עקומים אלגבריים - הרצאה שישית

למה 0.1 אם $X \xrightarrow{\pi} Y$ היא העתקת כיסוי בין עקומים פרוייקטיבים לא סינגולרים מדרגה d ($d = \left|\pi^{-1}(y)\right|$ לכל y) , אזי מאפיין אוילר

$$\chi(Y) = d \cdot \chi(X)$$

כאשר מאפיין אוילר הוא $2 \cdot \mathrm{genus} - 2$.

הגדרה 0.2 אם $Y \to X$ מסתעפת ב $x \in X$, זה נראה מקומית כמו $z \mapsto z^n$ כאשר $n-1$ נקרא דרגת ההסתעפות $\mathrm{ind}(\pi, x)$.

למה 0.3 אם $X \xrightarrow{\pi} Y$ היא כיסוי מסועף בין עקומים פרוייקטיבים לא סינגולריים מדרגה d, אזי

$$\chi(X) = d \cdot \chi(Y) - \sum_{x \in X} \mathrm{ind}(\pi, x)$$

כאשר

$$d = \left|\pi^{-1}(y)\right|$$

עבור כמעט כל הנקודות (פרט למספר סופי).

הוכחה: נבחר שילוש של Y כאשר כאשר הקודקודים שלו כוללים את התמונות של נקודות branced. נרים את השילוש הזה לשילוש על X. כמות הקודקודים בשילוש של X, T_X היא

$$d \cdot \left|\text{varices of } T_Y - \sum_{x \in X} \mathrm{ind}(\pi, x)\right|$$

וכמות הצלעות היא

$$d \cdot |\text{edges of } T_Y|$$

וכמות הפאות היא

$$d \cdot |\Delta \text{ of } T_Y|$$

■

דוגמא

נתבונן ב

$$C = x^d + y^d + z^d = 0$$

ב $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. זהו עקום פרוייקטיבי חלק. נתבונן בכיסוי

$$C \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^2$$

ע"י

$$[x : y : z] \mapsto [x : z]$$

π היא כיסוי מסועף מדרגה d. נרצה להבין מהן נקודות ההסתעפות. נפצל למקרה $z = 0$ (יש נקודה אחת כזו) ו $z \neq 0$. עבור $z = 0$ נקבל

$$\pi^{-1}([1 : 0]) = \left\{ [1 : y : 0] \mid y^d = -1 \right\}$$

ולכן יש d מקורות לכל y, ולכן אין סיעוף. עבור $z \neq 0$, ניתן לצמצם להעתקה

$$\left\{ x^d + y^d = -1 \right\} \to \mathbb{C}$$

$$(x, y) \mapsto x$$

כדי לבדוק נקודות סיעוף, נבדוק התאפסות של

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^d + y^d + 1\right) = d \cdot y^{d-1}$$

(כדי לבדוק סיעוף בודקים התאפסות של הנגזרת ביחס ל y) ולכן נקודות הסיעוף הן כאלו עבורן $y = 0$. יש d כאלו. מסימטטריה, לכולם יש אותה דרגת סיעוף. איך נחשב את דרגת הסיעוף? הם כולם מהצורה של

$$[\zeta : 0 : 1]$$

עבור

$$\zeta^d = -1$$

ולכן נקודות הסיעוף הן

$$\left\{ [\zeta : 0 : 1] \mid \zeta^d = -1 \right\}$$

בסביבת $(\zeta,0)$ ההטלה על ציר ה y היא דיפאומורפיזם מקומית. נכתוב מקומית

$$x=\zeta+\varphi\left(y\right)$$

ונקבל

$$\left(\zeta+\varphi\left(y\right)\right)^{d}+y^{d}=-1$$

נפתח ונקבל

$$-1+d\zeta^{d-1}\varphi\left(y\right)+\cdots+y^{d}=-1$$

ולכן נקבל פיתוח טיילור של $\varphi\left(y\right)$ ע"י

$$\varphi\left(y\right)=\frac{y^{d}}{d\zeta^{d-1}}+...$$

ולכן

$$\mathrm{ind}\left(\pi,\left(\zeta,0\right)\right)=d-1$$

(מה הקשר? השאלה היא גודל הקוטב בסביבת 0, למעשה "כמה מקורות יש שגם ממש קרובים ל 0"). כעת ניתן לחשב את מאפיין אוילר

$$2-2\cdot\mathrm{genus}\left(C\right)=\chi\left(C\right)=d\cdot\chi\left(\mathbb{S}^{2}\right)-d\left(d-1\right)=d\cdot2-d\cdot\left(d-1\right)$$

ולכן

$$\mathrm{genus}\left(C\right)=\binom{d-1}{2}$$

משפט 0.4 כל עקומים פרוייקטיבי לא סינגולרי מדרגה d הם דיפאומורפים, ובפרט לכולם יש גנוס $\binom{d-1}{2}$

הערה 0.5 זה אומר שכולם הומאומורפים, אבל זה ממש לא מורפיזם של עקומים אלגברים (ההעתקות לא פולינומיאליות).

מסקנה 0.6 לא כל מספר הוא גנוס של עקום מישורי! (כי לא כל מספר ניתן לכתוב מהצורה $\binom{d-1}{2}$). לדוגמא אין עקום פרוייקטיבי חלק מגנוס 4. בשיכון במרחב גדול יותר אפשר לקבל.

הגדרה 0.7 העתקה דיפרנציאלית בין יריעות $X \to Y$ נקראת סבמרסיה אם לכל נקודה $x \in X$ ההעתקה

$$df : T_x X \to T_{f(x)} Y$$

היא על.

למה 0.8 אם X קומפקטי ו Y קשיר ו $X \overset{\pi}{\to} Y$ היא סבמרסיה אזי כל הסיבים דיפאומורפים.

הוכחה: (קצת בנפנוף ידיים ובשלבים כלליים). נבחר שתי נקודות $y_1, y_2 \in X$ ונבחר עקום דיפרנציאבילי

$$\gamma : [0,1] \to Y_1,\ \gamma(0) = g,\ \gamma(1) = y_2$$

נרחב את השדה הוקטורי $\dot{\gamma}(t)$ לשדה וקטורי V על Y. כעת נמצא שדה וקטורי U על X כך ש

$$df\mid_x (U(x)) = V(f(x))$$

באופן מקומי ניתן לעשות זאת בצורה דיפרנציאבילית. כעת לכל נקודה $x \in X$, נפתור את המשוואה הדיפרנציאלית הנתונה ע"י $\frac{d}{dt} g = U(g(t))$ עם $g(0) = x$. X קומפקטי ולכן קיים פתרון לכל t, x. נסמן ב Σ את ההעתקה ששולחת x לפתרון בזמן $t = 1$ ונקבל העתקה בין $\pi^{-1}(y_1)$ ו $\pi^{-1}(y_2)$. Σ דיפרנציאבילית ולכן ההופכי של Σ נתון ע"י פתרון מד"ר,

$$\frac{d}{dt} g = -U(g(t))$$

ולכן Σ היא דפאומורפיזם. ∎

כעת אנו יכולים להוכיח את המשפט שציינו (שכל העקומים הפרויקטיבים וחלקים מדרגה d הם דיפאומורפים):

משפט 0.9 כל עקומים פרוייקטיבי לא סינגולרי מדרגה d הם דיפאומורפים, ובפרט לכולם יש גנוס $\binom{d-1}{2}$

הוכחה:

$$X = \left\{ (f,p) \in \mathbb{P}^{\binom{d+1}{2}-1} \times \mathbb{P}^2 \mid Z(f) \text{ nonsingular},\, p \in Z(f) \right\}$$

לאחר ההטלה π נקבל

$$Y = \left\{ f \in \mathbb{P}^{\binom{d+1}{2}-1} \mid Z(f) \text{nonsingular} \right\}$$

כעת צריך להראות ש X יריעה ו π סבמרסיה. מהלמה הסיבים של π הם עקומים לא סינגולרים מדרגה d וסיימנו. ∎

משפט 0.10 (הרנק). אם f פולינום הומוגני ממשי מדרגה d בשלושה משתנים ו $Z(f)$ לא סינגולרי, אזי

$$Z(f) \cap \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

מכיל לכל היותר $\frac{1}{2}\left(d^2-3d+4\right)$ עותקים של S^1 ב $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

הערה 0.11 אנו מדברים על עותקים של S^1 כי היא היריעה הקומפקטית וסגורה החד מימדית היחידה מעל הממשיים (כי פרוייקטיבית "קצוות מודבקים"). למעשה לקחנו איזושהי יריעה מרוכבת שאנו יודעים את הגנוס שלה, חתכנו עם מישור (המישור הממשי) ואנו שואלים כמה רכיבי קשירות יש לה.

הערה 0.12 עקום שמקבל את המקסימום, כלומר מכיל $\frac{1}{2}\left(d^2-3d+4\right)$ עותקים של S^1 נקרא עקום הרנק.

הוכחה: נסמן $C = Z(f) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. יהי σ הצמוד המרוכב

$$\sigma : C \to C$$

אזי

$$\chi(C^\sigma) = 0$$

כאשר C^σ זה נקודות השבת של C תחת σ. כעת

$$C = (C^\sigma) \cup (C/\sigma)$$

ולכן

$$\chi(C/\sigma) = \frac{1}{2}\chi(C)$$

(כי $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B)$) כאשר $C - \sigma$ היא יריעה דו מימדית עם N רכיבי שפה.

אם נדביק N דיסקים ל C/σ נקבל יריעה D

$$2 \geq \chi(D) = \chi(C/\sigma) + N = \frac{1}{2}\chi(C) + N = \frac{1}{2}\left(3d-d^2\right) + N$$

(את ה $-d^2+3d$ חישבנו קודם). ולכן

$$N \leq \frac{1}{2}\left(d^2-3d+4\right)$$

■