יריעות אלגבריות - הרצאה שמינית

בהרצאה הקודמת דיברנו על פונקציות רגולריות על מרחבים פרוייקטיבים.

דוגמא

נ

קבע מספרים n,d. העתקת veronese

$$V:\mathbb{P}^{n}\to\mathbb{P}^{\binom{n+1+d}{n+1}-1}$$

ע"י

$$V\left(\left[p_{0}:\ldots:p_{n}\right]\right)_{x_{0}^{d_{0}}\cdots x_{n}^{d_{n}}}=p_{0}^{d_{0}}\cdots p_{n}^{d_{n}}$$

כאשר $x_{0}^{d_{0}}\cdots x_{n}^{d_{n}}$ הוא מונום מדרגה d ב $x_{0},\ldots,x_{n}$. נתבונן לדוגמא בהעתקה עבור $n=1,\ d=2$:

$$V:\mathbb{P}^{1}\to\mathbb{P}^{2}$$

$$\left[t:s\right]\mapsto\left[t^{2}:ts:s^{2}\right]$$

בקואורדינטות אפיניות:

$$s\mapsto\left(s,s^{2}\right)$$

נניח כי

$$H\subset\mathbb{P}^{\binom{n+d}{n}-1}$$

בעל-מישור כאשר H מוגדרת ע"י

$$\left(a_{I}\right)_{I\in\binom{n+d}{n}}$$

כאשר $a_I \in \mathbb{C}$,

$$V^{-1}(H) = Z\left(\sum a_I \cdot x^I\right)$$

(לדוגמא, אם נחזור למקרה הספציפי של $V_{1,2}$, נניח כי H היא הפונקציונל המוגדר ע"י הוקטור $(1,2,3)$, אזי

$$V_{1,2}(H) = \left\{[t:s] \mid \left[t^2 : st : s^2\right] \in H\right\} = \left\{[t:s] \mid \left\langle \begin{pmatrix} t^2 \\ st \\ s^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0\right\} =$$

$$= \left\{[t:s] \mid t^2 + 2st + 3s^2 = 0\right\}$$

טענה 0.1 V היא איזומורפיזם לתמונה שלה.

הוכחת הטענה נשארת כתרגיל לקורא.

למה 0.2 אם f פולינום הומוגני ב $n+1$ משתנים, אזי $\mathbb{P}^n - Z(f)$ היא יריעה אפינית

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\left(\mathbb{P}^n - Z(f)\right) = \left\{\frac{a(x)}{f(x)^k} \mid a \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n] \text{ is homogenous of degree } k \cdot \deg f\right\}$$

הוכחה:

- זה מתקיים אם $\deg f = 1$: בלי הגבלת הכלליות, $f = x_0$.

  $$\mathbb{P}^n - Z(x_0) = \mathbb{C}^n$$

  תחת ההעתקה

  $$[1 : t_1 : \ldots : t_n] \leftarrow\!\shortmid (t_1, \ldots, t_n)$$

  תחת זיהוי זה, הפולינום

  $$g(t_1, \ldots, t_n)$$

  נהפך ל

  $$g\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

- עבור $\deg f > 1$, נקבל ש

$$Z(f) = V_{n,d}^{-1}(H)$$

עבור על-מישור H, אזי

$$\mathbb{P}^n - Z(f) = V^{-1}\left(\mathbb{P}^{\binom{n+d}{n}-1} - Z(H)\right) = V^{-1}\left(V(\mathbb{P}^n) - Z(H)\right)$$

אבל V הוא איזומורפיזם ולכן

$$\mathbb{P}^n - Z(f) \cong V(\mathbb{P}^n) - Z(H) = V(\mathbb{P}^n) \cap \left(\mathbb{P}^{\binom{n+d}{n}-1} - Z(H)\right)$$

כאשר $V(\mathbb{P}^n)$ היא קבוצה סגורה ולכן אפינית, ו $\left(\mathbb{P}^{\binom{n+d}{n}-1} - Z(H)\right)$ היא יריעה אפינית.

■

כעת נתקן משפט מהפעם שעברה:

משפט 0.3 כל העתקה רגולרית $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ נתונה ע"י קבוצה סגורה מגודל $(m+1)$ של פולינומים הומוגנים מאותה דרגה ב $x_0, \ldots, x_n$, כלומר

$$[x_0 : \ldots : x_n] \mapsto [f_0(x_0, \ldots, x_n) : \ldots : f_m(x_0, \ldots, x_n)].$$

הערה 0.4 זה מיוחד ל $\mathbb{P}^n$. זה לא נכון לכל יריעה פרוייקטיבית $X \subset \mathbb{P}^n$.

הוכחה: $X = f^{-1}([0 : * : \ldots : *])$ היא קבוצה סגורה ב $\mathbb{P}^n$

$$f : \mathbb{P}^n - X \to \mathbb{C}^m$$

היא העתקה רגולרית. מההגדרה, יש קבוצה סגורה $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ כך ש $\mathbb{P}^n - Y$ אפינית. בלי הגבלת הכלליות, Y היא על-משטח: f מצומצמת להעתקה

$$\mathbb{P}^n - Y \to \mathbb{C}^m$$

ולכן על $\mathbb{P}^n - Y$,

$$f([t_0 : \ldots : t_n]) = \left(\frac{a_1(t)}{f(t)^{k_1}}, \ldots, \frac{a_m(t)}{f(t)^{k_m}}\right)$$

כאשר

$$\deg a_i = k_i \deg f$$

ללא הגבלת הכלליות, $k_i = k$,

$$f\left(\left[t_0 : \ldots : t_n\right]\right) = \left[1 : \frac{a_1\left(t\right)}{f\left(t\right)^{k_1}} : \ldots : \frac{a_m\left(t\right)}{f\left(t\right)^{k_m}}\right] = \left[f\left(t\right)^k : a_1\left(t\right) : \ldots : a_m\left(t\right)\right]$$

מרציפות,

$$f\left(\left[t_0 : \ldots : t_n\right]\right) = \left[f\left(t\right)^k : a_1\left(t\right) : \ldots : a_m\left(t\right)\right]$$

על $\mathbb{P}^n$. ■

הגדרה 0.5 יריעה היא אי פריקה אם כל שתי קבוצות פתוחות-זריצקי בה נחתכות.

דוגמא ללא-יריעה

$$Z\left(x\right)^c, Z\left(y^c\right) \subseteq Z\left(xy\right)$$

והן לא נחתכות.

הגדרה 0.6 תהי X יריעה אי פריקה. פונקציה רציונלית על X היא מחלקת שקילות של (U, g) כאשר $U \subset X$ היא פתוחה-זריצקי ו $g : U \to \mathbb{C}$ היא רגולרית תחת יחס השקילות

$$\left(U_1, g_1\right) \sim \left(U_2, g_2\right)$$

אם ורק אם

$$g_1 \mid_{U_1 \cap U_2} = g_2 \mid_{U_1 \cap U_2}$$

ברמת האינטואיציה, מה שאנחנו מנסים לומר זה ש $\frac{1}{x}$ היא פונקציה רציונלית על הממשיים, למרות שהיא מוגדרת על $\mathbb{R} - \{0\}$ בלבד.

דוגמא

אם X אפינית, איך נראות הפונקציות הרציונליות על X? נבחר קבוצה סגורה מקסימלית, כלומר משהו מהצורה $Z\left(f\right)$ ונתבונן ב $X - Z\left(f\right)$. עליו, הפונקציות הרציונליות הן כל דבר מהצורה $\frac{g(x)}{f(x)^m}$. מכיוון שזה נכון לכל f, נקבל שהפונקציות הרצינוליות על X הן שדה השברים של $\mathcal{O}_X\left(X\right)$. כלומר, נקבל התאמה

$$\mathrm{Frac}\mathcal{O}_X\left(x\right) \longrightarrow \mathrm{Rat}\left(X\right)$$

$$\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\longmapsto0=\left[\left(X,0\right)\right]$$

- מדוע ההתאמה זו חח"ע? אם יש קבוצה פתוחה U ($U\cap Z\left(g\right)=\emptyset$) כך ש $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ על U, אזי $f\left(x\right)=0$ על U ומכיוון ש X אי פריקה, זה אומר ש $f=0$ על X.
- מדוע ההתאמה על? כי

$$\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\longmapsto\left(Z\left(g\right)^{c},\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right)$$

לכן, באופן כללי, אוסף הפונקציות הרציונליות על X הוא שדה.

הגדרה 0.7 העתקה רציונלית בין שתי יריעות (פרוייקטיביות) היא מחלקת שקילות של העתקות $\left(U,f:U\rightarrow Y\right)$ כאשר U פתוחה ב X, תחת אותו יחס שקילות כמקודם. מכיוון שזו לא העתקה אמיתית, נסמן העתקה רציונלית ב

$$f:X\dashrightarrow Y.$$

העתקה כזו נקראת בי–רציונלית אם יש $U\subset X$ ו $V\subseteq Y$ פתוחות כך ש f שקולה ל $\left(U,g:U\rightarrow V\right)$ כאשר g היא איזומורפיזם.

דוגמאות

1. $\mathbb{C}$ בירציונלית ל $\mathbb{P}^{1}$ לפי העתקת ההכלה. נבחר קבוצה פתוחה ב $\mathbb{C}$, לדוגמא $\mathbb{C}$ עצמה. נבחר קבוצה פתוחה בתמונה, לדוגמא $\left\{ \left[1:t\right]\right\} =\mathbb{P}^{-1}-\left\{ \infty\right\}$ ואכן $t\mapsto\left[1:t\right]$ היא איזומורפיזם.
2. $\mathbb{C}^{2}$ בי רציונלית ל $\mathbb{C}^{2}$ שבירציונלית ל $\mathbb{P}^{1}\times\mathbb{P}^{1}$.

הגדרה 0.8 אם

$$f:X\dashrightarrow Y$$

היא העתקה בירציונלית, ו

$$g:Y\dashrightarrow\mathbb{C}$$

היא העתקה רציונלית, יש לנו את ה pull-back של g,

$$f^*(g) : X \dashrightarrow \mathbb{C}.$$

אם $f : U \to V$ ו $g : W \to C$. $\left[f^{-1}(W \cap V), g \circ f\right]$. אם $f : X \dashrightarrow Y$ הוא מורפיזם בירציונלי, נקבל העתקה

$$\mathrm{Rat}(Y) \to \mathrm{Rat}(X)$$

וזהו איזומורפיזם של שדות.

טענה 0.9 כל איזומומורפיזם של שדות מ $\mathrm{Rat}(Y)$ ל $\mathrm{Rat}(X)$ מתאים להעתקה בירציונלית $X \dashrightarrow Y$.