

Theoriesammlung Analysis 2

Danilo Bargaen

9. August 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Integralrechnung	3
1.1	Definition des Integrals	3
1.2	Summenformeln	3
1.3	Graphische Interpretation von Integralen	3
1.4	Vorzeichenregeln und Additivität	3
1.5	Numerische Berechnung von Integralen	4
1.5.1	Trapezregel	4
1.5.2	Fassregel	4
1.5.3	Simpson-Regel	4
1.6	Integralfunktion	5
1.7	Zusammenhang verschiedener Integralfunktionen	5
1.8	Hauptsatz der Infinitesimalrechnung	5
1.9	Stammfunktion	5
1.10	Unbestimmtes Integral	5
1.11	Integralfunktion - Stammfunktion	5
1.12	Berechnung von Integralen mit Hilfe von Stammfunktionen	6
1.13	Linearitätsregeln von Integralen	6
1.14	Integrale von Verkettungen mit linearen Funktionen	6
1.15	Integral des Produktes mit der eigenen Ableitung	6
1.16	Fläche zwischen Funktionsgraphen	6
2	Fouriertransformation	6
2.1	Linearkombinationen gleichperiodischer Funktionen	6
2.2	Fourier-Entwicklung periodischer Funktionen	7
2.2.1	Sinus-Kosinus-Form	7
2.2.2	Spektral-Form	7
2.3	Koordinatentransformation Kartesisch / Polar	7
2.4	Fourierreihen	8
2.5	Kriterium von Dirichlet	8
2.6	Fourierreihen gerader und ungerader Signale	9
2.7	Linearität der Fourierkoeffizienten	9
2.8	Spiegelung des Signalgraphen an der Ordinatenachse (Zeitumkehr)	10
2.9	Zeitskalierung	10
2.10	Zeitverschiebung	11
2.11	Fourierintegral	11
2.12	Satz von Dirichlet	12
3	Differenzialgleichungen	12
3.1	Die Differenzialgleichung	12
3.2	Explizite Differenzialgleichung	12
3.3	Methode von Euler	12
3.4	Verfahren von Runge-Kutta	13
3.5	Separierbare Differenzialgleichung	13
3.6	Lineare Differenzialgleichung	13
3.7	Linearität der Lösungen homogener lineare Differenzialgleichungen	14
3.8	Allgemeine Lösung der homogene Lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung	14
3.9	Inhomogene lineare Differenzialgleichungen	15

1 Integralrechnung

1.1 Definition des Integrals

Die Definition des Integrals lautet

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x \right)$$

mit

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

und

$$x_i = a + i \cdot \Delta x$$

1.2 Summenformeln

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

1.3 Graphische Interpretation von Integralen

Wir betrachten das Integral

$$\int_a^b f$$

Wir nennen die Fläche, welche horizontal durch zwei Abszissen und vertikal durch die Abszissenachse und den Funktionsgraphen begrenzt sind als *Fläche unter dem Funktionsgraphen*. Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

- Wenn $a < b$ ist:
Dann sind Flächen unter Funktionsgraphen mit positiver Ordinate positiv und solche mit negativen Ordinaten negativ zu zählen.
- Wenn $a > b$ ist:
Dann sind Flächen unter Funktionsgraphen mit positiver Ordinate negativ und solche mit negativen Ordinaten positiv zu zählen.

1.4 Vorzeichenregeln und Additivität

Falls die beteiligten Integrale existieren, gilt

- Vertauschen der Integralgrenzen ändert das Vorzeichen des Integrals

$$\int_a^b f = - \int_b^a f$$

- Aneinanderstossende Integrale können zusammengefasst werden.

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

1.5 Numerische Berechnung von Integralen

1.5.1 Trapezregel

Die allgemeine Formel für die Trapezregel lautet:

$$\int_a^b f = \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right] \Delta x$$

mit

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ und } x_i = a + i \cdot \Delta x$$

1.5.2 Fassregel

Bei der Fassregel wird die zu integrierende Funktion \int_a^b mit einer quadratischen Funktion, die durch die Punkte a , b und $\frac{b-a}{2}$ geht, approximiert.

$$\int_a^b f \approx \int_a^b q = \frac{y_a + 4y_m + y_b}{3} \Delta x$$

wobei

$$y_a = f(a), y_m = f\left(\frac{a+b}{2}\right), y_b = f(b), \Delta x = \frac{b-a}{2}$$

1.5.3 Simpson-Regel

Sei f eine auf $[a; b]$ viermal differenzierbare Funktion und n eine gerade Zahl. Ferner sei

$$x_i = a + i \cdot \Delta x \text{ mit } \Delta x = \frac{b-a}{n} \text{ und } y_i = f(x_i)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 4y_{n-1} + y_n) \\ &= \frac{\Delta x}{3} \left(y_0 + y_n + 4 \sum_{k=1}^{n/2} y_{2k-1} + 2 \sum_{k=1}^{n/2-1} y_{2k} \right) \end{aligned}$$

eine Schätzung für das Integral $\int_a^b f$, wobei der Fehler

$$E_n = \left(\int_a^b f \right) - S_n = \frac{b-a}{180} \Delta x^4 f^{(4)}(\xi) = \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi)$$

für ein $\xi \in [a; b]$

beträgt.

1.6 Integralfunktion

Gegeben sei eine auf dem Intervall $[a; b]$ integrierbare Funktion f . Dann heisst jede Funktion der Form

$$x \mapsto \int_c^x f$$

für eine Konstante $c \in [a; b]$ eine *Integralfunktion* von f .

1.7 Zusammenhang verschiedener Integralfunktionen

Verschiedene Integralfunktionen derselben Funktion unterscheiden sich nur durch eine Konstante. Wenn also

$$\varphi_c := x \mapsto \int_c^x f \text{ und } \varphi_d := x \mapsto \int_d^x f$$

dann gilt

$$\varphi_d = \varphi_c + k \text{ wobei } k \text{ konstant}$$

1.8 Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

Die Ableitung einer Integralfunktion einer stetigen Funktion ist gleich der integrierten Funktion.

$$\left(x \mapsto \int_a^x f \right)' = f$$

1.9 Stammfunktion

Sei f eine reelle Funktion. wenn es eine Funktion F gibt, so dass f ihre Ableitungsfunktion ist, also

$$F' = f$$

gilt, dann heisst F eine *Stammfunktion* von f .

1.10 Unbestimmtes Integral

Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f nennt man ihr *unbestimmtes Integral* und bezeichnet es mit

$$\int f \text{ (ohne Grenzen)}$$

Auch von Termen gibt es das unbestimmte Integral. Wenn etwa T ein Term und x eine Variable ist, schreibt man

$$\int T dx$$

1.11 Integralfunktion - Stammfunktion

Jede Integralfunktion einer stetigen Funktion ist eine Stammfunktion von ihr.

1.12 Berechnung von Integralen mit Hilfe von Stammfunktionen

Sei f eine auf dem Intervall $[a; b]$ stetige Funktion und F eine Stammfunktion von ihr. Dann gilt

$$\int_a^b f = F \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

1.13 Linearitätsregeln von Integralen

Seien f und g Funktionen und c eine Konstante. Dann gelten folgende Linearitätsregeln:

$$\begin{aligned}\int (f + g) &= \int f + \int g \\ \int cf &= c \int f\end{aligned}$$

1.14 Integrale von Verkettungen mit linearen Funktionen

Sei f eine integrierbare Funktion und F eine Stammfunktion von ihr. Dann gilt

$$\int f(ax + b)dx = \frac{F(ax + b)}{a} + c$$

wobei c eine beliebige Konstante ist.

1.15 Integral des Produktes mit der eigenen Ableitung

Eine Stammfunktion des Produktes einer Funktion mit ihrer eigenen Ableitungsfunktion ist gleich dem halben Quadrat dieser Funktion.

Beispiel:

$$\int \sin(x) \cos(x) dx = \frac{\sin(x)^2}{2} + c$$

1.16 Fläche zwischen Funktionsgraphen

f und g seien Funktionen, die im Intervall $[a; b]$ stetig sind. Dann ist die Fläche, welche oben und unten durch die Graphen der Funktionen f und g , sowie links und rechts durch die Abszissen a respektive b begrenzt wird, durch

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

gegeben.

2 Fouriertransformation

2.1 Linearkombinationen gleichperiodischer Funktionen

Linearkombinationen periodischer Funktionen derselben Periode sind ebenfalls periodisch mit dieser Periode. Oder formal: Seien f und g zwei Funktionen mit derselben Periode p und a sowie b zwei Konstanten. Dann ist auch die Funktion

$$af + bg$$

periodisch mit der Periode p .

2.2 Fourier-Entwicklung periodischer Funktionen

2.2.1 Sinus-Kosinus-Form

Wir betrachten ein stückweise stetiges, mit der Grundperiode T periodisches Signal s . Dann heisst die Funktion

$$f_n := t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)]$$

mit

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(k\omega_1 t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(k\omega_1 t) dt$$

für $k \in \{1 \dots n\}$ seine *Fourierentwicklung* der Ordnung n .

ω_1 heisst die *Grundkreisfrequenz*, a_0 die *Konstante*, a_k und b_k die *Koeffizienten*.

2.2.2 Spektral-Form

Neben dieser sogenannten *Sinus-Kosinus-Form* gibt es die für die Praxis wichtigere *Amplituden-Phasen-Form* oder *Spektral-Form*

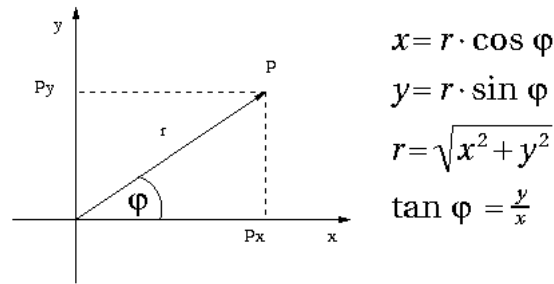
$$f_n := t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k)$$

Die Bestimmungsstücke der Amplituden-Phasen-Form können nicht direkt berechnet werden, sondern auf dem Umweg über die Koeffizienten der Sinus-Kosinus-Form. Dabei gilt folgender Zusammenhang:

- $A_0 = a_0$
- Ein Punkt in der Ebene, der die kartesischen Koordinaten (a_k, b_k) hat, hat die Polarkoordinaten (A_k, φ_k)

2.3 Koordinatentransformation Kartesisch / Polar

Koordinaten aus dem Kartesischen- oder Polarkoordinatensystem können folgendermassen transformiert werden:



Der Radius r aus dem Polarkoordinatensystem entspricht dabei A in der Spektralform einer Fourierentwicklung.

Um den Winkel φ im Intervall $(-\pi, \pi]$ zu berechnen, gibt es mehrere Möglichkeiten. Mithilfe des Arkustangens:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{für } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{für } x < 0, y < 0 \\ +\pi/2 & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

Falls man den Radius r bzw. A schon weiss, kann man auch den Arkuskosinus verwenden:

$$\varphi = \begin{cases} +\arccos \frac{x}{r} & \text{für } y \geq 0 \\ -\arccos \frac{x}{r} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

2.4 Fourierreihen

Die Funktion

$$\begin{aligned}
 f &:= t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)] \\
 &= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k)
 \end{aligned}$$

heisst die *Fourierreihe* von s .

2.5 Kriterium von Dirichlet

Sei s ein mit T periodisches Signal, das innerhalb einer Periode aus endlich vielen stetigen Stücken zusammengesetzt ist. Dann konvergieren die Werte der Fourierreihe f und zwar

- an Stellen t , an denen das Signal stetig ist, gegen den Signalwert

$$f(t) = s(t)$$

- an Stellen t , an denen das Signal nicht stetig ist, gegen den Mittelwert der beiden einseitigen Grenzwerte

$$f(t) = \frac{\lim_{\tau \rightarrow t-} (f(\tau)) + \lim_{\tau \rightarrow t+} (f(\tau))}{2}$$

2.6 Fourierreihen gerader und ungerader Signale

Ein gerades, mit der Periode T periodisches Signal g besitzt eine reine Kosinusreihe

$$f_g := t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t)] \quad \text{mit } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

wobei

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} g(t) \cos(k\omega_1 t) dt$$

gilt.

Ein ungerades, mit der Periode T periodisches Signal u besitzt eine reine Sinusreihe

$$f_u := t \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} [b_k \sin(k\omega_1 t)] \quad \text{mit } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

wobei

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \sin(k\omega_1 t) dt$$

gilt.

2.7 Linearität der Fourierkoeffizienten

s_1 und s_2 seien zwei Signale mit derselben Periode T . Die Konstanten ihrer Fourierreihen seien $a_{1,0}$ beziehungsweise $a_{2,0}$ und die Koeffizienten $a_{1,k}$, $b_{1,k}$ beziehungsweise $a_{2,k}$, $b_{2,k}$.

Dann ist die Summe beiden Signale

$$s = s_1 + s_2$$

periodisch mit derselben Periode und für die Konstante a_0 , sowie die Koeffizienten a_k und b_k ihrer Fourierreihe gelten folgende Beziehungen:

$$a_0 = a_{1,0} + a_{2,0}$$

$$a_k = a_{1,k} + a_{2,k}$$

$$b_0 = b_{1,k} + b_{2,k}$$

Ist ferner c eine Konstante, so hat auch das Signal

$$\tilde{s} = c \cdot s$$

dieselbe Periode T , und die Konstante und Koeffizienten der Fourierentwicklung sind

$$\tilde{a}_0 = c \cdot a_0$$

$$\tilde{a}_k = c \cdot a_k$$

$$\tilde{b}_k = c \cdot b_k$$

2.8 Spiegelung des Signalgraphen an der Ordinatenachse (Zeitumkehr)

Das Signal s sei periodisch mit der Periode T und seine Fourierreihe sei

$$\begin{aligned} f &:= t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)] \\ &= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \phi_k) \text{ mit } \omega_1 = \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

Dann hat das Signal

$$\tilde{s} := t \mapsto s(-t)$$

die Fourierreihe

$$\begin{aligned} \tilde{f} &:= t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) - b_k \sin(k\omega_1 t)] \\ &= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \phi_k) \end{aligned}$$

Merke: Durch die Spiegelung an der Ordinatenachse ändern die Koeffizienten der Sinusglieder und die Phasen das Vorzeichen, während alle anderen Bestimmungstücke unverändert bleiben.

2.9 Zeitskalierung

Das Signal s sei periodisch mit der Periode T und seine Fourierreihe sei

$$\begin{aligned} f &:= t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)] \\ &= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \phi_k) \text{ mit } \omega_1 = \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

Dann hat das Signal

$$\tilde{s} := t \mapsto s(ct) \text{ für } c > 0$$

die Fourierreihe

$$\begin{aligned} \tilde{f} &:= t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_2 t) + b_k \sin(k\omega_2 t)] \\ &= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_2 t - \phi_k) \end{aligned}$$

wobei

$$\omega_2 = c\omega_1$$

ist.

Merke: Durch die zeitliche Skalierung ändert einzige die Grundkreisfrequenz, während die Fourierkoeffizienten, die Amplituden und die Phasen unverändert bleiben.

2.10 Zeitverschiebung

Das Signal s sei periodisch mit der Periode T und seine Fourierreihe sei

$$\begin{aligned} f &:= t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)] \\ &= t \mapsto A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t - \phi_k) \text{ mit } \omega_1 = \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

Dann hat das Signal

$$\tilde{s} := t \mapsto s(t - \tau)$$

die Fourierreihe

$$\begin{aligned} t &\mapsto \tilde{a}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\tilde{a}_k \cos(k\omega_1 t) + \tilde{b}_k \sin(k\omega_1 t)] \\ &= t \mapsto \tilde{A}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \cos(k\omega_1 t - \tilde{\phi}_k) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 &= a_0 \\ \tilde{a}_k &= a_k \cos(k\gamma) - b_k \sin(k\gamma) \\ \tilde{b}_k &= a_k \sin(k\gamma) + b_k \cos(k\gamma) \\ \tilde{A}_k &= A_k \\ \tilde{\phi}_k &= \phi_k + k\gamma \end{aligned}$$

wobei

$$\gamma = \frac{\tau}{T} \times 2\pi$$

ist.

Merke: Bei einer zeitlichen Verzögerung des Signals ändern nur die Phasen, während die Konstante und die Amplituden gleich bleiben.

2.11 Fourierintegral

s sei ein Signal, welches absolut integrierbar ist, das heisst, für welches das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt$$

existiert. Dann existieren auch die beiden Integrale

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos(\omega t) dt \\ b(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin(\omega t) dt \end{aligned}$$

Die Funktion

$$f := t \mapsto \int_0^{\infty} [a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t)] d\omega$$

$$= t \mapsto \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos(\omega t - \phi(\omega))] d\omega$$

heisst die *Fouriertransformierte* oder das *Fourierintegral* von s . Die erste Form heisst *Sinus-Kosinus-Form*, die zweite *Spektralform* oder *Amplituden-Phasen-Form*. Wenn $(a(\omega), b(\omega))$ die kartesischen Koordinaten eines Punktes in der Ebene sind, dann sind $(A(\omega), \phi(\omega))$ die Polarkoordinaten dieses Punktes.

2.12 Satz von Dirichlet

Mit den Bezeichnungen der obigen Definition gilt:

- Wenn s an der Stelle t stetig ist, so ist $f(t) = s(t)$
- Wenn nicht, so ist $f(t) = \frac{1}{2} \left(\lim_{\tau \rightarrow t-} (s(\tau)) + \lim_{\tau \rightarrow t+} (s(\tau)) \right)$

3 Differenzialgleichungen

3.1 Die Differenzialgleichung

Eine Gleichung zwischen einer Funktion und ihren Ableitungsfunktionen heisst *Differenzialgleichung*. Die höchste vorkommende Ableitung heisst die *Ordnung* der Differenzialgleichung. Eine Differenzialgleichung hat in der Regel unendlich viele Lösungen. Die Lösungsmenge nennt man aus historischen Gründen auch die *allgemeine Lösung* und eine einzelne Lösung eine *spezielle Lösung*. Zusätzliche Bedingungen, welche dazu dienen, aus der allgemeinen Lösung eine spezielle auszuwählen, heissen *Randbedingungen* oder *Anfangsbedingungen* (wenn das Argument die Zeit darstellt). Eine Differenzialgleichung mit Randbedingungen wird auch als *Randwertproblem* oder *Anfangswertproblem* bezeichnet.

Merke: Angewandte Probleme, bei denen eine ganze Funktion gesucht ist, führen auf Differenzialgleichungen.

3.2 Explizite Differenzialgleichung

Eine Differenzialgleichung, in der die höchste Ableitung isoliert auf einer Seite des Gleichheitszeichens steht, heisst *explizit*. Eine explizite Differenzialgleichung für die Funktion f hat also die Gestalt

$$f^{(n)}(x) = G\left(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)\right)$$

im Spezialfall einer Differenzialgleichung 1. Ordnung somit

$$f'(x) = G(x, f(x))$$

In diesem Fall ist die rechte Seite also nur vom Argument x und vom Wert $f(x)$ der gesuchten Funktion abhängig; die Ableitung hingegen kommt rechts nicht vor.

3.3 Methode von Euler

Gegeben sei eine explizite Differenzialgleichung 1. Ordnung für die Funktion f

$$f'(x) = G(x, f(x))$$

und ein Punkt $P_n = (x_n, y_n)$ des Graphen einer speziellen Lösung.

Der Punkt $P_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1})$ wird wie folgt bestimmt:

Man wählt ein Δx mit kleinem Betrag und berechnet

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x$$

$$y_{n+1} = y_n + s_n \Delta x$$

mit

$$s_n = G(x_n, y_n)$$

3.4 Verfahren von Runge-Kutta

Gegeben sei eine explizite Differenzialgleichung 1. Ordnung für die Funktion f

$$f'(x) = F(x, f(x))$$

und ein Punkt $P_n = (x_n, y_n)$ des Graphen einer speziellen Lösung.

Der Punkt $P_{n+1} = (x_{n+1}, y_{n+1})$ wird wie folgt bestimmt:

Man wählt ein Δx mit kleinem Betrag. Die Abszisse von P_{n+1} ist

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x$$

Die Ordinate ist

$$y_{n+1} = y_n + s \Delta x$$

mit

$$s = \frac{s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4}{6}$$

wobei

1. $s_1 = F(x_n, y_n)$
2. $s_2 = F\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + s_1 \frac{\Delta x}{2}\right)$
3. $s_3 = F\left(x_n + \frac{\Delta x}{2}, y_n + s_2 \frac{\Delta x}{2}\right)$
4. $s_4 = F(x_n + \Delta x, y_n + s_3 \Delta x)$

3.5 Separierbare Differenzialgleichung

Eine Differenzialgleichung für die Funktion f heisst *separierbar*, wenn sie auf die Form

$$f'(x) = \frac{g(x)}{h(f(x))}$$

gebracht werden kann.

3.6 Lineare Differenzialgleichung

Eine Differenzialgleichung für die Funktion f der Form

$$a_0 f(x) + a_1 f'(x) + a_2 f''(x) + \cdots + a_n f^{(n)}(x) = s(x)$$

oder

$$\sum_{k=0}^n a_k f^{(k)}(x) = s(x)$$

wobei die a_k gegebene Konstanten und s eine vorgegebene Funktion ist, heisst *lineare Differenzialgleichung* mit konstanten Koeffizienten. Die a_k heissen die *Koeffizienten*, s die *Störfunktion*.

Wenn die Störfunktion die Nullfunktion ist, heisst die Differenzialgleichung *homogen*, andernfalls *inhomogen*.

3.7 Linearität der Lösungen homogener lineare Differenzialgleichungen

1. Wenn f_1 und f_2 Lösungen einer homogenen linearen Differenzialgleichung sind, so ist auch ihre Summe $f_1 + f_2$ eine Lösung.
2. Ist ferner f eine Lösung und c eine Konstante, so ist auch das Produkt $c \cdot f$ eine Lösung.

Man kann die beiden Gesetze auch so zusammenfassen:

Wenn f_1 und f_2 Lösungen einer homogenen linearen Differenzialgleichung sind, so ist auch jede Linearkombination $c_1 f_1 + c_2 f_2$, wobei c_1 und c_2 Konstanten sind, eine Lösung.

3.8 Allgemeine Lösung der homogene Lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung

Gegeben sei die homogene lineare Differenzialgleichung

$$c_2 f''(x) + c_1 f'(x) + c_0 f(x) = 0$$

Um sie zu lösen, formuliert man zuerst ihre *charakteristische Gleichung*.

$$c_2 s^2 + c_1 s + c_0 = 0$$

Nun sind drei Fälle zu unterscheiden:

- Wenn die charakteristische Gleichung **zwei verschiedene** Lösungen s_1 und s_2 besitzt (die Diskriminante also positiv ist), so lautet die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$f := x \mapsto A e^{s_1 x} + B e^{s_2 x}$$

mit frei wählbaren Konstanten A und B .

- Wenn die charakteristische Gleichung **nur eine** Lösung s_1 besitzt (die Diskriminante also Null ist), so lautet die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$f := x \mapsto (Ax + B) e^{s_1 x}$$

mit frei wählbaren Konstanten A und B .

- Wenn die charakteristische Gleichung keine Lösung hat (die Diskriminante also negativ ist) so lautet die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$f := x \mapsto e^{rx} (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))$$

mit frei wählbarem A und B , respektive in der Amplituden-Phasen-Form

$$f := x \mapsto C e^{rx} \cos(\omega x - \phi)$$

mit frei wählbarem C und ϕ .

Um die Parameter r und ω zu bestimmen, bringt man die rechte Seite der Lösungsformel für die charakteristische Gleichung auf die Form

$$s = a \pm \sqrt{b}$$

Dann ist

$$r = a \text{ und } \omega = \sqrt{-b}$$

3.9 Inhomogene lineare Differenzialgleichungen

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differenzialgleichung für f

$$\sum_{k=0}^n a_k f^{(k)}(x) = s(x)$$

ist die Summe einer partikulären Lösung und der allgemeinen Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung

$$\sum_{k=0}^n a_k f^{(k)}(x) = 0$$