עקומים אלגבריים - הרצאה חמישית

הגדרה 0.1 (קבוצות נחתכות רוחבית). נאמר שהקבוצות $Z(f)$ ו $Z(g)$ נחתכות רוחבית ב $p \in \mathbb{P}^2$ אם $f(p) = g(p)$ ו $\nabla f(p)$ ו $\nabla g(p)$ הם בלתי תלויים ליניארית.

האינטואיציה הגאומטרית לחיתוך רוחבי הוא שהמשיקים ל $Z(f)$ ול $Z(g)$ ב p זרים.

משפט 0.2 (גרסא של משפט בזו). יהיו $f, g \in \mathbb{C}[x, y, z]$ פולינומים הומוגנים מדרגות n, m בהתאמה כך שכל נקודה ב $Z(f) \cap Z(g)$ נחתכת רוחבית, אזי

$$|Z(f) \cap Z(g)| = nm$$

מטרה הרצאה זו תהיה להוכיח את המשפט. נרצה להוכיח זאת ע"י כך שנוכיח זאת בנקודה ספציפית, ואז "להזיז מעט" את f ולהראות שזה רציף. להוכיח בנקודה ספציפית זה פשוט, נסתכל על f ו g כמכפלות של גורמים ליניאריים ואז מספר החיתוכים יהיה nm. נוכיח כעת ביתר פירוט, וראשית נציג מספר למות עזר:

למה 0.3 נניח כי $\pi : X \to Y$ היא העתקת כיסוי של יריעות ו X קומפקטי, אזי הפונקציה $Y \to \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $y \mapsto \left|\pi^{-1}(y)\right|$ היא קבועה מקומית.

הוכחה: $\pi^{-1}(y) \subseteq X$ דיסקרטית ולכן $\left|\pi^{-1}(y)\right| < \infty$. צריך להראות ש $\left\{y \mid \left|\pi^{-1}(y)\right| = 7\right\}$ היא קבוצה פתוחה וסגורה. <u>זוהי קבוצה פתוחה</u> כי נכתוב $\pi^{-1}(y) = x_1, \ldots, x_7$. אזי, יש סביבה V_i של x_i כך ש $\pi|_{V_i}$ הוא הומאומורפיזם. תהי

$$U = \bigcap_{i=1}^{7} \pi(V_i)$$

סביבה פתוחה, ולכן $V_i \cap \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\pi} U$ הומאומורפיזם, ולכן

$$\left|\pi^{-1}(z)\right| \geq 7$$

לכל $z \in U$. מנימוק דומה נקבל את הכיוון השני. <u>כעת זוהי גם קבוצה סגורה</u> כי היא המשלים של האיחוד של $\left\{y \mid \left|\pi^{-1}(y)\right|\right\}$. ■

הגדרה 0.4 (פונקציה אטלית) פונקציה $f \in C^1$ בין יריעות M ו N נקראת אטלית ב $p \in M$ אם $df \mid_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ היא איזומורפיזם. העתקה נקראת אטלית אם היא אטלית בכל נקודה.

הערה 0.5 לפי משפט הפונקציה ההפוכה, קל לראות שאם העתקה היא אטלית אזי היא הומומורפיזם מקומי.

למה 0.6 אם M קומפקטית ו f אטלית, אזי f היא כיסוי.

על מנת להוכיח את המשפט שהצגנו בתחילת ההרצאה, נצטרך לחשב הרבה נגזרות. לכן נציג את הטריק הבא:

טענה 0.7 תהי $D = {}^{\mathbb{C}[\varepsilon]}/_{\varepsilon^2}$, אזי

$$(a + b\varepsilon)^n = a^n + \varepsilon n a^{n-1} b$$

כעת אם f פולינום, אזי

$$f(a + b\varepsilon) = f(a) + \varepsilon f'(a)\, b$$

ואם $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ אזי

$$f\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\varepsilon\right) = f\left(\overrightarrow{a}\right) + \varepsilon\left\langle \nabla f\left(\overrightarrow{a}\right), \overrightarrow{b}\right\rangle$$

נשם לב כעת שניתן להציג פרמטריזציה של פולינומים הומוגנים מדרגה n ע"י $\mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}$.

למה 0.8 הקבוצה

$$\left\{(f,g) \in \mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}. \times \mathbb{P}^{\binom{m+2}{2}-1} \mid \text{each intersection point is transversely}\right\}$$

היא פתוחה, צפופה וקשירה.

הוכחה:

$$\left\{(f,g,p) \in \mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}. \times \mathbb{P}^{\binom{m+2}{2}-1} \times \mathbb{P}^2 \mid p\, \text{is a non-transervers intersection}\right\}$$

היא סגורה. ההטלה $\pi : X \to \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^M$ היא קונסטרוקטיבית, סגורה ולא הכל, ולכן $\pi(X)^c$ פתוחה, צפופה וקשירה. ■

למה 0.9

$$Y = \left\{(f,g,p) \in \mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}. \times \mathbb{P}^{\binom{m+2}{2}-1} \times \mathbb{P}^2 \mid f,g \text{ intersect transversely in } Z(f) \cap Z(g)\right\}$$

היא יריעה.

הוכחה: נסמן $N = \binom{n+2}{2} - 1,\ M = \binom{m+2}{2} - 1$. Y היא קבוצה אפסים של החיתוך של ההעתקה

$$(f, g, p) \overset{\phi}{\mapsto} (f(p), g(p))$$

עם $\pi(X)^c \times \mathbb{P}^2$. מספיק להראות שהנגזרת של ϕ היא על. נשתמש בטריק מקודם,

$$(f + \varepsilon F, g + \varepsilon G, p + \varepsilon P) \mapsto ((f + \varepsilon F)(p + \varepsilon P), (g + \varepsilon G)(p + \varepsilon P))$$

$$(f + \varepsilon F)(p + \varepsilon P) = f(p + \varepsilon P) + \varepsilon F(p + \varepsilon P) = f(p) + \varepsilon \langle \nabla f(p), P \rangle + \varepsilon F(p)$$

כעת הנגזרת של ϕ היא ההעתקה

$$(F, G, p) \mapsto (\langle \nabla f(p), P \rangle + F(p), \langle \nabla g(p), P \rangle + G(p))$$

והצמצום ל $(0, 0, p)$ הוא על, מכיוון ש $\nabla f(p)$ ו $\nabla g(p)$ הם בלתי תלויים ליניארית. ■

למה 0.10 ההטלה

$$Y \overset{\pi}{\mapsto} \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^M$$

היא אטלית.

הוכחה: נגדיר Y כמו בלמה הקודמת. אזי

$$T_{(f,g,p)}Y = \{(F, G, p) \mid \langle \nabla f(p), p \rangle + F(p) = \langle \nabla g(p), p \rangle + G(p) = 0\} \overset{d\pi}{\to} T_f\mathbb{P}^N \times T_g\mathbb{P}^M$$

מכיוון שיש להם אותו המימד, מספיק להוכיח ש $d\pi$ היא על. בהנתן f, g, p, F, G,

$$d\pi^{-1}(F, G) = (F, G, p)$$

כאשר p פתרון למערכת

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(p), p \rangle &= -F(p) \\ \langle \nabla g(p), p \rangle &= -G(p) \end{aligned}$$

ופתרון זה קיים מכיוון ש $\nabla f(p)$ ו $\nabla g(p)$ בלתי תלויים ליניארית. ■

למה 0.11

$$Y = \left\{(f, g, p) \in \mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}. \times \mathbb{P}^{\binom{m+2}{2}-1} \times \mathbb{P}^2 \mid f, g \text{ intersect transversely in } Z(f) \cap Z(g)\right\} \to$$
$$\to \left\{(f, g) \in \mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}. \times \mathbb{P}^{\binom{m+2}{2}-1} \mid f, g \text{ intersect transversely}\right\}$$

היא העתקת כיסוי.

הוכחה: תהי $\pi : \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^M \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^N$. U היא איחוד של יריעות עם שפה (כלומר צמצום של הזוויות בין המישורים המשיקים בנקודות חיתוך) $U = \bigcup U_i$. לכל i, $\pi^{-1}(U_i)$ היא קומפקטית,

$$\pi : \pi^{-1}(U_i) \to U_i$$

היא אטלית ולכן כיסוי. לכן,

$$\pi : \bigcup \pi^{-1}(U_i) \to \bigcup U_i = U$$

היא העתקת כיסוי. ■

כעת נסיים עם הוכחת משפט בזו: **הוכחה:** נתונים n, m. נבחר שני נקודות $p \neq q \in \mathbb{P}^2$ ויהיו $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ ישרים העוברים דרך p, $\ell_i \neq \overline{pq}$. יהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ישרים העוברים דרך q כך ש $\lambda_j \neq \overline{pq}$. כעת יהיו

$$X = \bigcup \ell_i$$
$$Y = \bigcup \lambda_j$$

ומתקיים $\deg X = n, \ \deg Y = m$ ו $\ell_i \cap \lambda_j$ נחתכים רוחבית בנקודה אחת. ■