Construcciones con Regla y Compás

Taller de Geometría y Topología (*Grado en Matemáticas*)

ANTONIO MARTÍNEZ
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada

Quinentos años A.C. el filósofo y matemático griego, Pitágoras, se preguntó si podría enseñar geometría a un estudiante que estuviera poco interesado. Después de encontrar al estudiante, Pitágoras le ofreció una moneda por cada resultado que lograra aprender. Como el estudiante era pobre trabajó duro para conseguir más dinero. Pero al cabo de un tiempo, se dió cuenta de que estaba más interesado en aprender geometría que en conseguir la moneda. Tal era su interés que pidió a Pitágoras ir más rápido ofreciendo devolverle una de las monedas por cada nuevo teorema que le enseñara. Pitágoras no tardó en recuperar todo su dinero.

Si bien la geometría es una rama con inmediatas aplicaciones prácticas, vivimos en mundo rodeado de objetos con formas agradables y útiles (vemos arcos de círculos en el arcoiris, exágonos en los enjambres de abejas, cubos en los cristales de sal y esferas en las pompas de jabón), quizás la razón más importante que fascinó al estudiante de Pitágoras fue su lógica.

La geometría. es la rama de las matemáticas que primero dispuso de un sistema deductivo, esto es, de un sistema de ideas capaz de desarrollar toda una teoría de avanzados y atractivos resultados a partir de unos pocos y simples estamentos. De hecho, podemos decir que el primer punto de inflexión en la historia de las matemáticas se produjo alrededor del año 300 A.C. con la aparición de los *"Elementos"* de Euclides, un tratado en trece volúmenes donde se organiza y sistematiza todo el conocimiento sobre geometría y teoría de números que se conocía.

Aunque se piensa que la mayoría de los resultados de los *"Elementos"* eran ya conocidos, a Euclides se le considera pionero en encontrar un camino para organizar todo el conocimiento matemático en un único sistema coherente y lógico, empezando con una serie de definiciones y suposiciones (postulados) para, de una forma lógica y deductiva, probar todos los resultados y propiedades conocidos hasta entonces. Su obra, traducida a más idiomas y publicada en más ediciones que cualquier otro libro (excepto la biblia), proporciona el modelo más importante del razonamiento matemático "deductivo" que se ha conocido.

Euclides basó sus primeros tres postulados en dos tipos de figuras: rectas y círculos, que pueden construirse con una recta no numerada y un compás "colapsable". Un importante número de resultados en los *"Elementos"* son soluciones a problemas de construcción y ello ha motivado que desde Euclides, muchos geómetras se hayan interesado por encontrar la manera de construir nuevas figuras.

Las construcciones con regla y compás jugaron un papel vital en las matemáticas de los griegos, no hay que olvidar que el único camino que tenían de asegurar la existencia de un determinado objeto (triángulo equilátero, cuadrado, bisectriz de un ángulo, etc.) era dar un algoritmo para su construcción.

Nuestro objetivo es por un lado, el de seleccionar e ilustrar una serie de construcciones geométricas cuya justificación puede darse en base a resultados clásicos de geometría euclídea plana y por otro, probar que algunas de las construcciones planteadas a lo largo de la historia resultan imposibles de realizar usando solo recta y compás. Para profundizar sobre los aspectos que desarrollamos en estas notas se pueden consultar el libro de John M. Lee: *Axiomatic Geometry*, American Mathematical Society, 2010.

1. Construcciones posibles

De entre las construcciones permitidas, usando solo una regla (no numerada) y un compás (colapsable), supondremos realizables las siguientes seis **construcciones elementales** basadas en los tres primeros postulados de Euclides:

1. Por dos puntos distintos siempre se puede construir el segmento que determinan.

2. Todo segmento se puede extender a uno de cualquier longitud.

3. Dados dos puntos del plano, siempre se puede construir el círculo que pasa por uno de ellos y tiene su centro en el otro.

4. Siempre se puede localizar el punto de corte de dos rectas secantes.
5. Dados un círculo y una recta secante al mismo, siempre se pueden localizar los puntos de intersección.
6. Dados dos círculos no tangentes, siempre se pueden localizar, si los hay, los puntos donde se intersecan.

Usando estas realizaciones elementales y algunos resultados de geometría euclídea plana, se justifica que las siguientes construcciones pueden hacerse solo con regla y compás:

1.1. Básicas

Construcción 1 [**Triángulo equilátero sobre un segmento dado**] *Dado un segmento* $\overline{AB}$ *construir un punto* C *tal que* $\triangle ABC$ *es equilátero.*

Construcción 2 [**Copiando un segmento dado a otro con punto final dado**] *Dado un segmento* $\overline{AB}$ *y un punto* C *construir un punto* X *tal que* $\overline{AB} = \overline{XC}$.

Construcción 3 [**Cortando un segmento de otro dado**] *Dados dos segmentos* $\overline{AB}$ *y* $\overline{CD}$ *tales que* $CD > AB$, *construir un punto* E *en el interior de* $\overline{CD}$ *tal que* $\overline{CE} \cong \overline{AB}$.

Construcción 4 [**Bisecando un ángulo**] *Dado un ángulo* $\angle ABC$, *construir un ángulo de medida* $\frac{1}{2} m\angle ABC$.

Construcción 5 [**Mediatriz de un segmento**] *Construir la mediatriz de un segmento dado.*

Construcción 6 [**Perpendicular a través de un punto en una recta**] *Dada una recta* r *y un punto* $A \in r$, *construir la recta perpendicular a* r *que pasa por* A.

Construcción 7 [**Perpendicular a través de un punto fuera de una recta**] *Dada una recta* r *y un punto* $A \notin r$, *construir la recta perpendicular a* r *que pasa por* A.

Construcción 8 [**Triángulo con longitudes de lados dada**] *Dados tres segmentos tales que la longitud del mayor es menor que la suma de las longitudes de los otros dos. Construir un triángulo de lados congruentes a los tres segmentos dados.*

Construcción 9 [Copiando un triángulo a un segmento dado] *Dado $\triangle ABC$ y un segmento $\overline{DE}$ congruente a $\overline{AB}$, construir un punto F sobre uno de los semiplanos determinados por la recta $\overleftrightarrow{DE}$ tal que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.*

Construcción 10 [Copiando un ángulo a un rayo dado] *Dado un ángulo propio $\angle ab$, un rayo $\overrightarrow{r}$ y un semiplano de la recta $\overleftrightarrow{r}$, construir el rayo $\overrightarrow{s}$ con el mismo punto final que $\overrightarrow{r}$ quedando en el semiplano dado de $\overleftrightarrow{r}$ y tal que $\angle rs \cong \angle ab$.*

Construcción 11 [Copiando un cuadrilátero convexo a un segmento dado] *Dado un cuadrilátero convexo $ABCD$, un segmento $\overline{EF}$ congruente a $\overline{AB}$ y un semiplano de $\overleftrightarrow{EF}$, construir punto G y H sobre el semiplano dado tales que $ABCD \cong EFGH$.*

Construcción 12 [Rectángulo con longitudes de lados dada] *Dados dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{EF}$ y un semiplano de $\overrightarrow{AB}$, construir puntos C y D sobre dicho semiplano tal que $ABCD$ es un rectángulo con $\overline{BC} \cong \overline{EF}$.*

Construcción 13 [Cuadrado sobre un segmento dado] *Dado un segmento $\overline{AB}$ y un semiplano de $\overrightarrow{AB}$, construir puntos C y D sobre dicho semiplano tal que $ABCD$ es un cuadrado.*

Construcción 14 Paralela a una recta a través de un punto exterior] *Dada una recta r y un punto $A \notin r$, construir la recta paralela a r que pasa por A.*

1.2. Involucrando razones geométricas

Construcción 15 [Cortando un segmento en n partes iguales] *Dado un segmento $\overline{AB}$ y un entero $n \geq 2$, construir puntos $C_1, \cdots, C_{n-1}$ intermedios $A < C_1 < \cdots, C_{n-1} < B$ tales que $AC_1 = C_1C_2 = \cdots = C_{n-1}B$.*

Construcción 16 [Cortando un segmento en una razón proporcional a su longitud] *Dado un segmento $\overline{AB}$ y un racional $x = m/n$ entre 0 y 1, construir un punto D entre A y B tal que $AD = xAB$.*

Construcción 17 [Media geométrica de dos segmentos] *Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, construir un tercer segmento que sea su media geométrica.*

Construcción 18 [La razón aurea] *Dado un segmento $\overline{AB}$, construir un punto E en el interior de $\overline{AB}$, tal que AB/AD es el número aureo.*

1.3. Involucrando áreas

Construcción 19 [Parelologramo con igual área que un triángulo dado] *Dado un triángulo $\triangle ABC$ y un ángulo propio $\angle rs$, construir un paralelogramos con la misma área que $\triangle ABC$ y con uno de los ángulos congruentes $\angle rs$.*

Construcción 20 [Rectángulo con área y arista dados] *Dado un rectángulo $ABCD$, un segmento $\overline{EF}$ y un semiplano de $\overleftrightarrow{EF}$, construir un nuevo rectángulo con la misma área que $ABCD$ con $\overline{EF}$ como uno de sus lados y con el lado opuesto sobre el semiplano dado.*

Construcción 21 [Cuadratura de un rectángulo] *Dado un rectángulo $ABCD$, construir un cuadrado con la misma área que $ABCD$.*

Construcción 22 [Cuadratura de un polígono convexo] *Dado un polígono convexo, construir un cuadrado con la misma área que dicho polígono.*

Construcción 23 [Duplicación de un cuadrado] *Dado un cuadrado, construir otro con área el doble que el original.*

1.4. Circunferencias destacadas

Construcción 24 [Centro de una circunferencia] *Dado una circunferencia, construir su centro.*

Construcción 25 [Circunferencia inscrita a un triángulo] *Dado un triángulo, construir su circunferencia inscrita.*

Construcción 26 [Circunferencia circunscrita a un triángulo] *Dado un triángulo, construir su circunferencia circunscrita.*

1.5. Polígonos regulares

Construcción 27 [Cuadrado inscrito en una circunferencia] *Dado una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el cuadrado inscrito en la circunferencia con uno de sus vértices A.*

Construcción 28 [Pentágono regular inscrito en una circunferencia] *Dado una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el pentágono regular inscrito en la circunferencia con uno de sus vértices A.*

Construcción 29 [Hexágono regular inscrito en una circunferencia] *Dado una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el hexágono regular inscrito en la circunferencia con uno de sus vértices A.*

Construcción 30 [Triángulo equilátero inscrito en una circunferencia] *Dado una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el triángulo equilátero inscrito en la circunferencia con uno de sus vértices A.*

Construcción 31 [Octógono regular inscrito en una circunferencia] *Dado una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el octógono regular inscrito en la circunferencia con uno de sus vértices A.*

Construcción 32 [Pentadecágono regular inscrito en una circunferencia] *Dado una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el pentadecágono regular inscrito en la circunferencia con uno de sus vértices A.*

2. Construcciones imposibles

Durante dos mil años, muchos matemáticos han tratado de encontrar algoritmosConstrucciones que permitieran dar solución a ciertas construcciones, aparentemente simples, pero que a lo largo del siglo diecinueve se logró probar de una manera rigurosa que, en general, son imposibles de realizar usando sólo regla y compás. Cuatro de las más conocidas son:

1. Trisección de un ángulo dado: Dado un ángulo propio $\angle ABC$, construir un ángulo de medida $\frac{1}{3}m\angle ABC$.

2. Duplicación de un cubo: Dado un segmento arbitrario $\overline{AB}$, construir un segmento $\overline{CD}$ tal que el cubo con longitud de lado CD tiene el doble de volumen que el cubo con longitud de lado AB.

3. Cuadratura del círculo: Dado un círculo, construir un cuadrado con la misma área que dicho círculo.

4. Construcción de un heptágono regular: Dado una circunferencia y un punto A sobre ella, construir el heptágono regular inscrito en la circunferencia con uno de sus vértices A.

2.1. Elementos construibles o realizables

Toda construcción debe empezar con algunos datos. Con objeto de probar que algunas construcciones no son posibles, empezaremos con dos puntos dados O y U cuya distancia es 1.

Definición 1 Diremos que alguno de los objetos: recta, circunferencia o punto, es *construible* con recta y compás, si pueden obtenerse a partir de O y U con un número finito de construcciones elementales.

Un número real x es construible si existen puntos construibles C y D tales que $CD = |x|$ (por tanto, x es construible si y sólo si $-x$ es construible).

Teorema 1 *El conjunto $\mathfrak{C}$ de números construibles es un subcuerpo de $\mathbb{R}$.*

Demostración. Es claro que $0 = OO$ y $1 = OU$ son construibles. Supongamos que $x, y \in \mathbb{R}$ son construibles, y sean A, B, C, D puntos construibles tales que $|x| = AB$ y $|y| = CD$. En orden a probar que $x + y$, $x - y$, xy y x/y (si $y \neq 0$) son construibles, podemos suponer que $x \neq 0$ y $y \neq 0$ pues en otro caso sería evidente.

Podemos también suponer que $|y| \leq |x|$. Siguiendo la Construcción 2 podemos construir un punto X sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$, $A < B < X$, de forma que $BX = CD$. Si cogemos la circunferencia con centro en B pasando por X y calculamos sus puntos de corte con $\overleftrightarrow{AB}$, conseguimos un segundo punto Z tal que $A \leq Z < B < X$, con $ZB = XB$. Por tanto, $|x| + |y| = AX$ y $|x| - |y| = AZ$ son construibles. Como $|x + y| = |x| + |y|$ cuando x e y tienen el mismo signo y $|x + y| = |x| - |y|$ si tienen signo opuesto, concluimos que $x + y$ es construible. Dado que $-x$ y $-y$ son construibles, también lo serán $x - y$ y $y - x$.

Para probar que xy es construible basta aplicar la Construcción 12 para conseguir un rectángulo de lados $|y|$ y $|x|$ y posteriormente la Construcción 20 para realizar otro rectángulo de la misma área pero con uno de los lados de longitud 1. Es claro que el otro lado tendrá longitud $|xy|$.

Por último si construimos un rectángulo de lados $|x|$ y 1, y después otro con su misma área sobre un lado de longitud $|y|$, obtendremos que el otro lado de este último rectángulo ha de ser $|x/y|$. $\square$

Como todo subcuerpo de $\mathbb{R}$ ha de contener a $\mathbb{Q}$, se tiene:

Corolario 1 *Todo número racional es construible.*

Teorema 2 *Si $x \in \mathfrak{C}$, entonces $\sqrt{|x|} \in \mathfrak{C}$.*

Demostración. Suponemos que x es construible y positivo. Construimos un rectángulo cuyas longitudes de lados sean x y 1 (Construcción 12) y luego un cuadrado con su misma área (Construcción 21). Los lados de este cuadrado tendrán longitud $\sqrt{x}$. $\square$

De lo anterior el cuerpo $\mathfrak{C}$ contiene raíces cuadradas de números racionales y raíces cuadradas de raíces cuadradas de raíces cuadradas $\cdots$.

Definición 2 Si $\mathbb{K}$ es un subcuerpo de $\mathbb{R}$ y $e \in \mathbb{K}$ es positivo y tal que $\sqrt{e} \notin \mathbb{K}$, decimos que

$$\mathbb{K}(\sqrt{e}) = \{a + b\sqrt{e} \mid a, b \in \mathbb{K}\}$$

es una *extensión cuadrática de* $\mathbb{K}$.

No es difícil probar los siguientes hechos:

- $\mathbb{K}(\sqrt{e})$ es el menor subcuerpo de $\mathbb{R}$ que contiene a $\mathbb{K}$ y a $\sqrt{e}$.
- $a + b\sqrt{e}$ es cero si y sólo si $a = b = 0$.

Decimos que un subcuerpo $\mathbb{K}$ de $\mathbb{R}$ es una *extensión cuadrática iterada* de $\mathbb{Q}$ si existe una sucesión finita de subcuerpos $\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{K}_n \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$, $\mathbb{K}_n = \mathbb{K}$ y cada $\mathbb{K}_i$ es extensión cuadrática de $\mathbb{K}_{i-1}$.

El siguiente resultado que caracteriza los números construibles fue probado en 1637 por René Descartes:

Teorema 3 [Caracterización de $\mathfrak{C}$] *Un número real es construible si y sólo si está en alguna extensión cuadrática iterada de* $\mathbb{Q}$.

Demostración. □

2.2. El problema de trisecar un ángulo

Decimos que un ángulo dado $\angle rs$ es construible si las rectas que contienen sus lados son construibles.

Teorema 4 *Sea* $\theta \in [0, 180]$. *Entonces, existe un ángulo construible con medida* θ *si sólo si* $\cos\theta$ *es construible, esto es,* $\cos\theta \in \mathfrak{C}$.

Demostración. Si $\theta \in \{0, 90, 180\}$ es inmediato que el resultado es cierto. Además y como $\cos(180 - \theta) = -\cos\theta$ y como la eexistencia de un ángulo de medida θ da también la existencia de un ángulo de medida $180 - \theta$, podemos suponer que $0 < \theta < 90$ para nuestro razonamiento.

Si $\cos\theta \in \mathfrak{C}$, de nueatra suposición, $0 < \cos\theta < 1$. Sea $\overline{AB}$ un segmento de longitud $\cos\theta$, si construimos la recta r perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ por B (Construcción 6) y la circunferencia $\mathcal{C}$ de centro A y radio 1, existe $C \in \mathcal{C} \cap r$. Es claro que $\cos CAB = AB/AC = \cos\theta$ y $m\angle CAB = \theta$.

Recíprocamente, si existe un ángulo $\angle rs$ de medida θ y A es su vértice, podemos construir sobre $\overrightarrow{r}$ el punto C, tal que $AC = 1$ (Construcción 2) y una perpendicular $\overleftrightarrow{p}$ a $\overleftrightarrow{s}$ a través de C. Entonces, es claro que existe $B = \overleftrightarrow{p} \cap \overleftrightarrow{r}$ y además $AB = \cos\theta$. □

Teorema 5 *El ángulo de medida* 20^o *no es construible.*

Demostración. Como $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, $x = 2\cos 20$ verifica la siguiente ecuación:

$$x^3 - 3x - 1 = 0, \tag{2.1}$$

y bastará, por el Teorema 4, probar que la ecuación anterior no tiene raíces construibles.

Paso 1: La ecuación (2.1) no tiene raíces racionales.
Supongamos que $x = m/n$ es solución de (2.1) con m y n primos entre sí, entonces

$$\frac{m^3}{n} = 3mn + n^2 \in \mathbb{Z}.$$

Lo que prueba que m^3 es divisible por n y por tanto, todo primo que divida a n debe dividir también a m. Como m y n son primos entre sí, deducimos que $n \in \{1, -1\}$ y $x = m/n$ es un entero verificando $x(x^2 - 3) = 1$, esto es, $x \in \{1, -1\}$ que contradice el hecho de ser solución de (2.1).

Paso 2: Ninguna de las raíces irracionales de (2.1) son construibles.
Como la función $f(x) = x^3 - 3x - 1$ cambia de signo en los intervalos $]-2, -1[$, $]-1, 1[$ y $]1, 2[$, la ecuación (2.1) tiene tres raíces distintas x_1, x_2 y x_3, una en cada intervalo con lo que

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

y por tanto

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Suponemos que una de las raíces, por ejemplo x_1, es construible, entonces existe un número finito de extensiones cuadráticas

$$\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{K}_m$$

tal que $x_1 \in \mathbb{K}_m$ y podemos suponer que los cuerpos se han escogido de forma que m es el más pequeño posible donde encontrar una raíz construible.

Como $f(x)$ no tiene ceros racionales, $m \geq 1$ y podemos escribir $x_1 = a + b\sqrt{e}$ con $a, b, e \in \mathbb{K}_{m-1}$. Por hipótesis,

$$0 = f(a + b\sqrt{e}) = (a^3 + 3ab^2e - 3a - 1) + (3a^2b + b^3e - 3b)\sqrt{e},$$

de donde deducimos que $a^3 + 3ab^2e - 3a - 1 = 3a^2b + b^3e - 3b = 0$ y por tanto

$$0 = f(a - b\sqrt{e}) = (a^3 + 3ab^2e - 3a - 1) - (3a^2b + b^3e - 3b)\sqrt{e}$$

Así $x_3 = -2a \in \mathbb{K}_{m-1}$ es un cero de f, lo que contradice nuestra suposición de que m era el número más pequeño de extensiones necesarias para encontrar un cero de f. $\square$

Corolario 2 *No existe un algoritmo general que permita trisicar con regla y compás cualquier ángulo.*

2.3. Duplicación del cubo y Cuadratura del círculo

Teorema 6 *No existe ningún algoritmo que permita duplicar el volumen de un cubo con regla y compás.*

Demostración. De ser posible, si empezamos con un cubo de lado 1, tendríamos que conseguir un cubo de lado $\sqrt[3]{2}$ y por tanto $\sqrt[3]{2}$ sería construible.

Sea $\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{K}_m$ una sucesión de extensiones cuadráticas tal que $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{K}_m$, donde como en el teorema anterior, m es escogido como el más pequeño posible. Entonces, escribiendo $\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{e}$, con $a, b, e \in \mathbb{K}_{m-1}$ y $\sqrt{e} \notin \mathbb{K}_{m-1}$, se tiene

$$0 = (\sqrt[3]{2})^3 - 2 = (a^3 + 3ab^2e - 2) + (3a^2b + b^3e)\sqrt{e},$$

y por tanto

$$0 = a^3 + 3ab^2e - 2 = 3a^2b + b^3e.$$

Así, $(a - b\sqrt{e})^3 = 2$ y la ecuación $x^3 - 2$ tendría dos soluciones reales, lo cual es imposible salvo que $b = 0$, pero en este caso, se contradice nuestra suposición sobre m. $\square$

Con objeto de resolver la cuadratura del círculo vamos a recordar alguna terminología algebraica:

Definición 3 Decimos que un número real es *algebraico* si es raíz de alg˙n poolinomio con coeficientes reales. En caso contrario se dice que es *transcendente.*

Observar que si $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{e})$, $x = a + b\sqrt{e}$, entonces

$$x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$$

con lo que x es siempre algebraico. Un razonamiento más general permite demostrar

Proposición 1 *Todo número construible es algebraico.*

En 1882, el matemático alemán Ferdinand von Lindmann probó que π es transcendente. Como consecuencia, tenemos

Teorema 7 *No existe ningún algoritmo que permita construir, con regla y compás, un cuadrado con la misma área que un círculo.*

Demostración. Si dicho algoritmo existiera, tomando una circunferencia de radio 1, encontraríamos un cubo de longitud de lado $\sqrt{\pi}$. Así, $\sqrt{\pi}$ sería construible. Pero $\mathbb{K}$ es un cuerpo y por tanto $\pi = \sqrt{\pi}\sqrt{\pi}$ sería también construible y por ello algebraico, lo que contradice el resultado de Lindmann. $\square$

2.4. Polígonos regulares construibles

Es claro que un polígono regular de n lados es construible con regla y compás si y sólo si es posible construir un ángulo de cuya medida sea $360^o/n$ o equivalentemente, si y sólo si $\cos(360/n)$ es un número construible.

También hemos visto que es posible construir polgónos regulares de $3, 4, 5, 6, 8$ y 15 lados y bisecando sus ángulos podríamos construir de $10, 12, 16, 30, \cdots$. Pero, ¿Qué pasa con los polgónos regulares de $7, 9, 14, 17, \cdots$ lados.

Usando el Teorema 5 y la Construcción 4 se tendría,

Teorema 8 *No existen algoritmos que permitan construir, con regla y compás, polígonos regulares de* $9, 18, 36, \cdots$ *lados.*

Sorprendentemente, en 1796, Carl Friedrich Gauss demostró que $\cos(360/17)$ se puede escribir como

$$\frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right)$$

con lo que $\cos(360/17)$ es construible y, por tanto, es posible construir un polígono de 17 lados.

En su razonamiento, Gauss observó que era posible obtener fórmulas análogas para $\cos(360/p)$, donde p es un primo de Fermat, esto es un primo que se puede escribir como

$$p = 2^{(2^n)} + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia, también es posible construir polígonos regulares con cuyo número de lados sea un primo de Fermat.

Por otro lado, usando la misma técnica que Euclides para construir un polígono de 15 lados, si m y n son primos entre sí y es posible construir polgónos regulares de m y n lados, entonces también es posible construir un polígono regular de mn lados.

Usando este hecho, Gauss probó que si $n = 2^k p_1 \cdots p_m$, con $k \geq 2$ y $p_1, \cdots, p_m$ primos distintos de Fermat, entonces es posible construir un polígono regular de n lados. Finalmente, Pierre Wantzel probó en 1837 que el recíproco también es cierto. Esto es,

Teorema 9 *Un polígono regular de n lados puede ser construido con regla y compás si sólo si $n = 2^k p_1 \cdots p_m$, con $k \geq 2$ y $p_1, \cdots, p_m$ primos distintos de Fermat.*

Corolario 3 *No existe ningún algoritmo que permita construir con regla y compás un heptágono regular.*