עקומים אלגבריים - הרצאה שביעית

קצת מוטיבציה היסטורית

נתחיל מלדבר על אינטגרלים. נתבונן באינטגרל

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin(x) = A(x)$$

אמנם $A(x)$ טרנסצנדנטית, אבל היא מקיימת יחס אלגברי:

$$A(x) + A(y) = A\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$$

ניסו להבין האם ניתן להכליל התנהגויות כאלו. התחילו להסתכל על דברים מהצורה

$$\int \frac{dt}{\sqrt{f(*)}}$$

כאשר f פולינום מדרגה שלישית. מהר הבינו שמדובר ביצור מוזר מאוד. באופן כללי, התקשו למצוא תשובה, אך הצליחו לעשות מעט הכללות. הבחנה ראשונה היא שהפונקציה שלנו היא בעצם מעגל. היעד הבא זה להכליל לאליפסות, וכך נולדו האינטגרלים האליפטים:

$$\int \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\left(1-k^2x^2\right)dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = I(x)$$

לג'נדר קיבל נוסחא מהצורה:

$$I(x) + I(y) = I(z)$$

כאשר z פונקציה רציונלית ב $x, \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}, y, \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}$.
אח"כ, אוילר הוכיח נוסחא דומה עבור אינטגרלים מהצורה

$$\int \frac{dt}{\sqrt{f(t)}}$$

עבור f ממעלה שלישית. לאחר כמה שנים (1910), אבל הוכיח שאם $F(x,y)$ פולינום מדרגה d ו $y(x)$ רציפה המקיימת $F(x,y(x))=0$ ו $r(x,y)$ פונקציה רציונלית ו $I(x)$ אינטגרל אבלי:

$$I(x):=\int_0^x r(t,y(t))\,dt$$

אזי, לכל $\binom{d+1}{2}+1$ משתנים $x_1,\ldots,x_{\binom{d-1}{2}+1}$ קיימים $y_1,\ldots,y_{\binom{d-1}{2}+1}$ התלויים רציונלית ב $x_i,y(x_i)$ כך ש

$$\sum I(x_j)=\sum I(y_j)$$

נוכיח משפט זה בהמשך הסמסטר. בנתיים נחזור לדברים אמיתיים.

יעקוביאנים ודיפרנציאלים

נזכר במושג של שדות וקטורים רגולריים על $\mathbb{C}^n$. אלו דברים מהצורה

$$\sum f_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

כאשר f_i הם פולינומים. כעת תהי $X\subseteq\mathbb{C}^n$ יריעה אלגברית אפינית ולא סינגולרית, אזי בכל נקודה יש מרחב משיק, ושדה וקטורי על X ניתן ע"י

$$\sum f_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

כך שלכל $x_0\in X$ מתקיים

$$\sum f_i(x_0)\frac{\partial}{\partial x_i}\in T_{x_0}X$$

דוגמא על $\mathbb{P}^1$

נוכל לחשוב על $\mathbb{P}^1$ כעל יריעה. איך יראה השדה הוקטורי מעליה? זהו שדה וקטורי V כך ש

$$V\mid_{\mathbb{P}^1_0},\ V\mid_{\mathbb{P}^1_1}$$

הם רגולרים. כעת

$$\mathbb{P}^1_0=\{[1:z]\}\rightsquigarrow\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathbb{P}^1_1 = \{[w:1]\} \rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial w}$$

שדה וקטורי על $\mathbb{P}^1$ הוא זוג

$$f_0(z)\frac{\partial}{\partial z}, f_1(w)\frac{\partial}{\partial w}$$

שמתלכדים על

$$\mathbb{P}^1_0 \cap \mathbb{P}^1_1$$

כעת נשאל על החיתוך,

$$\frac{\partial}{\partial z} = g(w)\frac{\partial}{\partial w}$$

מהו $g(w)$? נכתוב $z = \frac{1}{w}$, ואז:

$$1 = \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, z \right\rangle = \left\langle g(w)\frac{\partial}{\partial w}, \frac{1}{w} \right\rangle = g(w) - \frac{1}{w^2}$$

ולכן

$$g(w) = -w^2$$

בפרט, $\frac{\partial}{\partial z}$ מתרחב לשדה וקטורי רגולרי:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}, -w^2\frac{\partial}{\partial w}\right)$$

$z\frac{\partial}{\partial z}$ מתרחב לשדה וקטורי רגולרי:

$$\left(z\frac{\partial}{\partial z}, -w\frac{\partial}{\partial w}\right)$$

ו $z^2\frac{\partial}{\partial z}$ מתרחב לשדה וקטורי רגולרי

$$\left(z^2\frac{\partial}{\partial z}, -\frac{\partial}{\partial w}\right)$$

ונוכיח שכל שדה וקטורי על היריעה הוא צירוף ליניארי של השדות האלו.
נעבור ל "שפה דואלית":

דיפרנציאלים רגולריים על $\mathbb{C}^n$

הגדרה 0.1 דיפרנציאל רגולרי על $\mathbb{C}^n$ הוא מהצורה $\sum f_i dx_i$ כאשר f_i פולינומים.

אם f פונקציה על $\mathbb{C}^n$ אזי יש לנו את df, $x_i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, dx_i דיפרנציאל.

$$dx_i \mid_{p_0} \in (T_{p_0}\mathbb{C}^n)^*$$

כאשר $T_{p_0}\mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^n$.

$$dx_i \mid_{p_0} (v_1, \ldots, v_n) = v_i$$

$$d(fg) = fdg + gdf$$

הערה 0.2 אם $X \subseteq \mathbb{C}^n$ יריעה אפינית, כל דיפרנציאל על X ניתן ע"י $\sum f_i dx_i$ (בניגוד למקרה של שדות וקטורים, כאן אין צורך בתנאי נוסף).

הערה 0.3 dx_i הם דיפרנציאלים על $\mathbb{C}^n$. כעת אם $X \subseteq \mathbb{C}^n$ נוכל לצמצם את dx_i ולהסתכל עליו כעל דיפרנציאל על X. הוא יוגדר ע"י כך שלכל נקודה $p \in X$ ווקטור משיק $v \in T_pX \subset T_p\mathbb{C}^n$, יתקיים

$$dx_i \mid_p (v) = v_i$$

כאשר v_i הוא הרכיב ה i של v. כלומר ניתן לדבר אך ורק על נקודות על היריעה ועל וקטורים במרחב המשיק לנקודה, ואז הדיפרנציאל יחזיר את הרכיב המתאים.

כעת נחזור לדוגמא שלנו:

דוגמא על $\mathbb{P}^1$

$$dz = -\frac{1}{w^2}dw$$

כי

$$1 = \left\langle dz, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle = \left\langle h(w)\,dw, -w^2\frac{\partial}{\partial w} \right\rangle = -w^2 h(w) \left\langle dw, \frac{\partial}{\partial w} \right\rangle$$

ונטען כי אם $(f(z)\,dz, g(w)\,dw)$ דיפרנציאל רגולרי על $\mathbb{P}^1$, אזי מתקיים היחס הבא:

$$g(w)\,dw = -f\left(\frac{1}{w}\right) \cdot \frac{1}{w^2}dw$$

ולכן

$$g\left(w\right)=-f\left(\frac{1}{w}\right)\cdot\frac{1}{w^{2}}$$

ואין כאלו! (מלבד אפס). לכן, אין דיפרנציאלים רגולריים על $\mathbb{P}^{1}$.

הערה 0.4 הדוגמא האחרונה עלולה לגרום למחשבה שהשפה הדיפרנציאלית היא שגוייה. המצב הוא הפוך ("הבעיה ב $\mathbb{P}^{1}$"). אם C עקום פרוייקטיבי לא סינגולרי מגנוב גדול/שווה ל 2, אזי על C אין שדות וקטורים ודווקא יש דיפרנציאלים רגולרים.

הגדרה 0.5 יהי שדה וקטורי ותהי p נקודה בה השדה מתאפס. סביב הנקודה, נבחר מעגל קטן ונתבונן בעקום הנוצר משינוי הוקטורים עליו. לדוגמא, עבור $z\frac{\partial}{\partial z}$ נקבל הקפת מעגל אחת. במצב זה, נאמר שהאינדקס הוא 1. עבור $z^{2}\frac{\partial}{\partial z}$ נגלה שיש שתי הקפות מעגל, ולכן האינדקס הוא 2

משפט מטופולוגיה אלגברית מראה שסכום האינדקסים על יריעה אינו תלוי בשדות הוקטורים עצמם, והוא קבוע ושווה למאפיין אוילר:

משפט 0.6 (פואנקרה־הופף).

$$\sum_{x\in C}\operatorname{ind}\left(V,x\right)=\chi\left(C\right)$$

לכל שדה וקטורי V על C (נזכיר שיש מספר סופי של נקודות בהן השדה הוקטורי מתאפס).

מסקנה 0.7 אם $\chi\left(C\right)<0$ אזי אין שדות וקטורים רגולרים על C.

אם ω דיפרנציאל על $\mathbb{C}^{n}$ ועקום $\gamma:\left[0,1\right]\to\mathbb{C}^{n}$ אז האינטגרל $\int\limits_{\gamma}\omega=\int\limits_{0}^{1}\omega_{\gamma(t)}\left(\dot{\gamma}\left(t\right)\right)dt$ מוגדר היטב (לא תלוי בפרמטריזציה). ב $\mathbb{C}$, זה מוכר לנו כאינטגרל מסילתי מרוכב.

דוגמא

נתבונן בעקום $C=Z\left(y^{2}-f\left(x\right)\right)$, נבחר עקום מהצורה $\gamma\left(t\right)=\left(t,\varepsilon\left(t\right)\right)$ כך ש $\gamma\left(t\right)\in C$.

$$\int\limits_{\gamma}\frac{dx}{y}=\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{\varepsilon\left(t\right)}=\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{\sqrt{f\left(t\right)}}$$

וכך הגענו לאינטגרלים מהמוטיבציה בתחילת השיעור.

יהי $f\left(x\right)$ פולינום ממעלה שלישית, $C=Z\left(y^{2}-f\left(x\right)\right)$ הוא טורוס. אם ω תבנית דיפרנציאלית, אזי

$$\int\limits_{p_0}^{p}\omega$$

(אינטגרל על מסלול בתוך C) מוגדר עד כדי צירופים שלמים של שני מספרים, $\int\limits_{\gamma_1}\omega,\int\limits_{\gamma_2}\omega$ (הנקראים מחזורים), כאשר γ_1,γ_2 הם העקומים היוצרים את החבורה היסודית של הטורוס. בפרט הפונקציה ההפיכה ל I היא פונקציה על $\mathbb{C}$ מחזורית עבור שני מספרים מרוכבים. מקבלים פונקציה מ C לחבורת המנה של $\mathbb{C}$ מודולו שריג המחזורים. כעת מ $\mathbb{C}$ מודולו שריג המחזורים ניתן להטיל על C, ואז להטיל על ציר ה x ל $\mathbb{C}$. נקבל בעצם סדרת העתקות

$$\mathbb{C}\to\mathbb{C}/_{(\text{lattice})}\to C^{\times}\overset{\text{projection}}{\to}\mathbb{C}$$