יריעות אלגבריות - הרצאה רביעית

בהרצאה שעברה התחלנו לדבר על ההתאמה בין העולם הגאומטרי לאלגברי. נדגים זאת עם ניסוח של ה Nullstellensatz עבור קבוצות אלגבריות:

משפט 0.1 תהי X קבוצה אלגברית, ישנה התאמה (חח"ע ועל) שומרת סדר בין תתי קבוצות סגורות של X ואידיאלים רדיקלים של $\mathcal{O}(X)$.

הוכחה: נכתוב $X \subseteq \mathbb{C}^n$. ניתן לראות ששניהם בהתאמה לקבוצות האידיאלים הרדיקלים $J \lhd \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ המכילים את $I(X)$. ■

מסקנה 0.2 ההתאמה בין קבוצת הנקודות של X לקבוצת האידיאלים המקסימליים של $\mathcal{O}(X)$ ע"י

$$x_0 \mapsto \{f \in \mathcal{O}(X) \mid f(x_0) = 0\}.$$

זוהי מהות הגאומטריה אלגברית, היכולת לעבור מייצוג גאומטרי לייצוג אלגברי. אף שבתחילת דרכה של הגאומטריה האלגברית היא שימשה בעיקר לפתרון בעיות גאומטריות בעזרת אלגברה, בגאומטריה אלגברית מודרנית משתמשים גם בגאומטריה לפתרון בעיות אלגבריות.

מכפלה של יריעות אלגבריות

יהיו

$$Z(f_i(x_1, \ldots, x_n)) = X \subseteq \mathbb{C}^n$$

$$Z(g_j(y_1, \ldots, y_m)) = Y \subseteq \mathbb{C}^m$$

נוכל להגדיר

$$X \times Y \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m = \mathbb{C}^{n+m}$$

וזוהי קבוצה אלגברית הנתונה ע"י

$$X \times Y = Z\left(f_i, g_j\right)$$

כעת נרצה לתרגם תוצאות אלו לשפה של חוגי קואורדינטות, ונקבל:

טענה 0.3

$$\mathcal{O}\left(X \times Y\right) = \mathcal{O}\left(X\right) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}\left(Y\right)$$

הוכחה: ניתן להוכיח טענה זו ישירות מהגדרת מכפלה טנזורית. אנחנו מגניבים ולכן נוכיח זאת קטגורית:

1. $\times$ היא מכפלה בקטגוריה של יריעות אלגבריות
2. $\otimes$ היא מכפלה בקטגוריה של אלגברות מצומצמות נוצרות סופית מעל $\mathbb{C}$
3. קטגוריות אלו שקולות.

■

מרחבים פרוייקטיבים

כמו במקרה של עקומים, גם כאן נרצה לעבור לדבר על מרחבים פרוייקטיבים.

הגדרה 0.4 (מרחב פרוייקטיבי). $\mathbb{P}^n\left(\mathbb{C}\right)$ הוא מרחב הישרים העוברים דרך ראשית הצירים ב $\mathbb{C}^{n+1}$, כלומר

$$\mathbb{P}^n\left(\mathbb{C}\right) = {}^{\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}}/_{\mathbb{C}-\{0\}}$$

הגדרה 0.5 (קבוצה אלגברית פרוייקטיבית). קבוצה אלגברית פרוייקטיבית היא קבוצת האפסים של קבוצת פולינומים הומוגנים ב $n+1$ משתנים.

סימונים

..

$$\mathbb{P}_i^n(\mathbb{C}) = \{[x_0 : \cdots : x_n] \mid x_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

אלו עותקים של $\mathbb{C}^n$ שביחד מכסים את $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

משפט 0.6 $X \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ היא קבוצה אלגברית פרוייקטיבית $\iff$ $X \cap \mathbb{P}_i^n(\mathbb{C})$ היא קבוצה אלגברית אפינית.

הוכחה: אם X נתונה ע"י $Z(F_i(x_0, \ldots, x_n))$ עבור F_i הומוגנים, אזי

$$X \cap P_0^n(\mathbb{C}) = Z(F_i(1, x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

לכיוון השני

$$X \cap \mathbb{P}_i^n(\mathbb{C}) = Z(f_{ij}(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n))$$

כעת לכל i, j, נגדיר

$$F_{ij} = x_i^{\deg f_i + 1} f_{ij}\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

כעת נטען ש $X = Z(F_{ij})$, ונשאיר זאת כתרגיל לבית. ■

הגדרה 0.7 (קבוצה constructible). $X \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ היא קבוצה קונסטרוקטיבית אם היא צירוף בוליאני של קבוצות אלגבריות פרוייקטיביות.

מסקנה 0.8 $X \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ קונסטרוקטיבית אם ורק אם לכל i, $X \cap \mathbb{P}_i^n(\mathbb{C})$ היא קונסטרוקטיבית.

מסקנה 0.9 אם $X \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ קונסטרוקטיבית אזי ההטלה שלה על $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ קונסטרוקטיבית.

אבל לא הגדרנו מכפלה של מרחבים פרוייקטיבים! נגדיר זאת בעזרת הטריק הבא:

שיכון Segre

נתבונן בהעתקה

$$\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{m+1} \to \mathrm{Mat}_{(n+1)\times(m+1)}(\mathbb{C})$$

$$(v,w)\mapsto v\cdot w^{t}=\begin{pmatrix}v_0w_0 & \cdot & \cdot & \cdot & v_nw_0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ v_0w_m & \cdot & \cdot & \cdot & v_nw_m\end{pmatrix}$$

ולכן ניתן להגדיר העתקה

$$\mathbb{P}^{n}\left(\mathbb{C}\right)\times\mathbb{P}^{m}\left(\mathbb{C}\right)\to\mathbb{P}^{n\cdot m+n+m}\left(\mathbb{C}\right)$$

ע"י

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{C}^{n+1}\right)\times\mathbb{P}\left(\mathbb{C}^{m+1}\right)\to\mathbb{P}\left(\mathrm{Mat}_{(n+1)\times(m+1)}\left(\mathbb{C}\right)\right)$$

ההעתקה היא בבירור חד חד ערכית. התמונה היא הסגור הפרוייקטיבי של המטריצות מדרגה 1, וזוהי קבוצה אלגברית (היא קבוצת האפסים של כל המינורים 2×2, ואלו פולינומים הומוגניים).