Formas de un Universo

Antonio Martínez López

Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Taller de Geometría y Topología,
Curso 2019/2020

¿Porqué explorar la forma de un Universo?

- **Razón Matemática:**
  - Entender mejor el concepto de dimensión (fundamental para nociones como longitud, área y volumen).
  - Visualizar mejor
  - Geometría y Topología son materias actuales que responde a necesidades de nuestra época.
  - Inter-relación entre las matemáticas y otras ciencias.
- **Razón Social:**
  - Estudiantes brillantes disfrutan con el enriquecimiento de actividades.
  - Abrir las mentes a nuevas ideas (la idea de un espacio finito es nueva y atractiva por sus posibilidades).
  - Demanda imaginación y no solo habilidades computacionales.
  - Atrae la atención de los estudiantes a las matemáticas.
- **Razón Científica:**
  - Preparar al estudiante para futuros descubrimientos sobre nuestro Universo.

Nuestro Universo

Su existencia se calcula entre 10 y 15 billones de años y su conocimiento ha sido y es uno de los desafíos mas ambiciosos de la humanidad. Preguntas aún sin contestación son:

- ¿Cuál es su forma?, ¿Es finito o infinito? ¿ Tiene borde?
- ¿Cuál es su curvatura?, ¿Cómo se está expandiendo?, ¿Qué viene después del Big-Bang?.

Actividad

Imagina y describe alguna de las formas que puede tener nuestro Universo.

Planilandia

En esta dirección es recomendable la obra de Abbot (eclesiástico inglés, estudioso de Shakespeare, de vocación matemático,1838-1926): *Flatland: A romance in many dimensions*

Famosa exposición de conceptos geométricos y sátira mordaz del mundo jerárquico de la Inglaterra victoriana.

Actividades

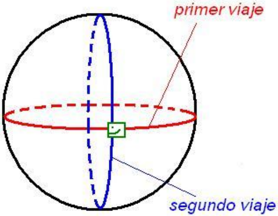
- Imagina y dibuja (con ojos, boca, etc..) ¿cómo podría ser un planilandés. ¿Cómo se verían unos a otros?. ¿Cómo podrían distinguirse cuando se vieran?.
- ¿Cómo pueden ser las casas de planilandia?
- Imagina y dibuja distintas formas de planilandia

Un mundo de dos dimensiones

J. Weeks (*"The shape of the space"*), narra las aventuras de Cuadrado Planito, CP:

- Planilandeses percibían Planilandia como $\mathbb{R}^2$.
- CP pensaba: Si un mundo de dimensión 1 (Linelandia) puede admitir la forma de un círculo, $\mathbb{S}^1$, $\Longrightarrow$ Planilandia podría ser un hiper-círculo y al viajar lo suficientemente lejos volveremos al mismo punto por la dirección opuesta.

CP viajó en dirección oeste dejando marcas rojas y volvió después de tres semanas desde el este (pero los planilandeses pensaron: "se ha desviado lentamente de su dirección" y no dieron importancia al hecho).



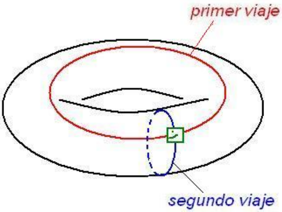
En un segundo viaje fue dirección norte dejando marcas azules y tras dos semanas regresó desde el sur.
CP estaba aturdido por dos hechos inexplicables para él:

- ¿Porqué he tardado menos en el segundo viaje?
- ¿Porqué no me he cruzado en ningún momento de mi segundo viaje con las marcas rojas que dejé en el primero?

Lo que si habían descubierto es que

Planilandia no era ni un plano ni un hipercírculo ($\mathbb{S}^2$)

Años después un topólogo planilandés TP explicó el misterio (de no cruzarse en otro punto las marcas rojas y azules) con una teoría: "Planilandia tenía la forma, según TP, de un TORO".



Se inició la conocida Topología de superficies o variedades de dimensión dos = Estudio de posibles formas de Planilandia sin tener en cuenta el tamaño, ni que algunas de sus partes se agranden o se encojan.

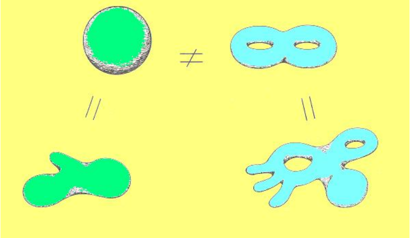
Como seres de dimensión 3 en un mundo de tres dimensiones es fácil dibujar y entender posibles formas de Planilandia pero no de nuestro propio Universo. Imaginar la forma de nuestro Universo en alguna de las siguientes situaciones:

- Hacemos una expedición a una galaxia remota. Al llegar a ella descubrimos estar de vuelta en la tierra.
- Un astrónomo acaba de descubrir que los mismos objetos se encuentran en posiciones distintas del Universo.
- Buscando ondas de radio que detecten señales extraterrestres, detectamos una señal que procede de una galaxia lejana. Investigamos y vemos que se trata de la señal de un programa de TV emitido hace 50 años.

A las posibles formas de nuestro Universo les llamaremos variedades de dimensión 3 y su estudio constituye la Topología 3-dimensional.

Topología vs. Geometría

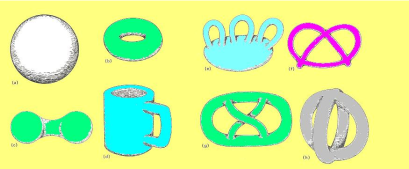
Topología: estudio de las propiedades de una variedad que permanecen inalterables aunque la deformemos (esto es, la doblemos, estiremos, retorzamos o encojamos pero no rompamos).



Geometría:Estudio de aquellas propiedades que cambian con una tal deformación (curvatura, area, volumen, longitud, etc.).

Practicando

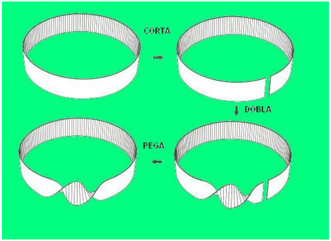
1. ¿Cuáles de las siguientes superficies tienen la misma topología?



2. En Planilandia CP descubrió que dos caminos cerrados partiendo del mismo punto en direcciones opuestas no tienen porqué volver a cruzarse en un punto diferente. ¿Es esta propiedad geométrica o topológica?.
3. Describir superficies con la misma topolología pero diferente geometría.

Propiedes intrínecas vs. propiedades extrínsecas

Observemos cómo poder dar una vuelta a una cinta.



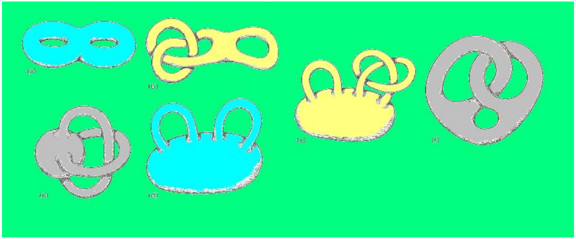
Los planilandeses que vivan en estos universos no detectarían la vuelta introducida. Para ellos sus mundos serían idénticos (tienen la misma topología intrínsica).
Sin embargo su topología extrínseca (cómo están en el espacio) es diferente.

Dos superficies:

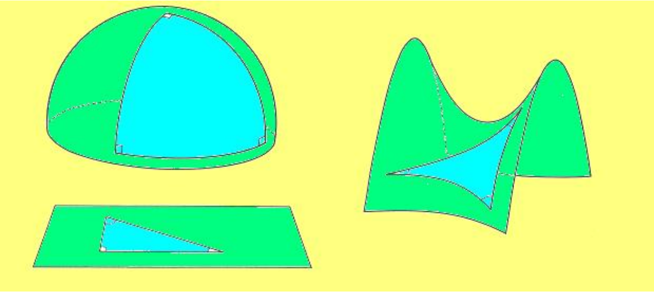
- ⁂ Tienen igual topología intrínseca si los habitantes del Universo que representan no las pueden distinguir.
- ⁂ Tienen igual topología extrínseca si una se puede deformar en la otra dentro del espacio.

Extrínseca / intrínseca se aplican también a geometría. Una hoja de papel se puede doblar a un cilindro manteniendo distancias, los dos tienen idéntica geometría intrínseca pero ha cambiado su forma en el espacio (distinta geometría extrínseca).

- ▶ Distingue según su topología intrínseca y extrínseca:



- ¿Puedes forrar un cilindro con parte de una hoja de papel sin deformarla?, ¿Y un cono?, ¿Y un trozo de esfera?.
- ¿Cómo pueden los planilandés que vivan en mundos como los de la figura conocer que sus geometrías intrínsecas son diferentes?. ¿Qué pueden decir acerca de sus topologías extrínsecas e intrínsecas?.



Propiedes locales vs. propiedades globales

Propiedades locales son aquellas observables dentro de una región pequeña mientras que las globales requieren ver la variedad como un todo.

- Superficies= espacios con la topología local de $\mathbb{R}^2$.
- 3-Variedades = espacios con la topología local $\mathbb{R}^3$.

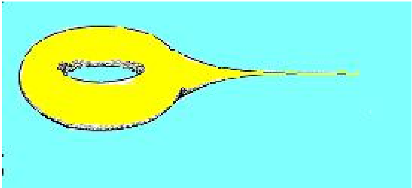
Si los planilandeses no supieran que viven sobre una esfera ¿Cuáles de los siguientes descubrimientos serían locales y cuáles globales?

1. Los ángulos de un triángulo miden $61,2^o$, $31,7^o$ y $89,3^o$.
2. Un explorador salió por dirección oeste y manteniendo el rumbo volvió del este.
3. Como los habitantes de Planilandia habitan toda la superficie, el área de Planilandia es finita.

Compacidad. Geometrías homogéneas y no homogéneas.

Intuitivamente compacta significa finita.

- Supondremos siempre nuestras variedades son compactas sin borde.
- Área finita no debe significar variedad compacta.



Variedad homogénea es la que tiene la misma geometría local en todos sus puntos. En caso contrario la variedad es no homogénea. Por ejemplo, una esfera es homogénea pero la superficie de un donut no lo es.

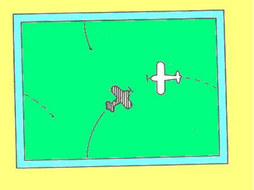
Conociendo

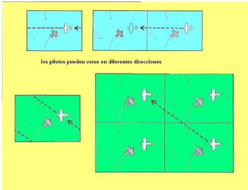
algunos

Universos 2-dimensionales

Toro llano

Un juego de video muestra una pantalla con dos aviones combatiendo. Cuando un avión sale por una arista no colisiona sino que vuelve por la arista opuesta. Diremos que las dos aristas están identificadas o pegadas:



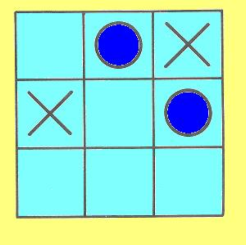


Un cuadrado o rectángulo con aristas pegadas así $=$ toro llano de dimensión dos.Observa que en un toro llano al mirar hacia el frente, también vemos nuestra espalda. De hecho nos vemos en infinitas direcciones.

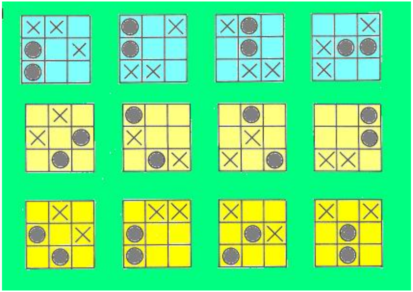
Toro llano

Jugando en un toro llano

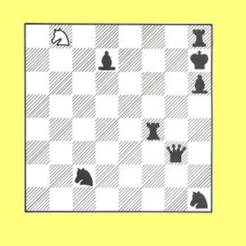
- Justifica que el toro llano y la superficie de un donut son topológicamente equivalentes.
- Consigue en la siguiente figura de un toro llano tres “X” en linea.



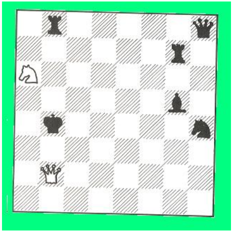
- Cuáles de las posiciones siguientes serían equivalentes al jugar unas “tres en linea” sobre un toro llano.



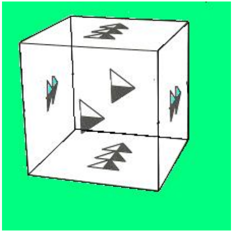
- En el siguiente tablero de ajedrez sobre un toro llano ¿Qué figuras están amenazadas por el caballo blanco?

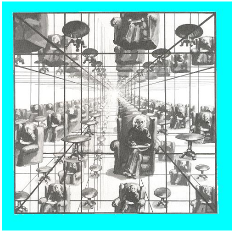


- Qué figuras están amenazadas por el caballo y la reina blancos?



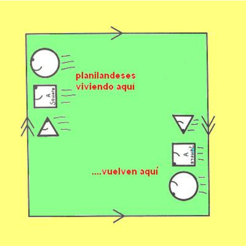
- Las siguientes figuras muestran un toro llano de tres dimensiones. Explíca cómo se construye e imagina qué verías al mirar en una dirección concreta.





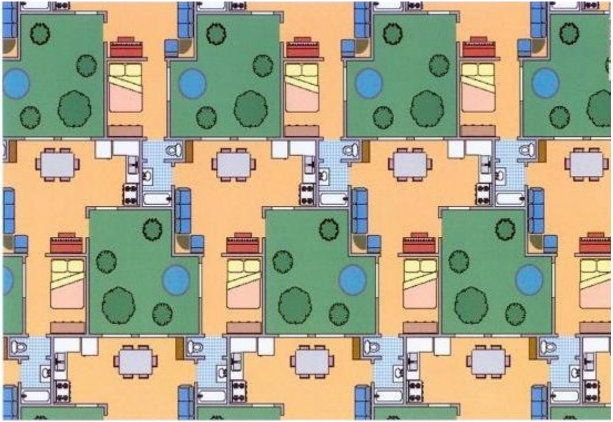
Botella de Klein

Se obtiene también de un rectángulo sólo que ahora son pegadas de forma que las flechas de la figura coincidan.



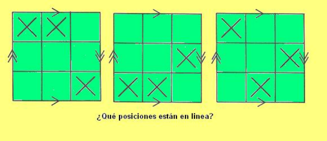
Como en el caso del toro llano el pegado es puramente abstracto, no entendemos que deba llevarse a cabo en un espacio de tres dimensiones.

Botella de Klein

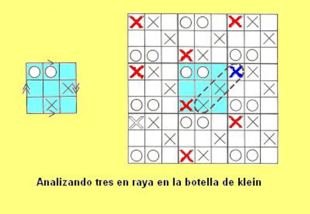


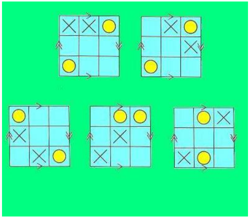
Jugando en la botella de Klein

- ¿Cuáles de las siguientes posiciones ganan en el juego de tres en raya dentro de una botella de Klein?



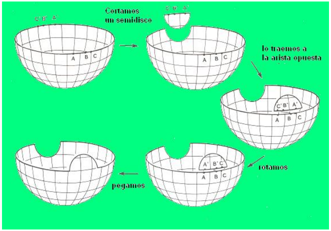
- Analiza como hacer tres en linea en la siguiente figura:





Plano Proyectivo

Es, localmente, como una esfera pero con diferente topología global. Se construye de una semiesfera pegando puntos antípodas del ecuador.



- ¿Puede distinguir un planilandés una esfera de un proyectivo? ¿Y un proyectivo de una botella de Klein?

Orientabilidad

Nuestro héroe CP y sus compañeros estaban embarcados en el conocimiento de la forma de Planilandia. La excitación ante los viajes planificados era inmensa pero esto no fue nada comparado con el CAOS que se produjo al regreso de algunas expediciones:

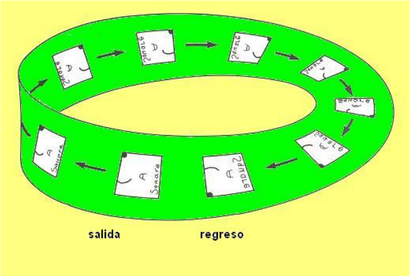
> Un día un viejo granjero planilandés (GP), que conducía hacia su granja en las afueras, colisionó contra una expedición que regresaba por el mismo lado de su carretera. Aunque nadie resultó herido GP se enojó con los miembros de la expedición por no ir circulando por el lado apropiado. Pronto pasó el enfado y deseoso de conocer sus aventuras les acompañó a la ciudad.

- Al aproximarse a la ciudad los expedicionarios no podían entender porqué todos los anuncios y señales informativas estaban escritos de atrás para adelante ni porqué todos los conductores, no solo GP, circulaban por el lado equivocado de la carretera.
- Era como si la ciudad entera hubiera cambiado durante el viaje por su imagen especular.

Durante los tres años siguientes, temiendo morir o enfermar gravemente, nadie viajó más allá de los lugares civilizados.

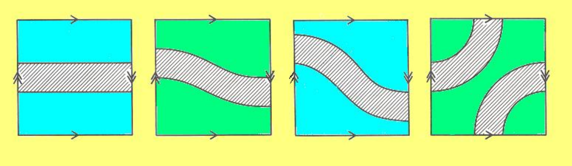
¿Cómo lograrían los planilandeses conocer la forma de su Universo?

Para entender porqué algunos planilandeses habían regresado como su imagen especular basta observar la figura del sendero (llamado banda de Möbius) que habían seguido en su viaje:



¿En qué tipo de superficies pueden los planilandeses viajar a lo largo de una banda de Möbius? ¿Exiten?. De existir diremos que son NO orientables

- Un ejemplo de superficie no orientable es la botella de Klein ya que contiene banda de Möbius:



- Un plano proyectivo también es una superficie no orientable.

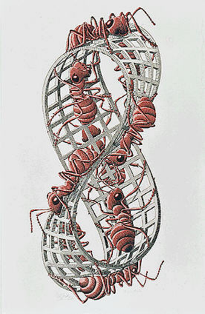
Para construir una variedad de dimensión tres no orientable: Imaginamos una habitación en forma cúbica donde pegamos el muro de la izquierda al de la derecha y el suelo al techo justo como en el toro de tres dimensiones, pero ahora la pared de enfrente es pegada a la de atrás después de haber girado esta 180 grados respecto al centro. ¿ Qué verías en este Universo al mirar en una dirección?

Activididades

- Si un planilandés viviendo en un plano proyectivo cruza el ecuador ¿Vuelve como su imagen especular?
- Una familia de planilandeses vive en un plano proyectivo. Planean edificar dos gasolineras separadas cuanto más mejor. ¿Dónde deberían construirlas?
- CP conoce que vive en una esfera o en un plano proyectivo. ¿Cómo podría saber cuál de los dos es su mundo?
- Un segundo planilandés sabe que su Universo es un plano proyectivo o una botella de Klein, ¿Qué podría hacer para conocer de cual de los dos se trata?

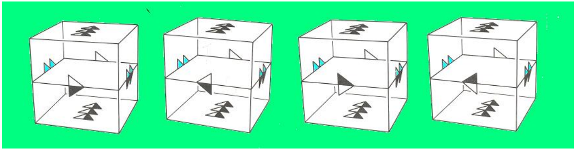
Orientabilidad vs. dos-lados

Una banda de Möbius es no orientable y también tiene un solo lado

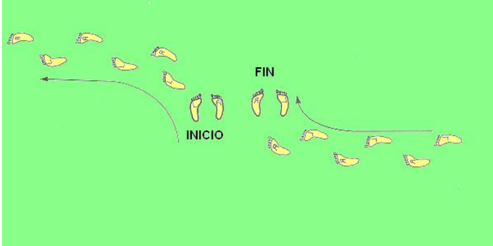


Una superficie en una variedad de dimensión tres se dice que tiene un-lado si una hormiga (de dimensión tres) puede viajar a lo largo de ella y volver al lado opuesto del que partió. En caso contrario se dice que tiene dos-lados

Es erróneo pensar que: no orientable = un-lado



En una tres variedad orientable una superficie tiene un lado si y sólo si es no orientable.

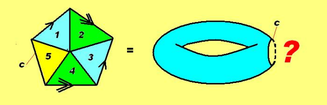


Entendiendo las posibles formas de un Universo de dimensión dos

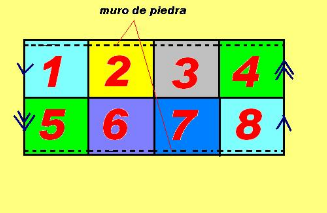
El interés por la aventura y el conocimiento de su Universo empezó a ser otra vez algo común entre los habitantes de Planilandia.

- Sucesivas expediciones delimitaron una zona segura (orientada, cuya frontera fue marcada con un muro de piedras) de una crítica (no orientada).
- Con objeto de entender la forma de cada una de estas zonas, Planilandia fue dividida en regiones que fueron exploradas en detalle por diferentes expediciones.
- Se observó que bastaba con indicar qué partes se debían pegar a cuales y así se podría conocer la forma de Planilandia.

- La zona segura fue dividida en cinco regiones que tras ser exploradas se observó que estaban identificadas como en la figura y por tanto se trataba de un toro llano:



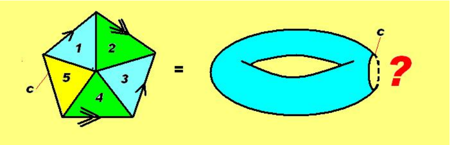
- La zona crítica se dividió en ocho regiones y su exploración fue como jugar a la ruleta rusa: ¿Qué expedición volvería como su imagen especular?. Ninguna lo hizo y esto llenó de asombro a los planilandeses... Pero todo se entendió al observar cómo debían pegar cada una de las regiones entre sí.

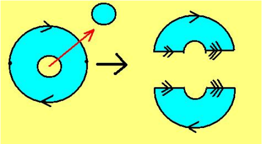


Al fin...

Los planilandeses se dieron cuenta que después de todo el cambio por la imagen especular no era algo tan misterioso y que viajando dos veces a través de estas regiones podían curarse.
El logro intelectual fue increible, los habitantes de Planilandia habían entendido como era la forma de su Universo: **Un toro menos un disco pegado a una cinta de Möbius por sus bordes**

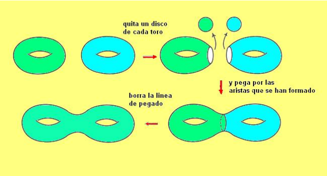
Planilandia consta de de dos superficies disjuntas: Toro$\setminus$Disco y Proyectivo$\setminus$Disco tales que se puede ir directamente de una puerta inter-espacial (A) del toro a otra (B) del proyectivo y al revés.

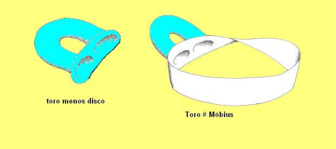


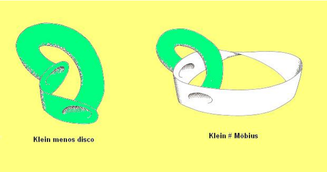


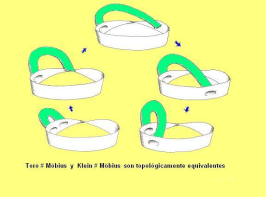
Suma conexa

Al proceso de pegar dos superficies por el borde de dos discos quitados previamente se le llama Suma conexa









Haciendo sumas conexas

- Deducir que si a una cinta de Möbius le pegamos un disco por el borde, obtenemos un plano proyectivo.
- Corrobora las palabras de Klein: "La cinta de Möbius es divina, si pegas dos por su borde obtienes mi botella"
- Construye usando papel la suma conexa de una cinta de Möbius a un toro y a una botella de Klein.
- Muestra que la suma conexa de un toro con un plano proyectivo es topológicamente equivalente a la suma conexa de una botella de Klein con un plano proyectivo
- Establece una correspondencia por equivalencia topológica entre las superfices de los conjutos A y B

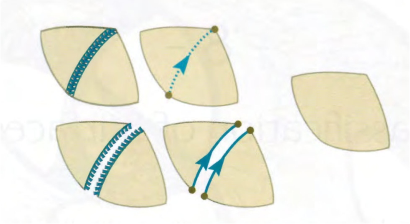
$$\begin{aligned} A &= \{\mathbb{T}^2\sharp\mathbb{S}^2, \mathbb{P}^2\sharp\mathbb{P}^2\sharp\mathbb{P}^2, \mathbb{B}^2, \mathbb{S}^2\sharp\mathbb{S}^2\sharp\mathbb{S}^2, \mathbb{P}^2\sharp\mathbb{T}^2, \mathbb{B}^2\sharp\mathbb{T}^2\sharp\mathbb{P}^2\}. \\ B &= \{\mathbb{P}^2\sharp\mathbb{P}^2, \mathbb{B}^2\sharp\mathbb{P}^2, \mathbb{S}^2\sharp\mathbb{S}^2, \mathbb{P}^2\sharp\mathbb{P}^2\sharp\mathbb{P}^2\sharp\mathbb{B}^2, \mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2\sharp\mathbb{P}^2\} \end{aligned}$$

Clasificando
las
Superficies Compactas

Cerrando Cremalleras

Cremalleras

Las superficies, a menudo, se describen mediante la identificación de aristas orientadas (cremalleras)



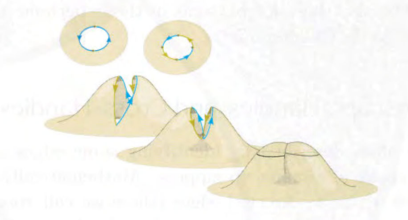
Modificaciones al cerrar un solo agujero

Un gorro

Si un agujero está acotado por dos cremalleras compañeras en sentidos opuestos, al cerrar cosemos el agujero (gorro ó $\sharp\ \mathbb{S}^2$)

Un gorro cruzado

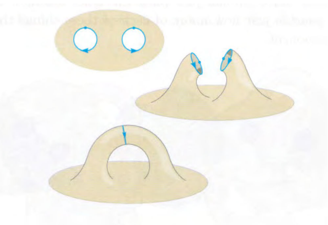
Si un agujero está acotado por dos cremalleras compañeras orientadas en el mismo sentido, cerrar introduce una sección cruzada (gorro cruzado $\times$ ó $\sharp\ \mathbb{P}^2$)



Modificaciones al cerrar dos agujeros

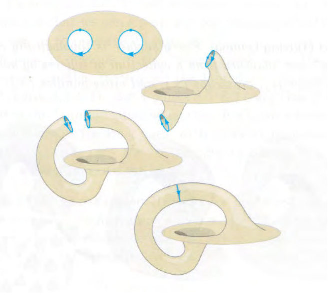
Un asa

Se introduce al estirar hacia un lado de la superficie y cerrar dos agujeros acotados por cremalleras orientadas en sentido opuesto ($\circ$, $\sharp\ \mathbb{T}^2$):



Un asa cruzada

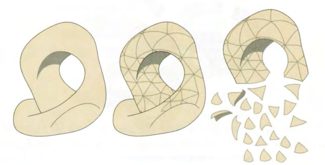
Se introduce al estirar hacia lados opuestos de la superficie y cerrar dos agujeros acotados por cremalleras orientadas en el mismo sentido ($\otimes$, $\sharp\ \mathbb{B}^2$):



Clasificación

Tibor Rado (1925)

Toda superficie compacta es triangulable



Teorema de clasificación

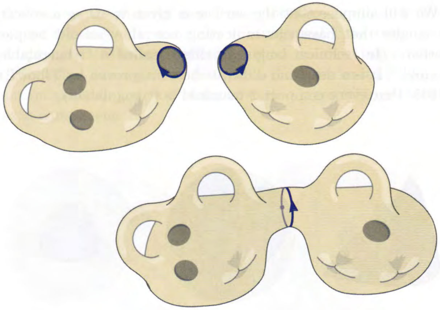
Toda superficie compacta se obtiene de una esfera añadiendo o bien asas o gorros cruzados y quizás algunos agujeros que proporcionan su borde. Esto es, $\circ^a\star^b$ o $\star^b\times^c$ representan todas las posibles superficies compactas.

Topologicamente, un triángulo es una esfera con un agujero. Bastará ver que podemos cerrar las cremalleras de una triangulación de forma que al final solo tengamos asas y agujeros o gorros cruzados y agujeros.

Justificando la clasificación

Cerrando agujeros de diferentes componentes (suma conexa)

$$\star^{a+1}\circ^{b}\times^{c}\otimes^{d} \;\sharp\; \star^{A+1}\circ^{B}\times^{C}\otimes^{D} = \star^{a+A}\circ^{b+B}\times^{c+C}\otimes^{d+D}$$

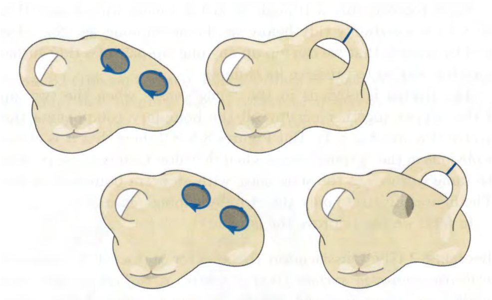


Justificando la clasificación

Cerrando diferentes agujeros de una misma componente

De $\star^{a+2}\circ^{b}\times^{c}\otimes^{d}$ obtenemos según la orientación de las cremalleras

$$\star^{a}\circ^{b+1}\times^{c}\otimes^{d} \quad o \quad \star^{a}\circ^{b}\times^{c}\otimes^{d+1}$$

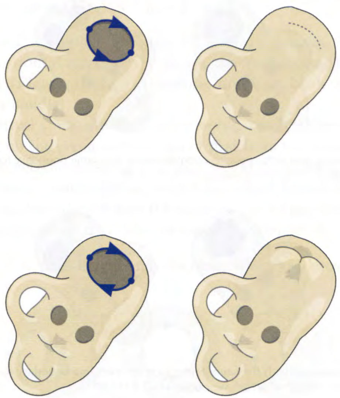


Justificando la clasificación

Cerrando un solo borde

De $\star^{a+1} \circ^{b} \times^{c} \otimes^{d}$ obtenemos según la orientación de las cremalleras

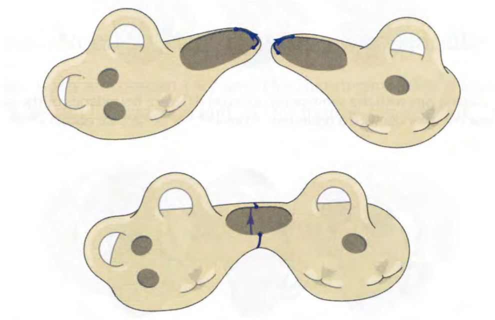
$$\star^{a} \circ^{b} \times^{c} \otimes^{d} \quad o \quad \star^{a} \circ^{b} \times^{c+1} \otimes^{d}$$



Justificando la clasificación

Cerrando parte de bordes en diferentes componentes

Conseguimos una sola componente con borde

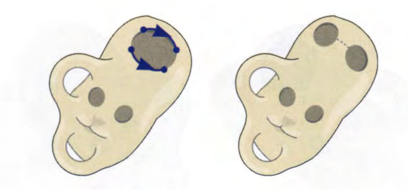


Justificando la clasificación

Cerrando parte de un borde con orientaciones opuestas

Se consigue un gorro con dos agujeros. De $\star^{a} \circ^{b} \times^{c} \otimes^{d}$ obtenemos

$$\star^{a+1} \circ^{b} \times^{c} \otimes^{d}$$

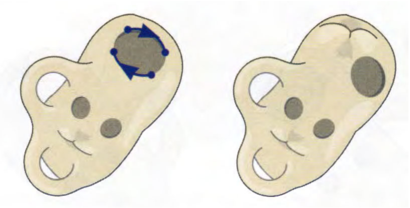


Justificando la clasificación

Cerrando parte de un borde con orientaciones opuestas

Se consigue un gorro cruzado con un agujero. De $\star^a \circ^b \times^c \otimes^d$ obtenemos

$$\star^a \circ^b \times^{c+1} \otimes^d$$

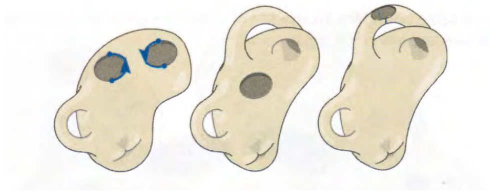


Justificando la clasificación

Cerrando parte de dos bordes con la misma orientación sobre la misma componente

Se consigue un asa cruzada con borde. De $\star^{a+1} \circ^{b} \times^{c} \otimes^{d}$ obtenemos

$$\star^{a} \circ^{b} \times^{c} \otimes^{d+1}$$

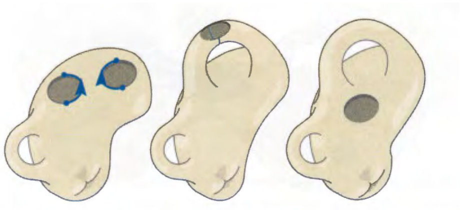


Justificando la clasificación

Cerrando parte de dos bordes con diferente orientación sobre la misma componente

Se consigue un asa con borde. De $\star^{a+1} \circ^{b} \times^{c} \otimes^{d}$ obtenemos

$$\star^{a} \circ^{b+1} \times^{c} \otimes^{d}$$



No necesitamos asas cruzadas

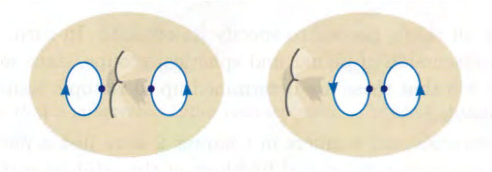
Toda asa cruzada se puede reemplazar por dos gorros cruzados

$$\otimes = \times\ \times$$

(a) (b) (c)

No necesitamos mezclar asas con gorros cruzados

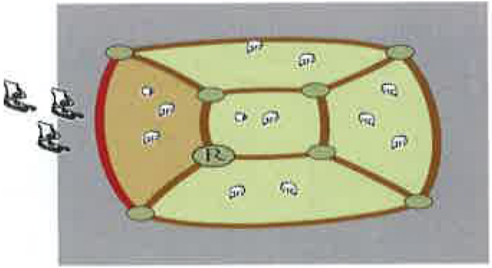
$$\times \circ = \times^3$$



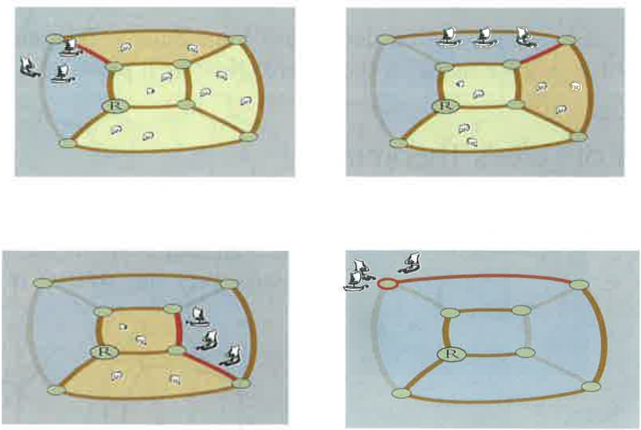
Fórmula de Euler para la esfera

En cualquier triangulación o mapa sobre la esfera se verifica

$$V - A + C = 2$$

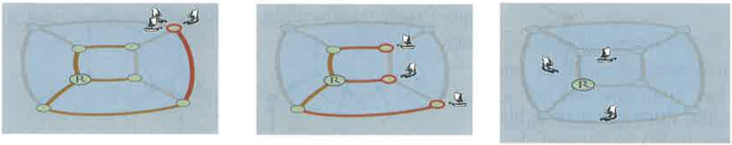


Proceso de inundación



Aristas destruidas = C -1

Saqueamiento de las ciudades



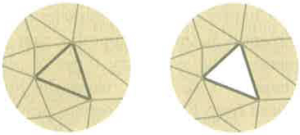
Aristas destruidas = V -1

Característica de Euler de la esfera:

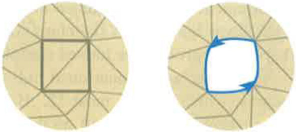
$$A = C - 1 + V - 1$$

Fórmula de Euler de una superficie compacta

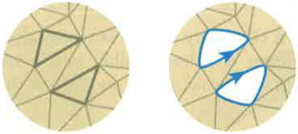
Cada agujero ($\star$) disminuye la característica de Euler en 1



Cada gorro cruzado ($\times$) disminuye la característica de Euler en 1



Cada asa ($\circ$) disminuye la característica de Euler en 2



Ejercicios

Calcula la característica de Euler de las siguientes superficies: