עקומים אלגבריים - הרצאה 11

הוכחנו את משפט רימן רוך לכל עקום פרוייקטיבי ולא סינגולרי. יהי $D\geq 0$ דיוויזור, הראנו ש:

1. אם $D\geq 0$ אפקטיבי,

$$\ell\left(D\right)-\ell\left(K-D\right)\leq\deg D-g+1$$

2. אם $D\geq 0$ אפקטיבי,

$$\ell\left(D\right)\geq\deg D-g+1$$

והראנו זאת באופן מפורש.

נניח ואנו מתעניינים בהעתקות $C\to\mathbb{P}^{2}$ עבור עקומים מגנוס גבוה. לא יהיה לזה שיכון מישורי חלק, אבל כן נוכל להגדיר העתקה כך שנקודות הסינגולריות יראו מהצורה $\times$ (כלומר מקומית כמו $xy=0$). לכן נראה להכליל את ההגדרה של תבניות דיפרנציאליות והדיוויזור הקנוני. נגדיר כך תבנית דיפרנציאלית על הנקודות הלא סינגולריות, כך שעל נקודות הסינגולריות היא מתאפסת. לכן נוכיח את רימן רוך גם עבור עקומים פרוייקטיבים (לא בהכרח לא סינגולריים).

הערה 0.1 הוכחנו את רימן רוך מעל המרוכבים, אבל הוא נכון מעל כל שדה סגור אלגברית (מכל מאפיין!). מה שחסר לנו לכך הוא להגדיר בצורה נכונה $\mathrm{Res}_{f}\left(\omega\right)$, ואז להוכיח את היחס $\sum\limits_{f}\mathrm{Res}_{f}\left(\omega\right)=0$. נתחיל מלהוכיח עבור $\mathbb{P}^{1}$, ומכיוון שלכל עקום יש העתקה ל $\mathbb{P}^{1}$ נוכל להכליל זאת.

בהרצאה זו נדבר על עקומים מעל שדות סופיים. C יהיה עקום פרוייקטיבי מעל $\overline{\mathbb{F}_{p}}$. בלי הגבלת הכלליות, נניח כי C מוגדר מעל $\mathbb{F}_{q}$ (עבור $q=p^{N}$). אם נתבונן על הפתרונות מעל הסגור האלגברי, $C\left(\overline{\mathbb{F}_{p}}\right)$, נקבל שזוהי קבוצה בת מנייה. אבל יש לה מבנה אלגברי נוסף:

.1

$$C\left(\overline{\mathbb{F}_p}\right)=\bigcup_n C\left(\mathbb{F}_{q^n}\right)$$

כאשר

$$C\left(\mathbb{F}_{q^n}\right)=\left\{[x_0:\cdots:x_k]\in\mathbb{P}^k\left(\mathbb{F}_{q^n}\right)\mid[x_0:\ldots:x_k]\in C\right\}$$

2. אם נסתכל על חבורת גלואה האבסולוטית,

$$\mathrm{Gal}_{\mathbb{F}_q}=\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q\right)$$

היא פועלת על $C\left(\overline{\mathbb{F}_q}\right)$ וכן על דיווזורים, פונקציות רגולריות וכו'.

(א) בפרט היא פועלת על קבוצת הדיוויזורים.

(ב) נזכר באוטומורפיזם פרוביניוס, $x\mapsto x^q$. לכן למעשה $C\left(\mathbb{F}_{q^n}\right)$ זו בדיוק קבוצת נקודות השבת של $C\left(\overline{\mathbb{F}_q}\right)$ תחת פעולת פרוביניוס $x\mapsto x^{q^n}$. כלומר,

$$C\left(\mathbb{F}_{q^n}\right)=C\left(\overline{\mathbb{F}_p}\right)^{\mathrm{Frob}^n}$$

הגדרה 0.2 נאמר שדיוויזור D מוגדר מעל $\mathbb{F}_{q^n}$ אם הוא אינווריאנטי תחת Frob^n.

הגדרה 0.3 נגדיר את קבוצת הדיוויזורים המוגדרים מעל $\mathbb{F}_{q^n}$ ב $\mathrm{Div}\left(\mathbb{F}_{q^n}\right)$.

דיוויזורים אפקטיביים מדרגה 1 המוגדרים מעל $\mathbb{F}_q$

נתבונן בקבוצת הדיוויזורים האפקטיביים על C מדרגה 1 המוגדרים מעל $\mathbb{F}_q$. דיוויזור אפקטיבי מדרגה 1 זו פשוט נקודה. העובדה שהוא מוגדר מעל $\mathbb{F}_q$ אומר שהנקודה אינווריאנטית תחת פרוביניוס. לכן נקבל התאמה חח"ע ועל בין הדיוויזורים האפקטיבים מדרגה 1 המוגדרים מעל $\mathbb{F}_q$ ל $C\left(\mathbb{F}_q\right)$.

דיוויזורים אפקטיביים מדרגה 2 המוגדרים מעל $\mathbb{F}_q$

יש לנו שתי אופציות לדיוויזורים כאלו. הם יכולים להיות מהצורה $[x]+[y]$ או מהצורה $2[x]$.

- אם נתבונן בדיוויזור מהצורה $2[x]$, זה מתנהג בעצם בדיוק כמו במקרה של דיוויזור מדרגה 1 ונקבל התאמה ל $C\left(\mathbb{F}_q\right)$.

- אם נתבונן בדיוויזור מהצורה $[x]+[y]$, נקבל שחבורת גלואה יכולה להחליף ביניהם. לכן יש שתי אופציות, או ש $x,y\in C\left(\mathbb{F}_q\right)$, או שזה יהיה אינווריאנטי תחת הריבוע של הפרוביניוס, כלומר נקבל התאמה ל $C\left(\mathbb{F}_{q^2}\right)-\mathbb{C}\left(\mathbb{F}_q\right)$. לכן נקבל ש (נסמן ב Eff^2 את קבוצת הדיוויזורים האפקטיביים מדרגה 2)

$$\left|\mathrm{Eff}^2\left(\mathbb{F}_q\right)\right|=\left|C\left(\mathbb{F}_q\right)\right|+\binom{\left|C\left(\mathbb{F}_q\right)\right|}{2}+\frac{\left|C\left(\mathbb{F}_{q^n}\right)\right|-\left|C\left(\mathbb{F}_q\right)\right|}{2}$$

באופן כללי, לספור נקודות על עקום זה מעניין. לספור דיוויזורים זה קל. לכן נתרגם באופן כללי מבעיה אחת לשנייה:

המקרה הכללי

נסמן ב

$$Z_C(t)=\sum_n\left|C\left(\mathbb{F}_{q^n}\right)\right|\cdot t^n=\sum_{O\in C\left(\overline{\mathbb{F}_q}\right)/\mathrm{Gal}_{\mathbb{F}_q}}|O|\left(t^{|O|}+t^{2|O|}+t^{3|O|}+\cdots\right)=$$

$$=\sum_{O\in C\left(\overline{\mathbb{F}_q}\right)/\mathrm{Gal}_{\mathbb{F}_q}}\frac{|O|\cdot t^{|O|}}{1-t^{|O|}}=\sum t\frac{d}{dt}\log\left(\frac{1}{1-t^{|O|}}\right)=$$

$$=t\cdot\frac{d}{dt}\left(\prod_{O\in C\left(\overline{\mathbb{F}_q}\right)/\mathrm{Gal}_{\mathbb{F}_q}}\frac{1}{1-t^{|O|}}\right)=$$

$$=t\cdot\frac{d}{dt}\log\left(\prod\left(1+t^{|O|}+t^{2|O|}+\cdots\right)\right)=$$

$$=t\cdot\frac{d}{dt}\log\left(\sum_{D\in\mathrm{Div}^{\geq 0}\left(\mathbb{F}_q\right)}t^{\deg(D)}\right)$$

נסמן

$$\zeta_C(t)=\sum_{D\in\mathrm{Div}^{\geq 0}\left(\mathbb{F}_q\right)}t^{\deg(D)}=\sum_{i\geq 2g-2}\left|\mathrm{Div}_i^{\geq 0}\left(\mathbb{F}_q\right)\right|t^i+\sum_{2g-2<i}\left|\mathrm{Div}_i^{\geq 0}\left(\mathbb{F}_q\right)\right|t^i$$

כאשר $\mathrm{Div}_i^{\geq 0}$ זו קבוצת הדיוויזורים האפקטיביים מדרגה i המוגדרים מעל... באופן כללי, המחובר השמאלי הוא פולינום מדרגה $2g-2$ ונסמן את המחובר הימני ב $(*)$. נקבל

$$\left|\mathrm{Div}_i^{\geq 0}\left(\mathbb{F}_q\right)\right|=\sum_{D\in\mathrm{Div}_i^{\geq 0}\left(\mathbb{F}_q\right)/\sim}\left|\{\text{ how many effective divisior are equivalent to }D\}\right|.$$

למה 0.4 כל דיוויזור מדרגה גדולה מ g שקול לדיוויזור אפקטיבי.

הוכחה: מרימן רוך נקבל ש $\dim\{f \mid \operatorname{div}(f)+D\geq 0\}=\ell(D)\geq\deg(D)-g+1>1$ גורר ש D שקול לדיוויזור אפקטיבי. ■

נקבל כעת ש

$$\left|\operatorname{Div}_i^{\geq 0}(\mathbb{F}_q)\right|=\sum_{D\in\operatorname{Div}_i^{\geq 0}(\mathbb{F}_q)/\sim}\left|\{\text{how many effective divisors are equivalent to } D\ \}\right|$$

למה 0.5

$$\{\text{how many effective divisors are equivalent to } D\ \}={}^{\{f\neq 0|\operatorname{div}(f)+D\geq 0\}}/_{\text{scalar moltiplication}}=$$

$$=\mathbb{P}(L(D))=\mathbb{P}^{\ell(D)-1}$$

למה 0.6 D,E מוגדרים מעל $\mathbb{F}_q$ ו $D\sim E$. אזי יש פונקציה רציונלית המוגדרת מעל $\mathbb{F}_q$ כך ש $D=\operatorname{div}(f)+E$.

מסקנה 0.7 יהי $D\in\operatorname{Div}(\mathbb{F}_q)$. יש התאמה חח"ע ועל בין הקבוצות

$$\{\text{effective divisors equivalent to } D \text{ and defined over } \mathbb{F}_q\}\longleftrightarrow\mathbb{P}^{\ell(D)-1}(\mathbb{F}_q)$$

כעת אם $\deg D>2g-2$ אזי $\deg(K-D)<0$ ולכן $\ell(K-D)=0$ ולכן $\ell(D)\geq\deg D-g+1$. כמו כן,

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

$$\zeta_C(t)=\sum_{\operatorname{Div}^i(\mathbb{F}_q)/\sim}\frac{q^{i-g+1}-1}{q-1}$$

למה 0.8 $i>g$, נבחר נקודה $x\in C(\mathbb{F}_q)$, אזי

$$\operatorname{Div}^i(\mathbb{F}_q)/_\sim\to\operatorname{Div}^{i+1}(\mathbb{F}_q)/_\sim$$

ע"י

$$D\mapsto D+[x]$$

וזוהי העתקה חח"ע ועל.

הוכחה: רימן רוך. ∎

נקבל

$$\zeta_C(t) = \text{polynomial of degree } 2g-2 +$$

$$+\sum \left|\{\text{effective divisors of degree } 2g-1 \text{ defined over } \mathbb{F}_q\}\right| \cdot \frac{q^{i-g+1}-1}{q-1} t^i =$$

$$= \text{polynomial of degree } 2g-2 \; + \frac{\text{somthing}}{1-qt} - \frac{\text{somthing}}{1-t} = \frac{P(t)}{(1-qt)(1-t)}$$

כאשר $P(t)$ פולינום מדרגה $2d$. מה זה אומר לנו בנוגע למספר הנקודות?

$$Z_X(t) = t \cdot \frac{d}{dt} \log\left(\frac{P(t)}{(1-qt)(1-t)}\right) =$$

$$= t \cdot \frac{d}{dt} \log\left(\frac{\prod_1^{2g}(1-\alpha_i t)}{(1-qt)(1-t)}\right) = \sum t \cdot \frac{d}{dt}\left(\sum \log(1-\alpha_i t)\right) - \log(1-t) - \log(1-qt) =$$

$$= \sum_1^{2g} \frac{-\alpha_i t}{1-\alpha_i t} + \frac{t}{1-t} + \frac{qt}{1-qt} =$$

$$\sum \left(\alpha_1^n + \cdots + \alpha_{2g}^n + 1 + g^n\right) t^n$$

כלומר: **יש מספרים מרוכבים** $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2g}$ **כך ש**

$$|C(\mathbb{F}_{q^n})| = \underbrace{q+1}_{|\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{q^n})|} - \left(\sum \alpha_i^n\right)$$

ואכן הרכיב השני הוא "טעות":

משפט 0.9 (Weil) עבור C אי פריק, **יש** מספרים מרוכבים $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2g}$ כך ש

$$|C(\mathbb{F}_{q^n})| = \underbrace{q+1}_{|\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{q^n})|} - \left(\sum \alpha_i^n\right)$$

ו

$$|\alpha_i| = \sqrt{q}$$

סיכום השיעור

1. יש יחס פורמלי בין $\left|C\left(\mathbb{F}_{q^n}\right)\right|$ ודיוויזורים מדרגה k המוגדרים מעל $\mathbb{F}_q$

2. אם $i > 2g-2$, דיוויזורים אפקטיביים מדרגה i הם קלים להבנה (ממשפט רימן רוך).

3. $\left|C\left(\mathbb{F}_{q^n}\right)\right|$ היא סדרה רקרוסיבית והאיברים שווים בערך ל q^n.