יריעות אלגבריות - הרצאה רביעית

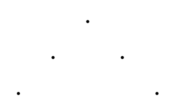
בשיעור זה נעסוק בדברים רעים העשויים לקרות כאשר מתייחסים ליריעות ועקומים כאל אוסף נקודותת וכן לדברים היכולים למנוע מהעתקה בין יריעות להיות העתקת כיסוי. נתחיל מלהציג שתי דוגמאות:

דוגמא ראשונה

נתבונן בקבוצה

$$Z\left(x^2-y^2\right)=Z\left((x-y)(x+y)\right)=Z(x-y)\cup Z(x+y)$$

זהו בעצם חיתוך של שני ישרים. כעת נתבונן בהטלה ל $\mathbb{C}$ על ציר x, כלומר תחת ההעתקה $(x,y)\mapsto x$. כעת נמלה הנמצאת מתחת לחיתוך תראה אוסף נקודות המתקרבות זו לזו עד שנחתכות, כלומר משהו מהצורה



דוגמא שנייה

נתבונן בהטלה על ציר x של הקבוצה $Z(xy-1)$. כאן תמונה ההטלה היא $\mathbb{C}-\{0\}$ ולכן נמלה העומדת על ציר x תראה "נקודות ששואפות לאינסוף".

אנו נרצה להגדיר מחלקה של מורפיזמים שתאפשר את הדוגמא הראשונה אך לא את השנייה.

דוגמא $(*)$

תהי Y יריעה, ויהי $f\in\mathcal{O}(Y)[t]$ (כלומר, בפולינום במשתני Y וכן משתנה נוסף). נגדיר יריעה $X\subset Y\times\mathbb{C}$ ע"י

$$X=Z\left(f(y,t)\right)=\{(y,t)\mid f(y,t)=0\}$$

ונתבונן בהטלה

$$X \subseteq Y \times \mathbb{C} \overset{\pi}{\to} Y$$

מתי נראה נקודות בפולינום הולכות לאינסוף (כמו בדוגמא השנייה)? כאשר דרגת הפולינום יורדת כתוצאה מההטלה! בדוגמא השנייה, עבור $y_0 \neq 0$ הפלינום מוטל לפולינום $y_0 \cdot x - 1$ (שדרגתו ב x היא 1) בעוד עבור y_0 זהו הפולינום -1 (אשר מדרגה 0). לכן העובדה שאין נקודות בסיב שהולכות לאינסוף היא שקולה לכך שהדרגה $\deg_t f(y,t)$ היא קבועה. זה שקול לכך שכאשר נכתוב

$$f(y,t) = a_0(y) + a_1(y)t + \cdots + a_n(y)t^n$$

נקבל ש a_n הוא אף פעם לא אפס. זה שקול לכך ש $a_n(y) \in \mathcal{O}(Y)$ הפיך, ולכן ניתן להניח שהוא 1, ולכן קיבלנו שהפולינום $t|_x \in \mathcal{O}(X)$ מקיים פולינום מתוקן עם מקדמים ב $\mathcal{O}(Y)$. זה בעצם אומר, ש $\mathcal{O}(Y)[t]$ היא הרחבה שלמה! נזכיר מה זה אומר:

הגדרה 0.1 (הרחבה שלמה). תהי $S \subset R$ הרחבת חוגים. איבר $r \in R$ יקרא שלם מעל s אם הוא מקיים פולינום מתוקן עם מקדמים ב S. הרחבה נקראת שלמה אם כל איבריה שלמים. באופן שקול, הרחבה R/S היא שלמה אם R נוצר סופית מעל S כמודול.

דוגמא

$\sqrt{3} + \sqrt{2}$ שלם, $\frac{1}{2}$ לא.

לכן נוכל לנסח את מה שעשינו עד כה: ההטלה על ציר x של $Z(f(y,t))$ "מתנהגת יפה" אם ורק אם ההרחבה $\mathcal{O}(Y)[t]/\mathcal{O}(Y)$ היא הרחבה שלמה.

הגדרה 0.2 (מורפיזם סופי). מורפיזם בין יריעות אפיניות $X \to Y$ נקרא סופי אם ההעתקה המושרית ממנו $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ היא חח"ע, וכן ההרחבה $\mathcal{O}(X)/\mathcal{O}(Y)$ שלמה.

הערה 0.3 תנאי זה שקול לקיום סדרה של העתקות

$$\begin{aligned} X \subset Y_1 \times \mathbb{C} &\to Y_1 \\ Y_1 \subset Y_2 \times \mathbb{C} &\to Y_2 \\ &\vdots \\ Y_{n-1} \subset Y_n \times \mathbb{C} &\to Y_n = Y \end{aligned}$$

כאשר לכל i, ההטלה

$$Y_i \subset Y_{i+1} \times \mathbb{C} \to Y_{i+1}$$

היא כמו בדוגמא $(*)$.

משפט 0.4 העתקה סופית היא על.

הוכחה: תהי העתקה סופית $f : X \to Y$.נתבונן בההעתקה המושרית$\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ (שהיא שיכון, כלומר $\mathcal{O}(Y) \subset \mathcal{O}(X)$). אנו צריכים להראות שלכל מקסימלי $M \lhd \mathcal{O}(Y)$, התמונה ההפוכה, הנתונה ע"י $M\mathcal{O}(X) \lhd \mathcal{O}(X)$, היא אידיאל לא טריוויאלי. נניח שזהו אידיאל טריוויאלי. מההנחה, $\mathcal{O}(X)$ הרחבה שלמה של $\mathcal{O}(Y)$ ולכן נוצרת סופית כמודול מעליה, נניח ע"י $a_1, \dots, a_m$. נניח כי $M\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(X)$. זה אומר ש

$$a_i = \sum m_{ij} a_j$$

עבור $m_i \in M$. לכן, ההעתקה

$$\mathcal{O}(Y)^n \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(X)$$

הנתונה ע"י

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$$

היא על. לכן הדיאגרמה

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}(Y)^n & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{O}(X) \\
\downarrow{\scriptstyle I-(m_{ij})} & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\
\mathcal{O}(Y)^n & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{O}(X)
\end{array}$$

היא קומוטטיבית. בנוסף, $0 = \alpha = \det(I - (m_{ij}))$, $\alpha I = (1 - (m_{ij})) \operatorname{adj}(1 - (m_{ij}))$ ולכן נוכל להגדיר קומה נוספת לדיאגרמה, ע"י $\mathcal{O}(Y)^n \to \mathcal{O}(Y)^n$ ע"י $\operatorname{adj}(1 - m_{ij})$. לכן נקבל

$$0 = \det(I - (m_{ij})) \equiv 1 \pmod M$$

בסתירה. ■

מסקנה 0.5 העתקות סופיות הן סגורות (זריצקי). אם $f : X \to Y$ סופית ו $Z \subset X$ קבוצת סגורה, אזי גם $f(Z)$ סגורה.

הוכחה: הצמצום של f ל $Z \to \overline{f(Z)}$ זו העתקה סופית. (סגור לפי טופולוגיית זריצקי). ■

הגדרה 0.6 (העתקה פרוייקטיבית סופית). אם $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n$ יריעות פרוייקטיביות ו $f : X \to Y$ מורפיזם, נאמר ש f סופית אם $f : f^{-1}(y \cap \mathbb{P}_i^n) \to Y \cap \mathbb{P}_i^N$ היא סופית לכל i.

על מנת שזה יהיה מוגדר היטב, נשתמש בלמה הבאה:

למה 0.7 אם X, Y יריעות אפיניות ו $Y = \cup Y_i$ כיסוי אפיני, אזי $f : X \to Y$ סופית אם ורק אם $f\mid_{f^{-1}(Y)}: f^{-1}(Y) \to Y_i$ סופית לכל i.

כלומר, סופיות הוא תנאי מקומי. את הלמה נוכיח בשיעור הבא.

הגדרה 0.8 תהי $p \in \mathbb{P}^N$ ויהי $\mathbb{P}^{N-1} \subset \mathbb{P}^N$ עותק של $\mathbb{P}^{N-1}$ שאינו עובר דך p. נגדיר

$$\pi_p : \mathbb{P}^N - \{p\} \to \mathbb{P}^{N-1}$$

ע"י להגדיר את $\pi_p(q)$ להיות שווה לכל נקודות החיתוך של $\mathbb{P}^{N-1}$ ו $\overline{pq}$.

טענה 0.9 אם $X \subset \mathbb{P}^N$ פרוייקטיבי ו $p \notin x$, אזי $\pi_p : X \to \overline{\pi_p(X)}$ היא העתקה סופית.

מסקנה 0.10 אם $X \subseteq \mathbb{P}^N$ אזי יש d והעתקה סופית $X \to \mathbb{P}^d$.

הוכחה: יהי $X \subseteq \mathbb{P}^N$. אם $X = \mathbb{P}^N$ סיימנו. אחרת, $p \notin X$, נתבונן בהעתקה

$$\pi_p : X \to \overline{\pi_p(X)} \subseteq \mathbb{P}^{N-1}$$

ומהאינדוקציה, יש העתקה סופית

$$f : \overline{\pi_p(X)} \to \mathbb{P}^d$$

והרכבת ההעתקות היא ההעתקה סופית. ■

מסקנה זו מאפשרת לנו להגדיר מימד של יריעה!