$

$$\tilde{b_x} = c \cdot b_k$$

2.8 Spiegelung des Signalgraphen an der Ordinatenachse (Zeitumkehr)

Das Signal s sei periodisch mit der Periode T und seine Fourierreihe sei

$$f := t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)]$$

$$= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \phi_k) \text{ mit } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

Dann hat das Signal

$$\tilde{s} := t \mapsto s(-t)$$

die Fourierreihe

$$\tilde{f} = t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) - b_k \sin(k\omega_1 t)]$$

$$= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \phi_k)$$

Merke: Durch die Spiegelung an der Ordinatenachse ändern die Koeffizienten der Sinusglieder und die Phasen das Vorzeichen, während alle anderen Bestimmungstücke unverändert bleiben.

2.9 Zeitskalierung

Das Signal s sei periodisch mit der Periode T und seine Fourierreihe sei

$$f := t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)]$$

$$= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \phi_k) \text{ mit } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

Dann hat das Signal

$$\tilde{s} := t \mapsto s(ct) \text{ für } c > 0$$

die Fourierreihe

$$\tilde{f} = t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_2 t) + b_k \sin(k\omega_2 t)]$$

$$= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_2 t - \phi_k)$$

wobei

$$\omega_2 = c\omega_1$$

ist.

Merke: Durch die zeitliche Skalierung ändert einzige die Grundkreisfrequenz, während die Fourierkoeffizienten, die Amplituden und die Phasen unverändert bleiben.

2.10 Zeitverschiebung

Das Signal s sei periodisch mit der Periode T und seine Fourierreihe sei

$$f := t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)]$$

$$= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \phi_k) \text{ mit } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

Dann hat das Signal

$$\tilde{s} := t \mapsto s(t - \tau)$$

die Fourierreihe

$$t \mapsto \widetilde{a_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\widetilde{a_k} \cos(k\omega_1 t) + \widetilde{b_k} \sin(k\omega_1 t)\right]$$

$$= t \mapsto \widetilde{A_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{A_k} \cos(k\omega_1 t - \widetilde{\phi_k})$$

mit

$$\widetilde{a_0} = a_0$$
$$\widetilde{a_k} = a_k \cos(k\gamma) - b_k \sin(k\gamma)$$
$$\widetilde{b_k} = a_k \sin(k\gamma) + b_k \cos(k\gamma)$$
$$\widetilde{A_k} = A_k$$
$$\widetilde{\phi_k} = \phi_k + k\gamma$$

wobei

$$\gamma = \frac{\tau}{T} \times 2\pi$$

ist.

Merke: Bei einer zeitlichen Verzögerung des Signals ändern nur die Phasen, während die Konstante und die Amplituden gleich bleiben.

2.11 Fourierintegral

s sei ein Signal, welches absolut integrierbar ist, das heisst, für welches das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt$$

existiert. Dann existieren auch die beiden Integrale

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(\omega t) dt$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(\omega t) dt$$

Die Funktion

$$\begin{aligned} f := t \mapsto & \int_{0}^{\infty} [a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t)]\, dw \\ = t \mapsto & \int_{0}^{\infty} [A(\omega) \cos(\omega t - \phi(\omega))]\, dw \end{aligned}$$

heisst die *Fouriertransformierte* oder das *Fourierintegral* von s. Die erste Form heisst *Sinus-Kosinus-Form*, die zweite *Spektralform* oder *Amplituden-Phasen-Form*. Wenn $(a(\omega), b(\omega))$ die kartesischen Koordinaten eine Punktes in der Ebene sind, dann sind $(A(\omega), \phi(\omega))$ die Polarkoordinaten dieses Punktes.

2.12 Satz von Dirichlet

Mit den Bezeichnungen der obigen Definition gilt:

- Wenn s an der Stelle t stetig ist, so ist $f(t) = s(t)$
- Wenn nicht, so ist $f(t) = \frac{1}{2} \left(\lim_{\tau \mapsto t-} (s(\tau)) + \lim_{\tau \mapsto t+} (s(\tau)) \right)$

3 Differenzialgleichungen

3.1 Die Differenzialgleichung

Eine Gleichung zwischen einer Funktion und ihren Ableitungsfunktionen heisst *Differenzialgleichung*. Die höchste vorkommende Ableitung heisst die *Ordnung* der Differenzialgleichung. Eine Differenzialgleichung hat in der Regel unendlich viele Lösungen. Die Lösungsmenge nennt man aus historischen Gründen auch die *allgemeine Lösung* und eine einzelne Lösung eine *spezielle Lösung*.

Zusätzliche Bedingungen, welche dazu dienen, aus der allgemeinen Lösung eine spezielle auszusondern, heissen *Randbedingungen* oder *Anfangsbedingungen* (wenn das Argument die Zeit darstellt). Eine Differenzialgleichung mit Randbedingungen wird auch als *Randwertproblem* oder *Anfangswertproblem* bezeichnet.

Merke: Angewandte Probleme, bei denen eine ganze Funktion gesucht ist, führen auf Differenzialgleichungen.

3.1.1 Explizite Differenzialgleichungen

Eine Differenzialgleichung, in der die höchste Ableitung isoliert auf einer Seite des Gleichheitszeichens steht, heisst *explizit*. Eine explizite Differenzialgleichung für die Funktion f hat also die Gestalt

$$f^{(n)}(x) = G\left(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)\right)$$

im Spezialfall einer Differenzialgleichung 1. Ordnung somit

$$f'(x) = G(x, f(x))$$

In diesem Fall ist die rechte Seite ist also nur vom Argument x und vom Wert fx der gesuchten Funktion abhängig; die Ableitung hingegen kommt rechts nicht vor.

3.1.2 Separierbare Differenzialgleichung

Eine Differenzialgleichung für die Funktion f heisst *separierbar*, wenn sie auf die Form

$$f'(x) = \frac{g(x)}{h(f(x))}$$

gebracht werden kann.

3.1.3 Lineare Differenzialgleichung

Eine Differenzialgleichung für die Funktion f der Form

$$a_0 f(x) + a_1 f'(x) + a_2 f''(x) + \cdots + a_n f^{(n)}(x) = s(x)$$

oder

$$\sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)}(x) = s(x)$$

wobei die a_k gegebene Konstanten und s eine vorgegebene Funktion ist, heisst *lineare Differenzialgleichung* mit konstanten Koeffizienten. Die a_k heissen die *Koeffizienten*, s die *Störfunktion*.

Wenn die Störfunktion die Nullfunktion ist, heisst die Differenzialgleichung *homogen*, andernfalls *inhomogen*.

3.2 Methode von Euler

Gegeben sei eine explizite Differenzialgleichung 1. Ordnung für die Funktion f

$$f'(x) = G(x, y) = G(x, f(x))$$

und ein Punkt $P_n = (x_n, y_n)$ des Graphen einer speziellen Lösung.

Der Punkt $P_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1})$ wird wie folgt bestimmt:
Man wählt ein Δx mit kleinem Betrag und berechnet

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x$$

$$y_{n+1} = y_n + s_n \Delta x$$

mit

$$s_n = G(x_n, y_n)$$

3.3 Verfahren von Runge-Kutta

Gegeben sei eine explizite Differenzialgleichung 1. Ordnung für die Funktion f

$$f'(x) = G(x, f(x))$$

und ein Punkt $P_n = (x_n, y_n)$ des Graphen einer speziellen Lösung.

Der Punkt $P_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1})$ wird wie folgt bestimmt:
Man wählt ein Δx mit kleinem Betrag. Die Abszisse von P_{n+1} ist

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x$$

Die Ordinate ist

$$y_{n+1} = y_n + s\Delta x$$

mit

$$s = \frac{s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4}{6}$$

wobei

1. $s_1 = G(x_n, y_n)$
2. $s_2 = G\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + s_1 \frac{\Delta x}{2}\right)$
3. $s_3 = G\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + s_2 \frac{\Delta x}{2}\right)$
4. $s_4 = G(x_n + \Delta x, y_n + s_3 \Delta x)$

3.4 Linearität der Lösungen homogener linearer Differenzialgleichungen

1. Wenn f_1 und f_2 Lösungen einer homogenen linearen Differenzialgleichung sind, so ist auch ihre Summe $f_1 + f_2$ eine Lösung.
2. Ist ferner f eine Lösung und c eine Konstante, so ist auch das Produkt $c \cdot f$ eine Lösung.

Man kann die beiden Gesetze auch so zusammenfassen:

Wenn f_1 und f_2 Lösungen einer homogenen linearen Differenzialgleichung sind, so ist auch jede Linearkombination $c_1 f_1 + c_2 f_2$, wobei c_1 und c_2 Konstanten sind, eine Lösung.

3.5 Allgemeine Lösung homogener Linearer Differenzialgleichungen zweiter Ordnung

Gegeben sei die homogene lineare Differenzialgleichung

$$c_2 f''(x) + c_1 f'(x) + c_0 f(x) = 0$$

Um sie zu lösen, formuliert man zuerst ihre *charakteristische Gleichung.*

$$c_2 s^2 + c_1 s + c_0 = 0$$

Nun sind drei Fälle zu unterscheiden:

- Wenn die charakteristische Gleichung **zwei verschiedene** Lösungen s_1 und s_2 besitzt (die Diskriminante $b^2 - 4ac$ also positiv ist), so lautet die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

  $$f := x \mapsto Ae^{s_1 x} + Be^{s_2 x}$$

  mit frei wählbaren Konstanten A und B.

- Wenn die charakteristische Gleichung **nur eine** Lösung s_1 besitzt (die Diskriminante $b^2 - 4ac$ also Null ist), so lautet die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

  $$f := x \mapsto (Ax + B)e^{sx}$$

  mit frei wählbaren Konstanten A und B.

- Wenn die charakteristische Gleichung keine Lösung hat (die Diskriminante $b^2 - 4ac$ also negativ ist) so lautet die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

  $$f := x \mapsto e^{rx} \left(A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)\right)$$

  mit frei wählbarem A und B, respektive in der Amplituden-Phasen-Form

  $$f := x \mapsto Ce^{rx} \cos(\omega x - \phi)$$

  mit frei wählbarem C und ϕ.

  Um die Parameter r und ω zu bestimmen, bringt man die rechte Seite der Lösungsformel für die charakteristische Gleichung auf die Form

  $$s = a \pm \sqrt{b}$$

  Dann ist

  $$r = a \text{ und } \omega = \sqrt{-b}$$

3.6 Inhomogene lineare Differenzialgleichungen

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differenzialgleichung für f

$$\sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)}(x) = s(x)$$

ist die Summe einer partikulären Lösung und der allgemeinen Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)}(x) = 0$$