יריעות אלגבריות - הרצאה שביעית

הערה 0.1 אם $X \subseteq \mathbb{C}^n$ ו $f \in \mathcal{O}(X)$, אזי הטריק של רבינוביץ נותן מבנה של יריעה אפינית על $X - Z(f)$. (אם רוצים להתבונן על יריעה שמוגדרת ע"י אי שוויון, מוסיפים עוד משתנה ומוסיפים את המשוואה $y \cdot f(x) = 1$). כלומר,

$$X - Z(f) \cong \{(x,y) \in X \times \mathbb{C} \mid y \cdot f(x) = 1\}$$

מה קורה לחוג הפונקציות הרגולריות?

$$\mathcal{O}(X - Z(f)) = \mathcal{O}(X)\left[\frac{1}{f}\right]$$

הגדרה 0.2 $X \subseteq \mathbb{C}^n$ יריעה אפינית. $f : X \to \mathbb{C}$ תקרא רגולרית* אם יש כיסוי זריצקי של X

$$X = Z(f_1)^c \cup \cdots \cup Z(f_k)^c$$

כך ש $f|_{Z(f_i)^c}$ רגולרית.

טענה 0.3 רגולרי* = רגולרי.

הוכחה: נסמן $U_i = Z(f_i)^c$. על כל U_i, $f|_{U_I}$ ניתנת ע"י ביטוי מהצורה $\frac{g_i}{f_i^{n_i}}$ כאשר $g_i \in \mathcal{O}(X)$ (מהטריק של רבינוביץ). בה"כ, $n_i = n$ (ניקח את המקסימלי מביניהם). ממשפט האפסים של הילברט, אנו יודעים שהאידיאל $(f_1^n, \ldots f_k^n) = 1$ (כי זהו כיסוי, אין ל f_iים נקודת אפסים משותפת). לכן יש $h_1, \ldots, h_k \in \mathcal{O}(X)$ כך ש

$$\sum h_i f_i^n = 1$$

ונוכל לכתוב

$$f = \frac{g_i}{f_i^n} = \frac{g_i h_i}{f_i^n h_i} = \sum \frac{g_i h_i}{f_i^n h_i} = \sum g_i h_i \in \mathcal{O}(X)$$

■

טענה זו מאפשרת לנו להגדיר:

הגדרה 0.4 אם $U \subset X_i$ קבוצה פתוחה (זריצקי) ביריעה אפינית, אזי $f : U \to \mathbb{C}$ תקרא רגולרית אם יש כיסוי זריצקי של U כך ש $U = \bigcup Z(f_i)^c$ כך ש $f|_{Z(f_i)^c}$ רגולרית.

תמיד יהיה כיסוי כזה, כי קבוצת אפסים של פולינום אחד הן הקבוצות הסגורות הגדולות ביותר, ולכן המשלימים הם הקבוצות הפתוחות הקטנות ביותר.

מסקנה 0.5 ההגדרה לא תלוייה בכיסוי, כלומר ניתן להחליף את "יש כיסוי" ב "לכל כיסוי" כרצוננו.

הגדרה 0.6 (אלומת מבנה). על יריעה אפינית מקבלים פונקציה

$$\{\text{open zariski sets in } X\ \} \longrightarrow \{\text{rings}\}$$

ע"י

$$U \longmapsto \{\text{regular function on } U\}$$

המבנה הזה נקרא אלומת המבנה של X ומסומן ב $\mathcal{O}_X$, ומתקיים $\mathcal{O}_X(X) = X$. זהו מבנה חשוב מאוד בגאומטריה אלגברית, אך לא נעסוק בו בקורס זה.

הגדרה 0.7 (פונקציה רגלורית על יריעה פרוייקטיבית). נניח ש

$$U \subseteq Y \subseteq \mathbb{P}^n$$

כאשר U פתוחה ב Y ו Y יריעה פרוייקטיבית. $f : U \to \mathbb{C}$ נקראת רגולרית אם קיים כיסוי פתוח

$$Y = U_1 \cup \cdots \cup U_m$$

כך ש:

1. U_i פתוחה בתוך אפינית (או אפינית).
2. $f|_{U_i}$ רגולרית.

גם במקרה הפרוייקטיבי ניתן להגדיר אלומת מבנה.

הגדרה 0.8 (פונקציה רגולרית על יריעה פרוייקטיבית). $f : U \to \mathbb{P}^n$ נקראת רגולרת אם יש כיסוי אפיני $\mathbb{P}^n = U_1 \cup \cdots \cup U_k$ כ ש $f|_{f^{-1}(U_i)}$ רגולרית.