יריעות אלגבריות - הרצאה 12

הגדרה 0.1 תהי $x \in X$ נקודה ביריעה. יהי $\mathcal{O}_{X,x}$ אוסף ה"נבטים" של פונקציות רגולריות המוגדרות בקבוצה פתוחה (זריצקי) כלשהי המכילה את x. כלומר,

$$\mathcal{O}_{X,x} = {}^{\{(f,U) | x\in U \text{ open}, \ f\in\mathcal{O}_X(U)\}}\big/_{(f,U)\sim(g,V) \text{ if } f|_{U\cap V}=g|_{U\cap V}} =$$

$$= \{f \in \mathrm{Rat}\,(X) \mid f \text{ is regular at } x\}$$

לדוגמא,

$$\left\{\frac{1}{1-t}, \frac{1}{1-2t}, \dots\right\} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$$

הערה 0.2 $\mathcal{O}_{X,x}$ לא חייב להיות נוצר סופית, אך זה נותרי. כמו כן,

$$\mathfrak{M}_{X,x} = \{f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid f(x) = 0\}$$

הוא אידיאל. בבירור

$$\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{M}_{X,x} \cong \mathbb{C}$$

ולכן זה מקסימלי. למעשה, זהו האידיאל המקסימלי היחיד! כלומר, $\mathcal{O}_{X,x}$ חוג מקומי. נניח כי $X \subseteq \mathbb{C}^n$ אפיני ונתון כקבוצת האפסים של אידיאל רדיקלי $X = Z(I)$. נניח כי $x = 0$. הראנו שהמרחב המשיק T_0X הוא קבוצת האפסים המשותפת של כל הגורמים הלינאריים של איברים ב I. נסמן קבוצה זו ב $I^{(1)}$. ניתן לכן להתייחס ל T_xX כאל גרעין של העתקה ליניארית. לכן ניתן לכתוב את המרחב הדואלי

$$(T_xX)^* = {}^{(\mathbb{C}^n)^*}/_{I^{(1)}} = {}^{\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]^{(1)}}/_{I^{(1)}}$$

יהי m האידיאל המקסימלי ב $\mathcal{O}_X(X)$ המתאים לנקודה $0 \in X$ ו M האידיאל המקסימלי ב $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ המתאים ל $0 \in \mathbb{C}^n$ (אלו הפולינומים המאפסים ב 0). לכן נקבל ש

$$(T_xX)^* = {}^{M^{(1)}}/_{I^{(1)}} = {}^{m}/_{m^2}$$

כאשר המעבר השני מתקבל ע"י

$$f \in {}^{M^{(1)}}\!/_{I^{(1)}} = {}^{M^{(1)}+M^2}\!/_{I^{(1)}+M^2}$$

אבל $M^{(1)} + M^2 = M$ ולכן נקבל

$${}^{M^{(1)}}\!/_{I^{(1)}} = {}^{M}\!/_{I^{(1)}} + M^2$$

כעת נתבונן ב

$$f \mapsto f\mid_X \in {}^{m}\!/_{m^2}$$

נרצה להראות שזה איזומורפיזם. זה בבירור על. מה הגרעין? פונקציות שישלחו לאפס הן פונקציות שכשנצמצם אותן ל X הן מכפלה של שתי פונקציות המתאפסות על 0. נרים את שתי הפונקציות האלו וכך נראה שזה חח"ע. כמו כן,

$${}^{m}\!/_{m^2} = {}^{\mathfrak{M}_{X,x}}\!/_{\mathfrak{M}^2_{X,x}}$$

כי

$$\mathfrak{M}_{X,x} = m \cdot \mathcal{O}_{X,x}$$

נסכם:

$$T_x X = \left({}^{\mathfrak{M}_{X,x}}\!/_{\mathfrak{M}^2_{X,x}}\right)$$

הערה 0.3 ${}^{\mathfrak{M}_{X,x}}\!/_{\mathfrak{M}^2_{X,x}}$ נקרא המרחב הקו-משיר. אם $f : X \to Y$ מורפיזם, אזי מתקבלת העתקה

$$f^* : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

כאשר אם נצמצם אותה ל

$$f^* : \mathfrak{M}_{Y,f(x)} \to \mathfrak{M}_{X,x}$$

נקבל את ההעתקה הקו-משיקה:

$$f^* : {}^{\mathfrak{M}_{Y,f(x)}}\!/_{\mathfrak{M}^2_{Y,f(x)}} \to {}^{\mathfrak{M}_{X,x}}\!/_{\mathfrak{M}^2_{X,x}}$$

ואת ההעתקה הדואלית

$$df : \left({}^{\mathfrak{M}_{X,x}}\!/_{\mathfrak{M}^2_{X,x}}\right)^* \to \left({}^{\mathfrak{M}_{Y,f(x)}}\!/_{\mathfrak{M}^2_{Y,f(x)}}\right)^*$$

והן נקראות הנגזרות של f. כל מה שאנחנו מכירים על נגזרות ממשיך לעבוד (כלל השרשרת, כלל לייבניץ וכו').

הערה 0.4 נניח כי $\mathbb{C}^n \supseteq X = Z(I) = Z(\langle f_1, \ldots, f_n \rangle)$. קבוצת הנקודות הלא סינגולריות בקבוצה

$$\{p \in X \mid \operatorname{rank}(\nabla f_1(p), \ldots, \nabla f_m(p)) = n - \dim(X)\} =$$

($n - \dim X$ זו הדרגה המקסימלית האפשרית)

$$= \{p \in X \mid \operatorname{rank}(\nabla f_1(p), \ldots, \nabla f_m(p)) \geq n - \dim X\}$$

כלומר זוהי מטריצה שהרכיבים שלה הן $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)$ הם פולינומים ב p. זוהי קבוצה פתוחה ("או שהפולינום (המינור) הזה לא מתאפס או שזה לא מתאפס או ש...).

משפט 0.5 קבוצת הנקודות הלא סינגולריות X^{ns} היא לא ריקה (תמיד!).

משפט 0.6 רוב ההיפר-משטחים מדרגה d ב $\mathbb{P}^n$ הם חלקים (כלומר, אין להם נקודות אי סינגולריות). ב "רוב" מתכוונים לכך שקבוצת ההיפר משטחים ב $\mathbb{P}^n$ מדרגה d שיש להם נקודה סינגולריית היא תת קבוצה (ממש) סגורה זריצקי ב $\mathbb{P}^N$ כאשר $N = \binom{n+d-1}{n-1} - 1$.

הוכחה: נסתכל בזוגות

$$\left\{(f, p) \in \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^n \mid p \,\text{is singular point in } Z(f)\right\}$$

נתבונן בשתי הטלות של הקבוצה הזו.

$$\pi_1 : (f, p) \mapsto f \in \mathbb{P}^N$$

ו

$$\pi_2 : (f, p) \mapsto p \in \mathbb{P}^n$$

כעת לכל $p \in \mathbb{P}^n$,

$$\pi_2^{-1}(p) = \mathbb{P}^{N-n-1}$$

$$\dim X = n + N - n - 1 = N - 1$$

ולכן

$$\dim(\pi_1 X) \leq \dim X = N - 1 < \dim \mathbb{P}^N$$

ולכן

$$\pi_1 X$$

היא תת קבוצה ממש. ∎