Grafos y Poliedros

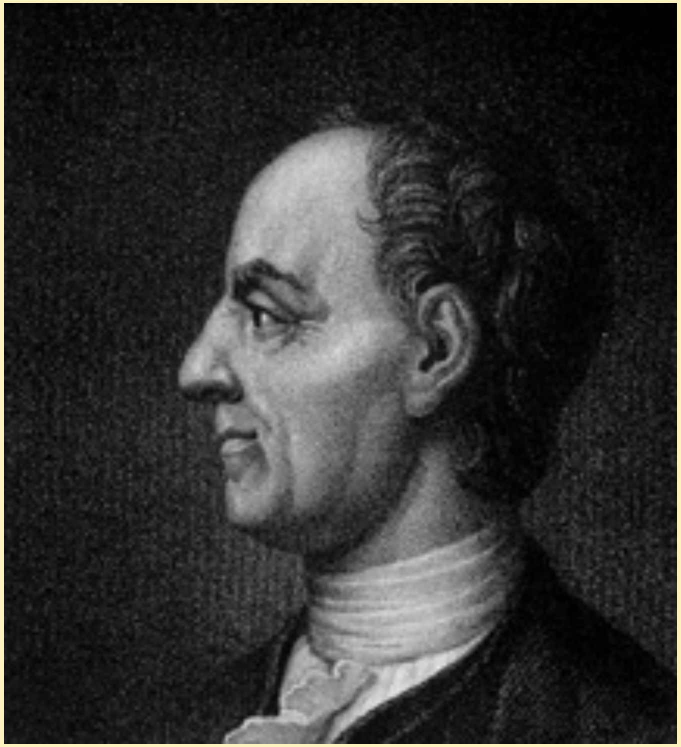
Antonio Martínez López

Departamento de Geometría y Topología

Universidad de Granada

Buceando en los orígenes de algunos conceptos topológicos:

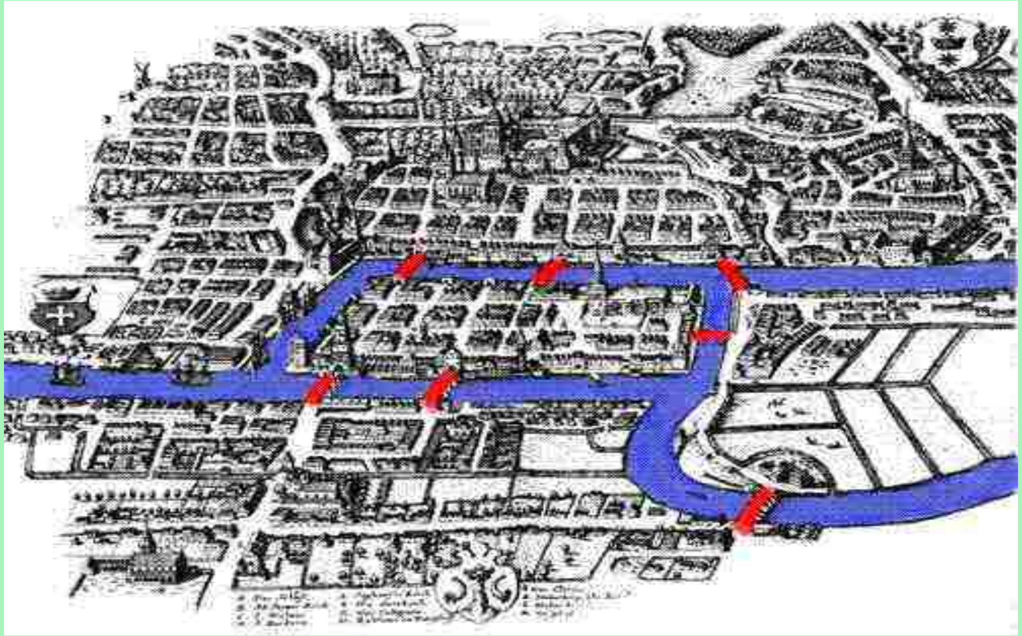
- Leonhard Euler (1707-83)
- En 1736 con un trabajo titulado:
    - *"Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis"* (Solución de un problema conectado a la geometría de posición), donde entre otros resultados se resuelve el popular problema de: los siete puentes de Konigsberg.



El problema de los 7 puentes

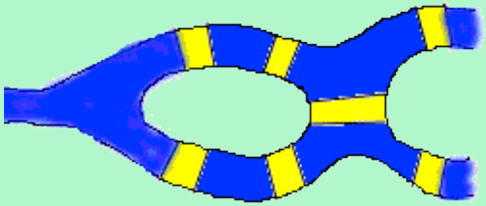
Königsberg (Prusia (1730)) es la actual Kaliningrado (Rusia).

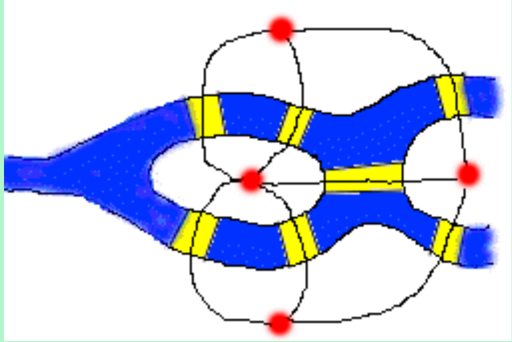
El problema de los 7 puentes

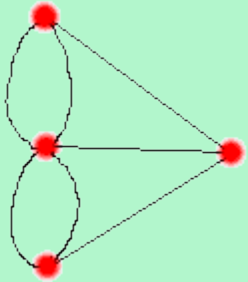


¿Es posible planificar un paseo que nos permita pasar por todos los puentes una sola vez?

Solución



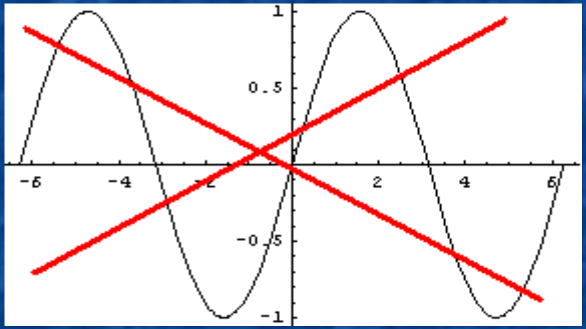


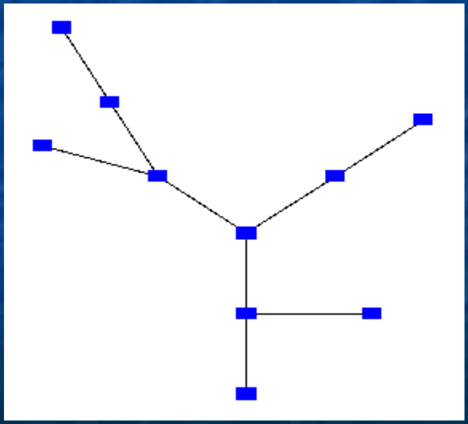


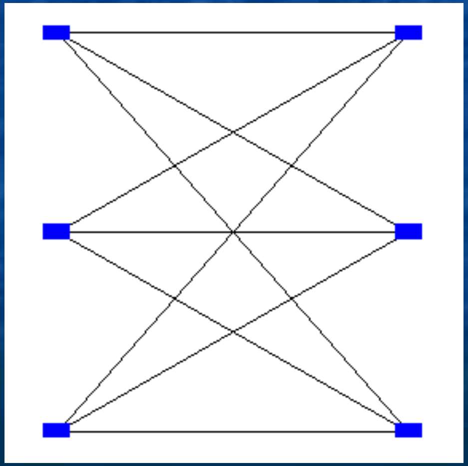
Si una colección de puntos y curvas, como en la figura, puede recorrerse sin pasar dos veces por la misma curva, entonces en todos sus vértices, salvo quizás en dos, deben concurrir un número par de éstas.

Königsberg no admitía un recorrido de este tipo.

Grafos (no gráficas)
(matemáticas sin cuestiones métricas)

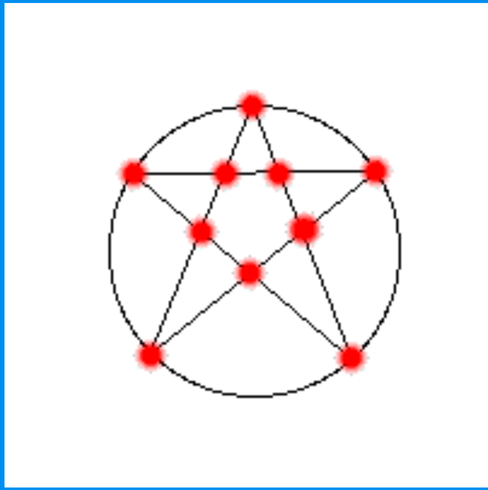




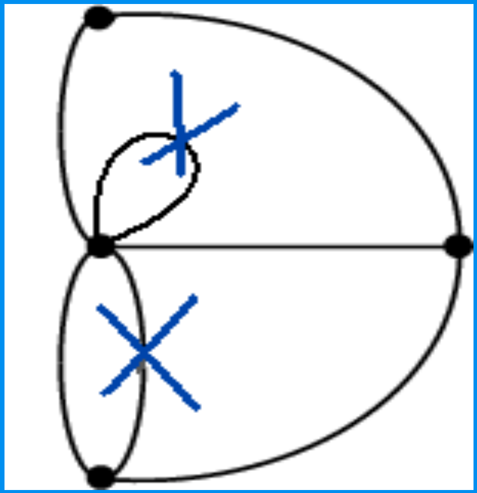


Grafos

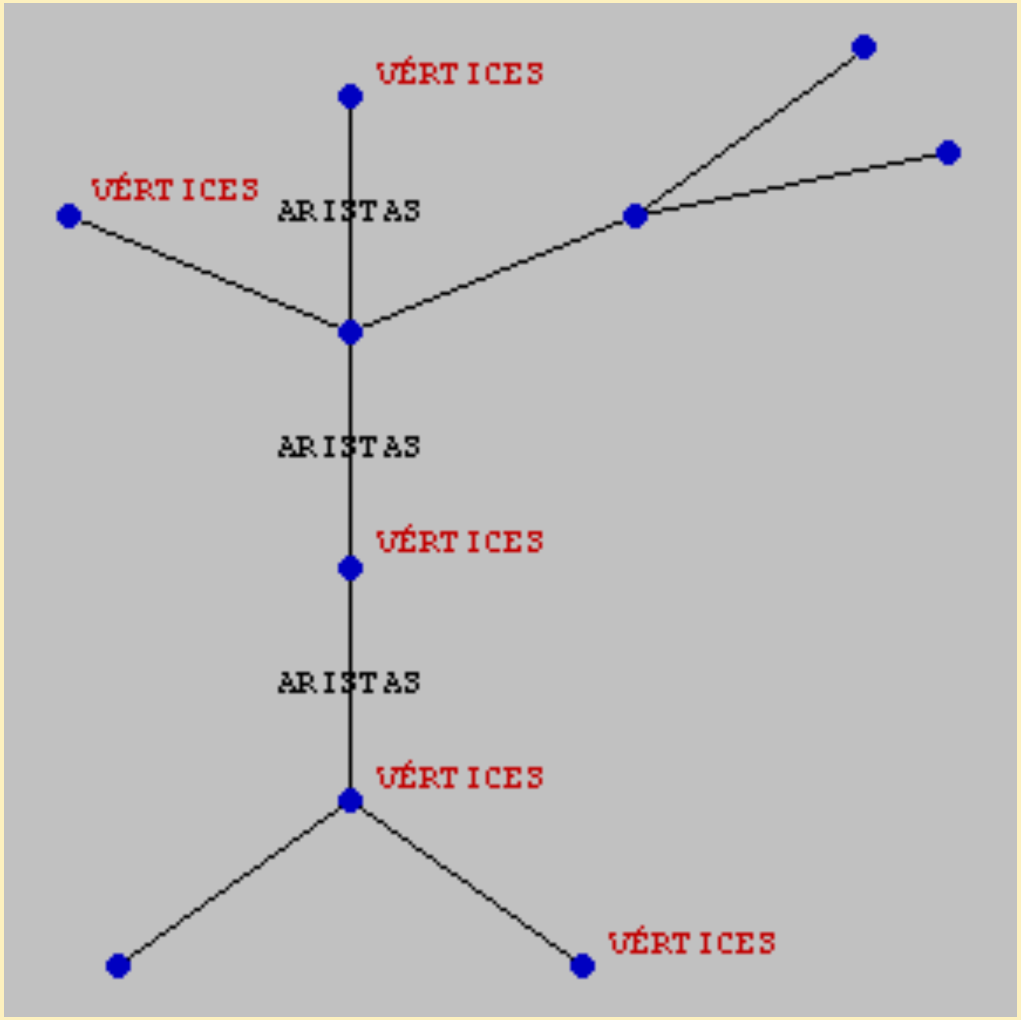
- Colección finita de puntos (vértices) y aristas uniendo dichos vértices.



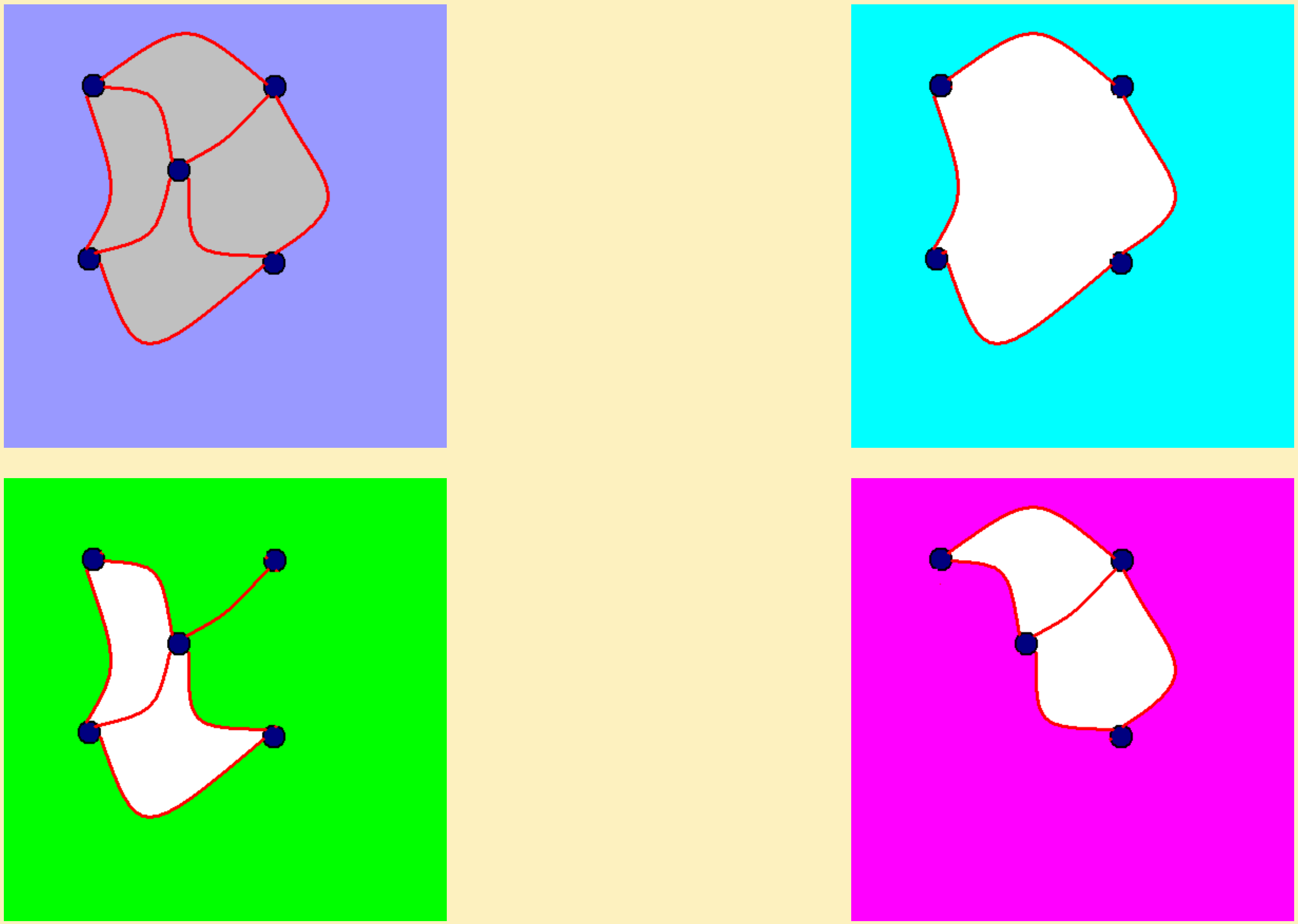
- Supondremos que ningún vértice es unido consigo mismo por una arista y que ningún par de vértices es unido por más de una arista. (no es multigrafo)



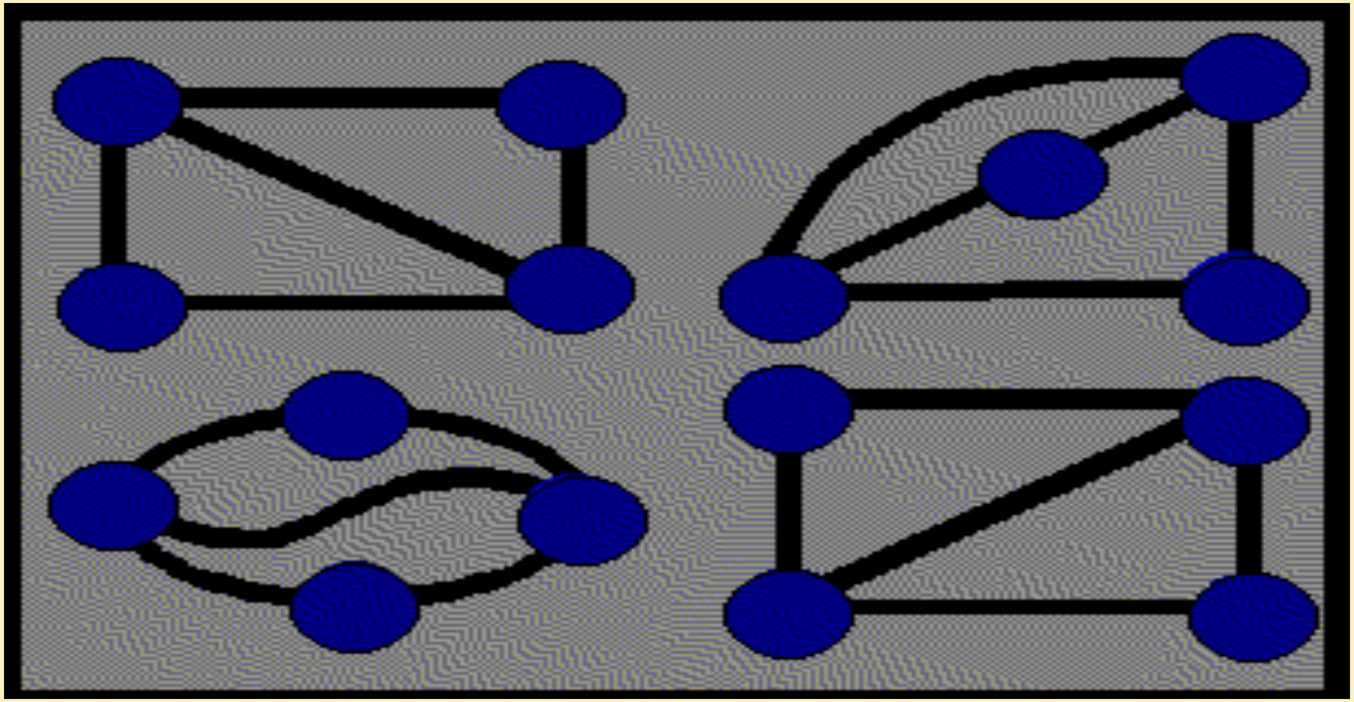
Vértices y aristas



Subgrafos

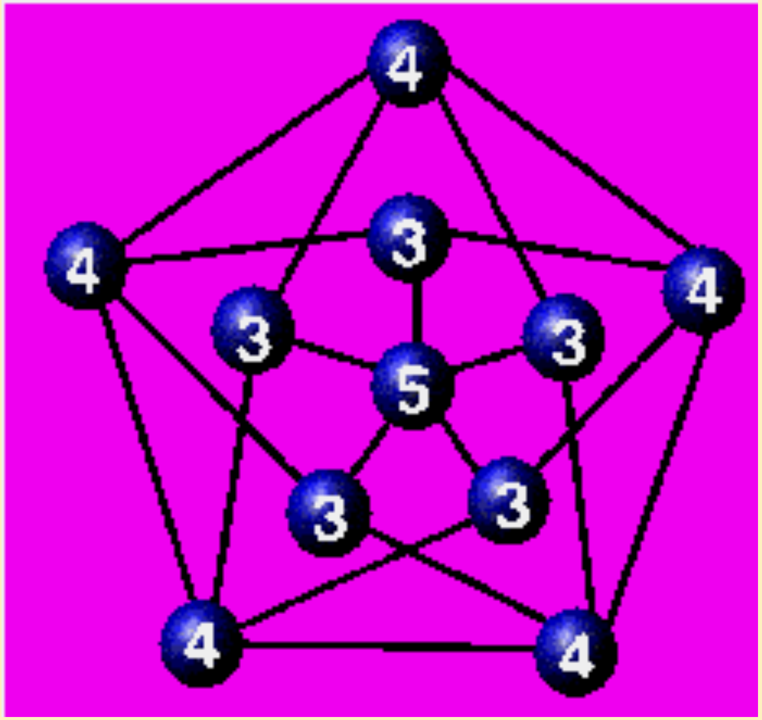


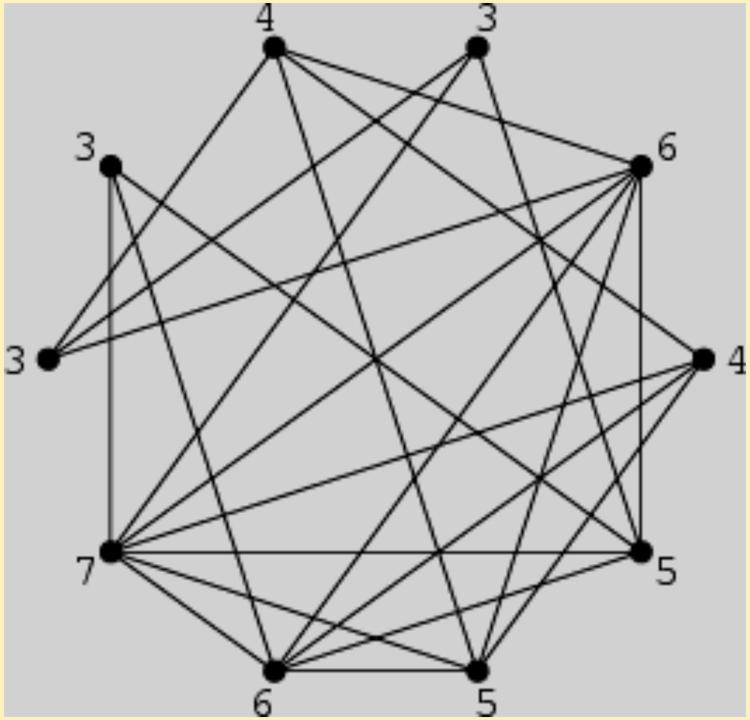
Grafos isomorfos



- Establecer una correspondencia 1-1 entre sus vértices y aristas, respetando la incidencia.

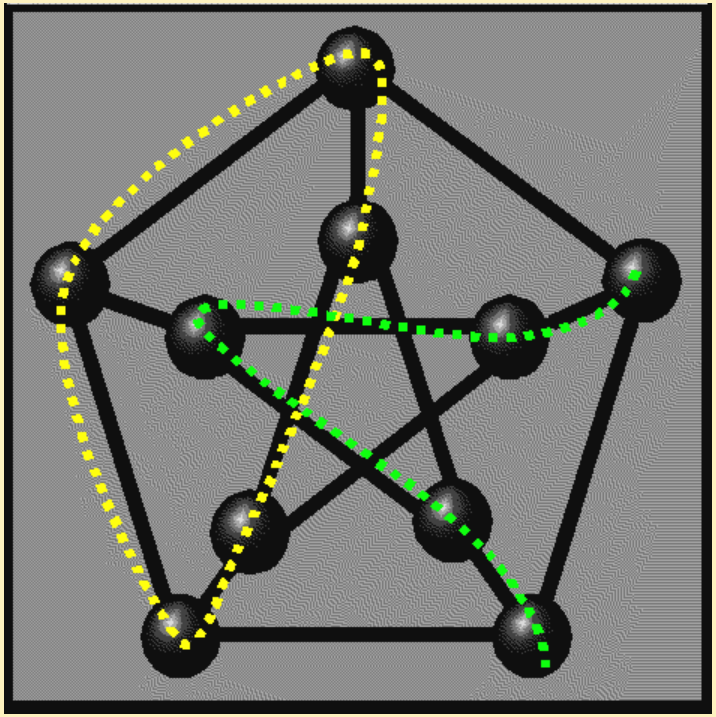
Grado de un vértice





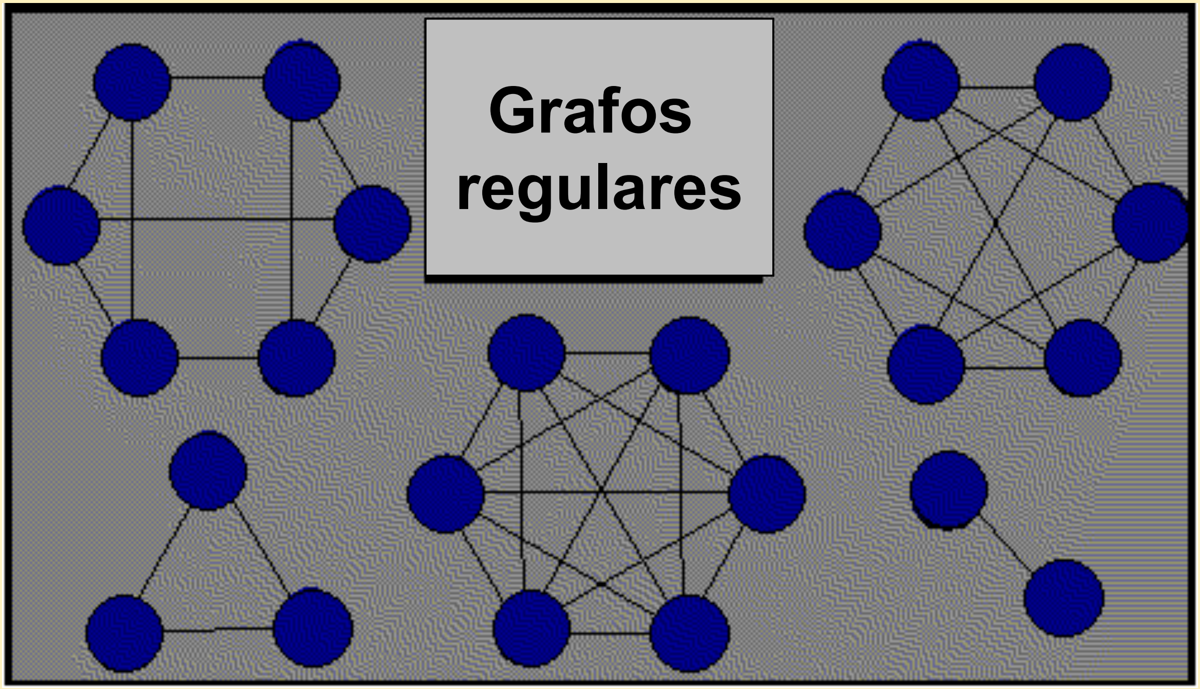
- Es el número de aristas que llegan a un vértice.

Arcos y ciclos



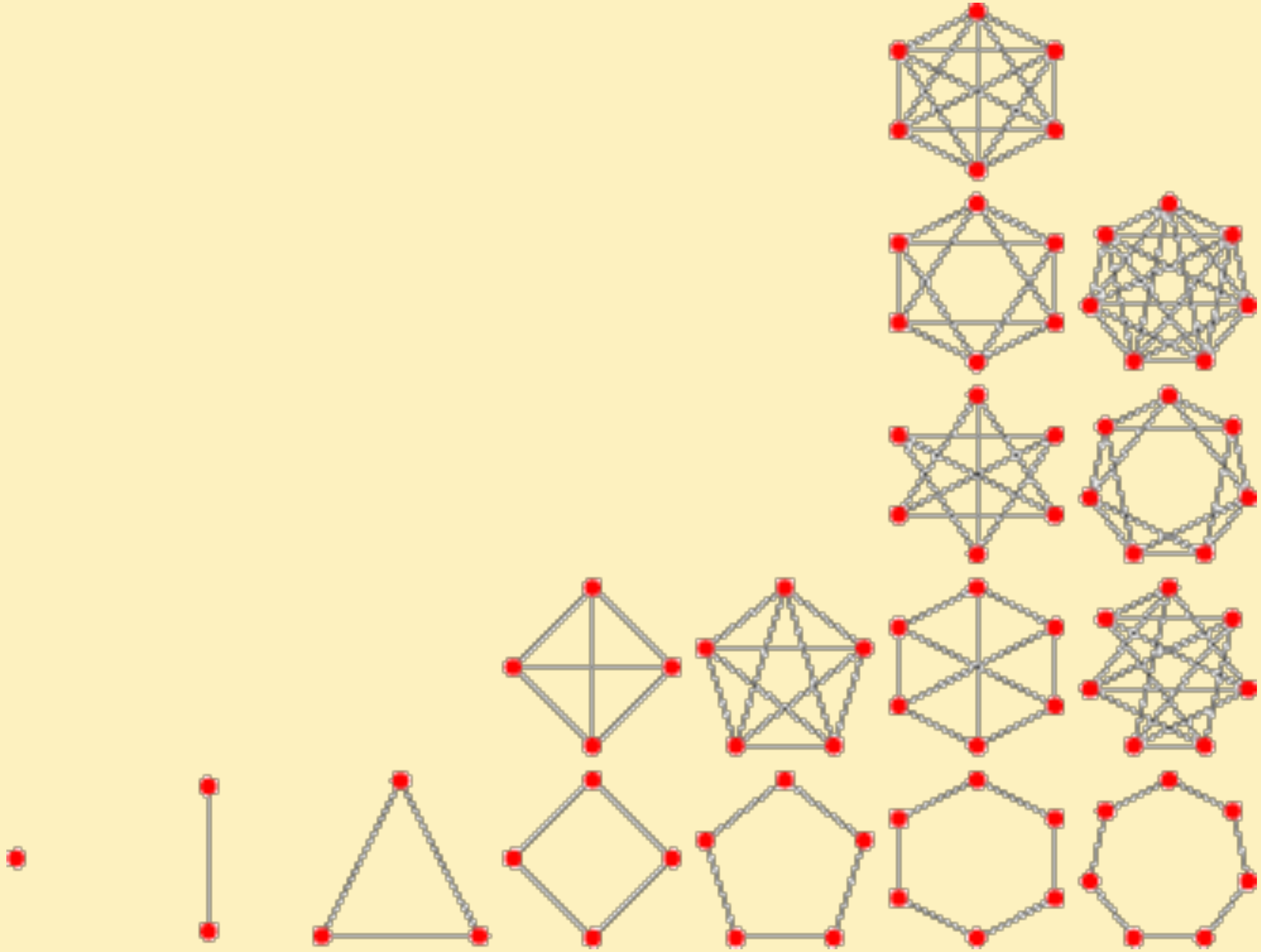
- Ciclos son grafos con todos sus vértices de grado dos.
- Arcos o caminos = sucesión de vértices y aristas.

Grafos regulares

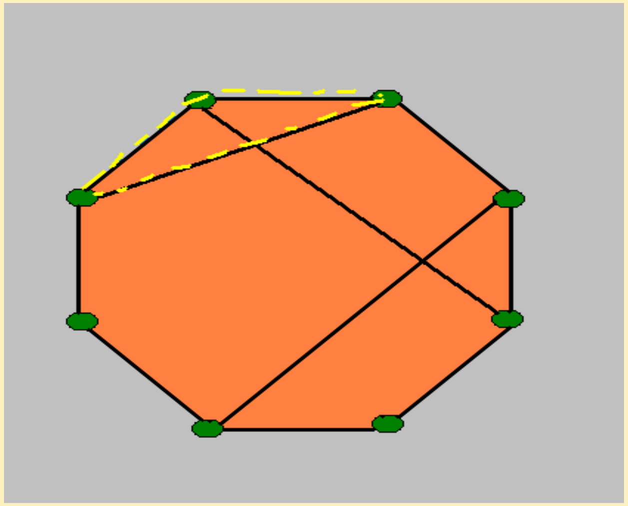
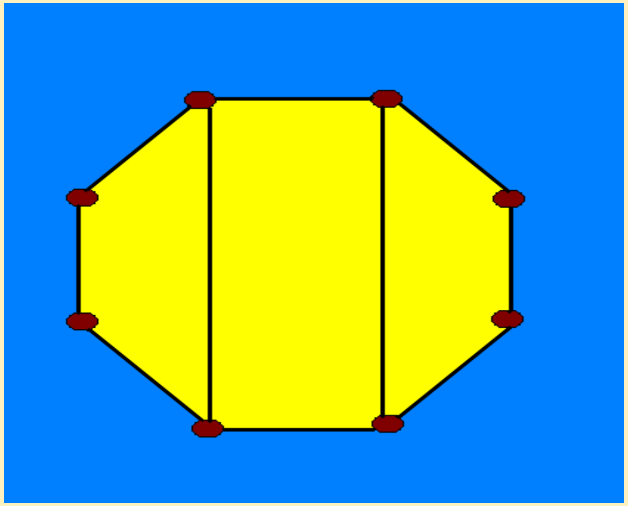
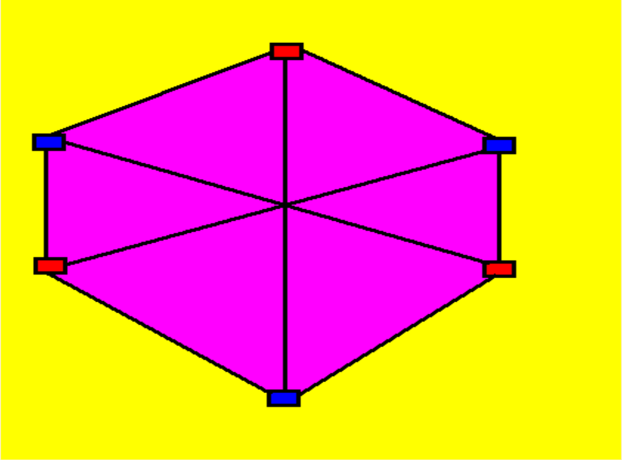
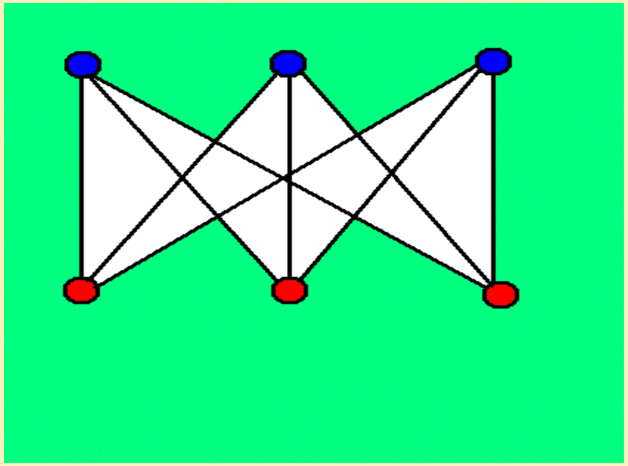


- Todos sus vértices tienen el mismo grado.

Más regulares



El problema del isomorfismo

Mapas y Grafos

- Grafo dual o mapa dual = unir las capitales de las regiones con frontera común.
- Colorear el mapa = colorear los vértices del grafo dual (dos vértices adyacentes nunca tienen el mismo color)

El problema de los 4 colores

- Ha contribuido en gran medida al desarrollo de la Teoría de grafos.

- Popularidad.

- Propuesto por Francis Gauthrie (1852)

"¿Es posible colorear cualquier mapa usando cuatro o menos colores distintos de forma que regiones con frontera común tengan diferente color?"

Algo de Historia I

Francis Gauthrie (estudiante en Univ. College of London) trasladó el problema a Augustus De Morgan (1806-1871).

El 23/10/1852 trasladó el problema a Sir William Rowan Hamilton quien contestó: "No estoy como para intentar tu cuaterna del color muy pronto".

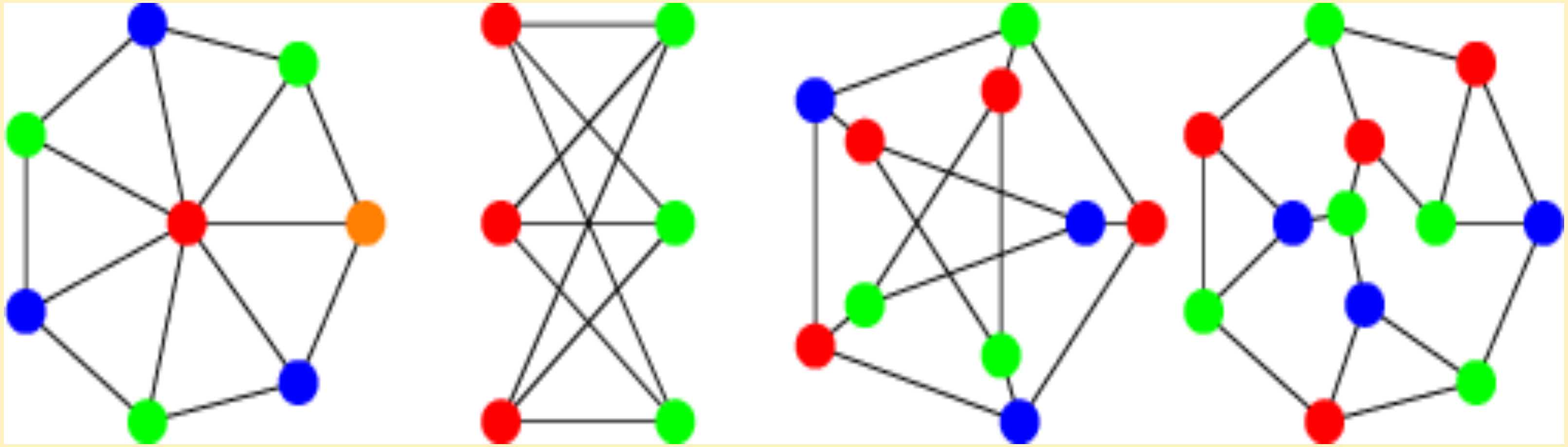
Algo de historia II

- Apareció publicado en la revista Atheneum (1860)
- Cayley (1878): “ las dificultades del problema”.

El 17/07/1879 Alfred Bray Kempe (discípulo de Cayley) anunció: la solución afirmativa al problema.

En 1886 (J. Educación) competición para simplificar la demostración.

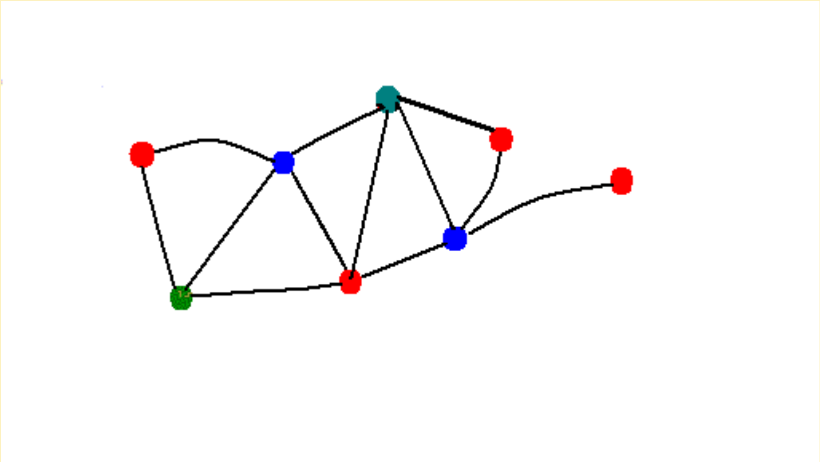
Grafos k-coloreables (kC)

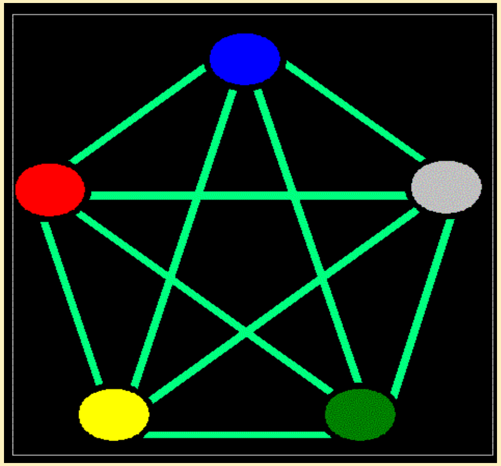


Grafo k-coloreable = sus vértices se pueden colorear con k-colores

Grafos 1-coloreables = colección de puntos
Grafos 2-coloreables = dos clases de vértices = bipartitos.

K-coloración II





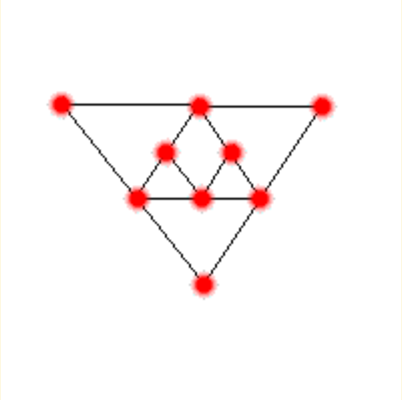
- ¿Puede ser K5 el grafo dual de un mapa?.
- Todo grafo dual admite una representación plana donde las aristas sólo se cortan en los vértices, ES UN GRAFO PLANO

Grafos planos

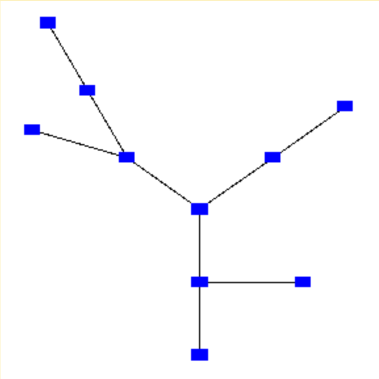
- Admiten una representación en el plano de forma que sus aristas son poligonales que sólo se cortan en vértices.

Caras:

Regiones en las que las aristas del grafo dividen al plano.

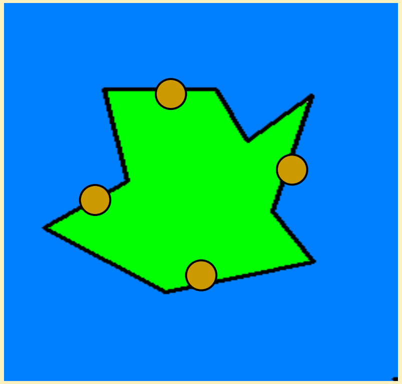


C=7



C=1

C=2

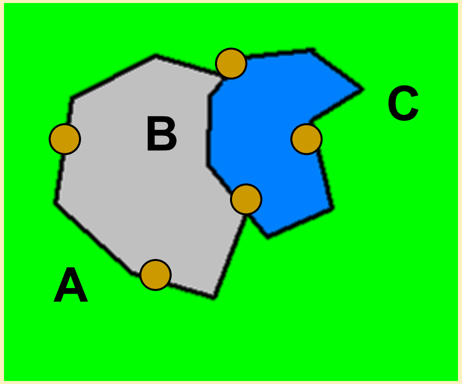


Jordan:

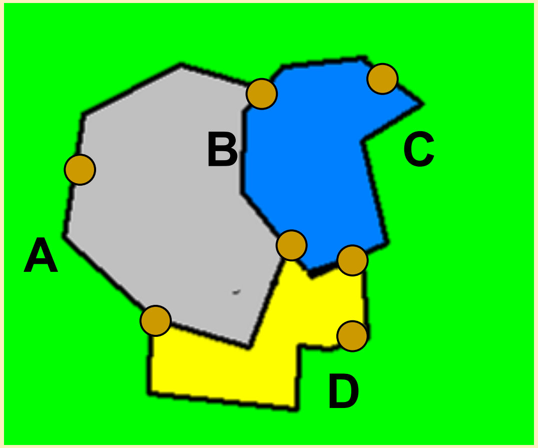
Todo ciclo plano divide a éste en dos regiones de las cuales es frontera común

Caras

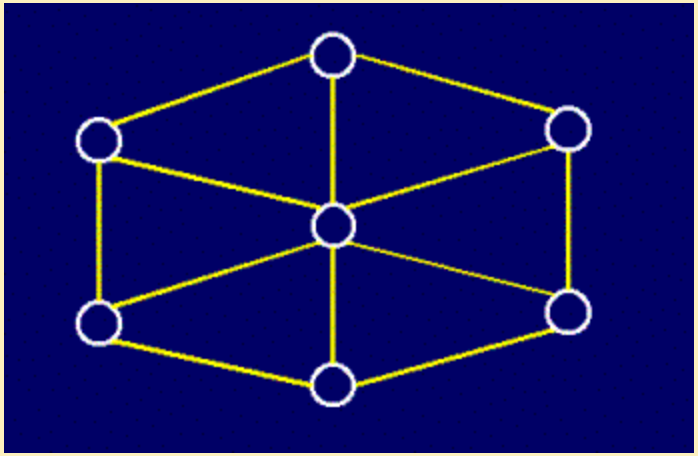
Si un arco A divide a un ciclo en dos arcos B y C, como en la figura, las aristas de A, B y C dividen el plano en tres regiones cuyas fronteras son AUB, BUC y AUC.



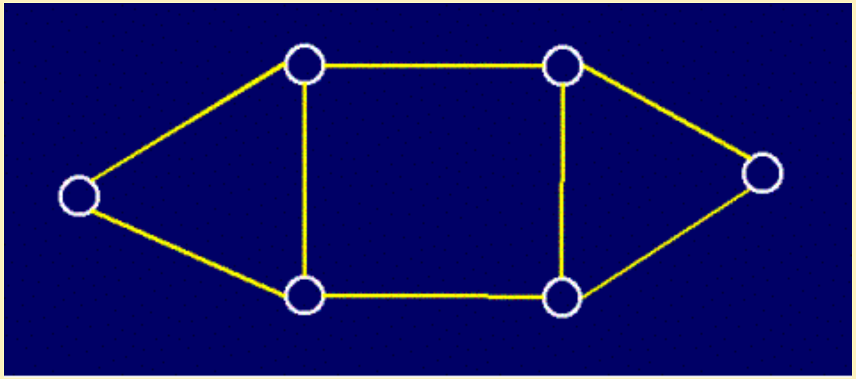
Añadiendo arcos de esta forma, se añade exactamente una nueva región en cada paso.



Recuento de caras



- ¿Puedo dibujar un grafo plano de diferentes formas logrando así cambiar el número de sus caras?



- C=7, A=12, V=7,
  V – A + C = 2 .
- C=4, A=8, V=6,
  V – A + C = 2 .

Fórmula de Euler (1752). Consecuencias.

Si G es un grafo plano conexo, entonces,

#vértices - #aristas + #caras = 2.

EJERCICIO: Hacer la demostración usando inducción sobre el número de aristas en el grafo.

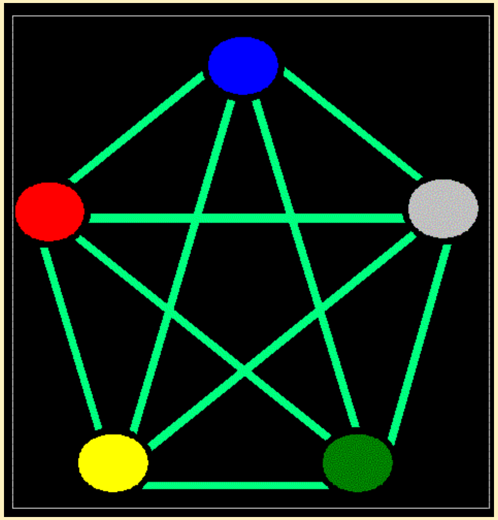
SUGERENCIA: Distinguir el caso en el que no existan ciclos del caso general.

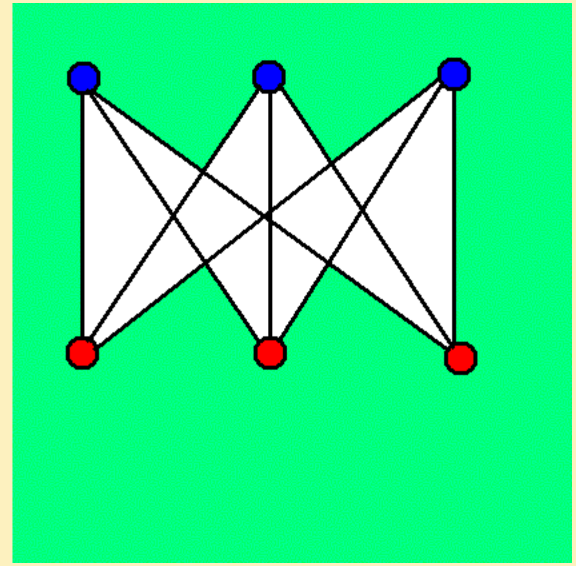
Si G es plano entonces: Toda región tiene al menos 3 aristas.Toda arista está en el borde de a lo más dos caras. Así, $3\,C < 2\,A + 1$, y por tanto, $A < 3\,V - 5$.

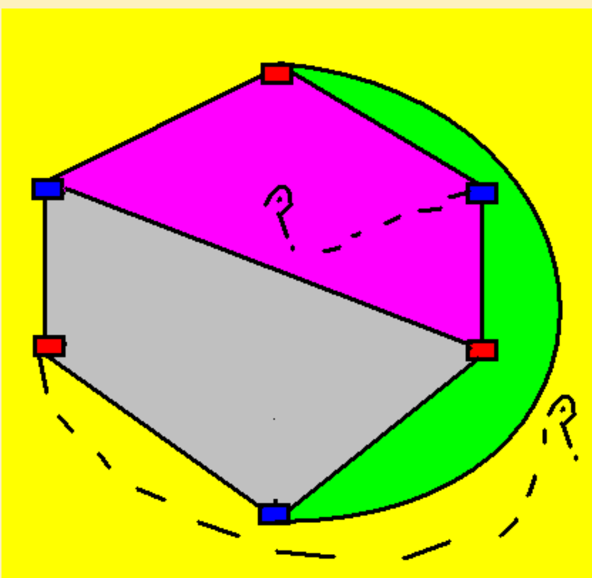
- **K5 y K[3,3] no son planos**.

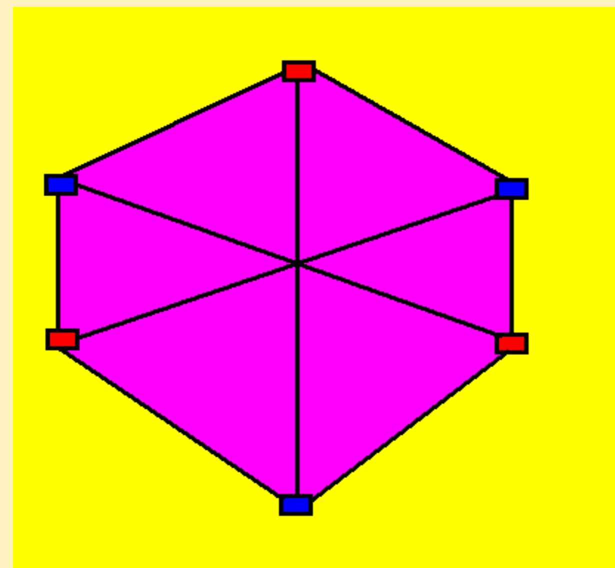
Kuratowski (1930):" Grafo no plano debe "incluir" (no necesariamente como subgrafo)" a K5 o K[3,3]."

$V=5$, $A=10$, $3V - 5 = 10$









Kempe y su demostración (1879)

- Como premio pasó a ser miembro de la Real Sociedad. (fundada en 1662 por Carlos II para promocionar la Ciencia).

Heawood:
•(1890) la demostración de Kempe era FALSA .
•Todo mapa puede colorearse con 5 colores.

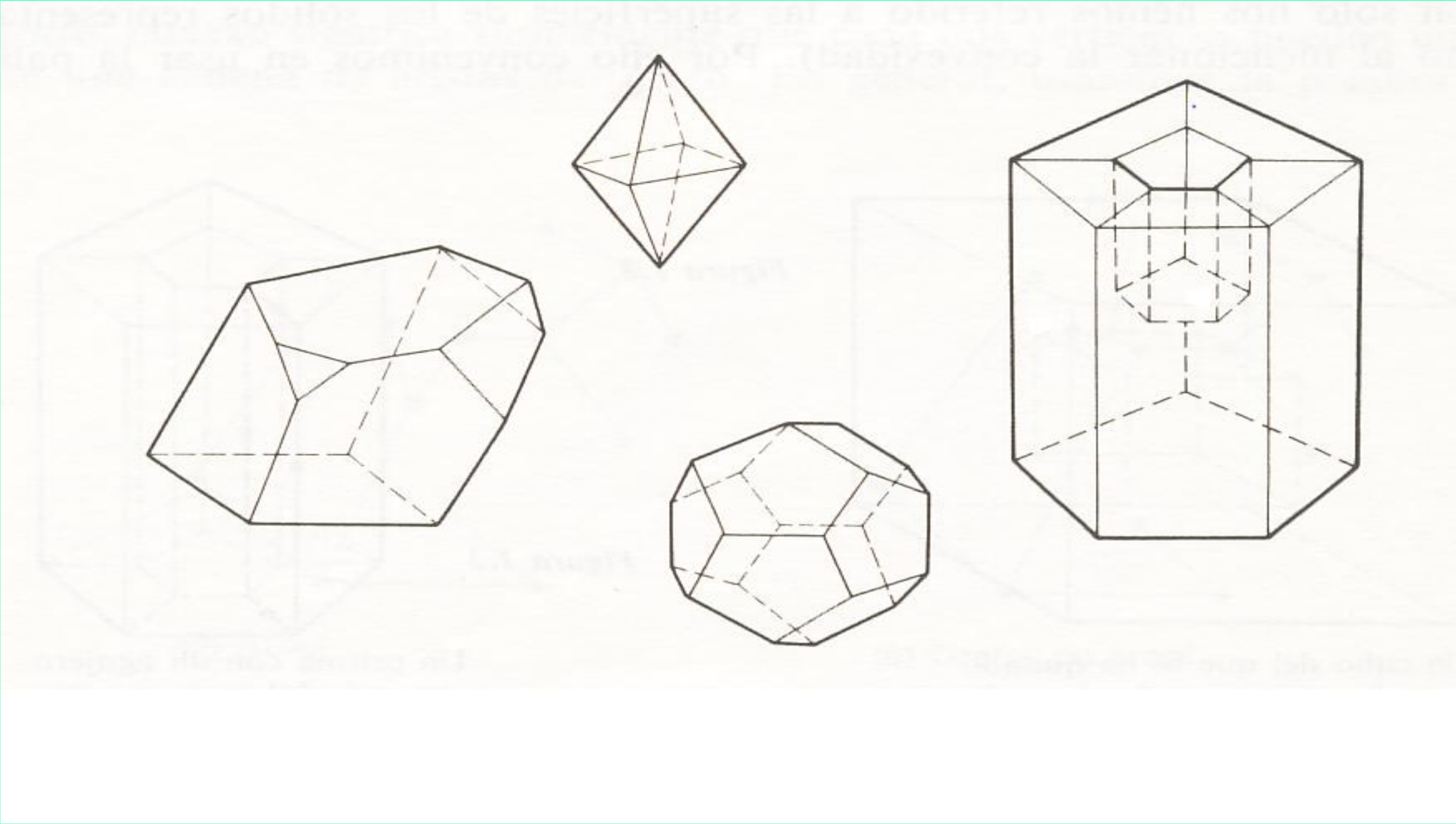
Avances y Solución

- Según el número de regiones (< 99) es 4-coloreable (1970)

- En 1976 Appel y Haken, completaron la demostración basándose en las ideas de Kempe:

  Tras ciertas reducciones que lo llevaban a un problema finito, dejaron que un ordenador trabajara durante tres meses y comprobara todos los casos requeridos.

Poliedros

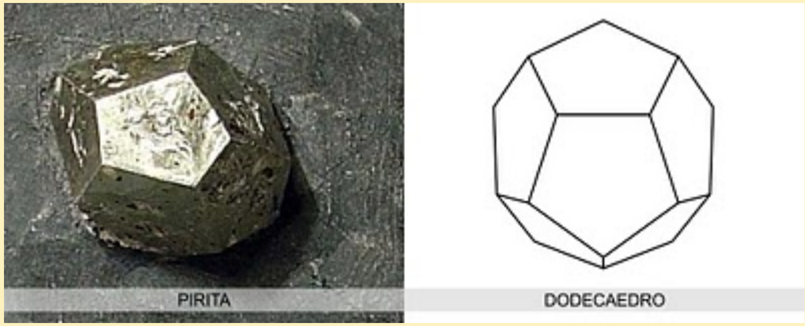


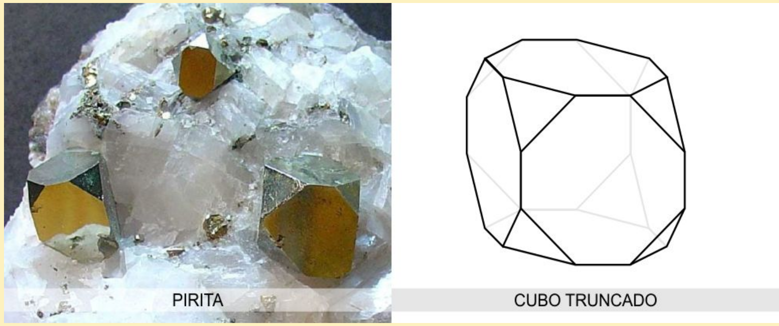
$$C - A + V = 2$$

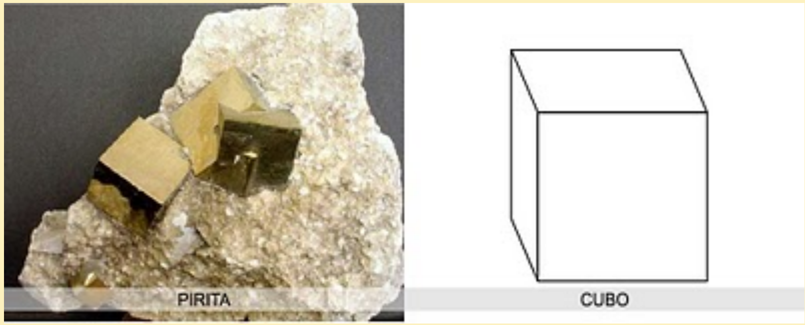
Poliedros II

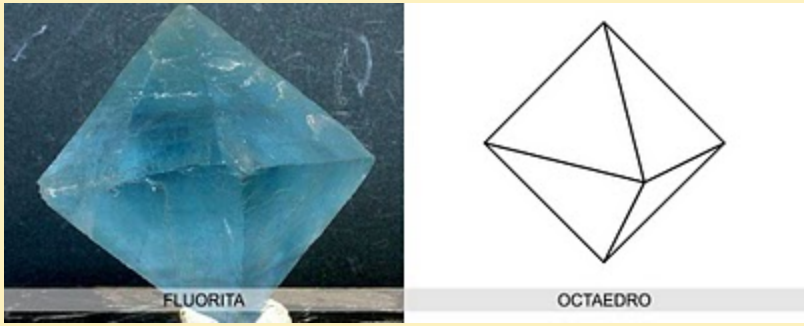
- Poliedro es la versión tridimensional de un polígono: Colección finita de polígonos planos que se encajan satisfactoriamente

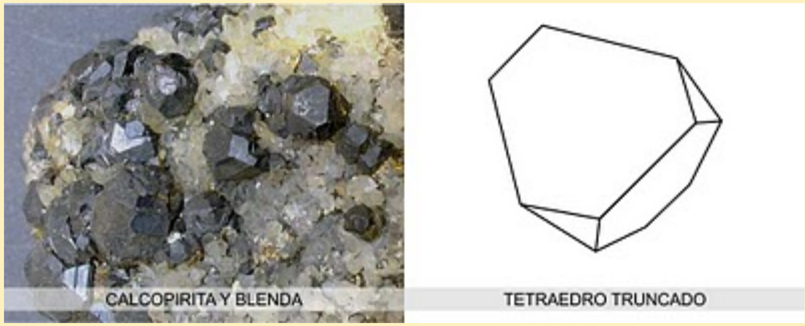
En la Naturaleza



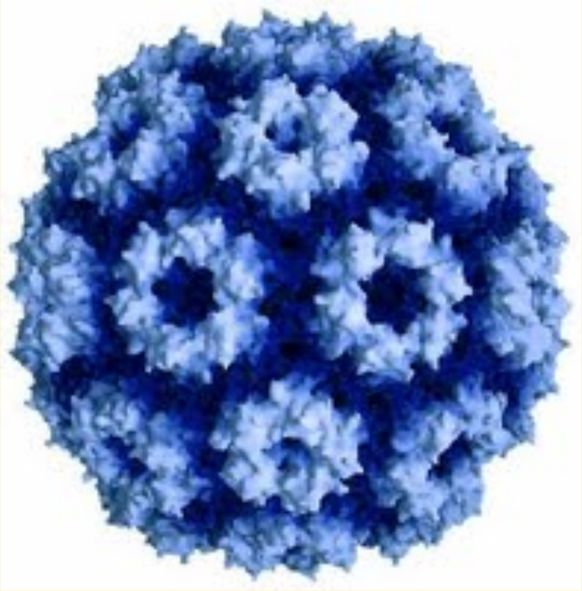




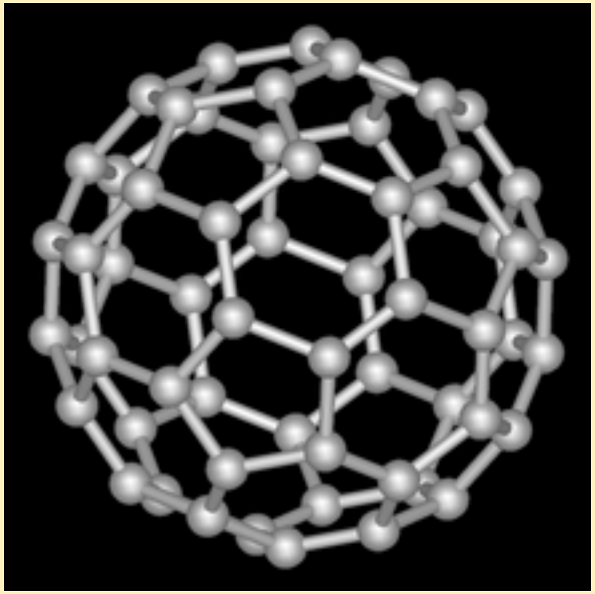




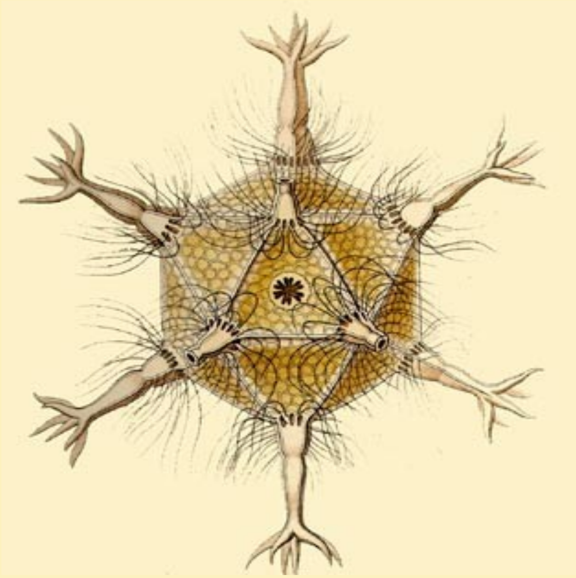
En la Naturaleza



Virus CCMV



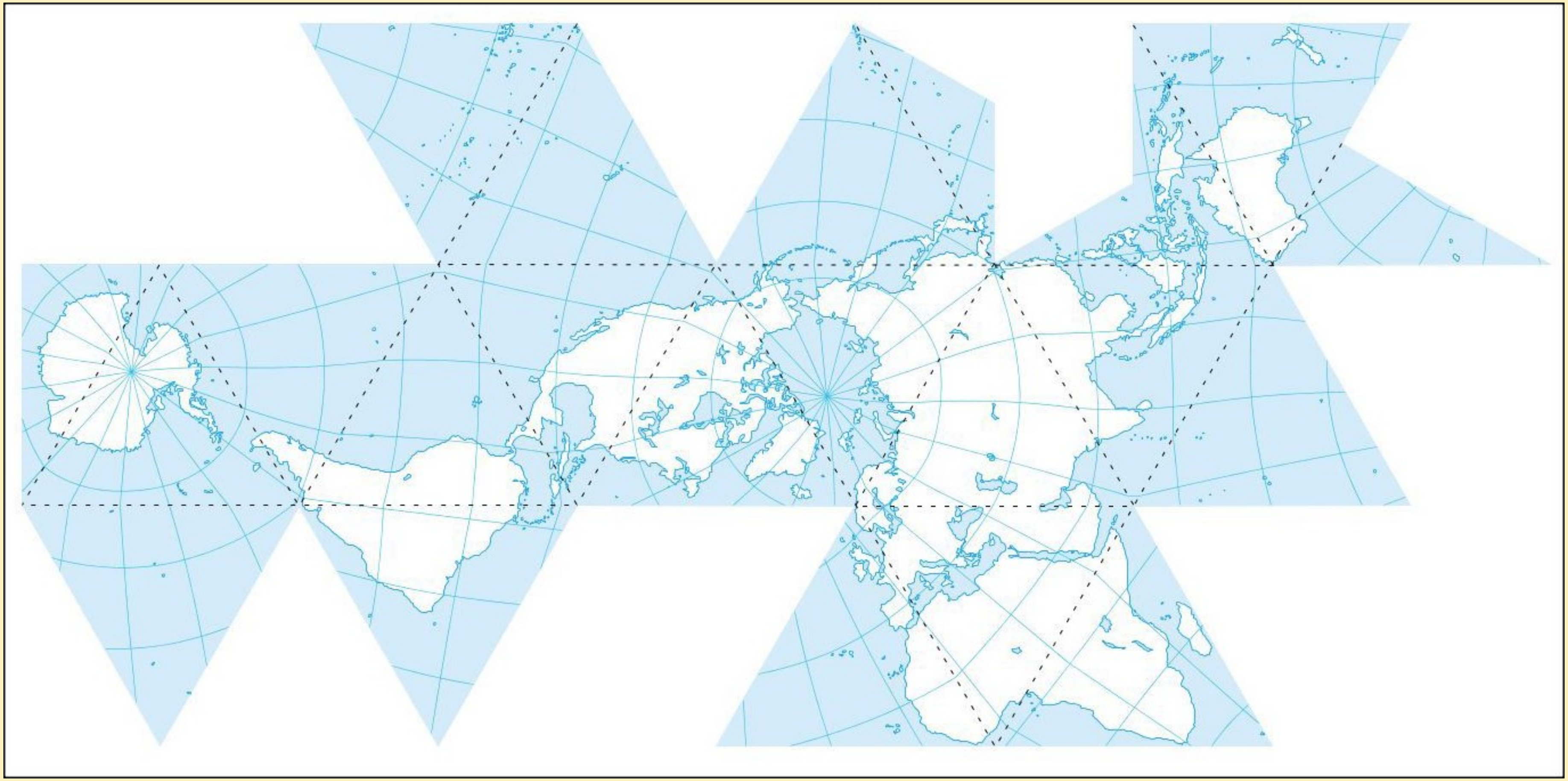
Fullereno



Radiolario

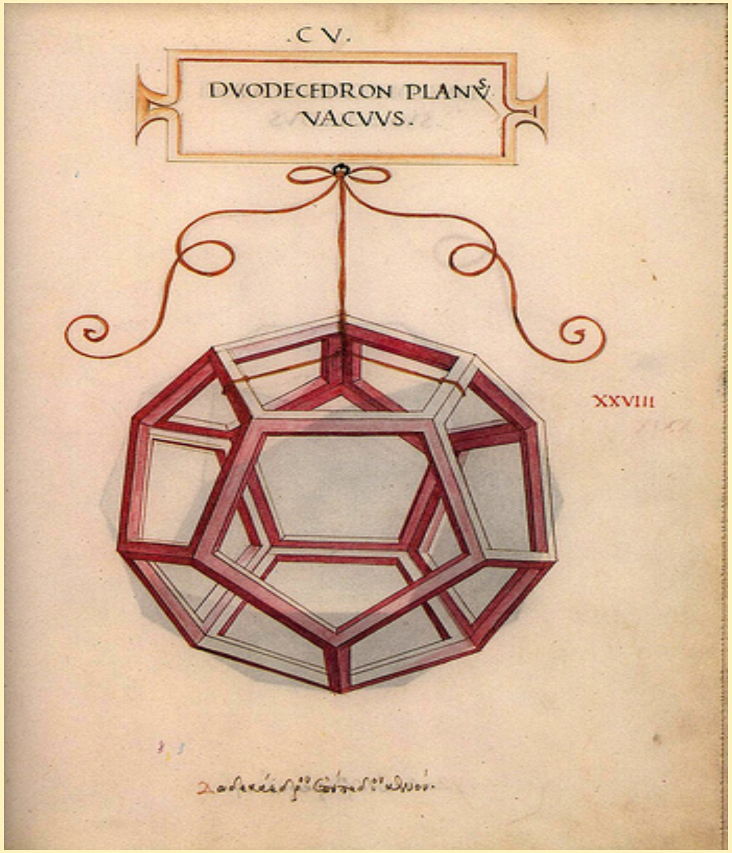
En Arquitectura

En Cartografía



En Arte

Fra Giovanni Verona



Divina proporción

En Arte

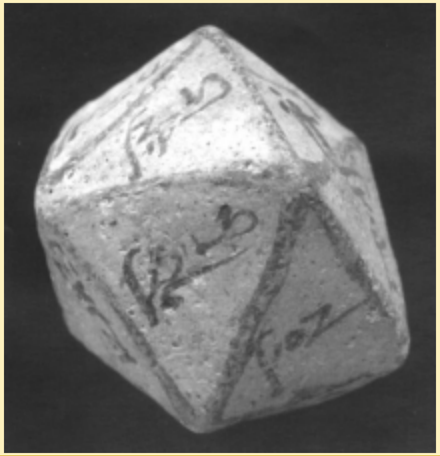
La última cena (Dalí)

Actividades I.1:

- Coger varios triángulos equiláteros y pegarlos unos con otros hasta conseguir un poliedro.
- Une tres triángulos equiláteros a un punto y completa la figura con otro.
- Construye un poliedro que tenga 4 triángulos equiláteros en todos sus vértices. Lo mismo con cinco triángulos. ¿Es posible con 6 o más?
- Un poliedro regular es aquel cuyas caras son polígonos regulares congruentes y con el mismo número de polígonos en cada vértice. Uniendo polígonos de 3,4,5,6,7,... lados construye todos los poliedros regulares posibles. ¿Cómo los llamarías? ¿Cuánto vale V-A+C?

Poliedros regulares

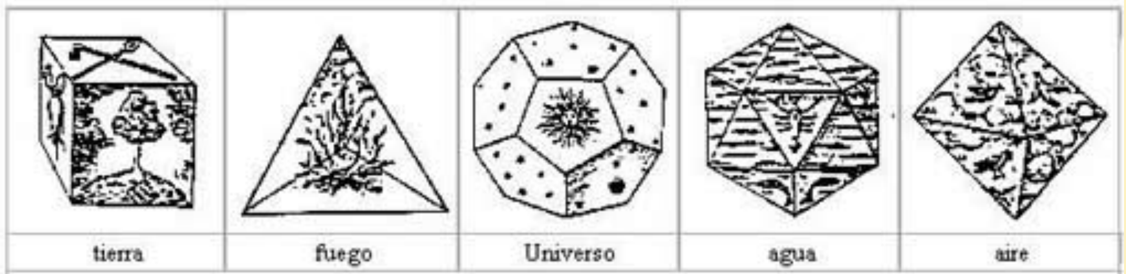
Datan del Neolítico (Escocia):



Dado egipcio

Poliedros regulares

- Solo 5 y todos ellos conocidos por los griegos:
  - tetraedro, cubo y dodecaedro (Pitagóricos)
  - Octaedro e icosaedro (Teesteto,S.IV a.C.).
- Teoría Cosmológica de Platón (asociando a ellos los elementos de la naturaleza).



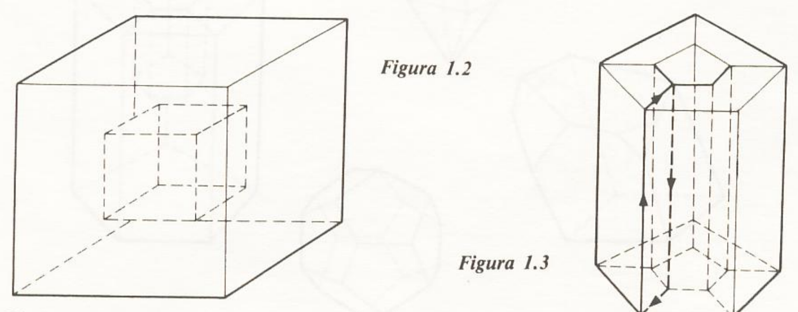
Figuras tomadas del tratado *Mysterium Cosmographicum* de Johannes Kepler

Teorema de Euler

Teorema (Euler). Si P es un poliedro t.q.

1. Dos vértices se pueden unir por una cadena de aristas.
2. Todo lazo de P formado por segmentos rectilineos (no nec. aristas) separa a P en dos piezas.

Entonces V – A + C = 2.



Un cubo del que se ha quitado un cubo más pequeño de su interior

Un prisma con un agujero atravesándolo por el centro

V – A+ C = 4

V – A + C = 0

En general No siempre es cierto (ver figura)

V-A+C = NÚMERO DE EULER

Algo de Historia

- Aparece en una carta de Euler a Goldbach datada en 1750.
- El razonamiento de Euler solo es aplicable al caso convexo.
- En 1813 Lhuilier: hay problemas con algunos poliedros.
- La demostración que esbozaremos se debe a von Staudt (1847).

Demostración

- Consideraremos grafos (conexos) formados por vértices y aristas de P.
- Para el caso de árboles se tiene V – A = 1.
- Existe un árbol T que contiene todos los vértices de P.
- Tomamos el dual de T (Gamma)

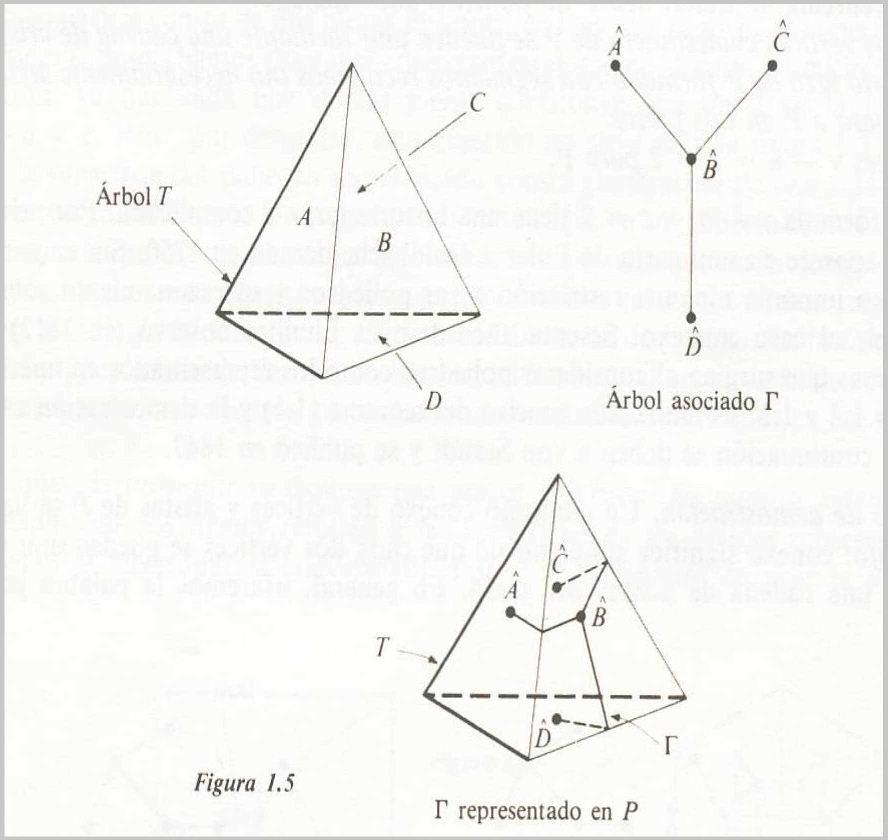


Figura 1.5

Continuación

- **G es conexo (si dos vértices no se pueden unir entonces se pueden separar por medio de un lazo de T)**
- **G es un árbol.**

$$V(T) - A(T) = 1,$$
$$V(G) - A(G) = 1,$$

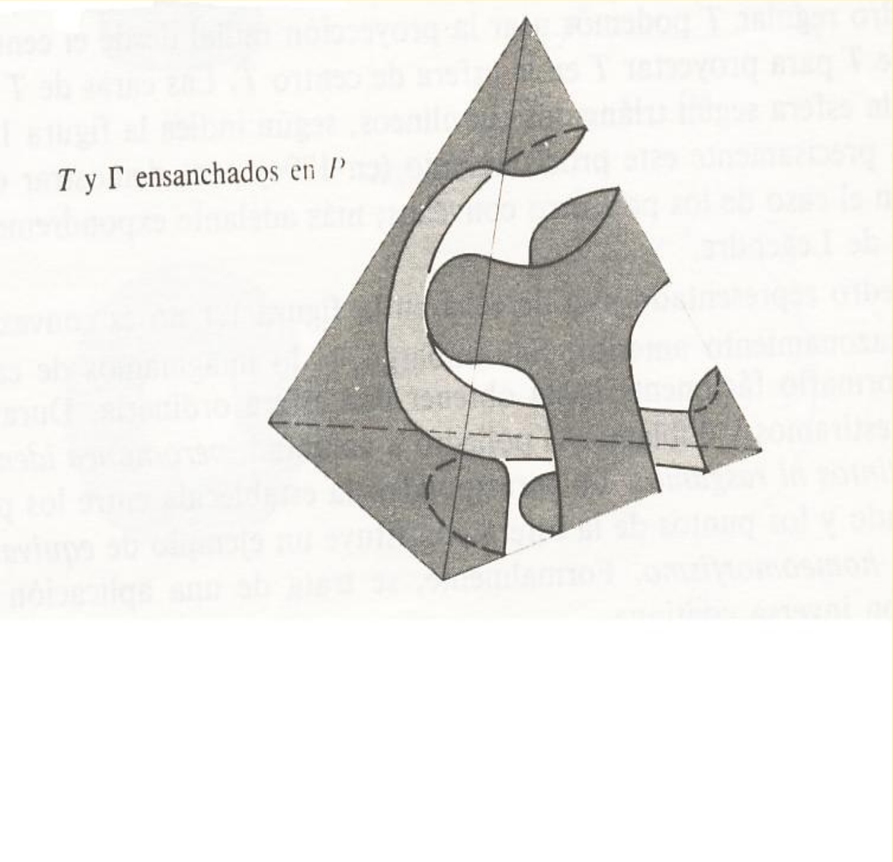
$\Rightarrow$

$$V(T) - (A(T) + A(G)) + V(G) = 2$$

$$V(P) - A(P) + C(P) = 2$$

Algunas consecuencias

- Su elegancia (sin aplicar inducción).
- P está construido por dos discos que se han identificado a lo largo de sus contornos.
- P es una esfera algo deformada. (P es "homeomorfo" (topológicamente equivalente) a una esfera)



Ángulo de defecto:

- Ángulo de defecto en un vértice un Poliedro =

  2Π – (Suma de los ángulos, dentro de las caras, que se unen en el vértice)

- Ángulo total de defecto, **T**, = Suma de los ángulos de defecto en todos los vértices del poliedro.

Actividades I.2:

1. ¿Cuál es la suma de los ángulos de un polígono de n lados en el plano?
2. Determina el ángulo total de defecto de los 5 poliedros regulares y de los construidos en la actividad anterior.

Fórmula de Descartes:

- ***F. de Descartes:***

  T = 2Π (V- A + C)

Actividad I.3:
Discutir con otros compañeros una posible demostración de la fórmula de Descartes

Actividades I.4:

1. El ángulo de defecto de un poliedro convexo puede calcularse rotando el poliedro en un círculo alrededor de su vértice. Explica cómo.

2. Si rotamos el poliedro a lo largo de una curva cerrada en la superficie del mismo que no pase por los vértices ¿Qué ángulo de defecto podemos medir y cómo?

Imaginación

- ¿Cómo imaginamos figuras geométricas?
  - Imaginación 3D no es visualización.
  - Imagen mental está conectada con nuestro sentido visual, del lugar y del movimiento.
  - Mover las manos e intentar describir las imágenes ayuda a su formación.
  - Imaginación geométrica no es algo con lo que se nace, necesita ser desarrollada con la práctica.

Actividades imaginación:

1. Imagina escrito tu nombre o apellido y trata de leerlo al revés. Practica con otros nombres leyéndolos de tres en tres letras.
2. Divide en tres partes iguales los lados de un triángulo equilátero y recorta las esquinas que resultan. ¿Qué figura queda?.
3. Pon dos cuadrados superpuestos y rota uno 45 grados. ¿Cuál es la intersección de los dos?
4. Divide en tres partes iguales los lados de un cuadrado y recorta las esquinas. ¿Qué figura queda?.
5. ¿Cuántas aristas tiene un cubo?
6. En la silueta que determinan las aristas de un cubo traza un arco cerrado que pase una vez y solo una por cada vértice.
7. En una tabla de puntos 3x4 del plano conéctalos vertical y horizontalmente. ¿Cuántos cuadrados se determinan?

Actividades imaginación II:

8. Encuentra un arco cerrado a lo largo de las aristas de la tabla anterior que pase por cada vértice una y sólo una vez. ¿Puede hacerse lo mismo con una tabla 3x3?.
9. ¿Cuántos colores son necesarios para colorear las caras de un cubo?
10. ¿Cuál es el número de caras, de vértices y de aristas de un tetraedro?. ¿Y de un octaedro?
11. Descansa un tetraedro sobre una cara y córtalo por la mitad ¿Qué forma tiene la sección?. Haz lo mismo con un octaedro.
12. Corta las esquinas de un triángulo equilátero hasta los puntos medios de sus lados. ¿Qué figura queda?.
13. Descansa en equilibrio un tetraedro sobre una arista y corta horizontalmente por la mitad. ¿Qué forma tiene la sección? Haz lo mismo con un octaedro.

Actividades imaginación III:

14. Corta las esquinas de un tetraedro hasta los puntos medios de sus lados. ¿Qué figura queda?.
15. Si miras la silueta de un cubo desde uno de los vértices ¿Qué silueta ves?.
16. ¿Cuántos colores necesitamos para colorear un octaedro?
17. Corta horizontalmente por la mitad un octaedro apoyado en equilibrio sobre un vértice. ¿Qué forma tiene la sección?
18. En una tabla de puntos 3x3x3 en el espacio, únelos a lo largo, ancho y alto. ¿Puedes encontrar un camino cerrado que pase por todos los vértices menos uno, una y sólo una vez?. ¿Y por todos?.
19. Lo mismo que el anterior con una tabla de 4x4x4 puntos.
20. Imagina un arco a través de las aristas de un octaedro que pase por todos los vértices una y sólo una vez.