

Construcciones con Regla y Compás

Antonio Martínez López

Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

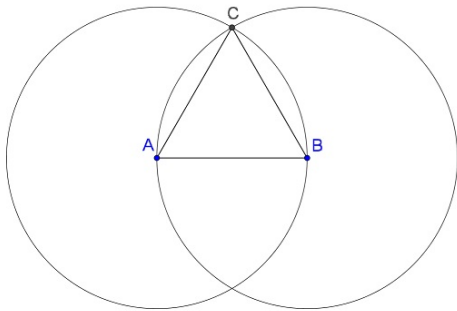
Taller de Geometría y Topología

Construcciones elementales

- ✱ Por dos puntos distintos siempre se puede construir el segmento que determinan.
- ✱ Todo segmento se puede extender a uno de cualquier longitud.
- ✱ Dados dos puntos del plano, siempre se puede construir el círculo que pasa por uno de ellos y tiene su centro en el otro.
- ✱ Siempre se puede localizar el punto de corte de dos rectas secantes.
- ✱ Dados un círculo y una recta secante al mismo, siempre se pueden localizar los puntos de intersección.
- ✱ Dados dos círculos no tangentes, siempre se pueden localizar, si los hay, los puntos donde se intersecan.

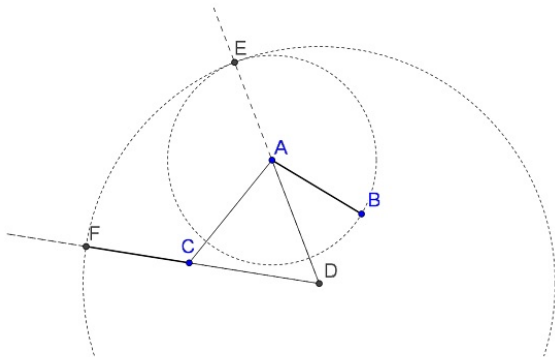
Triángulo equilátero sobre un segmento dado

Dado un segmento \overline{AB} construir un punto C tal que el triángulo $\triangle ABC$ es equilátero.



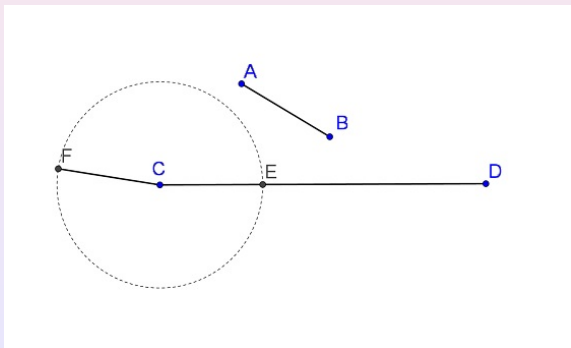
Copiando un segmento a un punto final dado

Dado un segmento \overline{AB} y un punto C construir un punto F tal que $\overline{AB} \cong \overline{FC}$.



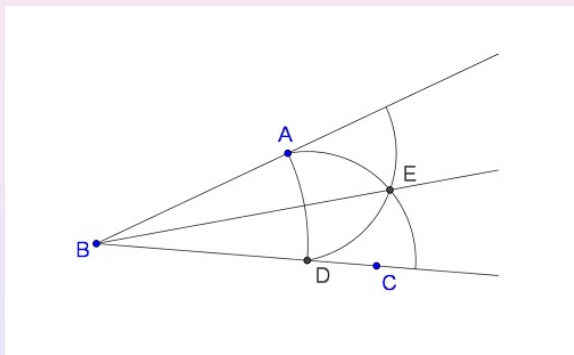
Cortando un segmento dado en otro

Dados dos segmentos \overline{AB} y \overline{CD} tales que $CD > AB$, construir un punto E en el interior de \overline{CD} tal que $\overline{CE} \cong \overline{AB}$.



Bisecando un ángulo

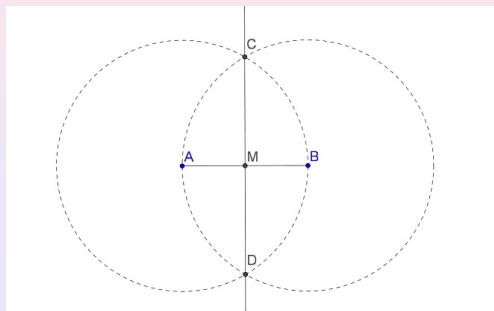
Dado un ángulo $\angle ABC$, construir un ángulo de medida $\frac{1}{2}\angle ABC$.



$\triangle ABE \cong \triangle DBE$ por (LLL)

Mediatriz de un segmento

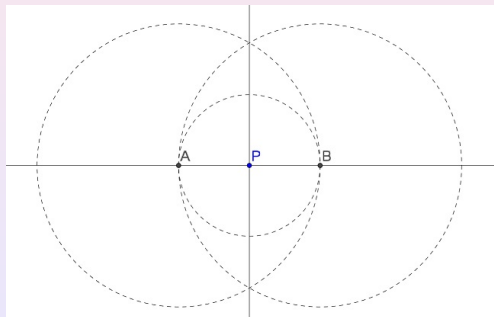
Dado un segmento \overline{AB} , construir la perpendicular que pasa por su punto medio.



$C \vee D$ biseca $\angle ACB \implies \triangle ACM \cong \triangle BCM$ por (LAL)

Perpendicular por un punto de una recta

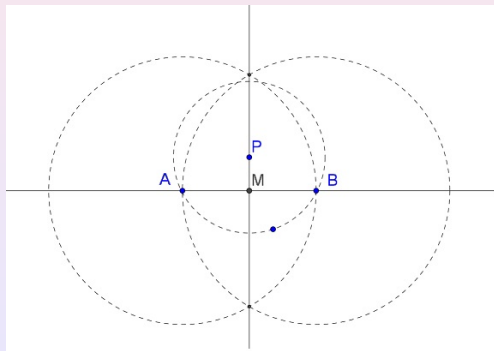
Dada una recta r y un punto $P \in r$, construir la recta perpendicular a r que pasa por P .



$$A, B \in r / P = M(A, B) \in \perp$$

Perpendicular por un punto exterior

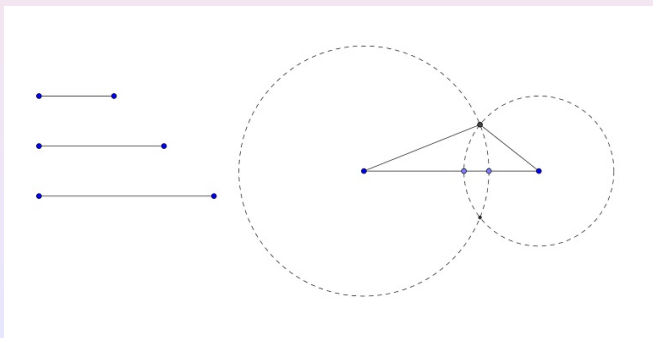
Dada una recta r y un punto $P \notin r$, construir la recta perpendicular a r que pasa por P .



$$\triangle PMA \cong \triangle PMB \implies P \in \perp$$

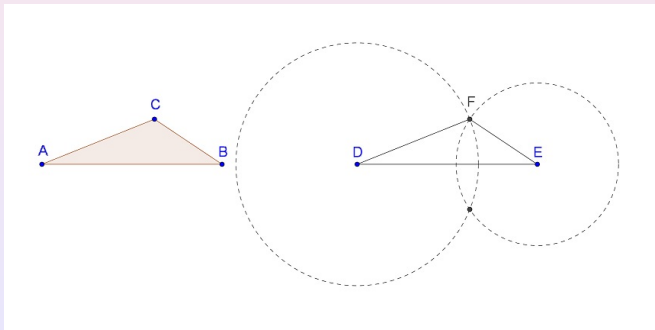
Triángulo con tres segmentos

Dados tres segmentos tal que la longitud del mayor es menor que la suma de las longitudes de los otros dos, construir un triángulo con lados congruentes a los segmentos.



Copiar un triángulo a un segmento

Dado un triángulo $\triangle ABC$ y un segmento \overline{DE} congruente a \overline{AB} , construir un punto F tal que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

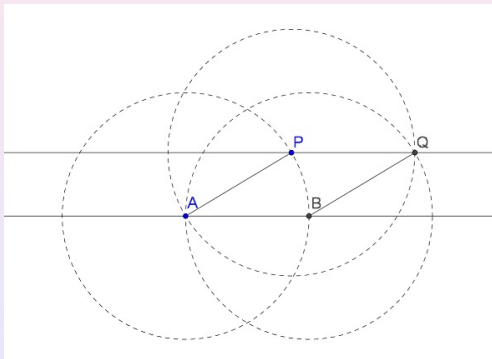


Consecuencias

- ✱ Copiar un ángulo.
- ✱ Copiar un cuadrilátero.
- ✱ Construir un rectángulo con dos segmentos.
- ✱ Construir un cuadrado con un segmento.
- ✱ Construir paralela por un punto exterior.

Paralela a otra por un punto exterior

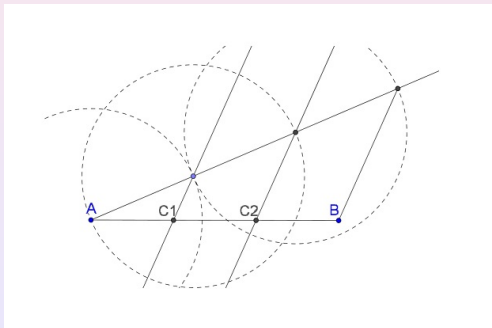
Dada una recta r y un punto $P \notin r$, construir la recta paralela a r que pasa por P .



$$\triangle PAB \cong \triangle PQB$$

Cortando un segmento en n partes iguales

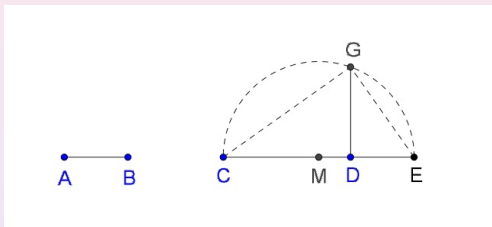
Dado un segmento \overline{AB} y un entero $n \geq 2$, construir puntos intermedios C_1, \dots, C_{n-1} tal que $AC_1 = C_1C_2 = \dots = C_{n-1}B$.



Razón racional.- $AC_m = \frac{m}{n}AB$.

Media geométrica de dos segmentos

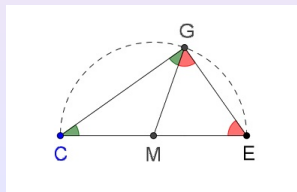
Dados dos segmentos \overline{AB} y \overline{CD} , construir un segmento que sea su media geométrica.



$$\angle CGE = \frac{1}{2}\angle CME = \frac{\pi}{2} \text{ da}$$

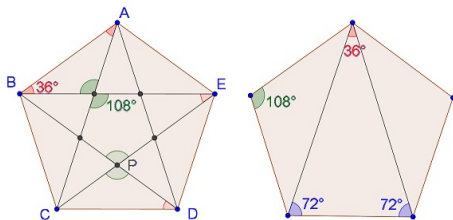
$$\triangle CDG \approx \triangle CGE \approx \triangle GDE$$

(O usar 3 veces Pitágoras)



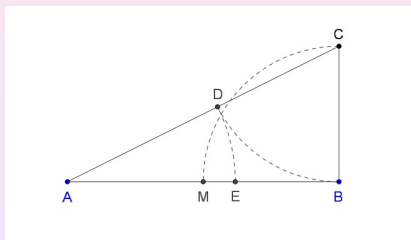
Razón aurea

$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ es la razón entre la diagonal y el lado de un pentágono regular.



Razón aurea

Dado un segmento \overline{AB} , construir un punto E en el interior de \overline{AB} , tal que $AB = \varphi AE$ con $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ número aureo.

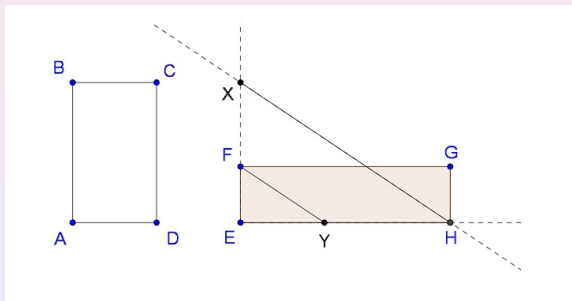


$$CB = MB = \frac{1}{2}AB \Rightarrow AC = \sqrt{1 + \frac{1}{4}}AB = \frac{\sqrt{5}}{2}AB$$

$$AE = AD = AC - CD = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB = \frac{2}{\sqrt{5}+1}AB$$

Rectángulo con área y arista dados

Dado un rectángulo $ABCD$ y un segmento \overline{EF} , construir $EFGH$ con el área de $ABCD$.

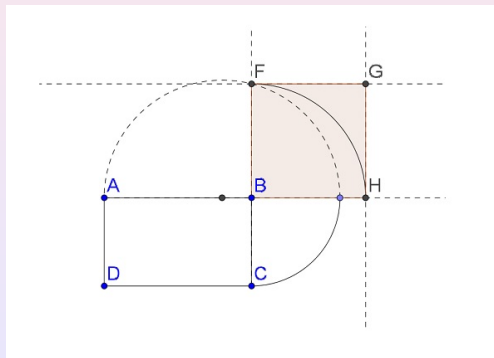


Tales da

$$\frac{EX}{EF} = \frac{EH}{EY} \implies EF \cdot EH = EX \cdot EY = AB \cdot AD$$

Cuadratura de un rectángulo

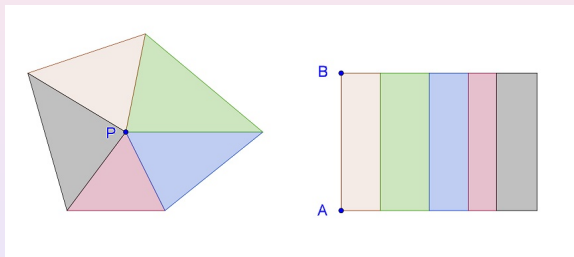
Dado un rectángulo $ABCD$, construir un cuadrado $BFGH$ con el área de $ABCD$.



BF es la media geométrica de AB y BC .

Cuadratura de un polígono convexo

Dado un polígono convexo, construir un cuadrado con la misma área.

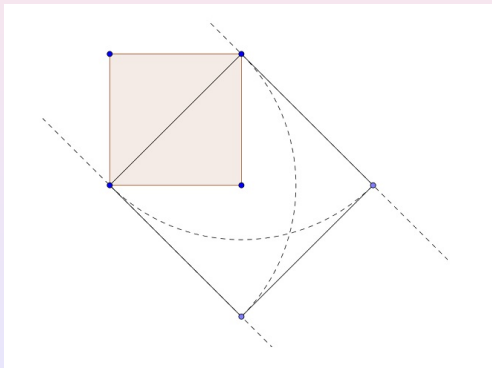


Con un punto interior P , se descompone el polígono en triángulos y se construyen rectángulos con la misma área, partiendo de un segmento \overline{AB} .

Se cuadra el rectángulo obtenido.

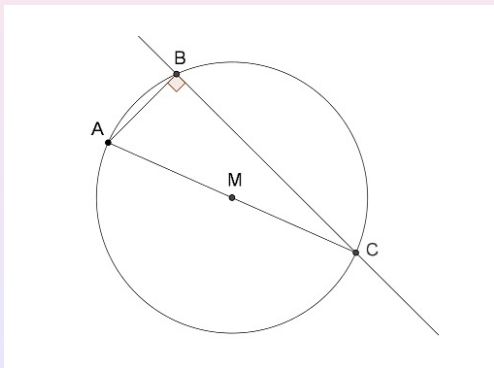
Duplicación de un cuadrado

Dado un cuadrado, construir otro con el doble de área.



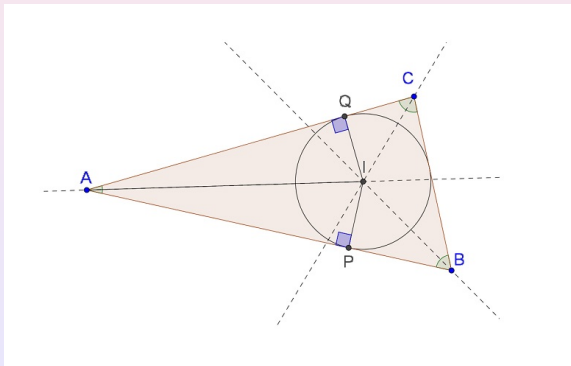
Centro de una circunferencia

Dada una circunferencia, construir su centro.



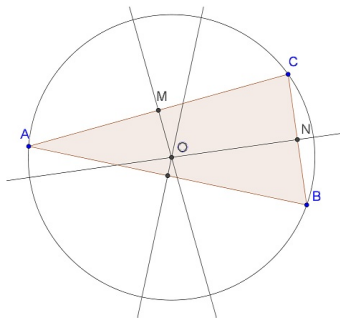
Circunferencia inscrita en un triángulo

Dado un triángulo, construir su circunferencia inscrita.



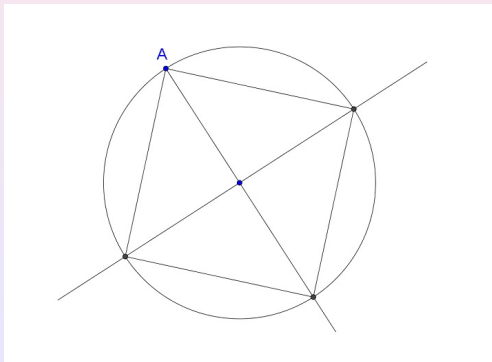
Circunferencia circunscrita a un triángulo

Dado un triángulo, construir su circunferencia circunscrita.



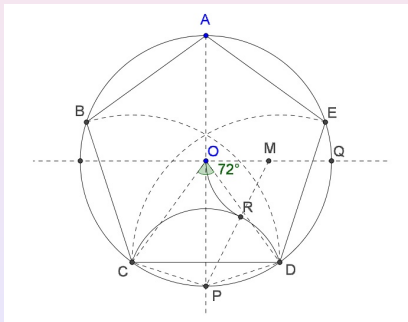
Cuadrado inscrito en una circunferencia

Dada una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el cuadrado inscrito con vértice A .



Pentágono regular inscrito en una circunferencia

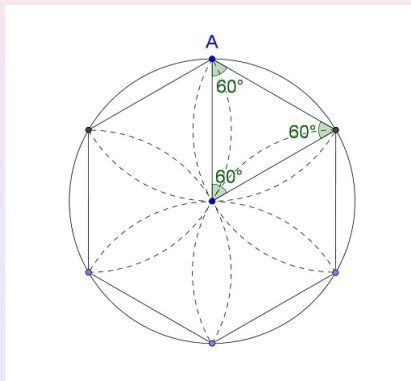
Dada una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el pentágono regular inscrito con vértice A .



$R/OP = \varphi RP \implies \triangle OPD, \triangle OPC$ triángulos aureos.

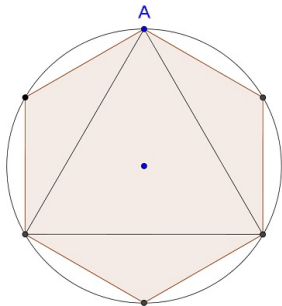
Hexágono regular inscrito en una circunferencia

Dada una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el hexágono regular inscrito con vértice A .



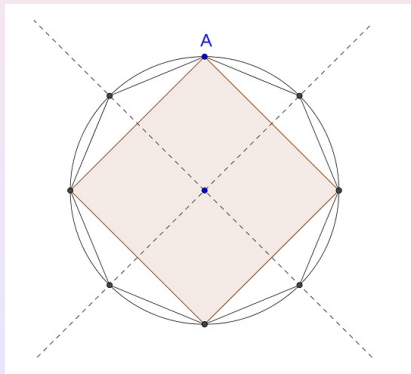
Triángulo equilátero inscrito en una circunferencia

Dada una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el triángulo equilátero inscrito con vértice A .



Octógono regular inscrito en una circunferencia

Dada una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el octógono regular inscrito con vértice A .



Pentadecagóno regular en una circunferencia

Dada una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el pentadecagóno regular inscrito con vértice A .

