# עקומים אלגבריים - הרצאה רביעית

**יחסי אוילר**

אם $f \in \mathbb{C}\left[x,y,z\right]$ הומוגני מדרגה $k$, אזי

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+z\cdot\frac{\partial f}{\partial z}=k\cdot f$$

מספיק להוכיח זאת עבור מנומים. יהי $m=x^{a}y^{b}z^{c}$. אזי נקבל

$$ax^{a}y^{b}z^{c}+bx^{a}y^{b}z^{c}+cx^{a}y^{b}z^{c}=\left(a+b+c\right)m$$

לכן, $\frac{\partial f}{\partial x}$ ו $\frac{\partial f}{\partial y}$ קובעים את $\frac{\partial f}{\partial z}$. נניח

$$f\in\mathbb{C}\left[x,y,z\right]$$

הומוגני ו

$$g\left(x,y\right)=f\left(x,y,1\right)$$

אם $\left[a:b:1\right]\in\mathbb{P}_{2}^{2}\left(\mathbb{C}\right)$ אזי $Z\left(g\right)$ סינגולרי ב $\left(a,b\right)$ אם ורק אם

$$\frac{\partial g}{\partial x}\left(a,b\right)=\frac{\partial g}{\partial y}\left(a,b\right)=0\iff\frac{\partial f}{\partial x}\left(p\right)=\frac{\partial f}{\partial y}\left(p\right)=\frac{\partial f}{\partial z}\left(p\right)=0$$

באופן יותר כללי, אם $f_{1}\ldots,f_{m}\in\mathbb{C}\left[x_{0},\ldots,x_{m}\right]$ הומוגניים, $p\in\mathbb{P}^{n}\left(\mathbb{C}\right)$ כך ש $f_{i}\left(p\right)=0$ ו $\nabla f_{i}\left(p\right)$ תלויים ליניארית, זהו משטח מרוכב באזור $p$. נכתוב $p=\left[p_{0}:\ldots:p_{n}\right]$

$$\left(\frac{\partial f_{1}}{\partial x_{0}}\left(p\right),\ldots,\frac{\partial f_{1}}{\partial x_{n}}\left(p\right)\right),\ldots\left(\frac{\partial f_{m}}{\partial x_{0}}\left(p\right),\ldots,\frac{\partial f_{m}}{\partial x_{n}}\left(p\right)\right)$$

בלתי תלויים ליניארית אם ורק אם

$$\left(\frac{\partial f_{1}}{\partial x_{1}}\left(p\right),\ldots,\frac{\partial f_{1}}{\partial x_{n}}\left(p\right)\right),\ldots\left(\frac{\partial f_{m}}{\partial x_{1}}\left(p\right),\ldots,\frac{\partial f_{m}}{\partial x_{n}}\left(p\right)\right)$$

בלתי תלויים ליניארית, וזה אם ורק אם מתקיים תנאי היעקוביאן עבור $f_i\left(1,x_1,\ldots,x_n\right)$ (המגדיר $Z\left(f_i\right)\cap\mathbb{P}_0^n\left(\mathbb{C}\right)$).

המישור של עקומים פרוייקטיבים מדרגה $d$ היא ההשלמה הפרוייקטיבית של כל הפולינומים ההומוגנים מדרגה $d$ ב $x,y,z$, וזה בעצם $\mathbb{P}^{\binom{d+2}{2}-1}$. לכן כעת נוכיח את המשפט הבא, שאומר בעצם ש"רוב העקומים הפרוייקטיבים הם לא סינגולריים".

**משפט 0.1** הקבוצה

$$\left\{f\in\mathbb{P}^{\binom{d+2}{2}-1}\mid Z\left(f\right)\text{ is non singular}\right\}$$

היא קבוצה פתוחה וצפופה ב $\mathbb{P}^{\binom{d+2}{2}}-1$ (כלומר, זה משלים של קבוצה אלגברית).

**הוכחה:** נתבונן בקבוצה הבאה:

$$X=\left\{(f,p)\in\mathbb{P}^{\binom{d+2}{2}-1}\times\mathbb{P}^2\mid f(p)=0,\ \nabla f\left(p\right)=0\right\}$$

נטיל את זה על $\mathbb{P}^{\binom{d+2}{2}-1}$ ונטען כי $X$ היא קבוצה אלגברית. זאת מכיוון שנגדיר

$$f=\left[f_{d,0,0}:f_{d-1,0,0}:\ldots:f_{0,0,d}\right]$$

המתאים לפולינום

$$f_{d,0,0}x^d+f_{d-1,0,0}x^{d-1}y+\cdots+d_{0,0,d}z^d$$

$$p=\left[p_x,p_y,p_z\right]$$

היחס $f\left(p\right)=0$ הוא בעצם היחס

$$f_{d,0,0}p_x^d+f_{d-1,0,0}p_x^{d-1}p_y+\cdots+d_{0,0,d}p_z^d=0$$

הוא פולינום הומוגני. באופן דומה,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(p\right)=0$$

■

**מסקנה 0.2** $\pi\left(X\right)$ היא קוסנטרוקטיבית.

**הוכחה:** מכיוון ש $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ הוא קומפקטי, $X$ קומפקטי, ולכן $\pi(X)$ סגור בטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{C}^n$. לכן ל $\pi(X)$ יש פנים $(\text{interior})$ ריק (בטופלוגיה הרגילה על $\mathbb{C}^n$) או ש $\pi(X) = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. נרצה להראות שהפנים ריק. לכן מספיק להוכיח שיש עקום לא סינגולרי יחיד. ניקח את העקום $Z\left(X^d + Y^d + Z^d\right) = Z(f)$ ונסמן פולינום זה ב $f$. יהי $p \in Z(f)$, אזי

$$\nabla f = \left(dX^{d-1}, dY^{d-1}, dZ^{d-1}\right)$$

ולכן

$$\nabla f(p) = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$$

וזוהי לא נקודה ב $\mathbb{P}^2$. ■