

TALLER DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
GRADO EN MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Ejercicios del Grupo 3 Grafos, Polígonos y Poliedros

Elena Tudela Castro
Raimundo Morales Solier
Simón López Vico
Francisco Gallego Salido
Alberto Jesús Durán López

31 de mayo de 2020

1. Grafos y Poliedros

1.1. Actividades I.1

1. Coger varios triángulos equiláteros y pegarlos unos con otros hasta conseguir un poliedro.

Los poliedros que se pueden obtener uniendo varios triángulos equiláteros pegados son: tetraedro, octaedro e icosaedro.

2. Une tres triángulos equiláteros a un punto y completa la figura con otro.

Se obtiene un tetraedro.

3. Construye un poliedro que tenga 4 triángulos equiláteros en todos sus vértices. Lo mismo con cinco triángulos. ¿Es posible con 6 o más?

Con 4 triángulos equiláteros por vértice se obtiene un octaedro y, con 5, un icosaedro.

No sería posible una construcción de 6 o más triángulos equiláteros por vértice ya que estamos trabajando con figuras geométricas cuyo ángulo interno sea menor que 2π . Con seis triángulos el ángulo interno sería 2π y tendríamos un plano, y con más de seis estaríamos en un espacio hiperbólico.

4. Un poliedro regular es aquel cuyas caras son polígonos regulares congruentes y con el mismo número de polígonos en cada vértice. Uniendo polígonos de 3,4,5,6,7... lados construye todos los poliedros regulares posibles. ¿Cómo los llamarías? ¿Cuándo vale $V-A+C$?

Veamos respecto a cada caso:

- Con 3: tetraedro, octaedro e icosaedro.
- Con 4: cubo.
- Con 5: dodecaedro.

A partir de 6 no se podría por lo comentado en el ejercicio anterior.

En todos ellos se cumple $V - A + C = 2$

1.2. Actividades I.2

1. ¿Cuál es la suma de los ángulos de un polígono de n lados en el plano?

La suma de los ángulos es $(n - 1) \cdot \pi$.

2. Determina el ángulo total de defecto de los 5 poliedros regulares y de los construidos en la actividad anterior.

Polígono	Nº vértices	Ángulo de defecto por vértice	Ángulo de defecto total
Tetraedro	4	π	4π
Octaedro	6	$2\pi/3$	4π
Cubo	8	$\pi/2$	4π
Icosaedro	12	$\pi/3$	4π
Dodecaedro	20	$\pi/5$	4π

Haciendo los cálculos obtenemos que el ángulo total de defecto para todos ellos es 4π , tanto en regulares como no regulares

1.3. Actividad 1.3

1. Discute con otros compañeros una posible demostración de la fórmula de Descartes.

Para empezar, denotemos los siguientes términos:

- Ángulo de defecto de un vértice i : $T_i = 2\pi - S_i$, donde $S_i = \{\text{Suma de los ángulos, dentro de las caras, que se unen en el vértice } i\}$.
- Ángulo total de defecto, $T = \{\text{Suma de los ángulos de defecto en todos los vértices del poliedro}\} = 4\pi$.

Sea S la suma total de todos los ángulos de todas las caras del poliedro y V el número de vértices; se tendrá entonces que:

$$S = \sum_{i=1}^V S_i = \sum_{i=1}^V (2\pi - T_i) = 2\pi V - \sum_{i=1}^V T_i = 2\pi V - T$$

Por otro lado, consideramos las caras de nuestro poliedro. En cada cara hay n aristas, y se cumple que la suma de los ángulos de dicha cara es $\pi(n-2)$, como ya hemos visto anteriormente.

Denotando C_n al número de caras que tienen n aristas (con n desde 3 hasta un k) y, sabiendo que $\sum_{n=3}^k nC_n = 2A$ (A = aristas, ya que cada arista pertenece a dos caras y por ello se cuenta 2 veces), se cumplirá que:

$$S = \sum_{n=3}^k (n-2)\pi C_n = \left(\sum_{n=3}^k nC_n - 2 \sum_{n=3}^k C_n \right) \pi = (2A - 2C)\pi$$

Por tanto, utilizando todo lo anterior y despejando:

$$2\pi V - T = (2A - 2C)\pi \implies T = 2\pi V - (2A - 2C)\pi \implies T = 2\pi(C - A + V)$$

Pero como sabemos que $T = 4\pi$, finalmente obtenemos:

$$2 = C - A + V$$

1.4. Actividades 1.4

1. El ángulo de defecto de un poliedro convexo puede calcularse rotando el poliedro en un círculo alrededor de su vértice. Explica cómo.

Ponemos una cara del poliedro sobre un papel y marcamos una de las aristas que sale del vértice que hemos elegido. Rotamos el poliedro manteniendo la arista marcada sobre el papel. Repetimos el proceso hasta que la primera arista que hemos utilizado vuelva a tocar el papel, y marcamos la arista. El ángulo entre las dos aristas señaladas será el ángulo de defecto del vértice.

2. Si rotamos el poliedro a lo largo de una curva cerrada en la superficie del mismo que no pase por los vértices, ¿qué ángulo de defecto podemos medir y cómo?

Distingamos varias posibilidades:

- Si la curva no rodea ningún vértice no podemos medir ningún ángulo.
- Si la curva cerrada rodea un único vértice (que es lo mismo que rodear $n - 1$ vértices en un poliedro de n vértices) estamos en el caso del ejercicio anterior.
- Si la curva engloba todos los vértices, tendremos el ángulo de defecto total, T .
- Si la curva engloba k vértices, tendremos $2\Pi - (\text{Suma de los ángulos, dentro de las caras, que se unen en cada vértice } k_i)$. En caso de que el poliedro sea regular, podremos obtener el ángulo de defecto de un vértice dividiendo entre k .

El método para medirlo sería igual que en el ejercicio anterior, rotando por las aristas donde pasa la curva.

1.5. Actividades Imaginación

1. Leer tu nombre al revés.

Nombres de los integrantes del grupo al revés:

- Odnumiar.
- Nomis.
- Anele.
- Otrebla.
- Ocsicnarf.

2. Divide en tres partes iguales los lados de un triángulo equilátero y recorta las esquinas que resultan. ¿Qué figura queda?

Quedará un hexágono.

3. Pon dos cuadrados superpuestos y rota uno de 45 grados. ¿Cuál es la intersección de los dos?

Si lo rotamos tomando como punto de rotación el centro del cuadrado, obtendremos un octógono.

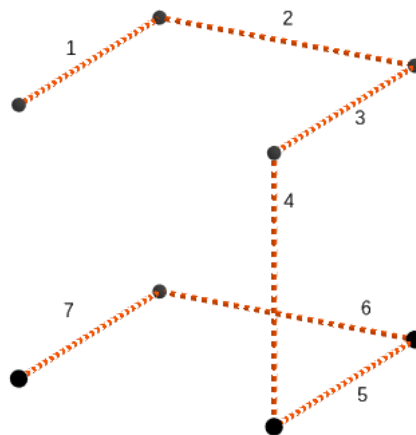
- Divide en tres partes iguales los lados de un cuadrado y recorta las esquinas. ¿Qué figura queda?

De nuevo, obtenemos un octógono.

- ¿Cuántas aristas tiene un cubo?

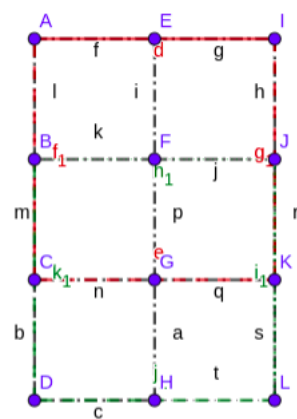
Tiene doce aristas.

- En la silueta que determinan las aristas de un cubo, traza un arco cerrado que pase una vez y solo una por cada vértice.



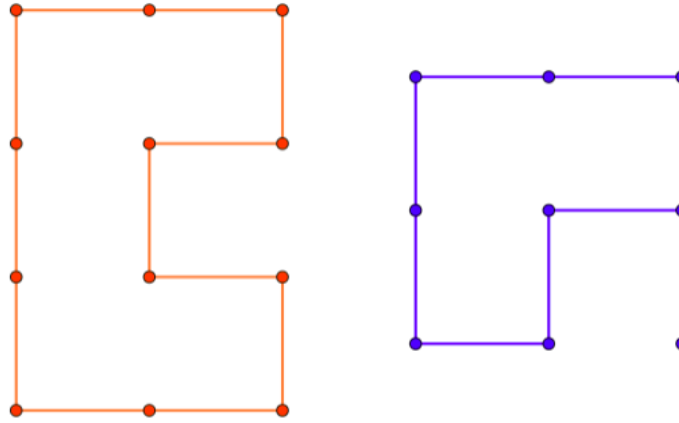
- En una tabla de puntos 3x4 del plano, conéctalos vertical y horizontalmente. ¿Cuántos cuadrados se determinan?

Se determinan seis cuadrados pequeños y otros dos formados por la unión de cuatro de los pequeños.

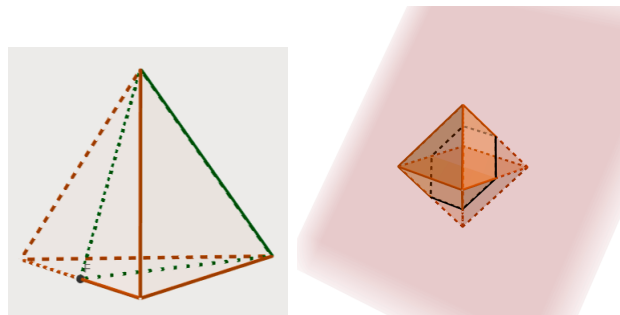


Habrán 6 cuadrados pequeños (en negro) y 2 cuadrados grandes (rojo y verde)

8. Encuentra un arco cerrado a lo largo de las aristas de la tabla anterior que pase por cada vértice uno y sólo una vez. ¿Puede hacerse lo mismo con una tabla 3x3? Utilizando la tabla anterior podremos encontrar dicho arco, pero no podrá encontrarse para una tabla 3x3.



9. ¿Cuántos colores son necesarios para colorear las caras de un cubo?
Con 3 colores distintos para que dos caras que comparten aristas no tengan el mismo color.
10. ¿Cuál es el número de caras, vértices y aristas de un tetraedro? ¿Y de un octaedro?
Tetraedro: 4 caras, 6 aristas y 4 vértices.
Octaedro: 8 caras, 12 aristas y 6 vértices.
11. Descansa un tetraedro sobre una cara y córtalo por la mitad. ¿Qué forma tiene la sección? Haz lo mismo con un octaedro.
La figura resultante es un triángulo para el tetraedro y un hexágono para el octaedro.



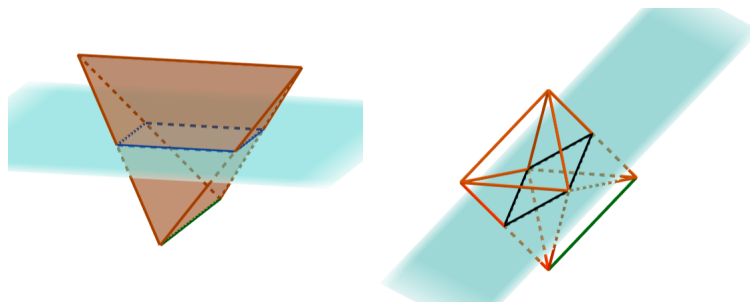
(a)

12. Corta las esquinas de un triángulo equilátero hasta los puntos medios de sus lados. ¿Qué figura queda?

La figura resultante es un triángulo equilátero rotado.

13. Descansa en equilibrio un tetraedro sobre una arista y corta horizontalmente por la mitad. ¿Qué forma tiene la sección? Haz lo mismo con un octaedro.

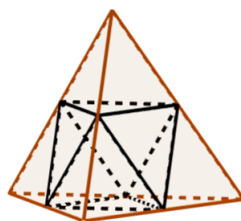
La figura resultante es un cuadrado en ambos casos.



(b)

14. Corta las esquinas de un tetraedro hasta los puntos medios de sus lados. ¿Qué figura queda?

Un octaedro.



15. Si miras la silueta de un cubo desde uno de los vértices, ¿Qué silueta ves?

La silueta de un hexágono.

16. ¿Cuántos colores necesitamos para colorear un octaedro?

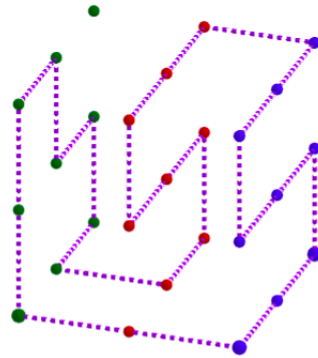
Nos basta con dos colores para colorear el octaedro.

17. Corta horizontalmente por la mitad un octaedro apoyado en equilibrio sobre un vértice. ¿Qué forma tiene la sección?

Como vimos en el ejercicio 13, la sección tiene forma de cuadrado.

18. En una tabla de puntos 3x3x3 en el espacio, únelos a lo largo, ancho y alto. ¿Puedes encontrar un camino cerrado que pase por todos los vértices menos uno, una y sólo una vez? ¿Y por todos?

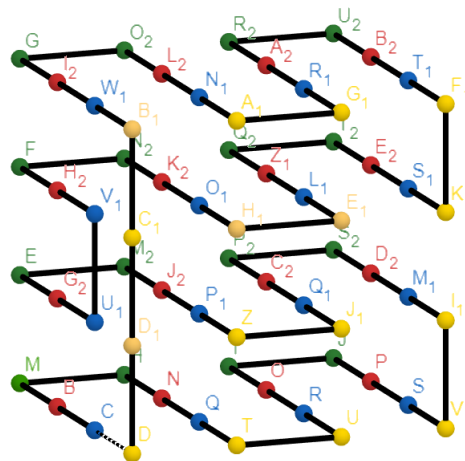
Como vemos en la siguiente imagen, podemos encontrar un camino cerrado que pase por todos menos 1.



Por otra parte, no podemos hacerlo con todos los puntos porque no podemos encontrar un camino cerrado hamiltoniano que pase por todos los vértices.

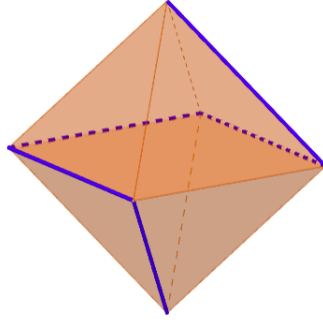
19. Lo mismo que el anterior con una tabla de 4x4x4 puntos.

En este caso, no podremos hacerlo con todos los puntos menos 1 pero sí podremos encontrar un camino cerrado que pase por todos los puntos



20. Imagina un arco a través de las aristas de un octaedro que pase por todos los vértices una y sólo una vez.

Lo dibujamos en Geogebra y obtenemos lo siguiente:



2. Polígonos

1. Prueba que la suma de los ángulos interiores de un polígono de n vértices es $(n-2)\pi$.

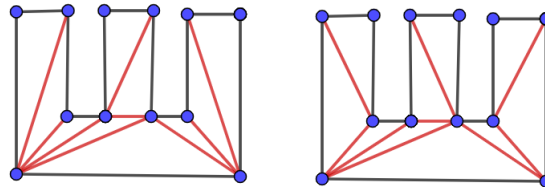
Toda triangulación de un polígono de n vértices tiene $n-2$ triángulos, y como la suma de los ángulos de un triángulo es π , tendremos que la suma total de los ángulos interiores es $(n-2)\pi$.

2. Prueba que el ángulo total de rotación alrededor del borde de un polígono es 2π .

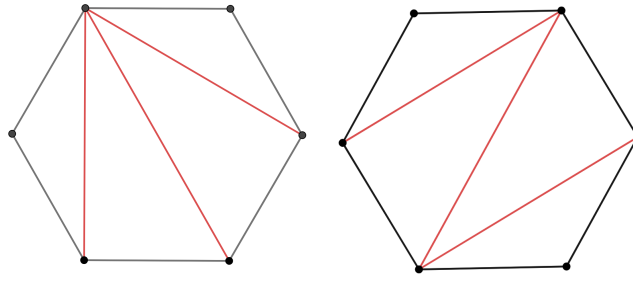
Tenemos en cuenta el apartado anterior, es decir, $\sum_{i=1}^n \text{ÁnguloInterior}_i = (n-2)\pi$

$$\text{Ángulo total de rotación} = \sum_{i=1}^n (\pi - \text{ÁnguloInterior}_i) = n\pi - (n-2)\pi = 2\pi$$

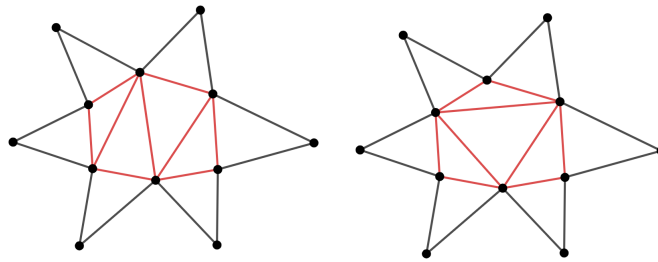
3. Encuentra diferentes triangulaciones de los polígonos de la figura.



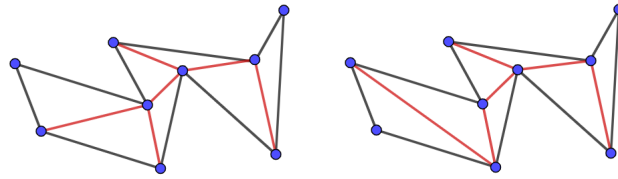
(a)



(b)



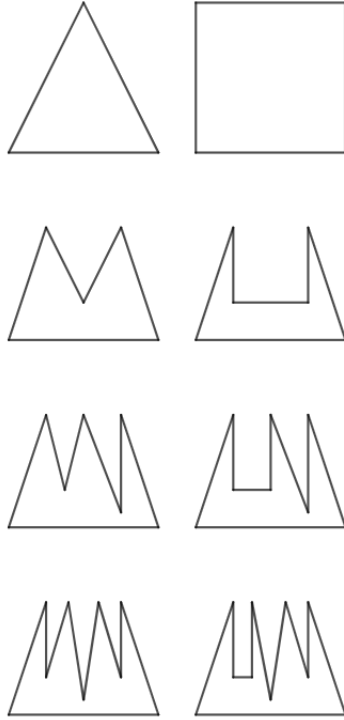
(c)



(d)

4. Para todo n encuentra un polígono con una única triangulación.

Para que la triangulación sea única, el polígono ha de ser como los que mostramos en la imagen inferior (hasta $n = 10$).



Para los n impares, debemos “aislar” los vértices como si en grupos con forma similar a $n = 3$ y $n = 5$ (lo podemos ver en el caso $n = 9$) y de la misma manera con los n pares utilizando los mismos valores que para el caso impar junto a $n = 6$ (lo vemos en el caso $n = 10$).

Referencias

[1] APUNTES DE CLASE