עקומים אלגבריים - הרצאה שלישית

בשיעור שעבר התחלנו עם נקודה $p \in C = Z\left(f\right)$ והטלנו את זה על ציר ה x (נסמן את ההטלה ב π). מכיוון שיש רק מספר סופי של נקודות סינגולריות, נוכל לקחת סביבה U של p כך ש:

- $\frac{\partial f}{\partial y}\mid_{C\cap U-\{p\}}\neq 0$, כלומר p נקודה סינגולרית יחידה ב $U\cap C$.
- $\pi^{-1}\left(\pi\left(p\right)\right)\cap U\cap C=\{p\}$

הבחנה

$$\pi : U\cap C-\{p\}\rightarrow\mathbb{C}-\{\pi\left(p\right)\}$$

היא העתקת כיסוי

מסקנה 0.1

$$\pi^{-1}\left(B\left(\pi\left(p\right)\right),\varepsilon\right)={}^{\amalg S^{1}\times[0,\varepsilon]}/_{(\theta,0)\sim p}$$

(כאשר $\amalg$ מסמן איחוד זר), אשכול של דיסקים מודבקים בראשית שלהם.

דוגמא

$C=Z\left(x^{2}-y^{3}\right)$ היא יריעה טופולוגית, אך לא יריעה דיפרנציאלית. ההבדל הוא הדרישה של חוסר סינגולריות. בנפנוף ידיים: תהי

$$\left\{(z,w)=|z|^{2}+|w|^{2}=\varepsilon\right\}=S_{\varepsilon}\subseteq\mathbb{C}^{2}\left(\cong\mathbb{R}^{4}\right)$$

ספירה תלת מימדית (ב $\mathbb{R}^{4}$) קטנה מסביב ל $(0,0)$. אזי

$$S_{\varepsilon}\cap C=\left\{(z,w)\mid|z|^{2}+|w|^{2}=\varepsilon,\ z^{2}=w^{3}\right\}=$$

$$=\left\{\left(r_{1}e^{i\theta},r_{2}e^{i\tau}\right)\mid2\theta=3\tau\mod2\pi\right\}=$$

$$= \left\{ \left(r_1 e^{3it}, r_2 e^{2it} \right) \mid t \in [0, 2\pi] \right\}$$

$S_\varepsilon \cap C$ הומאומורפי לטורוס ב S^3. בפרט, לכל הטלה ליניארית

$$\pi : \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$$

נקבל ש

$$\pi \mid_{S_\varepsilon \cap C}$$

לא חד חד ערכית. **אבל** אם $X \subseteq \mathbb{R}^n$ היא יריעה דיפרנציאלית עם מרחב משיק $T_p X$ בנקודה p, אזי ההטלה ל $T_p X$ הוא הומאומורפיזם בסביבת p.

מרחבים פרוייקטיבים

הגדרה 0.2 הישר הפרוייקטיבי במישור $\mathbb{P}^2 (\mathbb{R})$ הוא אוסף הישרים העוברים דרך הראשית ב $\mathbb{R}^3$.

מהתבוננות בישרים החותכים את המישור $z = 1$ נקבל עותק של $\mathbb{R}^2$ בתוך $\mathbb{P}^2 (\mathbb{R})$. המשלים הוא $\mathbb{P}^1 (\mathbb{R})$ (כל הישרים דרך הראשית ב $\mathbb{R}^2$). לכן נקבל ש

$$\mathbb{P}^2 (\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{P}^1 (\mathbb{R}) - \mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}^1 \cup \mathbb{R}^0$$

מה היה קורה אם היינו בוחרים במישור $y = 1$ במקום במישור $z = 1$? נקבל "אותה תמונה" בקואורדינטות שונות. נרצה לעבור מקואורדינטות $(x, y, 1)$ לקואורדינטות $(X, 1, Z)$. זאת נעשה ע"י

$$X = \frac{x}{y},\ Z = \frac{1}{y}$$

לכן נוכל לעבוד ב**קואורדינטות הומוגניות**, כלומר דברים מהצורה

$$[a : b : c]$$

המתאימות לישר $\mathbb{R}(a, b, c)$ תחת יחס השקילות

$$[a, b, c] = [za, zb, zc]$$

אנו נעבוד עם

$$\mathbb{P}^2 (\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{P}^1 (\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 \cup \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

כעת נניח ש $Z(f(x,y)) \subseteq \mathbb{C}^2 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ הוא עקום אפיני. מה הסגור של $Z(f)$ ב $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$? יהי

$$F(x,y,z)$$

ההומוגניזציה של f: כלומר, פולינום מדרגה שווה לשל f כך ש

$$F(x,y,1) = f(x,y)$$

ונחליף כל מונום מהצורה $x^n y^m$ ב f ב $x^n y^m z^{\deg f - n - m}$. $Z(F)$ היא חרוט

$$\left(p \in Z(f) \Rightarrow \alpha p \in Z(f) \;\; \alpha \in \mathbb{C}^\times\right)$$

$$Z(F) \cap \{z = 1\} = Z(f(x,y))$$

כעת

$$Z(F) \cap \{y = 1\}$$

נתון ע"י $f(x,y) = 0$ ו

$$f\left(\frac{X}{Z}, \frac{1}{Z}\right) = Z^{-\deg f} \cdot g(X,Z)$$

באופן שקול, אלו שתי קבוצות אפסים של

$$F(X,1,Z) = Z^{\deg f} F\left(\frac{X}{Z}, \frac{1}{Z}, 1\right) = Z^{\deg f} \cdot f\left(\frac{X}{Z}, \frac{1}{Z}\right) = g(x,Z)$$

תוצאה

הסגור הפרוייקטיבי של עקום אפיני זו כל בחירת קואורדינטות. הסגור הפרוייקטיבי של $Z(f)$ נחתך עם $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - \mathbb{C}^2$ במספר סופי של נקודות.