

Numerische Integration und Normalverteilung

Carl-Ferdinand Oliver*, Tom Springer †, Jonas Münz ‡,
Max Valentin Orlemann §, Alexander Kögel ¶
TES23

30. Oktober 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Statistische Grundlagen	1
1.1	Normalverteilung	1
1.2	Standardnormalverteilung	2
1.3	t-Student-Verteilung	3
1.4	χ^2 -Verteilung	3
2	Trapezregel	4
2.1	Herleitung	4
2.2	Fehlerabschätzung	6
2.3	Vertrauensniveau γ	6
3	Umsetzung im Programm	7
3.1	Berechnung des Mittelwerts	7
3.2	Berechnung der Varianz	7
3.3	Berechnung der Konstante c durch numerische Integration	7
3.3.1	Ziel der Berechnung	7
3.3.2	Funktion der Standardnormalverteilung	7
3.4	Berechnung des Konfidenzintervalls	8

*es23035@lehre.dhbw-stuttgart.de
†es23026@lehre.dhbw-stuttgart.de
‡es23039@lehre.dhbw-stuttgart.de
§es23023@lehre.dhbw-stuttgart.de
¶es23031@lehre.dhbw-stuttgart.de

1 Statistische Grundlagen

1.1 Normalverteilung

Die Gaußsche Normalverteilung beschreibt die Verteilung einer stetigen Zufallsvariablen und ist durch zwei Parameter, den Mittelwert μ und die Standardabweichung σ , charakterisiert. Sie wird aufgrund ihrer Form auch als *Glockenkurve* (s. [Figure 1](#)) bezeichnet und ist symmetrisch um den Mittelwert.

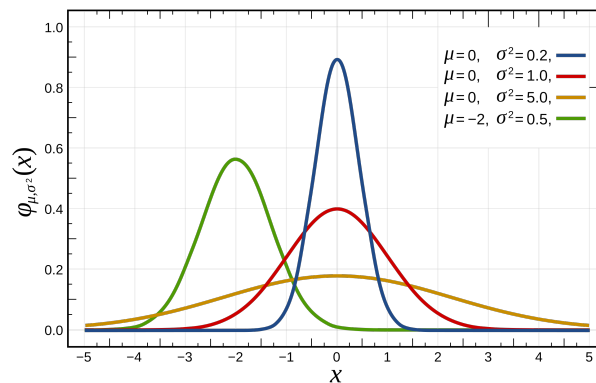


Abbildung 1: Auswahl verschiedener normalverteilten Funktionen [1]

Wichtige Eigenschaften

- Die Dichtefunktion der Normalverteilung lautet:

$$f(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

- Die Verteilungsfunktion ist gegeben durch:

$$\Phi(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

- Die Normalverteilung ist symmetrisch zum Mittelwert μ , hat ein Maximum bei $x = \mu$ und Wendepunkte bei $x = \mu \pm \sigma$.
- Sie ist normiert, d.h., das Integral über die gesamte Dichtefunktion ergibt 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten

Für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, die der Gaußschen Normalverteilung folgen, werden in der Praxis oft Tabellen oder eben numerische Verfahren verwendet, da die Integrale analytisch nicht lösbar sind (deswegen machen wir ja den ganzen Spaß mit der Trapezregel). Die Wahrscheinlichkeit für einen Bereich $a \leq X \leq b$ kann mit der Verteilungsfunktion berechnet

werden:

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

Wahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit der Standardabweichung

Da die Normalverteilung symmetrisch um den Mittelwert μ ist, lassen sich bestimmte Wahrscheinlichkeitsbereiche in Abhängigkeit von der Standardabweichung σ um μ angeben:

- Etwa 68,27% aller Werte einer normalverteilten Zufallsvariablen liegen im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$, also innerhalb einer Standardabweichung um den Mittelwert.
- Etwa 95,45% der Werte befinden sich im Intervall $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$, also innerhalb von zwei Standardabweichungen.
- Rund 99,73% der Werte liegen im Intervall $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$, also innerhalb von drei Standardabweichungen.

Diese Bereiche werden auch als *Empirische Regel* oder *68-95-99,7-Regel* bezeichnet und sind besonders nützlich zur Einschätzung, wie wahrscheinlich es ist, dass eine Zufallsvariable in einem bestimmten Bereich um den Mittelwert liegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert weiter als 3σ vom Mittelwert entfernt liegt, ist sehr gering und beträgt nur ca. 0,27%.

In der Praxis wird die Normalverteilung zur Modellierung vieler realer Phänomene verwendet, wie z.B. Fehlerverteilungen, Körpergrößen oder Filteralgorithmen (z.B. Kalman Filter/EKF), da viele natürliche Prozesse einem normalverteilten Muster folgen. [2] [1]

1.2 Standardnormalverteilung

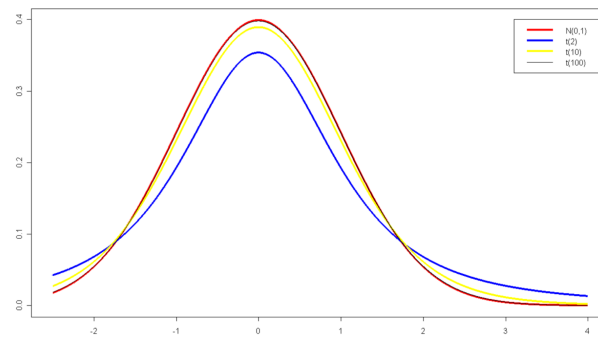
Eine Normalverteilung lässt sich durch die Standardisierung mit $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ auf die sogenannte Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$ zurückführen, die Mittelwert 0 und Standardabweichung 1 hat:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

Die Standardnormalverteilung ist ein nützliches Werkzeug in der Statistik, da sie es ermöglicht, beliebige Normalverteilungen durch eine Transformation auf diese Standardform zu bringen. Dies wird durch die Berechnung des *z-Scores* erreicht:

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Der z-Wert gibt an, wie viele Standardabweichungen ein Wert X vom Mittelwert entfernt ist. Diese Transformation erleichtert die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten und statistischen Tests, da die Eigenschaften der Standardnormalverteilung bekannt sind und in Tabellen dokumentiert werden. Die Standardnormalverteilung ist also quasi eine Normalverteilung wo der Hochpunkt bei $x = 0$ liegt

Abbildung 2: Dichten von t -verteilten Zufallsgrößen [3]

1.3 t -Student-Verteilung

Die standardisierte Schätzfunktion des Stichprobenmittelwerts normalverteilter Daten ist nicht mehr normalverteilt, sondern t -verteilt, wenn die zur Standardisierung des Mittelwerts benötigte Varianz des Merkmals unbekannt ist und mit der Stichprobenvarianz geschätzt werden muss. Seine t -Verteilung ermöglicht die Berechnung der Verteilung der Differenz zwischen dem Mittelwert der Stichprobe und dem wahren Mittelwert der Grundgesamtheit.

Die t -Werte hängen vom Signifikanzniveau sowie von der Stichprobengröße n ab und bestimmen das Vertrauensintervall sowie die Aussagekraft der Schätzung des Mittelwertes. Die t -Verteilung wird mit wachsendem n schmaler und konvergiert für $n \rightarrow \infty$ zur Standardnormalverteilung. Hypothesentests, bei denen die t -Verteilung Verwendung findet, bezeichnet man als t -Tests. [3] Die t -Student-Verteilung wird verwendet, wenn die Stichprobengröße klein ist ($n < 30$) und die Varianz der Grundgesamtheit unbekannt ist. Sie ähnelt der Normalverteilung (s. Figure 2), hat jedoch „schwerere“ Ränder. Dies bedeutet, dass extremere Werte wahrscheinlicher sind als bei der Normalverteilung. Die t -Student-Verteilung hat einen Parameter, die Freiheitsgrade df , der die Form der Verteilung bestimmt. Je größer die Freiheitsgrade, desto mehr nähert sich die t -Verteilung der Normalverteilung an. Bei einer großen Stichprobengröße (ca. $df > 30$) ist der Unterschied zur Normalverteilung vernachlässigbar. In der Statistik wird die t -Verteilung häufig für Hypothesentests verwendet. Sie spielt auch bei der Berechnung von Konfidenzintervallen eine wichtige Rolle, wenn die Varianz der Grundgesamtheit nicht bekannt ist.

1.4 χ^2 -Verteilung

Die χ^2 -Verteilung entsteht als Summe der quadrierten z -Werte aus einer Standardnormalverteilung. Sie wird häufig in der Statistik verwendet, um Varianzen zu schätzen und in Hypothesentests wie dem χ^2 -Anpassungstest oder dem χ^2 -Test zur Unabhängigkeit. Die χ^2 -Verteilung hat einen Parameter, die Freiheitsgrade df , der die Form der Verteilung bestimmt. Sie ist asymmetrisch und nur für positive Werte definiert. Für $df \geq 30$ nähert sich die χ^2 -Verteilung zunehmend der Normalverteilung an. Ein häufiges Anwendungsgebiet der χ^2 -Verteilung ist die Analyse von Kontingenztafeln, bei denen überprüft wird, ob zwei kategoriale Variablen unabhängig voneinander sind.

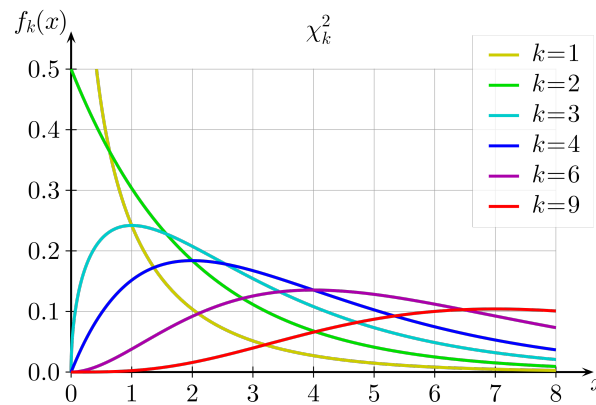


Abbildung 3: Weitere Einzelheiten Dichten der Chi-Quadrat-Verteilung mit unterschiedlicher Anzahl an Freiheitsgraden k [4]

2 Trapezregel

Diese brauchen wir zur numerischen Integration, beispielsweise um Wahrscheinlichkeit in einer Normalverteilung zu berechnen. Diese Integrale können, wie in [section 1](#) besprochen, nicht analytisch gelöst werden und müssen damit genähert werden. Die Trapezregel ist eine einfache Methode hierzu.

2.1 Herleitung

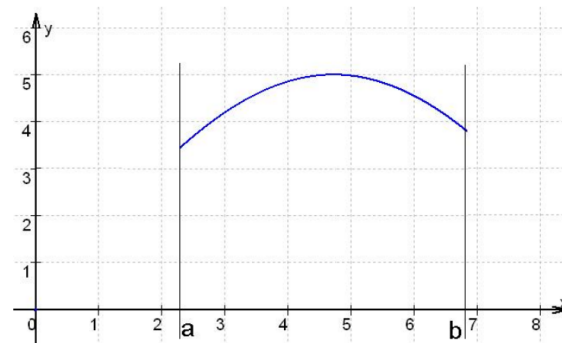


Abbildung 4: Keplersche Fassregel [5]

Wir betrachten eine Funktion f , deren Schaubild im gewünschten Intervall $I = [a, b]$ in [Figure 2.1](#) gezeigt ist.

A. Die zwei Sehnentrapeze

Zur Flächenberechnung zeichnen wir zwei Sehnentrapeze in das gegebene Schaubild, wie in [Figure 2.1](#) zu sehen ist. Für die Fläche eines Trapezes mit den Grundseiten a und c und der Höhe h gilt:

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{a + c}{2} \cdot h = m \cdot h$$

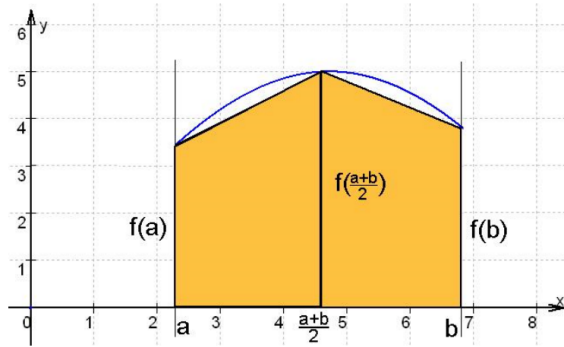


Abbildung 5: Sehnentrapeze für die anstehende Rechnung

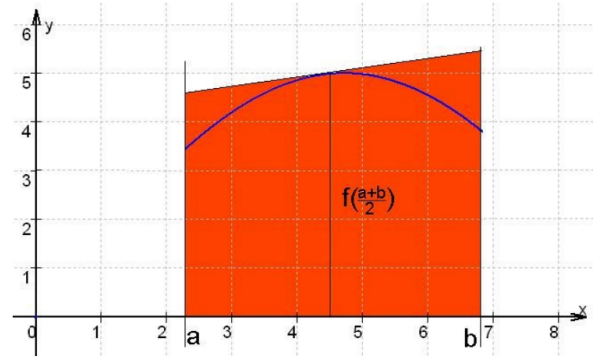


Abbildung 6: Tangententrapez [5]

Übertragen auf die beiden Sehnentrapeze aus Figure 5 ergibt sich die Gesamtfläche S als:

$$S = \frac{b-a}{2} \cdot \left(\frac{f(a)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(b)}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{b-a}{2} \cdot \left(\frac{f(a)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(b)}{2} \right)$$

B. Das Tangententrapez

Nun legen wir ein weiteres Tangententrapez in das Schaubild, wie in Figure 6 dargestellt. Nach der Trapezformel ergibt sich:

$$T = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a)$$

Da wir **doppelt so viele Sehnentrapeze wie Tangententrapeze** haben, gewichten wir die Flächen entsprechend. Die Gesamtfläche $I[f]$ nähert sich durch:

$$I[f] \approx A = \frac{1}{3} \cdot (2S + T)$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

Die Keplersche Fassregel

Ist die Funktion f auf dem Intervall $I = [a, b]$ stetig, so gilt die Keplersche Fassregel:

$$I[f] \approx A = \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

Dabei ist zu beachten, dass die Keplersche Fassregel nur dann gute Näherungswerte liefert, wenn sich die Funktion im betrachteten Intervall durch eine Parabel annähern lässt (z.B. eine Normalverteilung). Daher ist es ratsam, das Intervall $[a, b]$ in **viele kleine, gleich große Teilintervalle** zu unterteilen und die Keplersche Fassregel auf jedes Teilintervall anzuwenden. Dabei sollte für eine bessere Genauigkeit das Intervall in möglichst viele, kleine Intervalle unterteilt werden. [5]

2.2 Fehlerabschätzung

Für die Fehlerberechnung brauchen wir mehrere Schritte:

Definition des Fehlers

Der Fehler wird definiert als die Breite des Konfidenzintervalls, die berechnet wird als:

$$\text{Breite} = 2 \cdot c \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Berechnung des Standardfehlers

Der Standardfehler (SE) des Mittelwerts wird berechnet als:

$$SE = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Schätzung des Fehlers

Die Fehlerabschätzung kann dann wie folgt berechnet werden:

$$\text{Fehlerabschätzung} = c \cdot SE$$

Iterative Fehlerabschätzung

Um die Auswirkungen verschiedener Stichprobengrößen zu untersuchen, kann das Konfidenzintervall für unterschiedliche Stichproben berechnet werden. Die Variabilität in der Breite der Intervalle gibt Aufschluss über die Stabilität der Schätzungen.

Interpretation

Ein kleiner Fehler zeigt an, dass das Konfidenzintervall eine präzise Schätzung des wahren Mittelwerts bietet. Ein größerer Fehler deutet auf mögliche Unsicherheiten in den Daten oder eine unzureichende Stichprobengröße hin.

2.3 Vertrauensniveau γ

Das Vertrauensniveau γ ist ein Konzept, das angibt, wie sicher wir sind, dass ein berechnetes Konfidenzintervall den wahren Wert eines Parameters enthält. Es wird häufig als Dezimalzahl zwischen 0 und 1 dargestellt, wobei typische Werte 0.95 (95%) und 0.99 (99%) sind.

- **Einfluss auf die Breite des Intervalls:** Ein höheres Vertrauensniveau führt zu einem breiteren Konfidenzintervall. Das bedeutet, dass wir mit größerer Sicherheit sagen können, dass der wahre Wert in diesem Intervall liegt. Ein niedrigeres Vertrauensniveau hingegen führt zu einem schmaleren Intervall, was die Schätzung präziser macht, aber auch das Risiko erhöht, dass der wahre Wert außerhalb liegt.
- **Berechnung:** Das Vertrauensniveau wird verwendet, um kritische Werte zu bestimmen, die notwendig sind, um das Konfidenzintervall zu berechnen. Beispielsweise erfordert ein

95%-Konfidenzintervall die Verwendung eines spezifischen z-Werts aus der Normalverteilung, um den Bereich zu bestimmen, in dem der wahre Parameter mit 95%iger Sicherheit liegt.

Insgesamt ist das Vertrauensniveau γ ein zentrales Element statistischer Analysen. Es ermöglicht uns, die Unsicherheit in unseren Schätzungen zu quantifizieren und zu kommunizieren.

3 Umsetzung im Programm

3.1 Berechnung des Mittelwerts

Der Mittelwert (μ) der Daten wird berechnet, indem die Summe aller Datenpunkte durch die Anzahl der Punkte (n) geteilt wird:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i$$

3.2 Berechnung der Varianz

Die Varianz (σ^2) wird berechnet, um zu messen, wie die Daten um den Mittelwert streuen. Der Code verwendet die Formel für die erwartungstreue Varianz:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (A_i - \mu)^2$$

Die Verwendung von $n - 1$ anstelle von n ist wichtig, um eine Verzerrung der Schätzung zu vermeiden (Bessel-Korrektur).

3.3 Berechnung der Konstante c durch numerische Integration

Der Code verwendet die Trapezregel, um die Fläche unter der Standardnormalverteilung zu berechnen. Die Trapezregel ist eine numerische Methode zur Approximation des Integrals einer Funktion.

3.3.1 Ziel der Berechnung

Die Fläche unter der Standardnormalverteilung wird so lange berechnet, bis sie einen bestimmten Zielwert erreicht, der durch $(\gamma + 1)/2$ definiert ist. Dies entspricht dem gewünschten Konfidenzniveau (z. B. 99% oder 0,99).

3.3.2 Funktion der Standardnormalverteilung

Die Funktion `standardnormalverteilung(x)` berechnet den Wert der Standardnormalverteilung für einen gegebenen Wert x :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

3.4 Berechnung des Konfidenzintervalls

Nach der Berechnung der Konstante c wird das Konfidenzintervall mit der folgenden Formel berechnet:

$$\text{Oben} = \mu + c \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

$$\text{Unten} = \mu - c \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$

Dies gibt das Konfidenzintervall an, in dem mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit (z.B. 99%) der wahre Mittelwert der Grundgesamtheit liegt.

Literatur

- [1] Wikipedia. *Normalverteilung* — *Wikipedia, die freie Enzyklopädie*. [Online; Stand 30. Oktober 2024]. 2024. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Normalverteilung&oldid=248003193>.
- [2] J. Gehrke. *MATHEMATIK 4 – Mathematische Anwendungen; Statistik Grundlagen*. ZDM und SKT an der DHBW Stuttgart, Abgerufen am 28.10.2024. 2018.
- [3] Wikipedia. *Studentsche t-Verteilung* — *Wikipedia, die freie Enzyklopädie*. [Online; Stand 29. Oktober 2024]. 2024. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Studentsche_t-Verteilung&oldid=249125602.
- [4] Wikipedia. *Chi-Quadrat-Verteilung* — *Wikipedia, die freie Enzyklopädie*. [Online; Stand 29. Oktober 2024]. 2024. URL: <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Chi-Quadrat-Verteilung&oldid=249446964>.
- [5] J. Gehrke. *Skript zur Mathematik 4 Mathematische Anwendungen*. Stand: 2022, ZDM und SKT an der DHBW Stuttgart, Abgerufen am 28.10.2024. 2022.