יריעות אלגבריות - הרצאה 11

דוגמא

נתבונן בעקום

$$y^2 = x^2 (x+1)$$

מעל הממשיים. נרצה להראות שזה נראה כמו חיתוך שני ישרים בסביבת ראשית הצירים.
נגדיר

$$x \leftarrow tx$$

$$y \leftarrow ty$$

$$t \to 0$$

נקבל

$$t^2y^2 = t^2x^2 (tx+1)$$

נצמצם ונקבל

$$y^2 = x^2 (tx+1)$$

כעת נשאיף $t \to 0$ ונקבל שבאזור הראשית זה מתנהג כמו

$$y^2 = x^2$$

כלומר

$$(y-x)(x-y) = 0$$

ואכן קיבלנו התנהגות כזו. נכליל דוגמא זו.

בנייה

תהי $X \subseteq \mathbb{C}^n$ יריעה אפינית ו $O \in X$. נגדיר

$$Y \subseteq \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C} - \{0\})$$

$$Y = \left\{ (\overrightarrow{x}, t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^\times \mid t \cdot \overrightarrow{x} \in X \right\}$$

נתבונן בסגור של Y ו $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ ונגדיר

$$C_O X = Y \cap \mathbb{C}^n \times \{0\}$$

כאשר $C_O X$ היא העקום המשיק ל X ב O. נניח $X = Z(I)$. אזי

$$\mathcal{O}(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$$

ומהטריק של רבינוביץ

$$\mathcal{O}\left(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^\times\right) = \mathbb{C}\left[x_1, \ldots, x_n, y, \frac{1}{y}\right]$$

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^\times \supseteq Y = Z\left(\underbrace{\{f(tx) \mid f \in I\}}_{J}\right)$$

$$I\left(\overline{Y}\right) = \left\{ g \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, y] \mid g \in J \text{ as an element of } \mathbb{C}\left[x_1, \ldots, x_n, y, y^{-1}\right] \right\} =$$

$$= J \cap \mathbb{C}[x_!, \ldots, x_n, y]$$

$$\overline{Y} = Z\left(J \cap \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, y]\right)$$

אם $f \in J$, ניתן להכפיל זאת בחזקה מסויימת על Y, כך ש $y^N \cdot f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, y]$.
לכל $f \in I$, נגדיר $f(xt) \in I(Y)$ ולכן נקבל

$$t^k f(xt) \in I(Y)$$

וכעת

$$\left\{ t^k \cdot f(x \cdot t) \mid t^k \cdot f(x \cdot t) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, t] \right\}$$

$$f(0) = 0$$

$$f(x)=\sum_{i=k}^{n} f_i$$

עבור $f_k\neq 0$ ו f_i פולינום מדרגה i.

$$f(tk)=t^k f_k(x)+t^{k-1}f_{k+1}(x)+\cdots+t^N f_N(x)\in I\left(\overline{Y}\right)$$

$$t^{k-1}f_k(x)+t^{k-2}f_{k+1}(x)+\cdots+t^{N-1}f_N(x)\in I\left(\overline{Y}\right)$$

וכך הלאה. מסתבר שהמשוואה הלא טריוויאלית היחידה המתקבלת על C_0X מהמשוואות שלמעלה היא המשוואה

$$f_k(x)=0$$

איך עוברים מ X ל C_0X?

1. לכל $f\in I$ (מספיק ליוצרים) נכתוב

$$f=f_k(x)+\cdots+f_N(X)$$

כאשר f_i הומוגנים מדרגה i ו $f_k\neq 0$.

2. נוסיף את המשוואות $f_k(x)=0$ ל S.

3. $C_0X=Z(S)$

בחזרה לדוגמא מתחילת השיעור

הגדרה 0.1 נתבונן ב

$$y^2=x^3+x^2$$

ניקח את הגורם ההומוגני מהמעלה הנמוכה ביותר, נזרוק את השאר, ונקבל

$$y^2=x^2.$$

אם

$$f=f_k(x)+\cdots+f_N(x)$$

כמקודם, אזי f_k נקרא ה inital piece של f ומסומן ע"י f_{init}.

משפט 0.2 אם X אי פריקה,

$$\dim C_x X = \dim X.$$

הוכחה:

$$\dim \overline{Y} = \dim Y = \dim X + 1.$$

$C_x X$ הוא היפר-משטח ב $\overline{Y}$, ולכן

$$\dim C_x X = \dim \overline{Y} - 1 = \dim X.$$

■

הגדרה 0.3 נתבונן בקבוצה

$$\{\text{deg1 part of } f | f \in I(X)\}$$

מתקיים

$$\{\text{deg1 part of } f | f \in I(X)\} \subset \{f_{\text{init}} \mid f \in I(X)\}$$

(כי יש פולינומים עם גורם התחלתי מדרגה גבוהה מ 1), ולכן נקבל ש

$$Z(\{\text{deg1 part of } f | f \in I(X)\}) \supset Z(\{f_{\text{init}} \mid f \in I(X)\}) = C_0 X$$

נשם לב ש f_{init} הוא בדיוק ∇f, ונקבל

$$Z(\nabla f(0) \mid f \in I(X))$$

מרחב זה נקרא **המרחב המשיק ל** X **ב** 0 **ויסומן ב** $T_0 X$.

דוגמא

נכתוב $y^2 = x^3 + x^2$ $\quad X =$, $C_0 X = Z(x^2 = y^2)$,

$$T_0 X = Z(0) = \mathbb{C}^2$$

הגדרה 0.4 $x \in X$ תקרא לא סינגולרית אם $T_x X = C_x X$. זה קורה אם ורק אם

$$\dim T_x X = \dim X$$

מה הלאה?

1. T_xX ו C_xX איתם תלויים בשיכון (עד כדי איזומורפיזם) של X ב $\mathbb{C}^n$.
2. אם

$$f : X \to Y$$

ו $x \in X$ נקבל העתקה

$$C(f) : \ C_xX \to C_{f(x)}Y$$

והעתקה

$$T(f) : T_xX \to T_{f(x)}Y$$

(ה derivative של f ב x). העתקה זו מתקבלת עם כל התכונות שנצפה להן מנגזרת. (כלל לייבניץ וכו').

דוגמא

יהי $C \subseteq \mathbb{C}^n$ האיחוד של כל הצירים. אזי C אינה ניתנת לשיכון ב $\mathbb{C}^{n-1}$. אם

$$f : C \to \mathbb{C}^{n-1}$$

שיכון אזי

$$T_0f : T_0C \to T_{f(0)}\mathbb{C}^{n-1}$$

הוא שיכון אבל $T_0C = \mathbb{C}^n$ ו $T_{f(0)}\mathbb{C}^{n-1} = \mathbb{C}^{n-1}$ כי

$$I(C) = \langle \text{all monomials } x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \text{ where at list two } a_i \text{ are nonzero} \rangle$$