עקומים אלגבריים - הרצאה עשירית

יהי C עקום ו D דיוויזור עליו. אנו מסתכלים על המרחב

$$L(D)=\{f\in \mathrm{Rat}(C) \mid \mathrm{div}(f)\geq -D\}$$

ונסמן

$$\ell(D)=\dim L(D)$$

מטרת ההרצאה הזו היא לחשב את $L(D)$. נניח כי $L(D)\neq 0$, אזי יש $D'\sim D$ כך ש $D'\geq 0$.

הגדרה 0.1 דיוויזור D יקרא אפקטיבי אם יש $D'\sim D$ כך ש $D'\geq 0$.

נניח כעת כי C עקום פרוייקטיבי מישורי ולא סינגולרי, $C=Z(f)$ כאשר $\deg f=d$. נניח כי

$$[0:1:0]\notin C,\ \ |C\cap\{[x:y:0]\}|=d.$$

כלומר, הישר באינסוף לא משיק לעקום (מה נעשה אם הוא כן? נזיז אותו קצת!). נסמן ב

$$\pi: C\to \mathbb{P}^1$$

את ההטלה מ $[0:1:0]$. π היא העתקה סופית (מכיוון ש $[0:1:0]\notin C$) ו

$$\mathbb{P}^2=\mathbb{C}^2\cup\ell_\infty$$

כאשר

$$C^2=\{[x:y:1]\}$$

$$\ell_\infty=\{[x:y:0]\}$$

$\pi|_{\mathbb{C}^2\cap C}$ היא ההטלה על ציר x, ונסמן

$$C_\infty=C\cap\ell_\infty$$

ומתקיים

$$\pi\left(C_{\infty}\right)=[1:0]\in\mathbb{P}^{1}$$

נניח כעת כי π אינה מסועפת מעל $[1:0]$.

1. תנו דוגמא לתבנית דיפרנציאלית על C:
dx תבנית דיפרנציאלית רציונלית על $\mathbb{P}^{1}$
$\pi^{*}dx$ תבנית דיפרנציאלית רציונלית על C
$\pi^{*}dx$ חסרת קטבים על $\mathbb{C}^{2}\cap C$ ויש לה קוטב כפול (כמו ל dx) ב C_{∞}. האפסים של $\pi^{*}dx\mid_{\mathbb{C}^{2}\cap C}$ הם הנקודות בהן הישר המשיק ל C הוא ציר ה y, כלומר אלו האפסים של $\frac{\partial f}{\partial x}$. כל זה ביחד, $\operatorname{div}(\pi^{*}dx)$ הוא הסכום של $d\left(d-1\right)$ נקודות פחות $2d$ נקודות. הדרגה הכוללת היא

$$d\left(d-1\right)-2d=d\left(d-3\right)=2\binom{d-1}{2}-2=2\cdot\operatorname{genus}-2$$

2. מצא את כל התבניות הדיפרנציאליות הרגולריות על C (כמו $L\left(K\right)$). נתבונן ב

$$\omega=-\frac{\pi^{*}dx}{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

ω חסרת אפסים או קטבים על $\mathbb{C}^{2}\cap C$. ל ω יש אפסים מדרגה $d-3$ על C_{∞}. כל תבנית דיפרנציאלית רגולרית היא מהצורה $g\cdot\omega$ כאשר g היא פונקציה רציונלית ללא קטבים ב $C\cap\mathbb{C}^{2}$ (פולינום) ובעלת דרגה לכל היותר $d-3$ ב C_{∞}. למרחב זה יש מימד

$$\binom{d-1}{2}=\operatorname{genus}\left(C\right)$$

3. בהנתן $\mathbb{C}^{2}\cap C\supseteq D\geq0$, חשבו את $L\left(D\right)$. נקח $m\gg1$. נבחר פולינום g מדרגה m אשר מתאפס על D.

$$\operatorname{div}_{C}\left(g\right)=D+E-mC_{\infty}.$$

יהי h פולינום מדרגה קטנה/שווה ל m.

$$\operatorname{div}(h)=E+F-mC_{\infty}$$

($F\geq0$).

$$\operatorname{div}\left(\frac{h}{g}\right)=E+F-mC_{\infty}-\left(D+E-mC_{\infty}\right)=F-D\geq-D$$

$$\frac{h}{g} \in L(D)$$

ניתן לבחור g. $D+E$ היא קבוצת האפסים המשותפת של פולינום f מדרגה d ופולינום g מדרגה m ולכן

$$\deg(D+E) = m \cdot d$$

$$\deg(E) = m \cdot d - \deg D = md - n$$

המרחב

$$\{\varphi|_C \mid \varphi \text{ polynomial}, \ \deg\varphi \leq m\}$$

שווה ל {מרחב הפולינום מדרגה קטנה/שווה ל m} מודולו{המרחב של כל הפולינומים מדרגה לכל היותר $m-d$}. ניתן לחשב את המימד של זה:

$$\binom{m+2}{2} - \binom{m-d+2}{2}$$

במרחב זה אנו צריכים לפתור $md-n$ משוואות ליניאריות. לכן יש מרחב פתרונות מגודל

$$B \geq \binom{m+2}{2} - \binom{m-d+2}{2} - md + n = ... = \frac{1}{2}\left(-d^2 + 3d + 2n\right) =$$

$$= n - \frac{d(d-3)}{2} = n - g + 1.$$

נזכיר כי בפעם שעברה הראנו הוכחה לא שלמה לרימן רוך. אבל החלק הראשון היה נכון, ושם הראנו שאם $D \geq 0$ אזי המימד חסום ע"י $\ell(D) \leq n-g+1$, ולכן המימד הוא בדיוק

$$\boldsymbol{\ell(D) = n - g + 1.}$$

הבנו את כל הדיוויזורים האי-שליליים והוכחנו עבורם את רימן רוך (הוכחה קונסטרוקטיבית):

$$\ell(D) - \ell(K-D) = n - g + 1.$$

עבור D אפקטיבי. הוכחה זו נכונה גם אם $K-D$ אפקטיבי (כי הנוסחא אנטי-סימטרית לזה). לכן מה שחסר לנו להוכחה מלאה של המשפט הוא המקרה בוא יש D כך ש $\ell(D) = \ell(K-D) = 0$. צריך להראות שאם

$$\ell(D) = \ell(K-D) = 0$$

אזי

$$\deg\left(D\right)=g-1$$

טענה 0.2 אם $\deg D\geq g$ אזי $\ell\left(D\right)>0$.

הוכחה: לא ניתן כרגע הוכחה מלאה, אך נתחיל עם הטיעון. מספיק להראות שכל דיוויזור מהצורה

$$[p_1]+\cdots+[p_{g+1}]-[q]$$

הוא אפקטיבי. יהי $m\gg 1$, נבחר פולינום g מדרגה m כך שהדיוויזור של g הוא

$$\mathrm{div}(g)=[p_1]+\cdots+[p_{g+1}]+E-mC_{\infty}$$

נבחר פולינום h כך ש

$$\mathrm{div}(h)=E+[q]-mC_{\infty}$$

(קיים כזה מחשבון מימדים) ואז

$$\mathrm{div}\left(\frac{h}{g}\right)\geq[p_1]+\cdots+[p_{q+1}]-[q]\,.$$

■

נחזור לנושא של אינטגרלים אבליים.

$$\sum_{i=1}^{g+1}\int_{[p]}^{[p_i]}\omega$$

נתבונן לדוגמא באינטגרל

$$\int_0^{f(x,y)}\frac{dt}{\sqrt{t^3+at+b}}=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{t^3+at+b}}+\int_0^y\frac{dt}{\sqrt{t^3+at+b}}$$

ובשפה של דיוויזורים נוכל לרשום

$$I\left(\left[f\left(x,y\right)\right]-[0]\right)=I\left([x]-[0]+[y]-[0]\right)$$

ולכן

$$\sum_{1}^{g+1}[p_i]-(g+1)[p]\sim\sum_{1}^{g}[q_i]-g[p]$$

ונקבל סה"כ

$$[q_1]+\cdots+[q_g]-g[p]$$