יריעות אלגבריות - הרצאה תשיעית

משפט 0.1 אם $X\subseteq\mathbb{P}^{n}$ יריעה פרוייקטיבית, $P\notin X$, אזי

$$\pi_{P}:X\to\mathbb{P}^{n-1}$$

היא העתקה סופית.

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות,

$$P=\left[1:0\cdots:0\right]$$

$$X=Z\left(F\right)$$

היפר-משטח $\deg F=D$.

$$F\left(P\right)\neq0\to F=x_{0}^{d}+\cdots$$

$$\pi_{P}\left(\left[\alpha_{0}:\cdots:\alpha_{n}\right]\right)=\left[\alpha_{1}:\cdots:\alpha_{n}\right]$$

יהי

$$U_{1}=\left\{ \left[1:x_{2}:\cdots:x_{n}\right]\mid F\left(\alpha_{0},\ldots,\alpha_{n}\right)=0\ \alpha_{1}=1\right\} =$$

$$=\left\{ \left(x_{0},x_{2},\ldots,x_{n}\right)\in\mathbb{C}^{n}\mid F\left(x_{0},1,x_{2},\ldots,x\right)=0\right\} =Y$$

אפיני. נרצה להראות שההעתקה

$$Y\to\mathbb{C}^{n-1}$$

$$\left(x_{0},x_{2},\ldots,x_{n}\right)\mapsto\left(x_{1},\ldots,x_{n}\right)$$

סופית. כלומר, צריך להראות שהפונקציה $x_{0}\mid_{y}$ מקיימת פולינום מתוקן שמקדמיו הם פולינומים ב

$$x_{2}\mid_{Y},\ldots,x_{n}\mid_{Y}$$

המקיימות פולינום $F\left(X_{0},1,X_{2},\ldots,X_{n}\right)$ שהוא מתוקן. ■

הערה 0.2 נניח ש $X \subseteq \mathbb{P}^n$. אזי או ש $X = \mathbb{P}^n$ ואז הכל טוב, או שנבחר $p \notin X$ ונסתכל על $\pi_p(X) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$. נמשיך:

$$X \to \pi_p X \to \pi_q \pi_p X \to \ldots \to \mathbb{P}^d$$

כלומר ל X יש העתקה סופית לתוך מרחב פרוייקטיבי.

נניח כי X אי פריקה, אזי אוסף הפונקציות הרציונליות על X, $\mathrm{Rat}(X)$ היא הרחבה נוצרת סופית של X, כלומר יש $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathrm{Frac}(X)$ כך ש $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \subseteq \mathrm{Rat}(X)$ כאשר ההרחבה הראשונה היא טרנדצנדנטית והשנייה אלגברית. d נקראת דרגת הטרנסצנדנטיות של $\mathrm{Rat}(X)$.

הגדרה 0.3 X אי פריקה,

$$\dim X = \mathrm{tr.deg}(\mathrm{Rat}(X))$$

דוגמא

$\dim \mathbb{P}^n = \dim \mathbb{C}^n = n$.

למה 0.4 אם $f : X \to Y$ היא סופית, אזי $\dim X = \dim Y$.

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות נניח כי X, Y אפיניות. מכך שההעתקה על נקבל ש

$$\mathrm{Rat}(Y) \subset \mathrm{Rat}(X)$$

ומכך שהעתקה סופית נקבל שההרחבה היא אלגברית. ■

למה 0.5 אם $Y \subseteq X$ אזי $\dim X \leq \dim Y$.

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות $Y \subseteq \mathbb{C}^n$ אפינית.

$$\mathrm{Rat}(Y) = \mathbb{C}(x_1|_Y, \ldots, x_n|_Y)$$

$$\mathrm{Rat}(X) = \mathbb{C}(x_1|_X, \ldots, x_n|_X)$$

וכל יחס אלגברי המתקיים על $x_i|_Y$ מתקיים על $x_i|_X$. ■

משפט 0.6 אם X, Y אי פריקות, $X \subsetneq Y$ סגורות, אזי $\dim X < \dim Y$

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות $Y \subseteq \mathbb{C}^n$. נבחר פולינום $f(x_1,\dots,x_n)$ אשר מתאפס על X אבל לא על Y. $\mathrm{Rat}(Y)$ נוצרת ע"י פונקציות הקוארדינטות. נניח כי

$$\dim Y = d.$$

בלי הגבלת הכלליות, $x_i|_Y$ הם בלתי תלויים אלגברית ו

$$\mathrm{Rat}(Y)/\mathbb{C}(x_1|_Y,\dots,x_n|_Y)$$

אלגברית, ובפרט f מקיימת יחס אלגברי מהצורה

$$g_n(x_i|_Y)\cdot f^n + \cdots = g_0(x_i\,|_Y) = 0$$

כאשר g_i פולינומים ב d במשתנים. כאשר נצמצם פונקציות אלו ל X. אבל $g_0(x_i|_X) = 0$ ולכן $x_1|_X,\dots,x_d|_X$ אינם בלתי תלויים אלגברית. ■

משפט 0.7 אם $X = Z(f) \subseteq \mathbb{C}^n$ עבור $f \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ אי פריק, אזי

$$\dim X = n-1.$$

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות, x_n מופיע ב f.

$$\mathrm{Rat}(X) = \mathbb{C}(x_1|_X,\dots,x_n|_X)$$

נטען ש $x_1|_x,\dots,x_{n-1}|_X$ הם בלתי תלויים אלגברית. נניח שהם לא. אזי יש פולינום $g(x_1,\dots,x_{n-1})$ כך ש

$$g(x_1|_X,\dots,x_{n-1}|_X) = 0.$$

אם נסתכל על $g(x_1,\dots,x_{n-1})$ הוא מתאפס על X. מה Nullstelensatz נקבל ש $g \in I(Z(f))$ ואז נקבל ש $f \mid g^n$ עבור n כלשהו. אבל צד שמאל מערב את x_n וצד ימין לא, בסתירה. ■

מסקנה 0.8 אם $X \subseteq \mathbb{C}^n$ אי פריק וסגור ממימד $n-1$ אזי $X = Z(f)$.

הוכחה: יהי f פולינום אי פריק המתאפס על X. אם $X \neq Z(f)$ אזי

$$\dim X < \dim Z(f) = n-1$$

בסתירה. ■

נרחיב את ההגדרה של מימד:

הגדרה 0.9 אם X פריק, נגדיר את המימד של X להיות המקסימום של מימדי תתי המרחבים האי פריקים שלו, כלומר

$$\dim X = \max_{Y\subset X \text{ irred components}} \dim Y.$$