# יריעות אלגבריות - הרצאה שישית

**הגדרה 0.1** מורפיזם $f:X\to Y$ נקרא סגור אם לכל קבוצה סגורה זריצקי $Z\subset X$ התמונה $f\left(Z\right)$ היא סגורה זריצקי.

**משפט 0.2** כל העתקה מיריעה פרוייקטיבית היא סגורה.

לפני הוכחת המשפט נוכיח למה:

**למה 0.3** יהיו $g_1,\ldots,g_r$ ב $\mathbb{C}\left[x_0,\ldots,x_n\right]$, אזי התנאים הבאים שקולים:

1. ל $g_1,\ldots,g_r$ אין פתרונות ב $\mathbb{P}^n$
2. הפתרונות היחידים למערכת $g_i=0$ ב $\mathbb{C}^{n+1}$ זה $\left(0,\ldots,0\right)$
3. $x_0,\ldots,x_n\in\sqrt{\left(g_i\right)}$
4. קיים $N$ כך ש $x_0^N,\ldots,x_n^N\in\left(g_i\right)$
5. קיים $M$ כך שקבוצת הפולינומים ההומוגנים מדרגה $M$ מוכלת ב $\left(g_i\right)$
6. קיים $M$ כך שאוסף הפולינומים מהצורה $x_0^{a_0}\cdots x_n^{a_n}\cdot g$ עבור $a_0+\cdots+a_n=M-\deg g$

**הוכחה:** (הוכחת המשפט). תהי $f:X\to Y$ עבור $X\subseteq\mathbb{P}^n$ ו $Z\subset X$ סגורה. צריך להראות ש $f\left(Z\right)$ סגורה. מספיק להוכיח זאת עבור $Z=X$ כאשר $X\subseteq\mathbb{P}^n\times Y$ ו $f$ היא ההטלה, כי

$$X\cong\left\{ \left(x,y\right)\mid f\left(x\right)=y\right\} \subseteq\mathbb{P}^n\times Y$$

ואז $f$ היא ההטלה $\left\{ \left(x,y\right)\mid f\left(x\right)=y\right\} \overset{\pi}{\to}Y$ (כלומר, כל העתקה ניתן לייצג כהטלה). כמו כן ניתן להניח ש $Y=\mathbb{C}^m$ (כי לא דרשנו ש $f$ על, לכן $X\to Y\subseteq\mathbb{C}^m$). $X$ נתון כקבוצת האפסים של פולינומים $f_i\left(x,y\right)$ כאשר כל $f_i\left(x,y\right)$ הוא הומוגני מדרגה $n_i$ בקואורדינטת $x$.

$\pi\left(X\right)$ היא קבוצת ה $y_0\in\mathbb{C}^m$ כך של $f\left(x,y_0\right)$ יש שורש אפס משותף. מהלמה, זוהי קבוצת ה $y_0\in\mathbb{C}^m$ כך ש $x^I\cdot f_i\left(x,y_0\right)$ פורשת את המרחב הוקטורי של פולינומים הומוגנים מדרגה $M$. נכתוב את הפולינומים

$$x^I\cdot f_1\left(x,y_0\right)$$

בבסיס קבוע.

$$X^{I_1}\cdot f_1=(\cdots)$$

$$X^{I_2}\cdot f_1=(\cdots)$$

וקטור עם איברים פולינומים ב $y_0$. נתבונן בהעתקה

$$y\mapsto M(y)\in Mat_{A,B}(\mathbb{C})$$

התנאי

$$\pi(X)=\left\{y\mid x^I f_i \text{ not span}\right\}=$$

$$=\{y\mid \text{rows of } M(Y) \text{ not span}\}=\{y\mid \text{rank}M<B\}$$

וזהו תנאי פולינומיאלי. ∎

**מסקנה 0.4** אם $X$ פרוייקטיבי ו $Y$ אפיני, כל מורפיזם $Y\to X$ הוא קבוע מקומית (כלומר קבוע על כל רכיב קשירות).

**הוכחה:** בלי הגבלת הכלליות נניח $Y=\mathbb{C}^n$, ולמעשה מספיק להניח $Y=\mathbb{C}$ כי אם ההעתקה קבועה על כל קוארדינטה אז היא קבועה. $f(X)$ סגורה זריצקי, ולכן ניתן להרחיב את $f$ להעתקה

$$f:X\to\mathbb{C}\to\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

ההעתקה סגורה אבל לא הכל (כי הנקודה באינסוף לא מתקבלת). לכן בהכרח $f(X)$ סופית (כי הקבוצות הסגורות ב $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ הן הכל או הקבוצות הסופיות). אבל $f$ רציפה ולכן קבועה מקומית. ∎

**הוכחה:** (הוכחה נוספת). $f(X)$ הוא קונסטרוקטיבית ב $\mathbb{C}$ ולכן קומפקטית בטופולוגיה האוקלידית ולכן סופית. ∎

נניח כי $X\subseteq\mathbb{P}^n$ היא יריעה פרוייקטיבית. נניח כי $f_0,\ldots,f_r\in\mathbb{C}[x_0,\ldots,x_n]$ הם פולינומים הומוגנים מאותה דרגה ו

$$Z(f_0,\ldots,f_r)\cap X=\emptyset$$

$$X\to\mathbb{P}^r$$

אזי

$$[x]\mapsto[f_0(x):\ldots:f_r(x)]$$

מוגדרת היטב והיא דוגמא למורפיזם $X\to\mathbb{P}^r$. מסתבר שזוהי הצורה הכללית להעתקות למרחבים פרוייקטיבים.