Sobre polígonos

Antonio Martínez López

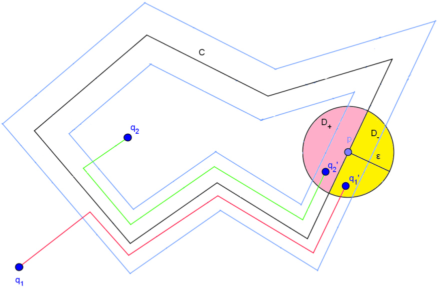
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Taller de Geometría y Topología
Curso 2019- 2020

Teorema de la curva poligonal de Jordan

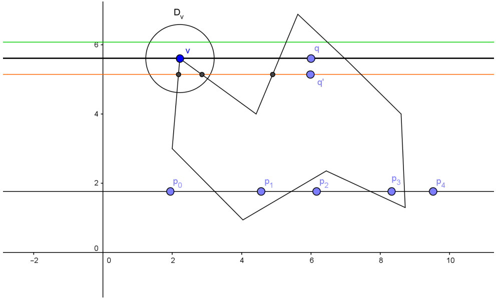
Toda curva plana poligonal, simple y cerrada divide al plano en dos componentes (una acotada y otra no) cuya frontera común es la curva.

- $\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{C}$ tiene a lo más dos componentes conexas.



- $\mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{C}$ tiene al menos dos componentes conexas.

  Si $\phi : \mathbb{R}^2 \backslash \mathcal{C} \longrightarrow \{0, 1\}$, $\phi(q) = |L_q \cap \mathcal{C}|$ módulo dos, ϕ es localmente constante y biyectiva.



- $\mathcal{C}$ es frontera común de $\phi^{-1}(0)$ y $\phi^{-1}(1)$.

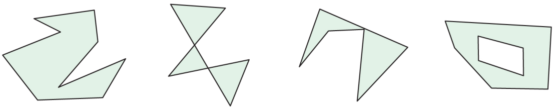
$$\overline{\phi^{-1}(0)} \subset \overline{\phi^{-1}(0) \cup \mathcal{C}} = \overline{\mathbb{R}^2 \backslash \phi^{-1}(1)} = \mathbb{R}^2 \backslash \phi^{-1}(1)$$

  Así $Fr(\phi^{-1}(0)) \subseteq \mathcal{C}$.

  Es evidente que
$$\mathcal{C} \subset \overline{\phi^{-1}(0)}.$$

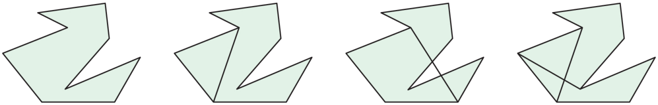
- $\phi^{-1}(0)$ es no acotada pues si $R >> 0$, $\phi^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^2 \backslash B_R$ y $\phi^{-1}(1) \subset B_R$ está acotada.

- Un polígono es la región cerrada del plano delimitado por una colección finita de segmentos de línea (lados) que forman una curva cerrada que no se interseca a sí misma. Los puntos donde lados adyacentes se encuentran se llaman vértices.
- Los polígonos son para la geometría plana, como los enteros a la aritmética. Y las triangulaciones son factorizaciones primarias de los polígonos (pero sin el "teorema fundamental de la aritmética"que garantiza una factorización única)



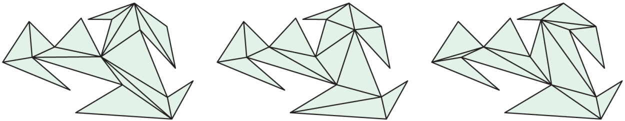
(a) (b) (c) (d)

- Una diagonal de un polígono es un segmento de línea que conecta dos vértices de P y se encuentra en el interior de P, sin tocar ∂P excepto en sus puntos finales.
- Dos diagonales son no cruzadas si no comparten puntos interiores



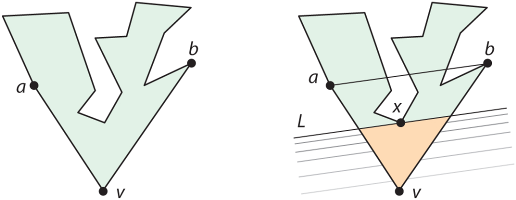
(a) (b) (c) (d)

- Una triangulación de P es una descomposición en triángulos por un conjunto máximo de diagonales no cruzados.
- Máximo significa que no se puede agregar más diagonales al conjunto sin cruzarlas.
- Las triangulaciones de un polígono no son únicas:



Existencia de diagonales

Todo polígono con más de tres vértices tiene una diagonal.



Triangulación

Todo polígono tiene una tringulación

- Usar inducción sobre el número de vértices.

Contando

Teorema

Toda tringulación de un polígono con n vértices tiene $n-2$ trińgulos y $n-3$ diagonales.

- Aplicar inducción sobre n

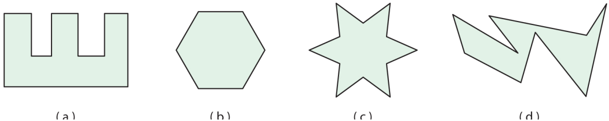
Orejas

tres vértices consecutivos a, b y c de P forman una oreja si ac es diagonal del P.

- Todo polígono con más de tres vértices tiene al menos dos orejas.

Ejercicios

- Prueba que suma de los ángulos interiores de un polígono de n vértices es $(n-2)\pi$
- Prueba que el ángulo total de rotación alrededor del borde de un polígono es 2π.
- Encuentra diferentes triangulaciones de los polígonos de la figura.



- Para todo n encuentra un polígono con una única triangulación.