

1.0 Axioms of Probability and general addition rule

General addition rule: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Nominal data: Languages spoken in Sweden (not a numerical data)

Ordinal data: Swedish Ice hockey leagues or assessment data in ascending order (a+, a, a-, b+, ..., c-)

Discrete numerical data: Number of passengers in a car

Continuous numerical data: Number of people living in Gothenburg, when the value lies in a large set

1.1 Basic Definitions

Simple Combinatorics (Kortleken)

Q1

Here Red refers to the Hearts and Diamonds suits, and Black refers to the Spades and Clubs suits.

Numeric (for this question) means the card's value is value from 2 to 10 inclusive. The term Face means a Jack, Queen or King. Even means a 2, 4, 6, 8 or 10; and odd means a 3, 5, 7, or 9. (For this question, 'Odd' does not include the Ace.)

Where E^c is short for not E find:

a) $P(\text{Face})?$

Jack, King, Queen = 3 kort, 4 valörer och totalt 52 kort

$$(3 \cdot 4) / 52$$

b) $P(\text{Heart and Ace})?$

Finns bara ett kort som är hjärter och ess, därför 1/52

c) $P(\text{Heart or Odd})?$

13 hjärter + 4 udda kort * 3 (för de tre andra valörerna)

$$(13 + (4 \cdot 3)) / 52$$

d) $P(\text{Ace}^c)?$ (not Ace)

$$52 - 4 = 48, 48 / 52$$

e) $P(\text{Numeric}^c \text{ and Black})?$

Dvs chansen att du inte får ett svart numeriskt kort

26 svarta kort - 18 numeriska svarta kort = 8

$$8/52$$

f) $P(\text{Club}^c \text{ or Heart})?$

$$52 - 13 = 39, 39/52$$

g) $P(\text{Black}^c \text{ and Spade}^c)?$

Inte svart och spader, vilket ger $(13+13)/52$??

h) $P(\text{Even}^c \text{ or Ace}^c)?$

Inte jämnt kort eller ess, vilket ger 1 ??

Q4

Två tärningar med formen av regelbundna polyedrar finns. Den ena har 6 sidor, med sidorna märkta 1 till 6. Den andra har 12 sidor, med sidorna märkta 1 to 12.

Vad är sannolikheten att ett kast med dessa två tärningar ger en summa av 3?

$$6 \cdot 12 = 72. \text{ Två fall ger summan 3 (1+2 \& 2+1), vilket ger } 2/72$$

Basic Probability Laws

Q1

Ett elektroniskt system innehåller fyra reläer. Sannolikheten att alla fyra skall gå sönder är 0.03.

Vad är sannolikheten att minst en av de fyra reläerna fungerar?

$$1 - (0.03)$$

Q2

Tre friidrottare tävlar i ett lopp. Man vet från tidigare lopp av samma längd att sannolikheten att idrottsman ett vinner 0.47 och sannolikheten att idrottsman nummer två vinner är 0.02.

a) Vad är sannolikheten att idrottsman nummer tre vinner?

$$1 - 0.47 - 0.02 = 0.51$$

b) Vad är sannolikheten att idrottsman nummer 2 inte vinner?

$$1 - 0.02 = 0.98$$

Q3

Ett varningssystem består av två komponenter. Var och en av dessa komponenter kan ge signal om en olycka inträffar. Tyvärr kan hela systemet förstöras vid vissa typer av olyckor. Erfarenheten har visat att komponent A fungerar med sannolikheten 0.9 medan komponent B fungerar med sannolikheten 0.91. Sannolikheten att båda kommer att fungera vid en olycka är 0.84.

a) Är händelserna "A fungerar" och "B fungerar" oberoende? (ja = 1/ nej = 0)

Svar: 0

b) Antag att en olycka inträffar. Vad är sannolikheten att systemet fungerar?

$$A^c + B^c = (1 - 0.9) + (1 - 0.91) = 0.19$$

$$0.19 - (1 - 0.84) = 0.03$$

$$1 - 0.03 = 0.97$$

c) Beräkna sannolikheten att olyckor där komponent A har blivit förstörd även förstör komponent B.

$$0.91 - 0.84 = 0.07$$

$$0.03 / (0.03 + 0.07) = 0.3$$

d) Antag att komponent B fungerar. Hur stor är sannolikheten att även komponent A fungerar.

$$0.84 / 0.91 = 0.92307$$

Q4

Vid tillverkning av muttrar kan bl.a. följande tre fel uppkomma:

A: Sexkants-formen är felaktig.

B: Hålet har felaktig diameter.

C: Gångorna är defekta.

Antag att händelsen A är oberoende av såväl B som C medan händelserna B och C är disjunkta. Sannolikheten för A är 0.04, för B 0.04 och för C 0.04. Antag att en kontrollant skall granska en slumpmässigt vald mutter.

a) Vad är sannolikheten att den är felaktig på något sätt?

$$0.96 * 0.96 * 0.96 = 0.884736$$

$$0.884736 - (0.04(B) * 0.04(C)) = 0.883136$$

$$1 - 0.883136 = 0.116864$$

b) Redan på lite avstånd kunde kontrollanten se att formen var felaktig. Hon tog upp den och mätte diametern. Hur stor är sannolikheten att denna är felaktig?

$$0.04$$

c) Antag att muttern förutom felaktig form även har felaktig diameter. Hur stor är sannolikheten att den dessutom har defekta gängor?

$$0$$

d) Är händelserna B och C oberoende? (ja=1 / nej=0)

Nej, för dem är disjunkta.

Q5

Antag att vi har två händelser A och B, där $P(A)=0.47$, $P(B)=0.48$ och $P(A \cup B)=0.52$. Beräkna:

a) $P(A^c)$

$$1 - 0.47 = 0.53$$

b) $P(A \cap B)$

$$P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

c) $P(A^c \cup B)$

$$P(A^c) + P(A \cap B)$$

d) $P(A \cap B^c)$

$$P(A) - P(A \cap B)$$

e) $P(A^c \cup B^c)$

$$1 - P(A \cap B)$$

f) $P(A^c \cap B^c)$

$$1 - P(A \cup B)$$

Q6

En kemist gör fyra oberoende försök som misslyckas med sannolikheterna 0.04, 0.05, 0.07 resp. 0.07.
Beräkna sannolikheterna att :

a) alla lyckas

$$0.96 * 0.95 * 0.93 * 0.93$$

b) inget lyckas

$$0.04 * 0.05 * 0.07 * 0.07$$

c) minst ett misslyckas

$$1 - (0.96 * 0.95 * 0.93 * 0.93, \text{ dvs } 1 - \text{alla lyckas})$$

d) högst ett lyckas

(alla misslyckas) + (första lyckas, alla andra misslyckas) +

+ (andra lyckas, alla andra..)

dvs

$$(0.0000098) + (0.96 * 0.05 * 0.07 * 0.07) + (0.04 * 0.95 * 0.07 * 0.07)$$

$$+ (0.04 * 0.05 * 0.93 * 0.07) + (0.04 * 0.05 * 0.07 * 0.93)$$

Independence

Q1

På sin väg till jobbet passerar en bilist 3 ljussignaler. Dessa visar rött ljus oberoende av varandra med sannolikheten 0.54.

Beräkna sannolikheten att bilisten måste stanna för rött ljus.

$$\text{Grönt ljus: } 1 - 0.54 = 0.46$$

$$0.46 * 0.46 * 0.46 = 0.097336$$

$$1 - 0.097336 = 0.902664$$

Q2

Ett stort varuhus har ett dolt elektroniskt öga, som räknar antal kunder som kommer in i varuhuset.
När två personer kommer in samtidigt så går alltid en person lite framför den andre. Då uppstår

följande registreringar: Sannolikheten att den första personen noteras är 0.9896 och sannolikheten att den andra noteras är 0.9817. Antag att de två personerna upptäcks oberoende av varandra. Vad är sannolikheten att det elektroniska ögat upptäcker åtminstone en av två besökare som kommer tillsammans.

$$1 - ((1 - 0.9896) + (1 - 0.9817)) = 0.9998$$

Q3

När belysningen på en cykel slutar fungera så kan det bero på att glödlampan gått sönder men också på att elledningen ärgat. Risken för detta är 0.065 respektive 0.166. Antag att felen uppträder oberoende av varandra. Beräkna sannolikheten att en slumpmässigt vald cykel får exakt ett av felen.

$$1 - ((1 - 0.065) * (1 - 0.166)) + (0.065 * 0.166) = 0.2094$$

1.2 Discrete Random Variables

Discrete random variables

Q7

Husmäklare får sina arvoden vid varje försäljning. En nybliven husmäklare försöker uppskatta sin inkomst genom att försöka uppskatta antalet hus han kommer att sälja under en månad. Genom att använda data från andra mäklare på kontoret sammanställer han följande tabell:

Antal hus | Sannolikhet

0	0.02
1	0.03
2	0.3
3	0.16
4	0.08
5	0.41

a) Hur stor är sannolikheten att mäklaren inte får något arvode alls?

0.02

b) Hur stor är sannolikheten att mäklaren säljer mer än 2 fastigheter under en månad?

$$0.16 + 0.08 + 0.41 = 0.65$$

c) Hur stor är sannolikheten att mäklaren säljer antingen 0 eller 1 fastigheter under en månad

$$0.02 + 0.03 = 0.05$$

Q9

I Göteborg, Borås, Alingsås, Kungälv och Kungsbacka bor 6, 4, 3, 3 respektive 2 personer som arbetar i ett företag. Av dessa väljs 4 ut för att delta i en arbetsgrupp.

Om valet av deltagare sker på måfå beräkna sannolikheten att alla deltagare kommer från samma stad.

Bara från 2 städer kan det ske (Gbg: 6 och Borås: 4)

Antal personer: 18

$$((6 \text{ nCr } 4) + (4 \text{ nCr } 4)) / (18 \text{ nCr } 4)$$

Q10

Antalet gånger som folk mellan 18-35 års ålder går på gym i Göteborg har följande sannolikhetsfördelning:

N besök	Sannolikhet
0	0.279
1	0.213
2	0.163
3	0.13
4	0.164
5	0.011
6	0.017
7	0.023

Vad är det förväntade antalet gånger dessa individer är på gym?

$(N1 \text{ besök} * \text{sannolikhet}) + (N2 \text{ besök} * \text{sannolikhet}) + (N3 \text{ besök} * \text{sann..}$

Q11

Antalet gånger som folk mellan 18-35 års ålder går på gym i Göteborg har följande sannolikhetsfördelning:

N besök	Sannolikhet
0	0.175
1	0.298
2	0.139
3	0.176
4	0.146
5	0.023
6	0.025
7	0.018

Vad är standardavvikelsen för antalet gånger folk är på gym i veckan?

$$\text{Varians} = E[X^2] - E[X]^2 = \sigma^2$$

$$\text{Standardavvikelse} = \sqrt{E[X^2] - E[X]^2} = \sigma \text{ (sigma)}$$

$$(1^2 \cdot 0.298 + 2^2 \cdot 0.139 \dots) - (1 \cdot 0.298 + 2 \cdot 0.139 \dots)^2 = \text{ans}$$

$$\sqrt{\text{ans}}$$

Q12

Ett företag har upptäckt att när man anlitar en speciell konsult för att få skrivhjälp så förekommer antal skrivfel per sida, ξ , enligt följande sannolikhetsfördelning:

$\xi = x$	0	1	2	3	4	5
	6					
$P(\xi = x)$	0.026	0.098	0.293	0.231	0.201	0.128
	0.023					

a) Vad bör summan av sannolikheterna bli om $P(\xi = x)$ skall bli en sannolikhetsfördelning? (kontrollera!)

b) Vad är sannolikheten att man finner högst 3 fel på en slumpmässigt vald sida?

$$0.026 + 0.098 + 0.293 + 0.231 =$$

c) Vad är sannolikheten att man finner åtminstone 5 fel på en slumpmässigt vald sida?

$$0.128 + 0.023 = 0.151$$

d) Beräkna väntevärdet för antal skrivfel per sida.

$$\text{Väntevärdet } E[X] = (0 \cdot 0.026 + 1 \cdot 0.098 + 2 \cdot 0.293 + \dots)$$

e) Beräkna standardavvikelsen för antal skrivfel per sida.

$$\text{Standardavvikelse} = \sqrt{E[X^2] - E[X]^2} = \sigma \text{ (sigma)}$$

$$(1^2 \cdot 0.098 + 2^2 \cdot 0.293 \dots) - (1 \cdot 0.098 + 2 \cdot 0.293 \dots)^2 = \text{ans}$$

$$\sqrt{\text{ans}}$$

Q15

Sannolikheten att ett barn är en flicka är 0.48, oberoende av de andra barnens kön i familjen.

a) I en familj med 3 barn, vad är sannolikheten att 2 eller färre är flickor?

$$1 - 0.48 = 0.52$$

$$(0.52^3 + (0.48 \cdot 0.52) + (0.48 \cdot 0.52) + (0.48 \cdot 0.52)) = 0.8894$$

sannolikheten att det är en eller färre:

$$0.52^3 + (0.48 \cdot 0.52)$$

b) Vad är sannolikheten för mer än 2 flickor?

$$1 - \text{ans}$$

c) Vad är sannolikheten för 2 eller fler flickor ?

??

sannolikheten för 1 eller fler flickor:

$$1 - (\text{ans})^2$$

Q16

The Ruritanian lottery requires that you pick a set of 4 distinct numbers from 44.

a) What is the probability that the first of your 4 numbers is the first number to come out of the draw?

1/44

b) What is the probability that the first number out of the draw is one of your 4 numbers?

4/44

c) What is the probability that none of your numbers is the first one out of the draw?

40/44 or (1 - ans from above)

Uniform distribution

Q1

A random variable X takes the values **1** to **3** with probabilities that are described by the discrete uniform distribution.

Find the expected value of the random variable $3 \cdot X^2 + 3 \cdot X + 5$

$$((3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 5) + (3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 5) + (3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 5)) / 3$$

Binominal Distribution

Q1

The odds of winning in the National Lottery can be found by considering the probability of selecting six correct numbers at the time of buying a ticket. The number of ways of choosing a subset of 6 numbers from 49 is

$$(49 \text{ nCr } 6) = 13983816$$

So the overall probability of picking a winning six number is $1/13983816$.

The Ruritanian lottery requires that you pick a combination of 6 numbers from 50. What is your chance of winning?

a) One in (give exact integer):

$$50 \text{ nCr } 6 = 15890700$$

b) What is your chance of having no number correct?

$$(44 \text{ nCr } 6)/(50 \text{ nCr } 6)$$

c) What is your chance of having precisely one number correct?

$$((44 \text{ nCr } 5) * 6)/(50 \text{ nCr } 6)$$

Q2

En elektriker skall göra en elektrisk installation där 8 kablar skall passas in i lika många uttag. Tyvärr saknar han kopplingsschema.

På hur många olika sätt kan han göra felkoppling?

$$(8 \text{ nPr } 8) - 1$$

Q3

likadan som Q1 fast på svenska

Q4

Ett prov består av 12 frågor av typen "multiple choice" . Varje fråga har 4 alternativ, där en av dessa är rätt. En oförberedd student svarar slumpmässigt på frågorna utan att ha en aning om de rätta svarsalternativen.

a) Vad är sannolikheten att studenten svarar rätt på 5 frågor?

$$(1 \text{ nCr } 4)^5 * (3 \text{ nCr } 4)^7 * (12 \text{ nCr } 5) =$$

blir error på miniräknaren

2.1 Continuous Random Variables

2.2 Multivariate Random Variables

Q1

In a random survey of 245 patients suffering from a respiratory complaint they were diagnosed as SARS, flu, or anything else (described as "cold"). The numbers showing as their main symptom, fever or swollen glands or respiratory pain, are given below:

	SARS	Flu	Cold	Row totals
Fever	3	20	69	92
Swollen glands	2	19	51	72
Respiratory pain	0	18	63	81
Col totals	5	57	183	245

- a) Estimate the probability that a randomly selected Flu case has, as main symptom, Fever.

20/57

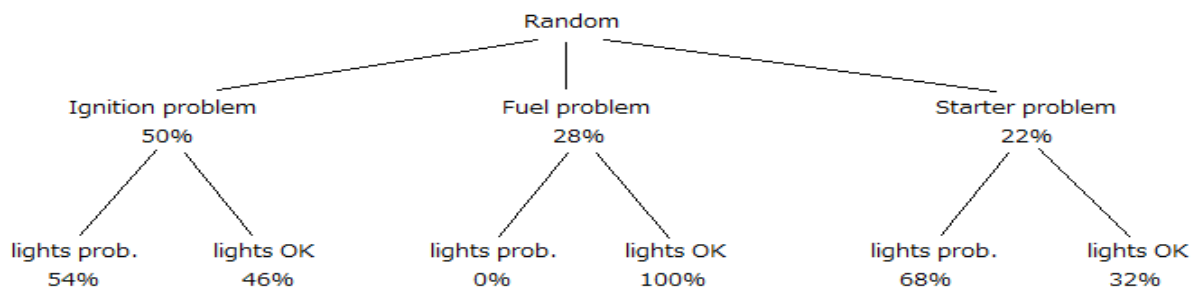
- b) Estimate the probability that a randomly selected person with Swollen glands is suffering from Cold.

51/72

Q2

A technician attends a car that won't start. He knows that 50 % of such cases involve an ignition problem, 28 % of them involve a fuel problem, and the rest of them involve a starter motor problem.

In 54 % of cases where there is an ignition problem there is also a problem with lights. In 68 % of cases with a starter motor problem there is also a problem with lights. In the case of a fuel problem there is never a problem with lights.



- a) If the car won't start and has a lights problem, what is the probability that it has a starter motor problem?

$$(0.50 * 0.54) + (0.22 * 0.68) \rightarrow (0.27) + (0.1496) = 0.4196$$

$$0.1496 / 0.4196 = 0.35653$$

- b) If the car won't start and has no lights problem, what is the probability that it has a fuel problem?

$$\text{Sum(alla fall med hel lampa)} \rightarrow (0.50 * 0.46) + 0.28 + (0.22 * 0.32) = 0.5804$$

$$0.28 / 0.5804 = 0.4824259..$$

Q3

Given a bivariate distribution in which the two random variables are A and B, the variance of A is 3.4 and the variance of B is 7.1.

- a) Find the variance of the sum A+B if the covariance of A and B is -1.8.

$$\text{Cov}(A,B) * 2 + (\text{Var } A) + (\text{Var } B) \rightarrow -1.8 * 2 + 3.4 + 7.1$$

- b) What is the coefficient of correlation of A with B?

$$\text{Pab} = \text{Cov}(A,B) / \sqrt{(\text{Var } A) * (\text{Var } B)}$$

Q6

En restaurangkedja undersöker möjligheterna att etablera sig i Göteborg. Områdeschefen beställer därför en undersökning där vuxna personer i Göteborg svarar på frågan om hur ofta de äter ute.

Antalet personer som deltar i undersökningen är 78.

Följande tabell presenterar resultatet sorterat i åldersgrupper.

Ålder	Aldrig	1 till 2	3 eller mer
18-25	x	12	3
25-35	6	24	3
>35	13	7	2

- a) Vad blir värdet på x?

$$8 \quad 78 - (12 + 3 + 6 + 24 + 3 + 13 + 7 + 2)$$

- b) Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald deltagare i undersökningen är äldre än 35 år?

$$(13+7+2)/78$$

- c) Räkna ut sannolikheten att en slumpmässigt vald deltagare i undersökningen åter ute mer än två gånger.

$$(3+3+2)/78$$

- d) Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald deltagare är mellan 25 och 35 år och åter aldrig ute?

$$6/78$$

Q7

Ett försäkringsbolag ville bedöma konsekvensen av alkoholförtäring i samband med båtolyckor. En stor studie visade att i 62% av alla olyckor orsakades dessa av en nykter person. Av alla olyckor räknades 34% som svåra olyckor. Dessutom framkom att 80% av de svåra olyckorna orsakades av personer som druckit alkohol.

Räkna ut sannolikheterna markerade med frågetecken i fyrfältstabellen nedan:

	Svår olycka	Ej svår olycka	
Onykter	(Qa)	(Qb)	0.38
Nykter	(Qc)	(Qd)	0.62
	0.34	0.66	1.00

- a) Sannolikheten att en olycka är svår och orsakad av en onykter person (Qa):

$$Qa = (0.80 * 0.34) = 0.272$$

- b) Sannolikheten att en olycka är ej svår och orsakad av en onykter person (Qb):

$$Qb = 0.38 - 0.272 = 0.108$$

- c) Sannolikheten att en olycka är svår och orsakad av en nykter person (Qc):

$$Qc = 0.34 - 0.272 = 0.068$$

d) Sannolikheten att en olycka är ej svår och orsakad av en nykter person (Q_d):

$$Q_d = 0.62 - 0.068 = 0.552$$

e) Använd de beräknade värdena i tabellen för att beräkna sannolikheten att en olycka blir svår om vi vet att den orsakats av en onykter person.

$$0.272 / 0.38$$

Q8

I en fruktsallad finns tre sorters frukter, banan, äpple och apelsin. Om man tar en sked med frukt ur fruktsalladen så får man:

- Banan med sannolikheten 0.65
- Äpple med sannolikheten 0.56
- Apelsin med sannolikheten 0.55
- Både banan och äpple med sannolikheten 0.47
- Både banan och apelsin med sannolikheten 0.36
- Både äpple och apelsin med sannolikheten 0.38
- Alla tre frukterna med sannolikheten 0.26

a) Beräkna väntevärde för antal frukter man får per sked (Sannolikhet för banan, äpple & apelsin).

$$(0.65 + 0.56 + 0.55) = 1.76$$

b) Beräkna standardavvikelse för antal frukter man får per sked.

$$(1 * 1.76) + (2 * 0.47) + (2 * 0.36) + (2 * 0.38) = 4.18$$

$$4.18 - 1.76^2 = 1.0824$$

$$\text{sqrt}(1.0824) = 1.040384..$$