Theoriesammlung Analysis 2

Danilo Bargen

March 15, 2011

HSR
HOCHSCHULE FÜR TECHNIK
RAPPERSWIL

Contents

1 Integralrechnung

1.1 Definition des Integrals

Die Definition des Integrals lautet

$$\int_a^b f = \lim_{n \mapsto \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x \right)$$

mit

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

und

$$x_i = a + i \cdot \Delta x$$

1.2 Summenformeln

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

1.3 Graphische Interpretation von Integralen

Wir betrachten das Integral

$$\int_a^b f$$

Wir nennen die Fläche, welche horizontal durch zwei Abszissen und vertikal durch die Abszisse-nachse und den Funktionsgraphen begrenzt sind als *Fläche unter dem Funktionsgraphen.* Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

- Wenn $a < b$ ist:
  Dann sind Flächen unter Funktionsgraphen mit positiver Ordinate positiv und solche mit negativen Ordinaten negativ zu zählen.
- Wenn $a > b$ ist:
  Dann sind Flächen unter Funktionsgraphen mit positiver Ordinate negativ und solche mit negativen Ordinaten positiv zu zählen.

1.4 Vorzeichenregeln und Additivität

Falls die beteiligten Integrale existieren, gilt

- Vertauschen der Integralgrenzen ändert das Vorzeichen des Integrals

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

- Aneinanderstossende Integrale können zusammengefasst werden.

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

1.5 Linearitätsregeln für Integrale

Seien f und g auf dem intervall $[a; b]$ integrierbare Funktionen und c eine Konstante. Dann gelten die beiden Linearitätsgesetze:

$$\int_a^b (f + g) = \left(\int_a^b f\right) + \left(\int_a^b g\right)$$

$$\int_a^b (c \cdot f) = c \int_a^b f$$

1.6 Simpson-Regel

Sei f eine auf $[a; b]$ viermal differenzierbare Funktion und n eine gerade Zahl. Ferner sei

$$x_i = a + i \cdot \Delta x \text{ mit } \Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ und } y_i = f(x_i)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + ... + 4y_{n-1} + y_n) \\ &= \frac{\Delta x}{3}\left(y_0 + y_n + 4\sum_{k=1}^{n/2} y_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{n/2-1} y_{2k}\right) \end{aligned}$$

eine Schätzung für das Integral $\int_a^b f$, wobei der Fehler

$$E_n = \left(\int_a^b f\right) - S_n = \frac{b-a}{180}\Delta x^4 f^{(4)}(\xi) = \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)$$

$$\text{für ein } \xi \in [a; b]$$

beträgt.

1.7 Integralfunktion

Gegeben sei eine auf dem Intervall $[a; b]$ integrierbare Funktion f. Dann heisst jede Funktion der Form

$$x \mapsto \int_c^x f$$

für eine Konstante $c \in [a; b]$ eine *Integralfunktion* von f.

1.8 Zusammenhang verschiedener Integralfunktionen

Verschiedene Integralfunktionen derselben Funktion unterscheiden sich nur durch eine Konstante. Wenn also

$$\Phi_c := x \mapsto \int\limits_c^x f \text{ und } \Phi_d := x \mapsto \int\limits_d^x f$$

dann gilt

$$\Phi_d = \Phi_c + k \text{ wobei } k \text{ konstant}$$

2 Fouriertransformation

...

3 Differenzialgleichungen

...