יריעות אלגבריות - הרצאה שלישית

הגדרה 0.1 (פונקציה רגולרית). תהי $X \subseteq \mathbb{C}^n$ קבוצה אלגברית ותהי $f \in \mathbb{C}\left[x_1, \ldots, x_n\right]$ פונקצייה (נתייחס לפולינום כאל פונקציה). $f\ |_X$ נקראת פונקציה רגולרית על X. כלומר, פונקציה רגולרית על X היא צמצום של פולינום כלשהו.

הגדרה 0.2 (חוג הפונקציות הרגולריות). יהי $\mathcal{O}\left(X\right)$ חוג הפונקציות הרגולריות על X. ניתן להגדיר הומומורפיזם

$$\mathbb{C}\left[x_1, \ldots, x_n\right] \to \mathcal{O}\left(X\right)$$

מה הגרעין שלו? זהו האידיאל $I\left(X\right)$! לכן

$$\mathcal{O}\left(X\right) = {}^{\mathbb{C}\left[x_1, \ldots, x_n\right]}/_{I\left(X\right)}$$

ובפרט $\mathcal{O}\left(X\right)$ היא אלגברה נוצרת סופית מעל $\mathbb{C}$. הוכחנו ש $I\left(X\right)$ אידאל רדיקלי, ולכן $\mathcal{O}\left(X\right)$ חסרת נילפוטנטים. אלגברה כזו נקראת אלגברה מוצמצמת (reduced). $\mathcal{O}\left(X\right)$ נקראת גם חוג הקואורדינטות של X.

טענה 0.3 כל אלגברה מצומצמת נוצרת סופית מעל $\mathbb{C}$ היא חוג קואורדינטות של קבוצה אלגברית.

הוכחה: תהי A אלגברה מצומצמת נוצרת סופית מעל $\mathbb{C}$. נניח A נוצרת ע"י $a_1, \ldots, a_n$. יהי

$$\varphi : \mathbb{C}\left[x_1, \ldots, x_n\right] \to A$$

ע"י

$$\varphi\left(x_i\right) = a_i$$

ויהי

$$I = \ker \varphi$$

ויהי

$$Z\left(I\right) = X \subseteq \mathbb{C}^n$$

כעת I רדיקלי כי האלגברה מצומצמתת ולכן

$$\mathcal{O}\left(X\right)=\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]/\sqrt{I}=\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]/I=A.$$

$\blacksquare$

הגדרה 0.4 (מורפיזם). יהיו $X\subseteq\mathbb{C}^n$ ו $Y\subseteq\mathbb{C}^m$ קבוצות אלגבריות. מורפיזם בין X ל Y הוא קבוצה סדורה m של פונקציות רגולריות $f_1,\ldots,f_m\in\mathcal{O}\left(X\right)$ כך ש

$$\left(\forall x\in X\right)\left(f_1\left(x\right),\ldots,f_m\left(x\right)\right)\in Y$$

דוגמאות

1. $\left\{x^2=y^3\right\}\to\mathbb{C}$ ע"י $t\mapsto\left(t^3,t^2\right)$.
2. אם $F=\overline{\mathbb{F}_p}$ שדה ממאפיין p ו $X\subset F^n$ הוא קבוצת אפסים של פולינומים עם מקדמים ב $\mathbb{F}_p$, ההעתקה

$$X\longrightarrow X$$

הנתונה ע"י

$$\left(a_1,\ldots,a_n\right)\mapsto\left(a_1^p,\ldots,a_n^p\right)$$

אם $X=Z\left(f_j\right)$ ו $f_j\left(a_1,\ldots,a_n\right)=0$ גם $f_j\left(a_1^p,\ldots,a_n^p\right)=f_j\left(a_1,\ldots,a_n\right)^p=0$.

דיון - ה pullback

תהי $f:X\to Y$ העתקה רגולרית ותהי $\varphi\in\mathcal{O}\left(Y\right)$. נגדיר

$$f^*\varphi:=\varphi\circ f:X\to\mathbb{C}\quad\in\mathcal{O}\left(X\right)$$

כאשר $f^*\varphi$ נקראת ה pullback של φ. נקבל כך העתקה

$$f^*:\mathcal{O}\left(Y\right)\to\mathcal{O}\left(X\right)$$

המהווה הומומורפיזם של חוגים.

טענה 0.5 בהנתן קבוצות אלגריות X, Y והומומורפיזם של חוגים

$$\rho : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$$

אזי, יש העתקה רגולרית יחידה $f : X \to Y$ כך ש

$$f^* = \rho$$

הוכחה: נניח $X \subseteq \mathbb{C}^n$ נתון ע"י

$$X = Z\left(f_i\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right)$$

ו $Y \subseteq \mathbb{C}^m$ נתון ע"י

$$Y = Z\left(g_j\left(y_1, \ldots, y_m\right)\right)$$

נזכיר ש $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]/(f_i)$ ו $\mathcal{O}(Y) = \mathbb{C}[y_1,\ldots,y_m]/(g_j)$ ונתון ρ כך ש

$$\rho\left(y_1\right) = h_1 + \left(f_i\right), \ldots, \rho\left(y_m\right) = h_m + \left(f_i\right)$$

תהי r קבוצה סדורה $(h_1, \ldots, h_m)$. נטען:

1. r היא העתקה רגולרית $X \to Y$
2. $r^* = \rho$
3. r^* היא יחידה כזו.

כעת 1 נכון מכיוון שאם $X \in (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ אזי $g_j\left(h_1\left(\overrightarrow{\alpha}_1\right), \ldots, h_m\left(\overrightarrow{\alpha}\right)\right)$. מכיוון ש ρ הומומורפיזם,

$$\rho\left(g_j\left(h_1\left(\overrightarrow{\alpha}_1\right), \ldots, h_m\left(\overrightarrow{\alpha}\right)\right) + \left(g_j\right)\right) = g_j\left(\rho\left(y_1\right), \ldots \rho\left(y_m\right)\right) =$$

$$= g_j\left(g_j\left(h_1\left(\overrightarrow{x}\right), \ldots, h_m\left(\overrightarrow{x}\right)\right)\right) + \left(f_i\right)$$

ולכן

$$g_j\left(g_j\left(h_1\left(\overrightarrow{x}\right), \ldots, h_m\left(\overrightarrow{x}\right)\right)\right) \in \left(f_i\right)$$

ולכן

$$g_j\left(g_j\left(h_1\left(\overrightarrow{x}\right), \ldots, h_m\left(\overrightarrow{x}\right)\right)\right)$$

מתאפס על X. סעיפים 2 ו 3 נשארים כתרגיל, המשחקים דומים. ■

הגדרה 0.6 (איזומורפיזם). העתקה רגולרית $f:X\to Y$ בין שתי קבוצות אלגבריות תקרא איזומורפיזם אם יש העתקה רגולרית $g:Y\to X$ כך ש

$$f\circ g=Id_Y \;\; g\circ f=Id_X$$

הגדרה 0.7 (הקטגוריה של יריעות אפיניות). קיבלנו קטגוריה שהאובייקטים בה הן קבוצות אלגבריות והמורפיזמים הם העתקות רגולריות. קטגוריה זו נקראת **הקטגוריה של יריעות אפיניות.**

מסקנה 0.8 הקטגוריה של יריעות אפיניות עם מורפיזמים ביניהן שקולה לקטגוריה של אלגברות מצומצמות נוצרות סופית מעל $\mathbb{C}$ עם הומומורפיזמים ביניהן.

דוגמא

ההעתקה $\mathbb{C}\to\left(x^2=y^3\right)$ הנתונה ע"י $t\mapsto\left(t^3,t^2\right)$ היא רגולרית, חח"ע ועל, אך היא אינה איזומורפיזם. אם היה הופכי, הוא היה נתון ע"י צמצום של פולינום $F\left(x,y\right)$ כך ש

$$\left(x,y\right)\mapsto F\left(x,y\right)\mapsto\left(F\left(x,y\right)^3,F\left(x,y\right)^2\right)$$

שקול לזהות. כלומר,

$$F\left(x,y\right)^3+\left(x^2-y^3\right)=x+\left(x^2-y^3\right)$$

וכן

$$F\left(x,y\right)^2+\left(x^2-y^3\right)=y+\left(x^2-y^3\right)$$

אם $F\left(0,0\right)\neq0$ זה לא ייתכן. אבל אם $F\left(0,0\right)=0$ אזי F^2,F^3 לא יכולים להכיל גורמים ליניארים, בסתירה.

נימוק אפשרי נוסף, הפעם בשפה אלגברית: הטענה היא שאלגברות מעל $\mathbb{C}$ $\mathbb{C}\left[t\right]$ והאלגברה $\mathbb{C}[x,y]/\left\langle x^2-y^3\right\rangle$ איזומורפיות, אך זה לא נכון.

הבחנה

כל נקודה $x_0\in X$ עבור יריעה אפינית X מביאה לנו אידיאל מקסימלי של $\mathcal{O}\left(X\right)$ ע"י

$$\left\{f\in\mathcal{O}\left(X\right)\mid f\left(x_0\right)=0\right\}$$

וזהו אידיאל מקסימלי מכיוון שהוא הגרעין של

$$\mathcal{O}\left(X\right)\to\mathbb{C}$$

$$f\mapsto f\left(x_0\right)$$

וגם הכיוון השני נכון: כל אידיאל מקסימלי הוא מהצורה הזו.