# 1-BOB. SIGNALLAR VA TIZIMLAR HAQIDA UMUMIY TUSHUNCHA

## 1.1. Umumiy tushunchalar

Axborot uzatish uchun mo‘ljallangan har qanday fizik jarayonning vaqt bo‘yicha o‘zgarishi signal deb ataladi. Signallarga misol sifatida inson nutqi (tovushi), Morze kodi, telefon simlaridagi kuchlanish, radio yoki televideniye uzatkichlarida hosil bo‘ladigan elektromagnit maydon, optik toladagi yorug‘likning o‘zgarishi kabilarni keltirish mumkin.

Shovqin ham xuddi signalga o‘xshab vaqt bo‘yicha o‘zgaruvchi jarayondir. Ammo u hech qanday axborotni o‘z ichiga olmaydi. Shuning uchun u signalga zararli ta’sir qiluvchi jarayondir.

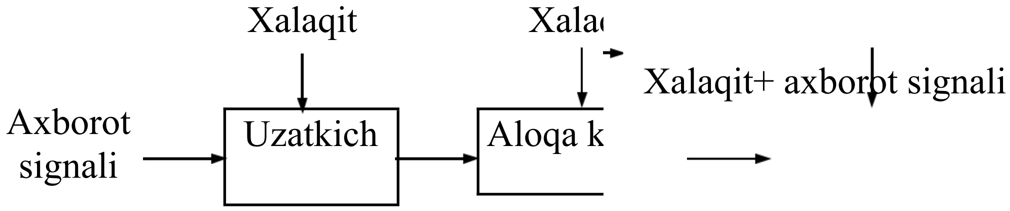
Turli tizimlar signallar yordamida boshqariladi. Agar tizimning kirishiga bitta yoki bir nechta signal berilsa, ushbu tizim chiqishida bitta yoki bir nechta signallar hosil bo‘lishi mumkin.

1.1-rasmda bitta kirish va bitta chiqishga ega tizimning blok sxemasi keltirilgan.


1.1-rasm. *Bitta kirish va bitta chiqishli tizimning blok sxemasi*

Aloqa tizimida uzatkich signalni shakllantiradi va uzatadi, qabul qilgich esa ushbu signalni qabul qilib oladi. Uzatuvchi va qabul qiluvchi qurilmalar oralig‘i aloqa kanali deb yuritiladi. Uzatkich, qabul qilgich va aloqa kanaliga har doim shovqin ta’sir etadi (1.2-rasm). Uzatkich, aloqa kanali va qabul qilgich qurilmalari tizimning tashkil etuvchilari yoki tizim osti qismlari deb yuritiladi. Tizimni tadqiq qiluvchi, ya’ni fizik hodisalar (harorat, bosim, tezlik va b.) ni o‘lchash qurilmalari ham tizimlar qatoriga kiradi va ushbu qiymatlarni kuchlanish yoki tok, signalga aylantiradi. Tijorat binolarining nazorat tizimlari (1.3-rasm), sanoat korxonalarining nazorat tizimlari (1.4-rasm), zamonaviy qishloq xo‘jaligi mashinalari (1.5-rasm), samolyotlardagi aviasion radioelektronika qurilmalari, avtomobillardagi o‘t oldirish va yoqilg‘i

nasos vositalari va boshqalar signallar asosida ishlovchi tizimlarga misol bo‘la oladi.




1.2-rasm. *Aloqa tizimi*

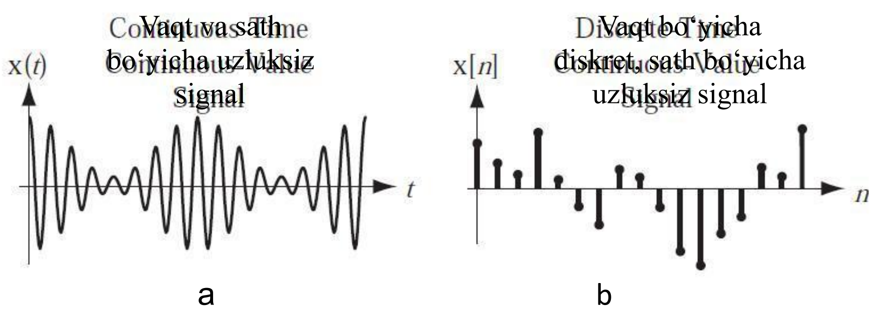
1.3-rasm. *Ofis binolari*

1.4-rasm. *Sanoat korxonasining dispetcherlik punkti*

1.5-rasm. *Qishloq xo’jaligi mashinasi*

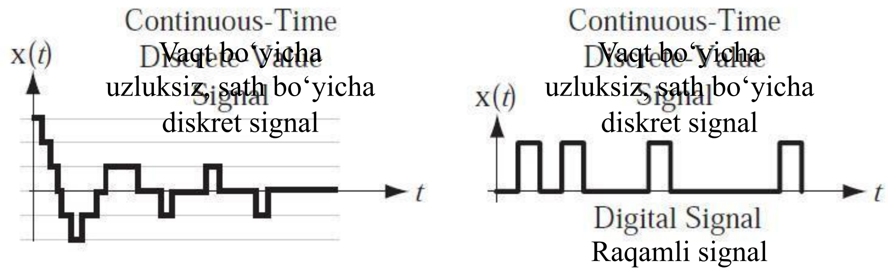
## 1.2. Signallarning turlari

Signallar bir necha ko‘rsatkichlari asosida bir necha turlarga bo‘linadi: uzluksiz (analog); vaqt bo‘yicha diskret; sath bo‘yicha diskret; ham vaqt ham sath bo‘yicha disrket; tasodifiy va determinant. Vaqt va sath bo‘yicha uzluksiz signallar vaqt bo‘yicha chegaralangan yoki chegaralanmagan bo‘lib, sathi ma’lum bir oraliqdagi qiymatlarni qabul qiladi (1.6a-rasm). Vaqt bo‘yicha diskret signal uzluksiz signaldan diskret vaqt momentlarida oniy qiymatlar olish orqali shakllantiriladi. Uzluksiz signaldan olingan oniy qiymatlar to‘plami diskret signal deb ataladi. 1.6b-rasmda keltirilgan signal vaqt bo‘yicha diskret va sath bo‘yicha ma’lum bir oraliqdagi har qanday qiymatlarga teng bo‘lishi mumkin.



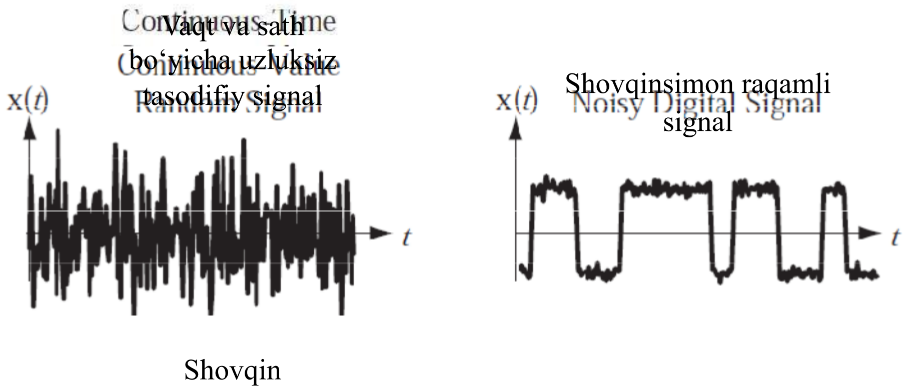

1.6-rasm. *Uzluksiz va vaqt bo’yicha diskret signal*

1.7-rasmda keltirilgan uchinchi tur signallar sath bo‘yicha diskretlangan – kvantlangan bo‘lib, u ma’lum bir uzluksiz vaqt da ma’lum bir diskret qiymatga ega bo‘ladi. Kvantlash natijasida signal sathining oniy qiymati unga eng yaqin bo‘lgan, ruxsat etilgan sath qiymati bilan almashtiriladi. Natijada, zinasimon signal hosil bo‘ladi. Kvantlash oralig‘i (odimi) bir xil yoki turlicha bo‘lishi mumkin. Ikki eng yaqin ruxsat etilgan oraliq kvantlash oralig‘i (odimi) deb ataladi. Kvantlash oralig‘i bir xil yoki turlicha qilib tanlanishi mumkin.




1.7-rasm. *Vaqt bo’yicha uzluksiz sath bo’yicha diskret signal*

Signallar determinant (o‘zgarish qonuniyati avvaldan ma’lum) va tasodifiy (o‘zgarish qonuniyati avvaldan ma’lum emas) bo‘lgan turlarga bo‘linadi. Har qanday vaqtda qiymatlari avvaldan birga teng ehtimollik bilan ma’lum bo‘lgan signallar determinant signallar deb ataladi. Har qanday vaqtda qiymatlarini avvaldan birga teng ehtimollik bilan aniqlab bo‘lmaydigan signallar – tasodifiy signallar deb ataladi. Tasodifiy signalni aniq bashorat qilish (oldindan aytish) hamda biror bir matematik funksiya orqali aniq ifodalash mumkin emas. Determinant signalni esa matematik funksiya bilan aniq ifodalash mumkin. Tasodifiy signallarni umumiy holda shovqin deb qarash mumkin (1.8-rasm).

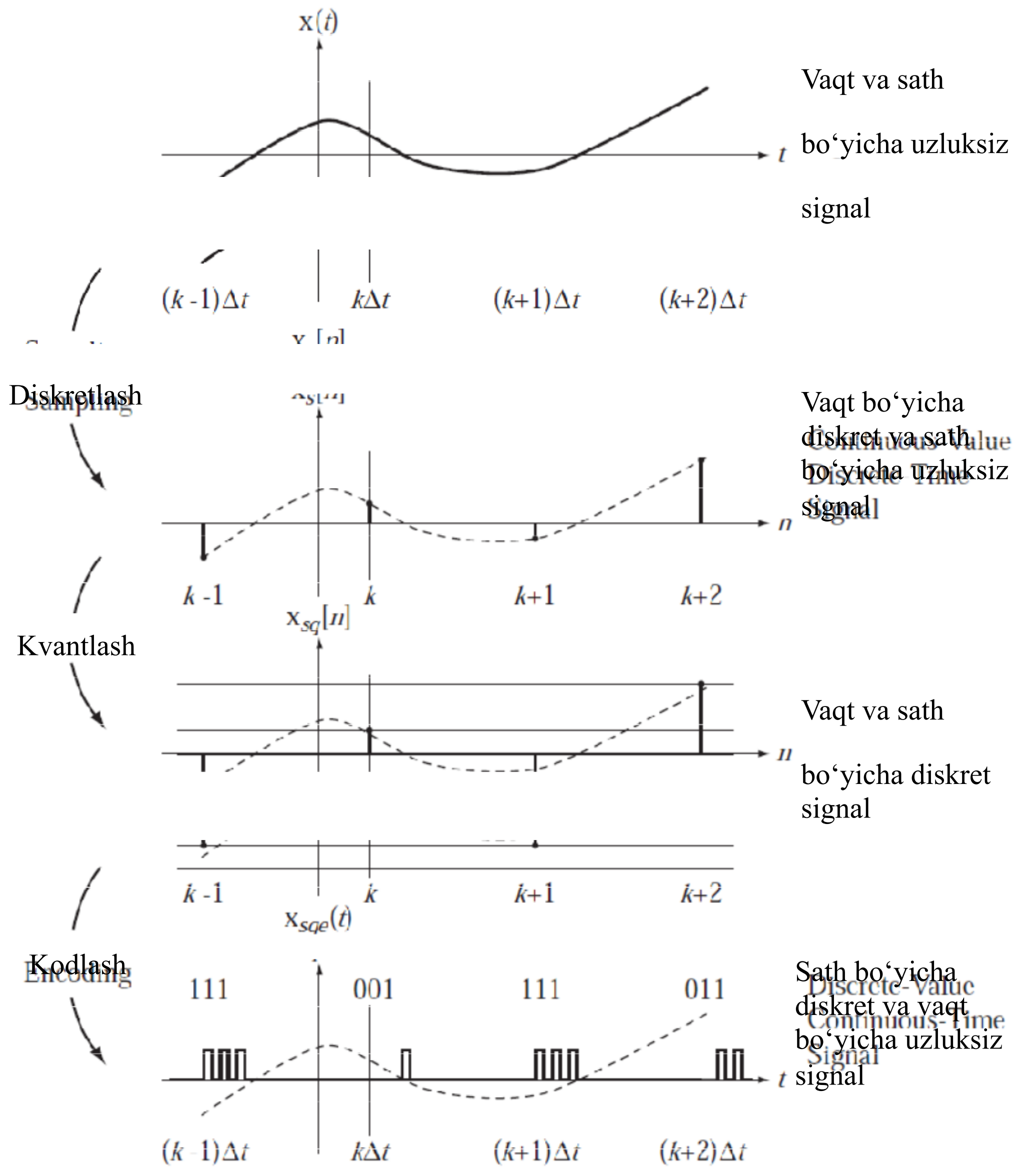



1.8-rasm. *Shovqin va shovqin ta’siridagi raqamli signal*

Axborot tashuvchi hamma signallar tasodifiy signallar hisoblanadi. O‘zgarish qonuni avvaldan ma’lum bo‘lgan signallar hech

qanday axborot tashish (eltish) imkoniyatiga ega emas. U go‘yoki hech bir yozuvi yoki belgisi bo‘lmagan oq qog‘oz kabidir. Determinant signallarni aloqa kanali orqali uzatmasdan qabullash tomonida shakllantirish mumkin.

Analog signallarni raqamli signallarga almashtirish ko‘p hollarda bir qator afzalliklarga ega bo‘lib, bular qatoriga ularni uzatish, xotirada saqlash, ishlov berish kabi jarayonlar kiradi. Analog signallarni raqamli signallarga almashtirish uni vaqt bo‘yicha diskretlash va sath bo‘yicha kvantlash – kvantlangan sath qiymatlarini unga eng yaqin bo‘lgan sath qiymati bilan almashtirish va sath qiymatini belgilovchi raqamni elementar signallar orqali kodlash natijasida amalga oshiriladi. Analog signalni raqamli signalga almashtirish – analog raqam almashtirish (ARA) qurilmasida amalga oshiriladi (1.9-rasm).

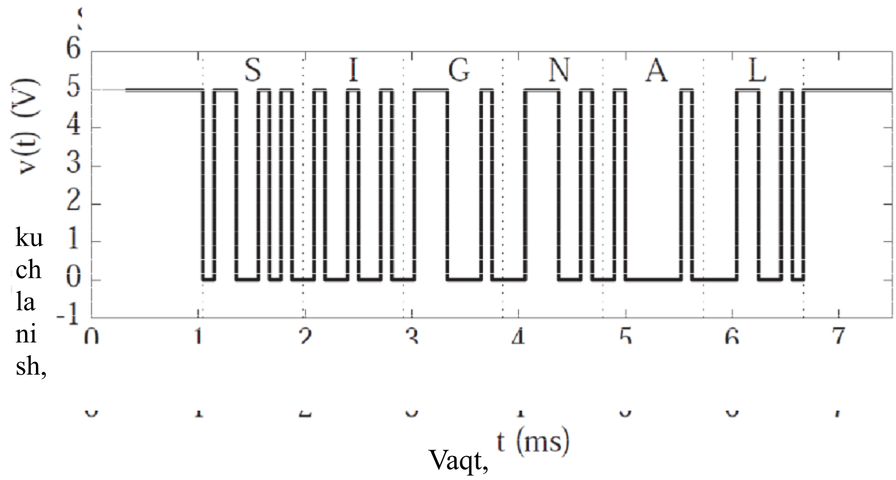



1.9-rasm. *Analog signalni raqamli signalga almashtirish*

Ikkilik raqamli signallardan foydalanib, xabarlarni uzatish imkoniyati mavjud, bunda xabarlarni kodlash jarayonida standart axborot almashish amerika kodi (American Standard Code for Information Interchange, ASCII) dan foydalaniladi. Alifbo harflari, 0 dan 9 gacha bo‘lgan raqamlar, tinish (punktuasiya) belgilari va bir qancha simvollar umumiy holda 128 tani tashkil etadi. Ushbu simvollarni kodlash uchun 7 ta bitdan iborat ikkilik koddan foydalaniladi. Bundan tashqari bitta boshlang‘ich bit hamda yana bitta (yoki ikkita) oxirgi bit tizimlarni sinxronizasiyalash uchun ishlatiladi.

Ma’lumki, ikkita raqamli qurilmani bevosita sim orqali ulaganda, “1” bitni uzatish nisbatan yuqori kuchlanish (2V dan 5 V gacha) va “0” bitni uzatish nisbatan past kuchlanish (0 V atrofida) dan foydalangan holda amalga oshiriladi. Bitta boshlang‘ich va bitta oxirgi bitdan foydalanib “SIGNAL” xabarini kodlab asinxron uzatish jarayoni, ya’ni kuchlanishning vaqtga bog‘liqligi 1.10-rasmda keltirilgan.

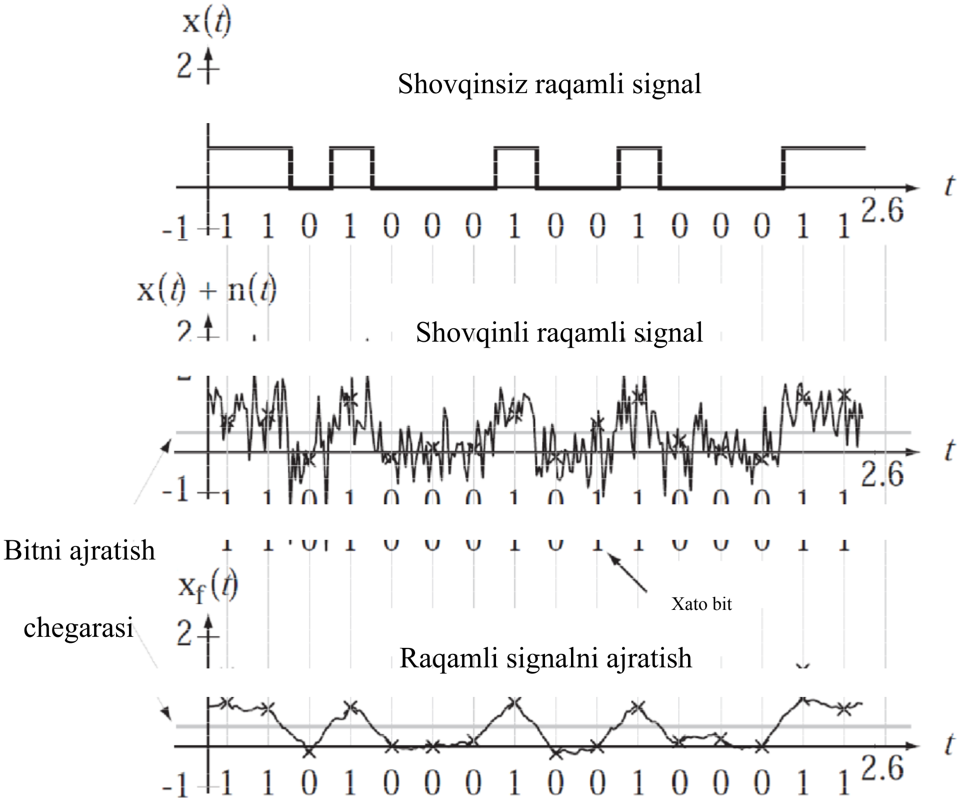
Signallarni tahlil qilishda raqamli tizimlarning keng tarqalganligi sababli raqamli signallar juda muhim ahamiyat kasb etadi. Uzluksiz signallarga qaraganda raqamli signallarning afzalliklaridan biri bu uning shovqinga nisbatan barqarorligidir, ya’ni xalaqitbardoshligidir.




1.10-rasm. ASCII *kodi yordamida kodlangan “SIGNAL” so‘zining vaqt diagrammasi*

Ikkilik signallarni qabul qilishda bitlarni qayta tiklash murakkab bo‘lmaydi, qachonki shovqin sathi juda katta darajada bo‘lmasa. Bitlar oqimidagi bitning qiymatini aniqlash ko‘pincha quyidagicha amalga oshiriladi, qabul qilingan bitning sathi shovqin sathi bo‘sag’asi (qiymati) bilan solishtiriladi. Agar ushbu qiymat shovqin bo‘sag‘asidan katta bo‘lsa “1” bit qabul qilingan va agar ushbu qiymat shovqin bo‘sag‘asidan kichik bo‘lsa “0” bit qabul qilingan deb xulosa chiqariladi. Shovqin ta’siridagi raqamli signalni qabul qilish jarayonida

x belgi bilan belgilangan bit xato qabul qilinganligi 1.11-rasmda keltirilgan.

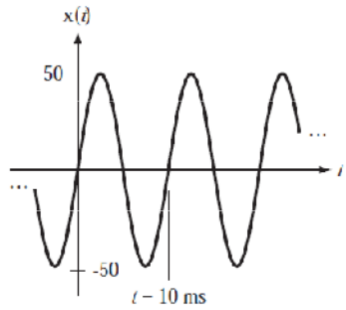



1.11-rasm. *Raqamli signallarni qabul qilishda xatolik koeffisiyentini kamaytirish uchun filtrdan foydalanish*

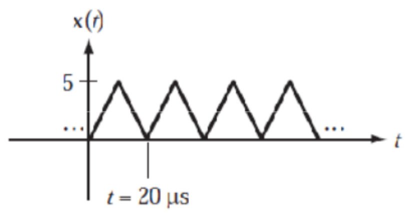
Qabul qilingan signalga filtr yordamida ishlov berilganda, ushbu xato qabul qilingan bit asliga qaytariladi. Filtrlangan raqamli signal shovqinsiz raqamli signalga qaraganda shakli boshqacha bo‘lib, ushbu signallarni xato qabul qilish ehtimolligi juda kichik hisoblanadi. Bu esa raqamli signallarning analog signallarga nisbatan afzalliklaridan biri hisoblanadi.

Dastlab uzluksiz signallarni ko‘rib chiqamiz. Bir qancha uzluksiz signallarni vaqtning uzluksiz funksiyasi sifatida ifodalash mumkin. Signal ( ) uzluksiz vaqt bo‘yicha quyidagi matematik ifoda bilan ifodalanishi mumkin: ( ) = 50 sin(200 ). Bu har qanday vaqt momentida signalning aniq ifodalanishi hisoblanadi. Bundan tashqari signalni grafik shaklda ham tasvirlash mumkin (1.12-rasm). Ko‘pgina uzluksiz signallarni ifodalash bir qancha murakkab funksiyalar, ifodalardan foydalanishni talab etadi, masalan 1.13-rasmdagi signal.

1.13-rasmda tasvirlangan signal turli qurilmalar, o‘lchov asboblari va aloqa tizimlarida keng ishlatiladi. Ushbu signalni matematik funksiya sifatida ancha sodda tasvirlash mumkin, bu esa ushbu signalni tahlil qilishda va uni boshqarishda ancha yengillik tug‘diradi. Matematik funksiya orqali ifodalash mumkin bo‘lgan signalni vaqtdan tashqari boshqa turdagi o‘lchamlar orqali ham ifodalash mumkin, ya’ni uzluksiz Furye almashtirishi yordamida. Ushbu holatda almashtirish deganda signalni vaqt bo’yicha emas balki chastota sohasidagi ko‘rinishga almashtirish nazarda tutiladi. Bu signallarni tahlil qilishda muhim hisoblanadi, chunki signalning ma’lum bir parametrlarini yanada aniqroq kuzatish va vaqt intervalidagi signalga nisbatan sodda boshqarish imkoniyatini yaratadi. Chastota sohasidagi tahlilsiz turli tizimlarni tahlil qilish juda murakkab hisoblanadi.




1.12-rasm. *Sodda uzluksiz signal*

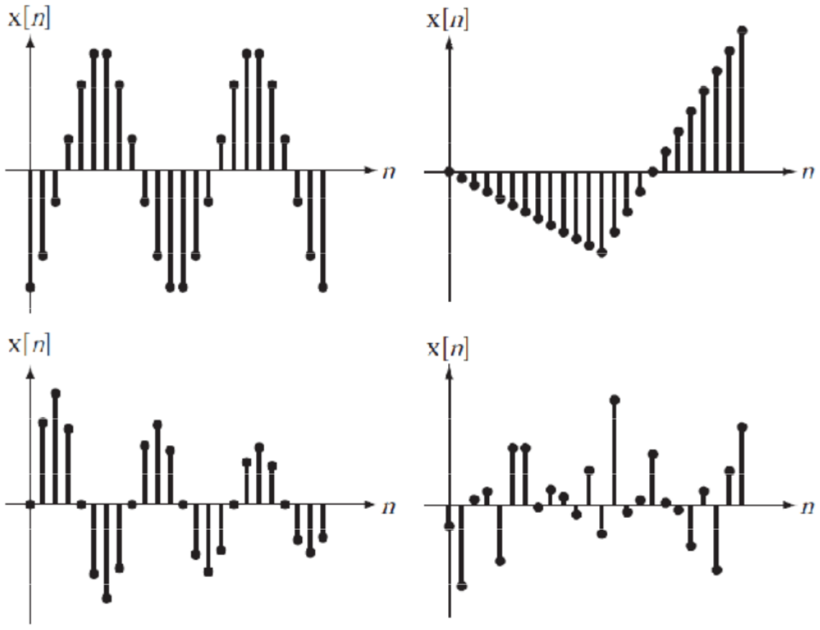



1.13-rasm. *Nisbatan murakkab uzluksiz signal*

Diskret signallari vaqtning faqatgina diskret qiymatlarida aniqlanadi. 1.14-rasmda bir necha diskret signallarga namunalar keltirilgan.

Biz yuqorida ko‘rib chiqqan barcha signallar vaqt funksiyasi bo‘lgan signallardir. Signallarning yana bir muhim sinfi signalni vaqt bo‘yicha emas, balki uning o‘rniga fazo bo‘yicha funksiyasi, ya’ni tasvir hisoblanadi. Ko‘pgina axborot va signallar nazariyasida axborot va signallar ularni uzatish va turli tizimlarda ishlov berish nuqtai nazaridan, fizik jarayonning vaqt bo‘yicha o‘zgarishi hisoblanuvchi signallarga asoslangan. Vaqt bo‘yicha o‘zgaruvchi signallar yagona mustaqil o‘zgaruvchili vaqt funksiyasi hisoblanuvchi fizik jarayonning o‘zgarishi orqali ifodalanadi. Fazoviy signallar yoki tasvir signali esa

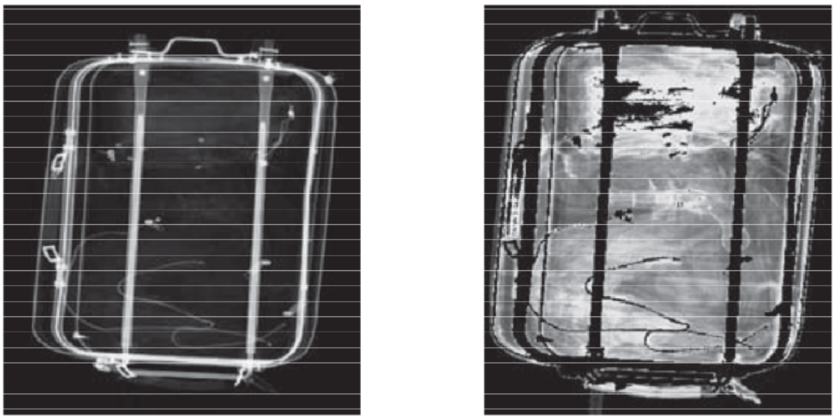
fizik jarayonning ikkita mustaqil, ortogonal fazoviy o‘zgaruvchili funksiya: an’anaviy va orqali ifodalanadi.




1.14-rasm. *Diskret signallarga namunalar*

Tarixdan ma’lumki, tasvirlarga ishlov berish usullarining amaliy qo‘llanilishi signallarga ishlov berish usullarining qo‘llanilishidan orqada qolib ketdi. Buning sababi shuki, tasvirdan axborotni yig‘ish uchun ishlov berish talab etiladigan axborot miqdori vaqt bo‘yicha signaldan axborotni olish uchun talab etiladigan axborot miqdoridan sezilarli ko‘pligi hisoblanadi. Ammo hozirda tasvirlarga ishlov berish juda ko‘p hollarda amaliy usul orqali amalga oshirilmoqda. Ko‘pchilik hollarda tasvirlarga ishlov berish asosan kompyuterlarda amalga oshiriladi. Tasvirlarga ishlov berishning bir qancha sodda jarayonlari bevosita optik tizimlarda amalga oshirilishi mumkin, bunda albatta ishlov berish juda yuqori tezlikda (yorug‘lik tezligi) amalga oshiriladi. Tasvirlarga optik ishlov berish kompyuterlarda ishlov berishga nisbatan egiluvchanligi bilan chegaralanadi.

1.15-rasmda ikkita tasvir keltirilgan. Chapdagi rasmda aeroportning nazorat punktidagi sumkaning ishlov berilmagan rentgen tasviri. O‘ngdagi rasmda esa tasvirni filtrlash jarayoni orqali ishlov berilgan aynan o‘sha tasvir, bunda aslaha mavjudligini ko‘rish mumkin.



1.15-rasm. *Tasvirlarga ishlov berishga oid*

## 1.3. Tizimlarga misollar

Signallar va tizimlarning bir qancha turlari mavjud. Ba'zi tizimlarni ko'rib chiqamiz. Tizimlarni ma'lum bir sharoitdagi sifat nuqtai nazaridan ko'rib chiqamiz. Ushbu tizimlarga qo'llanmamizning keyingi boblarida yanada kengroq to'xtalamiz.

MEXANIK TIZIM

Tasavvur qilaylik, inson ko'prik ustidan elastik arqon (tros) ga bog'langan holatda sakradi. U suvga yetib boradimi? Javob bir nechta faktorlarga bog'liq:

1. Insonning bo'yi va og'irligi.

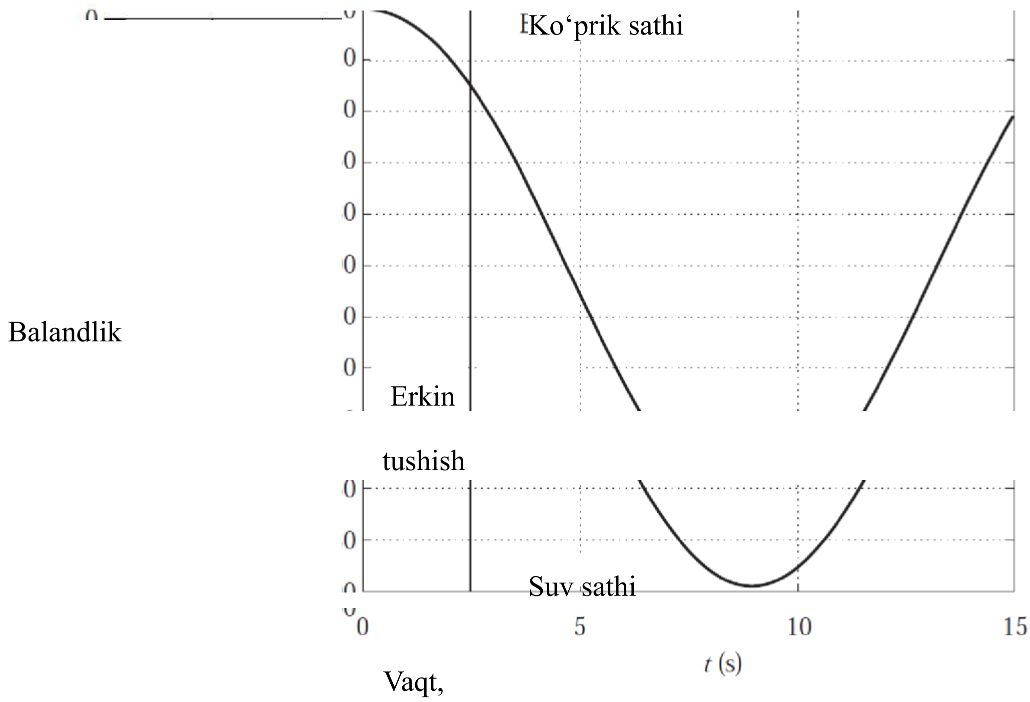
2. Ko'prikning suv sathidan balandligi.

3. Prujina turidagi simning uzunligi va elastikligi (egiluvchanligi). Inson ko'prikdan sakragan, ammo hali prujina shaklidagi

arqonning cho'zilmagan holati (tinch holati)gacha yetib bormagan paytda u erkin tushish holatida hisoblanadi. Keyin tizimning harakatlanish kuchi o'zgaradi, chunki endi prujina turidagi arqonning qarshiligi yuzaga keladi va inson erkin tushish holatida bo'lmaydi. Ushbu harakatni differensial tenglama sifatida yozishimiz va uni yechib, insonning qanchalik pastga tushishini aniqlashimiz mumkin bo'ladi. Harakatning differensial tenglamasi ushbu mexanik tizimning matematik modeli hisoblanadi. Agar insonning vazni 80 kg, bo'yi 1,8 m va ko'prikning suvdan balandligi 200 m, prujina turidagi arqonning uzunligi 30 m (erkin holatdagi) va cho'zilish konstantasi 11 / , ga teng bo‘lsa hamda prujina turidagi arqon $= 2{,}47$ s da to‘liq cho‘zilishga erishsa, u holda harakat tenglamasi quyidagicha ifodalanadi:

$$(\,) = -16{,}85\sin(0{,}3708\,) - 95{,}25\cos(0{,}3708\,) + 101{,}3; \qquad > 2{,}47 \qquad (1.1)$$

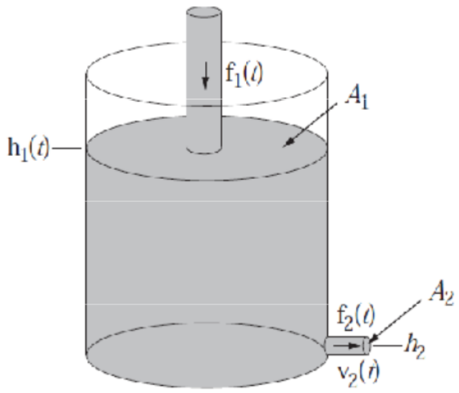
1.16-rasmda ushbu harakatning birinchi 15 sekundidaga holati aks etgan bo‘lib, undan ko‘rinadiki insonning grafiki suvga yetishiga biroz qolganligini kuzatish mumkin.




1.16-rasm. *Insonning vaqtga bog‘liq vertikal holati (ko‘prik sathi nolga teng deb olingan)*

## GIDRAVLIK TIZIM

Gidravlik tizimlar ham xuddi mexanik tizimlar kabi differensial tenglama orqali modellashtirilishi mumkin. Suv solingan silindr shaklidagi idishga idishning usti qismidan suv berilishi uchun teshik hamda patski qismidan suv chiqib ketishi uchun teshik ochilgan (1.17-rasm).



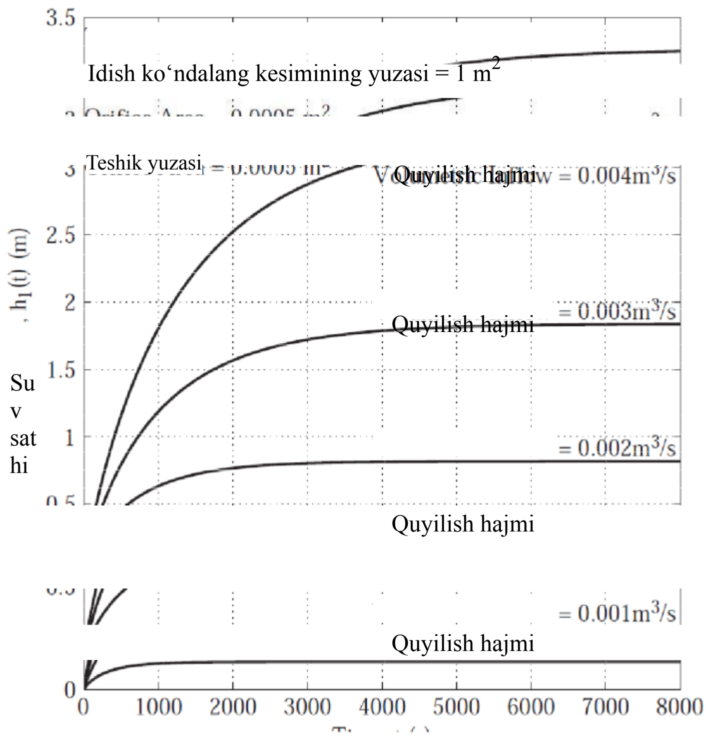

1.17-rasm. *Usti va ostki qismidan teshik ochilgan idish*

Pastki teshikdan chiquvchi suv oqimi idishdagi suvning balandligiga bog‘liq. Idishdagi suv sathining o‘zgarishi esa kirish va chiqish oqimiga bog‘liq. Suv hajmining o‘zgarish darajasi kirish va chiqish oqimlarining hajmiga bog‘liq. Ushbu faktorlarni bitta differensial tenglama orqali ifodalash mumkin.

$$h() + 2\,[h() - h] = () \qquad (1.2)$$

—

1.18-rasmda dastlab idish bo‘sh bo‘lgan holatda idishga to‘rtta turli darajadagi suv quyilishi natijasida idishdagi suv sathining vaqtga bog‘liqlik grafigi keltirilgan.



Vaqt, t (s)

1.18-rasm. *Idish dastlab bo'sh bo'lgan, unga to'rtta turli darajadagi oqimlar ta'siri natijasida suv sathining vaqtga bog'liqligi*

Suvning quyilishi va suv sathining ko‘tarilishi uning chiqib ketishini kuchaytiradi (ko‘paytiradi). Suvning chiqib ketish darajasi uning quyilishiga tenglashadi. Shundan keyingina idishdagi suvning sathi doimiy bo‘lib qoladi. E’tibor bersak, suvning quyilishi ikki barobar ko‘paysa, suvning sathi to‘rt barobar ko‘payadi. Suvning sathi suv oqimi hajmining kvadratiga proporsional. Bundan esa differensial tenglamaning nochiziqli ekanini anglash qiyin emas.

## DISKRET VAQT TIZIMI

Diskret vaqt tizimlarini ko‘plab usullar yordamida yuzaga keltirish mumkin. Nisbatan keng tarqalgan amaliy diskret vaqt tizimlariga misol sifatida kompyuterni keltirish mumkin. Barcha jarayonlar (operasiyalar)ning sinxronizasiyasini ta’minlovchi mexanizmlar kompyuterni boshqaradi. Kompyuterda juda ko‘plab jarayonlar integral mikrosxemalar yordamida bajariladi. Foydalanuvchi nuqtai nazaridan kompyuter – diskret vaqt tizimi hisoblanadi. Biz kompyuter dasturi yordamida diskret vaqt tizimini modellashtirishimiz mumkin. Masalan

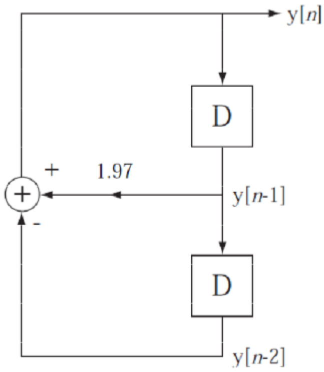
```
yn = 1; yn1 = 0;
while 1,
yn2 = yn1; yn1 = yn; yn = 1.97*yn1 – yn2;
end.
```

Ushbu kompyuter dasturi (MATLAB da yozilgan) boshlang‘ich sharti $y[0]=1$ va $y[-1]=0$ uchun $y$ chiqish signalini hisoblash diskret vaqt tizimining modeli quyidagicha yoziladi

$$[\quad]=1.97\,[\ -1]-\quad[\ -2]. \tag{1.3}$$

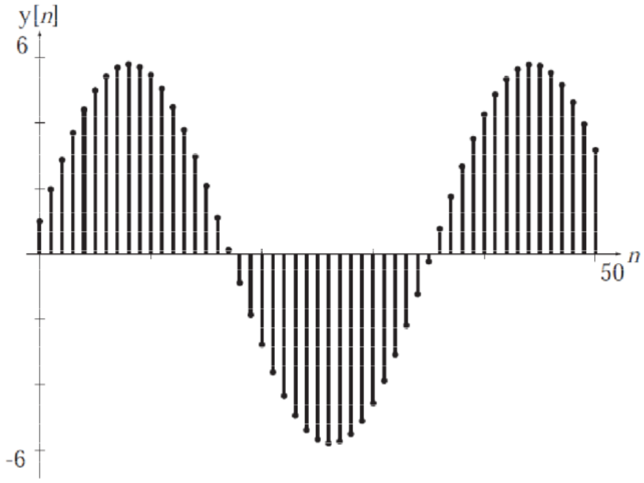
Har qanday indeksli ning qiymati $-1$ indeksli ning qiymatini 1,97 ga ko‘paytmasidan $-2$ indeksli ning qiymatini ayirish orqali hisoblanadi. Ushbu tizimning ishlash jarayonini sxematik tarzda tasvirlanishi 1.19-rasmda keltirilgan.

1.19-rasmdagi ichida D harfi yozilgan ikkita kvadrat bitta diskret vaqtga kechiktiruvchi element hisoblanadi, 1,97 raqami yozilgan strelka esa ushbu tomonga birinchi kechiktiruvchi elementdan kelayotgan qiymatni 1,97 ga ko‘paytirish amalini bajaruvchi ko‘paytirgich hisoblanadi.




1.19-rasm. *Diskret vaqt tizimiga misol*

“Plyus” belgisili doira birinchi va ikkinchi signallar qiymatlarini qo‘shish amalini bajaradi. Bunda ikkinchi signalning qiymati qarama-qarshisiga almashtiriladi va birinchi signalning 1,97 ga ko‘paytmasi bilan qo’shiladi. Ushbu tizim yordamida signalning birinchi 50 ta qiymati hisoblangan natija 1.20-rasmda o‘z aksini topgan.




1.20-rasm. *1.19-rasmdagi diskret vaqt tizimining signali*

## TESKARI BOG‘LANISHLI TIZIMLAR

Tizimning boshqa bir muhim jihati bu, teskari bog‘lanish bo‘lib, tizimning unumdorligini yaxshilashga zamin yaratadi. Teskari bog‘lanish tizimlarida chiqish signalini yaxshilash uchun u kirish signaliga o‘zgartirish kiritishi mumkin. Misol sifatida bizga juda yaxshi tanish bo‘lgan sovutkich (kondisioner) yoqilgan va o‘chirilgan paytda uni boshqaruvchi termostatni keltirish mumkin. Termostatda harorat datchiki mavjud bo‘lib, undagi harorat uy egasi tomonidan o‘rnatilgan meyordan oshib ketsa, sovutkich ishlashdan to‘xtaydi va aksincha, termostat harorati uy egasi tomonidan o‘rnatilgan meyordan pasayib ketsa, sovutkich ishga tushadi. Harorat datchiki (tizimning bir qismi) havoning haroratini aniqlab, qurilmaga signal berilishini ta’minlaydi, ya’ni sovutkichni boshqarishni amalga oshiradi. Ushbu misolda teskari bog‘lanish signali uzib-ulagich yopilishi yoki ochilishi hisoblanadi.

Taskari bog’lanish (aloqa) foydali va muhim tushuncha hisoblanadi, teskari bog‘lanishli tizimlar esa keng qo‘llaniladi. Yana bir bizga tanish holat, xojatxonadagi suvni tushirib (oqizib) yuboruvchi idish ichidagi suzib yuruvchi klapanni olaylik. Ushbu klapan suvning idish (bak)dagi sathi kerakli darajaga yetganda idishga suv oqib kelishini to‘xtatadi. Idish ichidagi suzib yuruvchi shar va klapan teskari bog‘lanish mexanizmi bo‘lib, u idishdagi suv sathini boshqaradi.

Agar xojatxonadagi suv oqizib yuboriladigan idishning hamma suvi oqizib yuborilgan bo‘lsa va uni suvga to‘ldirish uchun ketadigan vaqt ma’lum bo‘lsa, hamda bu ma’lum vaqt oralig‘ida takrorlansa, oqim tezligi ma’lum va o‘zgarmas bo‘lsa, va kalapan har doim bir hil suv idishida qo‘llanilsa, u holda klapanni taymer bilan almashtirish mumkin bo‘ladi. Ammo har doim ham idishdagi suvning hammasini oqizib yuborilmaydi, suvning bosimi ham har doim o‘zgarmas bo‘lmaydi, va turli xojatxonalardagi idishlarning shakli va hajmi bir hil bo‘lmaydi. Shuning uchun, turli o‘zgaruvchan sharoitlarda tizim unga moslashuvchan bo‘lishi lozim, ya’ni suvning sathi kerakli darajaga yetganda klapan ajratilishi shart. O‘zgaruvchan sharoitlarga moslashish imkoniyati teskari bog‘lanish usulining muhim afzalliklaridan biri hisoblanadi.

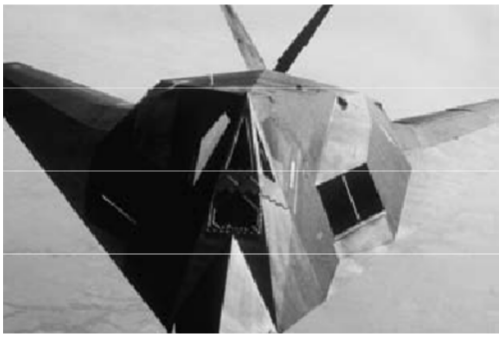
Teskari bog‘lanishning qo‘llanilishiga ko‘plab misollar mavjud.

1. Stakanga limonadning quyilishi. Stakanga lominadni quyayotgan inson uning sathini kuzatib boradi va kerakli darajaga yetganda quyishni to‘xtatadi.
2. Professorning talabalarga o‘zlari bajargan test topshirig‘ini berishi. Bu talabalar uchun teskari aloqa, ya’ni ular qanday bilimga ega bo‘lganliklarini va baholarini yetkazish nuqtai nazaridan. Bundan tashqari yana professor uchun ham teskari aloqa hisoblanadi, ya’ni uning talabalari qanday o‘qiyotganliklari nuqtai nazaridan.

3. Avtomobilni boshqarish. Avtomobilni boshqarish jarayonida haydovchi avtomobilning yo‘nalishi va tezligini, boshqa avtomobillarning unga yaqin yoki uzoqligini hamda boshqa bir qator

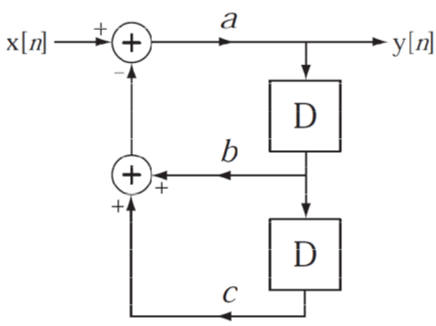
omillarni hisobga olgan holda havfsizligini ta’minlash uchun o’zining harakatiga doimo tuzatish kiritib boradi.

4. Teskari aloqasiz F-117 qiruvchi samolyoti o‘z ishini amalga oshira olmagan bo‘lar edi, chunki bu aerodinamik noturg‘un hisoblanadi. Yordamchi kompyuterlar tezlik, balandlik va boshqa zarur ma’lumotlarni aniqlab, samolyotni boshqarish uchun kerakli ma’lumotlarni yetkazib turadi (1.21-rasm).



1.21-rasm. *F-117 qiruvchi samolyoti*

Teskari aloqa uzluksiz tizimlarda ham va diskret vaqt tizimlarida ham qo‘llaniladi. 1.22-rasmda keltirilgan tizim teskari bog‘lanishli diskret vaqt tizimi hisoblanadi.

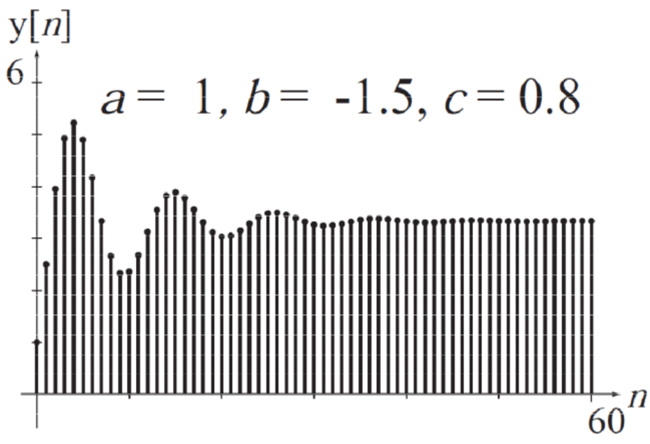



1.22-rasm. *Teskari bog‘lanishli diskret vaqt tizimi*

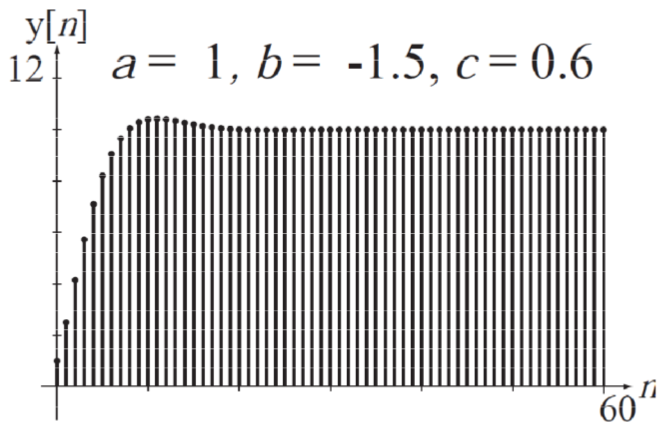
Tizimning chiqishidagi [ ] ikki marta kechiktirilib va qandaydir konstanta (o‘zgarmas qiymat) ga ko‘paytirilib hamda yig‘indisi aniqlanib, yana yuqoridagi summatorga “qaytadi”. Tasavvur qilamiz, ushbu tizim avvaliga tinch holatda bo‘lsin, ya’ni indeks = 0 bo‘lganda, tizimning barcha joylaridagi signallar nolga teng bo‘lsin. Teskari bog‘lanish xususiyatini = −1,5 va = 0,8 bo‘lgan holat

uchun, hamda kirish signali [ ] ning qiymati 0 va 1 qiymatlarini oladi, bunda = 0 bo‘lganda kirish signalining qiymati nolga teng, ≥ 0 bo‘lganda esa kirish signalining qiymati har doim 1 ga teng bo‘ladi deb hisoblaymiz. Ushbu holatda [ ] ning qiymatini 1.23-rasmda keltirilgan grafikdan ko‘rishimiz mumkin.

Endi, ning qiymatini o‘zgartirmasdan saqlagan holda, = 0,6 bo‘lgan holat uchun tizimning chiqish qiymatlarini 1.24-rasmda keltirilgan grafikdan kuzatishimiz mumkin.




1.23-rasm. = −1,5 *va* = 0,8 *bo‘lgan holat uchun diskret vaqt tizimining chiqish qiymatlari*

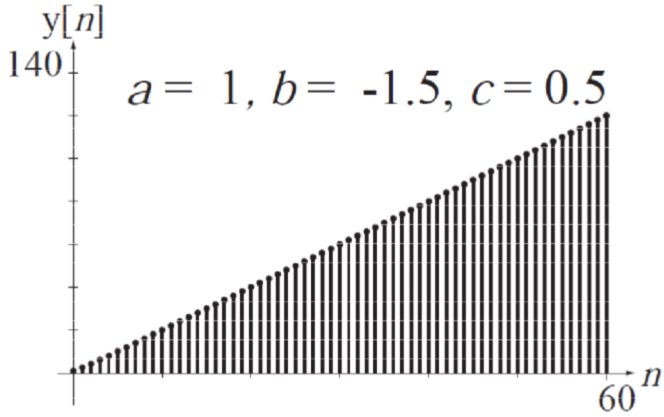



1.24-rasm. = −1,5 *va* c = 0,6 *bo‘lgan holat uchun diskret vaqt tizimining chiqish qiymatlari*

Xuddi shuningdek, ning qiymatini o‘zgartirmasdan saqlab,

= 0,5 bo‘lgan holat uchun tizimning chiqish qiymatlarini 1.25-rasmda keltirilgan grafikdan kuzatishimiz mumkin.

1.25-rasmdagi grafikdan ko‘rinadiki, chiqish signali qiymatlari har doim kattalashib boradi. Ushbu ohirgi tizim noturg‘un tizim hisoblanadi, chunki cheklangan kirish signali cheklanmagan chiqish qiymatlarini shakllantiradi. Shunday qilib, teskari bog‘lanish har doim ham foydali bo‘lmasligi mumkin ekan, ya’ni u tizimni noturg‘un holatga olib kelishi ham mumkin ekan.




1.25-rasm. = −1,5 *va* c = 0,5 *bo‘lgan holat uchun diskret vaqt tizimining chiqish qiymatlari*

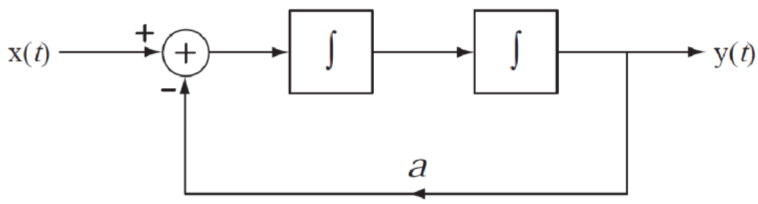
1.26-rasmda keltirilgan tizim teskari bog‘lanishli uzluksiz tizimga misol bo‘ladi. Buni quyidagi differensial tenglama shaklida yozishimiz mumkin: ( ) + ( ) = ( ). Gomogen (bir jinsli) yechimi quyidagicha yozilishi mumkin:

( ) = sin(√ — ) + cos(√ — ). (1.4)

Agar ( ) qo‘zg’atkich nolga teng bo‘lib, ( ) ning boshlang‘ich

qiymati nolga teng bo‘lmasa, yoki ( ) ning boshlang‘ich hosilasi nolga teng bo‘lmasa, u holda tizim = vaqtdan boshlab ( ) har doim

sinusoida shaklidagi tebranishga ega bo‘ladi. Ushbu tizim turg‘un amplitudaga ega tebranish tizimi hisoblanadi. Shunday qilib, teskari aloqa tizimni tebranishga kelishiga majbur qilishi mumkin.




1.26-rasm. *Teskari bog‘lanishli uzluksiz tizim*

## ***Nazorat savollari***

1. *Signal deb nimaga aytiladi?*

2. *Tizimga ta'rif bering.*

3. *Aloqa kanali deganda nimani tushunasiz?*

4. *Signallar qanday turlarga bo'linadi?*

5. *Analog signalni raqamli signalga almashtirish qanday amalga oshiriladi?*

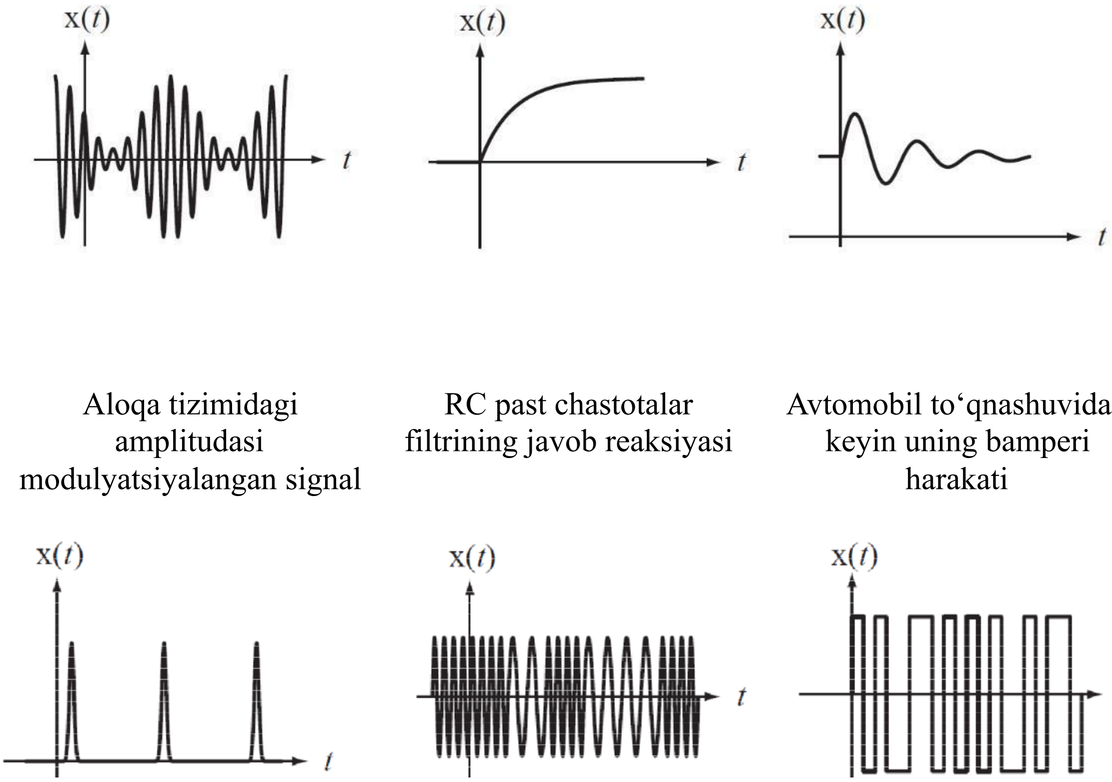
6. *Raqamli signallar qanday afzalliklarga ega?*

7. *Tizimlarning bir necha turlariga namunalar keltiring?*

# 2-BOB. UZLUKSIZ SIGNALLARNING MATEMATIK IFODALARI

## 2.1. Umumiy tushunchalar

Mutaxassislarning o‘tgan davr mobaynidagi kuzatishlari shuni ko‘rsatadiki, signallar bir necha ko‘rsatkichlari asosida bir nechta guruhlarga bo‘linadi. 2.1-rasmda signallarga bir qancha misollar keltirilgan.



Aloqa tizimidagi amplitudasi modulyatsiyalangan signal

RC past chastotalar filtrining javob reaksiyasi

Avtomobil to‘qnashuvidan keyin uning bamperi harakati

Lazerning yorug‘lik kuchi

Raqamli chastota modulyatsiyasi

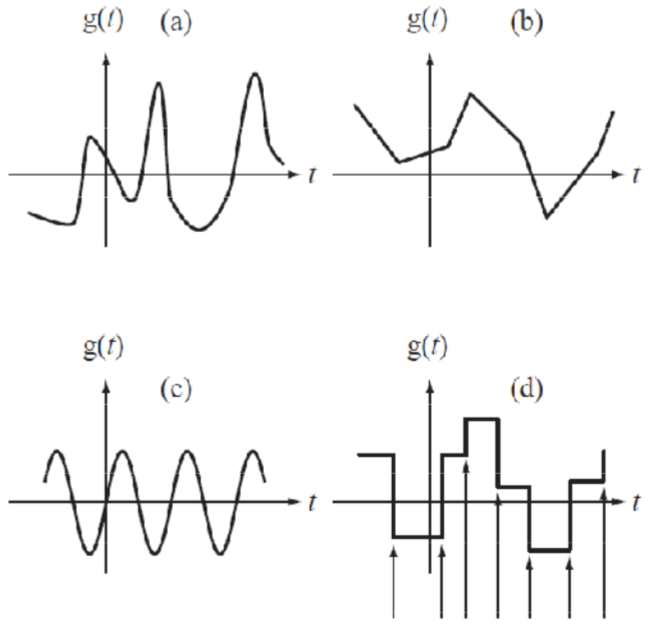
Manchester kodi

2.1-rasm. *Signallarga namunalar*

Signallar va tizimlarni tahlil qilishda signallar matematik funksiyalar orqali ifodalanadi. Real signallarni ifodalovchi bir nechta funksiyalar bizga avvaldan tanish, masalan eksponenta va sinusoida. Ushbu signallar tizimlarni tahlil qilishda ko‘p ishlatiladi. Bir qator funksiyalar aloqa tizimdagi o‘tish jarayonlarini ifodalashda foydalaniladi. Boshqa bir qator funksiyalar tizimlarni analitik tahlil qilishda yuzaga keladigan jarayonlarni ifodalash uchun qo‘llaniladi. Ushbu funksiyalar bir-biri bilan o‘zaro boqliq bo‘lib, ularni bir shakldan boshqa shaklga o‘zgartirish sodda bo‘lishini inobatga olgan holda tanlanadi.

## 2.2. Uzluksiz signal funksiyalari

Agar funksiya vaqt funksiyasi va ushbu funksiyaning qiymati haqiqiy son bo‘lsa, hamda ( ) funksiya har qanday vaqt momentida ma’lum bir qiymatni qabul qilsa, bunday funksiya uzluksiz funksiya hisoblanadi. 2.2-rasmda bir nechta uzluksiz funksiyalarga namunalar keltirilgan.




2.2-rasm. *Uzluksiz funksiyalarga namunalar*

=

uzilish

2.2d-rasmda uzilishli funksiya keltirilgan. Agar

nuqtasi bo‘lsa, u holda

lim ( + ) ≠ lim ( − ).

o‘rinli bo‘ladi.

2.2-rasmdagi (a)-(s) funksiyalar uzluksiz funksiyalar hisoblanadi, chunki ning barcha real qiymatlarida funksiya aniqlangan hisoblanadi.

### 2.2.1. Kompleks eksponenta va sinusoida

Sinusoida va ekponenta funksiyalari bizga yaxshi tanish, ya’ni sinusoida quyidagi ifoda orqali

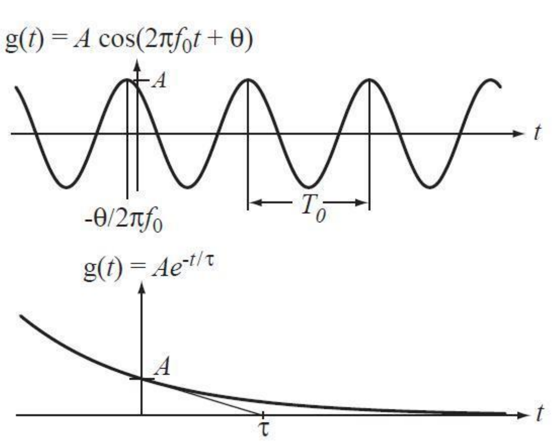
$$( ) = \cos \quad 2 \quad + \quad = \quad \cos(2 \quad\quad + \quad ) =$$

$$= \quad \cos( \quad\quad + \quad ), \qquad (2.1)$$

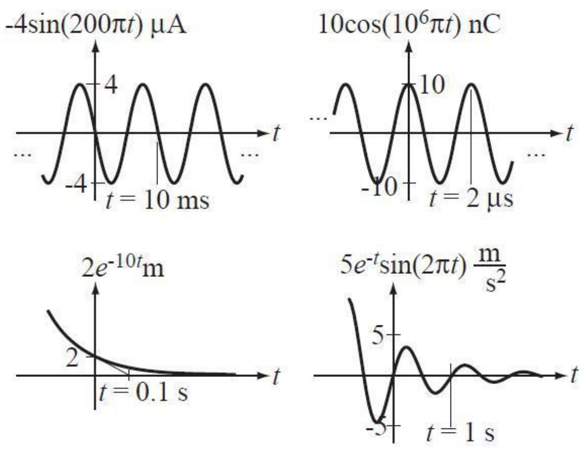
hamda eksponenta esa quyidagi ifoda orqali

$$()= ( \quad\quad ) = \quad [\cos( \quad\quad ) + \quad \sin( \quad )] \qquad (2.2)$$

ifodalanadi. Bunda – amplituda, – takrorlanish davri, – aylanma chastota, – burchak chastota, – vaqt, – eksponentaning so‘nish darajasi (sathi), ya’ni uning vaqt doimiysi ga teskari qiymat (2.3- va 2.4-rasm).




2.3-rasm. *Real sinusoida va eksponenta*




2.4- rasm. *Real sinusoida, kosinusoida va eksponentaga namunalar*

Sinusoida va eksponenta signallar va tizimlar nazariyasida juda keng tarqalgan. Chunki ko‘pgina uzluksiz vaqt tizimlarini doimiy koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglama yoki kompleks eksponentaning xususiy funksiyasi sifatida ifodalash mumkin.

Garmonik signalning oniy qiymatini vaqt $t$ funksiyasi yoki $_0\ t$ – faza funksiyasi sifatida aniqlash mumkin va grafik shaklda ifodalash mumkin.

Signal ( ) vaqt funksiyasi sifatida tahlil etilganda uning davri ga teng bo‘ladi va faza funksiyasi sifatida tahlil etilganda esa davri 2 ga teng bo‘ladi. Bunda garmonik tebranish boshlang‘ich fazasi ni uning vaqt diagrammasida va vektor diagrammasida tasvirlash mumkin.

Garmonik signal ( ) = ( + ) ni ikki alohida sinusoidal va kosinusoidal, bir-biri bilan kvadraturada bo‘lgan tashkil etuvchilar orqali quydagicha ifodalash mumkin:

$g(t)\ A_0 \cos\ _0 t\ _0\ A_0 \cos\ _0 \cos\ _0 t\ A_0 \sin\ _0 \sin\ _0 t\ a\cos\ _0 t\ b\sin\ _0 t$ , bunda, $a\ A_0 \cos$

$_0$ va $b\ A_0 \sin\ _0$ .

$g(t)$ signalning kosinusoidal va sinusoidal tashil etuvchilari amplitudalari $a$ va $b$ lar orqali signal amplitudasi va fazasini aniqlash mumkin:

$$A\ \ a^2 \qquad b^2 \text{ va } \qquad arctg\frac{b}{} .$$

Eyler formulasidan foydalanib,

$$e^{j\ _0 t}\ \ \cos\ _0 t\ \ j \sin\ \ _0 t\ ; \qquad e^{j\ _0 t}\ \ \cos\ _0 t\ \ j\sin\ _0 t\ ;$$

$$\cos\ _0 t\ \ \frac{e^{j\ _0 t}\ \ \ e^{j\ _0 t}}{2}\ ; \qquad \sin\ _0 t\ \ \frac{e^{j\ _0 t}\ \ \ e^{j\ _0 t}}{2}\ .$$

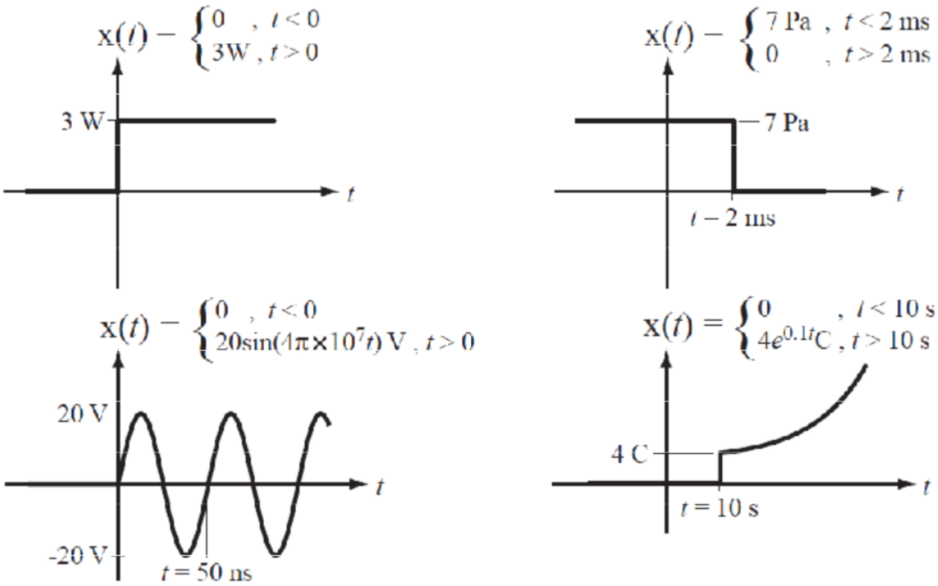
garmonik signalni kompleks funksiya shaklida ifodalash mumkin:

$$s(t)\ \ \frac{A_0}{2} e^{j(\ _0 t\ _0)}\ \ \ e^{j(\ _0 t\ _0)}\ \ . \tag{2.3}$$

Garmonik va eksponenta signallar signallar va tizimlar tahlilida muhim o‘rin egallaydi, chunki ko’pgina tizimlardagi o‘zgarishlar asosan differensial tenglamalar ko’rinishida ifodalanadi. Keyinroq Furye qatori tadqiqi va Furye almashtirishlari qismida ko‘rishimiz mumkin, bir qancha murakkab signallar, ya’ni garmonik bo‘lmagan signallar ham bir necha garmonik signallarning kombinasiyasidan iborat bo‘ladi.

## 2.3. Uzilishli funksiyalar

Barcha garmonik va eksponenta signallar uzluksizdir. Ammo tizimlarda ishlatiladigan bir qancha muhim signallar uzluksiz bo‘lmaydi, bunday signallarni uzilishli signallar deb ataladi. Tizimlardagi uzilishli signallarga namunalar 2.5-rasmda keltirilgan.




2.5-rasm. *Uzilishli signallarga namunalar*

2.5-rasmda keltirilgan signallarning funksional ifodalari aniq va to‘liq bo‘lib, biroq birmuncha qo‘pol ko’rinishga ega. Ushbu turdagi signallarni uzluksiz funksiyaga ko‘paytirish orqali sodda matematik shaklda ifodalash mumkin.

## 2.3.1. Signum funksiyasi

Quyidagi ko’rinishga ega bo‘lgan funksiya signum funksiyasi deb ataladi (2.6-rasm):

$$()=\begin{cases}1, & >0\\ 0, & =0\\ -1 & <0\end{cases} \qquad (2.4)$$


2.6-rasm. *signum funksiyasi*

2.6-rasmda chapdagi grafikni aniq matematik funksiya orqali ifodalash mumkin. O‘ngdagi grafik esa texnik nuqtai nazardan chapdagi funksiyani tasvirlash usuli hisoblanadi. Amaliyotda hyech qaysi signal uzlukli ravishda o‘zgarishi mumkin emas, agar ushbu signal generator yordamida shakllantirilgan bo‘lsa va ossillograf orqali kuzatilsa bu signal o‘ng tomondagi grafik ko‘rinishida bo‘ladi.

### 2.3.2. Yakka sakrash ko‘rinishidagi funksiya

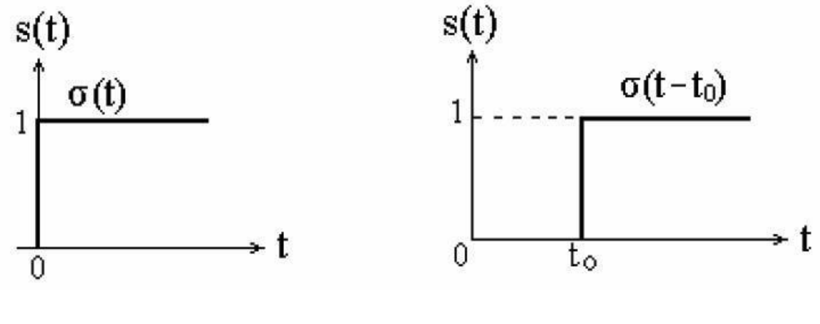
Yakka sakrash funksiyasi (Xevisayd funksiyasi) fizik qurilmaning bir onda bir holatdan boshqa bir holatga o‘tish jarayonini ifodalaydi (2.7-rasm). Yakka sakrash funksiyasini ko‘p hollarda ulanish funksiyasi deb ham yuritiladi va quyidagi formula orqali ifodalanadi:

$$\sigma(t)=\begin{cases}0, & agar\;\; t<0,\\ 1/2, & agar\;\; t=0,\\ 1, & agar\;\; t>0.\end{cases} \qquad (2.5)$$

Yakka sakrash signalining yordamida radiotexnik qurilma o‘tish xarakteristikasi olinadi. Qurilmaning yakka birlik funksiyaga aks ta’siri uning o‘tish xarakteristikasi hisoblanadi.

Delta funksiya $\delta(t)$ va yakka sakrash funksiyasi $\sigma(t)$ bir-biri bilan quyidagicha bog‘langan:

$$\delta(t)=\frac{d\sigma(t)}{dt}; \qquad \sigma(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt.$$

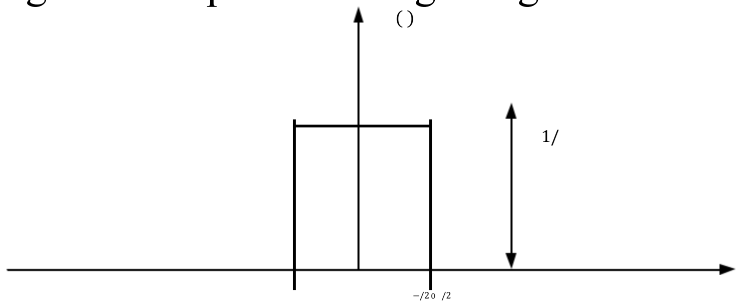



$$\sigma(t)=\begin{cases}1, & agar\; t\geq 0,\\ 0, & agar\; t<0.\end{cases} \qquad \sigma(t-t_0)=\begin{cases}1, & agar\; t\geq t_0,\\ 0, & agar\; t<t_0.\end{cases}$$

2.7-rasm. *Yakka sakrash funksiyasi*

## 2.3.3. Delta funksiya

Amplitudasi davomiyligiga teskari proporsional bo‘lgan impulsning (2.8-rasm) spektri zichligini tahlil qilamiz. Bu signalning davomiyligi nolga intilsa amplitudasi cheksizlikka intiladi, ammo impuls yuzasi o‘zgarmas saqlanadi va 1 ga teng bo‘ladi.




2.8-rasm. *Delta funksiyaga o‘tuvchi impuls*

Ushbu signal argumenti nolga intilsa uning funksiyasini quyidagi ifoda orqali aniqlash mumkin:

$$( ) = \infty, \quad = 0; \qquad 0, \quad \neq 0, \tag{2.6}$$

va shu bilan birga $\int^{\infty}$ ( ) = 1, ya’ni impuls yuzasi birga teng.

Yuqorida keltirilgan xossalarga ega bo‘lgan funksiya ( ) yakka birlik impuls, impuls funksiyasi, delta funksiyasi ba’zan esa Dirak funksiyasi deb ham ataladi.

Ushbu delta funksiyani vaqt o‘qi bo‘yicha surib, ushbu funksiya o‘zining eng katta qiymatiga erishgan holatiga keltirsak, u holda

$$(- ) = \infty, \quad = \; ; \qquad 0, \quad \neq \; , \tag{2.7}$$

va $\int^{\infty}$ ( − ) = 1 bo‘ladi.

( ) – delta funksiya juda muhim xususiyatga egaligi uchun undan ko‘p hollarda foydalaniladi. (2.6) va (2.7) ifodalardan delta funksiyaning asosiy xossalari kelib chiqadi:

∞ ∞

)· () = ( ) ( − ) = ( ). (2.8)

( − ) vaqt ning faqat bitta qiymatida cheksiz katta bo‘lib, vaqtning boshqa hamma qiymatlarida nolga tengligi uchun integrallash

oralig‘ini juda kichik qilib tanlash mumkin, faqat vaqtni o‘z ichiga olsa yetarli. Ushbu oraliqda ( ) funksiya ( ) ga teng bo‘lgan o‘zgarmas qiymatga ega bo‘ladi va uni integraldan tashqariga chiqarish mumkin. Shunday qilib, har qanday integral osti funksiya ( ) ni ( − ) ga ko‘paytirish ushbu ko‘paytmadan olingan integralni ( ) funksiyaning = vaqtdagi qiymatiga tenglashtirish imkoniyatini beradi. Matematikada va radiotexnikada (2.8) ifoda delta funksiyaning filtrlash xossasi deb yuritiladi. Axborot uzatish radiotexnik tizimlarida delta funksiyaning bu xossasini delta funksiyaning namuna olish (proba

olish - stroblash) xossasi deb ham ataladi.

Signallar nazariyasida ko‘p hollarda vaqt yoki chastota ning funksiyasi bo‘lgan delta funksiyalardan foydalaniladi. Delta

funksiyaning spektri zichligi delta funksiyaning (2.8) formula orqali aniqlanadigan xossasiga asoslanib, Fure almashtirishi yordamida quyidagicha aniqlanadi:

∞ ∞

( ) = (−)· = (−)= . (2.9)

∞

Ushbu funksiyaning moduli birga teng bo‘lib, uning faza-chastota xarakteristikasi quyidagi ifoda orqali aniqlanadi:

()=− . (2.10)

Delta impulsidan chiziqli radiotexnik qurilmalarni tadqiqot qilishda keng foydalaniladi. Buning uchun real signalning – impulsning amplitudasi cheksiz katta va davomiyligi cheksiz kichik bo‘lishi shart emas. Buning uchun foydalanilayotgan impuls davomiyligi u o‘tayotgan chiziqli radiotexnik qurilma vaqt doimiyligiga nisbatan kichik bo‘lishi yetarli hisoblanadi.

( ) funksiyaga nisbatan keltirilgan hamma fikrlarni ( )

funksiya uchun ham ni ga va ni ga almashtirilgan holda qo‘llash mumkin.

∞ ∞

1 1

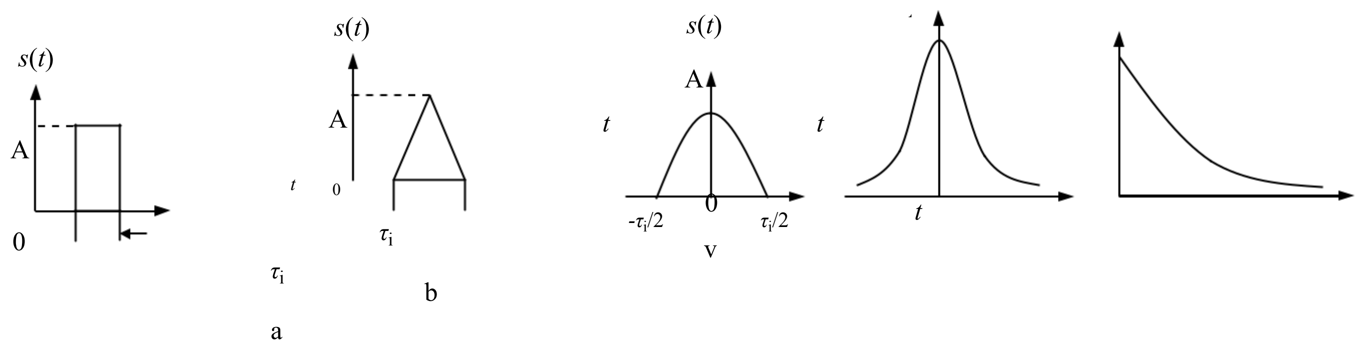
( ) = = . (2.11)

2 2

(2.11) formuladagi daraja ko‘rsatkichining o‘zgarganligi integralning qiymatiga ta’sir etmaydi.

## 2.4. Impuls signallar

Cheklangan vaqt oralig‘ida mavjud bo‘lgan signallar impuls signallar deb ataladi. Impuls signallar turli shakllarda bo‘lishi mumkin: to‘g‘rito‘rtburchaksimon, arrasimon, trapesiyasimon, uchburchaksimon, qo‘ng‘iroqsimon va h.k. ko‘rinishdagi video va radioimpulslar (2.9-rasm). Energiyasining asosiy qismi kichik vaqt orasiga to‘plangan signallarni ham impuls signallar deb hisoblash mumkin (2.9g,d-rasm.)




$nT$ )

,

2.9-rasm. *Impuls signallar*

Quyidagi matematik formula bilan vaqt funksiyasi ifodalanadigan signallar davriy signallar deb ataladi:

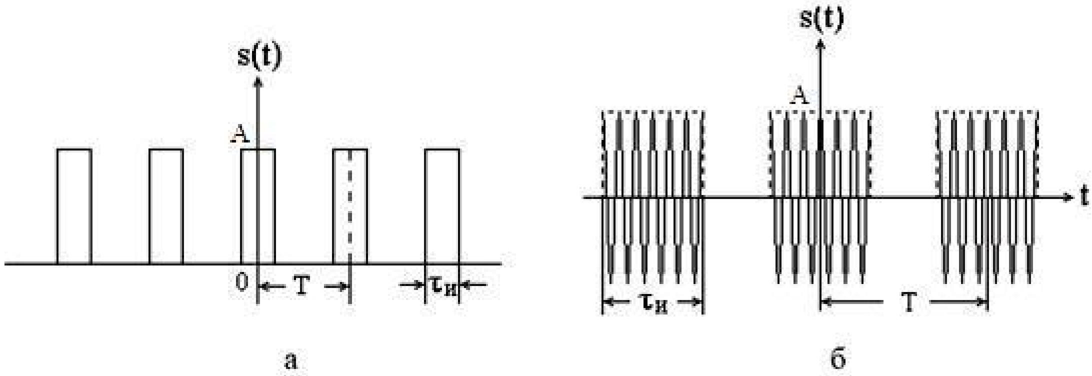
$s(t)$

$s_0\,(t$

sifatida

(2.12)

bunda, $T$ – signal takrorlanish davri, ya’ni signalning ikki eng yaqin fazalari orasidagi vaqt, $n \quad 1, 2, ...k$ – takrorlanayotgan impulslar ketma-ketligi tartib raqami, $s_0(t)$ – video va radioimpulsning asosiy parametrlari bilan xarakterlanadi (2.10-rasm): $A$ – video va radioimpuls amplitudasi, $_{i}$ – impuls davomiyligi, $T$ – impuls takrorlanish davri, $_{0}$ – radioimpuls o‘rtacha chastotasi.




a)2.10-rasm. *Davriy signallar* b)

Impuls signallar nazariya bo‘yicha cheksiz davomiylikka ega ( $n$ ), ammo bunday signallar amalda mavjud emas. (2.12) formula shartlariga javob bermaydigan signallar nodavriy signallar deb ataladi. Yakka impuls shaklidagi video va radiosignallarni nodavriy signallar deb hisoblash mumkin. Ammo ba’zi hollarda nodavriy signallarni takrorlanish davri $T$ ga teng bo‘lgan davriy signal sifatida o‘rganish mumkin.

## 2.5. Juft va toq signallar

Juft signallar vaqt bo‘yicha juft funksiyalar, ya’ni $s_j(t)$ $s_j(\ t)$ .

Juft signallar qutbi vaqt o‘qining manfiy va musbat bo‘lishiga bog‘liq bo‘lmagan holda saqlanib qoladi. Juft signal ordinata o‘qiga nisbatan simmetrik funksiya hisoblanadi (2.11a-rasm).

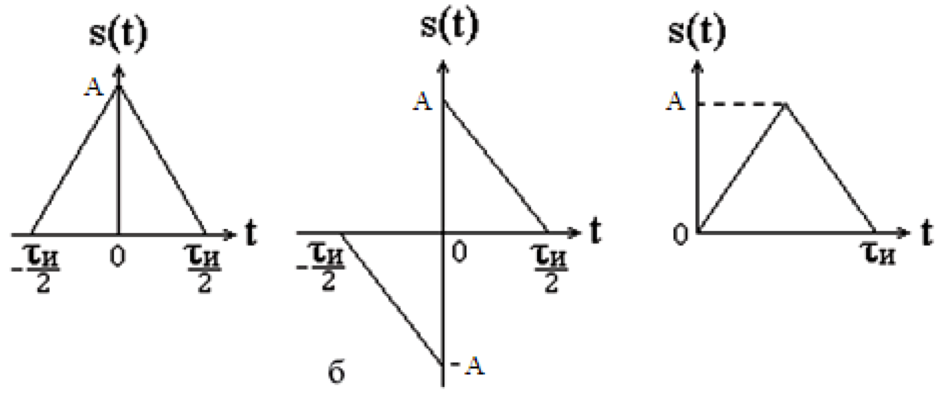
Toq signallar vaqt bo‘yicha toq funksiya hisoblanadi, ya’ni $s_t(t)$ $s_t(\ t)$ . Bu tur signallarning qutbi vaqtning musbatdan manfiyga va aksincha almashishi bilan o‘z belgisini o‘zgartiradi. Toq signal koordinata o‘qi boshiga nisbatan simmetrik bo‘ladi (2.11b-rasm).

Vaqtning juft va toq funksiyasi bo‘lmagan signalni ixtiyoriy signal deb ataladi. Ixtiyoriy signalni juft va toq signallar yig‘indisi sifatida qarash mumkin, ya’ni $s(t)$ $s_j(t)$ $s_t(t)$ . Juft va toq funksiyalar uchun

ifodalardan foydalanib ixtiyoriy signalni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$s(t) \quad s_j(t) \quad s_t(t) \;\; s_j(t) \;\; s_t(t) \,.$$

$s(\ t)$
$s_j(t)$
$s(t)$




a) b) v)

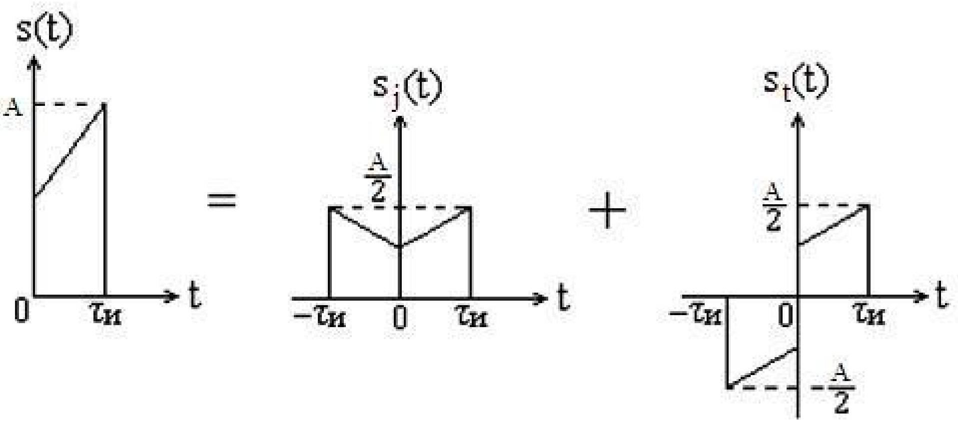
2.11-rasm. *Juft (a), toq (b) va ixtiyoriy (v) signallar*

va lar uchun ifodalarni ikki noma'lumli: va $s_t(t)$

tenglama deb hisoblab, ulardagi noma'lum funksiyalarni aniqlaymiz:

$$s_j(t)\ \frac{1}{2}\ S(t)\ \ s(\ t) \text{ va } s_t(t)\ \ \frac{1}{2}\ s(t)\ \ s(\ t)\ .$$

Shuni e'tiborga olish kerakki, $s(\ t)$ signal $s(t)$ signalning aks ko'rinishi hisoblanadi (2.12-rasm).




2.12-rasm. $s(t)$ *signalni juft va toq signallar yig'indisi shaklida ifodalash*

## 2.6. Signallarning asosiy xarakteristikalari

Ma'lum bir vaqt oralig'i $t_2 - t_1 = t$ vaqt orasida mavjud signal uchun asosiy xarakteristikalar quyidagilardan iborat:

1. Signal o'rtacha qiymati

$$\overline{s(t)} = \frac{1}{t}\int_{t_1}^{t_2} s(t)dt. \qquad (2.13)$$

Signalning o'rtacha qiymati bu uning doimiy tashkil etuvchisiga mos keladi.

2. Signal oniy quvvati

$$p(t) = s(t)\,s^*(t) = |s(t)|^2. \qquad (2.14)$$

$s(t)$ va $s^*(t)$ – bir-biri bilan kompleks bog'liq signallar.

3. Signal energiyasi

$$E = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt. \qquad (2.15)$$

4. Signal o'rtacha quvvati

$$p_{o'r} = \frac{1}{t}\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \frac{1}{t}\int_{t_1}^{t_2}|s(t)|^2 dt. \qquad (2.16)$$

Davriy signallarning energiyasi cheksiz kattaligi uchun uning o'rtacha qiymati va energetik xarakteristikalari ushbu signalning bir davri uchun aniqlanadi.

## 2.7. Signallar spektrini aniqlash

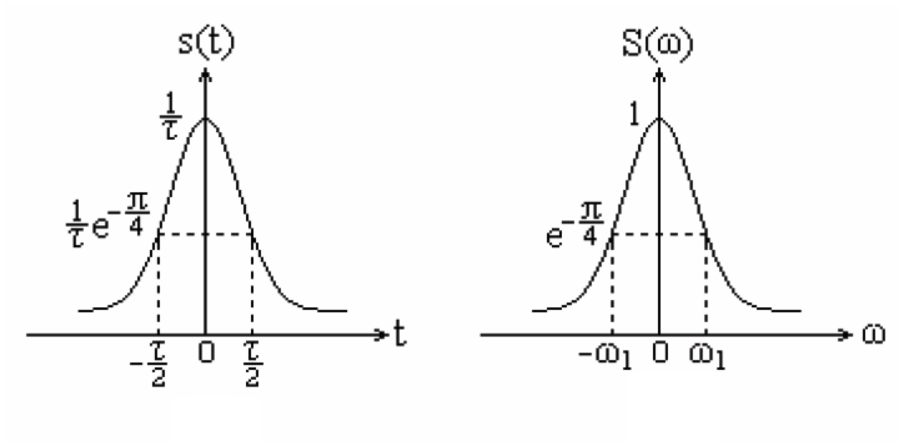
### 2.7.1. Gauss (qo‘ng‘iroqsimon) impuls signal spektri

Gauss (qo‘ng‘iroqsimon) impuls signali vaqt funksiyasi sifatida quyidagicha ifodalanadi (2.13-rasm):

$$s(t) \quad \frac{1}{-} e^{\quad t \quad 2} \tag{2.17}$$

Bu signalning spektr zichligini Fure to‘g‘ri almashtirishi orqali aniqlaymiz.

$$S(j \quad) \quad s(t)e^{2}$$




a) b)

2.13-rasm. *Gauss (qo‘ng‘iroqsimon) impuls (a) va uning spektri (b)*

Yuqorida keltirilgan ifodaga Eyler formulasini tadbiq qilib, quyidagini olamiz:

$$S(j\;)\quad \frac{1}{-}\quad {}^{t\;2}\cos\; tdt\;\; j\;\frac{1}{-}\quad {}^{t\;2}$$

Bu ifodaning ikkinchi qismi nolga teng, chunki bu integral toq funksiyadan simmetrik oraliqda olingan. Ushbu ifodaning birinchi integralini hisoblash uchun matematik ma’lumotnomadan foydalanamiz.

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos xdx = \frac{\sqrt{\ }}{2a} e^{-b^2/4a^2}, \qquad agar\ a > 0\ bo'lsa.$$

Biz tahlil etayotgan ifodada $a = \frac{\sqrt{\ }}{\ }$, $b$ deb belgilaymiz va natijada quyidagi ifodani olamiz:

$$S(\ ) = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos t dt = 2 \frac{\sqrt{\ }}{2\sqrt{\ }} e^{-\frac{2\ 2}{4}} = e^{-\frac{2\ 2}{4}}.$$

$\frac{\ }{2}$ deb belgilaymiz. U holda $\frac{2\ 2}{4} = \ ^2$ ni e'tiborga olsak

$$S(\ ) = e^{-\ ^2}. \tag{2.18}$$

Shunday qilib, qo'ng'iroqsimon signal vaqt funksiyasi sifatida va uning spektri matematik nuqtai nazardan bir xil ko'rinishga ega bo'lib, o'lchami tabiiyki argumenti bilan farqlanadi. Qo'ng'iroqsimon impuls signal spektri 2.13b-rasmda keltirilgan.

Ushbu signalning eng katta maksimal qiymatining $e^{-\ /4}$ ga teng sathdagi spektr kengligi quyidagicha aniqlanadi:

$$\ ^2 = \ /4; \quad _1 = \frac{\ }{2} = \frac{2}{2}\ ;\ 2\ _1 = \frac{2}{\ }.$$

qiymati orqali signal spektri samarali kengligini aniqlash mumkin. Yuqorida keltirilgan bog'lanishlar, qo'ng'iroqsimon impuls davomiyligi qancha kichik bo'lsa, uning spektri egallagan chastotalar polosasi shuncha keng bo'ladi.

## 2.7.2. -funksiya spektri zichligi

-funksiyaning spektrini uni tanlovchanlik xususiyati va Fure to‘g‘ri almashtirishi orqali aniqlaymiz.

$(t)$

$$S(j\ )s(t)e^{j\ t}\,dt(t)e^{j\ t}\,dt\ \ e^{j\ _0}\ \ \ 1. \qquad (2.19)$$

Shunday qilib, -funksiya hamma chastotalarda birga teng bo‘lgan bir xil kattalik va zichlikdagi spektrga ega. signali faza spektrining yo‘qligi, bu signal spektrining faqat haqiqiy tashkil etuvchilardan iborat ekanligini ta’kidlaydi (2.14a-rasm).

$(t)$ signal spektridan olingan Fure teskari almashtirishi quyidagiga teng:

$$(t)\ \ \frac{1}{2}\ e^{j\,t}\,d\ ,\qquad (t)\ \ \frac{1}{2}\ e^{j\ t}\,d\ .$$

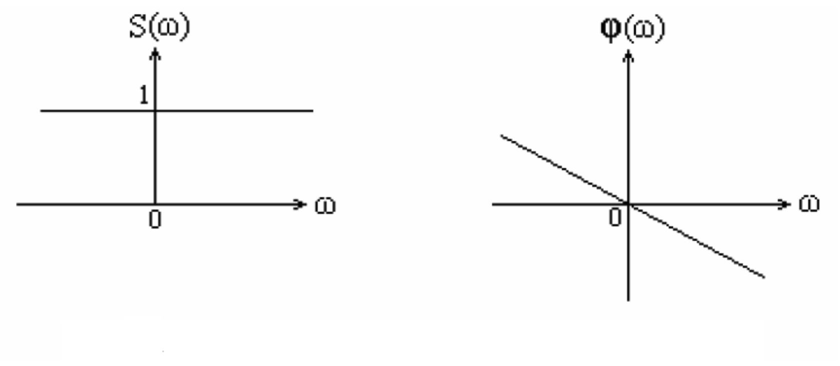
Fure almashtirishlarida vaqt va chastotaning o‘zaro almashtirish mumkinligini e’tiborga olsak, quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$(\ )\ \ \frac{1}{2}\ e^{j\ t}\,dt,\qquad (\ )\ \ \frac{1}{2}\ e^{j\,t}\,dt.$$

-funksiyani vaqt o‘qi bo‘yicha $t_0$ ga surish spektrining o‘zgarishiga sabab bo‘ladi va quyidagi formula orqali ifodalanadi:

$$S(j\ )\ \ \ s(t\ \ \ t_0)e^{j\,t}\,dt\ \ \ e^{j\,t_0}.$$

-funksiya $t_0$ ga surilganda uning amplituda spektri o‘zgarmas saqlanadi, chastotaga chiziqli bog‘liq bo‘lgan $t_0$ faza spektri paydo bo‘ladi (2.14b-rasm).




a) b)

2.14-rasm. -*funksiyaning amplituda (a) va faza (b) spektri*

## 2.7.3. Yakka sakrash funksiyasi spektri

Yakka sakrash funksiyasini absolyut integrallash juda qiyinligi uchun uning spektrini Fure almashtirishdan foydalanib aniqlash mumkin emas. Shuning uchun uning spektrini aniqlashda bilvosita usuldan foydalanamiz. Bunda uning spektrini aniqlash uchun dastlab boshqa funksiyaning spektrini aniqlaymiz va ma’lum bir chegaraviy qiymatlarda fkka sakrash signali spektrini aniqlaymiz.

Yakka sakrash funksiyasini eksponentasimon impuls chegaraviy qiymatiga o‘tish orqali olish mumkin, ya’ni

$$(t) \quad \lim_{0} e^{\ t}, \quad agar\ t\ \ 0, \qquad 0, \quad agar\ t\ \ 0.$$

Yakka sakrash impuls spektrini eksponentasimon impulsning

0 holatdagi spektri shaklida aniqlash mumkin.

$$0 \qquad \frac{1}{j} e^{j} \Big| \qquad \frac{1}{j}$$

Unda biz aniqlamoqchi bo‘lgan spektr quyidagicha aniqlanadi:

$$S(j\ )\ \lim_{0} S_E\ (j\ )\ \lim_{0} \frac{}{22} j \lim_{0} \frac{}{22}.$$

Bu ohirgi ifodaning birinchi tashkil etuvchisi 0 bo‘lgan holat uchun 0 chastotadan boshqa hamma chastotalarda nolga teng, 0

chastotada bu tashkil etuvchi cheksizlikka intiladi. $\frac{}{22}$ funksiya

ostidagi yuza, ya’ni

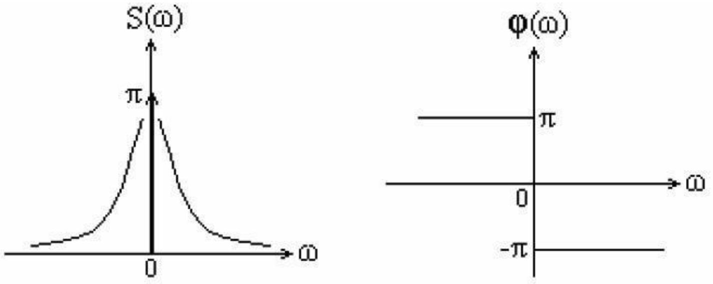
$$\frac{}{2} \quad \frac{}{2} \quad d\ \ 2\frac{1}{}_{0} \ \frac{}{2} \ \frac{}{2} d \quad \frac{2}{2}.$$

Shunday qilib, birinchi tashkil etuvchining 0 dagi chegaraviy qiymati, vzveshennaya -funksiya bo‘ladi, ya’ni ( ) ga teng bo‘ladi.

Natijada, yakka sakrash funksiyasi spektri zichligi quyidagicha aniqlanadi:

$$S(j\omega) = \pi\delta(\omega) + 1/(j\omega).$$

Yakka sakrash funksiyasi amplituda va faza spektri 2.15-rasmda keltirilgan.




2.15-rasm. *Yakka sakrash funksiyasi amplituda va faza spektri*

### 2.7.4. Vaqt bo‘yicha o‘zgarmas – doimiy signal spektri

$\delta$-funksiyaning spektri konstanta (o‘zgarmas kattalik) bo‘lganligi uchun to‘g‘ri va teskari Fure almashtirishi asosida vaqt bo‘yicha o‘zgarmas signal spektri $\delta$-funksiya ko‘rinishida bo‘ladi.

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-j\omega t}\,dt = 2\pi A \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}\,dt = 2\pi A\,\delta(\omega).$$

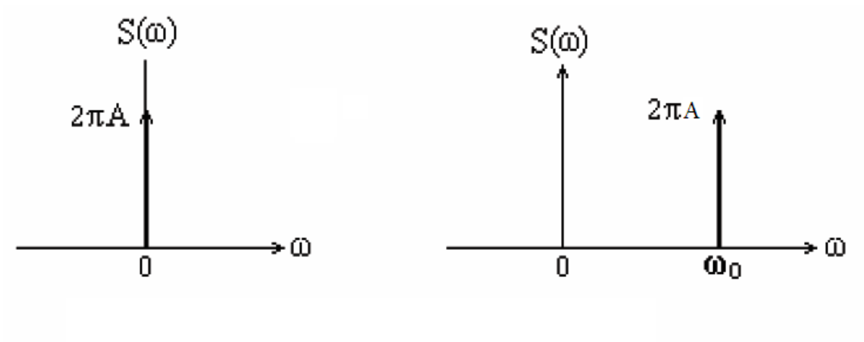
Bu ifoda yana bir bor signal davomiyligi va uning spektri orasida proporsionallik mavjudligini tasdiqlaydi: cheksiz katta davomiylikka ega signal cheksiz tor spektrga ega bo‘ladi va aksincha (2.16a-rasm).

### 2.7.5. Kompleks eksponentaning spektri

$s(t) = Ae^{j\omega_0 t}$ – kompleks signal spektri quyidagicha aniqlanadi:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t}\,dt = A\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)t}\,dt = 2\pi A\,\delta(\omega - \omega_0).$$

Kompleks signal spektri yakka (vzveshenniy) – funksiyadan iborat bo‘lib, u haqiqiy bo‘lmagani uchun amplituda spektri juftlik xususiyatiga ega bo‘lmaydi (2.16b-rasm).




a) b)

2.16-rasm. *Vaqt bo‘yicha o‘zgarmas – doimiy signal spektri (a) va kompleks eksponenta spektri (b)*

Signallarni kompleks ko‘rinishda ifodalash, modulyatsiyalangan signallarni, ayniqsa amplitudasi va fazasi bir vaqtda o‘zgarishi bilan bog‘liq bo‘lgan murakkab modulyatsiya turlarida bu usul qulay hisoblanadi.

## 2.7.6. Garmonik signal spektri

$s(t)\ A\cos\ {}_0 t$ – garmonik signalning spektri quyidagicha aniqlanadi:

$$S(j\ )\quad A\cos\ {}_0 t e^{j\,t}\,dt \qquad \frac{A}{2}\quad e^{j(\ {}_0 t\ )}\ je^{j(\ {}_0 t\ )}\quad e^{j\,t}\ dt$$

$$\frac{A}{2}\ e^{j}\ e^{j(\ {}_0)t}\ dt \qquad \frac{A}{2}\ e^{j}\ e^{j(\ {}_0)t}\ dt.$$

Va nihoyat ba’zi almashtirishlarni amalga oshirish natijasida garmonik signal spektri uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$S(j\ )A\ e^{j}\ (\qquad {}_0)\qquad A\ e^{j}\ (\qquad {}_0).$$

Garmonik signal spektri ikkita ${}_0$ chastotalarda joylashgan ma’lum qiymatli -funksiyadan iborat bo‘ladi. -funksiya qiymati garmonik signal kompleks amplitudasini aks ettiradi.

## 2.7.7. To‘rtburchak shaklidagi videoimpuls spektri

To‘rtburchak shaklidagi videoimpuls (2.17a-rasm) spektrini ikki usulda aniqlaymiz:

1) Fure almashtirishini to‘g‘ridan-to‘g‘ri hisoblash usulida;

2) Fure almashtirishi xossalaridan foydalanish usulida.

*Birinchi usul.* Videoimpuls davomiyligi cheklanganligi va uning amplitudasi signal davri $\tau_и$ davomida o‘zgarmas saqlanib qolishini e’tiborga olib Fure to‘g‘ri almashtirishini hisoblaymiz.

$$S(j\omega)=A\int_{-\tau_и/2}^{\tau_и/2}e^{-j\omega t}dt=\frac{A}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-\tau_и/2}^{\tau_и/2}=A\frac{e^{j\omega\tau_и/2}-e^{-j\omega\tau_и/2}}{j\omega},$$

$$S(j\omega)=A\tau_и\frac{\sin(\omega\tau_и/2)}{\omega\tau_и/2}.$$

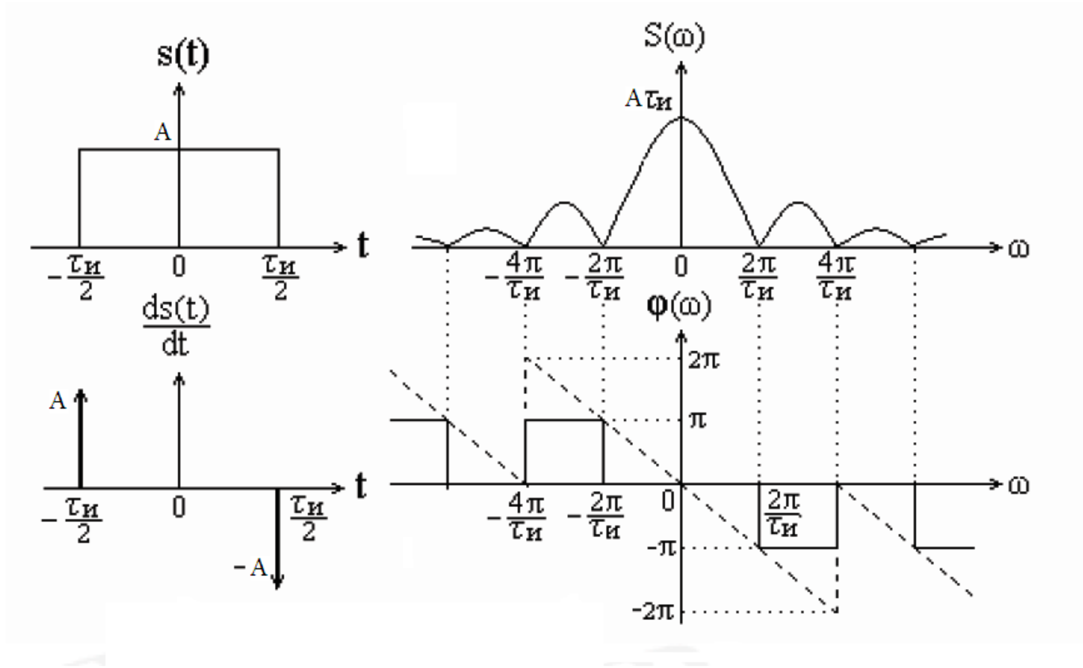
Yuqoridagi misoldagi signal juft bo‘lgani uchun, bu signalning spektri faqat haqiqiy qismga ega (2.17b-rasm).

Videoimpuls spektri o‘rovchisi $\sin x/x$ funksiya ko‘rinishida bo‘lib, u yaproqchalarga ega bo‘lib, har bir yaproqchaning kengligi $2\pi/\tau_и$ ga teng va videoimpuls davomiyligiga teskari proporsional. Signal spektri o‘rovchisining nolga teng bo‘lgan qiymatlari $\sin(\omega\tau_и/2)=0$ tenglamasi orqali aniqlanadi:

$$\omega\tau_и/2=k\pi, \quad k=\pm1,2,3,..., \quad \omega_k=k\frac{2\pi}{\tau_и}.$$

Videoimpuls spektri zichligi $\omega=0$ chastotada $S(0)$ ga teng bo‘lib, qiymati $A\tau_и$ ga teng bo‘ladi.

Videoimpuls davomiyligi $\tau_и$ kattalashgan sari yaproqchalar kengligi kichiklashadi va $S(0)$ qiymati kattalashadi va aksincha. Agar videoimpuls davomiyligi $\tau_и \to 0$ bo‘lsa, spektrning $\omega_k=k\frac{2\pi}{\tau_и}$ nuqtalari orasidagi masofa cheksizlikka intiladi va spektri zichligi cheksiz kichiklashadi va bir xil qiymatlarga ega bo‘ladi. Agar $_{и}$ bo‘lsa, u holda $_{k}$ nuqtalari orasidagi masofa nolga intiladi va cheksiz katta spektr zichligi -funksiya shaklini oladi, ya’ni signal spektri kengligi nolga intiladi.




b)

a)

2.17-rasm. *To‘rtburchak shaklidagi impuls va uning hosilasi (a) hamda amplituda va faza spektrlari (b)*

Videoimpuls faza spektri (2.17b-rasm) sin$x$/ $x$ funksiyasiga bog‘liq ravishda 0 va ga teng bo‘ladi. Faza qiymatlari va bir-biridan farqlanmaydi, chunki faza spektridagi 0 va 0 chastotalarda " + " va " − " qiymatlar uni toq funksiya shaklida tasavvur etish uchun ko‘rsatilgan.

Videoimpuls vaqt o‘qi bo‘yicha $t\ t_0$ ga siljisa Fure almashtirishiga asosan uning spektri quyidagi formulalar orqali aniqlanadi:

$$S(j\ )\ A\ _и \frac{\sin\ _и/2}{\ _и/2}\, e^{j\ t}\ \ A\ _и \frac{\sin\ _и/2}{\ _и/2}\, e^{j\ t_0}.$$

Ushbu oxirgi ifodadan ko‘rinadiki, signal amplituda spektri signal $t_0$ ga siljishi natijasida o‘zgarmas saqlanadi, faza spektri esa $_k$ chastotalarda sakrab ga o‘zgaradi va bu sakrashlar orasida qaza chastotaga chiziqli bog‘liqlikda o‘zgaradi.

*Ikkinchi usul.* Videoimpuls shaklidagi $s(t)$ signaldan olingan hosilaga teng bo‘lgan signal $s_1(t)$ $\frac{ds(t)}{dt}$ ikkita chekli qiymatga ega bo‘lgan -funksiyadan iborat bo‘lib, bu signalning spektri zichligi ikki -funksiyalar spektrlari yig‘indisiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$S_1(j\ )\ A\ \ t\ \ _{и}/2\, e^{j\ t}\, dt\ A\ \ t\ \ _{и}/2\, e^{j\ t}\, dt\ A\, e^{j\ _{и}/2}\ \ e^{j\ _{и}/2}\ .$$

Videosignal $s(t)$ ning spektri zichligi $s_1(t)$ signal spektridan integral olish orqali, ya’ni $S_1(j\ )$ ni $j$ ga bo‘lish orqali aniqlanishi mumkin.

$$S(j\ )\ \ \frac{S_1(j\ )}{j}\ \ \frac{A\, e^{j\ _{и}/2}\ e^{j\ _{и}/2}}{j}\ \ A\ \ _{и}\ \frac{\sin\ \ _{и}/2}{_{и}/2}\ .$$

Bu ikkinchi usul birinchisiga nisbatan oson amalga oshiriladi.

## 2.7.8. Ixtiyoriy davriy signalning spektri zichligi

Davriy signal Fure qatori kompleks ko‘rinishda quyidagicha ifodalanishi mumkin:

$$(\,) = \ \infty \ \ \infty$$

bunda, $=$ — – signal takrorlanish chastotasi birinchi garmonikasi.

Ixtiyoriy davriy signalning spektri zichligi Fure qatori chastotalarida joylashgan -funksiyalar yig‘indisidan iborat bo‘lib, - funksiyalarning qiymatlari Fure qatori koeffisientlarining 2 ga ko‘paytmasiga teng bo‘ladi.

## 2.7.9. sinx/x ko‘rinishidagi signal spektri zichligi

Uzluksiz signallarni vaqt bo‘yicha diskretlashda uning har bir Δ vaqtga mos keluvchi oniy qiymati sin / funksiya orqali ifodalanadi. Ushbu sin / funksiyaning spektri zichligini Fure to‘g‘ri almashtirishi formulasidan foydalanib hisoblaymiz.

Berilgan sin / funksiyasi shaklidagi signalni quyidagicha ifodalaymiz:

$$( ) = \frac{\sin}{\quad} ,$$

bunda, $= 2 \quad = \frac{}{} , \quad - \sin$ funksiyaning takrorlanish davri.

Signal oniy qiymatlari nolga teng bo‘ladigan nuqtalar quyidagicha aniqlanadi:

$$= \pm \quad , \qquad = 1,2,3,...., \qquad = \pm \frac{}{} .$$

U holda

$$( ) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin}{\quad} = 2 \int_{0}^{\infty} \frac{\sin \cdot \cos\omega}{\quad} = \frac{}{} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin( \quad + \ )}{\quad} - \frac{}{} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin( \quad - \ )}{\quad} .$$

Aniq integrallarni hisoblash ma’lumotnomasiga asosan

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \begin{cases} \pi / 2, & agar\ a > 0, \\ -\pi / 2, & agar\ a < 0. \end{cases}$$

Yuqoridagiga asosan agar | | > bo‘lsa ( ) = 0, va agar | | < bo‘lsa ( ) = / . Shunday qilib, sin / ko‘rinishidagi signal haqiqiy va juft funksiya bo‘lib, amplituda spektri o‘rovchisi to‘rtburchak impuls shaklida bo‘ladi. Biz tahlil qilgan ( ) = $\frac{}{}$ signal amplituda spektri polosasi + va − chastotalar bilan chegaralangan bo‘lib, ushbu polosada hamma spektr tashkil etuvchilari amlpitudalari bir xil kattalikka ega (2.18-rasm).

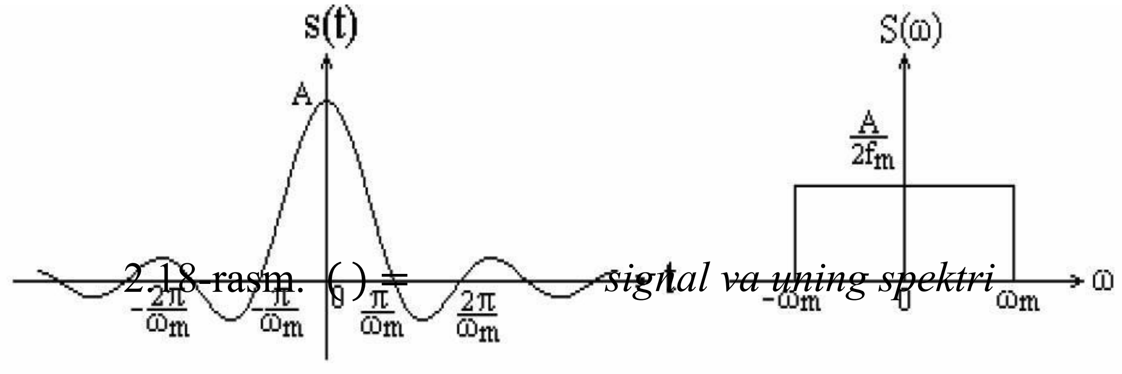
Xuddi yuqoridagidek natijani Fure to‘g‘ri va teskari almashtirishi xossasi asosida ham olish mumkin. Bu xossasiga asosan ( ) juft signalga ( ) spektr zichligi mos keladi, demak ( ) signalga 2 ( ) spektr zichligi mos keladi.

Ma’lumki davomiyligi bo‘lgan va amplitudasi ga teng bo‘lgan to‘rtburchak impulsga ( /) / spektr zichligi mos keladi.

Demak sin / shaklidagi signalga to‘rtburchak shaklidagi amplituda spektri zichligi mos keladi. Faqat ( ) ning davomiyligi va amplituda spektrining qiymatini aniqlash kerak bo‘ladi.

Spektr zichligi formulasidagi ni ga, ni /2 ga va ni ′ bilan almashtirib signal uchun ifodani olamiz:

( ) = ′ sin .




2.18-rasm. ( ) = *signal va uning spektri*

Xuddi shuningdek, ( ) signal vaqt funksiyasi ifodasida ni ga, /2 ni ga va ′ ni bilan almashtirib, 2 chastotalar polosasida joylashgan spektr zichligi ( ) uchun ifodani olamiz. Signal amplituda spektri sathini aniqlaymiz:

( )=2 ′/2 = ′/2 .

Shunday qilib, sin / shaklidagi signal spektri uchun quyidagi ifodani yozish mumkin:

′/2 , | |≤

( )=0, | |> .

Yuqorida olingan natijalardan V.A. Kotelnikov teoremasi asosida uzluksiz signallarni diskretlash masalasini ko‘rib chiqishda foydalaniladi.

## *Nazorat savollari*

1. *Signalning asosiy xarakteristikalari haqida tushuncha bering.*

2. *Yakka sakrash funksiyasining matematik ifodasini yozing.*

3. *Qo‘ng‘iroqsimon signal matematik ifodasini keltiring va uning spektri qanday ifoda orqali aniqlanadi?*

4. *δ-funksiya matematik ifodasini keltiring va uning spektri zichligi qanday aniqlanadi?*

5. *Yakka sakrash funksiyasi matematik ifodasini keltiring va uning spektri zichligi qanday aniqlanadi?*

6. *Garmonik signal matematik ifodasini keltiring va uning spektri zichligi qanday aniqlanadi?*

7. *Yakka to‘rtburchak shaklidagi impuls amplituda va faza spektri qanday aniqlanadi? Ushbu signal uchun amplituda va chastota spektri qanday ko‘rinishga ega?*

8. *sinx/x ko‘rinishidagi signal spektri qanday aniqlanadi va u qanday ko‘rinishga ega?*

$x\ t$

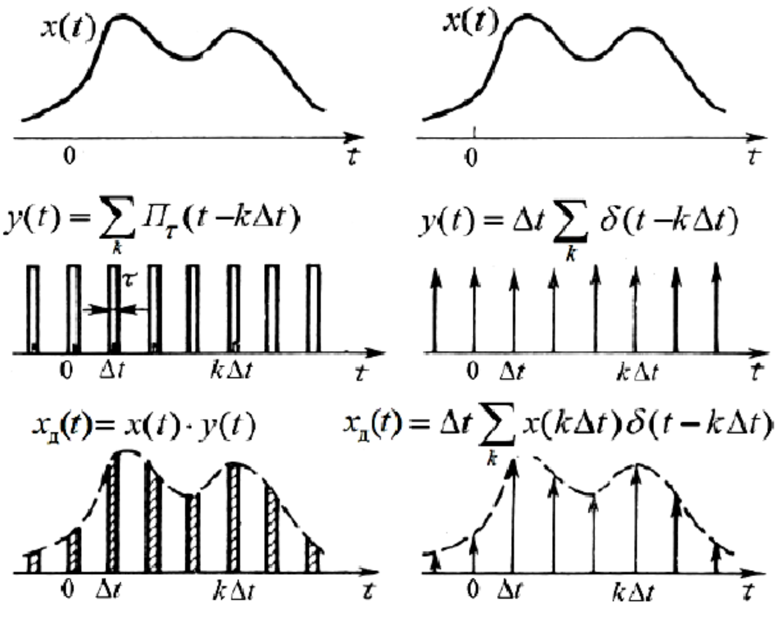
# 3. SIGNALLARNI DISKRET VAQT FUNKSIYASI SIFATIDA IFODALASH

## 3.1. Asosiy tushunchalar

Signallarning asosiy turlariga quyidagilar kiradi: analog, diskret va raqamli.

Analog signallar uzluksiz va bo'laklari uzluksiz funksiya bilan

ifodalanadi, bunda funksiyaning o'zi va argumenti har qanday qiymatlarni qabul qilishi mumkin, ya'ni $t_1\ t\ t_2$ , $x_1\ x\ x_2$ (3.1*a*-rasm).




***a*** ***b***

3.1-rasm. *Uzluksiz signalni diskretlash* *a* *б*

Diskret signal $x_d\ t$ uzluksiz signal $x\ t$ ni diskretizatsiyalash

funksiyasi $y\ t$ ga ko'paytirish natijasida hosil qilinadi. Bunda $y\ t$ diskretlash funksiyasi $t$ odim bilan davriy takrorlanuvchi kichik davomiyli impulslar ketma-ketligi (3.1*a*-rasm)dan foydalaniladi. Ideal holatda diskretlash funksiyasi sifatida delta-funksiyalar davriy ketma-ketligidan foydalaniladi (3.1*b*-rasm).

$T\ \ k\ t$ oraliq diskretlash davri deb ataladi, unga teskari bo'lgan kattalik diskretlash chastotasi deb ataladi,

$x_{\Gamma}\ t$

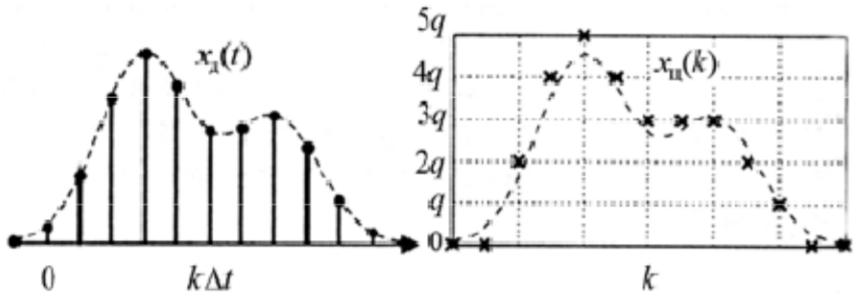
$$f_n \quad 1/T.$$

Diskret signalning $nT$ vaqtdagi qiymatlari uning oniy qiymatlari deb ataladi. Diskret signal haqiqiy yoki kompleks bo‘lishi mumkin. Kompleks signalning haqiqiy va mavhum qismi haqiqiy ketma-ketliklar orqali ifodalanadi

$$x\ nT \quad x_1\ nT \quad jx_2\ nT.$$

Raqamli signal kvantlangan panjarasimon funksiya (3.2-

rasm), ya’ni qator diskret sathlarni kvantlash sathi $mq$ qiymatlarga $nT$ vaqtlarda ega bo‘luvchi panjarasimon funksiyadir. Bunda $q$ – sath bo‘yicha kvantlash odimi, $m$ – kvantlash oralig‘i tartib raqami, $m$ 0, 1, 2,...,$M$ 1, $M\ 2^n$ bo‘lib, $n$ – butun musbat son.




3.2-rasm. *Raqamli signal*

Raqamli signal cheklangan razryadli sonlar ketma-ketligi orqali ifodalanadi. Ba’zan diskret va raqamli signallarni ifodalashda normallashtirilgan vaqt $i$ tushunchasidan ham foydalaniladi, ya’ni

$$i \quad \frac{t}{T},$$

deb qabul qilinadi va u $t\ nT$ bo‘lsa, olingan oniy qiymat tartib raqami $n$ ni anglatadi, $n$ -chi diskret vaqt $n \frac{t}{T} i$ . Normallashtirilgan vaqt tushunchasi diskret signal $x_d\ t$ ni o‘zgaruvchan butun son funksiyasi $x\ n$ shaklida ifodalash imkoniyatini beradi. Bunda diskret signalni ifodalash uchun bir-biriga aynan teng quyidagi ifodalardan foydalanish mumkin:

$n \;0,1,2,...,$

$$x\;n\;\text{va}\;x\;nT\;;\;x\;nT\;x\;n\;.$$

## 3.2. Diskret signallarning matematik modellari

Diskret signalni quyidagi matematik ifodalar orqali aniqlash mumkin:

– diskret vaqt funksiyasi $nT_d : x(nT_d) \quad x\,t\,| \quad nT_d$, bunda

lar analog signalning diskret davriy takrorlanuvchi vaqtdagi oniy (tanlangan) qiymatlariga mos keluvchi normallashtirilgan vaqt;

– olingan qiymat tartib raqami $n$ -funksiyasi: $x(n)\;x\;nT_d\;T_d\;1$ , | umuman olganda vaqt bilan to‘g‘ridan-to‘g‘ri bog‘lanmagan;

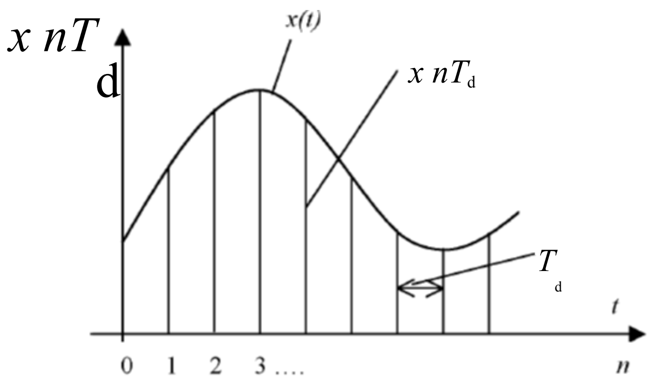
– uzluksiz vaqt funksiyasi:
–

$$x(t)\;\;x(t)\,f\;\;t\quad x(t)t\;\;nT_d\,x(nT_d)\;\;t\;\;nT_d \qquad (3.1)$$

analog signal $x\;t$ ni diskretlash funksiyasi $f\;\;tt\;\;nT_d$ ga ko‘paytirish natijasida quyidagi cheksiz qisqa davomiyli impulslar davriy ketma-ketligi uchun ifodani olamiz:

$$t\;\;nT_d \quad \begin{cases} , & t\;\;nT_d\,, \\ 0, & t\;\;nT_d\,. \end{cases}$$

Diskret signallar tanlash tartib raqami $n$ yoki diskret vaqt $nT_d$ funksiyasi ko‘rinishida tasvirlanishi mumkin (3.3-rasm).



$nT_d$

3.3-rasm. *Uzluksiz* $x(t)$ *va diskret* $x(nT_d)$ *signal grafiklari*

$x\ t$

3.3-rasmda keltirilgan vaqt uzluksiz funksiyasini diskret signal $x\ nT_d$ ga mos keluvchi analog $x\ t$ signalga yoki $x\ n$ o‘rovchisiga tenglashtirish mumkin.

$x_d\ t$ va $x\ nT_d$ signallari bir-biri bilan chiziqli bog‘liklikda

$(t)dt$

$x\ nT_d$

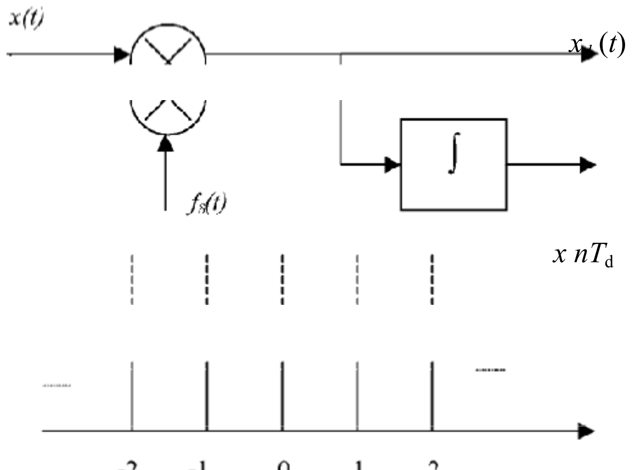
$x_d$

va bir xil xossalarga ega, ammo o‘lchov birliklari turlicha.

Tanlangan oniy qiymatlarni tartib raqami $n$ orqali ifodalangan signallarni raqamlar ketma-ketligi deb ham ataladi. Uzluksiz vaqt funksiyasi (3.1) ni diskret signal ko‘rinishida aniqlash balans

modulyatsiya signaliga yoki davriy takrorlanuvchi $f\ t$ impulslar

diskretlangan signallar oniy qiymatlariga proporsional yuzaga ega bo‘lgan impulslar ketma-ketligi yoki uning $x\ nT_d$ vaqtlaridagi impulslar oniy qiymatlariga ko‘paytmasiga teng deb hisoblash mumkin (3.4-rasm). Bu ta’rif analog signal va tizimlarni ta’riflovchi usullar (metod) yordamida matematik ifodalarni olish hamda ularni diskret signal va tizimlarga xos xususiyatlar (ko‘rsatkichlar) bilan solishtirish imkonini beradi.



$nT_{\text{d}}$

3.4-rasm. *Signalni vaqt bo‘yicha diskretlash ekvivalent sxemasi*

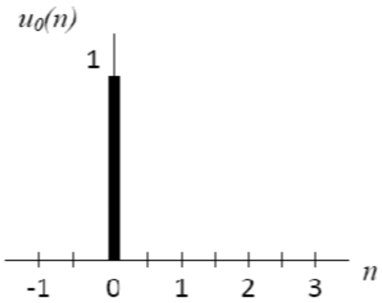
## 3.3. Sinov diskret signallari

Signallarga raqamli ishlov berish (SRIB)da bir qator signal turlaridan ta’sir etuvchi sinov signallari sifatida foydalaniladi. Eng ko‘p foydalaniladigan sinov signallariga quyidagi signallar kiradi:

1. *Raqamli birlik impuls*, quyidagi ketma-ketlik bilan ifodalanadi:

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \qquad (3.2)$$

ya'ni, bu signal $n = 0$ bo'lganda birga teng va $n$ ning boshqa hamma qiymatlarida nolga teng bo'ladi (3.5-rasm).

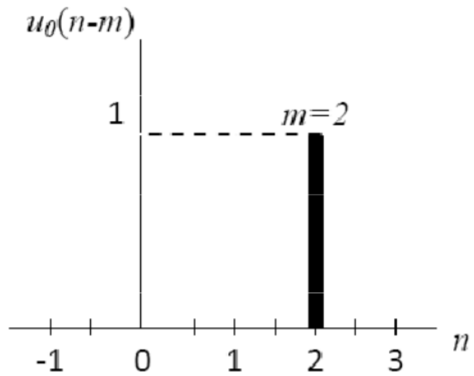



3.5-rasm. *Raqamli birlik impuls*

Kechiktirilgan (ushlanib qolgan) raqamli birlik impuls quyidagi ketma-ketlik orqali ifodalanadi:

$$u_0(n-m) = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m \end{cases} \qquad (3.3)$$

ya'ni, bu signal kechiktirilmagan signaldan farqliroq, $n = m$ bo'lganda birga teng va $n$ ning boshqa hamma qiymatlarida nolga teng bo'ladi (3.6-rasm).



3.6-rasm. *Kechiktirilgan raqamli birlik impuls*

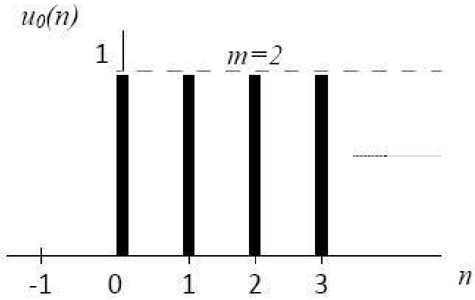
Kechiktirilgan raqamli birlik impuls ta'rifidan quyidagi tenglik kelib chiqadi

$$x(n) = \sum_{m-0}^{\infty} x(m) u_0 \, (n - m). \qquad (3.4)$$

2. *Raqamli bitta sakrash* quyidagi ketma-ketlik bilan ifodalanadi

$$u(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0; \\ 0, n < 0. \end{cases} \qquad (3.5)$$

ya'ni, bu signal $n$ ning hamma manfiy bo'lmagan qiymatlarida birga teng (3.7-rasm).

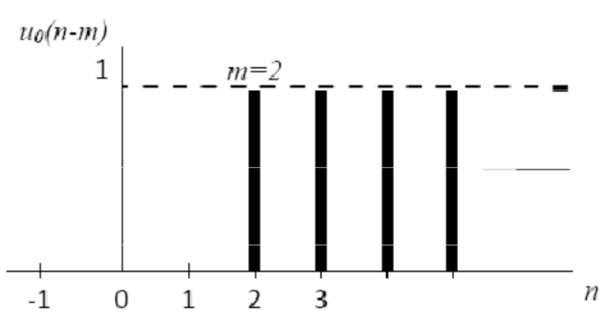



3.7-rasm. *Raqamli bitta sakrash*

Kechiktirilgan raqamli birlik sakrash quyidagi ketma-ketlik orqali ifodalanadi

$$u_1 = (n - m) \begin{cases} 1, & n \geq m; \\ 0, & n < m. \end{cases} \qquad (3.6)$$

ya'ni, bu signal kechiktirilmagan signaldan farqliroq, $n$ $m$ ning hamma qiymatlarida birga teng va $n$ ning boshqa hamma qiymatlarida nolga teng bo'ladi (3.8-rasm).




3.8-rasm. *Kechiktirilgan raqamli bitta sakrash*

3. *Diskret eksponenta* quyidagi ketma-ketlik orqali ifodalanadi

$$x(n) - \begin{cases} a^n, n > 0. \\ 0, n < 0. \end{cases} \qquad (3.7)$$

bunda, *a* – haqiqiy o‘zgarmas kattalik (konstanta).

*a* ning qiymati va belgisi (+ yoki -) ga bog‘liq ravishda diskret eksponenta quyidagicha nomlanadi:

$a\ |\ |\ 1$ va $a\ \ 0$ – kichiklashuvchi belgisi o‘zgarmas (3.9*a*-rasm)

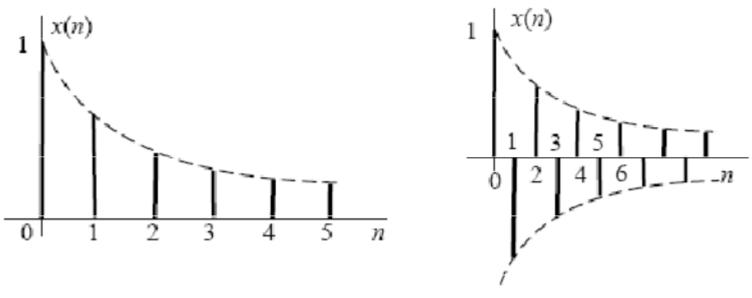
$a\ 1, a\ 0;$

$|a|\,1$ va $a\ 0$ – kichiklashuvchi o‘zgaruvchan belgili (3.9*b*-rasm);

$a\ 1$ – kattalashuvchi (o‘suvchi);

$a\ 1$ va $a\ 0$ – raqamli birlik sakrash (3.7-rasm);

$a\ 1$ va $a\ 0$ – belgisi o‘zgaruvchan birliklar ketma-ketligi.




***a*** ***b***

3.9-rasm. *Belgisi o‘zgarmas (a) va belgisi navbat bilan o‘zgaruvchi (b) diskret eksponentalar*

4. *Diskret garmonik signal*, misol uchun diskret kosinusoida quyidagi ketma-ketlik orqali ifodalanadi

$$x(nT)\ \ x(n)\ \ A\cos(2\ fnT_d)\ \ A\cos(\ nT_d) \qquad (3.8)$$

bunda $T_d$ – diskretlash davri; $A$ – amplituda; – aylanma chastota bo‘lib, siklik (davriy) chastota $f$ orqali bog‘langan ( $2f$).

bilan proporsonallik koeffisienti 2

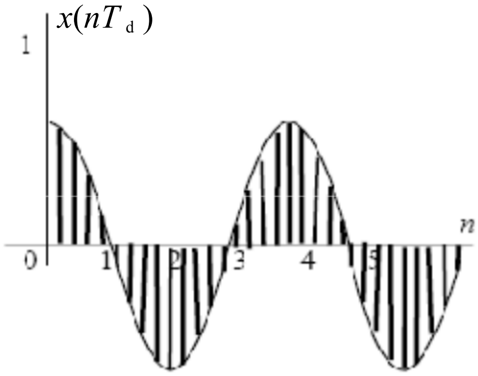
Diskret kosinusoida analog kosinusoidadan uzluksiz vaqtli diskret vaqt $nT_d$ bilan almashtirish orqali olinadi, ya'ni

$$x(t) = A\cos(2\pi f t) = A\cos(\omega t)$$

bo‘lsa va uzluksiz vaqt $t$ ni $nT_\text{d}$ bilan almashtirish natijasida quyidagini olamiz (3.10-rasm)

$$x(nT) \quad x(n) \quad A\cos(\quad t)\Big|_{t \; nT_\text{d}} \quad A\cos(\quad nT_\text{d}) \qquad (3.9)$$

Diskret sinusoida ham shunga o‘xshash shaklda ifodalanadi.




3.10-rasm. *Diskret kosinusoida*

5. *Diskret kompleks garmonik signal*, kompleks ketma-ketlik bilan ifodalanadi

$$x(n) \quad Ae^{j \; nT_\text{d}} \qquad (3.10)$$

yoki ikki haqiqiy ketma-ketlik: kosinusoida (haqiqiy qismi) va sinusoida (mavhum qismi) orqali ifodalanishi mumkin

$$x(nT) \quad A\cos(\quad nT_\text{d}) \quad jA\sin(\quad nT_\text{d}).$$

## 3.4. Kotelnikov teoremasi

Zamonaviy axborot uzatish tizimlarida, shu jumladan radiotexnik axborot uzatish tizimlarida uzluksiz signallarni diskretizatsiyalash va kvantlash orqali raqamli shaklda uzatish, ularga raqamli ishlov berish usullaridan keng foydalanilmoqda. Uzluksiz signallarni Δ vaqt oraliqlarida olingan oniy qiymatlari yordamida uzatish, vaqt bo‘yicha zichlash usulidan foydalanib bir aloqa kanali orqali bir qancha axborot manbalaridan olingan signallarni uzatish, aloqa kanallarining xabar o‘tkazish imkoniyatidan samarali foydalanish imkoniyatini yaratadi.

Diskretizatsiyalash natijasida ( ) uzluksiz signal Δ vaqtlar orasida ketma-ket olingan oniy qiymatlar (impulslar) orqali ifodalanadi, ya’ni signal ( Δ ) oniy qiymatlar ketma-ketligi shakliga keltiriladi.

Uzluksiz signalni qanchalik aniq qayta tiklash diskretlash oralig‘i

Δ qiymatiga bog‘liq, Δ qancha kichik bo‘lsa signalni qayta tiklash aniqligi shuncha yuqori bo‘ladi. Ammo Δ ni talab etiladiganidan kichiklashtirib yuborish aloqa kanalidan foydalanish samaradorligining pasayishiga olib keladi va ushbu diskret signallarga ishlov berish jarayonini murakkablashtiradi.

Spektri kengligi cheklangan uzluksiz signalni diskret vaqt Δ larda olingan qiymatlari asosida talab darajasidagi aniqlik bilan qayta tiklash uchun talab etiladigan diskretlash oralig‘i Δ ning optimal (eng ma’qul) qiymati V.A. Kotelnikov teoremasi asosida aniqlanadi.

Kotelnikov teoremasiga asosan spektri yuqori chastotasi bilan cheklangan uzluksiz signalni uning Δ ≤ – , sek, bir xil vaqt oraliqlarida olingan oniy qiymatlari orqali to‘liq qayta tiklash mumkin. Teoremani asosliligi spektri eng yuqori chastotasi Ω = 2 bo‘lgan ( ) ni quyidagi qator, vaqt funksiyalari orqali ifodalash orqali tasdiqlanadi, ya’ni

$$( ) = \sum_{\infty}^{\infty} ( \Delta ) \frac{\sin\Omega ( - \Delta )}{\Omega ( - \Delta )}, \quad (3.11)$$

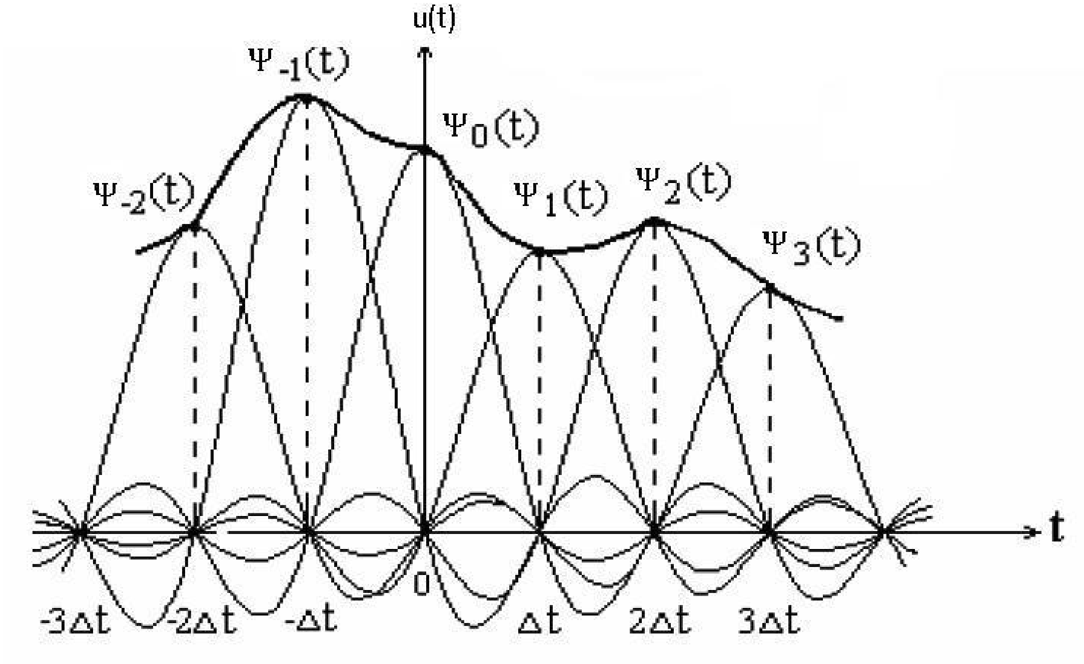
bunda, Δ = – – ikki qo‘shni oniy qiymatlarni aniqlash orasidagi vaqt, ko‘p hollarda agar alohida ta’kidlanmagan bo‘lsa, bu vaqt oraliqlari bir xil qiymatga ega bo‘ladi, ( Δ ) – signal ( ) ning Δ vaqtlarga mos keluvchi oniy qiymatlari.

(3.11) formuladagi

$$( ) = \frac{\sin\Omega ( - \Delta )}{\Omega ( - \Delta )} \quad (3.12)$$

funksiyalar Kotelnikov qatorining asosini tashkil etuvchi bazis funksiyalar hisoblanadi.

( ) signalni Kotelnikov qatori shaklida ifodalash 3.11-rasmda keltirilgan.




3.11-rasm. *Signalni Kotelnikov qatori shaklida ifodalash*

## 3.5. Kotelnikov teoremasining tasdig'i

***a. / ko'rinishidagi bazis funksiyasining asosiy xossalari***

( ) = Ω ( Δ ) – funksiya sin / ko'rinishidagi funksiya

Ω ( Δ)

bilan bir-biridan vaqt bo'yicha ga siljiganligi bilan farqlanadi. ( ) funksiya = Δ vaqtlarida o'zining eng katta maksimal qiymatiga teng bo'ladi. Bir-biridan Δ farq qiluvchi = 0 va = Δ vaqtlarga mos keluvchi diskret signal oniy qiymatlari

( ) = Ω va ( ) = Ω ( Δ )

Ω Ω ( Δ )

larga teng bo'ladi.

Ushbu = 0 va = Δ vaqtlarga mos keluvchi vaqt funksiyalari ( ) va ( ) grafiklari 3.12-rasmda keltirilgan. Ushbu sin / ko'rinishidagi funksiyalarning = − Δ vaqtlardagi qiymatlari nolga teng.

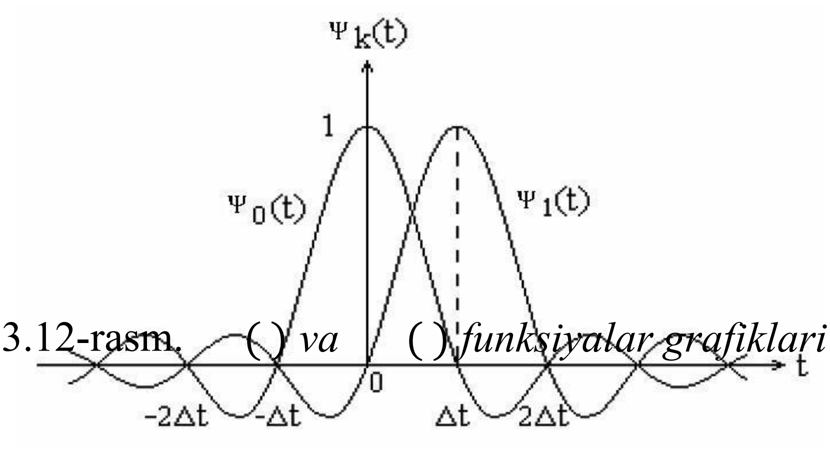
( ) – funksiya ko'rinishidagi signal spektrini aniqlaymiz.

( )=A Ω ko‘rinishidagi signal amplituda spektri avval

Ω

aniqlaganimizdek 2Ω chastotalari bilan chegaralangan to‘g‘ri to‘rtburchak shaklida bo‘ladi. Ushbu signal amplituda spektri quyidagicha ifodalanadi:

$$S(j\ )\ 2 \quad m\ ,\ m\ \cdot \quad 0,$$




3.12-rasm. ( ) *va* ( ) *funksiyalar grafiklari*

( ) bazis funksiya signali va ( ) signallar, ya’ni ( ) =

Ω ( Δ) / Ω ( Δ) va ( ) = A Ω / Ω lar bir-biridan amplitudalari va vaqt bo‘yicha Δ ga siljitilganligi bilan farq qiladi. Demak, ( ) signal spektri kompleks qiymatga ega bo‘lib, bunda uning amplituda spektri shakli o‘zgarmas saqlanadi, lekin ( ) = – ΩΔ faza spektriga ega bo‘ladi. ( ) bazis funksiya signali spektri zichligi umumiy ifodasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$S_k(j\ )\ \frac{1}{2}\ m \quad m\ ,\ m\ \cdot$$

Δ = ni ~~e’ti~~borga olsak,

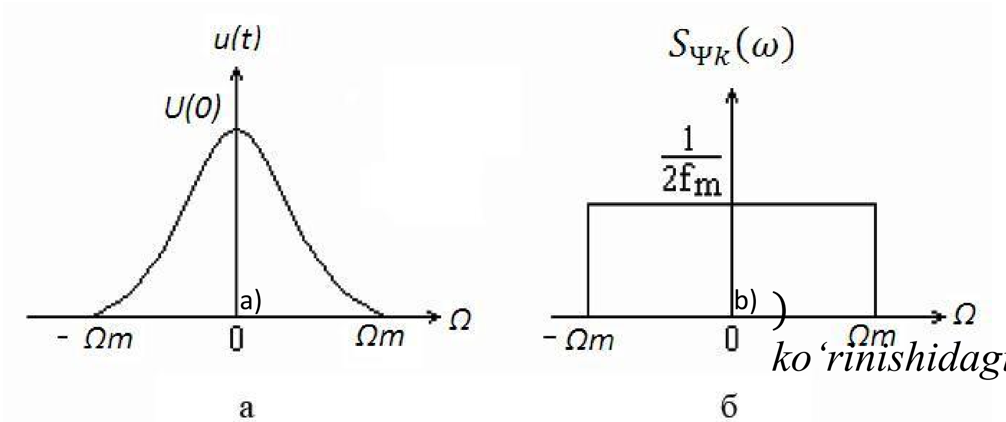
$$m\ ,\ m\ \cdot$$

$$S_k(j\ )$$

3.13-rasmda diskretlanadigan signal ( ) va ( ) = Ω ( Δ)

ko'rinishidagi signal spektri grafigi keltirilgan.

Ω ( Δ)




ko'rinishidagi

3.13-rasm. *Diskretlanadigan signal (a) va signal spektri*

## *b. Kotelnikov teoremasining isboti*

(3.11) Kotelnikov qatori uzluksiz signal ( ) ning har qanday oniy vaqtdagi qiymatini aniqlash imkoniyatini berishini isbotlaymiz. Buning uchun berilgan funksiyani ortogonal tashkil etuvchilarga yoyish usulidan foydalanamiz:

1. Ortogonal tashkil etuvchilarga yoyish uchun berilgan funksiya – uzluksiz signal ( );
2. Bazis funksiya shaklida sin / funksiyani, ya'ni ( ) = Ω ( Δ) ni tanlaymiz;
3. Ushbu tahlil etiladigan signal uchun Fure umumlashgan qatori quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi: Δ)

$$( ) = \sum_{\infty}^{\infty} ( ), \quad = \frac{1}{\| ( )\|} \int_{\infty}^{\infty} ( ) ( )$$

Kotelnikov qatorini aniqlash uchun: ( ) funksiyalarning o'zaro ortogonalligini isbotlash, so'ngra ‖ ( )‖ – ( ) funksiyaning normasi kvadratini aniqlash va koeffisientlarni hisoblash talab etiladi.

## ( ) *funksiyalarning o'zaro ortogonalligini isbotlash*

( ) funksiyalar majmuasi o'zaro ortogonal bo'ladi, agar quyidagi shart bajarilsa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t)\,\varphi_n(t)\,dt = \begin{cases} \|\varphi_k(t)\|^2, & agar\ k = n, \\ 0, & agar\ k \neq n. \end{cases}$$

bunda, ‖ ( )‖ = $\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (\ )\,}$ ( ) funksiya normasi.

$\neq$ bo'lgan holat uchun ( ) ( ) ko'paytmasi integrali qiymatini aniqlaymiz.

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\ )(\ ) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\Omega\,( - \Delta)}{\Omega\,( - \Delta)} \cdot \frac{\sin\Omega\,( - \Delta)}{\Omega\,( - \Delta)} . \quad (3.13)$$

Fure to'g'ri va teskari almashtirishlari asosida

( ) ↔ ( ) va ( ) ↔ ( ) bo'lsa, u holda

$$(\ )(\ ) \leftrightarrow \frac{1}{2}\,(\ ) \otimes (\ ).$$

Shundan kelib chiqib,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\ )\ (\ ) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (\ \Omega\ )\ [\ \ - \Omega)\ ]\ \Omega.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\ )\ (\ ) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (\ )^{*}\ \omega.$$

Ushbu munosabatni (3.13) ifodaga qo'llaymiz va quyidagilarni e'tiborga olgan holda

$$\frac{\sin \omega_m (t - k\Delta t)}{\omega_m (t - k\Delta t)} \leftrightarrow \frac{1}{2 f_m} e^{-j\omega k \Delta t} \quad agar\ |\omega| \le \omega_m;$$

$$\frac{\sin_m t \; n t}{{}_m t \; n t} \quad \frac{1}{2 f_m} \quad e^{j \, n t} \quad agar_{mm}.$$

Demak Ω

∞ () () = $\frac{1}{2}$ Ω $\frac{1}{2}$ Ω Δ $\frac{1}{2}$ Ω Δ =

∞

= $\frac{1}{8}$ Ω( ) Δ Ω = − $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{(-\quad)\Delta}$ Ω ( )Δ Ω = Ω

= $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{(\quad - \quad)\Delta}$ Ω ( )Δ − Ω ( )Δ =

$\frac{1}{=4}$ $\frac{1}{(\quad - \quad)\sin\Omega}$ ( ) − Δ = $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{(\quad - \quad)\sin\Omega}$ ( ) − = 0.

‖ ()‖ qiymatini aniqlaymiz:

‖ ()‖ = ∞ ∞ () = ∞ ∞ $\frac{\sin \Omega \; (- \quad \Delta)}{\Omega(-\Delta)}$ .

Quyidagicha belgilashlarni kiritamiz:

Ω ( − Δ ) = ; =Ω+Δ; $\frac{1}{\quad}$ = Ω $\frac{\quad}{\quad}$ .

U holda

‖ ()‖ $\frac{1}{=\Omega}$ ∞ ∞ $\frac{\sin}{\quad}$ =Ω =2 = Δ .

Shunday qilib, *t*, *agar k n*,

$$_k(t) \; _n(t)dt \qquad 0, \quad agar\ k \ n.$$

Demak ( ) funksiyalar majmuasi ortogonalligi isbotlandi.

## *Kotelnikov qatori koeffisientlarini aniqlash*

koeffisientlarining qiymatlarini quyidagi formuladan foydalanib aniqlaymiz:

1 ∞

= () () .

‖ ()‖ ∞

$\int_{\infty}^{\infty}$ () () integralini hisoblashda () () ko‘paytma

integralini ≠ holat uchun hisoblash usulidan foydalanamiz:

∞ 1 ∞ 1

()()= (ω)ψ*()ω= (ω)Δ Δ ω =

2 2

∞ ∞

1 Ω

() Δ ( )

= Δ 2 ω = Δ Δ .

Ω ω

Integrallash chegaralarini aniqlashda real signal spektri va ()

signal spektrining Ω bilan cheklanganligini e’tiborga olish kerak.

Shunday qilib, koeffisientlar quyidagilarga teng bo‘ladi:

1 ∞ 1

() ( ) ( )

‖ ()‖ () = Δ Δ = Δ .

∞

Demak, Kotelnikov qatoridagi kerakli kattaliklarning hammasi aniqlandi va qator uchun ifodani quyidagi shaklda keltiramiz:

sinΩ ( − Δ ) (Δ)Ω(−Δ)

∞

∞

()= . ()=

∞

∞

Uzluksiz signali ( ) ni uning diskret vaqtlardagi oniy qiymatlari ( Δ ) orqali ifodalash natijasida quyidagi xulosalarni keltirish mumkin:

a) signalning eng katta chastotasi bilan cheklanganligi uchun

uzluksizligiga asos hisoblanadi;
b) uzluksiz signal ( ) spektri va ( ) bazis funksiyaning spektri
kengligi Δ = 2Ω (3.3-rasm). Bu Kotelnikov teoremasidagi asosiy
shart Δ = 1/2 orqali ham tasdiqlanadi;
v) diskretlash oralig‘i Δ ni 1/2 dan kichik qilib ham tanlash
mumkin. Bu holda bazis funksiya ( ) ning spektri ( ) signal
Ψ
( ) spektridan keng bo‘ladi;
g) agar uzatiladigan signal ( ) spektrining dan katta tashkil
etuvchilari filtrlash asosida cheklangan bo‘lsa, u holda Δ < 1/2

qilib tanlash ( ) ni qayta tiklash aniqligini oshiradi. Shuni doim yodda tutish kerak, har qanday davomiyligi cheklangan signal spektri nazariya nuqtai nazaridan cheksiz keng spektrga ega bo‘ladi. Ammo real uzatiladigan signallarning spektri kengligi aloqa tizimi qaysi tur vazifani bajarishligi (tovush, harakatdagi yoki harakatsiz tasvirni uzatish, axborot uzatish tezligi va h.k.) va qabullash tomonida signalni qayta tiklash sifatiga qo‘yiladigan talablar orqali belgilanadi;
d) agar diskretlash oralig‘i Δ > 1/2 dan katta qilib tanlansa
(belgilansa), u holda bazis funksiya ( ) spektri Ψ ( ) kengligi
uzluksiz signal ( ) spektridan tor bo‘ladi.

## 3.6. Davomiyligi cheklangan uzluksiz signallarni diskretizatsiyalash

Davomiyligi bilan cheklangan signal cheksiz keng spektrga ega bo‘ladi, ammo amalda ushbu signal asosiy energiyasi to‘plangan spektri kengligini, energiyasi ma’lum qiymatdan kichik bo‘lgan signal spektri tashkil etuvchilarini e’tiborga olmaslik orqali aniqlash (chegaralash)

mumkin. Ushbu chegaraviy chastotani shartli ravishda bilan belgilab, diskretlash oralig‘i Δ ni aniqlash mumkin, ya’ni $t$ $1/2F_m$ , sek va u holda davomiyligi cheklangan signalni uning
≥ +1=2 + 1

Δ

ta oniy qiymatlari orqali aniqlash mumkin. Ba’zan 2 ni signal

bazasi yoki koordinatali fazodagi nuqta sifatida ham tasavvur etish mumkin. Shunday qilib, davomiyligi bilan cheklangan signalni ta tashkil etuvchi orqali ifodalash mumkin, u holda kotelnikov qatori quyidagi ko‘rinishni oladi:

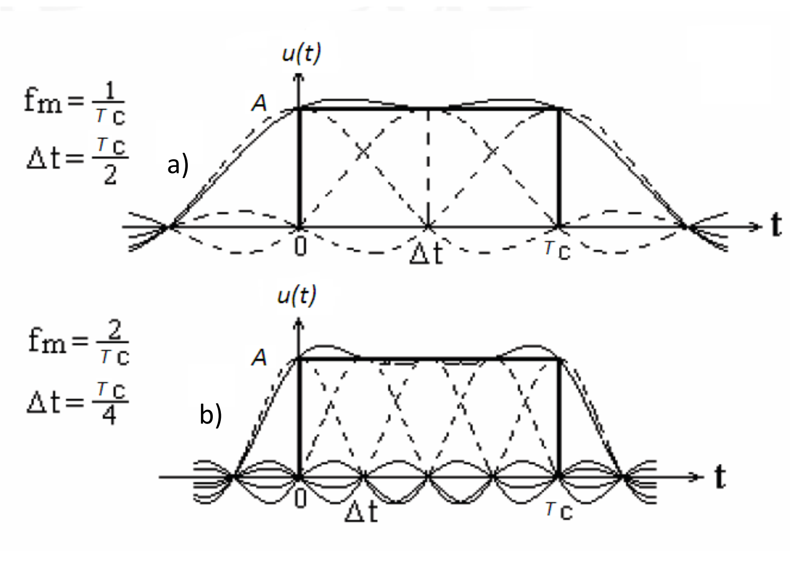
$$( ) = \qquad ( \quad \Delta ) \qquad \frac{\sin\Omega \ ( - \ \Delta )}{\Omega(-\Delta)}$$

Tashkil etuvchilari soni bo‘lgan kotelnikov qatori uzluksiz

signal ( ) ni faqat Δ onlardagi qiymatlarini aniq tiklash imkonini beradi. Oniy qiymatlar olish oraliqlarida ( ) signalni qayta tiklash xatoliklari katta bo‘ladi va bu xatolik signal davomiyligi ning boshlanish va tugillanish vaqtlarida katta bo‘ladi.

3.14-rasmda to‘rtburchak shaklidagi ( ) impulsni chegaraviy chastota ning turli qiymatlarida Δ vaqt oraliqlarida olingan oniy qiymatlari orqali qayta tiklashga tegishli chizmalar keltirilgan. 3.14-rasmdagi chizmalardan ko‘rinadiki, signalni qayta tiklash aniqligi davomiyligi cheklangan impulslar chegaraviy chastotasini oshirish va unga mos ravishda diskretlash oralig‘ini kichiklashtirish natijasida yaxshilanadi.

Misol uchun, signal spektri kengligini uning o‘rovchisi birinchi nol qiymatiga ega bo‘lish kengligida cheklansa = — 3.14a-rasmdagi ko‘rinishdagi shaklda qayta tiklanadi. Bu rasmda = 2 +1=3, ya’ni davomiyligida 3 ta oniy qiymat aniqlangan.




3.14-rasm. *Cheklangan davomiylikli signalni diskretlash*

3.14b-rasmda signal spektri kengligi uni o'rovchisi ikkinchi chproqchasining nolga teng bo'lgan kengligi, ya'ni = _ chastota bilan chegaralansa, bu holda = 2 + 1 = 5 bo'ladi va signal davomiyligi vaqt davomida beshta oniy qiymat asosida tiklanadi.

## 3.7. Diskretlangan signal spektri

Uzluksiz signal ( ) ni dsikretlash natijasia uning Δ vaqtlarda olingan oniy qiymatlari ( Δ ) ga mos keluvchi impulslar ketma-ketligi $_{\partial}$( ) shakllanadi. Analog signal spektri ( ) ni diskretlangan signal spektri $_{\partial}$( ) bilan bog'liqligini aniqlaymiz.

Diskretlangan signalni analog signalning ( Δ ) vaqtlardagi oniy qiymatlarga proporsional -funksiyalar ketma-ketligi shaklida ifodalash mumkin (3.5-rasm), ya'ni

$$_{\partial}() = \sum_{-\infty}^{\infty} (\Delta)(-\Delta). \qquad (3.14)$$

( − Δ ) funksiya faqat = Δ vaqtlarda nolga teng bo'lmasligini e'tiborga olib, (3.14) formulani quyidagi shaklga keltirish mumkin:

$$_{\partial}() = () \sum_{-\infty}^{\infty} (-\Delta). \qquad (3.15)$$

(3.15) fomuladagi yig'indi (summa) – bu davriy funksiya bo'lib, uni quyidagi Fure qatori ko'rinishiga keltirish mumkin:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \Delta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \cdot \ _{\partial}.$$

Ushbu qatorning koeffisientlari · ni aniqlaymiz.

$\Delta /$

$$= \frac{1}{\Delta} \quad \Delta / \quad () \quad \partial \quad = \frac{1}{\Delta},$$

bunda, $\partial = \frac{}{\Delta}$ – diskretlash chastotasi.

koeffisientlarni hisoblashda -funksiyaning tanlovchanlik hossasi va integrallash oralig‘i (– $\frac{\Delta}{}$ , $\Delta /2$) ga ( = 0 bo‘lganda) faqat bitta -funksiya tushadi.

Shunday qilib, davriy takrorlanuvchi -funksiyalarni quyidagi Fure kompleks qatori shaklida ifodalash mumkin:

$$\sum_{\infty}^{\infty} ( - \Delta) = \frac{1}{\Delta} \sum_{\infty}^{\infty}$$

U holda

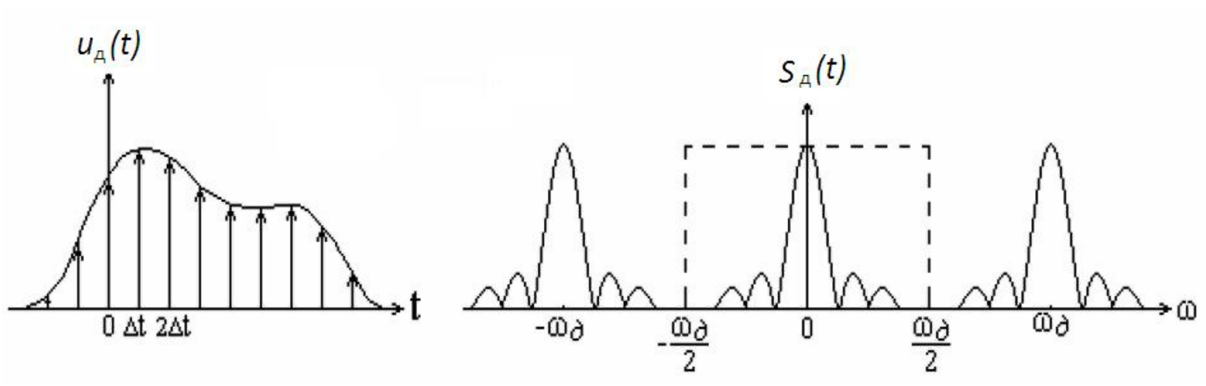
$$_{\partial}() = () \sum_{\infty}^{\infty} ( - \Delta) = \frac{()}{\Delta} \sum_{\infty}^{\infty} \partial = \frac{1}{\Delta} \sum_{\infty}^{\infty} () \quad \partial .$$

Fure almashtirish xossasidan ma’lumki, signalni $\partial$ ga ko‘paytirish, ushbu signal spektrini o‘ng tomonga $\partial$ ga siljishiga olib keladi. Shuning uchun diskretlangan signal spektrini quyidagicha ko‘rinishda ifodalash mumkin:

$$_{\partial}(\ ) = \frac{1}{\Delta} \sum_{\infty}^{\infty} [\,( - \quad _{\partial})]. \tag{3.16}$$

Shunday qilib, diskretlangan signal spektri analog signal spektrining o‘ng tomonga siljigan cheksiz ko‘p nusxalaridan iborat bo‘ladi. Qo‘shni spektrlar nusxalari orasidagi spektr siljishi qiymati diskretlash chastotasi $_{\partial}$ ga teng bo‘ladi (3.15-rasm).

Diskretlangan signal spektri Fure to‘g‘ri va teskari almashtirishlari chastota va vaqtning bir-biriga bog‘liqligini tasdiqlaydi. Agar signal diskret bo‘lsa, uning spektri ham diskret bo‘ladi va spektr davriy takrorlanuvchi bo‘lsa, signal diskret bo‘ladi.




3.15-rasm. *Diskretlangan signal va uning spektri*

Uzluksiz signalni uning diskret vaqtlardagi oniy qiymatlari asosida tiklash usuli 3.15-rasmda keltirilgan. Buning uchun diskret signalni chastota o'tkazish polosasi kengligi diskretlash chastotasining yarmiga teng bo'lgan past chastotalar filtridan o'tkazish kerak bo'ladi. Ushbu past chastotalar filtri amplituda-chastota xarakteristikasi 3.15-rasmda punktir chiziq orqali belgilangan.

Uzluksiz signalni aniq qayta tiklash uchun uning diskret oniy qiymatlarining spektri bir-birining ustiga qisman bo'lsa ham tushmasligi kerak. Buning uchun diskretlash chastotasi $_\partial$ uzluksiz signal chegaraviy qiymati dan kamida 2 marta katta bo'lishi talab etiladi, ya'ni $_\partial \geq 2$ , natijada $\Delta \leq$ — bo'lishi kerak.

Uzluksiz signalni uning diskret qiymatlari yig'indisi sifatida ifodalash diskret signallar spektrini tahlil etishni soddalashtiradi. Diskretlangan uzluksiz signal spektri $_\partial(\ )$ ni uning Δ vaqtlardagi oniy qiymatlari orqali aniqlash mumkin.

$$_\partial(\ ) = \int_{-\infty}^{\infty} {}_\partial(\ ) \ldots = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} (-\Delta)(\Delta) \ldots =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} (\Delta) \int_{-\infty}^{\infty} (-\Delta) \ldots = \sum_{-\infty}^{\infty} (\Delta) \ldots$$

Shuni ta'kidlash kerakki, (3.16) formulada — ko'paytma borligi uchun diskretlangan signal spektri 1/sek o'lchamiga, ya'ni - siklik chastota o'lchov birligiga mos keladi.

## *Nazorat savollari*

1. *Signallarning asosiy turlarini ayting va ularga qisqa ta'rif bering.*

2. *Vaqt va sath bo'yicha diskretlash deganda nimani tushunasiz?*

3. *Raqamli signal deb qanday signalga aytiladi?*

4. *Raqamli signal uchun matematik ifodani yozing va tushuntirish bering.*

5. *Uzluksiz signallarni vaqt bo'yichadiskretizatsiyalashga tegishli Kotelnikov teoremasini aytib bering va uni vaqt diagrammasi yordamida tushuntiring.*

6. *Diskretlash qadami qanday aniqlanadi?*

7. *Kotelnikov qatori qanday ikki tashkil etuvchilardan iborat va ular qanday fizik ma'noga ega?*

8. *Vaqt bo'yicha diskretlangan signalni qayta tiklash jarayoniga tegishli jarayonlarni vaqt diagrammasi va funksional sxema asosida tushuntiring.*

9. *Davomiyligi cheklangan uzluksiz siganllarni diskretlashga tegishli vaqt diagrammalari tushuntirib bering.*

10. *Diskretlangan signal spektri birlamchi uzluksiz signal spektri bilan qanday bog'lanishga ega?*

# 4-BOB. TIZIMLARNI TA'RIFLASH VA TAHLIL QILISH

## 4.1. Umumiy tushunchalar

O‘quv qo‘llanmaning dastlabki bobida signallar va tizimlar haqidagi tushunchalarga ega bo‘ldik. Tizimlarni tahlil qilish mutaxassis – muhandislarning asosiy vazifasi hisoblanadi. Muhandislar jamiyat uchun biron-bir foydali buyum (ashyo)ni yaratishda dunyoviy bilimlarni qo‘llagan holda matematik nazariyadan foydalanishadi. Ushbu muhandislar tomonidan yaratilayotgan buyumning loyihasi tizimga misol bo‘ladi, ammo tizimga ta’rif berishda kengroq tushunchani nazarda tutish kerak. Tizim atamasi juda keng ma’noga ega.

Tizimni ifodalashning bir usuli bu uning qandaydir funksiyani bajarishi, yoki boshqa bir usuli unga ta’sir etganimizda javob qaytarishini misol sifatida keltirish mumkin. Tizim bir necha turda bo‘lishi mumkin, ya’ni elektrik tizim, mexanik tizim, biologik tizim, kompyuter tizimi, iqtisodiy tizim, siyosiy tizim va boshqalar. Muhandislar tomonidan yaratilgan tizimlar sun’iy tizimlar hisoblanadi, tabiiy jarayonlar (hodisalar) natijasida, ya’ni vaqt o‘tishi bilan rivojlanib borish va sivilizasiya natijasida yuzaga keladigan tizimlar tabiiy tizimlar hisoblanadi. Ayrim tizimlar matematik nuqtai nazardan to‘la aniqlanib, tahlil qilinishi mumkin, boshqa bir tizimlarni matematik nuqtai nazardan tahlil qilish juda murakkab hisoblanadi. Ba’zi bir tizimlarni esa ularning xarakteristikalarini o‘lchashdagi qiyinchilik tufayli yaxshi o‘rganish imkoniyati bo‘lmaydi. Ishlab chiqish, yaratish nuqtai nazaridan olganda tizim atamasi qo‘llanilganda ma’lum bir signallar qo‘llaniladigan va ushbu signallarga javob qaytaruvchi sun’iy tizim ko‘zda tutiladi.

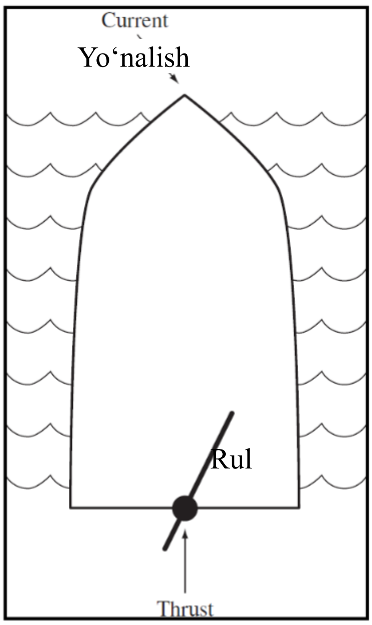
Ko‘plab tizimlar juda qadim zamonlarda hunarmandlar tomonidan yaratilgan bo‘lib, kuzatishlar va tajribalar asosida, sodda matematik jarayonlardan foydalanib, vaqt o‘tishi bilan tizimlarni takomillashtirib borganlar. Hunarmandlar va muhandislar tomonidan yaratilgan tizimlarning asosiy farqi muhandislar tomonidan yaratilgan tizimlarni ifodalash, ularni hisob-kitobi va tahlil etishda matematikadan chuqurroq (kengroq) foydalanishidir.

## 4.2. Uzluksiz vaqt tizimlari

### 4.2.1. Uzluksiz vaqt tizimlarini modellashtirish

Signallar va tizimlarni tahlil qilishdagi asosiy jarayonlardan biri tizimni modellashtirish – matematik ifodalash; mantiqiy yoki grafik ko‘rinishda ifodalash hisoblanadi. Tizimning iloji boricha barcha xususiyatlarini tavsiflovchi hamda nisbatan sodda foydalanishga ega model eng maqbul (yaxshi) model hisoblanadi.

Umuman tizimlar tahlili deganda, bir yoki bir nechta kirish signali orqali tizimga ta’sir etilganda uning bir yoki bir nechta chiqish signali orqali javob reaksiyasini tahlil qilish tushuniladi. Tizimning harakatga kelishi uning harakatga kelishiga sabab bo‘luvchi energiyani qabul qilganligidan dalolat beradi. Misol sifatida inson tomonidan boshqarilayotgan, harakatga keltiruvchi dvigatelga ega qayiqni tizim deb hisoblasak, qayiq parrakining harakati natijasida yuzaga keladigan silkinish, boshqaruvchi inson holati va to‘lqinlarning harakati ta’sir etuvchi kuch (kirish signali) bo‘lsa, uning harakat yo‘nalishi va tezligi ta’sir etuvchi kuchga javob reaksiyasi, ya’ni chiqish signali bo‘ladi (4.1-rasm).




Turtki

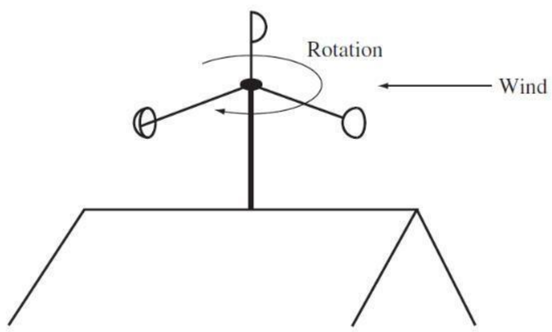
4.1-rasm. *Qayiqning sodda chizmasi*

E’tibor qaratishimiz kerak bo‘lgan bir jihat bu, yuqoridagi holatdagi qayiqning aks ta’siri: harakat yo‘nalishi va tezligidan tashqari

yana boshqa bir qator javob reaksiyalari ham bo‘lishi mumkin. Haqiqatda ham har bir tizimning kirish signaliga bir qancha aks ta’sirlari mavjud bo‘ladi, ulardan ayrimlari muhim aks ta’sirlar bo‘lsa, yana bir qanchasi uncha muhim bo‘lmagan aks ta’sir hisoblanadi. Masalan yuqorida keltirilgan misolda, ya’ni qayiqning harakat yo‘nalishi va tezligi uning muhim aks ta’sirlari bo‘lsa, qayiqning tebranishi (titrashi), qayiqning orqasida qoladigan suv hosil qiluvchi tovush, qayiqning tebranishi kabi bir qator aks ta’sirlar uncha muhim bo‘lmagan aks ta’sirlar hisoblanadi va ushbu uncha muhim bo‘lmagan aks ta’sirlarni tizimni amaliy tahlil etish jarayonida e’tiborga olmasa ham bo‘ladi.

Xonadagi kondisioner (sovutkich) ning o‘rnatilgan harorat qiymati va xonadagi harorat ushbu tizimning kirish signali hisoblansa, xonadagi haroratni o‘rnatilgan haroratga yetkazish uchun issiq yoki sovuq havo haydashi tizimning javobi (chiqish signali) hisoblanadi.

Bir qancha o‘lchov asboblari tizimi bitta kirish va bitta chiqishli tizimlar hisoblanadi. Ular o‘lchanuvchi fizik hodisalarga ta’sirlanadi va ushbu hodisaga reaksiyasi asbobning ko‘rsatkichi hisoblanadi. Bunga eng yaxshi misol bu kosachali anemometrdir (anemometr – havo va gaz oqimi tezligini o‘lchaydigan asbob). Anemometrga shamol ta’sir qilganda uning aylanish tezligi anemometrning javob reaksiyasi bo‘ladi (4.2-rasm).



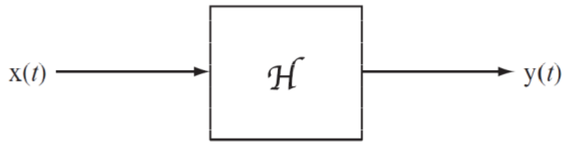

4.2-rasm. *Kosachali anemometr*

Biz ko‘pincha tizim deb hisoblamaydigan ko’prik ham tizimga misol bo‘la oladi. Bir qarashda ko‘prik har qanday ta’sir etuvchiga aks ta’sir ko‘rsatmaydi deb hisoblash mumkin, ammo ushbu ko‘prikka bir qancha ta’sir etuvchi kuchlar mavjud. AQShdagi bir ko‘prik juda qattiq shamol oqibatida qulab tushganligi bir misol bo‘lib, bundan kelib chiqadigan xulosa har qanday tizimni keng tahlil etish lozimligi hisoblanadi. Shundagina yuqoridagiga o‘xshash falokatlarga duchor bo‘lmaslik mumkin.

Tabiatdagi har bir biologik hujayra – juda murakkab tizimdir. Inson tanasi – juda ko‘plab hujayralarga ega tizim bo‘lib, tasavvur qilib bo‘lmaydigan darajadagi tizim hisoblanadi. Ammo ma’lum bir sharoitda nisbatan soddaroq shaklda, ayrim bir holatlar uchun ushbu tizimni ham modellashtirish mumkin.

**Blok-sxema**

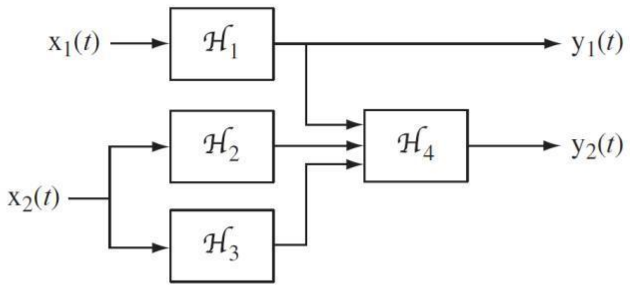
Tizimlarni tahlil qilishda tizimlarni blok-sxemalar sifatida ifodalash ancha qulayliklar tug‘diradi. 4.3-rasmda bitta kirishli va bitta chiqishli tizim tasvirlangan. Kirish signali ( ) operator $\mathcal{H}$ yordamida chiqish signali ( ) ga o‘zgartiriladi, bunda operator $\mathcal{H}$ zarur bo‘lgan har qanday operasiya (amal) ni bajaradi deb tasavvur qilinadi.




4.3-rasm. *Bitta kirishli va bitta chiqishli tizim*

Ko‘pincha tizimlarni ifodalash va tahlil qilishda tizimlarni bloklardan iborat tarkibiy qismlar (komponent) kombinasiyasi shaklida tasavvur qilinadi. Komponent qandaydir ma’noda standart bo‘lgan va xossalari avvaldan ma’lum bo‘lgan nisbatan sodda kichik bir tizim hisoblanadi. Sxema ishlab chiqaruvchilari uchun qarshilik, kondensator, induktor, operasion kuchaytirgich va h.k. lar komponentlar hisoblansa, quvvat kuchaytirgichlari, analog-raqam o‘zgartirgichlari, modulyatorlar, filtrlar va h.k. lar esa tizimlar hisoblanadi. Aloqa tizimi uchun kuchaytirgich, modulyator, filtr va antennalar komponentlar sifatida qaralsa, mikroto‘lqinli aloqa liniyalari, optik aloqa liniyalari, markaziy telefon stansiyalari esa tizim sifatida qaraladi. Avtomashinaga nisbatan esa g‘ildiraklar, bamper, o‘rindiqlar komponent hisoblansa, avtomashinaning o‘zi esa tizim deb tasavvur qilinadi. Tijorat aviakemalari, telefon tarmoqlari, elektrostansiyalar kabi ulkan, murakkab tizimlarda komponentlar va tizimlarning ko‘p darajali iyerarxiyalaridan foydalaniladi.

Tizimdagi barcha komponentlarning matematik ifodalari va ularning tavsiflanishini hamda ushbu komponentlarning bir-biri bilan aloqasini bilgan holda, muhandis matematika nuqtai nazardan tizimning qanday ishlashini uni yaratmasdan va tajribada sinab ko‘rmasdan turib ham ayta oladi. 4.4-rasmda bir nechta komponentlardan tashkil topgan tizimning sxematik tasvirlanishi keltirilgan.

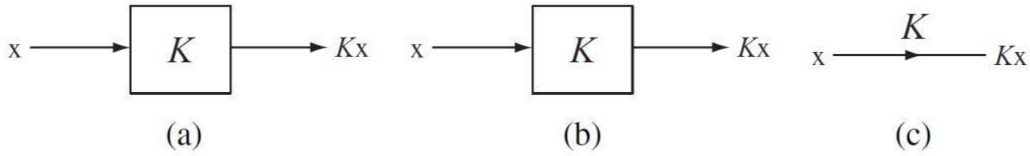



4.4-rasm. *Ikkita kirish va ikkita chiqishli bir-biriga bog'langan to'rtta komponentdan tashkil topgan tizim*

Ushbu blok-sxemada har bir kirish signali istalgan raqamli blok orqali o'tishi va har bir blok chiqishidagi signal istalgan raqamli blok kirishiga berilishi mumkin. Ushbu signallarga keyingi qo'shimcha ulanadigan bloklar ta'sir ko'rsatmaydi.

Tizimning blok-sxemasini tasvirlashda bir qancha amallar turi tez-tez takrorlanadi, shu sababli ular grafik simvollarga ega xususiy blok-diagrammalar orqali belgilanadi, masalan – kuchaytirgich, summator (jamlagich) va integrator.

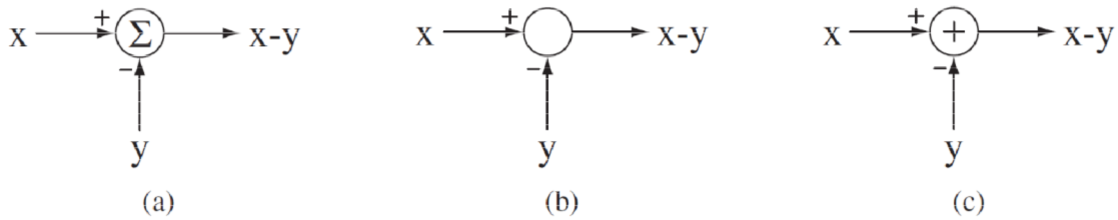
Kuchaytirgich kirish signalini o'zgarmas qiymat – konstantaga ko'paytirish vazifasini bajaradi. Kuchaytirish vazifasini bajaruvchi belgini mualliflar turli adabiyotlarda turlicha ifodalashadi. Nisbatan kengroq foydalaniladigan shakllari 4.5-rasmda keltirilgan. Bundan keyin kuchaytirgichni belgilashda biz 4.5c-rasmda keltirilgan shakldan foydalanamiz.




4.5-rasm. *Blok-sxemada kuchaytirgich tasvirlanishining uchta shakli*

Summator (jamlagich) kirishiga berilgan bir nechta signalni yig'ib chiqishida bitta signal ko'rinishida amalga oshiruvchi element hisoblanadi. Ayrim kirish signallari oldindan qarama-qarshisiga aylantirilishi mumkin va natijada summator chiqishidagi signal ushbu

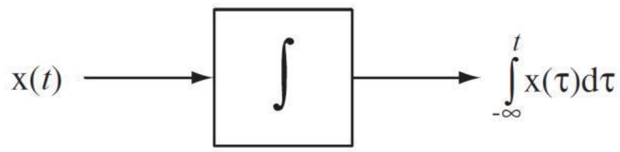
signallarning ayirmasi shaklida bo‘lishi ham mumkin. 4.6-rasmda summator belgilanishining bir nechta shakllari keltirilgan.




4.6-rasm. *Blok-sxemada summator tasvirlanishining uchta shakli*

Bundan keyin matnda summatorni belgilashda biz 4.6c-rasmda keltirilgan shakldan foydalanamiz. Agar summatorning kirish qismlarida plyus yoki minus belgilari ko‘rsatilmagan bo‘lsa, u holda plyus belgisi, ya’ni qo‘shish amali qo‘llaniladi.

4.7-rasmda integratorning belgilanishi keltirilgan bo‘lib, kirishiga berilgan signalning integralini hisoblash amalini bajaradi.



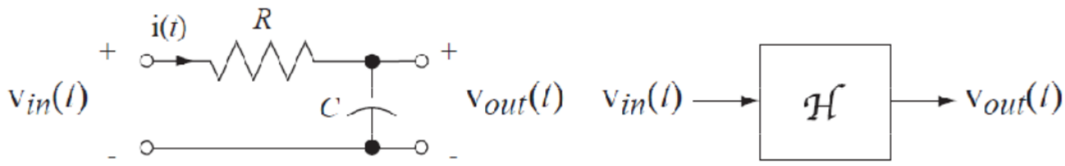

4.7-rasm. *Blok-sxemada integratorning grafik tasvirlanishi*

Yuqoridagilardan tashqari signallarga raqamli ishlov berishda foydalaniladigan yana boshqa turdagi komponentlar ham mavjud. U yoki bu sohada bir qator amallarni bajaruvchi belgilanishlar mavjud bo‘lib, bular o‘sha soha uchun kerakli amallarni bajarishga mo‘ljallangan bo‘ladi. Masalan, optik aloqa tizimlarida lazer, yorug‘lik bo‘lgichlar, qutblovchi, linza va ko‘zgular simvollar hisoblanadi.

Signallar va tizimlar nazariyasida asosan ikkita: yopiq konturlar va teskari bog‘lanishli tizimlar bir-biridan farqlanadi. Kirish signaliga bevosita javob qaytaruvchi (ta’sir ko‘rsatuvchi) tizimlar yopiq tizimlar deb yuritiladi. Teskari bog‘lanishli tizimlar ham kirish signaliga ta’sir ko‘rsatuvchi va shu bilan birga chiqish signalining “orqaga” kirish signaliga ta’sirini amalga oshirib, tizimning talablarini qanoatlantirishni yaxshilaydi. Har qanday o‘lchovchi asbob yopiq tizimga misol bo‘la oladi, ya’ni ushbu o‘lchov asbobining ko‘rsatkichi uning kirishidagi ta’sirga javob reaksiyasi hisoblanadi.

### 4.2.2. Uzluksiz vaqt tizimlarining xossalari

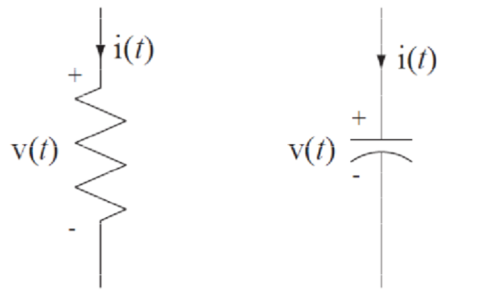
Bir muncha murakkab, umumlashtirilgan tizimlarning xususiyatlari to‘g‘risida tasavvurga ega bo‘lish uchun nisbatan soddaroq bo‘lgan tizim xususiyatlarini ko‘rib chiqamiz. Ushbu tizim elektr muhandislariga tanish bo‘lgan elektrik tizim hisoblanadi. Keng tarqalgan bitta kirish va bitta chiqishga ega bo‘lgan RC past chastotalar filtri 4.8-rasmda keltirilgan.




4.8-rasm. *Bitta kirish va bitta chiqishga ega bo‘lgan RC past chastotalar filtri*

Ushbu filtrning past chastotalar filtri deb atalishiga sabab, kirishiga berilgan signalning yuqori chastotali spektr tashkil etuvchilariga qaraganda past chastotali spektr tashkil etuvchilariga ta’sirchanligi yuqori bo‘lganligidir, ya’ni kirish signalining past chastotali spektr tashkil etuvchilarini ajratishidir. Yanada soddaroq tushuntiradigan bo‘lsak, past chastotalarni “o‘tkazadi”, yuqori chastotalarni esa “o‘tkazmaydi”. Keng tarqalgan boshqa bir filtrlar: yuqori chastotalar filtri, polosa filtri va to‘suvchi (berkituvchi, rejektorli) filtrlardir. Yuqori chastotalar filtri kirish signalining yuqori chastotali spektr tashkil etuvchilarini o‘tkazib, past chastotali tashkil etuvchilarini o‘tkazmaydi. Polosa filtrlari esa muayyan polosalardagi spektr tashkil etuvchilarini o‘tkazib, ushbu polosadan tashqaridagi spektr tashkil etuvchilarini o‘tkazmaydi. To‘suvchi filtrlar muayyan polosadagi spektr tashkil etuvchilarini o‘tkazmaydi va ushbu polosadan tashqaridagi spektr tashkil etuvchilarni o‘tkazadi. To’suvchi filtrlar yaqin joydagi kuchli radiostansiyalardan radioqabul qilish xalaqitlarini kuchsizlantirish, teleko‘rsatuv dasturlarini olib borishda tovush chastotalarini bostirish uchun qo‘llaniladi. Keyingi boblarimizda filtrlar to‘g‘risida kengroq to‘xtalamiz.

RC past chastotalar filtri kirishiga v ( ) kuchlanish berilsa, filtr ushbu kuchlanishga ta’sirlanib, uning chiqishida v ( ) kuchlanish hosil bo‘ladi. Kirish signali sxemaning chap qismidagi juft qisqichlarga ta’sir etadi, chiqish signali esa sxemaning o‘ng tomonidagi juft qisqichlarda hosil bo‘ladi (4.8-rasm). Ushbu tizim ikkita komponent: rezistor va kondensatordan iborat bo‘lib, muhandis-elektriklarga juda yaxshi tanish. Rezistor va kondensator orqali o‘tayotgan kuchlanish va tok orasidagi bog‘liqlikni 4.9-rasmda keltirilgan grafik orqali tushuntirish mumkin.




$$\mathrm{v}(t) = R\,\mathrm{i}(t) \qquad \mathrm{v}(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{i}(\tau)\,d\tau$$

$$\mathrm{i}(t) = \frac{\mathrm{v}(t)}{R} \qquad \mathrm{i}(t) = C\frac{d\,\mathrm{v}(t)}{dt}$$

4.9-rasm. *Rezistor va kondensator orqali o‘tayotgan kuchlanish va tok orasidagi bog‘liqlik*

Kirxgoff qonuni asosida quyidagi differensial tenglamani keltirishimiz mumkin:

v () () = v ().

+ v (4.1)

= ()

Ushbu differensial tenglamaning yechimi gomogen (bir jinsli; tarkibi, kelib chiqishi jihatidan bir xil) va xususiy yechimlar yig‘indisidan iborat. Gomogen yechimi quyidagicha v ,0=

/ bo‘lib, bunda hozircha noma’lum. Tenglamaning xususiy yechimi esa kirish signali v ( ) ga bog‘liq. Faraz qilaylik, kirish kuchlanishi v ( ) ning qiymati o‘zgarmas – qandaydir konstantaga teng bo‘lsin. Kirish kuchlanishining qiymati doimiy bo‘lsa, u holda xususiy yechim v , () = ham o‘zgarmas qiymat bo‘ladi. Differensial tenglamaga ushbuni qo‘yib, = deb belgilasak, tenglamaning to‘liq yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$v \quad () = v \quad {}_{,}() + v \quad {}' \; () = \quad / \quad + \, . \qquad (4.2)$$

doimiy qiymatni istalgan aniq bir vaqtdagi chiqish

= 0 vaqtda

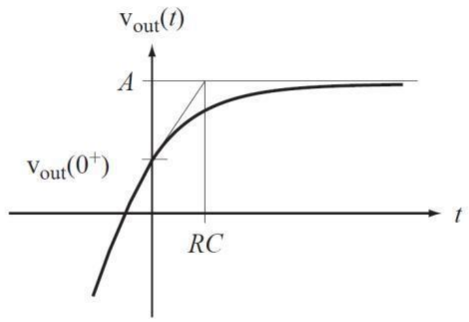
kuchlanishini bilish orqali topish mumkin. Faraz qilaylik, kondensator orqali o‘tayotgan v () kuchlanishining qiymatini bilamiz. Demak

$$v \quad (0) = \quad + \quad \Rightarrow \quad = v \quad (0) -$$

va chiqish kuchlanishini quyidagicha yozish mumkin

$$v \; () = v \; (0) \; / \; + \; (1 - \; / \; ). \qquad (4.3)$$

Ushbu chiqish kuchlanishining vaqtga bog‘liqlik grafigi 4.10-rasmda keltirilgan.



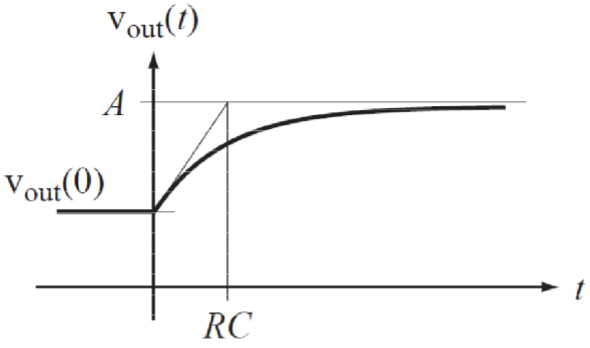

4.10-rasm. *RC past chastota filtrining doimiy kuchlanishga ta’siri*

Kondensatorga ma’lum qiymatdagi boshlang‘ich kuchlanish kiritilgan va u = 0 vaqtgacha saqlanib qoladi. Keyin esa = 0 vaqtdan boshlab qiymati A ga teng kuchlanish ta’sir etadi va natijada ushbu vaqtdan boshlab tizimni tahlil qilish mumkin. Va bu tahlil ta’sir etish vaqtidan boshlab u davom etadigan vaqtgacha bo‘lgan diapazonda amalga oshiriladi,

$$v \quad () = v \quad (0) \quad / \quad + \; (1 - \; / \quad ), \qquad \geq 0$$

va buni 4.11-rasmda keltirilgan grafik orqali ifodalash mumkin.

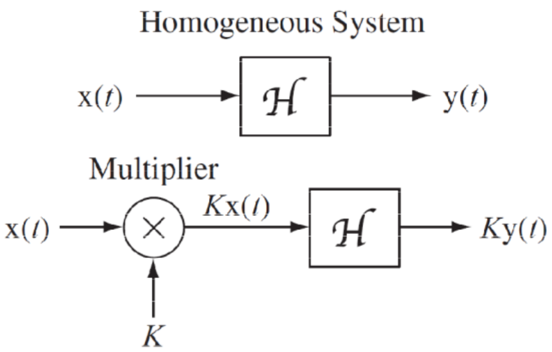
Ko‘pgina uzluksiz tizimlarni yuqoridagi RC past chastota filtrini differensial tenglama orqali modellashtirganimizdek modellashtirishimiz mumkin. Bu turli elektrik, mexanik, ximik, optik va boshqa tur tizimlar uchun ham taalluqli. Shunday qilib, signallar va tizimlarni tadqiq qilish keng ma'noda juda muhim hisoblanadi.




4.11-rasm. *RC past chastota filtrining boshlang'ich va* = 0 *dan boshlab doimiy kuchlanishga ta'siri*

## Bir jinslilik (gomogenlik)

Agar RC past chastota filtrining kirish signalini ikki marta v ( ) = 2 ( ) kattalashtirsak, filtr boshlang'ich holatining javobi ham ikki marta kattalashadi v ( ) = 2 (1 − / ). Agar kirish signalini qandaydir o'zgarmas qiymatga – doimiy kattalikka ko'paytirsak, boshlang'ich holati chiqishidagi signal ham ushbu doimiy kattalikka ko'paytirilgan bo'ladi. Tizimlarning ushbu xossasi tizimning bir jinsliligi (gomogenligi) deb ataladi. Ya'ni bir jinsli tizimlarda kirish signalining har qanday doimiy kattalik – konstantaga ko'paytmasi uning chiqishidagi signalning ham ushbu konstantaga ko'paytirilishiga olib keladi. Bir jinslilik xususiyatini ko'rsatuvchi blok-diagramma 4.12-rasmda tasvirlangan.

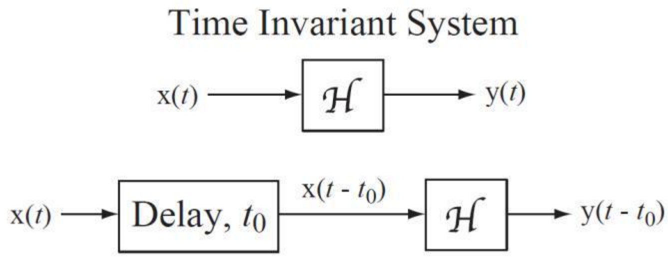



4.12-rasm. *Bir jinsli tizimlarning blok-sxemasi*

## Vaqt bo‘yicha invariantlilik

Agar tizim dastlab boshlang‘ich holatida, ya’ni kirish signali ( ) ga ta’sir reaksiyasi ( ) bo‘lsa, vaqtga kechiktirilgan kirish signali ( − ) ga ta’sir reaksiyasi ( − ) ga teng bo‘lsa, bunday tizimlar

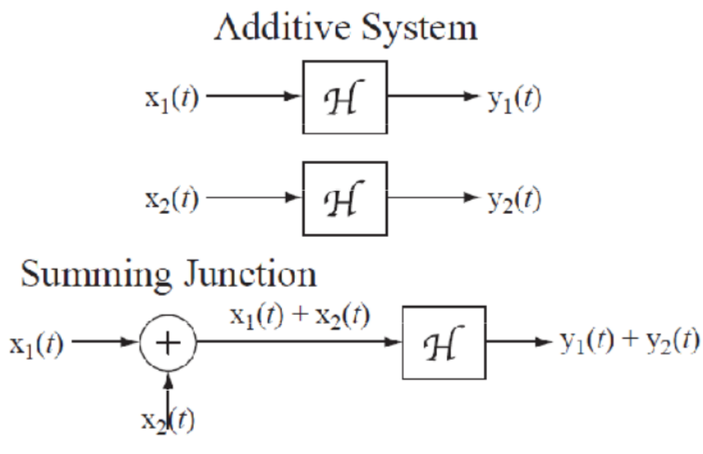
invariant (vaqt bo‘yicha ko‘rsatkichlari o‘zgarmas) tizimlar deb ataladi. 4.13-rasmda vaqt bo‘yicha invariant tizimning tasvirlanishi keltirilgan.




4.13-rasm. *Vaqt bo‘yicha invariant tizimni tasvirlochi blok-sxema*

## Additivlik

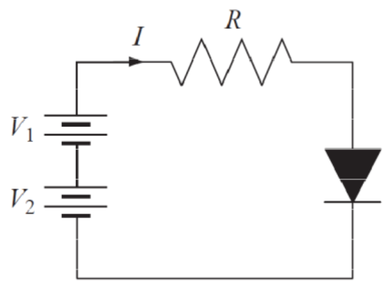
Agar tizimning kirishiga berilgan ixtiyoriy ga javob reaksiyasi hamda ixtiyoriy ga javob reaksiyasi bo‘lib, ularning yig‘indisi + ga javob reaksiyasi + ga teng bo‘lsa, bunday tizimlar additiv tizimlar deb ataladi. 4.14-rasmda additiv tizimni tasvirlovchi blok-sxema keltirilgan.




4.14-rasm. *Additiv tizimni tasvirlovchi blok-sxema*

Keng tarqalgan additiv bo‘lmagan tizimga misol sifatida 4.15-rasmda tasvirlangan diodli sxemani keltirish mumkin. Kirish signali manbaini ikkita ketma-ket ulangan doimiy kuchlanish manbalaridan iborat deb hisoblasak, har bir alohida doimiy kuchlanish manbai signallari va bo‘lsa, ularning yig‘indi signali = + ga teng bo‘ladi. Ushbu yig‘indi kuchlanishga tizimning javob reaksiyasi ga teng deb belgilaymiz. Har bir alohida kirish kuchlanishiga ( va ) tizimning alohida javob reaksiyasi va g a teng bo‘ladi deb faraz qilamiz. Endi tasavvur qilamiz, > 0 va = − bo‘lsin. Alohida kirish kuchlanishi ga tizimning javob reaksiyasi ga tengligini bilamiz, u holda alohida kirish kuchlanishi ga tizimning javob reaksiyasi juda kichkina (taxminan nol atrofida) bo‘ladi. Yig‘indi kirish

kuchlanishi + ga tizimning javob reaksiyasi nolga teng bo‘ladi, ammo alohida kirish kuchlanishlariga ( va ) tizimning javob reaksiyasi nolga teng emas, taxminan ga teng bo‘ladi. Shunday qilib, ushbu tizim additiv tizim hisoblanmaydi.




4.15-rasm. *Diodli sxema*

**Chiziqlilik va superpozisiya**

Har qanday ham gomogen ham additiv tizimlar chiziqli tizimlar deb ataladi. Chiziqli tizim kirishiga berilgan ( ) ga uning javob reaksiyasi ( ) , va ( ) ga javob reaksiyasi ( ) bo‘lsa, u holda ( ) = ( ) + ( ) ta’sir etuvchiga tizimning javob reaksiyasi ( ) = ( ) + ( ) bo‘ladi. Chiziqli tizimlarning ushbu xossasi superpozisiya prinsipi deb ataladi.

Superpozisiya prinsipi yordamida tizimning ixtiyoriy kirish signaliga javob reaksiyasini topish uchun ushbu kirish signalini bir nechta nisbatan soddaroq bo‘lgan signallarga ajratib (ularning yig‘indisi kirish signalidan iborat bo‘lgan), har bir alohida sodda kirish signaliga tizimning javob reaksiyasini bilgan holda va ularning yig‘indisini jamlagan holda amalga oshirish mumkin. Bunda biz “ajratish va g‘alaba qilish” yondoshuvidan foydalanamiz, ya’ni bitta ulkan va murakkab muammoni yechish uchun uni bir nechta kichik va sodda muammolarga ajratgan holda yechishni amalga oshiramiz. Bitta kichik, sodda muammoni yechganimizdan so‘ng, keyingi kichik, sodda muammoni yechish qiyinchilik tug‘dirmaydi, chunki ikkinchi kichik va sodda muammoni yechish oldingi sodda muammoni yechish jarayoni kabi amalga oshiriladi.

Tizimlarni tahlil qilishda chiziqlilik va superpozisiya prinsipi juda ko‘p holatlarda ko‘plab muammolarni yechishda asosiy o‘rinlarni egallaydi. Nochiziqli tizimlarni tahlil qilish chiziqli tizimlarni tahlil qilishga nisbatan bir muncha murakkab, chunki nochiziqli tizimlar superpozisiya prinsipiga bo‘ysunmaydi.

## Vaqtga bog‘liq bo‘lmagan chiziqli tizimlar

Tizimlarni amaliy loyihalash nuqtai nazaridan nisbatan keng tarqalgan tizimlardan yana biri, vaqtga bog‘liq bo‘lmagan chiziqli tizimlardir. Agar tizim chiziqli bo‘lsa va vaqtga bog‘liq bo‘lmasa, bunday tizimlar vaqtga bog‘liq bo‘lmagan chiziqli tizimlar deb ataladi.

Vaqtga bog‘liq bo‘lmagan chiziqli tizimlarda ( ) kirishga ( ) javob reaksiyasi va ( ) kirishga ( ) javob reaksiyasi sodir bo‘lsa, chiziqlilik xossasiga ko‘ra ( ) + ( ) ta’sir etuvchiga tizimning javob reaksiyasi ( ) + ( ) ga teng bo‘ladi. Bunda va konstantalar har qanday son bo‘lishi, shu jumladan kompleks son

bo‘lishi ham mumkin. Faraz qilamiz, = 1 va = bo‘lsa, ( ) + ( ) kirishga tizimning javob reaksiyasi ( ) + ( ) bo‘ladi. Biz bilamizki, tizim ( ) kirishga ( ) javob reaksiyasi va ( ) kirishga

( ) javob reaksiyasiga ega bo‘lib, bundan quyidagi umumiy xulosaga kelishimiz mumkin.

Vaqtga bog‘liq bo‘lmagan chiziqli tizimlarda tizimning javob reaksiyasi kompleks qiymat bo‘lsa, uning haqiqiy qismi kirish ta’sirining haqiqiy qismiga javob reaksiyasi va mavhum qismi esa kirish ta’sirining mavhum qismiga javob reaksiyasi hisoblanadi.

## Barqarorlik

Misol sifatida, RC past chastota filtrining kirishiga kuchlanishning qiymati cheklangan signal, ya’ni uning absolyut qiymati ma’lum bir qiymatdan oshmaydigan | ( )| < ( ning barcha qiymatlari uchun) bo‘lgan signal berilgan. Ushbu cheklangan kirish signaliga RC past chastota filtrining javob reaksiyasi ham cheklangan signal hisoblanadi.

Har qanday cheklangan kirish signaliga cheklangan chiqish signali orqali javob qaytaruvchi har qanday tizim “cheklangan kirish – cheklangan chiqish” tizimi, ya’ni barqaror tizim deb ataladi.

Differensial tenglama orqali ifodalangan vaqtga bog‘liq bo‘lmagan uzluksiz chiziqli tizimlarda xususiy yechimining haqiqiy qismi noldan katta yoki nolga teng bo‘lsa, bunday tizim nobarqaror tizim deb ataladi.

Barqarorlikni amaliy jihatdan tahlil qilish jarayonida qiziqarli holat yuzaga keladi. Har qanday amaliyotda qo‘llaniladigan tizim cheklanmagan javob reaksiyasiga ega bo‘lmaydi, ya’ni qo‘pol ravishda har qanday tizim barqaror tizim hisoblanadi.

**Bog‘liqlik (bog‘langanlik)**

Tizimlarni tahlil qilishda biz shu vaqtgacha tizimning javob reaksiyasi unga ko‘rsatilayotgan ta’sir vaqti davomida yoki ta’sir etish tugagandan so‘ng yuzaga kelishini kuzatdik. Bu aniq va tabiiy holat hisoblanadi. Axir qanday qilib tizim unga ta’sir ko‘rsatilmasidan oldin javob reaksiyasi qaytarishi mumkin. Bu mantiqan qaralganda haqiqatga mos, chunki biz moddiy dunyoda yashaymiz va bunda real fizik tizimlar faqatgina ularga ta’sir ko‘rsatilayotgan vaqtda va ta’sir to‘xtagandan keyingina javob reaksiyasini yuzaga keltiradi. Ammo, shunday tizimlar borki ular ta’sir ko‘rsatilmasidan oldin javob reaksiyasini yuzaga keltirishi mumkin, masalan ideal filtrlar. Aslida bunday tizimlarni yaratish mumkin emas.

Javob reaksiyasi unga ko‘rsatilayotgan ta’sir vaqti davomida yoki ta’sir etish tugagandan so‘ng yuzaga keladigan har qanday tizim bog‘langan tizim deb ataladi.

Barcha fizik tizimlar bog‘langan tizimlar hisoblanadi, chunki ular kelajakni tadqiq qilib, ta’sir etilishidan oldin javob reaksiyasini qaytarmaydi.

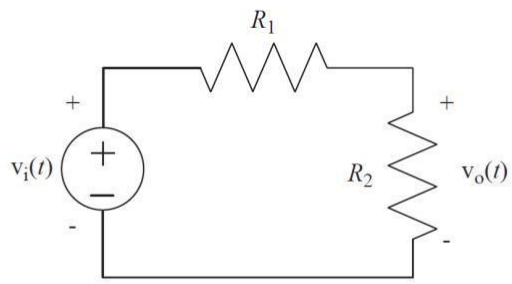
**Xotira**

Biz ko‘rib chiqqan tizimlarning javob reaksiyasi joriy kirish va oldingi kirish ta’sirlariga bog‘liq. RC past chastota filtrining kondensatoridagi zaryad undan oqib o‘tgan tok orqali aniqlanadi. Ushbu mexanizm qaysidir ma’noda o‘zining o‘tmishi haqida xotiraga ega. Tizimning joriy javob reaksiyasi oldingi va joriy kirish ta’sirlariga bog‘liq.

Agar qandaydir ixtiyoriy vaqtda tizimning javob reaksiyasi boshqa qandaydir ixtiyoriy vaqtdagi kirish ta’siriga bog‘liq bo‘lsa, bunday tizim xotiraga ega tizim bo‘lib dinamik tizim hisoblanadi. Shunday tizimlar borki, joriy javob reaksiyasi faqatgina joriy kirish ta’siriga bog‘liq

bo‘ladi. Rezistorli kuchlanish bo‘lgich bunga yaxshi misol bo‘la oladi (4.16-rasm).

$$v_o(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_i(t)$$




4.16-rasm. *Rezistorli kuchlanish bo‘lgich*

Agar ixtiyoriy vaqtdagi biror-bir tizimning javob reaksiyasi faqatgina ushbu vaqtdagi kirish ta’siriga bog‘liq bo‘lsa, bunday tizim statik tizim deb ataladi va u hech qanday xotiraga ega bo‘lmaydi.

Bog‘liqlik va xotira tushunchalari bir-biri bilan bog‘liq tushunchalar hisoblanadi. Barcha statik tizimlar bog‘langan tizimlar hisoblanadi. Bundan tashqari tizimning xotiraga ega yoki yo‘qligini sinov signali orqali tekshirish mumkin, ya’ni vaqtga bog‘liq bo‘lmagan chiziqli tizimlarning birlik impulsi ( ) ga javob reaksiyasi = 0 dan boshqa har qanday vaqtda noldan farqli bo‘lsa, bunday tizim xotiraga ega tizim hisoblanadi.

## Statik nochiziqlilik

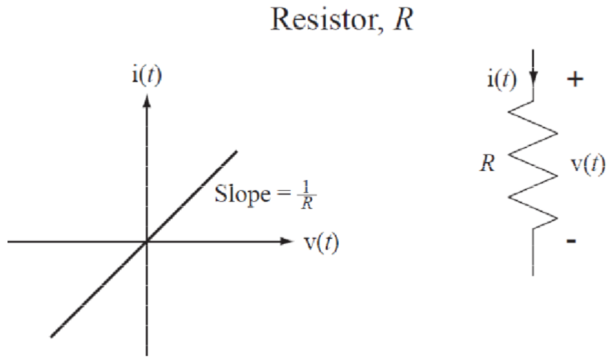
Statik nochiziqli tizim xotirasiz tizim bo‘lib, uning kirish va chiqish signallarining munosabati nochiziqli funksiya hisoblanadi. Statik nochiziqli komponentlarga misol sifatida diod, tranzistor va kvadratik djetektorlarni keltirish mumkin. Ushbu komponentlar nochiziqli, sababi ularning kirishiga berilayotgan signal qandaydir qonuniyat asosida o‘zgarsa ham chiqish signali turlicha qonuniyat asosida o‘zgarishi mumkin.

Chiziqli va nochiziqli komponentlar orqasidagi farqni kirish va chiqish signallari munosabatini grafik shaklda tasvirlash orqali ko‘rsatish mumkin. Statik tizim hisoblanuvchi chiziqli rezistor uchun ushbu munosabat Om qonuni asosida aniqlanadi

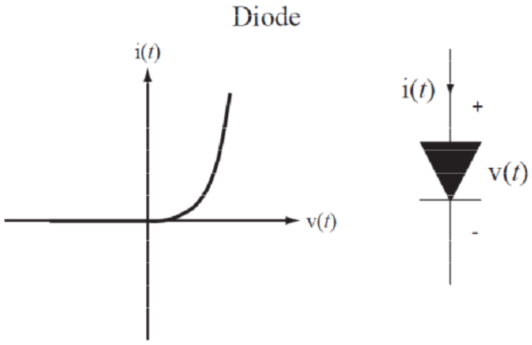
0= 0.

Kuchlanishning tokka bog‘liqligi chiziqli ko‘rinishda bo‘ladi (4.17-rasm).

Diod statik nochiziqli komponentga juda yaxshi misol bo‘la oladi. Kuchlanish va tok munosabati ( ) = ( ()/ − 1), bunda – teskari to‘yinish toki, – elektronlar zaryadi, – Bolsman doimiysi, – absolyut harorat bo‘lib, ushbu bog‘liqlik 4.18-rasmda tasvirlangan.



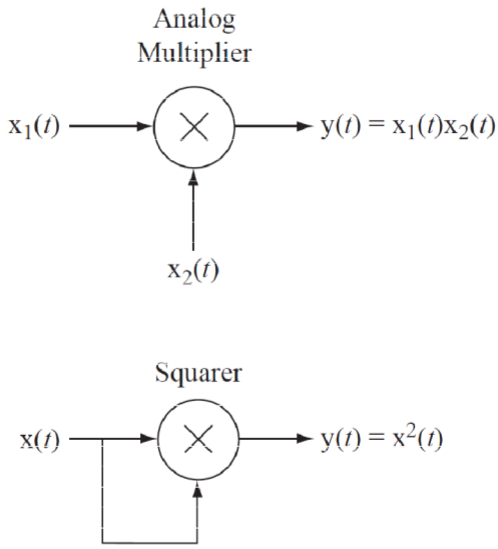

4.17-rasm. *Rezistordagi kuchlanish va tok munosabati*




4.18-rasm. *Dioddagi kuchlanish va tok munosabati*

Statik nochiziqli komponentga yana boshqa bir namuna bu kvadrator sifatida qo‘llaniluvchi analog ko‘paytirgichdir. Analog ko‘paytirgich qurilmasida ikkita kirish va bitta chiqish bo‘lib, chiqish signali kirish signallarining ko‘paytmasidan iborat bo‘ladi (4.19-rasm).

Chiqish signali ( ) kirish signallari ( ) va ( ) larning ko‘paytmasidan iborat bo‘ladi. Agar ( ) va ( ) signallar bir-biriga teng bo‘lsa, u holda chiqish signali ( ) = ( ) bo‘ladi. Bu statik nochiziqli bog‘lanish hisoblanadi, chunki kirish signalidan biri qandaydir A qiymatga kattalashsa, u holda chiqish signali $A^2$ ga kattalashadi.



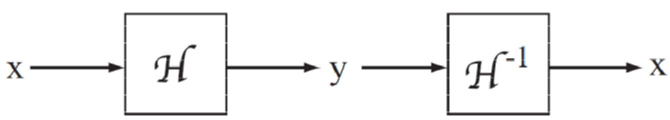

4.19-rasm. *Analog ko'paytirgich va kvadrator*

**Dastlabki holatiga qayta olish (qaytariluvchanlik)**

Ko‘pincha tizimlarni tahlil qilishda biz uning kirishiga ta’sir ko‘rsatib chiqishida javob reaksiyasini aniqlaymiz. Ammo buning aksi, ya’ni tizimning javob reaksiyasi asosida uning kirish ta’sirini aniqlashimiz ham mumkin, agar tizim qayta tiklanuvchi tizim bo‘lsa.

Agar tizim yagona kirish ta’siriga yagona javob reaksiyasi ko‘rsatsa bunday tizim qayta tiklanuvchi tizim deb ataladi. Ko‘pgina tizimlar qayta tiklanuvchi tizimlar hisoblanadi. Qayta tiklanuvchi tizimlarni ta’riflashning yana bir usuli, agar tizim qayta tiklanuvchi bo‘lsa, unda teskari tizim mavjud bo‘ladi, ya’ni birinchi tizimning javob reaksiyasiga ta’sirlanish natijasida birinchi tizimning kirish ta’siri orqali javob qaytaradi (4.20-rasm). Qayta tiklanuvchi tizimlarga har qanday chiziqli, vaqtga bog‘liq bo‘lmagan, doimiy koeffitsientli, differensial tenglama orqali ifodalangan tizimlarni misol qilish mumkin:

$$^{0}()+ \qquad ^{(\ )}()+\cdots+\ ()+\ ()=().\ (4.4)$$



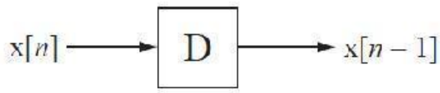

4.20-rasm. *Tizim va uning inversiyasi*

# 4.3. Diskret vaqt tizimlari

## 4.3.1. Diskret vaqt tizimlarini modellashtirish

**Blok-sxema**

Xuddi uzluksiz vaqt tizimlaridagidek diskret vaqt tizimlarida ham bir qancha aksar jarayonlarni blok-sxemalar sifatida ifodalash juda qulay hisoblanadi. Diskret vaqt tizimlarida bular asosan uchta tashkil etuvchilar: kuchaytirgich, summator va kechiktirish elementlari hisoblanadi. Diskret vaqt tizimlaridagi kuchaytirgich va summator qurilmalari ham huddi uzluksiz vaqt tizimlaridagidek vazifalarni bajaradi. Kechiktirish elementi diskret vaqt signaliga ta'sirlanib, xuddi shunday signal bilan javob reaksiyasi qaytaradi faqat bitta diskret vaqtga kechiktirilgan holda (4.21-rasm). Kechiktirish elementi asosan D bilan belgilanadi, ba'zi hollarda S bilan ham belgilanishi mumkin.




4.21-rasm. *Blok-sxemada kechiktirish elementining grafik tasvirlanishi*

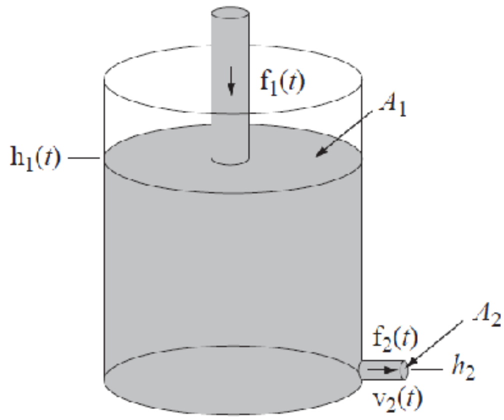
**Turli tenglamalar**

Diskret vaqt tizimlarini modellashtirishga tegishli bir necha namunalar quyida keltirilgan. Ushbu namunalar qo'llanmaning dastlabki bobida keltirilgan.

*Uzluksiz vaqt tizimidan foydalanib, diskret vaqt tizimini modellashtirish.*

Gidravlik uzluksiz vaqt tizimi modelining xususiy bir holati diskret vaqt tizimiga misol bo'la oladi (4.22-rasm), faqat uning differensial tenglamasi (Torichelli tenglamasi) nochiziqli bo'lib, uni yechish chiziqli differensial tenglamaga nisbatan ancha murakkabdir.

$$h() +2\ [h()-h]= (). \qquad (4.5)$$




4.22-rasm. *Ustki va ostki qismidan teshik ochilgan idish*

Masalani yechishning bir yo‘li sonli usuldan foydalanish hisoblanadi. Biz hosil bo‘ladigan miqdorni taxminan quyidagi ayirmaga teng deb olishimiz mumkin.

$h() \cong \quad h(+1) - h() \quad .$

bunda, – bir xil vaqt oraliqlariga bo‘lingan ikkita qo‘shni sathlar

oralig‘ini suyuqlik bilan to‘ldirish uchun ketadigan vaqt, – ushbu sathlar soni. Ushbu vaqt momentlari uchun Torichelli tenglamasini quyidagicha yozish mumkin:

$h \quad (+1) - h() \quad +2[h()-h] \cong \quad (). (4.6)$

Yoki uni boshqacha ko‘rinishda quyidagicha ifodalash mumkin:

$h \quad (+1) \quad \cong^{1} \quad () + \quad h() - \quad 2[h() - h]. (4.7)$

(4.7) ifodani soddalashtirilgan diskret vaqt tizimi uchun quyidagi ko‘rinishda ifodalash mumkin:

$h[+1] \cong^{1} \quad [] + \quad h[] - \quad 2(h[] - h).$

Yoki ni – 1 bilan almashtirsak

1

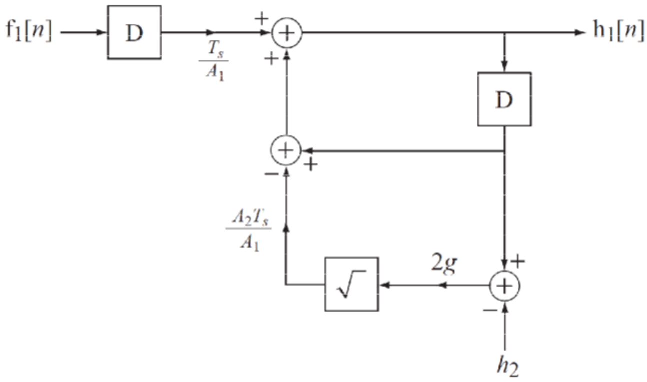
$h[]\cong$ $[-1]+\ h\,[-1]-$ $\overline{\phantom{xxxxxxxx}}$ $2\,(h[-1]-h).$ (4.8)

(4.8) ifodadagi $h$ ning qiymatini ixtiyoriy  uchun topib, ning

boshqa qiymatlari uchun uning qiymatini topish mumkin.

ning qiymatini kichik qilib tanlash tizimning approksimasiyasi yaxshilanishiga olib keladi. Bu diskret vaqt usulidan foydalanib, uzluksiz vaqt tizimi masalasini yechishga misol bo‘ladi.

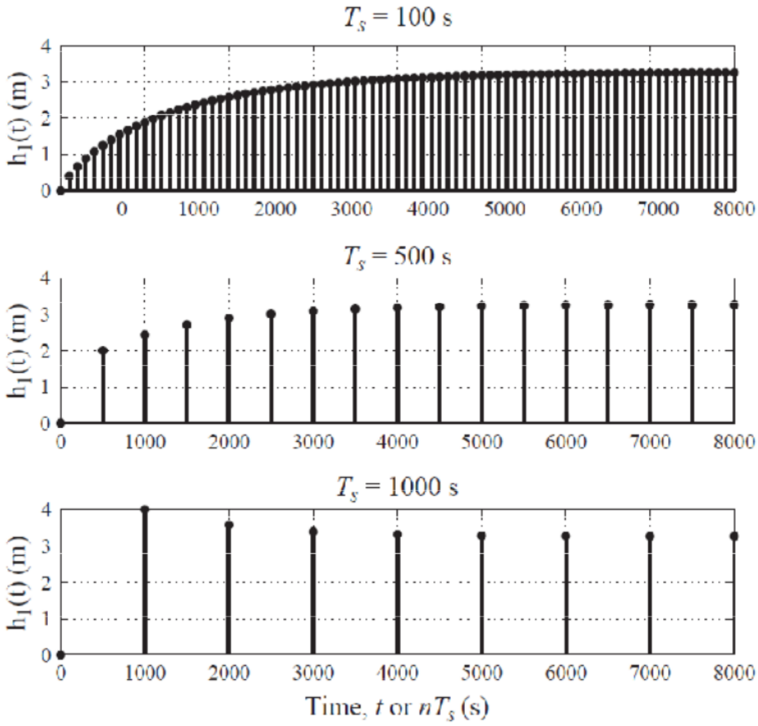
(4.8) ifoda ayirma tenglamasi bo‘lgani uchun, diskret vaqt tizimini ifodalaydi (4.23-rasm).




4.23-rasm. *Suyuqlik oqimi differensial tenglamasini raqamli shaklda hisoblovchi tizim*

4.23-rasmda keltirilgan diskret vaqt tizimining uchta diskretizasiya oralig‘i: 100 s, 500 s va 1000 s lar uchun Torichelli tenglamasi yechimining natijalari 4.24-rasmda keltirilgan. = 100 uchun tenglamaning yechimi aniq kuzatish mumkin. = 500 bo‘lgan holat uchun tenglamaning yechimi umumiy holda to‘g‘ri yechimga yaqin.

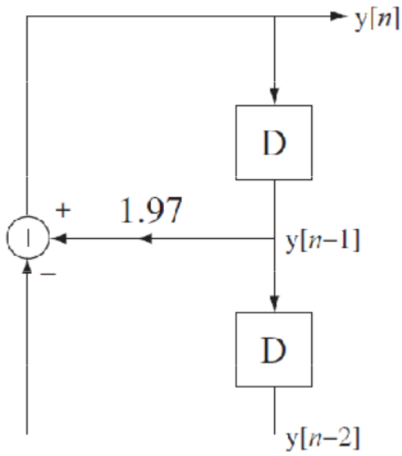
= 1000 bo‘lgan holatda yechim umuman noto‘g‘ri. Juda katta diskretlash oralig‘ini tanlash yechimning noto‘g‘ri bo‘lishiga olib keladi.




4.24-rasm. *Torichelli tenglamasining sonli yechimlariga oid*

*Teskari bog‘lanishli tizimlarni modellashtirish*

4.25-rasmda keltirilgan diskret vaqt tizimining $\geq 0$ bo‘lgan vaqt davomidagi chiqish signalini hisoblashni ko‘rib chiqamiz. Bunda boshlang‘ich shart sifatida quyidagini e’tiborga olish kerak: $[0] = 1$ va $[-1] = 0$.




4.25-rasm. *Diskret vaqt tizimi*

4.25-rasmda keltirilgan tizimni quyidagi tenglama orqali ifodalash mumkin:

$$[\ ]=1.97\,[\quad -1]-\quad[\ -2]. \qquad (4.9)$$

Boshlang‘ich sharti [ ] va [ ] ushbu

$0=1$ $-1=0$ bo‘lgan

tenglama chiqish qiymatlari [ ] ni to‘liq hisoblash imkonini beradi. Bu hisoblash natijalari cheksiz ko‘p bo‘lishi mumkin. Chiqish qiymatlarini hisoblashning boshqa bir usuli ham mavjud bo‘lib, bu tenglamani berk shakldа yechish hisoblanadi. Tizimning kirishiga hyech qanday ta’sir ko‘rsatilmagan holatda bu tenglama gomogen hisoblanadi. Gomogen yechimning funksional shakli murakkab eksponensial – hisoblanadi. Ushbuni (4.9) tenglamaga tadbiq etib $=1.97 \quad -$ tenglamani hosil qilish mumkin. tenglamaning har ikki tomonini ga bo‘lib, tenglamaning yechimi uchun quyidagiga ega bo’lamiz:

$$= \frac{1.97 \pm \sqrt{1.97-4}}{2} = 0.985 \pm 0.1726 = \pm \quad . \qquad (4.10)$$

Ikkita xususiy qiymat mavjudligini e’tiborga olsak, gomogen yechim quyidagi shakldа bo‘ladi:

$$[\ ]= \quad + \quad . \qquad (4.11)$$

Boshlang‘ich shart [ ] $[-1]=0$ hamda ekanligini (4.11)

$$= \begin{matrix} 1^{+} \\ 0\cdot \end{matrix}$$

$0=1$

[ ] + | $=\ 0.5+2.853$ qiymat

ifodadadan $0=$ va

e’tiborga olsak, u holda

1 1

Ushbu ikkita $=0.5-2.853$ va uchun tenglamaning yechimi quyidagicha:

$$[\ ]=(0.5-2.853)(0.985+0.1726) + (0.5+2.853)(0.985-0.1726)\ .$$

Bu yechim unchalik qulay shakldа bo‘lmaganligi sababli, uni quyidagi shakldа yozamiz

$$[\ ]=(0.5-\ 2.853)\quad\cdot\qquad+(0.5+2.853)\quad\cdot$$

yoki

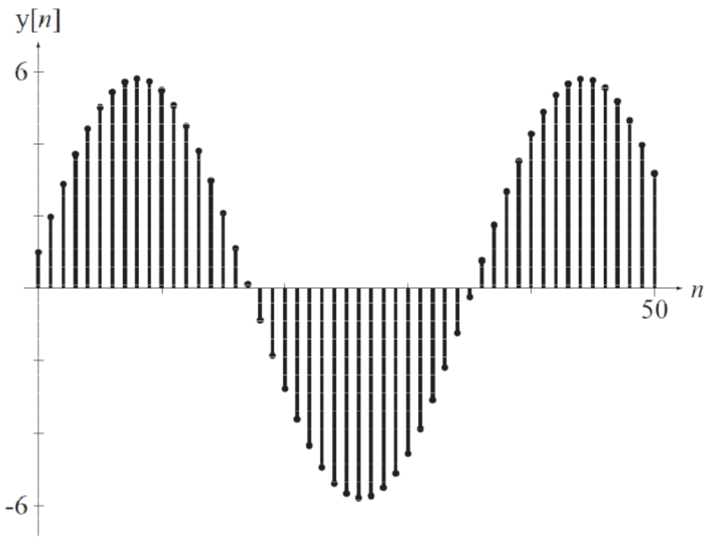
$$[\ ]=0.5\ \left(\cdot\ +\ \cdot\right) - 2.853\ \left(\cdot\ -\ \cdot\right),$$

$$= 2\cos(0.1734\ ) \qquad (\qquad) = 2\sin 0.1734$$

yoki

$$[\ ] = \cos(0.1734\ ) + 5.706\sin(0.1734\ ).$$

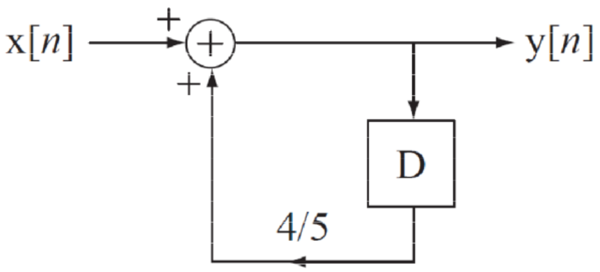
Tizim tomonidan shakllantirilgan, ya’ni chiqish signalining dastlabki 50 ta qiymati 4.26-rasmda keltirilgan.




4.26-rasm. *Diskret vaqt tizimi shakllantirgan signal*

## 4.3.2. Diskret vaqt tizimlarining xossalari

Diskret vaqt tizimlarining xossalari xuddi uzluksiz vaqt tizimlarining xossalari kabidir. Quyida diskret vaqt tizimi xossalaridan bir nechtasini ko‘rib chiqamiz.




4.27-rasm. *Tizim*

4.27-rasmdagi tizimni ko‘rib chiqamiz. Ushbu tizimning kirish va

chiqish signallari bir-biri bilan quyidagi ifoda orqali bog‘langan

[] = [ ] + 4/5 [ ] [] =

$(4/5)$ $^{-1}$ . Tenglamaning gomogen yechimi [ ] raqamli

ga teng. Kirish signali bitta sakrash signali

[ ] = 5 va [] =

bo‘lsin. U holda xususiy yechim to‘liq yechim

$(4/5)$ + 5 ga = 0 bo‘lgan vaqtgacha

teng bo‘ladi. Agar tizim

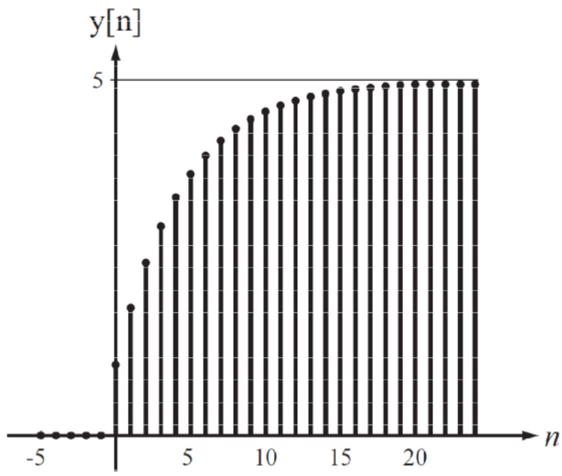
boshlang‘ich holatda bo‘lsa, to‘liq yechim (4.28-rasm)

$$[\quad] = \quad 5 - 4(4/5), \quad \geq 0$$

$$0, \quad < 0$$

yoki

$$[\,]=[5-4(4/5)\,] \quad [\,].$$

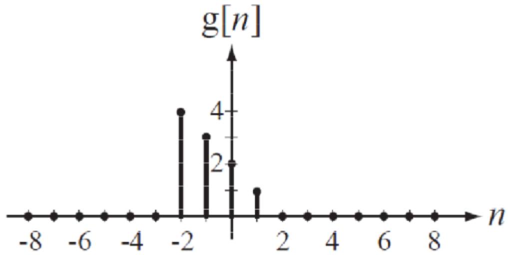



4.28-rasm. *Tizimning raqamli bitta sakrash signaliga reaksiyasi*

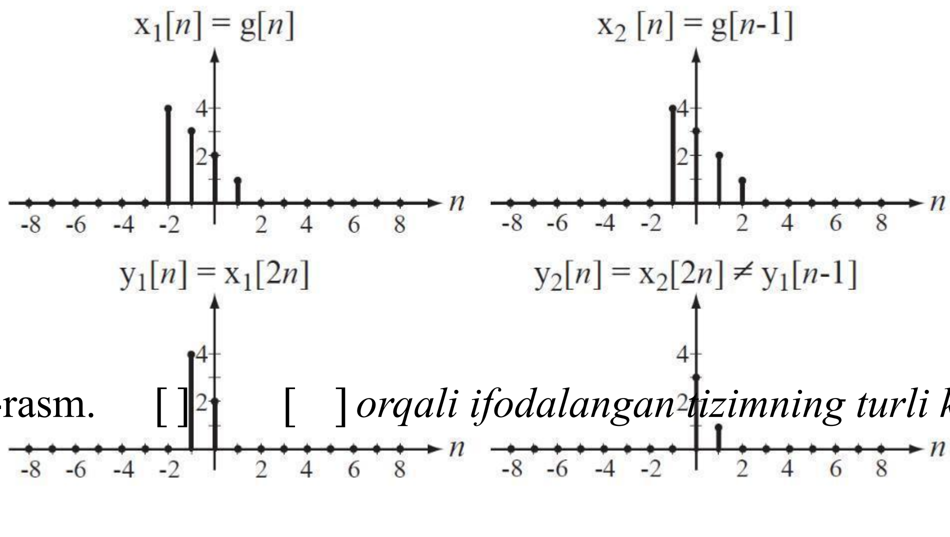
Agar tizimning kirish signalini qandaydir konstanta – o‘zgarmas qiymatga ko‘paytirsak uning javob reaksiyasi ham ushbu konstantaga ko‘paytirilgan holda bo‘ladi, bu esa tizimning bir jinsliligini bildiradi. Agar tizimning kirish signalini vaqtga kechiktirsak chiqish signali ham ushbu vaqtga kechikkan holda yuzaga keladi, bu esa tizimning vaqtga bog‘liq bo‘lmagan tizim ekanligidan dalolat beradi. Agar kirish

signali ikkita signal yig‘indisidan iborat bo‘lsa, chiqish signali ushbu kirish signallari alohida-alohida ta’sir etgan holdagi chiqish signallarining yig‘indisidan iborat bo‘ladi. Bu esa tizimining vaqtga bog‘liq bo‘lmagan chiziqli diskret tizim ekanligini bildiradi. Shuningdek ushbu tizim cheklangan kirish signaliga cheklangan chiqish signali orqali javob qaytaradi, bundan kelib chiqadiki, tizim barqaror tizim hisoblanadi.

Vaqtga bog‘liq bo‘lmagan tizimga bir misol sifatida quyidagi ifoda orqali ifodalangan tizimni ko‘rsatish mumkin: [ ] = [ ] . Agar [ ] = [ ] va [ ] = [ −1], bunda [ ] – 4.29-rasmda keltirilgan shakldagi signal bo‘lsa, [ ] kirish signaliga tizimning javob reaksiyasi [ ] va [ ] kirish signaliga tizimning javob reaksiyasi [ ] ga teng deb tasavvur qilamiz. Ushbu signallar 4.30-rasmda keltirilgan.




4.29-rasm. *Kirish signali*




4.30-rasm. [ ] [ ] *orqali ifodalangan tizimning turli kirish signallariga javob reaksiyasi*

[ ] kirish signali xuddi [ ] kirish signali kabi faqat bitta diskret vaqtga kechiktirilgan bo‘lsa, tizim vaqtga bog‘liq bo‘lmagan tizim bo‘lishi uchun [ ] chiqish signali ham xuddi [ ] chiqish signali kabi faqat bitta diskret vaqtga kechiktirilgan bo‘lishi kerak. Ammo bizning misolimizda bunday emas. Demak bu tizim turli vaqt tizimlari hisoblanadi.

Signallar va tizimlar sohasida nisbatan kengroq o‘rganilgan diskret vaqt tizimlari bu kirish va chiqish ta’sirlari chiziqli, doimiy koeffisiyentli bo‘lgan sodda ayirma ifoda orqali ifodalanadigan diskret tizimlar hisoblanadi.

Diskret vaqt tizimlarida agar qaysidir xususiy qiymatlarining miqdori birga teng yoki birdan katta bo‘lsa, bunday tizim nobarqaror tizim hisoblanadi.

## *Nazorat savollari*

1. *Tizimga tushuncha bering, tizimlarni tahlil qilish deganda nimani tushunasiz?*
2. *Tizimlarga bir necha misollar keltiring?*
3. *Bir nechta sodda tizimlarni blok-sxemalar orqali tasvirlanishiga namunalar keltiring.*
4. *Tizimlar qanday xossalarga ega?*
5. *Gomogen tizimlar deganda nimani tushunasiz?*
6. *Vaqt bo‘yicha invariant tizimga misol keltiring.*
7. *Vaqtga bog‘liq bo‘lmagan chiziqli tizimlar deb qanday tizimlarga aytiladi?*
8. *Diskret vaqt tizimlari haqida tushuncha bering.*
9. *Uzluksiz vaqt tizimidan foydalanib, diskret vaqt tizimini modellashtirishga misol keltiring.*
10. *Diskret vaqt tizimlarining xossalarini aytib bering.*

# 5. SIGNALLARNI FURE QATORIGA YOYISH

## 5.1. Signallarning matematik modellari

Texnikada “signal” deganda fizik tizim holatini aks ettiruvchi qandaydir miqdor tushuniladi. Radiotexnikada signal deb kuchlanish (ko‘pincha) yoki tok o‘zgarishini ifodalovchi vaqt funksiyasi ( ) ga aytiladi.

Berilgan analitik (*determinant* – har qanday vaqt momentida aniqlangan) funksiya ( ) signalning abstrakt matematik modeli hisoblanadi.

Determinant radiotexnik signallarning matematik modellarini quyidagi turlarga ajratish mumkin:

uzluksiz signal (garmonik tebranish):

$$( ) = \quad \cos \quad , \qquad ( ) = \quad \sin \qquad (5.1)$$

Garmonik signalning aniqlanish sohasi

$$\in (-\infty, \infty). \qquad (5.2)$$

uzluksiz signal (Gauss impulsi):

$$( ) = \quad , \quad \in (-\infty,\infty). \qquad (5.3)$$

uzluksiz signal (eksponensial impuls):

$$( ) = \quad 0,$$

finit signal, ya’ni cheklangan vaqt intervalida noldan farqli qiymatlarni qabul qiluvchi signal (to‘g‘ri to‘rtburchakli videoimpuls):

$$( ) = \begin{cases} \quad , & \in [-\frac{}{2}, \frac{}{2}], \\ 0, & \notin [-\frac{}{2}, \frac{}{2}]. \end{cases} \qquad (5.4)$$

finit signal (uchburchakli videoimpuls):

$( ) = \quad (-), \quad \in [0, \quad ],$ (5.5)

—

0, ∈ [0, ].

davriy signal:

$( ) = \quad ( - \quad ), \quad = 0,\pm 1,\pm 2,\dots ,$ (5.6)

bu yerda, ( ) – intervaldagi (ketma-ketlik davrida) finit signal.

oniy qiymatlar ketma-ketligi hisoblanuvchi diskret signal:

$( ) = \quad , = 0,1,2,\dots.$ (5.7)

**Sinov signallari.** Signallarning matematik modellari orasida sinov, namunaviy, nazorat signallari alohida o‘rin egallaydi. Ushbu signallar nazariy tadqiqotlar olib borishda, ularga taqriban mos keluvchi fizik (radiotexnik) signallar eksperimental radiotexnika va amaliy radioo‘lchashlarda juda keng foydalaniladi.

Keng tarqalgan sinov signallaridan biri bu *birlik zinasimon funksiya, ulash funksiyasi* yoki *Xevisayd funksiyasi*:

$$( )=1( )= \begin{cases} 1, & > 0, \\ 1/2, & = 0, \\ 0, & < 0. \end{cases}$$ (5.8)

Eng muhim sinov radiotexnik signali *delta-funksiya* yoki *Dirak funksiyasi* ( ) hisoblanadi va quyidagi ifodalar orqali aniqlanadi:

$$1.\ ()= \begin{cases} \infty, & = 0, \\ 0, & \neq 0. \end{cases} \qquad 2.\ () = 1( - ).$$ (5.9)

(5.9) ifodaning birinchi qismidan kelib chiqadiki, ( ) funksiya faqat $= 0$ argumentdagina mavjud bo‘lganligi uchun quyidagi munosabatlar o‘rinli:

$$1.(- \quad ) = \infty, \quad = \quad , \quad 2. \quad ( - \quad ) \quad = 1. \quad (5.10)$$

0, ≠ .

(5.9) ifodaning ikkinchi qismidan kelib chiqadiki, ( ) funksiya

o‘lchov birligi argumenta o‘lchov birligiga teskari kattalik. Yana bir muhim xususiyati, bu -funksiyaning filtrlash xossasi hisoblanadi:

$$( ) \quad ( - \quad ) \quad = \quad ( \quad ) \quad ( - \quad ) \quad = \quad ( \quad ), \quad (5.11)$$

ya’ni, -funksiyaga ko‘paytiruvchi sifatidagi integral osti funksiyaning integrali nolga teng bo‘lmagan argumentli -funksiyaning qiymatiga teng.

( ) funksiya umumlashtirilgan, ramziy funksiyalar deb ataluvchi funksiyalar qatoriga kiradi. Uning yordamida, masalan, klassik ma’noda mavjud bo‘lmagan Xevisayd funksiyasining xosilasini aniqlash mumkin:

$$\frac{()}{\quad} = (). \quad (5.12)$$

Xevisayd funksiyasi (5.8) o‘z navbatida (5.12) asosida quyidagicha ifodalanishi mumkin:

$$( ) = \quad ( ) \; . \quad (5.13)$$

Garmonik signal (5.1) va garmonik (kvazigarmonik) ulanish funksiyasi ( ) = cos , ≥ 0 ni Xevisayd funksiyasidan foydalanib quyidagicha yozish mumkin ( ) = ( ) cos .

*Radiosignal.* Quyidagi model ko‘rinishidagi signallar radiosignallar deb ataladi.

$$( ) = ( ) \cos\{ \quad + \quad () + \quad \} = \quad ( ) \cos \Psi(t). \quad (5.14)$$

Radiosignalning o‘rovchisi (egiluvchisi) ( ), to‘liq fazasi Ψ(t)

va faza funksiya ( ) lari ajratiladi. = 2 chastota tashuvchi chastota deb ataladi. (5.14) model ko‘rinishidagi signalning ( ) o‘rovchisi va ( ) faza funksiyasi = 2 / (tashuvchi chastota davri) vaqt oralig‘ida sezilarli o‘zgarmaydi. Ko‘pchilik signallarni

(5.14) ifoda (signal)ning xususiy hollari sifatida ifodalash mumkin, masalan ( ) = = bo‘lgan holat yoki = 0 bo‘lgan holat yoki ( ) = 0 bo’lgan holat va h.k. Agar ( ) = 0 bo‘lsa, u holda boshlang‘ich faza deyiladi.

Eng sodda radiosignal garmonik funksiya (5.1) hisoblanadi.

Agar ( ) o‘rovchi finit funksiya bo‘lsa, u holda radiosignal (5.14) radioimpuls deb ataladi. ( ) o‘rovchi finit funksiyaga mos

videoimpuls, – radioimpulsning to‘ldiruvchi chastotasi ( ( ) = holatda) hisoblanadi. O‘rovchi sifatida to‘g‘ri to‘rtburchakli videoimpuls (5.4) ni tanlasak va ( ) = = 0 deb olsak, u holda

to‘g‘ri to‘rtburchakli radioimpuls shaklidagi radiosignalni hosil qilamiz, ya’ni

$$( ) = \begin{cases} \cos \quad , \in[-\frac{}{2}, \frac{}{2}], \\ 0, \quad \notin[-\frac{}{2}, \frac{}{2}]. \end{cases} \quad (5.15)$$

Agar ( ) o‘rovchi $\in (-\infty, \infty)$ yoki $\in [\, , \infty)$ intervalda aniqlangan uzluksiz funksiya bo‘lsa, u holda ushbu signal (5.14) radiosignalga mos videosignal deb ataladi.

## 5.2. Davriy signallarning tahlili

Signallarni tahlil qilishda ularni funksional qatorlar yoyilmasi shaklida ifodalash juda muhim hisoblanadi. Funksional qatorlar fizika va matematikada ko‘pgina masalalarni yechishda juda keng ishlatiladi. Ayniqsa trigonometrik, garmonik qatorlar va Furye qatorlari alohida o‘rin egallashadi.

**Furye trigonometrik qatori.** Cheklanmagan interval $\in$

$(-\infty, \infty)$ da aniqlangan davriy signal $( ) = \sum ( - ), = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ni quyidagi Furye trigonometrik qatori ko‘rinishida ifodalash mumkin.

$$( ) = \quad + \quad ( \quad \cos \quad + \sin \quad ), \qquad (5.16)$$

2

bunda, $= \quad = \quad , \quad = \quad = 1,2,\ldots.$

Signalni bunday yoyilma (5.16) shaklida ifodalash uchun ( ) signal ( ( ) – oraliqdagi finit signal) *T* davr oralig‘ida *Dirixle shartini* qanoatlantirishi lozim, ya’ni

2-tur uzulishga ega bo‘lmasligi;

chekli sondagi 1-tur uzulishlarga ega bo‘lishi;

chekli sondagi ekstremumlarga ega bo‘lishi kerak.

(shu jumladan ham) va koeffisiyentlar quyidagi formulalar orqali aniqlanadi

$$= \frac{2}{} \int ( ) \cos \quad , \qquad = \frac{2}{} \int ( ) \sin \quad . \qquad (5.17)$$

Ba’zan koeffisiyentni hisoblash umumiy formulasidan = 0 ni qo‘yib koeffisiyent o‘rniga (5.17) formulaga /2 ni hisoblash qulay, ya’ni

$$= \frac{1}{} \int ( ) \quad . \qquad (5.18)$$

2

Amaliyotda (5.16) qatorning ikkinchi ko‘rinishidan foydalanish qulay, ya’ni quyidagi o‘zgartirishni amalga oshirib

$$\cos \quad + \quad \sin \quad =$$

$$= \quad + \left( \cos \quad + \quad \sin \quad \right) =$$

$$= \quad + \quad (\cos \quad \cos \quad - \sin \quad \sin \quad ) =$$

$$= \cos( \quad + \quad ),$$

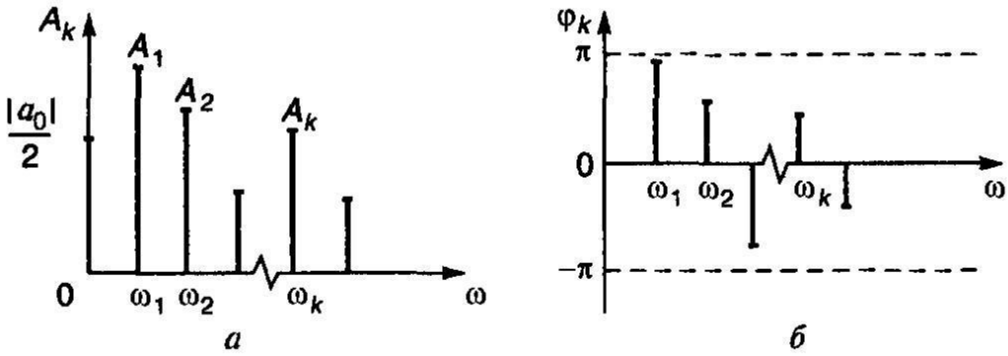
bunda, tg = − —, = + , bo’lib, ( ) signalning Furye

qatori ikkinchi ko‘rinishini hosil qilamiz

( ) = + cos( + ). (5.19)

Bu o‘rinda = = 2 = 2 / belgilanishlar keng ishlatiladi.

(5.19) ifodadagi va koeffisiyentlar majmui signalning amplituda spektrini, koeffisiyentlar majmui – faza spektrini tashkil etadi. Davriy signalning amplituda va faza spektrlari 5.1-rasmda keltirilgan.




5.1-rasm. *Davriy signalning amplituda (a) va faza (b) spektrlari*

**Fure kompleks qatori.** Eyler formulalaridan foydalanib

cos = 1 + , sin = 1 − ,

(5.16) qatorni quyidagi ko‘rinishda ifodalash mumkin

( ) = + + + − =

= + 1( − ) + 1( + ) .

Kompleks amplitudani

1 · 1

$\frac{}{2}$ ( − )= . $\frac{}{2}$ ( + )= (5.20)

va “manfiy” chastota = − = − ya’ni ning o‘zgarish

oralig‘iga < 0 qiymatlarni kiritib, (5.16) ifodani quyidagi ko‘rinishga keltiramiz

0=2+ , ≠ 0.

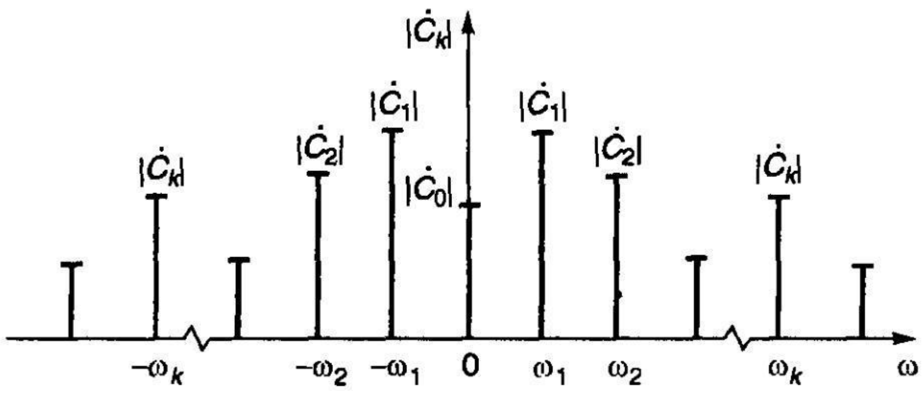
Ushbu ifoda Furye qatorining kompleks shakli deb ataladi. Agar quyidagi qo‘shimcha o‘zgartirishni kiritsak, ya’ni = = /2 , Furye kompleks qatorini quyidagicha ixcham ko‘rinishda yozish mumkin

( )= . (5.21)

Furye qatorining kompleks ko‘rinishi matematik o‘zgartirishlar (almashtirishlar)ni bajarishda qulaylik yaratishi bilan ahamiyatga ega.

(5.21) qatorning koeffisiyentlari ( ) davriy signalning ,

$k$ 0, 1, 2, ... chastotaning hamma qiymatlarida amplituda va faza spektrlari bilan aniqlangan diskret kompleks spektrini ifodalaydi. 5.2-rasmda amplituda spektri keltirilgan.




5.2-rasm. *Davriy signalning Furye kompleks qatoriga yoyishdan foydalanilgandagi amplituda spektri*

= = = /2 ekanligini inobatga olib, (5.21) qatorni kengroq ko‘rib chiqamiz

()=

=⋯+ +⋯+ +⋯+ +⋯;

va yana Eyler formulalaridan foydalanib, yig‘indini quyidagicha o‘zgartiramiz

+ = 2 cos cos − 2 sin sin =

= sin + sin = 2 cos( + ).

Bunda = 2 cos , = −2 sin ekanligi e’tiborga olingan.

(5.17) ifodani (5.20) ga qo‘yib, quyidagini olamiz

= 1 ( − ) = 1 ( ) cos − 1 ( ) sin =

= 1 ( ) . (5.22)

, = 0, ±1, ±2, …

(5.22) formula bevosita qiymatlarni hisoblashda ishlatiladi.

***Eslatma 1.***

(5.17) va (5.22) ifodalardagi integral chegaralarini o‘zgartirish mumkin, faqat integrallash oralig‘i butun davrga mos bo‘lishi kerak, ya’ni − /2 dan /2 gacha yoki − dan 0 gacha va h.k. Bu holat davrli ( ) davriy funksiya uchun ∫ ( ) integralning qiymati ga bog‘liq emasligidan kelib chiqadi. Ushbu munosabat amaliy masalalarni yechishda qulay hisoblanadi. Masalan (5.17) ifodada integral chegaralarini simmetrik, ya’ni − /2 dan /2 gacha deb olsak, (5.17) qator quyidagilardan tashkil topganligini payqash qiyin emas, ya’ni agar ( ) funksiya juft bo‘lsa, faqat koeffisiyentli

( ) funksiya toq bo‘lsa, faqat

kosinusoidal garmonikalardan, agar koeffisiyentli sinusoidal garmonikalardan iborat, bunda integrallash chegaralari va koeffisiyentlarni hisoblashda qanday olinishiga bog’liq emas.

***Eslatma 2.***

Furye qatorlari bo‘yicha topilgan spektrlar ekvidistantligini ta’kidlab o‘tamiz, ya’ni qator koeffisiyentlari albatta (zaruriy) $= 0$ tashkil etuvchi va $= 2 /$ qadam bilan joylashuvchi ekvidistant ketma-ketlik (… , −2 , − , 0, , 2 , … ) asosida hosil bo‘ladi. Koeffisiyentlarning o‘zi esa har qanday qiymatni, shu jumladan nol qiymatni ham qabul qilishi mumkin.

***Eslatma 3.***

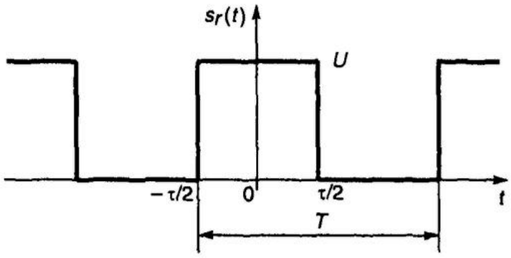
Davriy signallarni Furye qatorlariga yoyishda funksiyalar ortogonalligi to‘g‘risida so‘z boradi. Shuning uchun funksiyalarning ortogonalligi ta’rifini eslatib o‘tamiz: ( ) ( ) ( ), … , ( ) kompleks funksiyalar [ , ]intervalda ortogonal hisoblanadi, agar quyidagi shart bajarilsa

$$\int ( ) ( ) = 0 \text{ agar } \neq \text{ va } \int | ( )| \neq 0. \quad (5.23)$$

Ko‘rib chiqilgan garmonik Furye qatorlari uchun [ , ] ortogonallik intervali $/2$ $/$ hisoblanadi, ( ) ( ) ( ), … , ( ) funksiyalarni esa ± kompleks eksponentalar yoki cos , sin funksiyalar tashkil etadi (buni (5.23) ifoda orqali bevosita tekshirib ko‘rish mumkin).

## 5.3. Ba’zi davriy signallarning spektrlari

***To‘g‘ri to‘rtburchakli videoimpulslar ketma-ketligi.*** 5.3-rasmda keltirilgan signalning spektrini ko‘rib chiqamiz. Ushbu signal turli radiotexnik jarayonlarda, uning modeli esa nazariy radiotexnikada juda keng ishlatiladi.




5.3-rasm. *To‘g‘ri to‘rtburchakli videoimpulslar ketma-ketligi*

Signalning intervaldagi analitik ifodasi quyidagicha:

, ∈ [− , ],

2 2

( ) = (5.24)

0, ∉ [− , ],

2 2

To‘g‘ri to‘rtburchakli impulsning davomiyligi tushunchasini kiritamiz. Furye kompleks qatori (5.21) dan foydalanamiz

$= \; 1 \; (\,) \; = \; 1 \; =$

$(\,) \; (- \; ) = - \; /2$

$= -$

$= - \; - \; = \; 2 \; - \; =$

2

$= \; 2 \; \sin \; = \; \sin \; = \; \sin \; = \; \sin \; .$

2

Bunda integrallash chegaralari 0 va lar o’rnida inte

bo‘yicha zarur integrallashni ko‘rsatuvchi ( ) belgilashdan foydalanilgan (1-eslatmaga qarang). Qulay integrallash chegaralari birorta aniq ( ) signal (funksiya)ning ifodasini integral ostiga olish jarayonida yuzaga keladi.

lim sin = 1, = = .

–

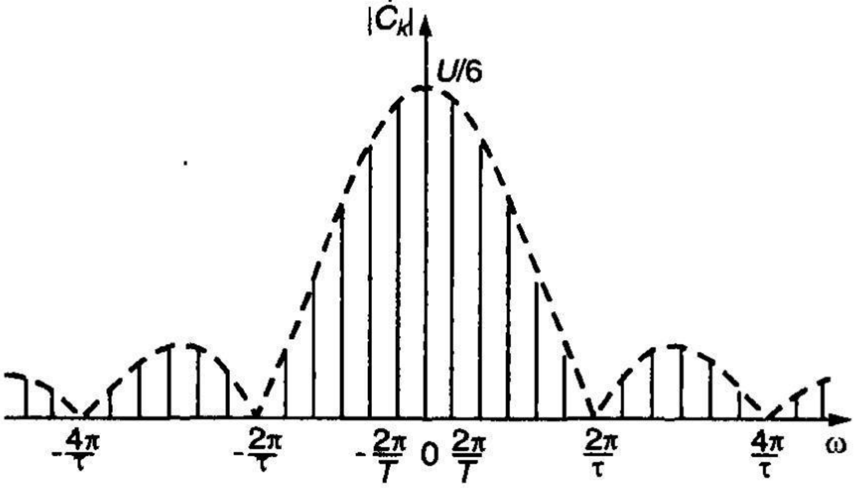
qiymati va koeffisiyentlari ketma-ketlik kovakligi deb

ataluvchi – = ning aniq qiymatlari uchun (5.25) ifoda orqali aniqlanadi. = , 2 , 3 , ... tartib raqamli koeffisiyentlarning qiymati nolga teng. Amplituda diskret spektri o‘rovchisining shaklini tahlil qilib, uni – funksiya sifatida ekanligini payqash qiyin emas (bunda, sinusning diskret argumenti ni uzluksiz argument ga almashtiriladi). Amplituda = 1 va kovaklik = 6 ga teng bo‘lgan signalning spektri va spektr o‘rovchisi (punktir chiziq) 5.4-rasmda keltirilgan.

To‘g‘ri to‘rtburchakli videoimpulslar ketma-ketligining kovakligi = 2 bo‘lgan holat uchun Furye qatoriga yoyish kompleks koeffisiyentlari quyidagicha bo‘ladi

= sin , (5.26)

demak, = , = , „...=0, =– , = , ... .




5.4-rasm. *To‘g‘ri to‘rtburchakli videoimpulslar ketma-ketligining amplituda spektri* ( = 6)

Furye qatoriga yoyilmasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi

$( )=\cdots+ \quad - \quad + \quad + \quad +$

$\frac{}{5} \quad \frac{}{3} \quad \frac{}{} \quad \frac{}{2}$

$+ \frac{}{} \quad - \frac{}{3} \quad + \cdots$ (5.27)

Har bir juft $\frac{}{} +$ tashkil etuvchini Eyler formulasi asosida quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$\frac{}{} + \frac{}{} = 2 \cos ,$

va natijada (5.27) qator quyidagi soddaroq ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$( ) = \frac{2}{} \frac{}{4} + \cos - \frac{1}{3} \cos 3 + \frac{1}{5} \cos 5 - \frac{1}{7} \cos 7$

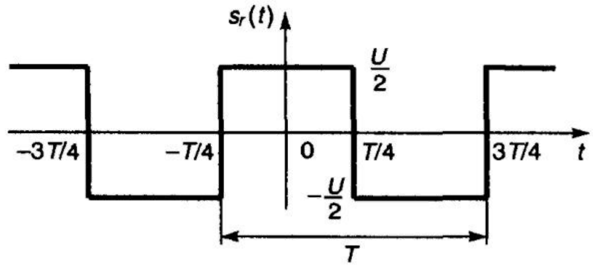
$+ \cdots .$ (5.28)

5.3-rasmda keltirilgan ketma-ketlik juft signal bo‘lganligi uchun, (5.28) ifodani (5.16) shakldagi $= 0$ koeffisiyentli Furye qatori sifatida ham yoki (5.19) shakldagi Furye qatori sifatida ham qarash mumkin. Keyingi holatda, ya’ni Furye qatorining ikkinchi ko‘rinishi

sifatida qaralganda faza spektri yoyilma garmonikalari oldidagi tegishli belgilarni “ta’minlaydi”, shuning uchun ham $= 0, = - ,$ $= -2 , = -3 , \ldots$ qiymatlarni qabul qiladi, va natijada

$( ) = \frac{2}{} \frac{}{4} + \cos + \frac{1}{3} \cos(3 - ) + \frac{1}{5} \cos(5 - 2 ) + \cdots .$

O‘quvchilarga mashq sifatida quyidagi 5.5-rasmda keltirilgan signalning Furye qatoriga yoyilmasini topishni tavsiya etamiz. Chunki ushbu signal turli radiotexnik jarayonlarda ko‘plab ishlatiladi va bu turdagi signal meandr deb nomlanadi.




5.5-rasm. *Meandr*

( ) analitik meandr signalini shakllantiruvchi intervaldagi ( ) ketma-ketlik quyidagicha yoziladi:

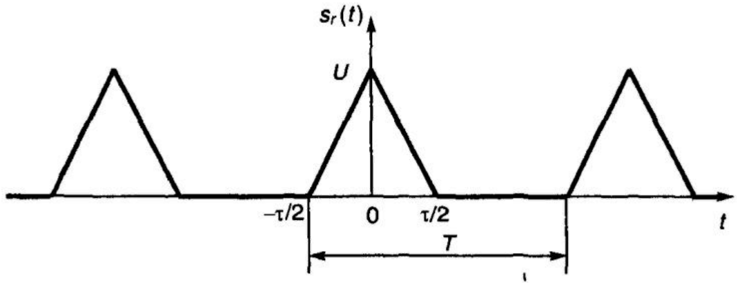
$$( ) = \begin{cases} \overline{\phantom{x}}\,_{2}, & \in [-\overline{\phantom{x}}_{4}, \overline{\phantom{x}}_{4}], \\ -\overline{\phantom{x}}_{2}, & \in [\overline{\phantom{x}}_{4}, \overline{\phantom{x}}^{3}_{4}]. \end{cases}$$

Yuqorida ko‘rib chiqilgan to‘g‘ri to‘rtburchakli videoimpulslar ketma-ketligi meandr va $/2$ doimiy tashkil etuvchining yig‘indisidan iborat ekanligini payqash qiyin emas, va (5.27) yoyilmada $= /2$ ning mavjudligi esa bunga dalil bo‘ladi.

Meandr va to‘g‘ri to‘rtburchakli videoimpulslar ketma-ketligining yoyilmasidan ( $= 2$ bo‘lgan hol uchun) shuni kuzatish mumkinki, yoyish koeffisiyentlarining qiymati $1/$ qonuniga mos ravishda kamayib boradi.

***Uchburchakli videoimpulslar ketma-ketligi.*** Uchburchakli videoimpulslar ketma-ketligidan iborat bo‘lgan davriy signalni ko‘rib chiqamiz (5.6-rasm). Impulslar ketma-ketligi uchun analitik ifoda quyidagi ko’rinishga ega:

$$( ) = \begin{cases} 1 - \overline{\phantom{x}}^{2}\,| |, & | | \in [0, \overline{\phantom{x}}_{2}], \\ 0, & | | \notin [0, \overline{\phantom{x}}_{2}]. \end{cases} \qquad (5.29)$$




5.6-rasm. *Uchburchakli videoimpulslar ketma-ketligi*

(5.21) ifodada keltirilgan Furye kompleks qatoridan foydalanib,

koeffisiyentlari uchun quyidagi ifodaga ega bo’lamiz:

$$= \quad 1 \quad () \quad =$$

$$= 1 \quad 1+ \quad 2 \quad + 1 \quad 1- \quad 2 \quad =$$

$$+ \quad .$$

Ifodadagi integrallarni hisoblash va uncha murakkab bo‘lmagan amallarni bajarib (kitobxonga ushbu amallarni mustaqil bajarish tasviya etiladi), quyidagini hosil qilamiz:

$$= \quad \sin \quad = \quad \sin \quad = \quad \sin \quad . \quad (5.30)$$

= 1 deb, ya’ni (5.29) ifodadagi uchburchakli videoimpulsning davomiyligi takrorlanish davri bilan teng deb olsak, (5.21) qator koeffisiantlari uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$= \quad \sin \quad .$$

$$2$$

(5.24) va (5.29) ifodalardagi signallar spektrlari orasida qandaydir bog‘liqlik mavjud, ammo (5.28) ifodaga o‘xshash shaklda aniqlangan uchburchakli videoimpulslar ketma-ketligini Furye kompleks qatoriga yoyilmasi

$$() = \frac{2}{\ } \quad \frac{\ }{4} + \cos \quad + \frac{1}{3}\cos 3 \quad + \frac{1}{5}\cos 5 \quad + \quad + \frac{1}{7}\cos 7 \quad + \cdots ,$$

ko‘rinishida bo‘lib, yoyilma koeffisiyentlari $1/$ qonuniga mos ravishda kamayib boradi, ya’ni koeffisiyentlar tezroq kamayadi. Bu uchburchakli videoimpulsning shakli bilan bog‘liq: unda “sakrashlar” yoki 1-tur uzilishlar mavjud emas.

## 5.4. Furye almashtirishi

Nodavriy signallar spektrlarini tahlil qilish asosini Furye to‘g‘ri

$$() \qquad (5.31)$$

$$\{()\} = () =$$

va teskari

$$() = \quad () = \frac{1}{2} \quad () \qquad (5.32)$$

almashtirishlari tashkil qiladi.

( ) funksiya ( ) signalning spektral funksiyasi, spektr zichligi yoki oddiygina spektri deb ataladi. Agar ( ) signal Dirixle shartini hamda quyidagi absolyut integrallanish shartini qanoatlantirsa (5.31) va (5.32) almashtirishlarini amalga oshirish mumkin bo‘ladi:

$$|()| \quad < \infty.$$

( ) spektral funksiya umumiy holda kompleks funksiya bo‘lib, Eyler formulasi $^{\pm} = \cos \pm \sin$ ni e’tiborga olib, ushbu funksiyani quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin:

$$) = \quad () \cos \quad - \quad () \sin \quad =$$

(

$$) + \quad \mathrm{Im} \quad ) = ( \quad ) - \quad ( ). \qquad (5.33)$$

= Re ( (

Toq funksiyadan simmetrik chegaralarda olingan aniq integral nolga teng. (5.33) ifodadagi () signalni juft va toq signallar yig‘indisidan iborat () = () + () deb qarasak, Furye kosinusoidal almashtirishi ( ) – () signalning juft va Furye sinusoidal almashtirishi ( ) – () signalning toq qismlari orqali aniqlanishini kuzatish mumkin. Bundan foydali amaliy xulosa kelib chiqadi, ya’ni () juft funksiyaning Furye almashtirishi chastota ning haqiqiy funksiyasi, () toq funksiyaning Furye almashtirishi chastota ning mavhum funksiyasi hisoblanadi.

Furye teskari almashtirishi {() − ( )} ni kuzatib, () – chastota ning juft, ( ) – esa toq funksiyasi ekanligini aytish mumkin:

$$) = \quad (- \quad ), \qquad () = -(-).$$

Kitobxonga ushbu fikrni mustaqil ravishda isbot qilish tavsiya etiladi (bunda shuni e’tiborga olish kerakki, ( ) ning teskari Furye almashtirishi vaqtning haqiqiy funksiyasi hisoblanadi). Bundan () ning yana bir muhim xossasi kelib chiqadi:

( )={ ( )− ( )} * =()+ ()=

=(−)− (− ),                (5.34)

)= (−

ya’ni, dastlabki spektral funksiyaga kompleks bog‘langan funksiyani topish uchun argument belgisini o‘zgartirish yetarli hisoblanadi.

Spektral funksiyani quyidagi namunaviy ko‘rinishda ifodalash mumkin:

( ).                (5.35)

( ) = ( ) exp

Bunda

()+ ()>0

( ) =

ifoda spektral amplituda spektri funksiyasi (ko‘pincha amplituda spektri) deb,

)

( ) = ( ) =

Im (

)

Re (

ifoda esa spektral faza funksiyasi (ko‘pincha faza spektri) deb ataladi.

Bundan amplituda spektri ( ) juft, faza spektri ( ) esa toq funksiya ekanligini ko‘rish mumkin. Ushbuni e’tiborga olib va (5.35) ifodani (5.32) ifodaga qo‘ysak, quyidagiga ega bo’lamiz

1 ( )

()=2 ( ) =

)

= ( cos[ + ( )] .                (5.36)

spektral funksiyaning fizik ma’nosi: ( ) signal juda kichik ( )

amplitudali, chastotalar intervali 0 dan ∞ gacha uzluksiz to‘ldiriluvchi cheksiz ko‘p sonli garmonik tashkil etuvchilarning yig‘indisidan iborat; ushbu tashkil etuvchilarning boshlang‘ich fazalari ( ) funksiyasi orqali, cheksiz kichik amplitudalarning chastotaga bog‘liqligi “zichligi”

( ) funksiyasi orqali ifodalanadi. (5.36) ifodadagi ikkinchi integral “manfiy” chastotalarning yuzaga kelishini izohlaydi: manfiy chastotalarning yuzaga kelishi Furye to‘g‘ri va teskari almashtirishlarining matematik operasiya sifatidagi xarakteri bilan bog‘liq bo‘lib, fizik jihatdan noreal hisoblanadi. Ushbu mulohazani 5.2 va 5.3 bandlardagi natijalar bilan taqqoslash foydalidir.

Spektral funksiya ( ) ning o‘lchov birligi signalning o‘lchov birligining vaqtga ko‘paytmasi kabidir: ya’ni agar ( ) signalning o‘lchov birligi – voltlarda bo‘lsa, u holda spektral funksiyaning o‘lchov birligi ( ) = · = / .

**Furye almashtirishining simmetrikligi.** Faraz qilaylik, ( ) juft signalning haqiqiy spektri ) = ( ) ga teng bo‘lsin, ma’lumki spektral funksiya ham chastota ning juft funksiyasi bo‘ladi. U holda ( ) signal 2 ( ) spektrga ega bo‘lishi kerak. Aynan exp (± ) yadrosiga kiruvchi argumentlar va larning “o‘zaro almashinuvi” (5.31) va (5.32) ifodalar juftligining simmetrikligidan dalolat beradi.

**Davriy ketma-ketlikning spektri va yakka impulsning spektral funksiyasi orasidagi bog‘liqlik.** Furye kompleks qatori koeffisiyentlarini hisoblash formulasi, ya’ni (5.22) ifoda

$$= \frac{1}{\ } \quad ( )$$

va (5.31) ifoda, ya’ni Furye to‘g‘ri almashtirishi yoki ( ) davriy ketma-ketlik impulsini tasvirlovchi impulsning spektral funksiyasi

$$) = \quad ( ) \quad ,$$

ni taqqoslab, ular orasida juda sodda bog‘lanish mavjudligini ko‘rishimiz mumkin

$$= \frac{1}{\ } \quad ( ). \qquad (5.37)$$

# 5.5. Fure almashtirishning xossalari

Signal ( ) va uning spektri ( ) oralig‘ida yagona bog‘liqlik mavjud. Signal shakliga o‘zgartirish kiritish natijasida uning spektri ham o‘zgaradi. Quyida signallarga ishlov berishda yuz beradigan asosiy o‘zgarishlar va ularga mos ravishda signal spektrining o‘zgarishlarini ko‘rib chiqamiz.

## 5.5.1. Signalni vaqt bo‘yicha surish

Misol uchun ( ) signal $<$ $<$ vaqt orasida mavjud bo‘lib, ( ) spektr zichligiga ega bo‘lsin. Ushbu signal ( ) ni shaklini saqlagan holda uni ga kechiktirsak, u holda vaqtning yangi funksiyasi ( ) ni olamiz, ya’ni ( ) = ( − ) bo‘lib, endi bu signal + dan + gacha vaqt oralig‘ida mavjud bo‘ladi. (5.31) ifodaga asosan

() signalning spektri zichligi quyidagi ifoda orqali aniqlanadi:

$$() = \quad () \quad = \quad (- \quad ) \quad . \qquad (5.38)$$

Yangi o‘zgaruvchi ni kiritib (5.38) ifoda o‘rniga quyidagi ifodani olamiz:

$$() = \quad ( ). \qquad (5.39)$$

(5.39) ifodadan ko‘rinadiki signal ( ) ni $\pm$ ga siljitish natijasida uning spektri ( ) ning faza xarakteristikasi $\pm$ ga o‘zgaradi. Aksincha, agar signal ( ) spektral tashkil etuvchilarini $= \pm$ ga o‘zgartirsak, u holda u bilan chiziqli bog‘liq ravishda har bir spektr tashkil etuvchisi $\pm$ ga o‘zgaradi va signal $\pm$ vaqtga kechikadi yoki ilgarilaydi. Signal spektri amplituda-chastota xarakteristikasi ushbu signalning vaqt o‘qida egallagan joyiga bog‘liq emas.

Fure almashtirishning yuqorida keltirilgan xossasi chiziqli radiotexnik tizimlardan signallar buzilishsiz o‘tishlarini ta’minlashi uchun qo‘yiladigan talabni keltirib chiqaradi: chiziqli RTTning



# 5.5. Fure almashtirishning xossalari

Signal ( ) va uning spektri ( ) oralig‘ida yagona bog‘liqlik mavjud. Signal shakliga o‘zgartirish kiritish natijasida uning spektri ham o‘zgaradi. Quyida signallarga ishlov berishda yuz beradigan asosiy o‘zgarishlar va ularga mos ravishda signal spektrining o‘zgarishlarini ko‘rib chiqamiz.

## 5.5.1. Signalni vaqt bo‘yicha surish

Misol uchun ( ) signal $<$ $<$ vaqt orasida mavjud bo‘lib, ( ) spektr zichligiga ega bo‘lsin. Ushbu signal ( ) ni shaklini saqlagan holda uni ga kechiktirsak, u holda vaqtning yangi funksiyasi ( ) ni olamiz, ya’ni ( ) = ( − ) bo‘lib, endi bu signal + dan + gacha vaqt oralig‘ida mavjud bo‘ladi. (5.31) ifodaga asosan

() signalning spektri zichligi quyidagi ifoda orqali aniqlanadi:

$$\dot{()} = \quad \underset{=}{} \quad \underset{-}{()} \quad = \quad (- \quad) \quad . \qquad (5.38)$$

Yangi o‘zgaruvchi ni kiritib (5.38) ifoda o‘rniga

quyidagi ifodani olamiz:

$$\dot{()} \quad () \quad = \quad \dot{(\ )}. \qquad (5.39)$$

(5.39) ifodadan ko‘rinadiki signal ( ) ni ± ga siljitish natijasida

uning spektri ( ) ning faza xarakteristikasi ± ga o‘zgaradi. Aksincha, agar signal ( ) spektral tashkil etuvchilarini = ± ga o‘zgartirsak, u holda u bilan chiziqli bog‘liq ravishda har bir spektr tashkil etuvchisi ± ga o‘zgaradi va signal ± vaqtga kechikadi yoki ilgarilaydi. Signal spektri amplituda-chastota xarakteristikasi ushbu signalning vaqt o‘qida egallagan joyiga bog‘liq emas.

Fure almashtirishning yuqorida keltirilgan xossasi chiziqli radiotexnik tizimlardan signallar buzilishsiz o‘tishlarini ta’minlashi uchun qo‘yiladigan talabni keltirib chiqaradi: chiziqli RTTning amplituda-chastota va faza-chastota xarakteristikasi signal spektri (yoki signal spektri quvvatining asosiy qismi) joylashgan qismida chiziqli bo‘lishi kerak. Misol uchun, chiziqli RTT uzatish koeffisientining moduli ( ) = va faza-chastota xarakteristikasi chastotaning chiziqli funksiyasi ( ) = − bo‘lsin (5.7-rasm), chiziqli RTT kirishiga spektri zichligi ( ) bo‘lgan ( ) signal ta’sir etsin, u holda uning chiqishidagi signal

1 ∞ 1 ∞

( ) =2 00 = 2 ( ) =

1 ∞

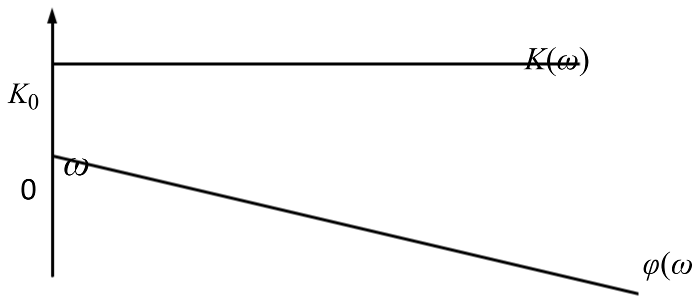
= ( ) . (5.40)

2 ( )

(5.40) ifodani quyidagi ko‘rinishda ham yozish mumkin

( )= ( − ). (5.41)

Amplituda-chastota ( ) va faza-chastota xarakteristikasi φ( ) chiziqli bo‘lgan signal RTT orqali o‘tganda o‘z shaklini to‘liq saqlab qoladi, faqat signalning qiymati o‘zgaradi marta kattalashadi (kichiklashadi) va ushbu tizim faza-chastota xarakteristikasi qiyaligi Ψ = ga teng vaqtga kechikadi.




5.7-rasm. *Axborot uzatish ideal RTTning AChX va FChXlari*

Shuni alohida ta’kidlash kerakki, haqiqatda amalga oshirish mumkin bo‘lgan RTTlarning FChXlari qiyaligi tizimning signal o‘tkazish polosasida hamma vaqt manfiy bo‘ladi, chunki chiqish signali hech vaqt kirish signalidan avval paydo bo‘lmaydi.

## 5.5.2. Vaqt masshtabini o‘zgartirish

Misol uchun 5.8-rasmda uzluksiz chiziq orqali tasvirlangan signal ( ) ni vaqt bo‘yicha siqishni ko‘ramiz. Vaqt bo‘yicha marta siqilgan signal ( ) (5.8-rasm shtrix chiziq) birlamchi signal ( ) bilan quyidagicha bog‘liqlikka ega:

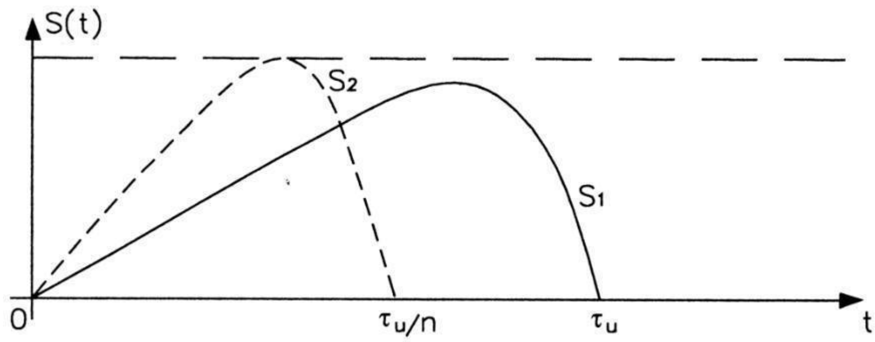
( ) = ( ), ( > 1). (5.42)

Signal ( ) ning davomiyligi birlamchi signal ( ) davomiyligi

dan marta kichik, ya’ni / . Siqilgan impuls signal spektri zichligi quyidagiga teng bo‘ladi:

1

( ) = — — . (5.43)




5.8-rasm. *Signal shakli va amplitudasini saqlagan holda uni siqish*

Shunday qilib, signal davomiyligini vaqt bo‘yicha marta qisqartirsak uning spektri kengligi mos ravishda marta kengayadi. Bunda signal spektri zichligining moduli marta kichiklashadi. Xuddi shuningdek, agar signalni marta uzaytirsak (cho‘zsak) uning spektri kengligi marta torayadi va spektri zichligining moduli marta kattalashadi.

Yuqoridagilardan quyidagi xulosa kelib chiqadi: axborot uzatish tezligini unda foydalanilayotgan signal davomiyligini qisqartirish hisobiga amalga oshirish uchun RTTning signal chastota tashkil etuvchilari polosasini kengaytirish talab etiladi.

## 5.5.3. Signal spektrini surish

Spektri zichligi ) bo‘lgan ( ) signalni birlik amplitudaga ega

bo‘lgan cos ( + ) signalga ko‘paytirish natijasida quyidagini olamiz:

∞

( ) · cos( + ) =

1 · ·

= 2 ( − ) + ( + ). (5.44)

(5.44) ifodadan ko‘rinadiki signal ( ) ning spektri ( ) ni ikkiga, chastotalari + va − ga farqlanadigan tashkil etuvchilarga bo‘lish ( ) signalning chastotasi bo‘lgan garmonik tebranish cos ( ) ga ( = 0 bo‘lgan holat uchun) ko‘paytirishni anglatadi. Bu masala chastota almashtirish qurilmalarining bajaradigan vazifalarini tahlil etishda qo‘shimcha ko‘rib chiqiladi.

## 5.5.4. Signallarni differensiallash va integrallash

Signal ( ) ni differensiallash deganda ushbu signal hamma spektr tashkil etuvchilarini alohida-alohida differensiallash (hosila olish) jarayoni (natijasi) tushuniladi. Ammo ning hosilasi ( ) bo‘lgani uchun kirish signali ( ) ning spektri ( ) ning spektri zichligi ( ) quyidagicha differensiallangan signal aniqlanadi:

( ) = ( ) ( ) = ( ). (5.45)

Yuqoridagiga o‘xshash shaklda ( ) signalni integrallash bu uning spektri tashkil etuvchilari quvvatini to‘plashni anglatadi, ya’ni

( ) = ( ) , (5.46)

va mos ravishda signal ( ) spektri zichligi quyidagiga teng bo‘ladi:

1 ). (5.47)

( ) = (

(5.47) ifodada funksiya ( ) ni ga ko‘paytirish vaqt bo‘yicha

−∞ dan gacha integrallashga mos keladi (anglatadi).

## 5.5.5. Signallarni qo‘shish

Vaqt funksiyasi bo‘lgan signal ( ) ning spektri zichligini Fure almashtirishi orqali aniqlash chiziqli bog‘liqlik bo‘lgani uchun bir necha ( ), ( ),..., ( ) signallar yig‘indisi

()= ()+ ()+⋯+ () (5.48)

ga ushbu signallar spektri zichligi yig‘indisi mos keladi, ya’ni

(5.49)

( )= ()+ ()+⋯+ ( ).

## 5.5.6. Ikki signalning ko‘paytmasi

Misol uchun tahlil etilayotgan ( ) signal ( ) va ( ) signallarning ko‘paytmasi bo‘lsin va quyidagi moslik kuchga ega bo‘lsin:

( ) ÷ ( ) va ( ) ÷ ( )

.

Bu holda ushbu ikki signal (funksiya) ko‘paytmasining spektri ushbu signallar spektrlari ( ) va ( ) o‘ramining — koeffisientiga ko‘paytmasiga teng bo‘ladi, ya’ni

1 ∞

( ) = 2 ( ) ( − ) . (5.50)

Xuddi shuningdek ikki signal spektrlarining ko'paytmasi ( ) × ( ) = ( ) vaqt funksiyasi bo'lgan ( ) va ( ) larning o'rami ( ) ga teng bo'ladi, ya'ni

$$( ) = \quad \infty \quad ()(-) = \quad \infty \quad (-)() =$$

$$= \frac{1}{2} \quad \infty \quad ( )( \quad ) \quad . \qquad (5.51)$$

(5.51) ifodadan chiziqli tizimlar orqali signal uzatishda keng foydalaniladi. Bu holda ( ) va ( ) signallardan biri ( ) kirish signali ikkinchisi esa chiziqli radiotexnik tizimning impuls xarakteristikasi ( )yoki $h$( ) deb qaraladi, ( ) va ( ) lardan biri kirish signali ( ) ning spektr zichligi deb, ikkinchisi ( ) esa ushbu chiziqli tizimning kompleks uzatish koeffisienti ( ) deb qabul qilinadi.

## 5.6. Ba'zi signallarning Fure almashtirishi

Nisbatan ko'proq ishlatiladigan video va radiosignallarning Fure almashtirishlarini ko'rib chiqamiz.

*Dirak funksiyasi.* -funksiya (5.11) ning filtrlash xossasidan foydalanib, uning spektrini topamiz:

$$( ) \qquad = \qquad = 1. \qquad (5.52)$$

( ) =

-funksiya spektrining moduli barcha chastotalar diapazonida doimiy – o'zgarmas bo'lib birga teng, faza spektri esa nolga teng bo'ladi.

Aniqlangan spektral funksiya ( ) = 1 orqali ( ) signalni Fure teskari almashtirishidan ( ) signal mavjudligi to'g'risidagi taxmin tasdiqlanganligini ko'rish mumkin:

( ) = 1 1 · = 1 .

2 2

Ushbu ifodadan

2 ()= ± = cos ±sin =

= cos , (5.53)

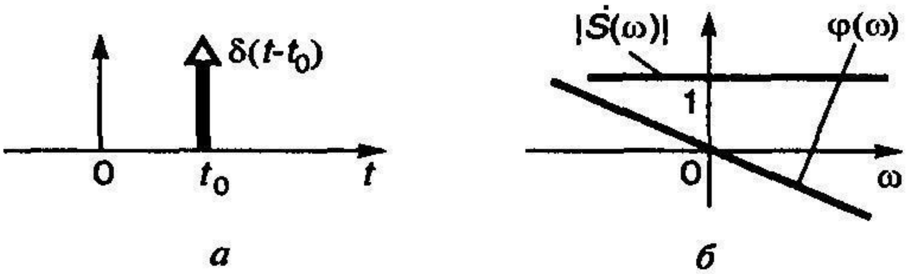
kelib chiqadi, va 5.4-bandda keltirilgan va larga nisbatan Fure almashtirishining simmetrikligidan foydalanib quyidagiga ega bo‘lamiz:

2 ()= ± = cos . (5.54)

( − ) funksiyaning Fure almashtirishi

( − ) = . (5.55)

( )=




5.9-rasm. *Dirak funksiyasi (a) va uning spektri (b)*

Vaqt o‘qi bo‘yicha surilgan -funksiyaning amplituda spektri o‘zgarmasdan saqlanadi, faza spektri esa qo‘shimcha ravishda − qo‘shiluvchiga ega bo‘ladi. ( − ) funksiyaning grafigi va amplituda hamda faza spektri 5.9a va b-rasmlarda keltirilgan.

**To‘g‘ri to‘rtburchakli videoimpuls.** (5.31) ifodadagi integralni amaliy hisoblashda integrallash chegaralarini signalning noldan farqli mavjud bo‘lgan oralig‘i sifatida qabul qilish mumkin. (5.4) ifodadagi signal uchun

$$(- \quad ) =$$

$$( ) = \qquad = -$$

$$= - \qquad - \qquad = 2 \qquad - \qquad =$$

$$= 2 \sin \qquad = \sin \qquad = \sin \qquad ( \ ). \tag{5.56}$$

Kutilganidek, juft funksiyaning Fure almashtirishi ning haqiqiy

funksiyasi hisoblanar ) ning yuqoridagi namunaviy shakli tahlil qilish va grafik tasvirlanishini chizish uchun juda qulay. 5.10a va b-rasmda to‘g‘ri to‘rtburchakli videoimpuls spektral funksiyasining moduli va fazalari, ya’ni amplituda va faza spektri grafiklari keltirilgan. Bunda

$$(0) = \lim ( ) =$$

bo‘lib, amplituda spektrining “nollik” koordinatalari ushbu $/2 =$

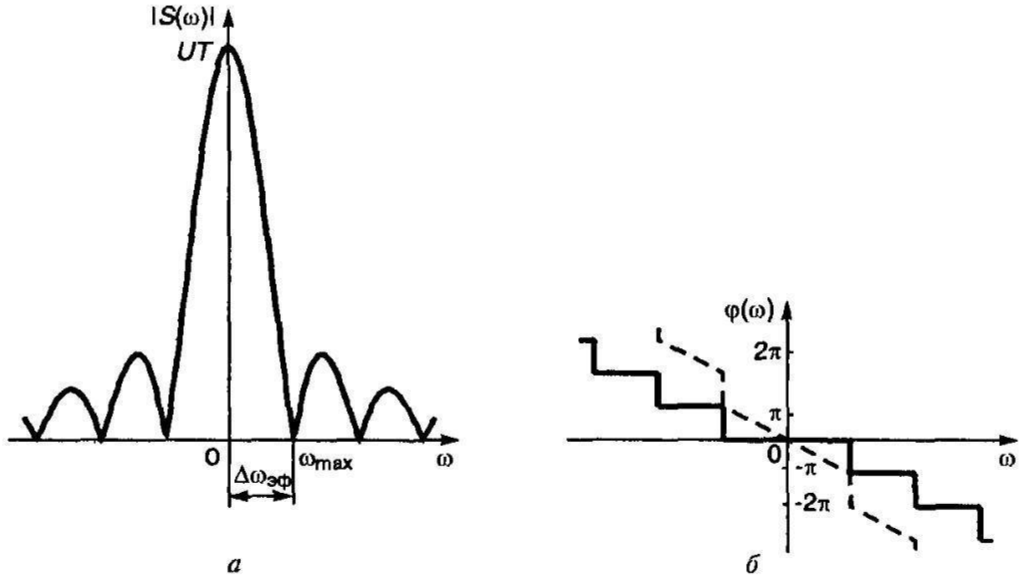
tenglamadan aniqlanadi, bunda $= \pm 1, \pm 2, \ldots$. Ushbu natija va 5.3-bandda ko‘rib chiqilgan to‘g‘ri to‘rtburchakli impulslar ketma-ketligining Fure qatori natijalarini taqqoslash foydali bo‘ladi.

Ko‘rib chiqilayotgan holat uchun faza spektri ( ) o‘ziga xos: spektral funksiyaning mavhum qismi nolga teng, ammo (5.56) ifodadagi aynan exp ( ) ko‘paytiriluvchi ( ) haqiqiy funksiyaning belgisi o‘zgaruvchan xarakterda ekanligini bildiradi. Shundan kelib chiqib, faza spektri quyidagi qiymatlarga ega bo‘ladi:

$\in [-4 \quad / \quad , -2 \quad /$ ] chastotalar intervali uchun $( ) =$ ;

$\in [-2 \quad / \quad , 2 /$ ] chastotalar intervali uchun $( \quad )=0$;

∈ [2 / , 4 / ] chastotalar intervali uchun ( ) = − va h.k.




5.10-rasm. *To‘g‘ri to‘rtburchakli videoimpulsning amplituda (a) va faza (b) spektrlari*

**To‘g‘ri to‘rtburchakli radioimpuls (radiosignal).** (5.15) ifodadagi radiosignal uchun

( ) = cos = + =

= ( ) + ( ) =

2

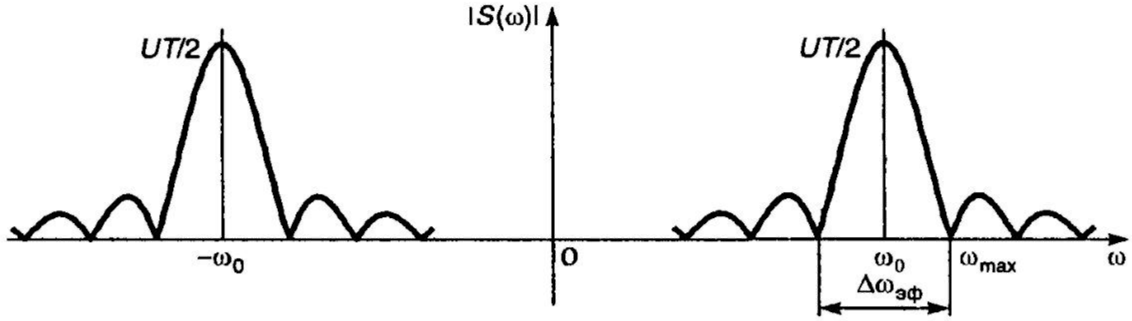
sin ( ) sin ( )

1

= + . (5.57)

2

(5.57) ifoda modulining grafiki 5.11-rasmda keltirilgan. Videoimpulsning garmonik funksiya cos ga ko‘paytmasi spektral sohada videoimpuls spektrining chastotalar o‘qi bo‘yicha ± qiymatga chapga va o‘ngga surilishiga olib keladi.




5.11-rasm. *To‘g‘ri to‘rtburchakli radioimpulsning amplituda spektri*

Spektral funksiya (5.56) ifodaga quyidagi belgilashni kiritsak va o‘rovchi spektr deb nomlasak

sin

0=

hamda undan foydalanib, (5.57) ifodani quyidagi sodda ko‘rinishda yozish mumkin

$$(\ ) = \frac{1}{2}\ \{\ (\ +\ ) + (-\ )\}. \qquad (5.58)$$

Ushbu (5.58) ifodadan radiosignal va uning o‘rovchisi spektrlari orasidagi bog‘liqlikni kuzatish mumkin bo‘ladi.

**Spektral funksiyaning effektiv kengligi va maksimal (chegaraviy) chastotasi.** Ko‘rib chiqilgan video- va radioimpuls finit signallarning amplituda spektrlari cheksiz keng bo‘lib, | | chastota oshib borgan sari amplitudasi kichiklashib boradi. Shuning uchun signal spektrining “amaliy” ya’ni effektiv kengligi tushunchasi yuzaga keladi. Ushbu miqdorni aniqlashning turli mezonlari mavjud. Agar amplituda spektrining yaproqsimonlik tuzilishidan kelib chiqib qaralsa (biz yuqorida ko‘rib chiqqan misollarimizdagi kabi), effektiv kenglik sifatida “asosiy yaproqcha” kengligi tanlanadi. Manfiy chastotalarning fizik jihatdan mavjud emasligidan kelib chiqadiki, natijada to‘g‘ri to‘rtburchakli videoimpuls amplituda spektrining effektiv kengligi

$\in$ [0, 2 / ] oraliqda bo‘lib, qiymati

$\Delta \quad = 2/$

ga teng.

Ushbu mezon (kriteriy) asosida to‘g‘ri to‘rtburchakli radioimpuls amplituda spektrining effektiv kengligi ∈ [ − 2 / , + 2 / ] oraliqda bo‘lib,

Δ ≈2·Δ =4 /

ga teng, videoimpulsning effektiv kengligidan ikki marotaba keng.

Signalning davomiyligi va uning effektiv spektr kengligi bir-biri bilan teskari proporsional ravishda bog‘langan: signal qancha tor bo‘lsa, uning spektri shuncha keng bo‘ladi. Ushbu munosabat deyarli barcha turdagi signallarga to‘g‘ri keladi.

Spektral funksiyaning effektiv spektr kengligi tushunchasi bilan maksimal (chegaraviy) chastota tushunchasi bir-biri bilan o‘zaro chambarchas bog‘liq. Videosignal spektri nol va past chastotalar sohasida (past chastotalar spektri) to‘plangan bo‘ladi, uning maksimal chastotasi effektiv kenglik Δ miqdori bilan mos keladi

= Δ .

Radiosignal spektrining maksimal chastotasi tashuvchi chastota sohasida (atrofida) to‘plangan bo‘ladi, 5.11-rasmdan ko‘rinadiki, spektrning effektiv kengligi bilan quyidagicha bog‘liq

= + Δ = + $\frac{1}{2}$ Δ .

**Signal bazasi.** Signal bazasi deganda signal davomiyligini uning spektri effektiv kengligiga ko‘paytmasi tushuniladi. Videosignal uchun uning bazasi Δ ≈ 2 yoki Δ ≈ 1 ga teng. Radiosignalning bazasi esa mos videosignal bazasidan ikki marta katta.

To‘g‘ri to‘rtburchakli video- va radioimpulslar ko‘rinishidagi signallar radiotexnikada keng qo‘llaniladi; nazariy tadqiqotlar olib borishda ushbu signallarga ko‘plab murojat qilinadi.

## *Nazorat savollari*

1. *Signallarni Fure qatoriga yoyish sharti nimadan iborat?*

2. *Fure qatorining $a_0$, $a_k$ va $b_k$ koeffisientlari qanday aniqlanadi va qanday fizik ma’noga ega?*

*3. Signal uchun Fure to‘g‘ri va teskari bog‘lanishi ifodalarini yozib bering.*

*4. Signal amplituda va faza spektri deganda nimani tushunasiz va ular qanday aniqlanadi?*

*5. Davriy takrorlanuvchi to‘g‘ri to‘rtburchak ko‘rinishidagi signal amplituda va faza spektrini hisoblab chiqing.*

*6. Davriy bo‘lmagan signallar spektri qanday baholanadi?*

*7.* ( ) *signalni* cos *ga ko‘paytirish natijasida* ( ) *spektral funksiya qanday o‘zgaradi?*

*8. Fure almashtirishi xossalarini sanab bering.*

| | |
|---|---|
| toq | mavhum, toq |
| Ixtiyoriy | haqiqiy qismi – juft<br>Mavhum qismi - toq |

**Nazorat savollari**

1. Uzluksiz signallarni Fure qatoriga yoyish.
2. Davriy va nodavriy signallarga misollar keltiring?
3. Fure trigonometrik qatori.
4. Davriy signallarning spektrlarining turlari.
5. Uzluksiz funksiyani Kotelnikov qatoriga yoyish.
6. Davriy signallarning spektrlarini turlari.
7. Amplituda spektri?
8. Faza spektri?
9. Quvvat spektri.
10. Delta impulsining vaqt diagrammasi.
11. Delta impulsining faza spektri.

## 5- mavzu : LAPLAS ALMASHTIRISHI. LAPLAS TO'G'RI VA TESKARI ALMASHTIRISHI. LAPLAS ALMASHTIRISHI XOSSALARI.

**Reja**:

**1.** Laplas to‘g‘ri almashtirishi.

**2.** Laplas teskari almashtirishi.

3.Laplas integral almashtirishlarining asosiy xossalari

Laplas integral almashtirishlari operatsion metodlardan biri bo‘lib, u p kompleks o‘zgaruvchining tasvir F(p) bir qiymatli funksiyasini unga mos t haqiqiy o‘zgaruvchining original f(t) funksiyasi bilan bog‘laydi.

**5.1. Laplas to‘g‘ri almashtirishi**

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt \tag{5.1}$$

**5.2.Laplas teskari almashtirishi**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)\, dp, \tag{5.2}$$

Xususan, ular differensial va integral tenglamalarni yechish uchun qo‘llaniladi. Yechish usuli f(t) originallarni o‘z ichiga oluvchi berilgan tenglamani F(p) Laplas almashtirishlarining tasvirlariga nisbatan, fazodagi mos ekvivalent tenglamaga almashtirishdan iboratdir.

Bundan Laplas almashtirishlari vaqt bo‘yicha qo‘llanilganda xususiy hosilali differensial tenglama tasvirlar fazosida oddiy differensial tenglamaga almashadi. Oddiy differensial tenglama esa noma’lum funksiyaning tasviriga nisbatan chiziqli algebraik tenglamaga keltiriladi.

Tasvirlar fazosida olingan natijalarning originallari qoldiqlar nazariyasi yoki boshqa usullar yordamida topiladi.

Bu f(t) va F(p) juftlar o‘rtasidagi o‘zaro bir qiymatli moslik ko‘p hollarda amaliy maqsadda jadvallar yordamida aniqlanadi.

Laplas integral almashtirishlari shu bilan xarakterlanadiki, f(t) originallar ustida amalga oshiriladigan ko‘pgina munosabatlar va operatsiyalarga ularning F(p) tasvirlari ustida amalga oshiradigan ancha sodda munosabatlar va operatsiyalar mos keladi.

Laplas integral almashtirishlarini qo‘llab nostatsionar masalalarni yechishda quyidagi to‘rtta bosqichni amalga oshirish kerak bo‘ladi.

1. Noma’lum original funksiyaning F(p) tasvirga o‘tish.

2. F(p) tasvirga o‘tishda unga mos f(t) original ustida ba’zi operatsiya almashtirishni bajarish almashtirishdan so‘ng F(p) funksiyaga nisbatan sodda tenglama oddiy differensial tenglama bilan almashtiriladi va hokoza.

3. Tasvirlar fazosida olingan tenglama F(p) ga nisbatan yechiladi.

4. Olingan F(p) tasvirning f(t) original ga o‘tiladi. Bu izlanayotgan funksiya bo‘ladi. Masalalar shu usulda yechiladi. Asosiy matematik qiyinchilik oxirgi bosqichda, ya’ni topilgan F(p) tasvir ifodalaridan originalga o’tishdir.

Original o‘tishni bir necha xil usulda amalga oshirish mumkin.

a) sonli usullar yordamida

v) qoldiqlar nazariyasi yordamida

g) qatorga yoyish usuli yordamida.

Aytaylik, $0 \le \infty$ yarim o‘qida har qanday chekli [a,b] oraliqda o‘zining absolyut qiymatlari bilan integrallanuvchi f(t) funksiya berilangan bo‘lsin. $p=s+i\sigma$ kompleks parametr kiritamiz va f(t) funksiyaning Laplas integral almashtirishini

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{pt}\, dt \qquad \textbf{(5.3)}$$

Agar p parametrning qiymati uchun integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, f(t) funksiyaga Laplas integral almashtirishni qo‘llash mumkin. f(t) funksiyaga original deyiladi, agar u quyidagi xossalarga ega bo‘lsa:

1. f(t) funksiya $0 \le t < \infty$ o‘qida aniqlangan va chekli oralikda absolyut qiymati bilan integrallanuvchi.

2. $t < 0$ da f(t) funksiya nolga teng.

3. p parametrning hech bo‘lmaganda bitta qiymatida f(t) funksiyaga Laplas almashtirishlarini qo‘llash mumkin. F(p) funksiyaga f(t) funksiyaning Laplas integral almashtirishlari bo‘yicha tasviri deyiladi.

Originallar va tasvirlar jadvali

$$1 \risingdotseq \frac{1}{p};$$

$$e^{at} \risingdotseq \frac{1}{p-a};$$

$$t \risingdotseq \frac{1}{p^2};$$

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}, \; n \in \mathbb{N};$$

$$e^{at} \cdot t^n \risingdotseq \frac{n!}{(p-a)^{n+1}};$$

$$\sin wt \risingdotseq \frac{w}{p^2+w^2};$$

$$\cos wt \risingdotseq \frac{p}{p^2+w^2};$$

$$\operatorname{sh} wt \risingdotseq \frac{w}{p^2-w^2};$$

$$\operatorname{ch} wt \risingdotseq \frac{p}{p^2-w^2};$$

$$e^{at} \cdot \operatorname{sh} wt \risingdotseq \frac{w}{(p-a)^2-w^2};$$

$$e^{at} \cdot \operatorname{ch} wt \risingdotseq \frac{p-a}{(p-a)^2-w^2};$$

$$t \cdot \sin wt \risingdotseq \frac{2wp}{(p^2+w^2)^2};$$

$$t \cdot \cos wt \risingdotseq \frac{p^2-w^2}{(p^2+w^2)^2};$$

$$t \cdot \operatorname{sh} wt \risingdotseq \frac{2wp}{(p^2-w^2)^2};$$

$$t \cdot \operatorname{ch} wt \risingdotseq \frac{p^2+w^2}{(p^2-w^2)^2};$$

$$e^{at} \cdot \sin wt \risingdotseq \frac{w}{(p-a)^2+w^2};$$

$$e^{at} \cdot \cos wt \risingdotseq \frac{p-a}{(p-a)^2+w^2}..$$

## 5.3.Laplas integral almashtirishlarining asosiy xossalari

1.Chiziqlilik xossasi. $n$ (5.4)

$$f(t) = \sum_{i=1} f_i(t)$$

**74**

**(5.5)**

$$f_i(t) \div F_i(p)$$

$$F(p) = \sum_{i=1}^{n} F_i(p) \qquad \textbf{(5.6)}$$

2. Erkli o‘zgaruvchining masshtabini o‘zgartirish.

f(t) ÷ F(p) bo‘lsin, o‘zgarmas λ>0 bo‘lganda f(λ t) ning tasviri

$$f'(t) \div pF(p) \qquad (5.7)$$

3.Quvvat spektri

$$f(\lambda t) \div \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$$

(5.8)

4. Integralning tasviri.

$$f(t) \div F(p) \qquad (5.9)$$

$$\varphi(t) = \int_0^t f(t)dt$$

(5.10)

bo‘lsa, u holda

$$\varphi(p) = \frac{F(p)}{p}$$

(5.11)

5. $t^n f(t)$ funksiyaning tasviri.

$$t^n f(t) \div (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p)$$

(5.12)

6. Tasvirni integrallash

**Teorema:**Agar integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda —— funksiyaning tasviri bo'ladi. , ya'ni tasvirni integrallash bu originalni t ga bo'lish demakdir.

7. Siljish teoremasi.

ga siljitish originalni ga , ya'ni tasvir argumentini ko'paytirish demakdir. Haqiqatdan

$$e^{t} f(t) \quad e^{(p} \quad {}^{)t} f(t)\, dt \quad F(p \qquad ).$$

0

8. Kechikish teoremasi.

Ixtiyoriy musbat uchun o'rinlidir.(Originalni vaqtga kechikib ishlatish tasvirni ga ko'paytirishga teng).

9. Ko'paytirish teoremasi.

Agar va bo'lsa, bu ikki tasvirning ko'paytmasi quyidagi integralga teng bo'ladi

$$F(p) G(p) \quad \int^{t} f(\ ) \, g(t) d$$

$$\div \int_{0} \tau \qquad -\tau \quad \tau$$

**Nazorat savollari**

1. Laplas almashtirishi.
2. Laplas integral almashtirishi.

3. Laplas to‘g‘ri almashtirishi.
4. Laplas teskari almashtirishi.

5.Laplas integral almashtirishlarining asosiy xossalari.
6. Tasvirni integrallash.
7. Kechikish teoremasi.
8. Ko‘paytirish teoremasi.
9. Siljish teoremasi.



# 6. Z-ALMASHTIRISH

Diskret vaqt signal va tizimlariini analiz va loyihalashda qo‘llanilishi eng qulay bo‘lgan almashtirish bu z-almashtirish hisoblanadi.

## 6.1. Diskret vaqt tizimlari

Diskret vaqt tizimi – bu kirishiga ( ) signal ketma-ketligi berilganda chiqishida ( ) ketma-ketligini hosil qilish matematik algoritmi. Diskret vaqt tizimlariga quyidagilarni misol qilib keltirish mumkin: raqamli kontroller (nazoratlash qurilma)lari, spektr raqamli analizatorlari va raqamli filtrlar.

Diskret vaqt tizimi chiziqli va nochiziqli, vaqt bo‘yicha ko‘rsatkichlari o‘zgarmas (invariant) yoki o‘zgaruvchan bo‘lishi mumkin.

Diskret vaqt tizimi chiziqli deb ataladi, agar bu tizimga nisbatan aks ta’sir uning kirishiga bir vaqtda bir necha signal berilgandagi qiymati har bir kirish signallari alohida-alohida unga ta’sir etgandagi alohida-alohida aks ta’sirlar yig‘indisiga teng bo‘lsa.

Misol uchun, uning birinchi kirishiga ( ) signal berilsa chiqishida ( ) hosil bo‘ladi va ikkinchi kirishiga ( ) signal berilsa chiqishida ( ) hosil bo‘ladi. U holda tizimning har ikki ta’sir signaliga aks ta’siri, ya’ni chiqishidagi signal quyidagicha aniqlanadi

$$( ) \rightarrow \qquad ( ) + \qquad ( ), \qquad (6.1)$$

bunda va – har qanday o‘zgarmas kattalik (konstanta).

Diskret vaqt tizimi (vaqtga bog‘liq emas) invariant yoki unga signal ta’sir etish vaqtiga bog‘liq emas deb hisoblanadi, agar uning chiqishidagi signal ( ) kirishiga qaysi vaqtda signal ( ) berilganiga, ya’ni ( − ) ga bog‘liq emas, bunda $k$ – signal kechikish vaqti. Misol uchun, agar uning kirishiga ( ) signal berilsa chiqishida ( ) hosil bo‘ladi, agar ( − ) signal berilsa chiqishida ( − ) signal hosil bo‘ladi, ya’ni

$$x(n) \rightarrow y(n). \qquad (6.2a)$$

$$x(n-k) \to y(n-k), \tag{6.2b}$$

bo‘ladi, ya’ni kirish signali qancha vaqtga kechiksa chiqish signali ham shuncha vaqtga kechikadi. Chiziqli invariant tizim (ChIT) kirish va chiqish signallari orasidagi bog‘liqlik o‘rovchi (svertka) yig‘indisi orqali beriladi

$$()= \quad h()(-), \tag{6.3}$$

bunda ( ) – tizim impuls xarakteristikasi. ( ) ning qiymati diskret vaqt tizimini vaqt bo‘yicha o‘zgarishini to‘liq aniqlaydi. Agar ChIT impuls xarakteristikasi quyidagi talabga javob bersa, u barqaror hisoblanadi

$$|h( )|<\infty \tag{6.4}$$

Bu shart agar ( ) cheklangan davomiylikka yoki $k$ kattalashishi bilan ( ) nolga intilganda kuchga ega.

Faqat kirishida signal bo‘lganda chiqishida aks signal hosil bo‘ladigan tizim – fizik jihatdan amalga oshirilishi mumkin bo‘lgan tizim deb ataladi. Umuman olganda, diskret vaqt ketma-ketligida mavjud ( ) yoki diskret vaqt tizimi impuls xarakteristikasi fizik

jihatdan amalga oshirish mumkin bo‘lgan tizimlar uchun vaqt nolinchi onigacha nolga teng bo‘ladi, ya’ni ( ) = 0, $n$ 0 yoki ( ) = 0, $k$ 0 .

## 6.2. To‘g‘ri va teskari z-almashtirishlar

( ) ning $n$ ning hamma qiymatlari uchun haqiqiy bo‘lgan z-almashtirishni aniqlaymiz

$$( ) = \quad ( ) \tag{6.5}$$

bunda z – kompleks o‘zgaruvchi.

Aks ta’siri mavjud tizimlarda ( ) faqat 0 $n$ oralig‘ida nolga teng bo‘lmaydi va (6.5) tenglamadan bir tomonlama z-almashtirish deb ataladigan quyidagi almashtirish ifodasini olamiz

( )= ( ) (6.6)

teskari z-almashtirishi ( $z^{-1}$ ) ( ) diskret vaqt ketma-ketligini uning z-ko‘rinishi orqali tiklash imkoniyatini beradi. $z^{-1}$ teskari z-almashtirishi SRIBda keng foydalaniladi, misol uchun raqamli filtrlarning impuls xarakteristikasini aniqlashda. Simvolik shaklda z-almashtirishi quyidagicha aniqlash mumkin:

( ) = [()], (6.7)

bunda ( ) – ( ) ketma-ketlikning z-ko‘rinishi, $Z^{-1}$ esa z-teskari almashtirish amalini anglatuvchi simvol.

( ) ketma-ketlik albatta aks ta’sir hosil bo‘lishiga olib keladi deb hisoblab, (6.6) tenglamadan ( ) ning z-ko‘rinishini darajali quyidagi qatorga yoyish mumkin:

( ) = ( ) = (0)+ (1) + (2) + (3) + ⋯ (6.8)

(6.8) qatordan ko‘rinadiki ketma-ketlik qiymatlari ( ) – bu

( $n$ 0, 1,...) koeffisientlari bo‘lib, shuning uchun ularni to‘g‘ridan-to‘g‘ri aniqlash mumkin. Amaliyotda, ko‘p hollarda ( ) ni dan yoki unga teng kuchli bo‘lgan $z$ dan olingan ikki ko‘phadning nisbati orqali ifodalsh mumkin:

( ) = + + + ⋯ + . (6.9)

+ + + ⋯ +

( ) ning bu ko‘rinishdagi z-almashtirishini quyidagi usullardan biri yordamida aniqlash mumkin:

a) darajali qatorga yoyish usuli;

b) elementar sonlar nisbati (kasr sonlar) ko‘rinishida ifodalash usuli;

v) ayirish usuli (vichet).

### 6.2.1. Darajali qatorga yoyish usuli

Agar ( ) aks ta’sirli ketma-ketlik (6.6) z-almashtirishi berilgan bo‘lsa, u holda uni $z^{-1}$ yoki z ga nisbatan ustun (stolbik)ga bo‘lish sintetik bo‘lish usuli deb ataluvchi usuldan foydalanib cheksiz qatorga yoyish mumkin:

$$( ) = \quad + \quad + \quad + \cdots + \quad = \frac{\quad}{+ \quad + \quad + \cdots +} = (0) + (1) \; + \quad (2) \quad + (3) \; + \cdots. \qquad (6.10)$$

Bu usuldan foydalanilganda ( ) funksiyasining maxraji va surati dastlab z ning darajasi kamayuvchi shaklida yoki $z^{-1}$ ning darajasi kattalashuvchi qator sifatida ifodalanadi, so‘ngra ularni bo‘lish natijasida xususiy qiymati topiladi.

### 6.2.2. Elementar sonlar nisbati (kasr sonlar) ko‘rinishida ifodalash usuli

Bu usuldan foydalanilganda dastlab z-almashtirish kasr sonlar nisbati shaklida yoyiladi. Har bir elementar kasrning z-teskari almashtirishi topiladi. Bu natijalarni qo‘shish natijasida umumiy z-almashtirish olinadi. Amalda ko‘p hollarda z-almashtirish z yoki $z^{-1}$ ko‘p hadlilarning nisbati ko‘rinishda beriladi va quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$( ) = \quad + \quad + \quad + \cdots + \quad = \frac{\quad}{+ \quad + \quad + \cdots +} = (0) + (1) \; + \quad (2) \; + \quad (3) \; + \cdots. \qquad (6.11)$$

Agar ( ) funksiyaning qutblari birinchi tartibli bo‘lsa va $N\ M$ bo‘lsa, u holda uni quyidagi qatorga yoyish mumkin:

$$()= + \qquad + \qquad + \cdots + \qquad =$$

$$\frac{}{1-} \qquad \frac{}{1-} \qquad \frac{}{1-}$$

$$= \quad + \quad + \quad + \cdots + \quad = \quad + \qquad , \quad (6.12)$$

bunda $-$ ( ) funksiyaning qutblari, $C_k$ – elementar kasrlarning koeffisientlari va

$$= \qquad , \qquad (6.13)$$

koeffisientlarini ba’zan ( ) funksiyaning ayirmasi (vichet) deb ham ataladi.

Agar (6.11) tenglamada suratning darajasi maxrajning darajasidan kichik bo‘lsa, ya’ni $N\ M$ bo‘lsa, u holda $B_0$ nolga teng bo‘ladi. Agar $N\ M$ bo‘lsa, u holda $X\ z$ ni $N\ M$ ni ko‘rinishida olish uchun dastlab uni surat va maxrajning $z$ $_1$ ni darajasi kamayib boruvchi ko‘rinishda yozilgan ifodasini ustunga bo‘lish kerak bo‘ladi. Qoldiqni (6.12) tenglamada keltirilgan ko‘rinishda ifodalash mumkin.

koeffisientning qutb bilan bog‘liq qiymatini (6.12) tenglamaning chap va o‘ng tomonini ( $-$ )/ ga ko‘paytirish, so‘ngra = almashtirishni amalga oshirib topish mumkin:

$$= \quad () \,( - \quad )| \quad . \qquad (6.14)$$

Agar ( ) funksiya bir yoki bir necha birinchi tartiblidan katta qutblarga ega bo‘lsa (ya’ni mos keluvchi qutblarga), u holda buni e’tiborga olish uchun (6.12) tenglamaga qo‘shimcha hadlar qo‘shish kerak bo‘ladi.

Misol uchun, agar ( ) funksiya = nuqtada $m$ -tartibli qutbga ega bo‘lsa, u holda elementar kasrlarga yoyishga quyidagi ko‘rinishdagi hadlar kirishi kerak:

$$( \quad . \qquad (6.15)$$

$$-$$

$$)$$

koeffisientlarining qiymatlarini quyidagi bog‘liqlikdan topish mumkin:

$$= \frac{1}{(-)!} \quad (-) \quad () \quad . \qquad (6.16)$$

## 6.2.3.Ayirish usuli

Bu usulda $z_1$ kontur integralini hisoblash orqali aniqlanadi:

$$() = \frac{1}{2} \quad () \, , \qquad (6.17)$$

bunda $C$ – bu integrallash konturi bo‘lib, () ning hamma qutblarini

o‘z ichiga oladi (qamrab oladi). Rasional ko‘phadlar uchun (6.17) tenglamadan kontur bo‘yicha integral kompleks o‘zgaruvchilar nazariyasi asosiy natijasiga asoslanib, ayirishlar (vichet) haqidagi Koshi teoremasi yordamida aniqlanadi:

$$() = \frac{1}{2} \quad () \; =$$

$$=$$

() ning $C$ ichidagi hamma qutblari ayirmalari yig‘indisi (6.18)

Avvalgi mulohazalarda ni elementar tashkil etuvchilarga yoyish koeffisientini ( ) funksiyaning ayirmalari deb ataladi deb aytib o‘tilgan va uning qiymatlarini hisoblash usullari keltirilgan edi. Shuni eslab qolish kerakki, har bir ayirma qutb $p_k$ bilan bog‘liq. Bu usulda esa () ning qutbdagi ayirmasi ( () funksiyaning ayirmalari emas) quyidagi ko‘rinishda beriladi:

Res[ ( ), ] = 1 [( − )()]| . (6.19)

( − )!

bunda ( ) = ( ), $m$ – bu nuqtadagi qutb tartibi,

[ ( ) , ] – ( ) ning = nuqtadagi ayirmasi (vicheti). Oddiy (alohida) qutb uchun (6.19) tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi:

Res[ ( ), ] = ( − ) ( )=( − ) ( )| .

## 6.2.4. z-teskari almashtirish usullarini taqqoslash

Ko‘rib chiqilgan z-teskari almashtirishlarini hisoblash usullarini taqqoslaymiz. Darajali qatorga yoyish usulining kamchiligi shundan iboratki, bu usul analitik ko‘rinishdagi yechimni bermaydi (ba’zan oddiy hollarda uni aniqlash mumkin), ammo u sodda bo‘lib kompyuter yordamida hisoblashda foydalanish mumkin. Ammo u tabiatan rekursiv xarakterga egaligi uchun z-teskari almashtirishning berilgan nuqtalari ko‘p bo‘lsa xatolik oshib borishi mumkin.

Elementar kasrlarga yoyish usuli va vichetlar usuli analitik ko‘rinishda natija olish imkonini beradi. Bu usullarning asosiy kamchiligi maxraj ko‘p hadligi ko‘paytkichini yoyish talab etilishi, ya’ni ( ) funksiyaning qutblarini topish talab etilishi hisoblanadi. Agar ( ) funksiya yuqori tartibli bo‘lsa va funksiya yoyilgan shaklda berilmagan bo‘lsa, u holda uning qutblarini qidirish yetarli darajada qiyin masala hisoblanadi.

## 6.3. z-almashtirishning xossalari

Quyida signallarga raqamli ishlov berishda keng foydalaniladigan z-almashtirishning ba’zi foydali xossalarini qisqacha keltiramiz.

1. *Chiziqlilik*. Agar ( ) va ( ) ketma-ketliklar ( ) va ( ) shaklidagi z-ko‘rinishlarga ega bo‘lsa, u holda z-ko‘rinishlarning chiziqli kombinatsiyasi quyidagicha ifodalanadi:

()+ ()→ ()+ (). (6.20)

2. *Kechikish yoki siljish*. Agar ( ) ketma-ketlikning z-ko‘rinishi ( ) bo‘lsa, u holda *m* elementga kechikkan ketma-ketlikning z-

ko‘rinishi ( ) bo‘ladi. Bu xossadan diskret vaqt tizimlari uzatish funksiyasi z ni vaqt bo‘yicha farqlanuvchi tenglamaga aylantirishda keng foydalaniladi

( ) → ( ),

(−)→ ().

3. *Svertka (o‘ram)*. Kirish signali ( ) va impuls xarakteristikasi ( ) bo‘lgan diskret vaqt tizimi berilgan bo‘lsa, tizim chiqishidagi signal quyidagicha aniqlanadi:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k), \tag{6.21a}$$

z-ko‘rinishlar orqali tizim kirish va chiqishi quyidagicha bog‘langan:

$$Y(z) - H(z)X(z). \tag{6.21b}$$

bunda ( ) , ( ) va ( ) lar mos ravishda ( ) ( ) va ( ) ketma-ketliklarning z-ko‘rinishlari. Agar ( ) va ( ) berilgan bo‘lsa, u holda

*y*(*n*) ni ( ) ning teskari z-almashtirishi orqali topish mumkin. Yuqoridagidan ko‘rinadiki (6.21*a*) tenglamadan o‘ram (svertka) olish jarayoni z-sohada ko‘paytirish amaliga aylanib qoladi.

4. *Differensiallash*. Agar ( ) orqali ( ) ketma-ketlik z-ko‘rinishi ifodalansa, u holda *nx*(*n*) ning z-ko‘rinishini ( ) ni differensiallash orqali topish mumkin

( ) → ( ),

( ) → − ( ) . (6.22)

Z-almashtirishning bu xossasidan ( ) yuqori tartibli qutblarga ega bo‘lganda, uning teskari z-almashtirishini hisoblashda foydalaniladi.

## 6.4. Diskret vaqt tizimlarini qutb va nollar orqali ifodalash

Amalda foydalaniladigan ko‘pgina diskret vaqt tizimlari uchun z-almashtirishli, ya’ni tizim uzatish funksiyasi $H(z)$ ni uning qutbi va noli orqali ifodalash mumkin. Misol shaklida, $N$ -tartibli diskret vaqt oddiy filtri uchun quyidagi z-almashtirishni ko‘rib chiqamiz ( $N$ $M$ bo‘lgan holat uchun):

( )

() = ——— . (6.23)

( )

$$N(z) = b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \ ... + b_N,$$

bunda

$$D(z) = a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \ ... + a_N \ ,$$

va – filtr koeffisientlari.

Agar ( ) funksiya $z$ $p_1, p_2, ..., p_N$ nuqtalarda qutblarga ega bo‘lsa va $z$ $z_1$ , $z_2$ ,..., $z_N$ nuqtalarda nolga teng bo‘lsa, u holda $H(z)$ funksiyani ko‘paytmalarga yoyish va quyidagi ko‘rinishga olib kelish mumkin:

( − )( − ) ... ( − )

() = ——— . (6.24)

( − )( − ) ... ( − )

bunda $z_i$ – $i$ -nchi nol, $p_i$ – $i$ -nchi qutb va $K$ – kuchaytirish koeffisienti.

z-almashtirishning qutblari deb z ning funksiya () ni cheksizlikka teng bo‘lishiga olib keluvchi qiymatlariga aytiladi. z ning () ni nolga teng bo‘lishini ta’minlovchi qiymatlari uning nollari deb ataladi. ( ) funksiyaning qutb va nollari haqiqiy yoki kompleks bo‘lishi mumkin. Agar qutb va nollar kompleks bo‘lsa, u holda ular funksiyaga kompleks moslashgan juftlik bo‘lib kiradilar, chunki va koeffisientlar haqiqiy bo‘lishi kerak. (6.24) tenglamadan ko‘rinadiki, agar ( ) funksiyaning qutb va nollari joylashishi ma’lum bo‘lsa, u holda ( ) funksiyani o‘zgarmas kattalik (konstanta)gacha aniqlik bilan qayta tiklash mumkin.

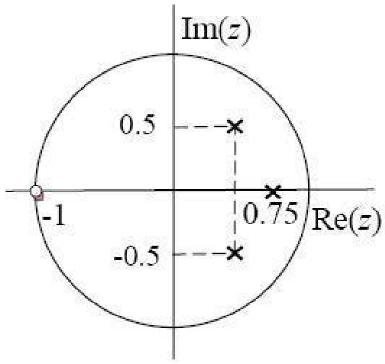
z-ko‘rinishdagi axborotni qutb va nollarning digrammasi ko‘rinishida tasvirlash qulay (6.1-rasm). Ushbu diagrammada qutblarning o‘rni (*) bilan belgilangan, nol esa (0) bilan belgilangan.

6.1-rasmdagi misolda $z$ 0.5 0.5$i$ va $z$ 0.75 nuqtalarida qutblar joylashgan, nol esa $z$ 1 nuqtada joylashgan.

Qutb va nollarning diagrammasi diskret vaqt tizimi xossalarini olib beradi. Misol uchun, qutb va nollarning joylashishiga qarab tizimning amplituda-chastota xarakteristikasini va uning qanday darajada barqarorligini bilib olish mumkin. Barqaror tizimlar uchun hamma qutblar, birlik o‘lcham (radius)ga ega doira ichida bo‘lishi yoki birlik o‘lchamli doira nollariga mos bo‘lishi mumkin.

Ko‘p hollarda z-almashtirishni yoyilgan ko‘rinishda ifodalash mumkin emas, uni (6.24) tenglamadagidek ko‘p hadlar nisbati sifatida

ifodalash mumkin. Bu hollarda ( ) ni uning nol va qutblar z-ko‘rinishida ifodalash uchun, maxraj ko‘phadligi ( ) va surat ko‘phadligi ( ) ning ildizlarini topish kerak bo‘ladi.




6.1-rasm. *z-almashtirishni qutb (*) va nollar (0) diagrammasi ko‘rinishida tasvirlash*

$ax^2$ $bx$ $c$ ko‘rinishida beriladigan ikkinchi tartibli ko‘phadning ildizlari quyidagi formula orqali topiladi:

$$- \quad \pm( -4 \quad ) \; / \quad . \qquad (6.25)$$

2

( ) va ( ) ko‘phadlarning nisbatan yuqori tartibli ildizlarini topish murakkab masala hisoblanadi. Amalda bu ildizlarni topishda raqamli usullardan foydalaniladi yoki Nyuton yoki/hamda Beystou (Baistow) algoritmlaridan foydalaniladi.

## 6.5. Barqarorlikni tadqiqot qilish

Ko‘p hollarda diskret vaqt tizimlarini yaratishda ularning barqarorligini (ustoychivost) tahlil etish kerak bo‘ladi. Tizimlar barqarorligining foydali yetarli mezonini quyidagicha ta’riflash mumkin: hamma kirish signallariga tizimning aks ta’siri ham cheklangan bo‘lishi kerak. Bu shart KChChCh (kirish cheklash, chiqish cheklash) sharti deb ataladi. Odatda KChChCh tizimi barqaror deb qaraladi faqat quyidagi barqarorlik sharti bajarilsa:

$$|h(\,)| < \infty, \qquad (6.26)$$

bunda $h(\ )$ – tizim impuls xarakteristikasi. Ma’lumki, agar impuls xarakteristikasi cheklangan bo‘lsa yuqorida keltirilgan shart bajariladi, chunki impuls xarakteristikalar koeffisienti chekli qiymatga ega bo‘ladi. Shunday qilib, barqarorlikni tahlil etishni faqat impuls xarakteristikalari cheksiz davomli tizimlarga nisbatan qo‘llash mumkin.

Chiqish signali sathi cheklangan bo‘lishi uchun, hamma qutblar birlik radiusli doira ichida bo‘lishi shart. Agar qutblar birlik radiusli doira tashqarisida bo‘lsa, tizim barqaror emas deb hisoblanadi. Amalda qutbi birlik doira ustida joylashgan tizimlar ham barqaror bo‘lmagan tizim deb hisoblanadi yoki potensial nobarqaror deb hisoblanadi, chunki juda kichik qo‘zg‘atuvchi kuch yoki sezilarli xatolik tizimni barqaror bo‘lmagan holatga olib keladi. Bundan birlik doiradagi qutb nolga mos kelgan holatda uning ta’siri bir-birini qoplaydi (kompensatsiya qiladi). Barqaror bo‘lmagan tizim impuls xarakteristikasi vaqtga bog‘liq shaklda cheksiz kattalashib boradi.

Tizimning barqarorligini nazorat qilish juda oson: z-almashtirish qutblari joylarini aniqlash kerak, agar qandaydir qutb birlik doira ustiga to‘g‘ri kelsa yoki undan tashqarida bo‘lsa tizim barqaror emas deb hisoblanadi (faqat qutb holati birlik doira ustidagi nolga mos kelmasa). Amalda qutblar holatini aniqlash oson masala bo‘lmasligi mumkin.

Agar ( ) tizimi z-ko‘rinishini ko‘phadlarga yoyish mumkin bo‘lmasa, oddiy tekshirish usuli bu yetarli sondagi impuls xarakteristikalarini topish va teskari z-almashtirishni hisoblab chiqib grafigini chizishdan iborat. Agar tizim impuls xarakteristikasi vaqt o‘tishi bilan cheksiz kattalashib borsa yoki tezda nolga intilsa, u holda tizim barqaror emas yoki juda kam darajada barqaror bo‘ladi.

## 6.6. Farqlanish tenglamasi

Farqlanish tenglamasi diskret vaqt tizimining kirish ma’lumotlari ustidan kerakli chiqish signali uchun real bajaradigan amalini ta’riflaydi. Ko‘pgina amaliyotda muhim holatlar farqlanish tenglamasini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$()= \quad (-)- \quad (-), \tag{6.27}$$

bunda ( ) – kirish signali ketma-ketligi elementi, ( ) – chiqish signali ketma-ketligi elementi, ( − ) – bitta avvalgi chiqish signali, va – tizim koeffisientlari. (6.27) tenglamadan ko‘rinadiki, joriy ( ) joriy qiymati ketma-ketligining shu ondagi va bitta avvalgi elementlari va bitta avvalgi chiqish signaliga ( − ) lar orqali olinadi (aniqlanadi). Z-almashtirishning kechikish xossasidan foydalanib, vaqt diskret tizimi uzatish funksiyasi uchun quyidagi farqlanish tenglamasini olish mumkin va aksincha:

$$() \leftrightarrow \quad (),$$

$$(-)\leftrightarrow \quad ().$$

Shunday qilib (6.27) tenglamani quyidagi ko‘rinishda ifodalash mumkin:

$$()= \quad ()- \quad (). \tag{6.28}$$

(6.28) ifodani soddalashtirib z-qiymatlari majmuasi uchun diskret tizim uzatish funksiyasi ( ) ning ifodasini olamiz

$( )\Sigma$

$( )= ( )= 1+\Sigma$ (6.29)

Agar maxraj $b_k$ ning hamma qiymatlari nolga teng bo‘lsa, u holda (6.27) va (6.28) tenglamalar quyidagi ko‘rinishlarni oladilar:

$( ) = \quad (-),$

$( )$

$( ) = \frac{}{( )} =$ (6.30)

Endi chiqish signali ( ) kirish ketma-ketligining faqat shu ondagi va avvalgi elementlariga bog‘liq bo‘ladi va (6.27) tenglamada ifodalangan chiqish signali avvalgi qiymatiga bog‘liq bo‘lmaydi. Ushbu holatda koeffisient tizim impuls xarakteristikasi bo‘lib, odatda $h( )$ simvoli orqali belgilanadi. Bu tur tizimlarni cheklangan impuls xarakteristikali tizimlar deb ataladi, chunki $h( )$ ketma-ketlik davomiyligi albatta cheklangan bo‘ladi. (6.27) va (6.29) tenglamalar orqali ifodalanadigan tizimlar uchun uning maxrajlaridan kamida bittasi nolga teng bo‘lmaydi, bunday tizimlar cheksiz impuls xarakteristikali tizimlar deb ataladi. Impuls xarakteristikasi cheksiz tizimlarda qutblardan kamida bittasi nolga teng bo‘lmaydi, impuls xarakteristikasi cheklangan tizimlarning esa odatda qutblari bo‘lmaydi.

## 6.7. Impuls xarakteristikasini baholash

Diskret vaqt tizimlarini loyihalashda ko‘p hollarda ularning impuls xarakteristikalarini hisoblashga ehtiyoj tug‘iladi. Misol uchun tizimni loyihalashda uni amalga oshirish uchun cheklangan impuls xarakteristikasini bilish kerak bo‘ladi va cheksiz impuls xarakteristikali tizimni loyihalashda esa uning barqarorligini tahlil etish uchun kerak. Shuningdek tizim chastota xarakteristikasini baholashda ham impuls xarakteristikasidan foydalanish mumkin.

Diskret vaqt tizimi impuls xarakteristikasini uning impuls xarakteristikasi ( ) ga teskari z-almashtirishni amalga oshirish natijasida aniqlash mumkin:

$h(k) = Z^{-1}[H(z)], \ k = 0,1, \cdots$

Agar ( ) ning z-almashtirishini darajali qatorga yoyilsa, ya'ni

( ) = $h($ ) = $h(0) + h(1)$ + $h(2)$ + ⋯ (6.31)

bo'lsa,u holda z-almashtirish koeffisientlari to'g'ridan-to'g'ri ( ) impuls xarakteristikasiga teng bo'ladi.

Impuls xarakteristikani diskret vaqt tizimining ( ) birlik sakrashning $n$ 0 bo'lganda birga teng bo'lishi va ning boshqa hamma qiymatlari uchun nolga teng bo'lgan tizim aks ta'siri deb qaralishi mumkin. Bunday qarash agar tizim kirish signali ( ) ni birlik sakrash impulsi ( ) ga teng, ya'ni ( ) = ( ) bo'lganda tizim chiqish signali tizim xarakteristikasi $h($ ) ga teng bo'lishini anglatishi bilan o'zini oqlaydi

( ) = $h()(-)=$ $h()(-)=$

$=h(0)$ ( )$+h(1)$ ( $-1)+h(2)$ ( $-2)+\cdots=h($ ),

= 0,1, ... (6.32)

Bu $h($ ) hisoblashning yana bir teng kuchli usulini beradi (amalda esa, z-almashtirishning yana bir usulini olamiz).

## *Nazorat savollari*

1. *Vaqt diskret tizimi deganda nimani tushunasiz?*

2. *Chiziqli va nochiziqli vaqt bo'yicha invariant tizimlar bir-biridan qanday farqlanadi?*

*3. To‘g‘ri va teskari z-almashtirish haqida umumiy tushuntirish bering.*

*4. Z-almashtirishda darajali qatorga yoyish usuli haqida tushuncha bering.*

*5. Z-almashtirishda elementar kasr sonlar qatoriga yoyish usuli haqida tushuncha bering.*

*6. Z-almashtirishda cheklash (ayirish) usulidan foydalanish haqida tushuncha bering.*

*7. Z-almashtirishning asosiy xossalarini ayting.*

*8. Diskret vaqt tizimlarini qutb va nollar orqali ta’riflash deganda nimani tushunasiz?*

*9. Farqlanish tenglamalaridan diskret tizimlarda nima maqsadda foydalaniladi?*

*10. Farqlanish tenglamasini yozing va undagi ifodalarga ta’rif bering.*

*11. Impuls xarakteristikasi nimani anglatadi?*

# 7. SIGNALLARNI UZATISHDA ULARGA ISHLOV BERISH

Vaqt bo‘yicha diskretizatsiyalash natijasida uzluksiz signal ( ) bir-birini qamrab olmaydigan davomiyligi Δ bo‘lgan oraliqlarga bo‘linadi.

Diskretlash oralig‘i Δ ( = 0,1,2, ... ) ning qanday vaqt oralig‘ida davom etishiga qarab, ularni ikki guruhga bo‘lish mumkin: bir xil davomiylik va turli davomiylikka ega bo‘lgan. Signalni qayta tiklash ham shunga mos ravishda amalga oshiriladi.

Diskretlash oralig‘i davomiyligi bir xil bo‘lgan signal deb davomiylikka ega bo‘lgan uzluksiz signaldan bir xil Δ = vaqt oraliqlarida uning oniy qiymatlarini aniqlashga aytiladi. Bunda diskretlash oralig‘i Δ yoki diskretlash chastotasi = Δ — diskretlanayotgan uzluksiz signal ( ) ning spektri haqidagi avvaldan ma’lum ma’lumotlar asosida tanlanadi.

Diskretlash oralig‘ining bir xil bo‘lishi diskretizatsiyalash va qayta tiklash algoritmining sodda bo‘lishini ta’minlaydi. Ammo diskretizatsiyalanadigan uzluksiz signal spektrining o‘zgarishi haqidagi ma’lumotlar avvaldan yetarli darajada ma’lum emasligi uni diskretlashda ortiqchaliklar hosil bo‘lishiga olib keladi.

Vaqt bo‘yicha diskretlash oralig‘i Δ turlicha bo‘lsa, bunday diskretizatsiyalash notekis diskretizatsiyalash deb ataladi. Notekis diskretizatsiyalash ikki turli bo‘ladi: adaptiv va dasturiy.

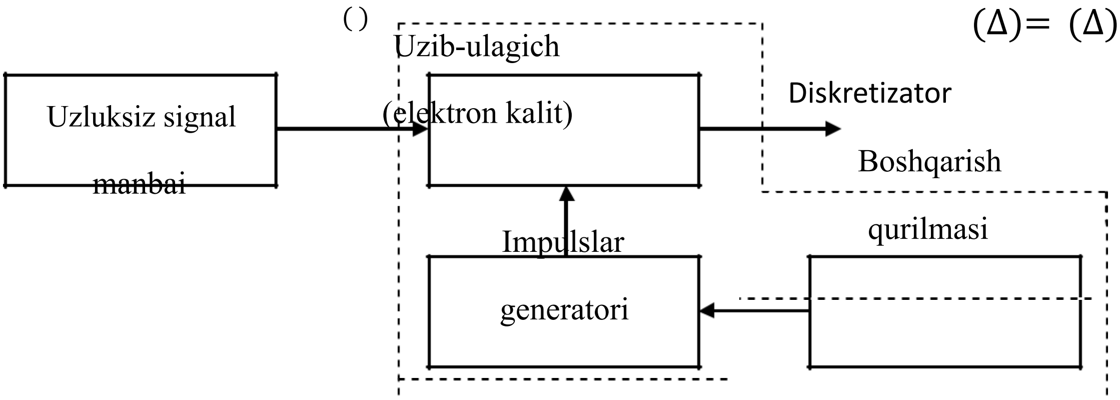
Adaptiv (moslashuvchi) diskretizatsiyalashda diskretlash oralig‘i uzluksiz signalning spektri (tez va asta) o‘zgarishiga mos ravishda o‘zgarib boradi. Signalni adaptiv diskretizatsiyalash uni uzatishdagi ortiqchalikni sezilarli darajada kamaytiradi, buning natijasida aloqa kanalining xabar o‘tkazish imkoniyati oshadi. Hozirda adaptiv impuls-kod modulyatsiyali signallardan foydalanishga asoslangan aloqa tizimlari mavjud.

Diskretlash oralig‘ini dasturiy o‘zgartirishga asoslangan aloqa tizimlarida disretlash oralig‘i operator tomonidan uzluksiz signalni tahlil etish asosida yoki oldindan o‘rnatilgan ishlash dasturi asosida o‘zgartirib turiladi.

## 7.1. Uzluksiz signallarni bir xil oraliqlarda diskretizatsiyalash

Uzluksiz signallarni bir xil oraliqlarda diskretizatsiyalashda Δ larning davomiyligi va diskretizatsiyalash chastotasi o‘zgarmas – doimiy bo‘ladi.

Uzluksiz signalni vaqt bo‘yicha diskretizatsiyalovchi qurilma diskretizator deb ataladi. 3.2-rasmda diskretizatorning funksional sxemasi keltirilgan.




7.1-rasm. *Diskretizatorning funksional sxemasi*

Diskretizatorni uzluksiz signalni ma’lum vaqtlarda elektron kalit yordamida uzib-ulovchi qurilma deb tahlil etish mumkin. Impulslar generatoridan elektron kalit kirishlaridan biriga berilayotgan signallar yordamida uning kirishiga berilgan uzluksiz ( ) signal impulslar ketma-ketligiga o‘zgartiriladi. Impulslar generatorining ish jarayoni boshqarish qurilmasi orqali boshqariladi. Bir xil vaqt oraliqlarida diskretlashda impuls generatoridan elektron kalitga berilayotgan impulslar chastotasi bir xil – o‘zgarmas bo‘ladi.

V.A. Kotelnikov tomonidan spektri yuqori chastotasi chegaralangan funksiya (signal) uchun teorema yaratilgan. Ushbu teorema quyidagicha ta’riflanadi: spektrining eng yuqori chastotasi bilan chegaralangan funksiya (signal) ( ) o‘zining — sekund vaqt

oraliqlarida olingan oniy qiymatlarining ketma-ketligi orqali to‘liq qayta tiklanadi. Ushbu teoremaga asosan spektrining eng yuqori chastotasi

= 2 bo‘lgan uzluksiz signal ( ) ni quyidagi qator orqali ifodalash mumkin:

∞ sin ( − Δ )

( ) =

2 ( − Δ )

=

∞

∞

= ( Δ ) ( ). (7.1)

∞

bunda, Δ = —— – ikki qo‘shni diskretlash vaqti oralig‘idagi qiymat,

( Δ ) – ( ) uzluksiz signalning = Δ vaqt oraliqlarida olingan oniy qiymatlari.

(7.1) interpolyatsiyalash qatori – Kotelnikov qatori deb ataladi. Uzluksiz signal ( ) ni Kotelnikov qatori bilan interpolyatsiyalash mumkinligini ko‘rib chiqamiz. Spektri kengligi chegaralangan ( ) signal uchun Fure almashtirishini qo‘llab signal spektrini quyidagicha ifodalaymiz:

∞

( ) , (7.2)

( ) =

∞

bunda, | | > chastotalarda ( ) = 0 bo‘lishini e’tiborga olish natijasida hamda past chastotani anglatuvchi o‘rniga umumlashgan holatni e’tiborga olgan holda dan foydalanib, signalning kompleks spektri orqali Fure teskari almashtirishidan foydalanib uzluksiz signal ( ) ni aniqlaymiz:

1

( ) = 2 ( ) . (7.3)

− ; chastotalar oralig‘i

Signal spektri ( ) ni (7.2) ifoda uchun quyidagi qator ko‘rinishida ifodalash mumkin:

∞

( ) = . (7.4)

∞

(7.4) ifodadagi ( ) signal spektri tashkil etuvchilarining koeffisientlari bo‘lib, u quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$1 \quad \infty$$

$$= \quad 2 \quad (\,) \quad . \qquad (7.5)$$

$$\infty$$

(7.3) va (7.5) ifodalarni taqqoslash shuni ko‘rsatadiki ular bir-biri bilan $\Delta =$ o‘zgarmas kattalikkacha aniqlik bilan bir-biriga mos

keladi, bunda uzluksiz vaqt $= -\Delta$ deb qabul qilinadi, natijada

$$= \qquad (-\Delta). \qquad (7.6)$$

(7.6) ifodani (7.4) ifodaga qo‘yib ( ) signal spektri funksiyasini quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$\infty$$

$$(\;) = \qquad (- \quad \Delta) \quad . \qquad (7.7)$$

$$\infty$$

(7.7) formulani (7.3) formulaga qo‘yamiz, bunda qator yig‘indisi

alohida tashkil etuvchilari ning hamma musbat va manfiy qiymatlari uchun aniqlanishini e’tiborga olib ondagi minus belgisini plyusga almashtirish mumkin. Bundan tashqari (7.7) qatorni Fure integraliga yaqinlashishini e’tiborga olib integrallash va yig‘ish (qo‘shish) amallarini bajarish ketma-ketligini almashtirish mumkin, ya’ni avval integrallash amalini so‘ngra qo‘shish amalini bajarish mumkin. U holda

$$(\,) = \frac{1}{2} \quad \infty \quad \infty \quad (-\Delta) \quad =$$

$$= \frac{1}{2} \quad \infty \quad (\;\Delta) \quad (\quad \Delta) \quad . \qquad (7.8)$$

$$\infty$$

(7.8) formuladagi integrallash natijasi

( Δ ) = 2 sin ( − Δ )

( − Δ )

ni e’tiborga olsak, (7.8) formula (7.1) ko‘rinishni oladi.

(7.1) ifodadan ko‘rinadiki, spektri chastota bilan chegaralangan ( ) signal o‘zining

1

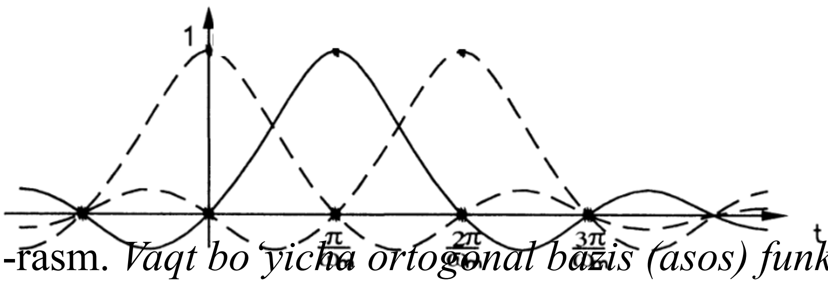
Δ =2 = (7.9)

oraliqlarda olingan ( Δ ) qiymatlari orqali qayta tiklanishi mumkin. Uzluksiz signal ikki tashkil etuvchidan: birinchisi ( ) signalning Δ vaqtlarda olingan oniy qiymatlari ( Δ ); ikkinchisi esa uzluksiz signalni vaqt bo‘yicha asos (bazis) funksiyasi

( ) = sin ( − Δ ) (7.10)

( − Δ )

dan iborat bo‘lib, bu funksiyaning grafigi 7.1-rasmda keltirilgan.



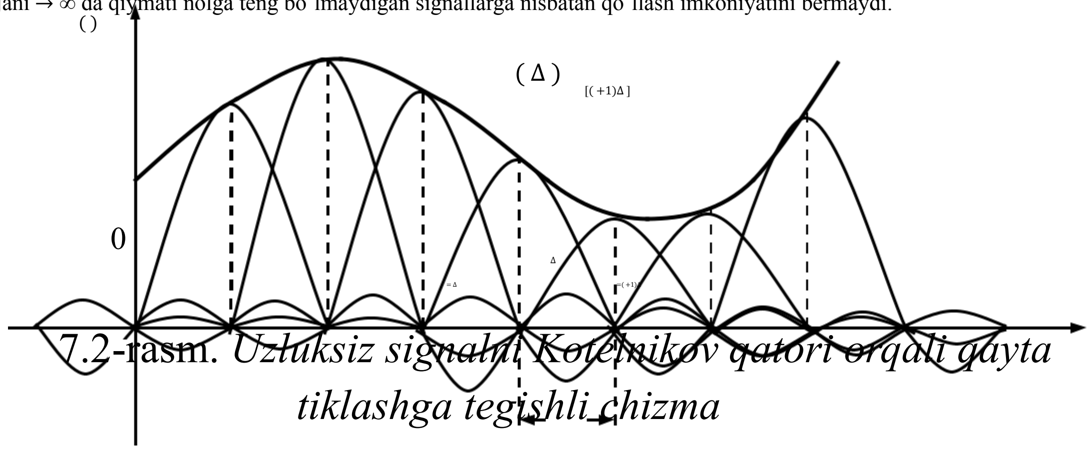
7.1-rasm. *Vaqt bo‘yicha ortogonal bazis (asos) funksiya*

Oniy qiymat bazis funksiyasi quyidagi xossalarga ega:

1. = Δ vaqtlarda (Δ)=1 va = Δ vaqtlarda ( Δ ) = 0, bunda – ga teng teng bo‘lmagan musbat yoki manfiy butun son;
2. ( ) vaqt funksiyasining spektri zichligi | | < chastotalar oralig‘ida bir tekis bo‘lib, qiymati = ga teng.

Uzluksiz signal ( ) ni ( ) bazis funksiya orqali tasvirlashga tegishli chizma 3.4-rasmda keltirilgan. Vaqt bazis funksiyasi ( ) ni ba'zan Kotelnikov funksiyasi deb ham ataladi.

(7.1) formulani keltirib chiqarishda uzluksiz signal ( ) Direxle shartiga javob beradi deb qabul qilingan. Shuning uchun olingan natijani → ∞ da qiymati nolga teng bo'lmaydigan signallarga nisbatan qo'llash imkoniyatini bermaydi.




7.2-rasm. *Uzluksiz signalni Kotelnikov qatori orqali qayta tiklashga tegishli chizma*

Kotelnikov teoremasi spektri kengligi chegaralangan, cheksiz davomiylikka ega bo'lgan signallarga tegishli. Haqiqiy signallar ma'lum bir davomiylikka ega bo'ladi. Har qanday davomiyligi chegaralangan signal cheksiz keng spektrga ega bo'lib, (7.1) ifodani haqiqiy – real signallarga nisbatan qo'llash uni qayta tiklashda ma'lum darajada tiklangan signalning diskretizatsiyalangan uzluksiz signaldan farqlanishiga olib keladi, bunga sabab diskretizatsiyalash oralig'i (7.9) ni tanlash yoki diskretlash chastotasi = 2 ni tanlashdagi noaniqlikdir. Shuning uchun Kotelnikov teoremasini qayta tiklangan

signal ( ) uzatilgan diskretizatsiyalangan signal ( Δ ) lar asosida ( ) ≡ ( Δ ) aniqlikda amalga oshirish uchun qo'llash mumkin emas,

amalda bunday aniqlik talab etilmasligi, aniqlik mezoni berilgan holatlarda foydalanish mumkin.

Davomiyligi bo'lgan va spektri eng yuqori chastotasi bo'lgan signaldan

$$= \frac{}{\Delta} = 2 \qquad (7.11)$$

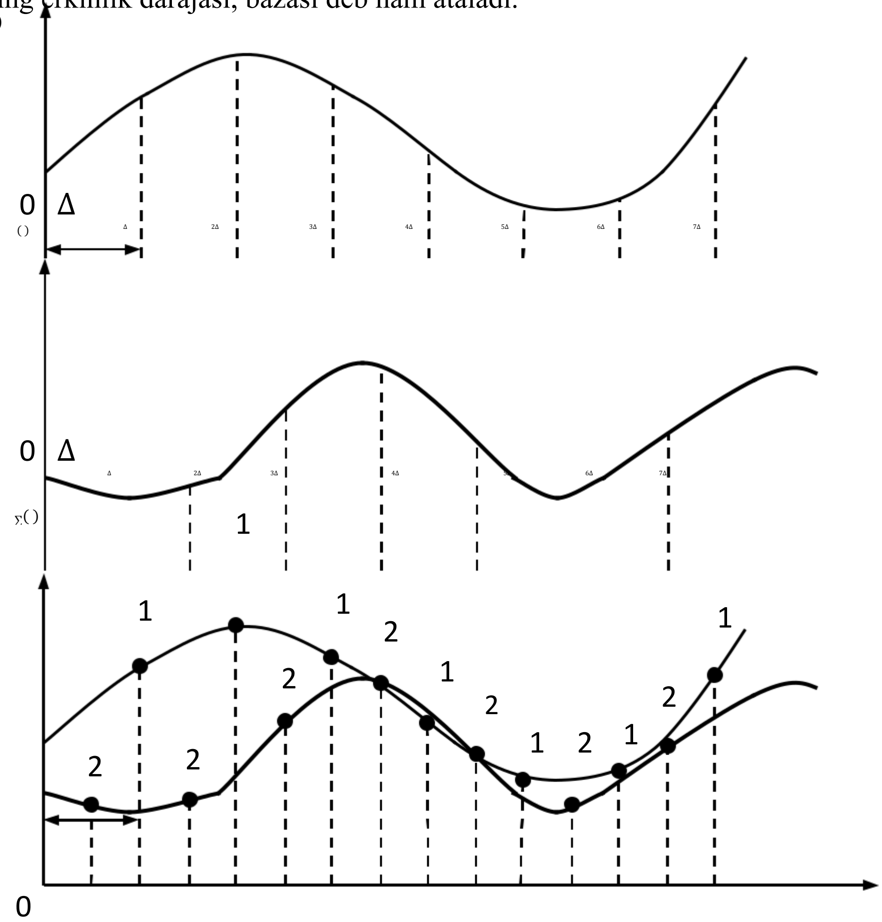
ta bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan oniy qiymatlarni olish mumkin.

(7.11) ifodani e’tiborga olib (7.1) formulani quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin:

$$( ) = \quad ( \Delta ) \ \sin \quad (- \quad \Delta ) \ . \qquad (7.12)$$

$$\overline{(- \qquad \Delta )}$$

ning qiymati ( ) signalning bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan bazis funksiyalari soniga teng bo‘lib, ba’zan uni signalning erkinlik darajasi, bazasi deb ham ataladi.



7.3-rasm. *Vaqt bo‘yicha zichlashgan aloqa tizimida guruh signalini shakllantirish*

Uzluksiz signalni Kotelnikov qatori orqali ifodalash aloqa kanallarini vaqt bo‘yicha zichlab, ikki qo‘shni diskret vaqt oralig‘ida boshqa axborot manbalaridan olingan signallarni uzatish imkoniyatini yaratadi. Signallarni ushbu asosda shakllantirish vaqt diagrammalari 7.3-rasmda keltirilgan.

Kotelnikov teoremasi impuls modulyatsiyasi signallarini shakllantirishda uning tashuvchisi vazifasini bajaruvchi impulslar takrorlanish chastotasini tanlash, har qanday spektri kengligi va davomiyligi cheklangan uzluksiz signallarni raqamli shaklda uzatish imkoniyatini beradi. Aloqa tizimida bir qator afzalliklarga ega bo‘lgan raqamli sxemotexnikadan, signallarga raqamli ishlov berish usullaridan, axborotni raqamli shaklda xotirada saqlash, turli kodlash usullaridan foydalanib axborot uzatish xalaqitbardoshligini oshirish, signallarni regeneratsiya qilish, turli integral mikrosxemalardan aloqa tizimi qurilmalarida foydalanish har qanday signalni yagona raqamli shaklda uzatish imkoniyatini yaratdi.

## 7.2. Uzluksiz signallarni adaptiv diskretizatsiyalash

Adaptiv diskretizatsiyalashda diskretlash oralig‘i $\Delta$ turlicha bo‘lib, diskretizatsiyalanayotgan signal sathining va spektrining o‘zgarishiga qarab muntazam ravishda o‘zgarib turadi, davriy ravishda takrorlanmaydi. Bunda diskretlash vaqti oraliqlari turlicha bo‘ladi, uni tanlashda qabullash tomonida signalni qayta tiklash aniqligiga bo‘lgan talab asos qilib olinadi. Shunday qilib, adaptiv diskretizatsiyalashda ma’lum aniqlik bilan signalni qayta tiklashga yetarli oniy qiymatlar – asos qiymatlar olinadi.

Adaptiv dikretizatsiyalangan signalni qayta tiklash uchun uzatish tomonida tanlangan diskretizatsiyalash vaqti $\Delta$ yoki har bir diskretizatsiyalash vaqti davomiyligi $\Delta = \Delta - \Delta$ haqidagi ma’lumot signali uzatilishi kerak.

Hozirda adaptiv diskretizatsiyalashning bir qator usullari va algoritmlari mavjud bo‘lib, ulardan quyidagi ikki guruhni alohida ta’kidlash mumkin:

– uzatilgan signal ( ) ning asosiy xarakteristikalari asosida qabul qilingan – qayta tiklangan ( ) signal bilan taqqoslash usuli;

– qayta tiklangan signalni doimiy o‘zgarmas parametrlarga ega bo‘lgan etalon signal ′( ) signal bilan taqqoslash usuli.

Bu ikki usuldan ( ) signalni adaptiv diskretizatsiyalashga va tiklangan signal ( ) bilan taqqoslash usuli amaliy ahamiyatga ega bo'lib, bu usuldan foydalanilganda ortiqchalikni kamaytirish samaradorligining yuqoriligiga erishish mumkin va signalni diskretizatsiyalab uzatishga tegishli ma'lumotlar hajmi ham sezilarli darajada qisqaradi. Umuman olganda adaptiv diskretizatsiyalashga

asoslanib ( ) signal uzatilganda uni tiklashda ÷ = Δ vaqt oralig'ida ( ) ga talab etiladigan aniqlikni ta'minlovchi ( ) ni izlashdan iborat bo'ladi.

Adaptiv dikretizatsiyalashni shunday tashkil etish mumkin, bunda ÷ = Δ o'zgarmas vaqt davomiyligida qabullangan ( ) signalning turi yoki uni talab darajasidagi aniqlik mezonini qoniqtiradigan darajada yaqinlashishi, yoki talab darajasidagi yaqinlik darajasi va signal ( ) shakli saqlangan holda uning davomiyligi Δ o'zgarishi mumkin. Ba'zan har ikki usulda adaptiv diskretizatsiyalash asosida signalni qayta tiklash usulidan foydalanish mumkin.

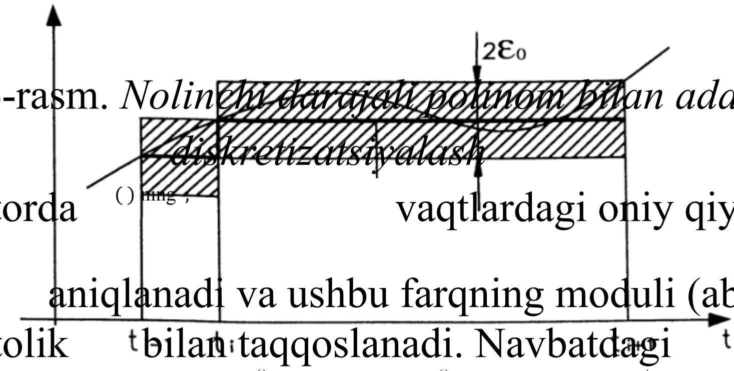
Adaptiv diskretizatsiyalash quyidagi ikki usulda ham amalga oshirilishi mumkin. Birinchisi, diskretizatsiyalash oralig'i Δ o'zgarmas saqlangan holda ( ) ga yaqinlashuvchi funksiya turi va uning yaqinlashish darajasi o'zgartiriladi. Ikkinchisi yaqinlashuvchi funksiya turi va yaqinlashish darajasi o'zgarmas saqlab qolingan holda diskretizatsiyalash oralig'i Δ o'zgartiriladi. Umuman olganda tiklangan signal ( ) ni talab darajasida ( ) ga yaqinlashtirish uchun yuqorida keltirilgan har ikki usuldan birgalikda foydalanish mumkin.

Amalda vaqt bo'yicha diskretlash oralig'i Δ = bo'lmagan adaptatsiya, nolinchi va birinchi darajali algebraik polinomdan foydalanish usulidan keng foydalaniladi. Adaptiv diskretizatsiyalashda ( ) ning ( ) ga yaqinlashish darajasini eng kichik absolyut orqali baholash mezoni asosida ko'rib chiqamiz. Adaptiv diskretizatsiyalashda nolinchi darajali polinomni qo'llab ekstrapolyatsiya usulidan foydalanilganda uzluksiz signal ( ) ning Δ vaqtdagi oniy qiymati undan bitta oldingi diskretizatsiyalash vaqti Δ dagi oniy qiymati bilan taqqoslanadi.

Masalan, diskretizatsiyalangan signalning ; vaqt oralig'idagi qiymati ( ) = ( ) qilib tanlanadi. Bunda ( ) – uzluksiz signalning vaqtdagi oniy qiymati (7.4-rasm).

() ()

()




7.4-rasm. *Nolinchi darajali polinom bilan adaptiv diskretizatsiyalash*

Diskretizatorda () ning ; vaqtlardagi oniy qiymatlari farqi Δ = − aniqlanadi va ushbu farqning moduli (absolyut farqi) ruxsat etilgan xatolik bilan taqqoslanadi. Navbatdagi () ning oniy qiymatini olish vaqti () ning () dan farqi | ()| = qilib olinadi. Nolinchi darajali polinomdan foydalanish usuli adaptiv diskretizatsiyalash qurilmasida keng qo‘llaniladi.

Adaptiv diskretizatsiyalashda birinchi darajali polinomdan foydalanilganda ; ( ) vaqt oralig‘ida qayta tiklangan signal quyidagicha aniqlanadi:

$$() = ( ) + [ '( )] \cdot . \quad (7.13)$$

Bunda diskretizatsiyalash qurilmasida har bir Δ = − vaqt oralig‘ida generator () ga Δ () xatolik bilan yaqinlashuvchi () signalni shakllantiradi va () ning oniy qiymatlarini olish – diskretizatsiyalash vaqtida | ( )| = bo‘lishi talab etiladi. Bu usuldan foydalanilganda ; vaqt oraliqlarida ( ) ga talab darajasidagi aniqlik bilan yaqinlashuvchi () ni aniqlash uchun () signalni differensiallash kerak bo‘ladi.

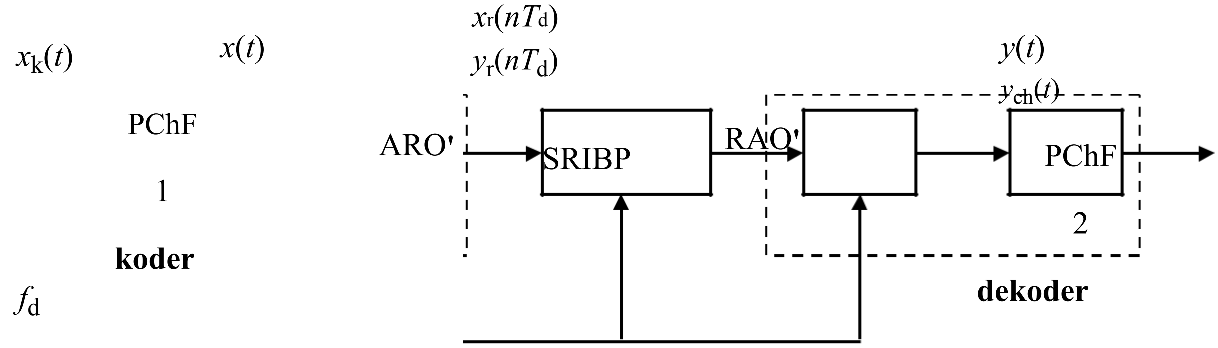
Shuni alohida ta’kidlash kerakki, birinchi darajali polinomdan foydalanib adaptiv diskretizatsiyalashni amalga oshirish qurilmasi nolinchi darajali polinomdan foydalanib adaptiv diskretizatsiyalashga nisbatan murakkab bo‘ladi.

Etalon (namunaviy) yaqinlashtiruvchi funksiya (signal)lar asosida adaptiv diskretizatsiyalash usulidan foydalanilganda uzluksiz signal ( ) dan oniy qiymatni olish vaqtidagi signal etalon (namunaviy) signallar generatori shakllantirayotgan ( ) signallar bilan taqqoslash

asosida aniqlanadi, natijada tiklangan signal ( ) ning uzatilayotgan
( ) signaldan diskretlash vaqtidagi farqi Δ ( ) ≤ bo‘lishi ta’minlanadi.

## 7.3. Signallarga raqamli ishlov berish umumlashgan sxemasi

Birlamchi kirish analog signali $x_k\ t$ ni boshqa chiqish analog signali $y_{ch}\ t$ ga berilgan algoritm asosida raqamli hisoblash texnikasi yordamida o‘zgartirish jarayoni ketma-ketligi 7.5-rasmda keltirilgan.




7.5-rasm. *Signallarga raqamli ishlov berish umumlashgan sxemasi*

Signallarga raqamli ishlov berishda quyidagi uch bosqichni alohida ajratish mumkin:

birlamchi signal $x_k\ t$ dan raqamli $x_r(nT_d)$ ni shakllantirish;

raqamli signal $x_r(nT_d)$ asosida raqamli $y_r(nT_d)$ signalini shakllantirish;

natijaviy chiqish analog signal $y_{ch}(t)$ ni raqamli $y_r(nT_d)$ asosida shakllantirish.

SRIB umumlashgan sxemasida bu uch bosqichga uch funksional qurilma mos keladi:

koder;

SRIB protsessori;

Dekoder.

Birinchi bosqichda koder birlamchi kirish analog signal $x_k\ t$ ni $x_r(nT_d)$ raqamli shaklga keltiradi, chunki bu shakllantirishni amalga oshirmasdan signallarga raqamli ishlov berish umuman mumkin emas. Koder tarkibiga analog past chastotalar filtri (PChF-1) va analog-raqam o‘zgartirgich (ARO‘) kiradi. Past chastotalar analog filtri birlamchi signal $x_k\ t$ spektri $x\ j$ ni chegaralashga xizmat qiladi.

$t \quad nT_d$
$x\,t$
$x_r \; nT_d$
$x\,t$
$x\,t$
$f \;\; f_{yu}$

Birlamchi signal spektrini chegaralash Kotelnikov teoremasi talabidan kelib chiqadi, chunki bu teoremaga asosan diskretlash chastotasi $f_d$ quyidagi shart asosida tanlanadi: $f_d \;\, 2\,f_{yu}$ , bunda $f_{yu}$ – signal spektri eng yuqori chastotasi.

Signal spektrini chegaralash imkoniyati uning energiyasining o‘ziga xos xususiyatiiga bog‘liq: signal energiyasining asosiy qismi

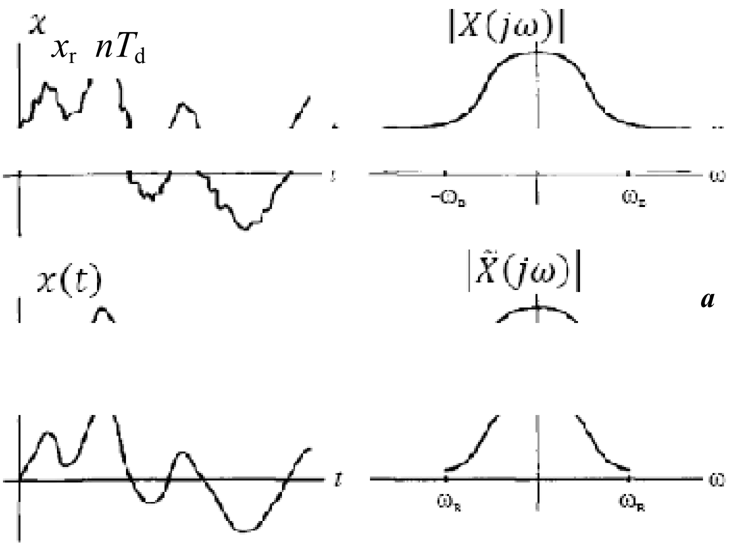
da to‘plangan, ya’ni signal spektral tashkil etuvchilari

amplitudasi qandaydir $f \; f_{yu}$ dan boshlab keskin kichiklashadi. Signal yuqori chastotasi $f_{yu}$ ni chegaralash signal turiga va yechiladigan masalaga bog‘liq. Audio va videosignallarga ishlov berishda $f_{yu}$ ushbu signallarni qabullash impuls xarakteristikasi fiziologik xususiyatlariga bog‘liq. Misol uchun, standart telefon signali uchun $f_{yu}$ 3,4 kHz va

minimal diskretlash chastotasi $f_d$ 8 kHz.

PChF chiqishida chastotasi spektri chegaralangan (finit)
spektri ~ bo‘lgan analog signal shakllantiriladi (7.6-rasm). Analog-
$x\,j$

raqam o‘zgartirgich $x\;t$ signalni diskretlash va kvantlash natijasida o‘z chiqishida raqamli $x_r \; nT_d$ signalni shakllantiradi.



*a*

***b***

7.6-rasm. Signallar va ularning PChF kirishi (*a*) va chiqishidagi (*b*) amplituda spektrlari

*Vaqt bo‘yicha diskretizatsiyalash* (oddiy diskretizatsiyalash)

jarayoni analog signaldan diskretlash odimi davri $T_d$ ga teng

oraliqlarda uning oniy qiymat (hisob)larini aniqlashdan iborat. Raqamli

signal o‘lchovi signalning vaqtdagi oniy qiymatlariga

teng (mos) keladi:

$x_r\ nT_d$ $t\ nT_d$
$x\ t$
$x_r\ nT_d$
$_{kv}\ n$
$x_r\ nT_d$

$x_r$
$nT_d$

$x(t)$

*Sath bo'yicha kvantlash* (kvantlash) raqamli signal $x_r\ nT_d$ ning aniq o'lchovlari $x_r\ nT_d$ larini cheklangan razryadli ikkilik sonlar – kvantlangan o'lchov $x_r\ nT_d$ lar orqali ifodalash maqsadida amalga oshiriladi. Buning uchun diskret signal $x\ nT_d$ ning dinamik diapazoni soni cheklangan diskret sathlariga – kvantlash sathlariga bo'linadi va har bir o'lchovga ma'lum qoida asosida unga eng yaqin bo'lgan sathlardan biri biriktiriladi. Kvantlash sathlari umumiy sathlar soni $R$ ga bog'liq ravishda razryadlari soni $b$ ga teng bo'lgan ikkilik kod bilan kodlanadi:

$$R\ 2^b,$$

bundan $b$ int $\log_2 R$ , int – olingan natija yuqori tomondagi butun sonni olish amalini bajarishini anglatadi.

Kvantlangan o'lchov ni ( $n$ 0, 1,... ) kodlash natijasida olingan ikkilik signal raqamli signal deb ataladi.

Analog signalni raqamliga o'zgartirish natijasidagi kvantlash xatoligi avvaldan ma'lum va tasodifiy qismini baholash quyidagicha ifodalandi:

$$_{kv}\,n\quad x\,nT_d\quad x_r\ nT_d\ .$$

Ikkinchi bosqichda SRIB protsessori raqamli signal ni raqamli signal $y_{r}$ $nT_{d}$ ga berilgan algoritm asosida o‘zgartiradi. SRIB protsessori (SRIBP) o‘rniga signallarga raqamli ishlov berish maxsus dastur asosida amalga oshirilishi mumkin.

Umuman olganda SRIB qurilmalari (SRIBP yoki dasturiy amalga oshirilishi) real vaqt yoki noreal vaqtlarda ishlashi mumkin. Signallarga

real vaqtda ishlov berish kirish signali ning o‘lchovlari (

$n$ 0, 1,...) ning uning kirishi tezligiga qarab shu onda amalga oshirilishi kerak va quyidagi talablarni qondirishi lozim.

- $y_{r}$ $nT_{d}$ ning o‘lchovlarini hisoblash sikli vaqti $t_{s}$ $x_{r}$ $nT_{d}$ ning ikki qo‘shni o‘lchovlari orasidagi vaqtdan katta bo‘lmasligi, ya’ni diskretlash vaqti $T_{d}$ dan kichik bo‘lishi kerak:

$y\ t$
$y_r\ nT_d$ ni
$x\ t$

$$t_s \quad T_d ,$$

- protsessor takt chastotasi $x_r\ nT_d$ signal diskretlash chastotasi $f_d$ dan ancha katta bo‘lishi kerak,

$$f_T \quad f_d .$$

Oxirgi talab $y_r\ nT_d$ bitta o‘lchamini hisoblashga kerakli SRIB algoritmlaridagi bajarishi kerak bo‘ladigan amallar soni juda ko‘pligidan kelib chiqadi.

Misol uchun, diskretlash chastotasi 8 kHz bo‘lgan standart telefon signali uchun takt chastotasi 6 MHz dan kichik bo‘lmasligi kerak.

Birlamchi analog signal ni raqamli aloqa kanalari, shu jumladan Internet orqali uzatish ularga real vaqtda ishlov berishni talab qiladi. SRIBlar real vaqtda ishlov berishini talab qiladigan vazifalarga quyidagilar kiradi: signallarni qidirib topish, filtrlash, siqish, tanlash va h.k.

Signallarni tadqiqot qilish bilan bog‘liq bo‘lgan SRIB noreal vaqtda bajarilishi mumkin. Noreal vaqtda SRIB vazifalariga quyidagilar kiradi: audio va video signallarga studiyada ishlov berish, turli fizik tabiiy kattaliklarni elektr signaliga o‘zgartirib beruvchi (datchik) qurilmalardan olingan ma’lumotlarga ishlov berish va boshqalar.

Uchinchi bosqichda raqamli signal $y_r\ nT_d$ asosida dekoder natijaviy chiqish signali $y_{ch}\ t$ ni shakllantiradi. Dekoder tarkibiga raqam-analog o‘zgartirgich (RAO‘) va silliqlovchi past chastotalar filtri (PChF-2) kiradi. Raqam-analog o‘zgartirgich raqamli signal zinasimon analog signal ga aylantiradi. Silliqlovchi filtr RAO‘ chiqishidagi $y_{ch}\ t$ dagi zinasimon o‘zgarishlarni tekislaydi.

## 7.4. Impulslar modulyatsiyasi

Modulyatsiyalanadigan impulslar ketma-ketligi chastotasi V.A. Kotelnikovning uzluksiz signallarni diskretlash haiqdagi teoremasi asosida aniqlanadi, bunda impulslar takrorlanish chastotasi modulyatsiyalovchi analog signal maksimal chastotasi dan kamida ikki barobar katta bo‘lishi shart.

Turli parametrlari modulyatsiyalangan impulslar ketma-ketliklari vaqt diagrammalari 7.7-rasmda keltirilgan.

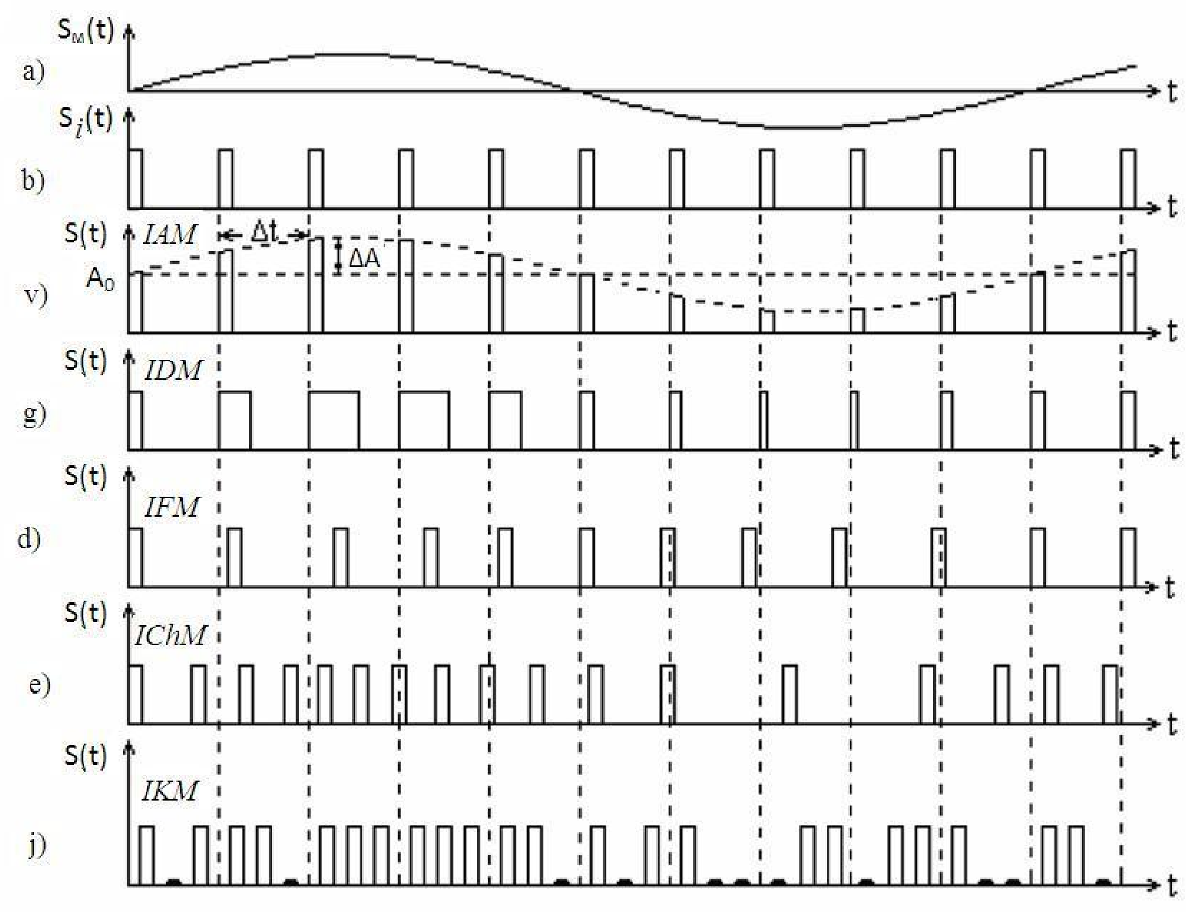
1. ***Impuls amplitudasi modulyatsiyasi*** (IAM), bunda impulslar ketma-ketligi amplitudalari uzatilayotgan xabarga mos ravishda o‘zgaradi. Impulslar amplitudasi modulyatsiyalanganda impuls amplitudasi quyidagicha o‘zgaradi:

()= +Δ [ ()].

IAM signallar ikki xil bo‘lishi mumkin:

a) birinchi tur IAM-I, bunda impulslar oniy qiymatlari modulyatsiyalovchi xabarga mos ravishda o‘zgaradi;

b) ikkinchi tur IAM-II, bunda impulslar amplitudasi uning davomiyligi da o‘zgarmas bo‘lib, modulyatsiyalovchi signalning takt nuqtasidagi qiymatiga mos keladi (7.7v-rasm).



7.7-rasm. *Turli parametrlari modulyatsiyalangan impulslar ketma-ketliklari vaqt diagrammalari*

2. ***Impuls davomiyligi modulyatsiyasi*** (IDM), bunda uzatilayotgan xabarga mos ravishda impulslar (kengligi) davomiyligi o‘zgaradi. Impulslar davomiyligi modulyatsiyalanganda impulslar kengligi quyidagicha o‘zgaradi:

$$( ) = +2\Delta \quad [ \quad ]$$

$$( ),$$

bunda, $\Delta$ – impulsning bir tomonga maksimal kengayishi.

IDM ikki turli bo‘lishi mumkin (7.7g-rasm):

a) impulsning takt chizig‘iga nisbatan faqat bir tomonga – orqa tomonga $\Delta$ ( ) ga uzatilayotgan xabar signali amplitudasiga mos ravishda kengayishi;

b) impulsning takt chizig‘iga nisbatan har ikki tomonga uzatliyotgan xabar amplitudasiga mos ravishda $\Delta$ ( ) ga kengayishi (old va orqa frontning bir hilda surilishi);

3. ***Impulslar fazasi modulyatsiyasi*** (IFM), bunda uzatilayotgan xabarga mos ravishda impulslarning holati takt chizig‘iga nisbatan chapga yoki o‘ngga siljiydi (davomiyligi o‘zgarmas saqlanib qoladi, 7.7d-rasm). Impulslar fazasi modulyatsiyalanganda uning fazasi (boshlang‘ich holati) takt chizig‘iga nisbatan oldiga yoki orqaga siljiydi, ya’ni

$$= \quad ( ) \quad = \quad + \Delta \quad [ \quad ]$$

$$( ).$$

4. ***Impulslar chastotasi modulyatsiyasi*** (IChM), bunda impulslar takrorlanish chastotasi modulyatsiyalovchi xabar amplitudasiga mos ravishda $f_i$ ga o‘zgaradi (7.7e-rasm). Impulslar chastotasi

modulyatsiyalanganda ularning takrorlanish chastotasi ( ) xabarga mos ravishda kattalashadi va kichiklashadi.

$$f_T \quad f_i \quad f_i\, u(t)\ .$$

IFM va IChM signallarni umumlashtirgan holda vaqt bo‘yicha modulyatsiyalangan impuls – impuls vaqt modulyatsiyasi (IVM) deb ataladi.

5. ***Impuls kod modulyatsiyasi*** (IKM), bunda birlamchi analog xabar (signal) diskretlash va kvantlash natijasida raqamli kodlangan diskret xabarga aylantiriladi va har bir takt chizig‘i vaqt oralig‘ida

ushbu kodlar kombinatsiyasiga mos keluvchi “1” va “0” elementar signallar ketma-ketligi shakllantiriladi. Ushbu kodlar ketma-ketligi impulslari yuqori chastotali garmonik tebranish signalining asosiy parametrlaridan birini modulyatsiyalashi natijasida: IKM-AM, IKM-ChM, IKM-NFM signalalr shakllantiriladi.

## 7.5. Impuls amplitudasi modulyatsiyalangan signal spektri

To‘rtburchak shaklidagi videoimpulslar ketma-ketligini past chastotali bir tonli signal ( ) = cosΩ bilan IAM-I signal spektrini

aniqlaymiz. Modulyatsiyalovchi xabar signali ( ) = 0 bo‘lgan holat uchun videoimpulslar ketma-ketligi spektri quyidagilardan tashkil topgan bo‘ladi.

$$s(t) \quad \frac{A_{0}\ _{i}}{T} \quad \frac{}{k\ _1 k\ _1\ _i/2} \tag{7.14}$$

bunda, , , = 2 / , – amplituda, impulslar takrorlanish davri, chastotasi va impulslar davomiyligi.

Impulslar ketma-ketligi amplituda modulyatsiyasi natijasida quyidagi qonuniyat bo‘yicha o‘zgaradi:

( ) = ( 1 + cosΩ ) , = .

Bu holda

$$s(t)\ A_0\ \ 1\ \ m\cos\ \ t \quad \frac{_i}{T}\ 1 \quad \cos k\ t\ _1 . \tag{7.15}$$

Uncha murakkab bo‘lmagan trigonometrik shakl o‘zgartirishlardan so‘ng IAM signal uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$s(t)\ \ A_0 \frac{_i}{T} \quad _{k\ 1} \frac{}{k\ _1\ _i/2} \quad mA_0 \frac{^{i}}{T}\cos\ \ t$$

$$mA_0 \frac{_i}{T} \quad _{k\ 1} \frac{\sin k\ \ _1\ ^{i}\ /2}{k\ _1\ _i/2} \cos(k\ _1 \quad )t\ \cos(k\ _1 \quad )t\ . \tag{7.16}$$

(7.15) va (7.16) ifodalarni bir tonli xabar signali ( ) = cosΩ bilan modulyatsiyalash natijasida olingan IAM signal spektri oddiy modulyatsiyalanmagan impulslar spektridan quyidagilar bilan farqlanadi:

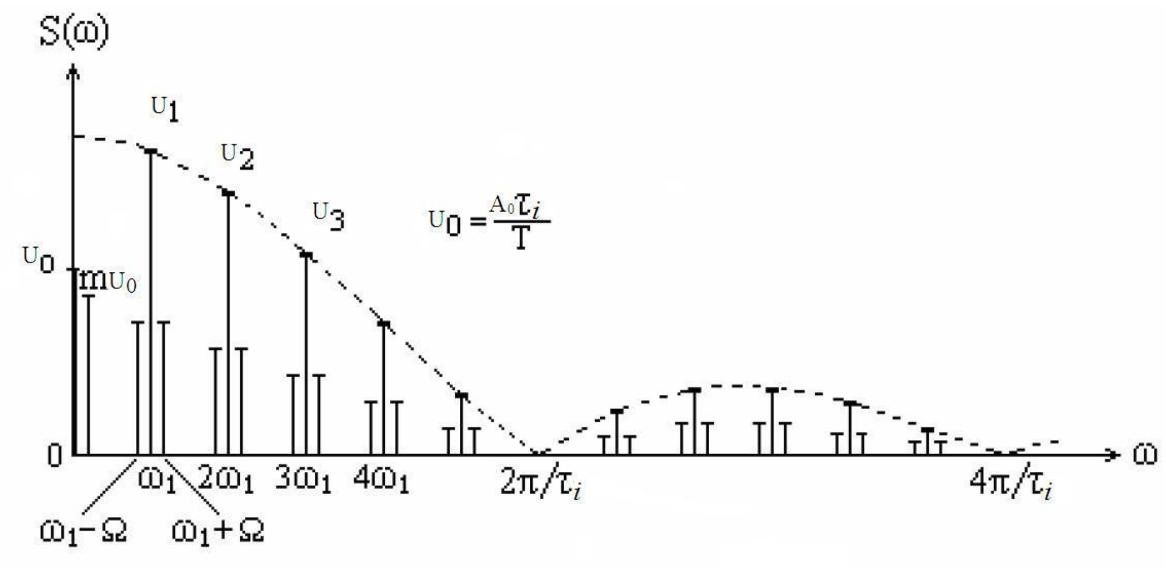
- modulyatsiyalovchi signal chastotasi Ω ga teng tashkil etuvchisi borligi bilan;

- modulyatsiyalanmagan impulslar ketma-ketligi spektrining har bir tashkil etuvchisi yonida ± Ω chastotali yon tashkil etuvchilari borligi bilan (7.8-rasm).

Agar impulslar ketma-ketligi murakkab shakldagi (davriy bo‘lmagan) xabar signali bilan modulyatsiyalansa, u holda yuqori chastotali yon spektr tashkil etuvchilari soni va past chastotali spektr tashkil etuvchilari soni ko‘payadi. Ushbu IAM signal spektrida past chastotali (Ω) tashkil etuvchining borligi, uning detektorlanishini past chastotalar filtri yordamida amalga oshirish imkoniyatini beradi. Past chastotaga eng yaqin bo‘lgan IAM signal spektri tashkil etuvchisi

chastotasi− Ω ga teng bo‘lib, past chastotali tashkil etuvchilarni

ajratib olishni osonlashtirish uchun > 2Ω sharti bajarilishi talab etiladi.




7.8-rasm. *IAM signal spektri*

Boshqa tur impuls modulyatsiyasi signallarining spektrlari ham IAM signal spektri kabi aniqlanadi. Bunda modulyatsiyalanmagan impuls spektri ifodasidagi tegishli o‘zgaruvchini modulyatsiyalanadigan parametrni modulyatsiyalovchi ( ) ga mos ravishda o‘zgartirish va uni tashkil etuvchilarga yoyish kerak bo‘ladi.

## *Nazorat savollari*

*1. Diskretlash oralig‘i nechta guruhga bo‘linadi?*

*2. Diskretizatorning funksional sxemasini chizing va ishlash prinsipini tushuntiring.*

*3. Adaptiv diskretizatsiyalash afzalliklari nimadan iborat?*

*4. Signalga ishlov berish umumlashgan strukturaviy sxemasini chizing va har bir tashkil etuvchisining vazifasini aytib bering.*

*5. Amplitudasi, chastotasi va fazasi 110010 ketma-ketligi bilan manipulyatsiyalangan signallar vaqt diagrammalarini chizing.*

*6. Impulslar ketma-ketligidan tashuvchi sifatida foydalanib qanday modulyatsiya turlarini amalga oshirish mumkin va ularning vaqt diagrammalari uzluksiz kosinusoidal signal bilan modulyatsiyalanganda qanday ko‘rinishda bo‘ladi?*

*7. Bir past chastota Ω yoki F bilan turli impuls modulyatsiyalangan signallar uchun analitik ifodalarni yozing va tushuntirish bering.*

*8. Bir past chastota Ω yoki F bilan impuls modulyatsiyalangan signallar spektri matematik ifodalarini yozing va spektr diagrammalarini chizing, ularni uңzaro taqqoslang.*

*9. Impuls amplitudasi modulyatsiyalangan signal spektri qanday hisoblanadi va spektrogrammasini chizib bering.*

$y\ n$ ni

# 8. SIGNALLARNI RAQAMLI FILTRLAR YORDAMIDA QAYTA ISHLASH

Raqamli filtr atamasi orqali kirish signali raqamli signal bo‘lgan va chiqish signali boshqa raqamli signalni olishni ta’minlovchi matematik algoritmni apparat yoki dasturiy ta’minot orqali amalga oshiruvchi qurilma tushuniladi. Bunda raqamli filtrning amplituda va faza xarakteristikasi maxsus shaklantirilgan bo‘ladi. Ko‘p hollarda raqamli filtrlardan foydalanish afzalliklarga ega, ular amplituda va faza xarakteristikalari qiymatlarini nisbatan aniq ta’minlash imkoniyatini beradi.

Norekursiv filtrlarda navbatdagi chiqish signali oniy qiymati $y\ n$ ni hisoblashda ikki tur ma’lumotlardan: kirish signalining bir necha oniy qiymatlaridan va chiqish signalining bir necha odim avvalgi oniy qiymatlaridan foydalaniladi. Bunday filtrlardan foydalanib hisoblashlarda kirish signalining eng kamida bitta qiymati qatnashishi kerak, aks holda chiqish signali kirish signaliga bog‘liq bo‘lmaydi. Buning aksiga hisoblashlarda chiqish signalining avvalgi oniy qiymatlaridan foydalanilmasa ham bo‘ladi. Bu holda filtrlash tenglamasi quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{m} a_i x(n-i)\ .$$

Bunday filtrlar uchun foydalaniladigan oniy qiymatlar soni $m$ uning tartibini baholaydi. Ushbu ifodadagi algoritmni amalga oshiruvchi strukturaviy sxema 8.7-rasmda keltirilgan.

Kirish signalining dastlabki bir necha oniy qiymatlari raqamli kechiktirish liniyasi xotirasi yacheykasida saqlanadi. Kirish signalining bu oniy qiymatlari $a_i$ koeffisientlariga ko‘paytiriladi va qo‘shish

(yig‘ish) amali bajarilishi natijasida chiqish signali oniy qiymati shakllantiradi.

Bu tur filtrlarda chiqish signalini aniqlashda chiqish signalining avvalgi oniy qiymatlaridan foydalanilmaydi, uning strukturaviy sxemasida teskari bog‘lanish zanjiri bo‘lmaydi. Shuning uchun bunday filtrlarni norekursiv filtrlar deb ataladi. Ba’zan esa bu tur filtrlarni transversal filtrlar (inglizcha transversal – ko‘ndalang so‘zidan olingan) deb ataladi.

$x\ n \quad 0$

Norekursiv filtrning impuls xarakteristikasi $h\ n$ ni juda oson aniqlash mumkin. Yuqoridagi tenglamaga yakka impuls $x_0\ n$ ni kirish signali sifatida qo‘yib quyidagi tenglamani olamiz:

$$h\ n \quad \sum_{i\ 1}^{m} a_i\, x_0\,(n \quad i)\ .$$

Bunda $x_0\ (n\ i)\ n$ ning $n\ i$ dan boshqa hamma qiymatlari uchun nolga teng bo‘lib, $n\ i$ bo‘lganda birga teng. Shuning uchun norekursiv filtrning impuls xarakteristikasi $h\ n\ a_k$ bo‘ladi, ya’ni $a_i$ koeffisientlar filtrga ta’sir qiluvchi kirish signali oniy qiymatiga aks ta’siriga – impuls xarakteristikasiga mos keladi. Filtr kirishiga yakka impuls shaklidagi signal berilganda u kechiktirish liniyasi orqali o‘tishi jarayonida $a_0$ , $a_1$, $a_2$ ,... $a_m$ koeffisientlariga ko‘paytiriladi va uning chiqishida $y\ n$ signali hosil bo‘ladi. Ushbu filtrdagi kechiktirish liniyalari soni chekli bo‘lgani, norekursiv filtr chiqishidagi impuls xarakteristikasi davomiyligi cheklangan bo‘ladi. Shuning uchun bunday filtrlarni impuls xarakteristikasi chekli deb ham ataladi. Kelgusida norekursiv filtr atamasi bilan birga impuls xarakteristikasi chekli filtr atamasidan ham keng foydalanamiz.

Impuls xarakteristikasi chekli filtrlarda teskari bog‘lanish zanjiri bo‘lmaganligi uchun har qanday boshlang‘ich sharoit bo‘lganda ham bunday filtrlar o‘z-o‘zidan qo‘zg‘almaydi (barqaror bo‘ladi), chunki

kirish signali bo‘lganda, chiqish signali ham kechiktirish

liniyasini kelgusi kirish signali oniy qiymati ta’sir etishiga tayyorlash uchun kerakli $m$ taktgacha davomiylikda mavjud bo‘lishi mumkin.

Impuls xarakteristikasi chekli – norekursiv filtrlardan ularni tahlil qilish, sintezlash va amalga oshirish, asbolyut barqarorligi uchun amaliyotda keng foydalaniladi. Ammo amplituda-chastota xarakteristikasi yuqori darajada П-simon shaklda bo‘lishini ta’minlash uchun yuqori tartibli – bir necha yuz, ba’zan esa ming bo‘lgan filtrlardan foydalanish kerak bo‘ladi.

Rekursiv filtrlar. Agar filtrlash tenglamasi umumiy ko‘rinishda bo‘la, u holda bunday filtrlashda kirish va chiqish signali oniy qiymatlaridan foydalaniladi. Bunday filtrlarda chiqish signali oniy qiymatlar $y\ n\ i$ ni xotirada saqlash uchun ikkinchi kechiktirish liniyalari zanjirini sxemaga qo‘shish kerak bo‘ladi. Bu tur filtrning strukturaviy sxemasi 8.4-rasmda keltirilgan. Bu tur filtrlarda hisoblashlarda chiqish signali oniy qiymatlarining avvalgi $m$ tasidan foydalanish kerak bo‘lgani uchun albatta teskari bog‘lanish zanjiri bo‘lishi shart. Shuning uchun bunday filtrlarni rekursiv filtrlar deb ataladi. Bu tur filtrlarda foydalaniladigan kirish va chiqish signallari oniy qiymatlari soni bir-biriga teng bo‘lmasligi mumkin. Bu holda filtrning tartibi $n$ va $m$ lardan qaysi biri katta bo‘lsa, shu tartib orqali baholanadi. Misol uchun $m \; n$ bo‘lsa, $m$ -chi tartibli rekursiv filtr deb ataladi.

Rekursiv filtrning impuls xarakteristikasi hisoblash norekursiv filtrning impuls xarakteristikasini hisoblashga qaraganda sezilarli darajada murakkabroq. Impuls xarakteristikasining dastlabki bir nechasining shakllanishini ko‘rib chiqamiz. Filtr kirishiga birinchi kirish signali oniy qiymati ta’sir etganda, u $a_0$ ga ko‘paytiriladi va filtr chiqishidagi $h(0) \; a_0$ paydo bo‘ladi. So‘ngra kirish yakka impulsi kirish kechiktirish liniyasiga kelib tushadi va chiqish signali oniy qiymati $a_0$ chiqish kechiktirish liniyasiga ta’sir etadi. Natijada, filtr chiqishidagi impuls xarakteristikasi ikkinchi oniy qiymati shakllanadi, ya’ni

$$h(1) \quad a_1 \quad b_1 h(0) \quad a_1 \quad a_1 b_1 .$$

Shu tartibda kirish signali yakka sakrash impulsini kirish kechikish liniyasi orqali so‘rilishi va chiqish kechiktirish liniyasi signali oniy qiymati qo‘shilishi e’tiborga olib quyidagi natijani olamiz:

$$h(2) \quad a_2 \quad b_2 h(0) \quad b_1 h(1) \; a_2 \quad a_0 b_2 \quad b_1(a_1 \quad a_0 b_1 ) \; a_2 \quad a_1 b_1 \; a_0 b_2 \quad a_0 b_1^2 .$$

Yuqorida olingan ifodadan ko‘rinadiki chiqish kechiktirish liniyasi impuls xarakteristikasi oniy qiymatlari bilan to‘lib borgani sari filtrni hisoblash matematik formulalari ham murakkablashib boradi.

Rekursiv filtrlarda teskari bog‘lanish kechiktirish liniyalari zanjirlari mavjudligi cheksiz davomiylikka ega bo‘lgan impuls xarakteristikasini olish imkoniyatini beradi. Shuning uchun rekursiv filtrlarni impuls xarakteristikasi cheksiz bo‘lgan filtrlar deb ham ataladi. Kelgusida rekursiv filtrlar atamasi bilan bir ma’noda bo‘lgan impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlar atamalaridan foydalaniladi.

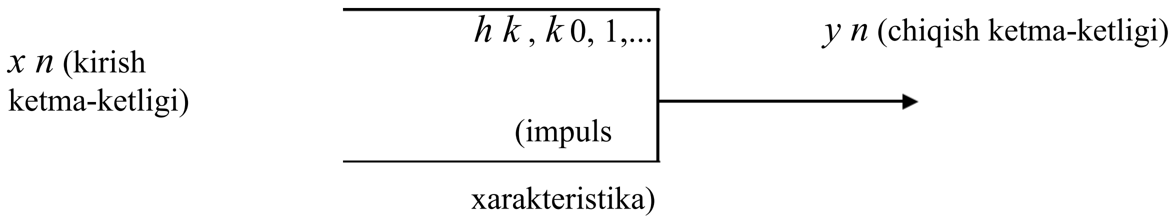
Rekursiv filtrlarda teskari bog‘lanish kechiktirish liniyalari zanjiri mavjudligi va bu tur filtrlarning impuls xarakteristikalari davomiyligi yaeksiz (nisbatan uzoq) davomiylikka ega bo‘lgani uchun o‘z-o‘zidan qo‘zg‘alish hodisasi yuz berishi, ya’ni generatsiyalash ish holatiga o‘tishi mumkin.

## 8.1. Raqamli filtrlarning turlari: impuls xarakteristikalari chekli va impuls xarakteristikalari cheksiz filtrlar

Raqamli filtrlar ikki katta turga bo‘linadi:

- cheksiz impuls xarakteristikali filtrlar;
- chekli impuls xarakteristikali filtrlar.

Har ikki tur filtrlarni (standart ko‘rinishda) ularning impuls xarakteristikalari koeffisienti $h\,k$ ( $k$ 0, 1,... ) orqali 8.1-rasmda keltirilgandek tasvirlash mumkin.




8.1-rasm. *Raqamli filtrni konseptual tasvirlash*

Filtr kirish va chiqish signallari o‘ram amali orqali bir-biriga bog‘langan. Ushbu bog‘liqlik (8.1) formula orqali impuls xarakteristikasi cheksiz filtr uchun va (8.2) formula orqali impuls xarakteristikasi chekli filtrlar uchun keltirilgan.

$$() = h()(-), \tag{8.1}$$

$$() = h()(-). \tag{8.2}$$

Ushbu (8.1) va (8.2) tenglamalardan shuni xulosa qilish mumkinki, impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlarning impuls xarakteristikalari cheksiz davomiylikka ega va impuls xarakteristikasi chekli filtrlar uchun impuls xarakteristikasi davomiyligi cheklangan, chunki impuls xarakteristikasi cheklangan filtr impuls xarakteristikasi $h$

$k$ faqat $N$ ta qiymatni qabul qiladi. Amalda impuls xarakteristikasi cheksiz filtr chiqish signalini (8.1) tenglamadan foydalanib hisoblash mumkin emas, chunki aks ta'sir impuls xarakteristikasi juda katta miqdorda davomli (nazariy nuqtai nazardan cheksiz katta). Shuning uchun impuls xarakteristikasi cheksiz filtr uchun (8.1) tenglamani rekursiv shaklda quyidagicha ifodalaymiz:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{M} a_k y(n-k), \quad (8.3)$$

bunda $a_k$ va $b_k$ – filtr koeffisientlari. Shunday qilib (8.2) va (8.3) tenglamalar impuls xarakteristikasi cheklangan va impuls xarakteristikasi cheklanmagan filtrlarning farqli tenglamalari hisoblanadi. Ushbu tenglamalardan raqamli filtrlarni loyihalash bilan bog'liq masalalarni yechishda keng foydalaniladi.

(8.3) tenglamada tizim chiqish signalining real vaqtdagi oniy qiymatlari $y\ n$ undan oldingi chiqish funksiyalari bo'lib, hozir uning kirishiga ta'sir etayotgan va bundan avvalgi ta'sir etgan kirish signallari oniy qiymatlarining ham funksiyasi hisoblanadi. Impuls xarakteristikasi cheksiz filtr – bu teskari bog'lanishli tizim. Impuls xarakteristikasi chekli filtrlarning chiqish signali oniy qiymatlari $y\ n$ avval ta'sir etgan va hozirda ta'sir etayotgan kirish signali qiymatiga bog'liq. Agar (8.3) tenglamaning hamma $b_k$ koeffisientlarini nolga teng qilib olinsa, u holda (8.2) tenglama kelib chiqadi.

(8.4) tenglamalarda impuls xarakteristikasi cheksiz va chekli filtrlar ularning uzatish funksiyalari orqali ifodalangan bo'lib, bunday ko'rinishda talqin etish ularning chastota xarakteristikalarini baholashda qulayliklar keltirib chiqaradi:

$$H(z) - \sum_{k=0}^{N-1} h(k) z^{-k}, \quad (8.4a)$$

$$H(z) = \sum_{k-0}^{N} b_k z^{-k} / (1 + \sum_{k-1}^{M} a_k z^{-k}). \quad (8.4b)$$

Raqamli filtrlarni loyihalashda (8.4a) yoki (8.4b) tenglamalardan foydalanish loyihalanayotgan filtrning qaysi tur filtr guruhiga - impuls xarkteristikasi chekli yoki cheksiz turiga tegishliligiga bog'liq. Shuning uchun raqamli filtrlarni bir-biridan farqini bilish ularning o'ziga xos xarakteristikalarini va eng kerakligi qaysi tur filtrni tanlashni bilish kerak.

## 8.2. Impuls xarakteristikasi cheksiz va chekli filtrlarni tanlash

Impuls xarakteristikasi cheksiz va chekli filtrlardan birini tanlash ularning o‘ziga xos afzalliklariga bog‘liq.

1. Impuls xarakteristikasi chekli raqamli filtrlar yuqori darajada chiziqli fazaviy xarakteristikaga ega. Shuning uchun u signal spektral tashkil etuvchilari fazalari orasidagi munosabatlarning buzilishiga yo‘l qo‘ymaydi, natijada signal shakli buzilmaydi. Bu ko‘p hollarda muhim hisoblanadi, misol uchun, ma’lumotlarni uzatishda, biomedisinada, audio va video signallarga ishlov berishda va h.k. Impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlarning fazaviy xarakteristikalari nochiziqli, ayniqsa signal o‘tkazish polosasi chekkalarida.

2. Impuls xarakteristikasi chekli filtrlar norekursiv amalga oshirilgan, ya’ni ular hamma vaqt barqaror (bu 8.2-formula tahlilidan kelib chiqadi). Impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlarning barqarorligiga hamma vaqt ham kafolat berib bo‘lmaydi.

3. Filtrlarni amalda qo‘llash uchun cheklangan bitlar sonidan foydalaniladi. Buning amaliy ta’siri impuls xarakteristikasi chekli filtrlarga qaraganda impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlarga nisbatan kam (misol uchun, butunlash shovqini va kvantlash xatoligi).

4. Cheklangan davomiyli impuls xarakteristikani olishda chastota xarakteristikasining qiyaligi katta bo‘lishi uchun impuls xarakteristikasi cheklanmagan filtrnikiga qaraganda ko‘p koeffisientlar kerak bo‘ladi. Natijada impuls xarakteristikasi cheklangan AChX berilgan filtrni amalga oshirish uchun impuls xarakteristikasi cheksizga nisbatan katta hisoblash quvvati va xotira kerak bo‘ladi.

5. Analog filtrlarni ularga ekvivalent bo‘lgan impuls xarakteristikasi cheksiz filtrga almashtirish nisbatan oson. Impuls xarakteristikasi chekli filtrlar uchun bunday almashtirish mumkin emas, chunki unga o‘xshash analog filtr turlari yo‘q. Ammo impuls xarakteristikasi chekli filtrlar yordamida istalgan AChXli filtrni yaratish oson.

6. Impuls xarakteristikasi chekli filtrlarni sintezlash agar kompyuterdan foydalanilmasa algebraik jihatdan murakkabroq.

7. Impuls xarakteristikasi chekli filtrlar rekurent. Bu u orqali “vaqt bo‘yicha teskari”siga o‘zgaruvchi yagona signalni berganda,

umuman olganda, biz boshqa natijalarni olamiz. Agar bu vaqt bo‘yicha anizatropiya nutq signali uchun tabiiy bo‘lgani bilan, tasvir signallari uchun qo‘llash mumkin emas. Shuning uchun impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlardan foydalanish uchun bir qator cheklanishlar mavjud.

Yuqorida keltirilgan xulosalar asosida impuls xarakteristikasi chekli va cheksiz filtrlarni tanlashda quyidagilarga e’tibor berish kerak:

- agar filtr AChX signal o‘tkazish polosasida bir xil uzatish koeffisientiga va signal o‘tkazish imkoniyati katta bo‘lishi yagona talab bo‘lsa impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlardan foydalanish kerak, chunki impuls xarakteristikasi cheklanmagan (ayniqsa elleptik xarakteristikasidan foydalaniladigan) filtrlar impuls xarakteristikasi chekli filtrlarga qaraganda kam sonli koeffisientlarni aniqlashni talab etadi;

- impuls xarakteristikasi chekli filtrlardan, agar filtrlar koeffisientlari uncha katta bo‘lmagan, xususan agar faza xarakteristikasida buzilishlari bo‘lmasligi yoki kichik bo‘lganda foydalanish tavsiya etiladi. Bundan tashqari so‘nggi yillarda yaratilgan signallarga raqamli ishlov berish protsessorlari impuls xarakteristikasi chekli filtrlar arxitekturasi (tuzilishi)ga asoslangan bo‘lib, ulardan ba’zilari maxsus impuls xarakteristikasi chekli filtrlar uchun ishlab chiqilgan.

## 8.3. Filtrlarni loyihalash bosqichlari

Raqamli filtrlarni loyihalash besh bosqichda o‘tadi (8.2-rasm).

1. Filtrga qo‘yiladigan asosiy texnik talablar.

2. Filtrning mos keluvchi koeffisientlarini hisoblash.

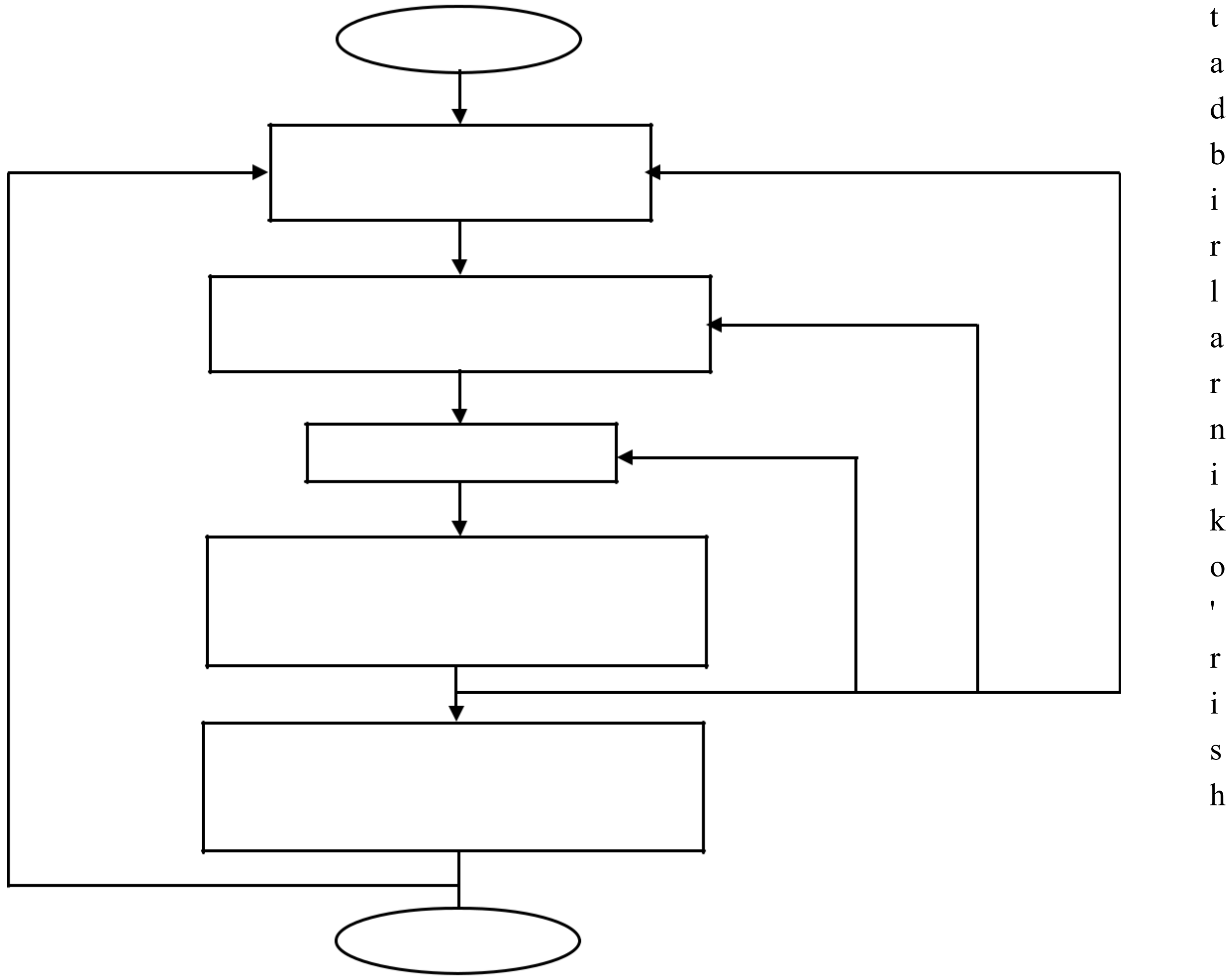
3. Filtrning tegishli strukturasini tasavvur etish.

4. Filtrning ishlash sifatiga razryadlar soni cheklanganligini tahlil etish.

5. Filtrni dasturiy yoki (va) apparat darajasida amalga oshirish.

Yuqorida keltirilgan besh bosqich ba’zan bir-biriga bog‘liq bo‘ladi: bundan tashqari ular hamma vaqt ham keltirilgan tartibda joylashgan bo‘ladi. Amalda ikkinchi bosqichni uchinchi va to‘rtinchi bosqichlar bilan birga qurish imkoniyatini beradigan usullar ham bor.

Ammo samarador filtrni olish uchun ushbu jarayonni bir necha “iteratsiya” – yaqinlashtirishlardan foydalanib amalga oshirishga to‘g‘ri keladi, ayniqsa filtrga bo‘lgan maxsus talablar to‘liq ma’lum bo‘lmagan hollarda yoki ishlab chiqaruvchi boshqa teng kuchli SRIB filtrini tahlil etmoqchi bo‘lgan hollarda yuz beradi.




(

qaytakiritish

Xarakteristikani

o'zgartirish

Tarkibni

hisoblash

Qayta

Apparat yoki (va) dasturiy daraja

(+testlash)sida tadbiq etish

Qayta ishlash

Tamom

8.2-rasm. *Impuls xarakteristikasi chekli filtrlarni loyihalash bosqichlari*

## 8.3.1. Maxsus talablar ro‘yxati

Maxsus talablar ro‘yxati quyidagilardan iborat:

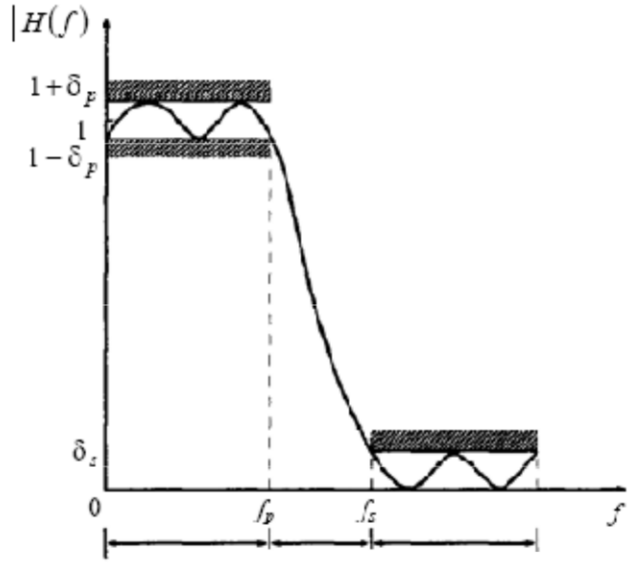
1) signal xarakteristikalari (signal va uni oluvchi turi, signalni kiritish-chiqarish interfeysi, ma’lumotlarni uzatish tezligi va polosa kengligi, eng yuqori chastota);

2) filtr xarakteristikalari (talab etiladigan AChX va FChX va ushbu xarakteristikalarga talablarning qanchalik qat’iyligi, ishlash tezligi va filtr ish rejimi (real yoki kechiktirilgan (model) vaqt));

3) amalga oshirish prinsipi (misol uchun, kompyuter uchun yuqori darajali dasturlash tilida yoki protsessorga asoslangan SRIB tizimi, shu bilan birga signal protsessorini tanlash ham amalga oshiriladi);

4) filtr tarkibi (strukturasi)ga qo‘yiladigan boshqa talablar (misol uchun, filtr tannarxi). Loyihalovchi va ishlab chiqaruvchi boshlang‘ich bosqichlarida to‘liq axborot (ma’lumot)larga ega bo‘lmasligi mumkin. Ammo loyihalash va ishlab chiqarish jarayonini soddalashtirish uchun iloji boricha ko‘p sonli talablar ma’lum bo‘lgani ma’qul.

Filtrlar xarakteristikalari ko‘p hollarda chastotalarga bog‘langan ko‘rinishda beriladi. Chastota tanlovchan filtrlar; past chastota filtrlari; chastota polosasi filtri uchun odatda maxsus talablar ruxsat etiladigan farqlanishlar chizmasi orqali ifodalanadi. Past chastota filtri uchun shunday chizma 8.3-rasmda keltirilgan.




8.3-rasm. *Past chastotalar filtri uchun ruxsat etiladigan farqlanishlar chizmasi*

Shtrixlangan gorizontal chiziqlar ruxsat farqlanishlar chegarasini belgilaydi. Asosiy o‘tkazish polosasida amplituda-chastota xarakteristikasining eng katta farqlanishi $_p$ , o‘tkazmaslik polosasida

eng katta farqlanish $_s$ .

Qo‘shimcha o‘tish polosasi kengligi filtr xarakteristikasi qanday darajada tikligini bildiradi. AChX uzatish koeffisienti $H$ $f$ bu qismida asta-sekin, to o‘tkazmaslik polosasiga qadar kamayib boradi. Amalda quyidagi asosiy ko‘rsatkichlar asosiy qiziqish bildiradi:

$_p$ – o‘tkazish polosasidagi filtr uzatish koeffisienti $H f$ ning farqlanishi (o‘zgarishi);

$h\ k$
$f / F_s$

$_s$ – o‘tkazmaslik polosasidagi filtr uzatish koeffisienti $H f$ ning farqlanishi (o‘zgarishi);

$f_p$ – o‘tkazish polosasi chegaraviy chastotasi;

$f_s$ – o‘tkazmaslik polosasi chegaraviy chastotasi.

Chegaraviy chastotalar normallashtirilgan ko‘rinishda beriladi, ya’ni diskretlash chastotasi ulushi ko‘rinishida, ammo ko‘p hollarda Hz yoki kHz larda berilgan maxsus talablardan foydalaniladi. O‘tkazish polosasidagi va o‘tkazmaslik polosasidagi farqlanishlar oddiy sonlar orqali yoki desibellarda ifodalanishi mumkin. Misol uchun, o‘tkazmaslik polosasidagi so‘nishning eng kichik qiymati $A_s$ va o‘tkazish polosasidagi maksimal o‘zgarish (farqlanish) desibellarda impuls xarakteristikasi chekli filtrlar uchun quyidagicha ifodalanadi:

$A_s$ (o‘tkazmaslik polosasidagi so‘nish)= $20 \lg 1 \quad _s$ (8.5a)

$A_p$ (o‘tkazish polosasidagi farqlanish)= $20 \lg 1 \quad _p$ . (8.5b)

Raqamli filtr faza-chastota xarakteristikasiga talablar ko‘p hollarda faza xarakteristikasi nochiziqliligi ko‘rsatkichi keltiriladi yoki faza xarakteristikasi ideal chiziqli bo‘lishi talab etiladi.

### 8.3.2. Raqamli filtr koeffisientlarini hisoblash

Bu bosqichda approksimatsiya usullaridan biri tanlanadi va impuls xarakteristikasi chekli filtrlar uchun koeffisientlar va impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlar uchun $a_k$ va $b_k$ koeffisientlar hisoblanadi. Koeffisientlarni hisoblash usuli ushbu koeffisientlarning impuls xarakteristikasi chekli yoki cheksiz filtrga tegishli ekanligiga bog‘liq.

Impuls xarakteristikasi cheksiz filtrning koeffisientlarini hisoblash an’ana bo‘yicha ma’lum analog filtrlarning xarakteristikalarini unga mos raqamli filtrlar xarakteristikalariga almashtirishga asoslangan. Bunda ikki asosiy yondashishdan foydalaniladi: impuls xarakteristikani invariant almashtirish va bichiziqli almashtirish usuli.

Impuls xarakteristikani invariant usuldan foydalanib almashtirishda analogli filtrni raqamliga almashtirilganda birlamchi analog filtrning impuls xarakteristikasi saqlanmaydi. Ichki bir-birini ustiga tushishi sababli ushbu usulni yuqori chastota filtrlari va rejektor filtrlar uchun qo‘llab bo‘lmaydi.

Ikkinchi tomondan bichiziqli (ikki chiziqli) usul juda samarali filtrlashni ta’minlaydi va chastota tanlovchan filtrlarning koeffisientlarini hisoblashga yaxshi mos keladi. Natijada an’anaviy xarakteristikali raqamli filtrlarni: Battervort, Chebishev va elliptik filtrlarni yaratish mumkin bo‘ladi.

Bichiziqli usulda yaratilgan filtrlar, umuman olganda an’anaviy filtrlar amplituda xarakteristikasiga o‘xshash, ammo vaqt bo‘yicha boshqa xossalarga ega bo‘ladi. Impuls xarakteristikani invariant almashtirish usuli analog tizimlarni modellash uchun yaxshi bo‘lib, ammo chastota tanlovchi impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlar uchun bichiziqli usuldan foydalanilgani ma’qul.

Impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlar koeffisientlarini hisoblashda uning o‘rnini bosuvchi (alternativ) nol va qutblarni joylashtirish usulidan ham foydalansa bo‘ladi – bu usuldan oddiy filtrlarning koeffisientlarini oson hisoblash imkoniyatini beradi. Shu bilan birga, bu usuldan yaxshi amplituda xarakteristikali filtrlarni hisoblash uchun tavsiya etilmaydi, chunki bunda juda ko‘p nol va qutblar borligi hisoblash hajmini oshirib yuboradi.

Impuls xarakteristikasi chekli filtrlar koeffisientlarini bir necha usullar bilan hisoblash mumkin: kesish (tortish – vaznni aniqlash), chastota bo‘yicha tanlash va Parks-Mak-Klippan optimal algoritmi.

Kesish usuli impuls xarakteristikasi chekli filtrlar koeffisientlarini hisoblashning juda oson va moslashuvchan usuli hisoblanadi, ammo loyihalovchi, ishlab chiqaruvchiga filtr parametrlarini kerakli miqdorda o‘zgartirish imkoniyatini bermaydi.

Chastota bo‘yicha tanlash usuli shu bilan o‘ziga e’tiborni tortadiki, u yordamida impuls xarakteristikasi chekli filtrlarni rekursiv shaklda amalga oshirish imkoniyatini beradi, bu sonli hisoblashni qo‘llash nuqtai nazaridan e’tiborli. Ammo bu usulga filtr parametrlarini boshqarish va o‘zgartirish uchun moslashuvchanlik yetishmaydi.

Hozirda sanoat ishlab chiqarayotgan raqamli filtrlarda optimal usuldan foydalaniladi, chunki bu usul bilan impuls xarakteristikasi chekli filtrlarning unga qo‘yilgan texnik talabga javob berishiga erishiladi. Shuning uchun bunday filtrlarni loyihalashda dastlab optimal usuldan foydalanib ko‘rish kerak (agar boshqa usuldan foydalanish sharti avvaldan belgilangan bo‘lmasa).

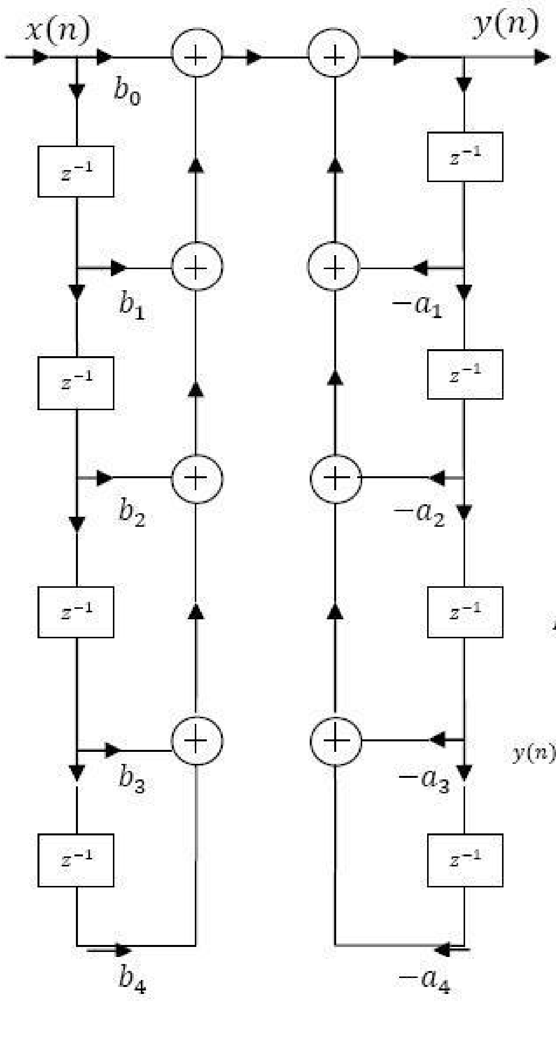
### 8.3.3. Filtrni unga mos keluvchi struktura orqali ifodalash

Bu bosqichda berilgan $H$ $z$ uzatish koeffisientini unga mos filtrlovchi tarkib (struktura) orqali ifodalash amalga oshiriladi. Filtr tarkibini tasvirlash uchun ko‘p hollarda blok-sxemalar yoki funksional sxemalardan foydalaniladi va ularda raqamli filtrni amalga oshirishni osonlashtirish uchun hisoblash amallarini bajarish ketma-ketligi ham ko‘rsatiladi.

Foydalaniladigan struktura qaysi tur filtrni impuls xarakteristikasi chekli yoki cheksiz filtrni tanlanganligiga bog‘liq.

Impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlar uchun quyidagi uch shakl strukturalardan foydalaniladi: to‘g‘ri, kaskadli va parallel shakldagilar.

To‘g‘ri shakl – bu impuls xarakteristikasi cheksiz filtr uzatish funksiyasini to‘g‘ridan-to‘g‘ri ifodalash (8.4-rasm).



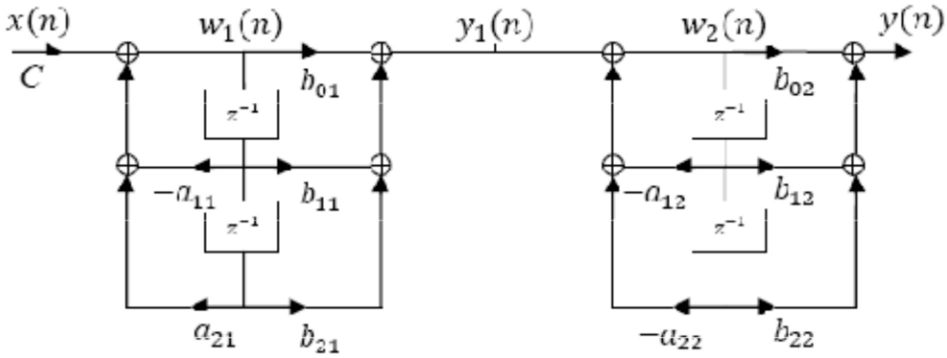

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{4} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{4} a_k z^{-k}}$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{4} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{4} a_k y(n-k)$$

8.4-rasm. *To‘rtinchi tartibli impuls xarakteristikasi cheksiz filtrni amalga oshirish to‘g‘ri shakl strukturasi*

Kaskad shaklida – impuls xarakteristikasi cheksiz filtr uzatish funksiyasi (8.5-rasm) bir necha bor takrorlanadi va ikkinchi tartibli zvenolar ko‘paytmasi orqali ifodalanadi.

Parallel shaklda – *H z* ikkinchi tartibli zvenolar yig‘indisi shaklida joylashtiriladi (bunda elementar kasrlardan foydalaniladi). 8.6-rasmda uzatish koeffisientlari va farqlanish tenglamalarining filtr strukturasini tasvirlovchi turlari keltirilgan.

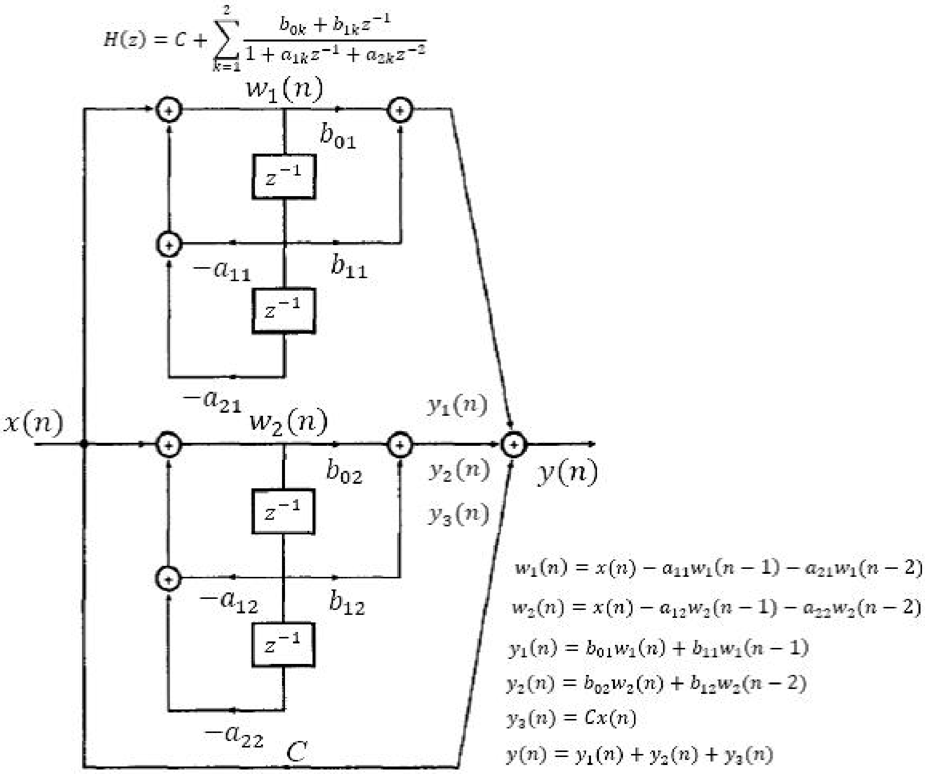



$$H(z) = C\prod_{k=1}^{2}\frac{1 + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}}$$

$$w_1(n) = C_x(n) - a_{11}w_1(n-1) - a_{21}w_1(n-2)$$
$$y_1(n) = b_{01}w_1(n) + b_{11}w_1(n-1) + b_{21}w_1(n-2)$$
$$w_2(n) = y_1(n) - a_{12}w_2(n-1) - a_{22}w_2(n-2)$$
$$y(n) = b_{02}w_2(n) + b_{12}w_2(n-1) + b_{22}w_2(n-2))$$

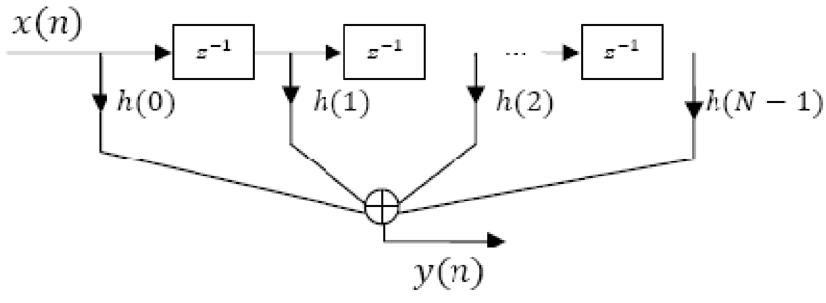
8.5-rasm. *To‘rtinchi tartibli impuls xarakteristikasi cheksiz filtrni amalga oshirish kaskad strukturasi*

Impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlarni loyihalash va yaratishda parallel va kaskad strukturalaridan eng ko‘p foydalaniladi, chunki ular nisbatan sodda filtratsiya algoritmlari orqali amalga oshiriladi va ularning cheklangan sonli bitlardan foydalanib amalga oshirilishiga sezgirligi to‘g‘ri strukturali filtrlarning sezgirligiga nibatan kichikroq.



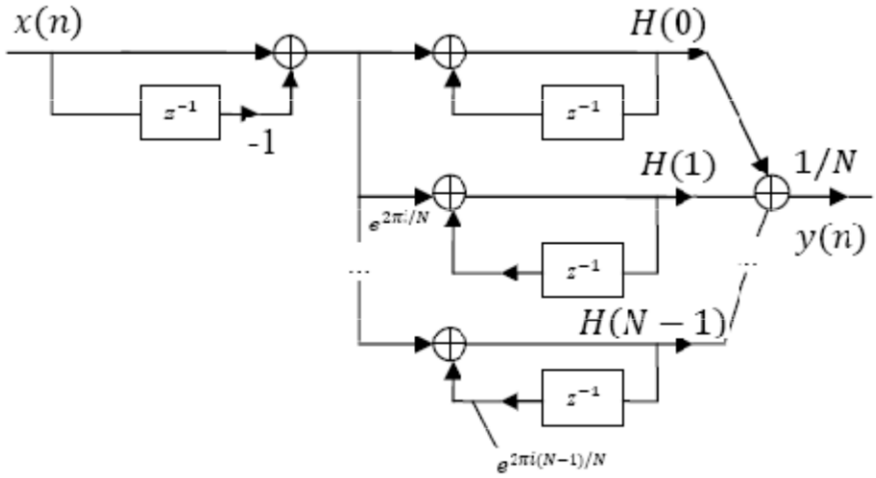

8.6-rasm. To‘*rtinchi tartibli impuls xarakteristikasi cheksiz filtrni amalga oshirish parallel strukturasi*

Impuls xarakteristikasi chekli filtrlarni loyihalash va yaratishda eng ko‘p foydalaniladigan struktura – bu to‘g‘ri struktura (8.7-rasm), chunki uni amalga oshirish boshqa strukturalarga qaraganda oson.



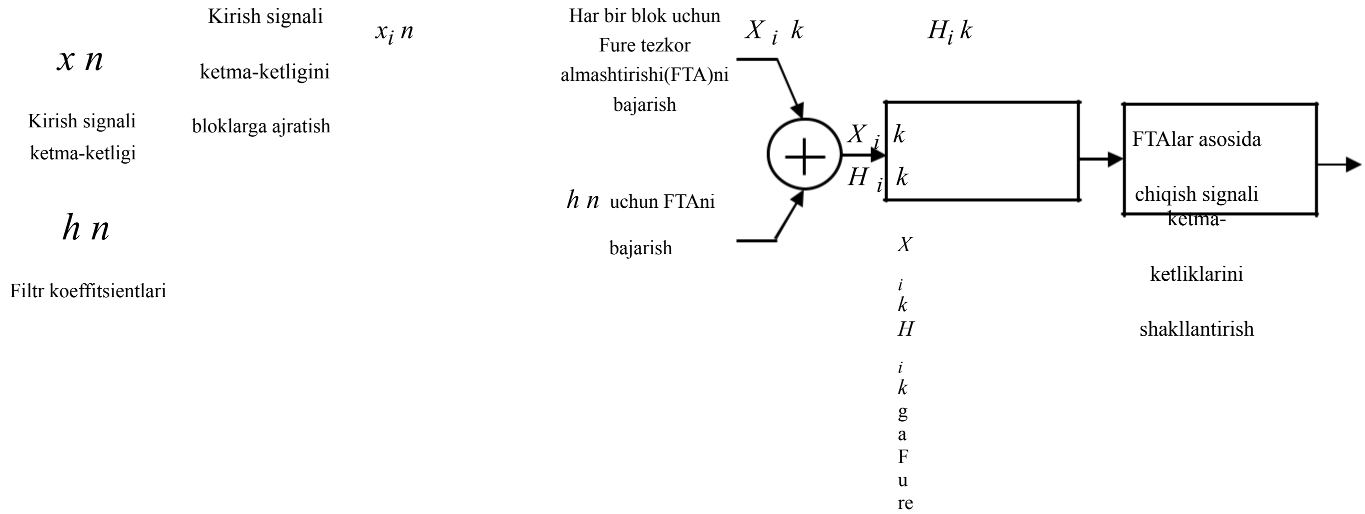

8.7-rasm. *Impuls xarakteristikasi chekli filtrni amalga oshirish to‘g‘ri strukturasi (transversal filtr)*

Impuls xarakteristikasi chekli filtrlarning (8.7-rasm) bunday struktura asosida yaratilganini ba’zan bir necha chiqish nuqtalari bor kechiktirish liniyasi yoki transversal filtr deb ataladi. Bundan tashqari, ya’ni boshqa ikki strukturadan foydalaniladi: chastotasi tanlangan struktura va tezkor o‘rash strukturasidan ham foydalaniladi (8.8-rasm).



$x(n)$
$z^{-1}$
-1
$H(0)$
$H(1)$
$H(N-1)$
$1/N$
$y(n)$
$e^{2\pi i/N}$
$e^{2\pi i(N-1)/N}$


*a*



$x\ n$
Kirish signali ketma-ketligi
$h\ n$
Filtr koeffitsientlari
Kirish signali ketma-ketligini bloklarga ajratish
$x_i\ n$
Har bir blok uchun Fure tezkor almashtirishi(FTA)ni bajarish
$h\ n$ uchun FTAni bajarish
$X_i\ k$
$H_i\ k$
$X_i\ k$
$H_i\ k$
$X_i\ k\ H_i\ k$ ga Fure
FTAlar asosida chiqish signali ketma-ketliklarini shakllantirish

*y n*

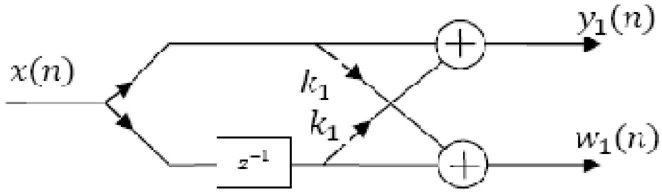
*b*

8.8-rasm. *Impuls xarakteristikasi cheklangan filtrni tanlangan chastota asosida amalga oshirish strukturasi (a) va tezkor o‘ram olish sxemasi (b)*

Transversal strukturaga qaraganda tanlangan chastota (qiymati) bo‘yicha hisoblash nisbatan samarador, chunki kam sonli koeffisientlarni hisoblash talab etiladi. Ammo uni amalga oshirish oson emas, chunki u katta xotirani talab qiladi. Tezkor o‘ram (svertka)dan Fure tezkor almashtirishi (FTA) afzalliklaridan foydalaniladi, bu usul yana shunisi bilan e’tiborliki, u yordamida signal spektrini ham hisoblash imkoni mavjud.

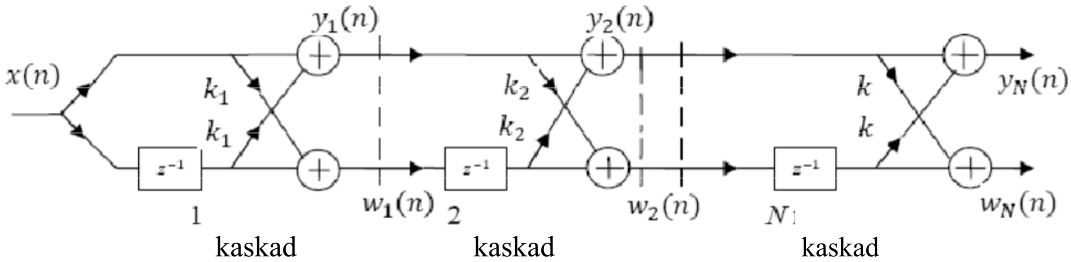
Bundan tashqari raqamli filtrlarni amalga oshirishning juda ko‘p strukturaviy sxemalari mavjud, ammo ularning ko‘pchiligi faqat ma’lum sohalarda foydalanish uchun mo‘ljallangan.

Misol uchun panjarasimon strukturadan nutq signallariga ishlov berishda va chiziqli bashoratlash sohalarida foydalaniladi. Panjarasimon strukturadan impuls xarakteristikasi chekli va cheksiz filtrlarini ifodalashda ham foydalanish mumkin, bunda ular yagona kirish va bir juft chiqishlar orqali (8.9-rasm) standart ko‘rinishda tasvirlanadilar.

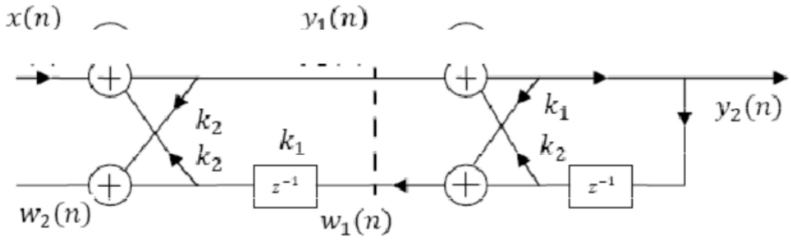



8.9-rasm. *Panjarasimon struktura*

U asosida olingan panjarasimon struktura orqali impuls xarakteristikasi chekli *N* nuqtali filtrni ta’riflovchi sxema 8.10*a*-rasmda keltirilgan va hamma qutblari ma’lum ikkinchi tartibli (faqat maxraj koeffisientlari keltirilgan) impuls xarakteristikasi cheksiz filtrni ifodalashga mo‘ljallangan struktura 8.10*b*-rasmda keltirilgan.




***a***




***b***

8.10-rasm. *N kaskadli panjarasimon impuls xarakteristikasi chekli filtr (a) va ikki kaskadli panjarasimon hamma qutblari berilgan impuls xarakteristikasi cheksiz filtr strukturasi*

## 8.3.4. Razryadlar soni cheklanganligining filtr tezkorligi va barqarorligiga ta’siri

Approksimatsiyalash va amalga oshirish bosqichlari filtrlarni cheksiz aniqlik bilan yoki juda yuqori aniqlik bilan ishlashini nazarda tutadi. Shuning bilan birga ularni amalga oshirishda filtr koeffisientlarini cheklangan sonli bitlar (odatda 8 dan 16 tagacha bitlar) orqali ifodalash talab etiladi. Bundan tashqari farqlanish tenglamasidagi amallar aniqligi cheklangan arifmetikadan foydalanib amalga oshiriladi.

Razryadlardagi bitlar sonining cheklanganligi filtr tezkorligini kamayishiga olib keladi va natijada filtr barqarorligi yomonlashadi. Shuning uchun loyihalovchi ushbu holatlarni albatta e’tiborga olishi va filtr koeffisientlarini ifodalash uchun tegishli davomiylikni (bitlar sonini) tanlashi, filtr o‘zgaruvchanlari (ya’ni, kirish va chiqish signallari o‘lchamlari)ni va filtrda arifmetik amallarni bajarilishini e’tiborga olishi kerak. Filtr tezkorligini yomonlashishiga olib keluvchi sabablar quyidagilardan iborat.

o *Signalni filtr kirishi va chiqishida kvantlash*. Xususan, vaqt bo‘yicha kirish signallarini kvantlash natijasida ARO‘da hosil bo‘ladigan shovqin – bu e’tiborga loyiq kattalik.

o *Koeffisientlarni kvantlash*. Ushbu jarayon impuls xarakteristikasi chekli va cheksiz filtrlar chastota xarakteristikalarining buzilishiga va impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlarning barqaror bo‘lmasligiga olib kelishi mumkin.

o *Butunlash xatoligi*. Filtrlash uchun cheklangan aniqlikdagi arifmetikadan foydalanish natijalarini ifodalash qo‘shimcha bitlar kiritilishini talab qiladi. Agar kvantlash natijasida olingan kodlar razryadi (bitlar soni) cheklangan bo‘lsa, butunlash shovqini paydo bo‘ladi. Natijada impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlarda barqarorlikning yomonlashishiga o‘xshash holatlar yuz berishi mumkin.

o *To‘lish*. Bu hodisa yig‘ish natijasi “so‘z” uchun ruxsat etilgan davomiylikdan katta bo‘lganda ro‘y beradi. Bu chiqish signali o‘lchamlarining noto‘g‘ri bo‘lishiga va impuls xarakteristikasi cheksiz filtrlar barqarorligi yomonlashishiga sabab bo‘ladi.

Raqamli filtr sifat ko‘rsatkichlarining yomonlashishi quyidagilarga bog‘liq:

1) filtrlashda foydalaniladigan so‘zlar uzunligi va arifmetika turiga;

2) filtr koeffisientlarini kvantlash va o‘zgaruvchan koeffisientlarni tanlangan o‘lchamlarga olib kelish usuliga;

3) filtr strukturasiga.

Ushbu sabablarni bilgan holda loyihalovchi va ishlab chiqaruvchi razryadlar soni cheklanganligining filtr tezkorligiga ta’sirini baholashi va tegishli chora-tadbirlar ko‘rishi mumkin bo‘ladi.

$x(n), x(n-1), \ldots$

Filtrlarga qo‘yilgan talablarga qarab ba’zi salbiy ta’sirlarni e’tiborga olmaslik mumkin. Misol uchun, agar filtr dastur shaklida yuqori darajali tilda bo‘lib, kompyuter yordamida amalga oshirilsa, u holda koeffisientlarni kvantlash va butunlash xatoliklarini e’tiborga olmaslik mumkin. Kirish va chiqish signallarini filtr koeffisientlari va arifmetik amallar natijalariga real vaqtda ishlov berishda davomiyligi cheklangan so‘zlar (odatda 8, 12 va 16 bit)dan foydalaniladi. Bu hollarda amalda hamma vaqt kvantlashni filtr tezkorligiga ta’sirini tahlil etish kerak.

### 8.3.5. Raqamli filtrni loyihalash

Raqamli filtr koeffisientlarini hisoblash unga mos amalga oshirish strukturasini tanlash, tanlangan davomiylikdagi so‘zlarga tegishli koeffisientlarni va filtr o‘zgaruvchi argumentlarning raqamliga almashtirish natijasida filtr sifat ko‘rsatkichlarining yomonlashishi ruxsat etilganidan katta emasligiga ishonch hosil qilgandan so‘ng farqlanish tenglamalarini apparat yoki dastur darajasida amalga oshirish talab etiladi. Tanlangan usuldan qat’iy nazar filtr chiqishidagi signal har bir o‘lcham uchun farqlanish tenglamasiga asoslangan tartibda hisoblanishi kerak (bunda vaqt bo‘yicha amalga oshirish nazarda tutilgan).

Farqlanish tenglamalari (8.2) va (8.3) lardan ko‘rinadiki $y(n)$ ni filtr chiqish signalini hisoblash, ko‘paytirish, qo‘shish, ayirish va kechiktirish amallari orqali bajariladi. Demak filtrni amalga oshirish uchun quyidagi asosiy tashkil etuvchilar bo‘lishi talab qilinadi:

- xotira (masalan, PZU) filtr koeffisientlarini saqlash uchun;
- xotira (masalan, OZU) hozirgi va avvalgi kirish va chiqish

signallarini xotirada saqlash uchun, ya’ni va

$y(n), y(n-1), \ldots$;

- apparat yoki dasturiy ko‘paytirgich (ko‘paytirgichlar);

- yig‘uvchi yoki arifmetik mantiq sxemasi.

Raqamli filtrlarni ishlab chiqaruvchi unga tegishli asosiy ma’lumotlarni va undan ma’lum masalani yechish uchun mo‘ljallanganligiga kafolat beradi. Raqamli filtrni yaratishda u bajaradigan vazifa – signallarga raqamli ishlov berish real vaqtda yoki modelda (paketli ishlov berish) foydalanishiga qarab turli struktura va elementlardan tashkil topgan bo‘ladi.

Model vaqtda signallarga ishlov berishda hamma ma’lumotlar qandaydir xotira qurilmasida saqlanayotgan bo‘ladi. Bu holat qandaydir tajriba natijalarini olish va so‘ngra ularga ishlov berishda yuz beradi. Bunday hollarda raqamli filtr ko‘p hollarda yuqori darajali dasturlash tilida amalga oshiriladi va universal kompyuterda bajariladi. Shunday qilib, signalga modelli ishlov berishni faqat dasturiy amalga oshirish ko‘rinishda ta’riflash mumkin. Bunda ishlab chiqaruvchi signalga raqamli ishlov berish jarayonini tezlashtirish uchun qo‘shimcha apparat vositalarini kiritishi mumkin.

Signallarga real vaqtda ishlov berishda filtrlardan quyidagilar talab etiladi: kirish signali o‘lchami $x\ n$ bor vaqtda ishlash va chqish signali $y\ n$ o‘lchamini, kirish signali navbatdagi o‘lchami paydo bo‘lgungacha hosil qilish, yoki kirish signallari bloklariga proporsional bo‘lgan chiqish signallari bloklarin olish (misol uchun, Fure tezkor almashtirishdan foydalanib). Agar diskretizatsiyalash chastotasi juda katta yoki yuqori tartibli filtr kerak bo‘lsa real vaqtda filtrlash tezkor va maxsus apparat vositasini talab qilishi mumkin. Audiosignallar bilan ishlashda foydalanish uchun ko‘p hollarda DSP56000 (Motorola) yoki TMS320C25 (Texas Instruments) firmalarining SRIB protsessorlari tezkorligi yetarli hisoblanadi. Bu protsessorlar tarkibida hamma talab qilinadigan asosiy bloklari, shu jumladan ko‘paytirish apparaturalari bor. SRIB bloklarini ishlab chiqaruvchi (loyihalovchi) uning tarkibiga, ma’lumot manbai va uni oluvchi turiga qarab filtrga unga mos raqamli apparat bilan ta’minlangan kiritish-chiqarish interfeyslarini ham kiritishi mumkin (misol uchun, analog-raqam o‘zgartirishlarda).

## *Nazorat savollari*

1. *Impuls xarakteristikasi chekli va cheksiz filtrlarning bir-biridan farqi nimada?*
2. *Rekursiv va norekursiv filtrlarning bir-biridan farqi nimada?*
3. *Impuls xarakteristikasi cheklangan filtrlar fazaviy xarakteristikasi qanday ko‘rinishga ega?*
4. *Raqamli filtrlarning barqarorligini qanday aniqlash mumkin?*
5. *Impuls xarakteristikasi cheklangan filtrlarni loyihalash bosqichlari nimalardan iborat?*
6. *Impuls xarakteristikasi cheklangan va cheklanmagan filtrlarning strukturaviy sxemalarini chizib ko‘rsating.*

*7. Chastotalar qiymati va tezkor o'rami orqali amalga oshiriladigan impuls xarakteristikasi cheklangan filtr strukturaviy sxemasini keltiring.*

*8. Impuls xarakteristikasi cheklangan filtr panjarasimon strukturaviy sxemasi.*

# 9. DISKRET SIGNALLARNI ALMASHTIRISH

Signal va funksiyalarni odatdagicha, ularning qiymatlarini ma’lum argumentlar (vaqt, chiziqli yoki fazoviy koordinatalar va shunga o‘xshashlar)dan tashqari, ma’lumotlarga ishlov berish va ularni tahlil etishda signallarni argumenti dinamik shaklda ifodalashdagiga teskari bo‘lgan argumentli matematik ifodalardan ham keng foydalaniladi. Misol uchun, vaqtga teskari bo‘lgan argument bu chastotadir. Bu shaklda ifodalash ushbu signal o‘zining berilgan vaqt oralig‘ida cheksiz ko‘p bo‘lmagan qiymatlarga ega bo‘lsa, har qanday murakkab ko‘rinishdagi signalni nisbatan sodda, oddiy elementar signallar yig‘indisi orqali ifodalash mumkin, va xususiy holda oddiy garmonik tebranishlar yig‘indisi ko‘rinishida, ya’ni Fure almashtirishi orqali bajarilishi mumkin. Yuqoridagidan kelib chiqqan holda signalni elementar garmonik tashkil etuvchilarga yoyish uzluksiz yoki boshlang‘ich fazasi qiymatlari orqali ifodalanadi. Uzluksiz yoki diskret vaqt argumentlari ularga teskari bo‘lgan ifodalashga mos keladi. Signal yoyilgan garmonik tashkil etuvchilarning majmuasi ushbu signalning amplituda spektri deb ataladi va boshlang‘ich fazalar majmuasi faza spektri deb ataladi. Ushbu ikki spektr signalning to‘liq spektrini tashkil etadi va bu matematik ifoda o‘z aniqligi bilan signalni dinamik ko‘rinishda ifodalashga to‘liq mos keladi.

Fure garmonik qatoridan tashqari signalni yana boshqa ko‘rinishdagi elementar tashkil etuvchilarga yoyishlardan ham foydalaniladi, bular Uolsh, Adamar, Veyvlet va boshqalardir. Bundan tashqari Chebishev, Lagger, Lejandr polinomlari va boshqalarga yoyish usullari ham mavjud. Signallarga raqamli ishlov berishda Fure diskret almashtirishi (FDA) va uni tezkor hisoblash usuli – Fure tez almashtirishi (FTA) dan keng foydalaniladi. Bunga bir necha sabablar bor: ular chastotalar koordinatasida eng qisqa vaqt davom etadigan signallardan ( 1 s) tashqari signallarni to‘liq – aniq ifodalaydilar; chastota bo‘yicha qisqartirilgan Fure tashkil etuvchilari ma’lumotlarni boshqa darajali qatorlarga nisbatan aniqroq ifodalaydi. Uning alohida tashkil etuvchilari sinusoida ko‘rinishida bo‘lib, chiziqli tizimlar orqali uzatilganda buzilmaydilar (o‘z shakllarini o‘zgartirmaydilar), shu sabali ulardan yaxshi sinov signallari sifatida foydalanish mumkin.

Signallarni elementar tashkil etuvchilarga yoyishda asosiy shart birqiymatlik va matematik ifodaning to‘liq mosligi – yoyilayotgan

$S\ t$

elementar funksiyalar o‘zaro ortogonal bo‘lishlari kerak. Ammo signal sifatli tahlil etilgan taqdirda ularning foydali fizik ma’lumotlarini aks ettirish uchun kerakli, o‘ziga xos xususiyatlarini ko‘rsatuvchi noortogonal funksiyalardan ham foydalanish mumkin. Signallarga raqamli ishlov berishda eng ko‘p qo‘llaniladigan signallarni yoyish usullarini ko‘rib chiqamiz.

## 9.1. Fure qatori

Har qanday davriy signal $S\ t$ ni cheksiz ko‘p sinusoidal va kosinusoidal argumenti karrali tashkil etuvchilar va doimiy tashkil etuvchi yig‘indisi ko‘rinishida ifodalash mumkin. Bunday ifodalash Fure qatoriga yoyish deb ataladi va quyidagi matematik ifoda orqali ifodalanadi

$$S\ t \quad a_0 a_n \quad \underset{n\,1}{} \quad \cos n\ T b_n \sin \underset{n\,1}{n}\ T\ , \tag{9.1}$$

bunda $t$ – mustaqil o‘zgaruvchi bo‘lib, odatda vaqtni anglatadi, ammo u

masofa yoki har qanday boshqa kattalik bo‘lishi mumkin; – ko‘p

hollarda kuchlanish funksiyasining argument vaqtga bog‘liqligini bildiradi, ammo har qanday boshqa signalni ham bildirishi mumkin;

$2\ /\ T_r$ – siklik chastota asosiy (birinchi) garmonikasi bo‘lib, asosiy davriy chastota $f$ bilan $2\ f$ ko‘rinishida bog‘liq, $T_r$ – signal takrorlanish davri.

Fure qatori doimiy tashkil etuvchisi $a_0$ quyidagi ifoda orqali aniqlanadi:

$$a_0 \quad \frac{1}{T_p} \int_{T_r/2}^{T_r/2} S\ t\ dt\ .$$

Signalning doimiy tashkil etuvchisi $S\ t$ signalning bir davr vaqt bo‘yicha o‘rtacha qiymatiga mos keladi. Misol uchun o‘zgarmas kuchlanish sathi

$$a_n \quad \frac{2}{T_p} \int_{T_r/2}^{T_r/2} S\ t \cos n\ \ t\ dt\ ,$$

$$b_n \quad \frac{2}{T_p} \int_{T_r/2}^{T_r/2} S\,t \sin n\;\; t\,dt\,.$$

$n$ chastota chastotaning $n$ -chi garmonikasi deyiladi. Demak cheksiz qator chastotaga bog‘liq bo‘lgan turli amplitudali $a_n$ va $b_n$ kosinusoidal va sinusoidal chastotalari musbat $n$ garmonikali tashkil etuvchilardan iborat. Bu qatorni eksponensial funksiya yordamida impuls xarakteristikasi ixchamroq shaklda ham ifodalash mumkin

$$S\,t \sum_n d_n e^{in\;t}\,, \tag{9.2}$$

bunda
$$d_n \quad \frac{1}{T_p} \int_{T_r/2}^{T_r/2} S\,t\,e^{\;in\;t}\,dt \tag{9.3}$$

kompleks sonlar bo‘lib, $d_n$ – voltlarda baholanadigan kattalik.

(9.1) ifodada elementar tashkil etuvchilar yig‘indisini aniqlashda $n$ ning manfiy qiymatlari ham hisobga olinadi, qatorning yarim tashkil etuvchilari $n$ manfiy chastotaga ega bo‘ladi. Ular fizik qiymatga ega bo‘lmaydilar va faqat matematik tushunchalar bo‘lib, buning natijasida kompleks amplituda $d_n$ larning modullari $|d_n|$ miqdor jihatdan ikki marta kichik qilib olingan. Bu musbat va manfiy chastotalarda mos amplitudalar bir-biriga teng etib taqsimlanganligini anglatadi. Natijada chastotasi $n$ bo‘lgan tashkil etuvchining haqiqiy qiymati hisoblab aniqlangan qiymatni ikkiga ko‘paytirish orqali aniqlanadi.

Signalning kompleks va trigonometrik shakldagi ifodalari bir-biri bilan quyidagicha bog‘langan:

$$|\,d_n \quad a_n^2 \quad b_n^{2\;\;1/2}\,, \tag{9.4}$$

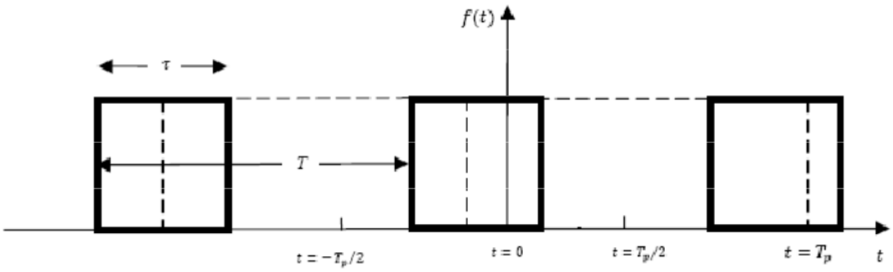
$$_n \quad arctg\, b_n \;/\; a_n \quad , \tag{9.5}$$

bunda $_n$ – $n$ -chi garmonikali tashkil etuvchisi boshlang‘ich fazasi bo‘lib, uni $d_n$ ning mavhum va haqiqiy tashkil etuvchilarining arktangensi sifatida aniqlanadi. Demak, signalning har bir garmonikasi o‘zining amplitudasi va fazasi siljishi bilan xarakterlanadi.

$d_n \quad d$

## 9.2. Fure almashtirishi

Agar signal davriy bo‘lmasa, u holda Fure qatoriga yoyish moslashtiriladi. Misol tariqasida 9.1*a*-rasmda keltirilgan to‘g‘ri burchakli impulslar ketma-ketligidan impulslar takrorlanish davri $T_r$ ni cheksizlikkacha davom ettirish natijasida yagona to‘rtburchakli impulsni hosil bo‘lishini ko‘rib chiqamiz.




9.1-rasm. *Davriy takrorlanuvchi to‘g‘riburchakli impuls*

$T_r$ ni kattalashtirib borilsa garmonikalar orasidagi $1/T_r\ /\ 2$ bo‘lgan masofa $d\ /\ 2$ gacha kichiklashib boradi va nolga teng bo‘ladi. Bu o‘zgaruvchi diskret chastota $n$ dan uzluksiz o‘zgaruvchi ga o‘tishga, shu bilan bir vaqtda fazaviy va amplitudaviy spektr ham

uzluksiz bo‘lishiga olib keladi. Demak, $T_r$ bo‘lganda

bo‘ladi. Ushbu o‘zgartirishlarni e’tiborga olsak (9.3) ifoda quyidagi ko‘rinishni oladi

$$d \qquad \frac{d}{2} \, S\,t\,e^{j\ t}\,dt. \tag{9.6}$$

Qulay bo‘lishi uchun (9.6) ifodani $d\ /\ 2$ ga bo‘lib quyidagi

ifodani olamiz

$$\frac{d}{d\ /\ 2} \quad F\ jS\,t\,e^{j\ t}\,dt. \tag{9.7}$$

Bu formuladagi $F\ j$ Fure integrali yoki oddiygina Fure tasviri (ko‘rinishi) deb ataladi. $F\ j$ ni haqiqiy va mavhum qismlari yig‘indisi shaklida quyidagicha ifodalash mumkin, agar

$$F\,j \qquad \mathrm{Re}\,j \qquad j\;\Big|\,F\,j \qquad e^{j} \qquad , \qquad \mathrm{Im}\,j \tag{9.8}$$

bo‘lsa, u holda $|F(j\omega)| = [\mathrm{Re}^2(j\omega) + \mathrm{Im}^2(j\omega)]^{1/2}$ (9.9)

bo‘ladi va bu kattalik voltda emas V/Hz larda baholanadi. $F(j\omega)$ ni amplituda zichligi, ba’zan esa amplituda spektri zichligi yoki amplituda spektri deb ataladi. Amplituda spektriga mos ravishda faza siljishi quyidagicha aniqlanadi

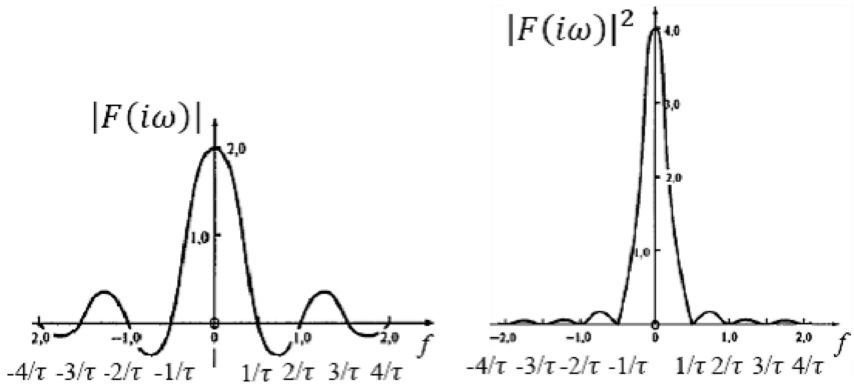
$$\varphi = arctg[\mathrm{Im}(j\omega) / \mathrm{Re}(j\omega)].\qquad (9.10)$$

$|F(j\omega)|^2$ qiymati $V^2/Hz^2$ shaklida baholanadi. Normallashtirilgan elektr quvvati, ya’ni qarshiligi 1 Om bo‘lgan qarshilikda ajralib chiqayotgan quvvat $V^2$ larda baholanadi, bu Dj/s yoki Dj·Hz (Djoul bu energiya birligi)ni anglatadi, u holda $V^2/Hz^2$ kattalik DjHz·Hz$^{-2}$= Dj·Hz$^{-1}$ ga teng bo‘ladi. Demak $|F(j\omega)|^2$ bir taqsim Hz energiyani, ya’ni $|F(j\omega)|^2$ – spektr energiyasining zichligini anglatadi. $|F(j\omega)|$ ning $f$ ga bog‘liqligi grafigi ostidagi yuza asosi $f_0 \pm df$ va $f_0 \pm df$ polosa $f_0$ chastotasi o‘rtacha kuchlanishini ifodalaydi. $|F(j\omega)|^2$ ning $f$ ga bog‘liqligi grafigi ostidagi yuza $f_0$ chastotadagi energiya o‘rtacha qiymatiga teng bo‘ladi. Bundan tashqari spektr tahlilida ko‘p hollarda spektr energiyasi zichligining chastotaga bog‘liqlik grafigi (chizmasi) ham quriladi.

Agar impulsdan oniy qiymat olish uning markaziga (qoq o‘rtasiga) mos kelsa, ya’ni $x = \frac{1}{2}$ bo‘lganda ushbu impulsning Fure shakli (ko‘rinishi) quyidagicha beriladi

$$F(i\omega) = \frac{A\tau \sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = A\tau\, \mathrm{sinc}(\omega\tau/2) \qquad (9.11)$$

va haqiqiy hisoblanadi. $F(j\omega)$ funksiya uzluksiz bo‘lib, uning $A = 1$ V, $T_r = 10$ s va 2s qiymatlari uchun grafigi 9.2*a*-rasmda tasvirlangan. Bu amplituda spektri oniy qiymatlar funksiyasiga proporsional bo‘lib, hamma vaqt ideal past chastota filtriga to‘g‘riburchakli impuls ta’sirida hosil bo‘ladi, shu bilan birga har qanday davomiyligi $t$ bilan cheklangan impuls ta’sirida ham yuzaga kelishi mumkin.




***a*** ***b***

9.2-rasm. *Impuls amplitudasi 2V: a) amplituda spektri; b) energiya spektri*

Amplitudasi 2 V bo‘lgan impuls energiya spektral zichligi grafigi 9.2*b*-rasmda tasvirlangan, 9.2*a*-rasmda esa amplituda spektri tasvirlangan.

Shuni alohida ta’kidlash kerakki, funksiyaning chastotaga bog‘liqligidan vaqt funksiyasiga Fure teskari almashtirishi yordamida o‘tish mumkin. Bu holda

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)e^{i\omega t}\,df \qquad (9.12)$$

## 9.3. Fure diskret almashtirishi (FDA) va teskari FDA

Amalda signal Fure tashkil etuvchilari, unga analog ishlov berish natijasida emas, raqamli hisoblashlar natijasi orqali aniqlanadi. Analog signal cheksiz ko‘p bir-biriga yaqin nuqtalardan iborat bo‘lganligi uchun, uning hamma qiymatlarini ifodalash mumkin emas. Shuning uchun raqamli tizimlardan foydalanish uchun analog signalni bir xil vaqt oraliqlarida diskretlash kerak bo‘ladi va bu oniy qiymat(o‘lchov)larni ikkilik raqamli signal shakliga keltirish kerak bo‘ladi. Bu oniy qiymatni o‘lchash xotirada saqlash konturi yordamida amalga oshiriladi, so‘ngra analog-raqamli o‘zgartirish amalga oshiriladi. Analog signalni yuqori aniqlik bilan tiklash uchun bu bir sekund davomida olingan oniy qiymat(o‘lchash)lar soni yetarli darajada. Nazariy nuqtai nazardan diskretlash kerakli tezligi Naykvist chastotasi deb ataladi va $2f_{yu}$ ga teng, $f_{yu}$ – signalning amplitudasi sezilarli

$x\ nT$
darajada katta eng yuqori chastotali sinusoidal ko'rinishdagi tashkil etuvchisi chastotasi.

Shunday qilib, o'zgartirilishi kerak bo'lgan hamma ma'lumotlar endi diskret va nodavriy ham bo'lishi mumkin. Shuning uchun Fure almashtirishidan foydalanish mumkin emas, chunki u uzluksiz ma'lumotlar uchun mo'ljallangan. Ammo, shunday analog almashtirish borki, uni diskret ma'lumotlarga ham qo'llash mumkin – bu Fure diskret almashtirishi (FDA).

Faraz qilaylik, analog signalni bir xil vaqt $T$ oraliqlarida diskretlash natijasida $N$ ta oniy qiymat(o'lchash)ga ega bo'lgan

quyidagi diskret ketma-ketlik olingan bo'lsin $x\ nT\ x\ 0\ ,\ x\ t\ ,...,\ x\ N\ 1\ T\ ,$ bunda $n$ – olingan oniy qiymat tartib

raqami bo'lib, $n\ \ 0$ dan $n\ \ \ \ N\ \ \ 1$ gacha qiymatlarni qabul qiladi.

qiymati faqat kuchlanish spektriga tegishli vaqt qatoriga tegishli qiymatlarni ifodalaganda haqiqiy kattalik bo'ladi.

Shuning uchun signalning vaqt bo'yicha haqiqiy bo'lgan $N$ ta qiymatlari FDAning chastota bo'yicha $N$ ta kompleks qiymatlariga aylanadi

$$X(k) = F_D[x(nT)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)\mathrm{e}^{-ik\Omega nT}, \ \ k = 0, 1, \dots, N-1 \qquad (9.13)$$

bunda $F_D$ orqali Fure diskret almashtirishi belgilangan.

Teskari Fure diskret almashtirishi (TFDA) quyidagicha aniqlanadi

$$x(nT) = F_D^{-1}[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\mathrm{e}^{ik\Omega nT}, n = 0, 1, \dots, N-1 \qquad (9.14)$$

bunda $F_D^{\ 1}$ orqali teskari Fure diskret almashtirishi belgilangan.

## 9.4. Fure tezkor almashtirishi

Fure diskret almashtirishidan foydalanib katta davomiylikka ega impulslar ketma-ketligiga ishlov berishda katta hajmdagi arifmetik amallar (ko'paytirish, qo'shish va kechiktirish)ni real vaqt oralig'ida bajarish talab etiladi. Hozirda katta tezlikda arifmetik amallarni bajaruvchi maxsus signal protsessorlari mavudligiga qaramasdan katta hajmdagi signallarga raqamli ishlov berishni real vaqt davomida

$N \geq 10^3$
bajarishda qiyinchiliklar mavjud. Misol uchun $x(n)$ ketma-ketlik uchun

bo‘lgan holat uchun Fure diskret almashtirishini

$$G(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jnk\frac{2\pi}{N}}, \text{ bunda } k=0, 1, 2, ..., N-1 \qquad (9.15)$$

formula orqali aniqlashda va $x(n)$ kompleks kattalik bo‘lganda

$(N-1)^2 \approx 10^6$ ta kompleks ko‘paytirish va $N(N-1) \approx 10^6$ ta kompleks qo‘shish amallarini bajarish kerak bo‘ladi.

Fure tezkor almashtirishi (FTA)dan foydalanish asosida bajariladigan arifmetik amallar sonini bir necha tartibga keskin kamaytirish mumkin.

FTAning asosini bir o‘lchamli sonlar massivini ko‘p o‘lchamli bilan almashtirish tashkil etadi. Bir o‘lchamli sonlar massivini ko‘p sonliga aylantirishning bir necha usullari mavjud, ya’ni TFAning bir necha algoritmlari mavjud.

Ushbu FTA algoritmlaridan birini ko‘rib chiqamiz. $N$ nuqtali $x(n)$ ketma-ketlik uchun FTAni aniqlaymiz. Buning uchun $N=2^n$ deb hisoblaymiz. $N$ nuqtali $x(n)$ ketma-ketlikni ikki $(N/2)$ nuqtali juft $x_1(n)$ va toq $x_2(n)$ ketma-ketliklarga ajratamiz.

$$x_1(n)=x(2n),\ n=0, 1, ..., \frac{N}{2}-1, \qquad (9.16)$$

$$x_2(n)=x(2n+1),\ n=0,1, ..., \frac{N}{2}-1. \qquad (9.17)$$

$N$ nuqtali $x(n)$ ketma-ketlikning FTAi quyidagicha aniqlanadi:

$$G(k)=\sum_{\substack{n=0\\ n\ juft}}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}+\sum_{\substack{n=0\\ n\ toq}}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_N^{2nk}+\sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_N^{(2n+1)k}, \qquad (9.18)$$

bunda, $W_N^2 = e^{-j(2\pi/N)2} = e^{-j2\pi/(N/2)} = W_{N/2}$. (9.19)

(9.18) ifodani (9.19) ni e’tiborga olgan holda quyidagi shaklga keltiramiz:

$$G(k)=\sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n)W_{N/2}^{nk}+W_N^k\sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n)W_{N/2}^{nk}, \qquad (9.20)$$

yoki

$$G(k)=G_1(k)+W_N^k G_2(k), \qquad (9.21)$$

bunda, $G_1(k)$ va $G_2(k)$ mos ravishda $x_1(n)$ va $x_2(n)$ ketma-ketliklarning ($N$/2) nuqtali FDAga teng.

(9.21) ifoda $G(k)$ $N$ nuqtali FDAni $G_1(k)$ va $G_2(k)$ ($N$/2) nuqtali FDAlari yig‘indisi shaklida aniqlash mumkin.

Agar ($N$/2) nutali FDAni oddiy usulda hisoblanganda $N$ nuqtali FDAni aniqlash uchun $N^2/2+N$ ta kompleks ko‘paytirish amalini bajarish kerak bo‘ladi. $N$ katta bo‘lganda, ya’ni $N^2/2+N \approx N^2/2$ bo‘lgan holat uchun $G(k)$ ni aniqlashda bajariladigan ko‘paytirish amallari soni taxminan 2 marta kamayadi.

$G(k)$ ni $0\le k\le N-1$ lar uchun aniqlash kerakligini va $G_1(k)$, $G_2(k)$ larni esa $0\le k\le N/2-1$ uchun aniqlash kerakligini e’tiborga olib (9.21) ifodani $k\ge N/2$ uchun aniqlaymiz:

$$G(k)=\begin{cases} G_1(k)+W_N^k G_2(k), & agar\ 0\le k\le N/2-1,\\ G_1(k-N/2)+W_N^k G_2(k-N/2), & agar\ N/2\le k\le N-1. \end{cases} \qquad (9.22)$$

Bunda $G_1(k)$ va $G_2(k)$ lar har $N/2$ davrda $k$ tadan takrorlanishi e’tiborga olingan.

Yuqorida keltirilgan FTA algoritmini yo‘naltirilgan graflar yordamida tshuntirish uchun (9.3-rasm) sakkiz nuqtali FTAni ikkita to‘rt nuqtali graflardan foydalanish usuli tasvirlangan.

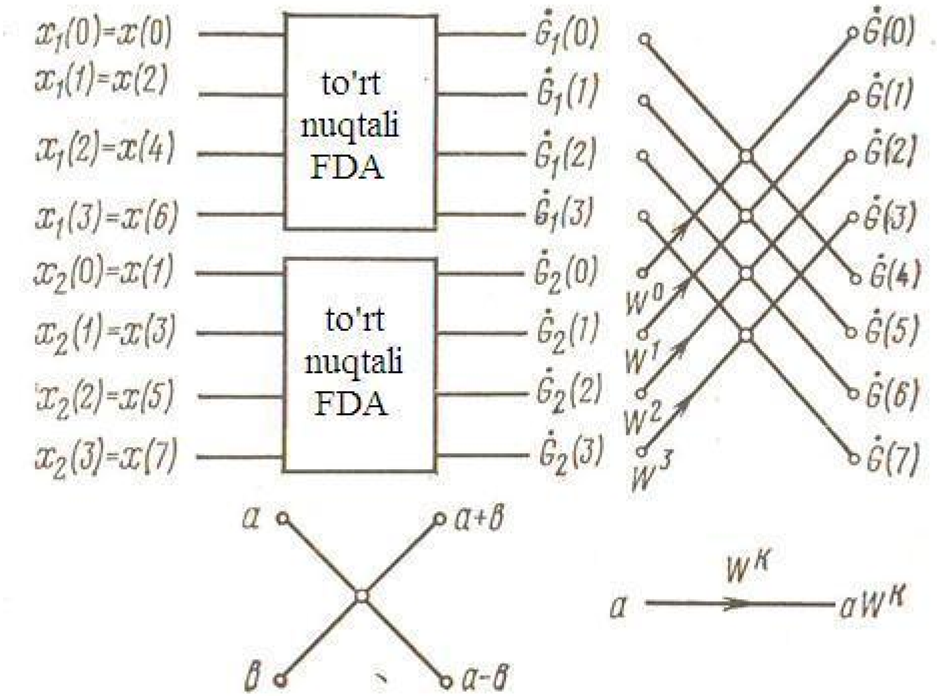
Dastlab kirishdagi $x(n)$ ketma-ketligi ikkita $x_1(n)$ – juft va $x_2(n)$ – toq ketma-ketlikka bo‘laklangan bo‘lib, ular uchun $G_1(k)$ va $G_2(k)$ lar aniqlanadi. So‘ngra (9.22) ifodaga asoslanib $G(k)$ aniqlanadi. O‘z navbatida har bir $x_1(n)$ va $x_2(n)$ ketma-ketliklar ikkiga bo‘linib, to‘rtta ikki nuqtali ketma-ketliklar hosil qilish mumkin. (9.21) va (9.22) ifodalarni e'tiborga olib $N/2$ nuqtali FDA ikkita $N/4$ nuqtali FDA kombinatsiyalari shakliga keltirilishi mumkin.

$$G_1\ (k)\ A(k)\ W_{N/2}^{k} B(k), \qquad (9.23)$$

yoki

$$G_1\ (k)\ A(k)\ W_N^{2k} B(k), \qquad (9.24)$$

bunda, $0\ \ k\ \ N/2\ \ 1$, $A(k)$ va $B(k) - N/4$ nuqtali $x_1(n)$ ning juft va toq FDAlari.

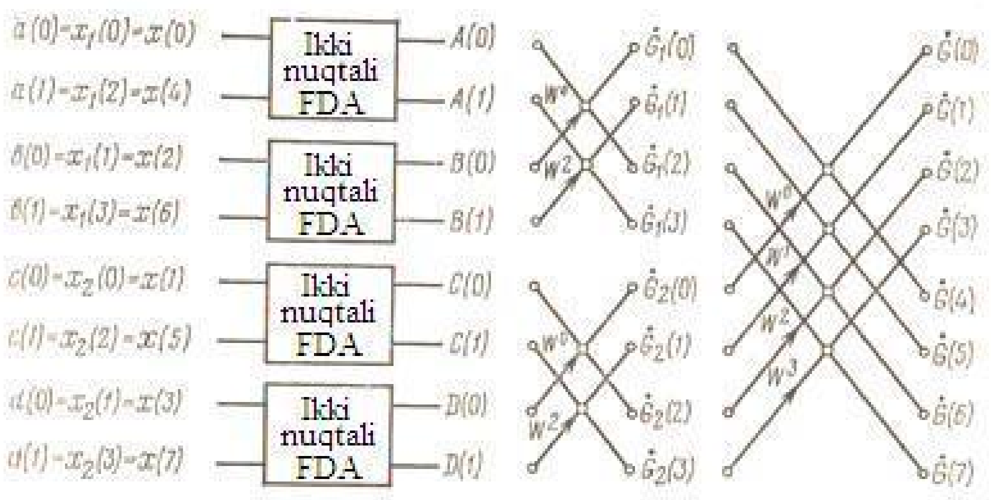



9.3-rasm. *Sakkiz nuqtali FTAni ikkita to‘rt nuqtali graflardan foydalanish usuli*

9.4-rasmda sakkiz nuqtali FDAni ikki to‘rt nuqtali FDA va uni o‘z navbatida to‘rtta ikki nuqtali FDA orqali hisoblash algoritmi keltirilgan.

$N$ nuqtali FDAlarini ketma-ket ikkiga bo‘lish usuli bilan kompleks ko‘paytirishlar sonini oddiy usulda hisoblashlar soni $N\ 1\ ^2$ dan $N/2\ \log_2 N$ taga kamaytirish imkoniyatini beradi.

9.3-rasmdagi bo‘yalmagan kichik aylanma nuqtalar qo‘shish-ayirish amalini anglatadi, bunda yuqoridagi chiqishlar yig‘indi (va pastkilari ayirish) natijasini bildiradi. Yo‘nalish belgisi (strelka) ushbu yo‘nalish belgisi yuqorisidagi ko‘paytma $a$ ga ko‘paytirish amalini bajarishini anglatadi. Umuman o‘zgaruvchilarning hammasi kompleks sonlar. Rasmdagi tugun (uzel)lar alohida FDAlari kirish va chiqishlari massivlari qiymatlarini ro‘yxatga olish funksional qurilmasini bildiradi.




9.4-rasm. *Cakkiz nuqtali FDAni ikki to‘rt nuqtali FDA va uni o‘z navbatida to‘rtta ikki nuqtali FDA orqali hisoblash algoritmi*

## 9.5. Diskret kosinus almashtirish (DKA)

Diskret kosinus almashtirishlardan korrelyatsiya va svertka (o‘ram)ni hisoblashni tezlashtirishda va spektr tahlilida foydalaniladi. Bundan tashqari bu usullardan ma’lumotlarni siqish, misol uchun ovozni (tovush) yoki tasvirni uzatish, elektrokardiogramma va elektroensenogramma kabi medisina signallarini yozish uchun foydalaniladi. Shuningdek DKAdan tasvir va nusxa (shablon)larni tanishda ham foydalaniladi. Buning natijasida signallarni uzatish uchun kodlashda talab etiladigan “bit”lar soni kamayadi, bu signal uzatish tezligini oshiradi. Bu esa nisbatan tor polosali aloqa liniyalaridan foydalanish imkoniyatini keltirib chiqaradi, shuningdek nusxa (shablon)larni tanishni osonlashtiradi (bu axborot hajmi kamaytirilishi hisobiga ro‘y beradi). DKAning ushbu xususiyatlari uni signallarni siqish nuqtai nazaridan samaradorligini bildiradi, bu signal energiyasining past chastotalarda to‘planishi natijasida ro‘y beradi. Bundan tashqari hisoblashlarning soddaligi va o‘rtacha kvadratik xatolikning kichik (minimal) bo‘lishini ta’minlaydi.

Yuqoridagi fikrlar Fure diskret kosinus almashtirishdan (FDKA) foydalanishni taqozo etadi. Umuman olganda FDKA Fure diskret almashtirishining haqiqiy qismidan iborat, chunki Fure qatori haqiqiy va juft qismi faqat kosinusoidal tashkil etuvchilardan iborat bo‘lib, misol uchun kuchlanishning diskret qiymatlaridan foydalanilganda ma’lumotlar haqiqiy bo‘ladi, ularni ikki marta ko‘p qilish uchun ularga aks tashkil etuvchilarini qo‘shish kerak bo‘ladi.

(9.13) formulaga asosan FDA quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i n k/N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 .$$

Ushbu almashtirishning haqiqiy qismi DKAni anglatadi

.

Bu DKAning bir xususiy ko‘rinishi. DKAning umumiy ko‘rinishi quyidagicha aniqlanadi

$$X_c(k) = \frac{1}{N}\sum_{n-0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{k2\pi n + k\pi}{2N}\right) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left[\frac{k\pi(2n+1)}{2N}\right], \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{9.25}$$

## 9.6. Uolsh almashtirishi

Hozirgacha ko‘rib chiqilgan almashtirishlar sinus va kosinus funksiyalariga asoslangan edi. Impulsga o‘xshash ı va ı ga asoslangan almashtirish nisbatan oson va tez hisoblash imkoniyatini beradi. Bundan tashqari bunday almashtirishlar uzluksizligi buzilgan signallarni ifodalashda ancha qulay hisoblanadi, misol uchun, tasvir signallarini almashtirishda. Shu bilan birga ular uzluksiz signallarni ifodalashda ancha noqulay bo‘lib, ular fazalari bo‘yicha moslikni ta’minlamaydilar, bu signal spektrining buzilishiga va natijada signal shaklining buzilishiga olib keladi. Shuning uchun Uolsh almashtirishidan odatda tasvir signallariga ishlov berish (astronomiya va spektroskopiya)da signallarni kodlash va filtrlashda foydalaniladi.

Fure diskret almashtirishi garmonik sinusoidal va kosinusoidal tashkil etuvchilar orqali ifodalanganidek, Uolsh diskret almashtirishi (UDA) Uolsh funksiyalari deb ataluvchi to‘g‘ri to‘rtburchakli o‘rovchili

garmonik signallar to‘plami orqali ifodalashga asoslangan. Ammo to‘g‘riburchakli impulslar uchun ularning takrorlanish chastotasi noma’lum bo‘lgani uchun analog signal uchun foydalaniladigan “ketma-ketlik” atamasidan foydalaniladi. “Ketma-ketlik” – bu vaqt birligida nolni kesib o‘tishlar sonining yarmiga teng bo‘ladi.

9.5-rasmda $N$ 8 gacha bo‘lgan tartibdagi Uolsh funksiyalari kattalashish tartibida ko‘rsatilgan. Bu ko‘rinishni Uolsh bo‘yicha tartibga keltirilgan funksiya deb ataladi. Davomiylik vaqti $t$ ga va tartibi $n$ ga teng Uolsh funksiyasi quyidagicha belgilanadi $\mathrm{WAL}\ n,t$ .

9.5-rasmdan ko‘rinadiki xuddi Fure qatorida toq va juft sinusoidal va kosinusoidal funksiyalar bir-biriga teng bo‘lganidek, Uolsh funksiyasida ham bir xil sonli toq va juft funksiyalar bo‘ladi. Uolsh $\mathrm{WAL}\ 2k,t$ juft funksiyalari $\mathrm{CAL}\ k,t$ ko‘rinishida ifodalanadi va $\mathrm{WAL}\ 2k\ 1,t$ toq funksiyalari $\mathrm{CAL}\ 2k\ 1,t$ ko‘rinishida ifodalanadi, bu yerda $k$ 1,2,...,$N$ / 2 1.

Har qanday $S$ $t$ signalni Uolsh funksiyalari majmua (jamlama)lariga yoyish mumkin (xuddi Fure qatoriga yoygandek)

$S\,t$ (9.26)

bunda $a_i$ va $b_i$ – qator koeffisientlari.

Har qanday ikkita Uolsh funksiyasi uchun quyidagi ifoda kuchga

ega

$$\mathrm{WAL}\ m,t\ \mathrm{WAL}\ n,t \quad \begin{matrix} N & agar\ n\ \ m, \\ 0 & agar\ n\ \ m. \end{matrix}$$
$$_{t\ 0}^{N\ 1}$$

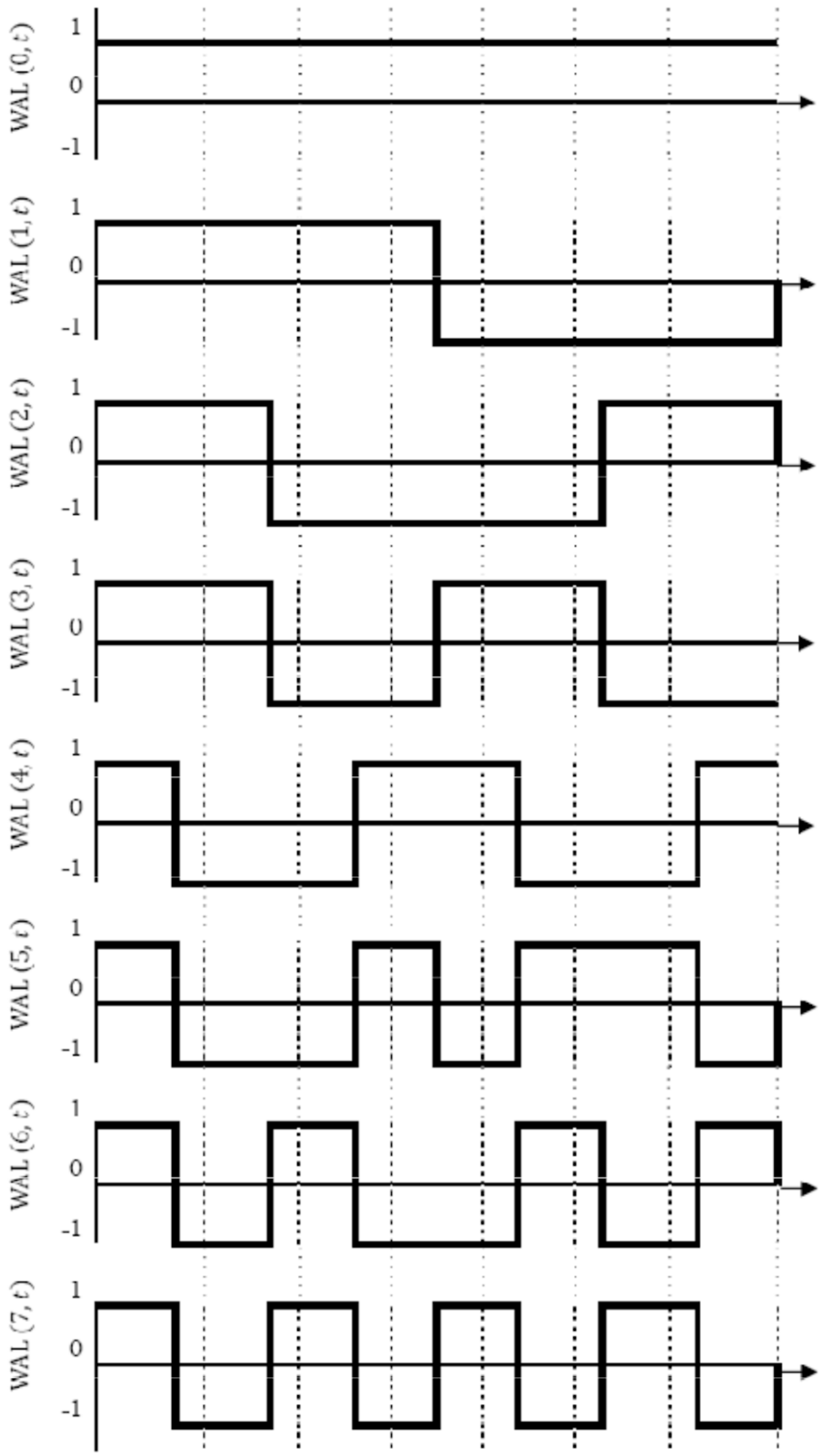
ya’ni Uolsh funksiyalari o‘zaro ortogonal.

Uolsh almashtirishi uchun to‘g‘ri va teskari almashtirishlarni tadbiq etish mumkin:

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N\ 1} x_i \mathrm{WAL}(k,i)\ , \quad k = 0,1,\dots,N-1, \tag{9.27}$$

$$x_i = \sum_{i=0}^{N-1} X_k \mathrm{WAL}(k,i)\ , \quad k = 0,1,\dots,N-1. \tag{9.28}$$

Agar $1/N$ ko‘paytmani e’tiborga olinmasa teskari almashtirish to‘g‘ri almashtirish bilan bir xil va WAL $k,i$ 1 bo‘ladi.



WAL (0, t)
WAL (1, t)
WAL (2, t)
WAL (3, t)
WAL (4, t)
WAL (5, t)
WAL (6, t)
WAL (7, t)
1
0
-1

9.5-rasm. *Uolshning 8×8 tartibli almashtirishi matrisasi uchun uning ketma-ket kattalashishi* $n$ 7 *gacha tartibga keltirilgan funksiyalari*

Shuning uchun “shakl”lar juftlarini matrisalarni raqamli usul (metod) asosida ko‘paytirish natijasida topish mumkin. Ammo faza haqidagi axborot yo‘qligi uchun UDA tez korrelyatsiya (korrelyatsiya oralig‘i kichik)larni va o‘ramlarni hisoblash uchun yaroqsiz.

(9.17) tenglik UDA $k$ nchi elementini diskret signal har bir elementi $x_i$ ni $k$ ketma-ketlikli Uolsh funksiyasiga ko‘paytirishi va $k$ ning hamma qiymatlari uchun qo‘shish orqali olish mumkin

$k$ 0,1,...,$N$ 1. $k$ ning hamma elementlari uchun uni matrisa ko‘rinishida yozish mumkin

$$\mathbf{X}_k = x_i \mathbf{W}_{ki} , \tag{9.29}$$

bunda $x_i$ $x_0\, x_1\, x_2 \ldots x_{N\ 1}$ – ma’lumotlar ketma-ketligi.

$$\mathbf{W}_{ki} = \begin{bmatrix} W_{01} & W_{02} & \cdots & W_{0,N-1} \\ W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1,N-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_{N-1,1} & W_{N-1,2} & \cdots & W_{N-1,N-1} \end{bmatrix}$$

– Uolsh almashtirishi matrisasi, $X_k$ $X_0 X_1 X_2 \ldots X_{N\ 1}$ – $N$ 1 UDA matrisasi tashkil etuvchilari.

Alohida ta’kidlaymiz, $\mathrm{W}_{ki}$ – bu $N$ $N$ tartibli matrisa, bunda $N$ berilgan nuqtalar soni, ya’ni diskret signal nuqtalari. Agar $N$ berilgan nuqtalar soni bo‘lsa, u holda Uolsh funksiyasining dastlabki $N$ ta tartibga keltirilganlarini ko‘rib chiqish kerak bo‘ladi. Ularning har biri $N$ marta diskretizatsiyalanadi, bunda $\mathrm{W}_{ki}$ matrisaning $k$ nchi qatori $k$ komponenta ketma-ketligining $N$ ta diskret qiymatlariga to‘g‘ri keladi.

## 9.7. Adamar almashtirishi

Adamar almashtirishi yoki Uolsh-Adamar almashtirishi bu ham mazmunan Uolsh almashtirishi bo‘lib, faqat boshqa tartibdagi Uolsh funksiyalari va boshqa almashtirish matrisasi qatoridir. Bunday o‘rin almashtirishlar natijasida olinadigan Adamar matrisasi, ikkinchi tartibli matrisaning massiv ostini o‘z ichiga oladi. 9.6-rasmda Adamarning 8×8 tartibli matrisasi ko‘rsatilgan bo‘lib, u $_8H$ ko‘rinishida belgilanadi.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} & & & i & \rightarrow & & & \end{array} \\
 & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{array}{c} k \\ \downarrow \end{array}
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

9.6-rasm. *Adamarning* 8 8 *tartibli almashtirish matrisasi*

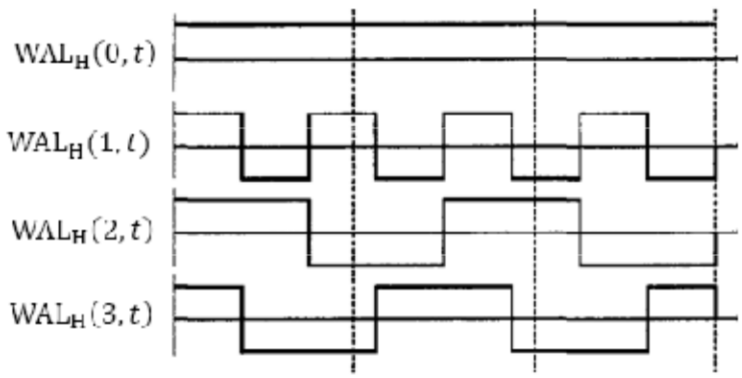
Uni matrisalar orqali yozish mumkin

$$ {}^{2}\mathrm{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad -\ {}^{2}\mathrm{H} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. $$

Adamarning har qanday $2N$ tartibli matrisasini $_2H$ dan rekursiv shakldа olish mumkin, ya’ni

(9.30) Bu rekursivlik xossasidan Uolsh funksiyasini Adamar tomonidan aniqlangan tartibda joylashtirish natijasida olingan Uolsh-Adamar tez almashtirishini UDAga nisbatan ancha katta tezlik bilan hisoblash mumkin. Adamar tartibida joylashgan Uolsh (yoki tabiiy tartibda

joylashgan) funksiyasi 9.7-rasmda ko‘rsatilgan.




9.7-rasm. *Adamar* 4 4 *tartibli almashtirish matrisasi uchun diskretizatsiyalash vaqtini ko‘rsatuvchi n* 7 *gacha Adamar tartibida*

*joylashgan Uolsh funksiyasi*

## 9.8. Veyvlet almashtirishi

Geyzenberg noma’lumlik (noaniqlik) fizik prinsipiga asosan, bir vaqtning o‘zida $x$ zarrachaning holati va uning impulsi $p$ ni aniq bilish mumkin emas. Amalda

$$xp \geq h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ Dj·s}, \qquad (9.31)$$

bunda $h$ – Plank doimiysi. Eynshteynning $E\ mc^2$ tenglamasi asosida bu prinsipni signallarga ishlov berish sohasida ham qo‘llash mumkin. Bunda Geyzenberg prinsipi quyidagicha ta’riflanadi: bir vaqtning o‘zida har qanday aniqlik bilan vaqt va chastotani aniqlash mumkin emas, ya’ni

$$fT\ \ 1, \qquad (9.32)$$

bunda $f$ va $T$ chastota va vaqt bo‘yicha farqlanishni ifodalaydi. Agar chastota qiymati yuqori aniqlik bilan farqlansa (aniqlansa), u holda chastota nisbatan kam aniqlik bilan baholanadi va aksincha.

Natijada bir vaqtning o‘zida signal tashkil etuvchilari chastotasini va uning paydo bo‘lish vaqtini yoki signal turli chastotali tashkil etuvchilarini vaqt bo‘yicha ajratish talab darajasidagi yuqori aniqlik bilan o‘lchash yetarli darajada murakkab bo‘lishi mumkin. Bu holat agar signal yuqori chastotali tashkil etuvchilardan iborat bo‘lsa va ular vaqt sohasida uzoq davomiyli tashkil etuvchilarga juda ham yaqin joylashgan bo‘lsa va ular ham o‘z vaqtida chastota sohasida yaqin joylashgan bo‘lsa, hamda turli onlar (vaqtlar)da hosil bo‘lsa yuz berishi mumkin.

Bunday signallar davriy bo‘lmaydi. Bu chastota-vaqt tahlili umumiy muammosini yechish uchun Veyvlet almashtirishdan foydalaniladi (wavelet transform), u nostasionar signallarni tahlil etish vositasi hisoblanadi. Veyvlet almashtirishdan signallarni filtrlashda, shovqinlarni yo‘qotishda, sinulyarlik joyini topish va ularning taqsimlanishini aniqlash kabi masalalarni yechishda foydalanish mumkin.

Fure almashtirishida signal qiymati darajasi ko‘rsatkichida mavhum bo‘lgan hissa (vesovoy) koeffisienti bo‘lsa va argument garmonik shaklda bo‘lib chastotaga bog‘liq bo‘lsa, ya’ni sinusoidal tashkil etuvchi bo‘lsa, Veyvlet almashtirishda xususiy hissa koeffisientlari qiymati sifatida Veyvlet funksiyalardan foydalaniladi.

Hamma Veyvlet funksiyalar asosiy (bazaviy) Veyvlet funksiyasidan olinadi. Ba’zi hissalar bo‘lishini ta’minlash uchun bir qator asosiy (bazaviy) funksiyalardan foydalaniladi. Talab etiladigan xossalarga ega bo‘lish uchun Veyvlet funksiya tebranishlar shaklida bo‘lib, doimiy tashkil etuvchisi bo‘lmasligi kerak, spektri ma’lum bir kichik polosada joylashgan bo‘lishi, kichik vaqt ichida nolga teng qiymatgacha kichiklashishi va aksincha, kichik vaqt oralig‘ida o‘zining eng katta qiymatiga ega bo‘lishi kerak. Bu xususiyat Veyvlet almashtirish bir qiymatli bo‘lishiga kafolat beradi. Asosiy funksiyani

$t$ ko‘rinishida yozish mumkin. Misol uchun, Morlet yoki Gauss modifikatsiyalangan asosiy funksiyasi (Morle veyvleti) quyidagicha ifodalanadi

$$\Psi(t) = e^{i\omega_0 t}\, e^{-t^2/2}, \qquad (9.33)$$

Uning Fure ko‘rinishi

$$H(\omega) = \sqrt{2\pi e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}} \qquad (9.34)$$

Bu ikki signal 9.8-rasmda keltirilgan bo‘lib, bundan ko‘rinadiki

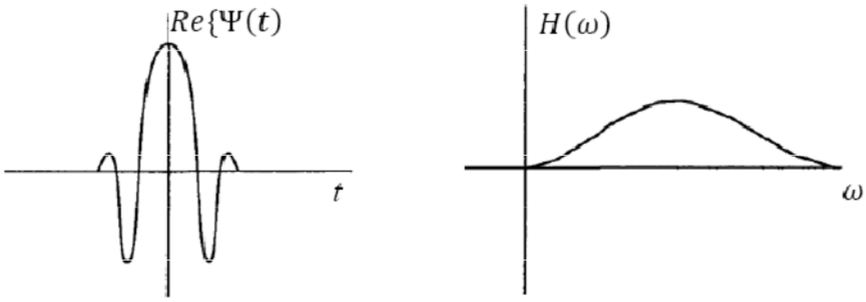
$t$ funksiya yuqorida keltirilgan talablarga javob beradi, ya’ni tebranuvchan va nolgacha kichiklashadi.

Qolgan (qiz, ikkilamchi) funksiyalar birlamchi asosiy funksiyalar masshtabini o‘zgartirish natijasida olinadi, bular funksiyalar oilasini tashkil etadilar. Har bir ikkilamchi (qiz) funksiyani quyidagicha ifodalash mumkin

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\Psi\{(t-\tau)/a\},$$

bunda $a$ – masshtabni o‘zgartirish o‘zgaruvchan koeffisienti, – olib o‘tish o‘zgarmas koeffisienti. Agar $a$ ning masshtabi kattalashsa funksiyaning amplitudasi va argumenti kichiklashadi. Amplituda berilgan qiymatida argumentning kichiklashishi chastotaning kichiklashishini anglatadi.

DPVA
Ko‘p hollarda
e’tiborga olinsa




9.8-rasm. *Modifikatsiyalashtirilgan Gauss yoki Morlet, t ona (asosiy) veyvlet funksiyasi va uning Fure ko‘rinishi H*

Masshtabni o‘zgartirish koeffisienti *a* va olib o‘tish o‘zgarmas koeffisienti yordamida katta va kichik (turli) amplitudali, yuqori va past (turli) chastotali funksiyalarni yaratish mumkin va ularni vaqtning turli onlariga joylashtirish mumkin.

Shunday qilib turli vaqt oralig‘iga joylashgan turli chastotali tashkil etuvchilarga ega nostasionar signallarni turli veyvlet funksiyalar yig‘indisi orqali ifodalash mumkin. Veyvlet funksiyasidan shu maqsadlarda foydalaniladi.

Uzluksiz veyvlet almashtirishni (UVA) ( *a*, ) quyidagicha ifodalash mumkin

$$\text{UVA } (a,\tau) = \left(1/\sqrt{a}\right) \int s(t)\Psi\{(t-\tau)/a\}dt. \qquad (9.35)$$

Bu tenglama paramterlarini diskretlash natijasida diskret parametrli veyvlet almashtirishi (DPVA) ( *m*, *n* ) ni olish mumkin, u quyidagicha aniqlanadi

$$\text{DPVA } (m,n) = a_0^{-m/2} \int s(t)\,\Psi\{(t - n\tau_0 a_0^m)/a_0^m\}dt\,, \qquad (9.36)$$

*a* *a*0*m* , *n* 0 *a*0*m*

almashtirishlarda $a_0$ va $_0$ lar $a$ va lar uchun diskretizatsiyalash oralig‘i; $m$ va $n$ lar esa butun sonlar.

$a_0$ $2a$ , $_0$ 1 ga teng deb olinadi. Yuqoridagilarni

$$(m, n) = 2^{-m/2} \int s(t)\, \Psi\{(t - n2^m)/2^m\} dt =$$
$$= 2^{-m/2} \int s(t) \Psi\{2^{-m}t - n\}\, dt.$$

Bu vaqt o‘qini $2^m$ marotaba kengaytiradi, natijada veyvlet funksiya vaqt bo‘yicha musbat tomonga $2^m n$ kattalikka suriladi.

Veyvlet funksiyani vaqt bo‘yicha diskretizatsiyalash, diskret vaqtli veyvlet almashtirishi (DVVA)ni beradi, u quyidagicha aniqlanadi

$$\text{DVVA}\,(m,n) = a_0^{-m/2} \sum_k s(k)\Psi(a_0^{-m} k - n\iota_0). \qquad (9.37)$$

Agar qaytadan $a_0$ $2a$ va $_0$ 1 deb hisoblasak u holda DVMI quyidagicha aniqlanadi

$$\text{DVVA}\,(m,n) - 2^{-m/2} \sum_k s(k)\Psi(2^{-m} k - n), \qquad (9.38)$$

(9.38) ifoda veyvlet diskret almashtirishi hisoblanadi.

Shunday qilib, veyvlet diskret almashtirishi uzluksiz veyvlet almashtirishidan masshtab parametri $a$ ni, olib o‘tish o‘zgarmas koeffisienti va vaqtli diskretizatsiyalash, so‘ngra diskretlash oralig‘i qiymatlari $a_0$ 2 va $_0$ 1 deb hisoblash natijasida olinadi.

Veyvlet almashtirishlardan signallar chastota-vaqt tarkiblarini o‘rganishda foydalanishdan tashqari, ulardan signallarni filtrlash, ya’ni shovqinning qandaydir qismini olib tashlashda ham foydalanish mumkin. Buning uchun signal tashkil etuvchilarga ajratilishi kerak. So‘ngra taqqoslash asosida shovqin tashkil etuvchilari olib tashlanadi. Va nihoyat shovqinlardan tozalangan signal tashkil etuvchilari veyvlet funksiyalari orqali qayta tiklanadi. Uzluksiz veyvlet almashtirishidan foydalanilganda signalni qayta tiklash (teskari almashtirishi) ifodasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$s\,t \quad \frac{1}{C} \quad UVA(a,\ ) \frac{1}{\sqrt{a}} \quad (t \quad)/a \frac{1}{\sqrt{a}}{}^{2}\, dadt, \qquad (9.39)$$
$$_{a\;0}$$

bunda

$$C_\Psi = \int_0^\infty \{|H(\omega)|^2/\omega\} d\omega < \infty\,,$$

va $H$ – asosiy impuls $t$ ning Fure ko‘rinishi.

## 9.9. Gilbert almashtirishi

Aloqa kanallari orqali uzatiladigan signallar vaqtning haqiqiy funktsiyasi bo'ladi. Ammo bir qator signallar uzatish muammolariga tegishli masalalarni echishda signalni vaqt funktsiyasi bo'lgan elementar kompleks tashkil etuvchilar yig'indisi sifatida qarashni taqazo etadi yoki signalning o'zini to'liq kompleks funktsiya deb tadqiq etishga ehtiyoj tug'iladi, ya'ni

$$s(t)\ \ s(t)\qquad js\ \ (t)\ \ u(t)e^{j\ \ (t)} \tag{9.40}$$

bunda, $u(t)$ va $(t)$ – signal o'rovchisi va fazasi. Bu holda haqiqiy signal kompleks signal orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$s(t)\ \ R_c\, s(t)\ \ R_c u(t)e^{j\,(t)}\ \ u(t)\cos\ \ (t) \tag{9.41}$$

Signalni bu shakldа ifodalashdan tor polosali signallarni tadqiq qilishda keng foydalaniladi.

Agar $s(t)$ va $s\ (t)$ Gilbert o'zgartirish juftligi orqali bir-biriga bog'liq bo'lsa, $s(t)$ signal analitik signal deb ataladi, ya'ni

$$\begin{aligned} s\ (t)\quad & \frac{1}{\ }\quad \frac{s(\ )}{t}\ d \\ s(t)\quad & \frac{1}{\ }\quad \frac{s\ (\ )}{t}\ d \end{aligned} \tag{9.42}$$

shaklida bog'langan bo'lsa, bunday signal analitik signal hisoblanadi. (9.42) ifodalardagi integrallar Koshining asosiy qiymati sifatida qabul qilinadi. $s\ (t)$ funktsiya bilan Gilbert bo'yicha moslashgan hisoblanadi. $s(t)$ va $s\ (t)$ ni Gilbert sharti asosida tanlangan bo'lsa, u holda signal o'rovchisi va fazasi quyidagicha aniqlanadi:

$$u(t)\, s(t)\sqrt{^2\quad s\ (t)^2}, \tag{9.43}$$

$$(t)\ \ arctg\ \ \frac{s\ (t)}{s(t)}\ . \tag{9.44}$$

Agar $s(t)$ signal spektri kengligi o'zining o'rtacha chastotasi $_0$ dan kichik bo'lsa, u holda bu signalning amplitudasi va fazasi signal $s(t)$ ning o'ziga nisbatan sekin o'zgaradi. Gilbert to'g'ri va teskari bir juft

o'zgartirishlari asosida $s(t)\ \cos\ t$ signalga $s\,(t)\ \sin\ t$ signal va $s(t)\ \sin\ _0t$ signalga $s\,(t)\ \ \cos\ _0t$ signal kompleks moslashganligini tasdiqlash mumkin. Xuddi shunga o'xshash $s(t)(a_k \cos k\ _0t\ \ b_k\ \ \sin k\ _0t)$ signal bilan

$k$

$s\,(t)(a_k \sin k\ _0t\ \ b_k\ \ \cos k\ _0t)$ signal kompleks moslashgan bo'ladi.

$k$

Shunday qilib $s(t)\ \ A\cos\ \ t$ oddiy garmonik tebranish signalga $s\,(t)\ \ A\cos t\ \ jA\sin\ \ t\ \ Ae^{j\ t}$ analitik signal mos keladi.

Agar signal Fure integrali ko'rinishida bo'lsa:

$$s(t)\ \ \frac{1}{2}\ \ s(j\ )e^{j\ t}d\ . \qquad (9.45)$$

Uning chastota spektri quyidagicha ifodalanadi:

$$s(j\ )\ \ s(t)e^{j\ t}dt\ \ \Gamma s(t) \qquad (9.46)$$

$s(t)$ va $s\,(t)$ signallarning spektri o'zaro quyidagi bog'lanishga ega:

$$\hat{}\ \ \Gamma s(t) j\ \mathrm{sgn}(\ )\ s(j\ )\ , \qquad (9.47)$$

bunda $\mathrm{sgn}(\ )\ \ \begin{cases} 1, & agar\ \ 0; \\ 0, & agar\ \ 0; \\ 1, & agar\ \ 0. \end{cases}$

Shunday qilib, Gilbert o'zgarishini $s(t)$ signalning hamma spektral tashkil etuvchilarini ga suruvchi elektr zanjiridan o'tishi deb

2

hisoblash kerak. Ushbu elektr zanjirining chastota va faza tavsiflari quyidagicha bo'ladi:

$$K\,(j\ )\ \ j\,\mathrm{sgn}(\ ), \qquad h(t)\ \ \frac{1}{t}.$$

(9.47) ifodani (9.40) ifodaga kiritish natijasi $\dot{S}(t)$ signalning spektri $\dot{S}(j\omega)$ ning “bir tomonlama” ekanini ko'rsatadi:

$$\dot{S}(j\omega)=\begin{cases} 2s(j\omega), & agar \quad \omega>0; \\ s(j\omega)=s(0), & agar \quad \omega=0; \\ 0, & agar \quad \omega<0. \end{cases} \qquad (9.48)$$

Bu analitik sigalning juda muhim hossasi hisoblanadi.

Davriy signal $s(t)$ ning Gilbert sharti bo'yicha moslashgan $\hat{s}(t)$ funktsiyasi ham $s(t)$ signal davriga teng bo'ladi. $s(t)$ va $\hat{s}(t)$ signallar ularning davri $T$ oralig'ida o'zaro ortogonal bo'ladi, ya'ni

$$\int_0^T s(t)\hat{s}(t)dt = 0 .$$

Agar $s_i(t)$ va $s_j(t)$ ortogonal signallardan birini uning Gilbert

o'zlashtirishi sharti asosida moslashtirilganiga almashtirilganda ham ortogonallik hususiyati saqlansa, bunday signallar kuchaytirilgan ma'noda ortogonal signallar deb ataladilar, ya'ni

$$\begin{aligned} s_i(t)\,s_j(t) &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s_i(t)\,s_j(t)dt = 0; \\ s_i(t)\,\hat{s}_j(t) &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s_i(t)\,\hat{s}_j(t)dt = 0, \qquad agar \quad i \neq j \end{aligned} \qquad (9.49)$$

Bundan tashqari bunday signallardan birini uning $s^*(t)$ kompleks moslashganiga almashtirilganda ham o'zaro ortogonallik hususiyati saqlanib qoladi, ya'ni

$$s_i(t)\,s_j(t) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s_i(t)\,s^*_j(t)dt = 0; \qquad agar \quad i \neq j \qquad (9.50)$$

Analitik signal tushunchasi har qanday signalni kompleks shaklga keltirish va uning o'rovchisini hamda fazasini aniq aniqlash imkoniyatini beradi. Determinant (o'zgarish qonuniyati ma'lum funktsiya) va tasodifiy signallar analitik shaklga keltirilishi mumkin.

Signalni analitik shaklga keltirish natijasida, uning o'rovchisi va fazasi o'zgarishini alohida-alohida tadqiq qilish mumkin bo'ladi. Masalan, tasodifiy jarayon tadqiq etilganda uning oniy qiymatlari bilan shug'ullanish o'rniga, uning o'rovchisi yoki fazasini tadqiq etish bilan chegaralanish mumkin.

Umuman olganda $x(t)$ va $x\,(t)$ jarayonlarning spektrlari va korrelyatsion funktsiyalari bir xil: $G_x(\ )\ G_x\ (\ )$, $B_x(\ )\ B_x\ (\ )$ . $x(t)$ va $x\,(t)$ jarayonlarning o'zaro energetik spektrlari $G_x(\ )\ jG_x(\ )$ o'zaro korrelyatsiya funktsiyasi quyidagi ifoda orqali aniqlanadi:

$$B_x(\ )\ \ B_x(\ )\qquad \frac{1}{}\int_0 G_x(\ )\sin\ \ d \tag{9.51}$$

Tasodifiy jarayon taqsimot qonuni bilan uning o'rovchisi $s(t)$ va fazasi $(t)$ taqsimot qonunlari bir-birlariga bog'liq, tasodifiy jarayonning ehtimollik zichligi taqsimot qonuni $P(x)$ orqali, uning o'rovchisi va fazasi ehtimolligi zichligi taqsimoti qonuni $P(s)$ va $P(\ )$ ni aniqlash mumkin.

## *Nazorat savollari*

1. *Davriy signalni Fure qatoriga yoying va uning tashkil etuvchilari haqida so'zlab bering.*
2. *Fure to'g'ri va teskari almashtirishi formulasini yozing va tushuncha bering.*
3. *Fure to'g'ri va teskari diskret almashtirishidan fanday signallar va qaysi hollarda foydalaniladi?*
4. *Fure diskret kosinus almashtirishi haqida tushuntirish bering.*
5. *Uolsh almashtirishi haqida tushuncha bering.*
6. *Adamar almashtirishi haqida tushuncha bering.*
7. *Veyvlet almashtirish haqida tushuncha bering.*

8. *Gilbert almashtirish haqida tushuncha bering.*