עקומים אלגבריים - הרצאה שנייה

משפט 0.1 (בזו). אם $f,g\in\mathbb{C}[x,y]$ זרים, אזי

$$|Z(f)\cap Z(g)|\le(\deg f)(\deg g)$$

הוכחה: נכתוב את $f(x,y)$ כפולינום ב y עם מקדמים ב $\mathbb{C}(x)$.

$$f(x,y)=a_0(x)+a_1(x)\cdot y+\cdots+a_n(x)y^n$$

$$g(x,y)=b_0(x)+b_1(x)y+\cdots+b_m(x)y^m$$

כאשר

$$\deg a_i(x)\le n-i,\ \deg b_i(x)\le m-i$$

לאחר שינוי קוארדינטות ליניארי, ניתן להניח ש $a_n,b_m\neq 0$. (תרגיל: למה?). נקבע $x_0\in\mathbb{C}$. התנאים הבאים שקולים:

1. ל $f(x_0,y)$ ו $g(x_0.y)$ יש שורש משותף.
2. $\deg(\gcd(f(x_0,y),g(x_0,y)))>0$
3. $\deg(\operatorname{lcm}(f(x_0,y),g(x_0,y)))<n+m$
4. קיימים פולינומים $\alpha(y)$ ו $\beta(y)$ מדרגות קטנות/שוות ל m,n בהתאמה כך ש

$$\alpha(y)f(x_0,y)+\beta(y)\cdot g(x_0,y)$$

5. הפולינומים

$$f(x_0,y),y\cdot f(x_0,y),\ldots,y^{m-1}f(x_0,y),g(x_0,y),\ldots,y^{n-1}g(x_0,y)$$

בלתי תלויים ליניארית.

6. כעת מ 6 נוכל להשתמש באלגברה ליניארית ולקבל את הרזולטנטה

$$\mathrm{Res}\left(f\left(x_0,y\right),g\left(x_0,y\right)\right):=$$

$$\det\begin{pmatrix} a_0\left(x_0\right) & a_1\left(x_0\right) & a_2\left(x_0\right) & \cdots & a_n\left(x_0\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0\left(x_0\right) & a_1\left(x_0\right) & \cdots & \cdots & a_n\left(x_0\right) & 0\cdots & 0 \\ \vdots \\ b_0\left(x_0\right) & b_1\left(x_0\right) & \cdots & \cdots & b_m\left(x_0\right) \\ \vdots \\ & & & & & b_0\left(x_0\right) & \cdots & b_{m-1}\left(x_0\right) \end{pmatrix}$$

ונטען כי הרזולטנטה היא פולינום ב x_0 ממעלה קטנה/שווה ל $n\cdot m$. מההנחה כי $a_n,b_m\neq 0$ נקבל שזהו פולינום לא אפסי.

מהטענה, להטלה לציר x של $Z\left(f\right)\cap Z\left(g\right)$ יש לכל היותר $n\cdot m$ נקודות. ■

כעת נעבור לנסיון ללמוד עקומים אלגבריים מבחינה טופולוגית.
יהי $f\left(x,y\right)\in\mathbb{C}\left[x,y\right]$ ונניח ש $f\left(0,0\right)=0$. נניח כי

$$\nabla f\left(0,0\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,0\right),\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,0\right)\right)\neq\left(0,0\right)$$

(כלומר, ל f אין מקדם חופשי אך יש גורם ליניארי). ממשפט הפונקצייה הסתומה, $Z\left(f\right)\cap\left(B\left(0,0\right),\varepsilon\right)$ הוא משטח הולומורפי. בצורה יותר מדוייקת, אם $\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,0\right)\neq 0$ אזי ההטלה לציר ה y (שנסמן $y:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$) $Z\left(f\right)$ $y\mid_{Z(f)}$ היא הומואמורפיזם מקומית עם הומאומורפיזם הופכי, כלומר יש העתקה הולומורפית

$$\varphi:U\to\mathbb{C}$$

עבור U פתוחה ב $\mathbb{C}$ כך ש

$$Z\left(f\right)\cap B\left(\left(0,0\right),\varepsilon\right)=\left\{\left(\varphi\left(f\right),f\right)\mid f\in B\left(0,\varepsilon\right)\right\}$$

הגדרה 0.2 יהי f אי פריק. נקודה $p\in Z\left(f\right)$ נקראת סינגולרית אם

$$\nabla f\left(p\right)=\left(0,0\right)$$

ואחרת נקראת לא-סינגולרית.

טענה 0.3 יש מספר סופי של נקודות סינגולריות.

הוכחה: אם p סינגולרית, אזי

$$p \in Z(f) \cap Z\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

ומכיוון שפולינומים אלו זרים (כי f אי פריק ו $\deg\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right) < \deg f$) ניתן לחסום את כמות נקודות החיתוך ממשפט בזו. זה אינו עובד כאשר $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0$. במקרה הזה, נסתכל על $Z(f) \cap Z\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$. אם שניהם זהותית אפס, f קבועה. ■

הבחנה:

$$y : Z(f) - Z\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \to \mathbb{C}$$

היא העתקת כיסוי. מה קורה עבור נקודות לא סינגולריות עבורן $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = 0$? נזכר כיצד מתנהגות העתקות הולומורפיות בסביבת נקודה:

$$\varphi : B(0, \varepsilon) \to \mathbb{C}$$

- φ יכולה להיות קבועה.
- אם $\varphi'(0) \neq 0$ ניתן לתאר אותה כפונקציה ליניארית

$$t \mapsto \varphi'(0) \cdot t$$

- אם $\varphi'(0) = 0$ ו $\varphi''(0) \neq 0$ אזי ניתן לקרב

$$t \mapsto \frac{\varphi''(0)}{2} t^2$$

וכך הלאה.

נשם לב שההעתקה $t \mapsto t^2$ מ $\mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C} - \{0\}$ היא העתקת כיסוי מאינדקס 1.

תהי $p \in Z(f)$. נניח כי $p = (0,0)$ היא נקודה סינגולרית. אזי יש $\varepsilon > 0$ כך ש p היא נקודת הסינגולריות היחידה ב $Z(f) \cap B(p, \varepsilon)$. עבור ε קטן מספיק, נוכל להניח שאין נקודות נוספות ב $Z(f) \cap B(p, \varepsilon)$ אין קוארדינטת x שווה לאפס.

$$x : Z(f) \cap B(p, \varepsilon) \to \mathbb{C}$$

היא העתקת כיסוי. נתבונן בהעתקה

$$t_0 \mapsto Z\left(f\left(t_0, y\right)\right)$$

ע"י

$$t_0 \mapsto \left\{\left(t_0, y_1\right), \ldots, \left(t_0, y_m\right)\right\}$$

נתבונן בלמה הבאה:

למה 0.4 לכל פולינום $f\left(y\right)$ ממעלה n ולכל δ יש ε כך שלכל פולינום $g\left(y\right)$ מדרגה קטנה/שווה ל n עם מקדמים קטנים/שווים ל ε:

1. כל שורש של $f+g$ הוא ממרחק δ משורש של f
2. כל שורש של f הוא ממרחק δ משורש של $f+g$

הוכחה: ממשפט רושה באנליזה מרוכבת, כמות השורשים של f ב $B\left(z_0, \varepsilon\right)$ שווה ל

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial B(z,\varepsilon)}\frac{df\left(\zeta\right)}{f\left(\zeta\right)}$$

■