עקומים אלגבריים - הרצאה תשיעית

יהי C עקום פרוייקטיבי לא סינגולרי, ω תבנית דיפרנציאלית על $\mathbb{C}$. ראינו בתרגול שפונקציה רציונלית היא $f : C \to \mathbb{P}^1$ ותהי $p_0 \in C$. ראינו את משפט אבל:

משפט 0.1 (אבל): הסכום

$$\sum_{x\in f^{-1}(t)} \int_{p_0}^{x} \omega$$

הוא בלתי תלוי ב f.

בפעם השעברה נשאר לנו חוב קטן בהוכחה: **הוכחה:**

$$\sum \int_{\gamma_i} \omega = \sum \int_0^1 \left\langle \omega_{\gamma_i(t)}, \dot{\gamma}_i\left(t\right)\right\rangle = \sum \int_0^1 \left\langle \omega_{\gamma_i(t)}, \left(\mathrm{df}|_{\gamma_i(t)}\right)^{-1}\left(\dot{\gamma}\left(t\right)\right)\right\rangle =$$

$$= \sum \int_0^1 \left\langle \left(\left(\mathrm{df}|_{\gamma_i(t)}\right)^{-1}\right)^{*} \omega_{\gamma_i(t)}, \dot{\gamma}\left(t\right)\right\rangle = \int_0^1 \left\langle \sum \left(\left(\mathrm{df}|_{\gamma_i(t)}\right)^{-1}\right)^{*} \omega_{\gamma_i(t)}, \dot{\gamma}\left(t\right)\right\rangle$$

כעת נגדיר

$$f_*\omega = \sum \left(\left(\mathrm{df}|_{\gamma_i(t)}\right)^{-1}\right)^{*} \omega_{\gamma_i(t)}$$

ונקבל סה"כ

$$\sum \int_{\gamma_i} \omega = \int_{\gamma} f_*\omega.$$

■

הגדרה 0.2 (דיוויזורים).

- דיוויזור על C הוא סכום פורמלי מהצורה

$$\sum_{p\in C} n_p\left[p\right]$$

כאשר $n_p\in\mathbb{Z}$ וכמעט כולם (פרט למספר סופי) הם אפסים. ניתן לחבר ולחסר דיווזורים (קוארדינטה קוארדינטה).

- מרחב הדיוויזורים הוא

$$\mathrm{Div}\left(C\right)=\bigoplus_{p\in C}\mathbb{Z}$$

- דיוויזור של פונקציה: תהי $f:C\to\mathbb{P}^1$ פונקציה רציונלית,

$$\mathrm{div}\left(f\right)=\sum_{p}\mathrm{ord}_p\left(f\right)\left[p\right]$$

כאשר הסדר של f בנקודה p הוא חיובי אם p היא אפס של f (ואז שווה לסדר האפס), שלילי אם p היא קוטב של f (ואז שווה לסדר הקוטב) ואפס אחרת.

- שני דיווזורים נקראים שקולים רציונלית אם

$$D_1-D_2=\mathrm{div}\left(f\right)$$

עבור פונקציה רציונלית f. כלומר, אם ההפרש שלהם הוא דיוויזור של פונקציה רציונלית.

- הדרגה של דיוויזור

$$D=\sum_{p\in C}n_p\cdot\left(p\right)$$

הנה

$$\deg D=\sum_{p\in C}n_p\in\mathbb{Z}$$

- $D\geq 0$ אם $n_p\geq 0$ לכל p.

הערה 0.3 אם f פונקציה רציונלית אזי $\deg\left(\mathrm{div}\left(f\right)\right)=0$.

הוכחה: נוכיח במקרה יותר כללי. נניח יש לנו $f:\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$ רציונלית, $f=\frac{a(x)}{b(x)}$. האפסים של f (על העקום) הם האפסים של a והקטבים של f הם האפסים של b. אבל יש לנו גם נקודה באינסוף. באינסוף נציב $x=\frac{1}{y}$ ואז נקבל שהאפסים והקטבים באינסוף הם הקטבים והאפסים של $f\left(\frac{1}{y}\right)$ בסביבת אפס, וזה בדיוק הפוך, ונראה שזה יוצא בדיוק המעלה פחות כמות האפסים, ולכן סה"כ אם יש m אפסים ומעלה n, הסדר באינסוף הוא $n-m$ ולכן הסכום יוצא זהה. ■

שאלה: נניח $D\geq 0$. מהם כל הדיווזורים החיוביים (≥ 0) השקולים ל D? נגדיר את המרחב הרלוונטי:

הגדרה 0.4 (מרחב רימן-רוך של D)

$$\mathrm{RR}\left(D\right)=\left\{f \text{ rational}\mid \mathrm{div}(f)+D\geq 0\right\}$$

הערה 0.5 נניח ש $\mathrm{div}(f)=\mathrm{div}(g)$, אזי

$$\mathrm{div}\left(\frac{f}{g}\right)=0$$

ולכן

$$\frac{f}{g}=\mathrm{const}$$

יש לנו העתקה על:

$$\mathrm{RR}\left(D\right)=\left\{f \text{ rational}\mid \mathrm{div}(f)+D\geq 0\right\}-\{0\}\twoheadrightarrow\left\{\text{divisor}\geq 0 \text{ equivalent to } D\ \right\}$$

ולכן נקבל ש

$$\left\{\geq 0 \text{ divisors equivalent to } D\right\}=\mathbb{P}\left(\mathrm{RR}\left(D\right)\right)$$

ולכן סה"כ בהנתן עקום C, אם $n_p\geq 0$ לכל p נקבל ש

$$\mathrm{RR}\left(\sum n_p\left[p\right]\right)=\left\{f \text{ rational}\mid \text{f has a pole of order a most } n_p \text{ at } p\right\}$$

וניתן להגדיר את $\mathrm{RR}\left(D\right)$ גם עבור D כלשהו (ולאו דווקא חיובי).

דוגמאות

1. אם V הוא שדה וקטורי (או תבנית דיפרנציאלית). רציונלי אזי ניתן להגדיר את הדיוויזור שלו.

2. ניקח $\frac{\partial}{\partial z}$ על $\mathbb{C}$. נרחיב אותו לשדה וקטורי רגולרי על $\mathbb{P}^1$ (הוא יהיה $\frac{\partial}{\partial z}$ על $\mathbb{P}^1-\{\infty\}$ ו $-w^2\frac{\partial}{\partial w}$ על $\mathbb{P}^1-\{0\}$). אזי

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)=2\left[\infty\right]$$

3. באופן דומה,

$$\operatorname{div}(dz)=-2\left[\infty\right]$$

4. אם V הוא שדה וקטורי רציונלי, אזי

$$V\left(t\right)=f\left(t\right)\frac{\partial}{\partial z}$$

עבור פונקציה רציונלית f כלשהי.

$$\operatorname{div}\left(V\right)=\operatorname{div}(f)+\operatorname{div}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

ולכן כל הדיווזורים שמגיעים משדות וקטוריים הם שקולים, ובפרט

$$\deg\left(\operatorname{div}(V)\right)=2$$

5. עבור עקום C כללי,

$$\deg\left(\operatorname{div}(\text{Vector field on } C)\right)=2-2\cdot\operatorname{genus}\left(C\right)$$

משפט 0.6 מרחבי רימן–רוך הם ממימד סופי, כלומר

$$\dim\left(\mathrm{RR}\left(D\right)\right)<\infty.$$

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות נניח כי $D \geq 0$. נניח

$$D = \sum n_p [p]$$

ונתבונן בהעתקה

$$\varphi : \ \mathrm{RR}(D) \to \prod_p {}^{z^{-n_p}\mathbb{C}[[z]]}/_{\mathbb{C}[[z]]}$$

ע,י

$$f \mapsto (\text{prinicipal parts at } p)$$

כלומר מרחב טורי הלורן מודולו... זהו מרחב ממימד $\deg D$. זוהי העתקה ליניארית. נניח כי $f \in \ker \varphi$. אזי f היא רגולרית, ולכן f קבועה. מכאן נקבל ש

$$\dim \mathrm{RR}(D) \leq \deg D + 1$$

■

כעת נראה חישוב מדוייק של מימד מרחב-רימן רוך, ולא רק חסם. קבלו את משפט רימן-רוך!

משפט 0.7 (רימן-רוך). יהי K דיוויזור של תבנית דיפרנציאלית. אזי

$$\dim \mathrm{RR}(D) - \dim(\mathrm{RR}(K - D)) = \deg(D) + 1 - \mathrm{genus}(C).$$

הערה 0.8 אם $\deg D < 0$ אזי $\mathrm{RR}(D) = 0$ ומכאן נובע שאם $\deg D > \deg K = 2g - 2$ אזי

$$\dim \mathrm{RR}(D) = \deg(D) + 1 - g$$

נתחיל מלהציג הוכחה <u>לא שלמה</u> למשפט רימן-רוך, אך היא כן "נכונה רעיונית" ונותנת אינטואיציה טובה: **הוכחה:** יהי $D \geq 0$, ונניח ש D הוא סכום של נקודות, כלומר

$$D = [p_1] + \cdots + [p_n].$$

נתבונן ב

$$\varphi : \mathrm{RR}(D) \to \mathbb{C}^n$$

ע"י

$$f \mapsto \left(\mathrm{res}_{p_i}\left(f\right)\right)$$

מאנליזה מרוכבת אנו יודעים שאם ω היא תבנית דיפרנציאלית רציונלית על C, אזי

$$\sum_p \mathrm{res}_p\left(\omega\right) = 0.$$

כעת לכל תבנית דיפרצנליאלית רגולרית, נקבל ש

$$\sum \mathrm{res}_p\left(f\right) \cdot w\left(p\right) = \sum_p \mathrm{res}_p\left(f \cdot \omega\right) = 0$$

ולכן נקבל יחס ליניארי. לכן נקבל ש

$$\dim \mathrm{RR}\left(D\right) \leq n + 1 - \dim \mathrm{RR}\left(K\right)$$

אבל מה קורה אם ω מתאפסת על כל ה p_i? צריך לספור את התבניות הדיפרצניאליות שרגולריות, ולכן נקבל

$$\dim \mathrm{RR}\left(D\right) \leq n + 1 - \dim \mathrm{RR}\left(K\right) + \dim \mathrm{RR}\left(K - D\right)$$

כאשר $\mathrm{RR}\left(K - D\right)$ הוא מרחב התבניות הדיפרנציאליות הרגולריות שמתאפסות על D. לכן נקבל

$$\dim \mathrm{RR}\left(D\right) - \dim \mathrm{RR}\left(K - D\right) \leq n + 1 - \dim \mathrm{RR}\left(K\right).$$

כעת נשאר להוכיח ש $\dim \mathrm{RR}\left(K\right) = g$. נציב בנוסחא הקודמת $D = K - D$ ונקבל

$$\dim \mathrm{RR}\left(K - D\right) - \dim \mathrm{RR}\left(D\right) \leq \deg\left(K - D\right) + 1 - g$$

אבל

$$\deg\left(K - D\right) = \deg K - \deg D = 2g - 2 - \deg D$$

ולכן נקבל ש

$$\dim\left(\mathrm{RR}\left(K - D\right)\right) - \dim \mathrm{RR}\left(D\right) = \left(-\deg D + g - 1\right)$$

■