עקומים אלגבריים - הרצאה שמינית

בהרצאה הקודמת דיברנו על אינטגרלים מהצורה $\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^3+at+b}}$. אמרנו שניתן לכתוב אותו מהצורה

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^3+at+b}} = \int\limits_\gamma \frac{Ax}{y}$$

כאשר

$$\gamma \subseteq C = Z\left(y^2 - \left(x^3+ax+b\right)\right)$$

נניח כי C לא סינגולרית. כלומר, אנו רוצים שהגרדיאנט לא יתאפס:

$$d\left(y^2-x^3-ax-b\right) = \left(-3x^2-a\right)dx + (2y)\,dy$$

כלומר, העקום חלק $\Longleftrightarrow$ ל x^3+ax+b אין שורשים כפולים. נוכל להתבונן בצמצום ל C. הפונקציה y^2-x^3-ax-b היא זהותית אפס על C. לכן תחת צמצום ל C נקבל

$$0 \equiv \left(-3x^2-a\right)|_C\,dx + (2y)\,|_C\,dy$$

נעביר אגפים ונקבל

$$\frac{dx}{y} = \frac{2dy}{3x^2+a}$$

נשם לב ש $3x^2+a$ שונה מאפס עבור $y=0$. חילקנו ב y, אז הסיפור אינו מוגדר היטב ב $y=0$, אבל כן בסביבה של $y=0$. לכן ניתן להמשיך, וזה יהיה מוגדר אלגברית אפילו בנקודות בהן $y=0$.

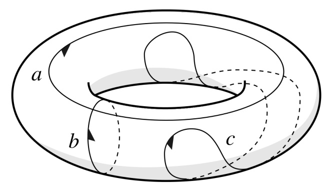
הערה 0.1 $\frac{dx}{y}$ ניתן להרחבה גם לתבנית דיפרנציאלית אלגבירת על הסגור הפרוייקטיבי וזה אינו אפס באף נקודה.

הערה 0.2 אם ω היא תבנית דיפרנציאלית אחרת על הסגור הפרוייקטיבי $\overline{C}$, אזי הן תלויות ליניארית (כפונקציונלים ליניארים על $T_p\overline{C}$), ומכיוון ש $\frac{dx}{y}$ שונה מאפס ניתן לכתוב

$$\omega\left(p\right)=f\left(p\right)\frac{dx}{y}\left(p\right)$$

מכיוון שאלו שני פונקציונלים ליניאריים על אותו הישר. אם נכתוב אותן בקואורדינטות מקומיות, נקבל ש f היא פונקציה רגולרית. קיבלנו פונקציה רגולרית ממרחב פרוייקטיבי למרחב אפיני, אבל הוכחנו שכל פונקציה כזו חייבת להיות קבועה, ולכן f קבועה ונקבל שעד כדי כפל בקבוע, יש רק תבנית דיפרנציאלית אחת.

הערה 0.3 $C=Z\left(y^2-\left(x^3+ax+b\right)\right)$, $\overline{C}$ הוא טורוס (מבחינה טופולוגית). נסמן את יוצרי החבורה היסודית שלו ב γ_1,γ_2. (בשרטוט, a,b):



$\int\limits_{p_0}^{p}\omega$ תלוי במסלול מ p_0 ל p. אבל זה מוגדר היטב עד כדי כפולה שלמה של $\int\limits_{\gamma_1}\omega,\int\limits_{\gamma_2}\omega\in\mathbb{C}$. שני מספרים אלו תלויים ליניארית מעל $\mathbb{R}$.

משפט 0.4 יהי $\ell\subset\mathbb{P}^2$ ישר ו $C=Z\left(y^2-\left(x^3+ax+b\right)\right)$ עקום, ונסמן

$$\ell\cap C=\left\{a_\ell,b_\ell,c_\ell\right\}.$$

נבחר $p_0\in C$, אזי

$$\int\limits_{p_0}^{a_\ell}\frac{dx}{y}+\int\limits_{p_0}^{b\ell}\frac{dx}{y}+\int\limits_{p_0}^{c_\ell}\frac{dx}{y}$$

אינו תלוי ב ℓ (ב $\mathbb{C}/_{\text{period lattice}}$).

נרצה להראות שאם ℓ_t (עבור $t\in\mathbb{P}^1$) משפחת ישרים הנחתכת בנקודה, אזי הפונקציה

$$t\mapsto\sum_{p\in\ell_t\cap C}\int\limits_{p_0}^{p}\omega$$

קבועה. הנה משפט:

משפט 0.5 (אבל). נניח כי C עקום פרוייקטיבי ו ω היא תבנית דיפרנציאלית אלגברית על C ו $f : C \to \mathbb{P}^1$, אזי הפונקציה

$$t \mapsto \sum_{p \in f^{-1}(t)} \int_{p_0}^{p} \omega$$

קבועה.

למה 0.6 נניח כי

$$f, g : C \to \mathbb{P}^1$$

אזי

$$\mathbb{P}^1 \ni t \overset{F}{\mapsto} \sum_{x \in f^{-1}(t)} g\left(x\right)$$

היא פונקציה רציונלית מ $\mathbb{P}^1$ ל $\mathbb{P}^1$.

הוכחה: נניח כי f, g, C מוגדרים מעל $\mathbb{Q}$. כל הנקודות ב $f^{-1}\left(\pi\right)$ הם קוארדינטות ב $\overline{\mathbb{Q}\left(\pi\right)}$. אזי

$$F\left(\pi\right) \in \overline{\mathbb{Q}\left(\pi\right)}$$

אם

$$\sigma \in \mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{Q}(\pi)}/\mathbb{Q}(\pi)\right)$$

אזי σ מפעילה פרמוטציה על $f^{-1}\left(\pi\right)$, כלומר

$$\sigma\left(F\left(\pi\right)\right) = F\left(\pi\right)$$

ולכן למעשה

$$F\left(\pi\right) \in \mathbb{Q}\left(\pi\right).$$

כעת ניתן לכתוב

$$F\left(\pi\right) = \frac{a\left(\pi\right)}{b\left(\pi\right)}$$

כאשר $a\left(x\right), b\left(x\right) \in \mathbb{Q}\left[x\right]$. נפעיל $\tau \in \mathrm{Gal}\left(\mathbb{C}/\mathbb{Q}\right)$ ונקבל

$$F\left(\tau\left(\pi\right)\right) = \tau\left(\frac{a\left(\pi\right)}{b\left(\pi\right)}\right) = \frac{a\left(\tau\left(\pi\right)\right)}{b\left(\tau\left(\pi\right)\right)} \Rightarrow F\left(t\right) = \frac{a\left(t\right)}{b\left(t\right)}$$

לכל מספר טרנסצנדנטי t. ■

הלמה מתקיימת גם עבור תבניות דיפרנציאליות. אם $F : C \to \mathbb{P}^1$, ω תבנית דיפרנציאלית אלגברית על C, אזי

$$t \mapsto \sum_{x \in f^{-1}(t)} \underbrace{df\left(x\right)\left(\underset{T_xC}{\underset{\in}{\omega\left(x\right)}}\right)}_{\in T_t\mathbb{P}^1}$$

היא תבנית דיפרנציאלית אלגברית על $\mathbb{P}^1$. כעת ניתן להגיע להוכחת המשפט של אבל:
הוכחה: $f_*\omega$ היא תבנית דיפרנציאלית אלגברית על $\mathbb{P}^1$, אבל הוכחנו שאין כזו, לכן $f_*\omega = 0$. מהחלפת משתנים באינטגרציה, נקבל ש

$$\sum_{p \in C \cap \ell_1} \int_{p_0}^{p} \omega - \sum_{p \in C \cap \ell_2} \int_{p_0}^{p} \omega = (*)$$

כעת אם

$$f^{-1}\left(0\right) = \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$f^{-1}\left(1\right) = \{b_1, b_2, b_3\}$$

אזי

$$\int_{a_1}^{b_1} \omega + \int_{a_2}^{b_2} \omega + \int_{a_3}^{b_3} \omega = \int_{0}^{1} f_*\omega = 0$$

■