יריעות אלגבריות - הרצאה עשירית

דוגמא

נניח כי $X \subseteq \mathbb{C}^n$ היא יריעה אפינית ו

$$\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$$

ע"י הטלה על ה $n-1$ קוארדינטות האחרונות. נניח כי $\pi \; |_X$ היא סופית. תהי $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. אנו יודעים ש

$$\pi(X \cap Z(f))$$

היא קבוצה סגורה. נתאר זאת כעת באופן מפורש:

$$\pi \; |_X \text{ סופית } \Longleftarrow x_1 \; |_X \text{ מקיים פולינום מתוקן}$$

$$x_1^d + a_{d-1}(x_2, \ldots, x_n) \cdot X_1^{d-1} + \cdots + a_0(x_2, \ldots, x_n) = 0$$

על X. לכל $\overrightarrow{t} \in \mathbb{C}^{n-1}$ נתבונן במרחב הוקטורי

$$V_t = \mathbb{C}[g] / \left(y^d + a_{d-1}\left(\overrightarrow{t}\right) y^{d-1} + \cdots + a_0\left(\overrightarrow{t}\right) \right)$$

(אלו הן הפונקציות על (t) π^{-1}). V_t הוא מרחב וקטורי. ניתן לבחור (מקומית בטופולוגיית זריצקי) בסיס ל V_t המשתנה בצורה פולינומיאלית. הבחירה

$$\left\{1, y, y^2, \ldots, y^{d-1}\right\}$$

מגדירה את כל המרחבים הוקטורים האלו. לכל $t \in \mathbb{C}^{n-1}$ נתבונן בהעתקות הליניאריות:

$$T_t : V_t \longrightarrow V_t$$

ע"י

$$g + (\cdots) \longmapsto f \cdot g + (\cdots)$$

כעת:

1. זהו בסיס, T_t נתונה ע"י מטריצה עם מקדמים שהם פולינומים ב t.

2.

$$\pi\left(Z\left(f\right)\right)=\left\{t\in\mathbb{C}^{n-1}\mid T_t\text{ not invertible}\right\}$$

נשם לב ש

$$\pi\left(X\cap Z\left(f\right)\right)=\pi\left(X\right)\cap Z\left(t\mapsto\det T_t\right)$$

משפט 0.1 אם $X\subseteq\mathbb{C}^n$ ו $f\in\mathcal{O}_X\left(X\right)$ לא קבוע, אזי

$$\dim Z\left(f\right)=\dim\left(X\right)-1$$

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על n. $n=1$ ברור. אחרי מספר משחקים, ניתן להניח שההטלה

$$\pi:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^{n-1}$$

היא סופית על X. ראשית,

$$\dim X=\dim\left(\pi\left(X\right)\right)$$

$$\dim\left(X\cap Z\left(f\right)\right)=\dim\left(\pi\left(X\cap Z\left(f\right)\right)\right)=\dim\left(\pi\left(X\right)\cap Z\left(\text{one polynomial}\right)\right)\subseteq\mathbb{C}^{n-1}$$

מהאינדוקציה, נקבל ש

$$\dim\left(X\cap Z\left(f\right)\right)=\dim\left(\pi\left(X\right)\right)-1=\dim X-1.$$

■

הערה 0.2 כעת זה מאפשר לנו דרך נוספת להגדיר מימד, בתור אורך השרשרת המקסימלית של יריעות אי פריקות

$$X_k\subsetneq\cdots\subsetneq X_1\subsetneq X$$

אבל זה מתאים לאידיאלים ראשוניים בחוג הקוארדינטות. זה מאפשר לנו להגדיר מימד (מימד קרול) לכל החוגים, ולא רק לאלגברות נוצרות סופית.

משפט 0.3 יהי $f:X\to Y$ מורפיזם של יריעות ונניח כי X כי פריקה. אזי:

1. אם f על אז

$$\dim f^{-1}\left(y\right)\geq\dim X-\dim Y.$$

2. אם f דומיננטית (התמונה מכילה קבוצה פתוחה זריצקי) אזי יש קבוצה פתוחה $U\subset Y$ כך ש

$$\dim f^{-1}\left(y\right)=\dim X-\dim Y$$

לכל $y\in U$.

הוכחה:

1. בלי הגבלת הכלליות, $Y\subset\mathbb{C}^{n}$. נבחר העתקה סופית $Y\to\mathbb{C}^{\dim Y}$. בהנתן y, יש $\dim Y$ פולינומים $g_{1},\ldots,g_{d}$ כך ש

$$Z\left(f_{1},\ldots,f_{d}\right)$$

החא קבוצה סופית של נקודות המכילה את y.

$$Z\left(g_{1}\circ f,\ldots,g_{\dim Y}\circ f\right)\subseteq X$$

היא תת יריעה, וחלק מהרכיבים האי פריקים שלה הם הרכיבים האי פריקים של $f^{-1}\left(y\right)$. (כי הקבוצה הזו היא $f^{-1}\left(Z\left(g_{1},\ldots,g_{d}\right)\right)$). מהמשפט, נקבל ש

$$\dim\left(\text{each component of }Z\left(\cdots\right)\right)=\dim X-\dim Y.$$

$$\dim Z\left(g_{1}\circ f,\ldots,g_{\dim(Y)}\circ f,g_{\dim Y}\circ f\right)$$

ומכיוון ש $g_{\dim(Y)}\circ f$ מתאפס על $f^{-1}\left(Y\right)$ ולכן זה גדול/שווה מ

$$\dim Z\left(g_{1}\circ f,\ldots,g_{\dim Y-1}\circ f\right)-1$$

בלי הגבלת הכלליות X,Y אפיניים.

2. f דומוננטית $\Leftarrow\mathrm{Rat}\left(Y\right)\subset\mathrm{Rat}\left(X\right)$. יהי

$$c=\dim X-\dim Y.$$

אזי יש

$$t_{1},\ldots,t_{c}\in\mathcal{O}_{X}\left(X\right)$$

כך ש

$$\mathrm{Rat}\,(Y)\,(t_1,\ldots,t_c)\subset \mathrm{Rat}\,(X)$$

היא הרחבה אלגברית. נבחר יוצרים $f_1,\ldots,f_N$ של $\mathcal{O}_X\,(X)$. לכל i, f_i מקיים יחסים כלשהם מהצורה

$$(*)\;\; a_0\,(t_1,\ldots,t_c)+a_i^i\,(t_1,\ldots,t_c)\cdot f_i+\cdots+a_{d_i}^i\,\left(\overrightarrow{t}\right)\cdot f_i^{d_i}$$

כאשר a_j^i הם פולנומים עם מקדמים ב $\mathcal{O}_Y\,(Y)$. תהי U קבוצת כל ה $y\in U$ עבורם

$$a_{d_i}^i\,(y)\neq 0$$

אם $y\in U$, אזי $f_i\,|_{f^{-1}(y)}$ יוצרים את $\mathcal{O}_{f^{-1}(y)}\left(f^{-1}\,(y)\right)$. צמצום $(*)$ ל $f^{-1}\,(y)$ יביא לנו משוואה פולינומית עבור $f_i\,|_{f^{-1}(y)}$ עם מקדמים שהם שהם פולינומים ב $t_i\,|_{f^{-1}(y)}$. בפרט נקבל שכל איבר ש $\mathcal{O}_{f^{-1}(y)}f^{-1}\,(y)$ הוא אלגברי מעל $t_1\,|_{f^{-1}(y)},\ldots,t_c\,|_{f^{-1}(y)}$. לכן, ל

$$\mathrm{Rat}\left(f^{-1}\,(y)\right)$$

יש דרגת טרנצנדנטיות לכל היותר c. לכן $\dim f^{-1}\,(y)\leq c$. אבל מהחלק הקודם, נקבל ש $\dim f^{-1}\,(y)\geq c$, ולכן סיימנו.

■