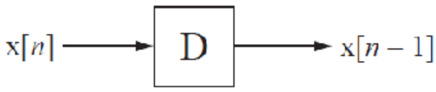
4.3. Diskret vaqt tizimlari

4.3.1. Diskret vaqt tizimlarini modellashtirish

Blok-sxema

Xuddi uzluksiz vaqt tizimlaridagidek diskret vaqt tizimlarida ham bir qancha aksar jarayonlarni blok-sxemalar sifatida ifodalash juda qulay hisoblanadi. Diskret vaqt tizimlarida bular asosan uchta tashkil etuvchilar: kuchaytirgich, summator va kechiktirish elementlari hisoblanadi. Diskret vaqt tizimlaridagi kuchaytirgich va summator qurilmalari ham huddi uzluksiz vaqt tizimlaridagidek vazifalarni bajaradi. Kechiktirish elementi diskret vaqt signaliga ta’sirlanib, xuddi shunday signal bilan javob reaksiyasi qaytaradi faqat bitta diskret vaqtga kechiktirilgan holda (4.21-rasm). Kechiktirish elementi asosan D bilan belgilanadi, ba’zi hollarda S bilan ham belgilanishi mumkin.



4.21-rasm. *Blok-sxemada kechiktirish elementining grafik tasvirlanishi*

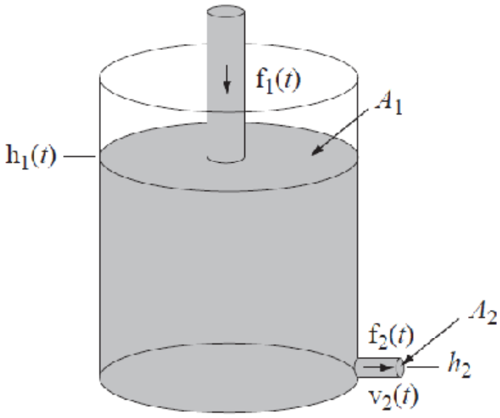
Turli tenglamalar

Diskret vaqt tizimlarini modellashtirishga tegishli bir necha namunalar quyida keltirilgan. Ushbu namunalar qo‘llanmaning dastlabki bobida keltirilgan.

Uzluksiz vaqt tizimidan foydalanib, diskret vaqt tizimini modellashtirish.

Gidravlik uzluksiz vaqt tizimi modelining xususiy bir holati diskret vaqt tizimiga misol bo’la oladi (4.22-rasm), faqat uning differensial tenglamasi (Torichelli tenglamasi) nochiziqli bo‘lib, uni yechish chiziqli differensial tenglamaga nisbatan ancha murakkabdir.

$$A_1 \frac{d}{dt}\big(h_1(t)\big) + A_2\sqrt{2g[h_1(t) - h_2]} = f_1(t). \qquad (4.5)$$



4.22-rasm. *Ustki va ostki qismidan teshik ochilgan idish*

Masalani yechishning bir yo‘li sonli usuldan foydalanish hisoblanadi. Biz hosil bo‘ladigan miqdorni taxminan quyidagi ayirmaga teng deb olishimiz mumkin.

$$\frac{d}{dt}\big(h_1(t)\big) \cong \frac{h_1\big((n+1)T_s\big) - h_1(nT_s)}{T_s}.$$

bunda, T_s – bir xil vaqt oraliqlariga bo‘lingan ikkita qo‘shni sathlar oralig‘ini suyuqlik bilan to‘ldirish uchun ketadigan vaqt, n – ushbu sathlar soni. Ushbu vaqt momentlari uchun Torichelli tenglamasini quyidagicha yozish mumkin:

$$A_1\frac{h_1\big((n+1)T_s\big) - h_1(nT_s)}{T_s} + A_2\sqrt{2g[h_1(nT_s) - h_2]} \cong f_1(nT_s). \quad (4.6)$$

Yoki uni boshqacha ko‘rinishda quyidagicha ifodalash mumkin:

$$h_1\big((n+1)T_s\big) \cong \frac{1}{A_1}\Big\{T_s f_1(nT_s) + A_1 h_1(nT_s) - A_2 T_s\sqrt{2g[h_1(nT_s) - h_2]}\Big\}. \quad (4.7)$$

(4.7) ifodani soddalashtirilgan diskret vaqt tizimi uchun quyidagi ko‘rinishda ifodalash mumkin:

$$h_1[n+1] \cong \frac{1}{A_1}\Big\{T_s f_1[n] + A_1 h_1[n] - A_2 T_s\sqrt{2g(h_1[n] - h_2)}\Big\}.$$

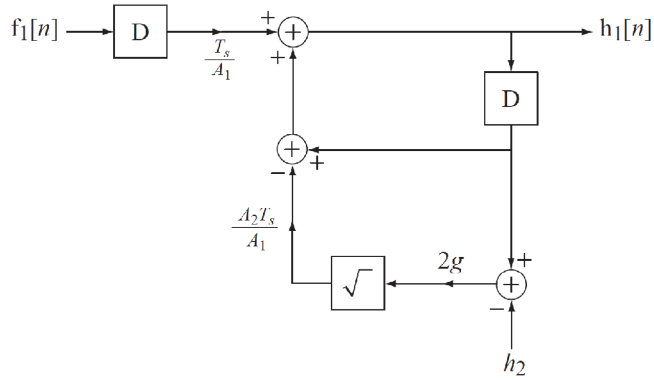
Yoki n ni $n-1$ bilan almashtirsak

$$h_1[n] \cong \frac{1}{A_1}\left\{T_s f_1[n-1] + A_1 h_1[n-1] - A_2 T_s \sqrt{2g(h_1[n-1] - h_2)}\right\}. \quad (4.8)$$

(4.8) ifodadagi h_1 ning qiymatini ixtiyoriy n uchun topib, n ning boshqa qiymatlari uchun uning qiymatini topish mumkin.

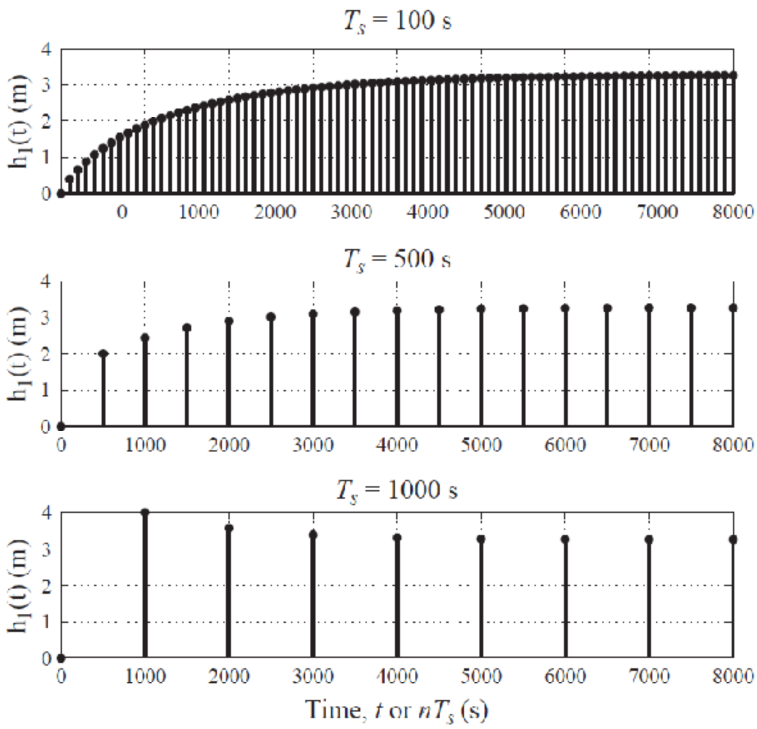
T_s ning qiymatini kichik qilib tanlash tizimning approksimasiyasi yaxshilanishiga olib keladi. Bu diskret vaqt usulidan foydalanib, uzluksiz vaqt tizimi masalasini yechishga misol bo‘ladi.

(4.8) ifoda ayirma tenglamasi bo‘lgani uchun, diskret vaqt tizimini ifodalaydi (4.23-rasm).



4.23-rasm. *Suyuqlik oqimi differensial tenglamasini raqamli shaklda hisoblovchi tizim*

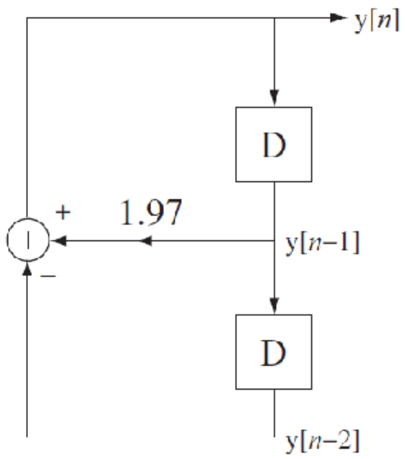
4.23-rasmda keltirilgan diskret vaqt tizimining uchta diskretizasiya oralig‘i: 100 s, 500 s va 1000 s lar uchun Torichelli tenglamasi yechimining natijalari 4.24-rasmda keltirilgan. $T_s = 100$ uchun tenglamaning yechimi aniq kuzatish mumkin. $T_s = 500$ bo‘lgan holat uchun tenglamaning yechimi umumiy holda to‘g‘ri yechimga yaqin. $T_s = 1000$ bo‘lgan holatda yechim umuman noto‘g‘ri. Juda katta diskretlash oralig‘ini tanlash yechimning noto‘g‘ri bo‘lishiga olib keladi.



4.24-rasm. *Torichelli tenglamasining sonli yechimlariga oid*

Teskari bog'lanishli tizimlarni modellashtirish

4.25-rasmda keltirilgan diskret vaqt tizimining $n \geq 0$ bo'lgan vaqt davomidagi chiqish signalini hisoblashni ko'rib chiqamiz. Bunda boshlang'ich shart sifatida quyidagini e'tiborga olish kerak: $y[0] = 1$ va $y[-1] = 0$.



4.25-rasm. *Diskret vaqt tizimi*

4.25-rasmda keltirilgan tizimni quyidagi tenglama orqali ifodalash mumkin:

$$y[n] = 1.97y[n-1] - y[n-2]. \tag{4.9}$$

Boshlang‘ich sharti $y[0] = 1$ va $y[-1] = 0$ bo‘lgan ushbu tenglama chiqish qiymatlari $y[n]$ ni to‘liq hisoblash imkonini beradi. Bu hisoblash natijalari cheksiz ko‘p bo‘lishi mumkin. Chiqish qiymatlarini hisoblashning boshqa bir usuli ham mavjud bo‘lib, bu tenglamani berk shaklda yechish hisoblanadi. Tizimning kirishiga hyech qanday ta’sir ko‘rsatilmagan holatda bu tenglama gomogen hisoblanadi. Gomogen yechimning funksional shakli murakkab eksponensial – Kz^n hisoblanadi. Ushbuni (4.9) tenglamaga tadbiq etib $Kz^n = 1.97Kz^{n-1} - Kz^{n-2}$ tenglamani hosil qilish mumkin. tenglamaning har ikki tomonini Kz^{n-2} ga bo‘lib, tenglamaning yechimi z uchun quyidagiga ega bo’lamiz:

$$z = \frac{1.97 \pm \sqrt{1.97^2 - 4}}{2} = 0.985 \pm j0.1726 = e^{\pm j0.1734} \tag{4.10}$$

Ikkita xususiy qiymat mavjudligini e’tiborga olsak, gomogen yechim quyidagi shaklda bo‘ladi:

$$y[n] = K_{h1}z_1^n + K_{h2}z_2^n. \tag{4.11}$$

Boshlang‘ich shart $y[0] = 1$ va $y[-1] = 0$ hamda (4.11) ifodadadan $y[0] = K_{h1} + K_{h2}$ va $y[-1] = K_{h1}z_1^{-1} + K_{h2}z_2^{-1}$ ekanligini e’tiborga olsak, u holda

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-j0.1734} & e^{+j0.1734} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{h1} \\ K_{h2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ushbu ikkita $K_{h1} = 0.5 - j2.853$ va $K_{h2} = 0.5 + j2.853$ qiymat uchun tenglamaning yechimi quyidagicha:

$$y[n] = (0.5 - j2.853)(0.985 + j0.1726)^n + (0.5 + j2.853)(0.985 - j0.1726)^n.$$

Bu yechim unchalik qulay shaklda bo‘lmaganligi sababli, uni quyidagi shaklda yozamiz

$$y[n] = (0.5 - j2.853)e^{j0.1734n} + (0.5 + j2.853)e^{-j0.1734n}$$

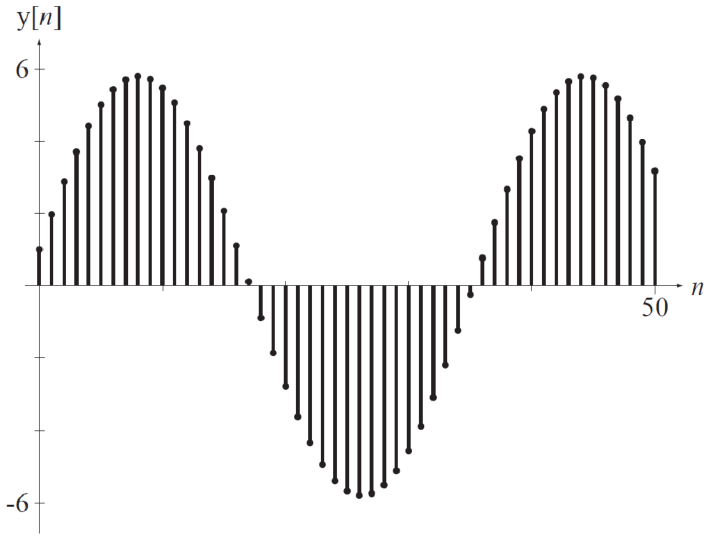
yoki

$$y[n] = 0.5\underbrace{\left(e^{j0.1734n} + e^{-j0.1734n}\right)}_{= 2\cos(0.1734n)} - j2.853\underbrace{\left(e^{j0.1734n} - e^{-j0.1734n}\right)}_{= 2j\sin(0.1734n)},$$

yoki

$$y[n] = \cos(0.1734n) + 5.706\sin(0.1734n).$$

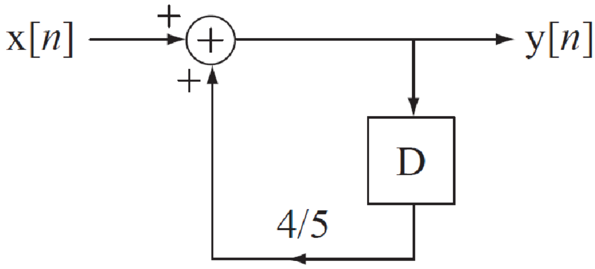
Tizim tomonidan shakllantirilgan, ya’ni chiqish signalining dastlabki 50 ta qiymati 4.26-rasmda keltirilgan.



4.26-rasm. *Diskret vaqt tizimi shakllantirgan signal*

4.3.2. Diskret vaqt tizimlarining xossalari

Diskret vaqt tizimlarining xossalari xuddi uzluksiz vaqt tizimlarining xossalari kabidir. Quyida diskret vaqt tizimi xossalaridan bir nechtasini ko‘rib chiqamiz.



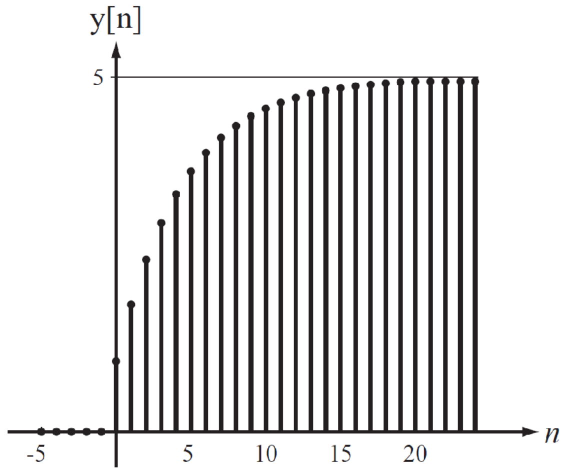
4.27-rasm. *Tizim*

4.27-rasmdagi tizimni ko‘rib chiqamiz. Ushbu tizimning kirish va chiqish signallari bir-biri bilan quyidagi ifoda orqali bog‘langan $y[n] = x[n] + 4/5y[n-1]$. Tenglamaning gomogen yechimi $y_h[n] = K_h(4/5)^n$ ga teng. Kirish signali $x[n]$ raqamli bitta sakrash signali bo‘lsin. U holda xususiy yechim $y_p[n] = 5$ va to‘liq yechim $y[n] = K_h(4/5)^n + 5$ ga teng bo‘ladi. Agar tizim $n = 0$ bo‘lgan vaqtgacha boshlang‘ich holatda bo‘lsa, to‘liq yechim (4.28-rasm)

$$y[n] = \begin{cases} 5 - 4(4/5)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

yoki

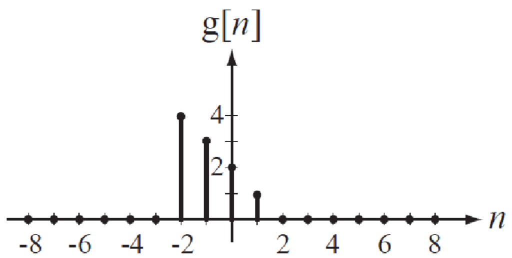
$$y[n] = [5 - 4(4/5)^n]u[n].$$



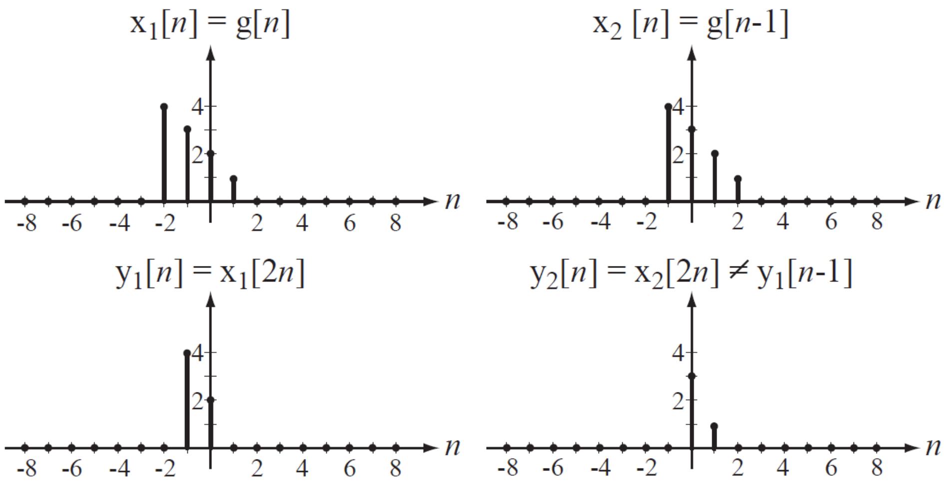
4.28-rasm. *Tizimning raqamli bitta sakrash signaliga reaksiyasi*

Agar tizimning kirish signalini qandaydir konstanta – o‘zgarmas qiymatga ko‘paytirsak uning javob reaksiyasi ham ushbu konstantaga ko‘paytirilgan holda bo‘ladi, bu esa tizimning bir jinsliligini bildiradi. Agar tizimning kirish signalini n_0 vaqtga kechiktirsak chiqish signali ham ushbu vaqtga kechikkan holda yuzaga keladi, bu esa tizimning vaqtga bog‘liq bo‘lmagan tizim ekanligidan dalolat beradi. Agar kirish signali ikkita signal yig‘indisidan iborat bo‘lsa, chiqish signali ushbu kirish signallari alohida-alohida ta’sir etgan holdagi chiqish signallarining yig‘indisidan iborat bo‘ladi. Bu esa tizimining vaqtga bog‘liq bo‘lmagan chiziqli diskret tizim ekanligini bildiradi. Shuningdek ushbu tizim cheklangan kirish signaliga cheklangan chiqish signali orqali javob qaytaradi, bundan kelib chiqadiki, tizim barqaror tizim hisoblanadi.

Vaqtga bog‘liq bo‘lmagan tizimga bir misol sifatida quyidagi ifoda orqali ifodalangan tizimni ko‘rsatish mumkin: $y[n] = x[2n]$. Agar $x_1[n] = g[n]$ va $x_2[n] = g[n-1]$, bunda $g[n]$ – 4.29-rasmda keltirilgan shakldagi signal bo‘lsa, $x_1[n]$ kirish signaliga tizimning javob reaksiyasi $y_1[n]$ va $x_2[n]$ kirish signaliga tizimning javob reaksiyasi $y_2[n]$ ga teng deb tasavvur qilamiz. Ushbu signallar 4.30-rasmda keltirilgan.



4.29-rasm. *Kirish signali*



4.30-rasm. $y[n] = x[2n]$ *orqali ifodalangan tizimning turli kirish signallariga javob reaksiyasi*

$x_2[n]$ kirish signali xuddi $x_1[n]$ kirish signali kabi faqat bitta diskret vaqtga kechiktirilgan bo‘lsa, tizim vaqtga bog‘liq bo‘lmagan tizim bo‘lishi uchun $y_2[n]$ chiqish signali ham xuddi $y_1[n]$ chiqish signali kabi faqat bitta diskret vaqtga kechiktirilgan bo‘lishi kerak. Ammo bizning misolimizda bunday emas. Demak bu tizim turli vaqt tizimlari hisoblanadi.

Signallar va tizimlar sohasida nisbatan kengroq o‘rganilgan diskret vaqt tizimlari bu kirish va chiqish ta’sirlari chiziqli, doimiy koeffisiyentli bo‘lgan sodda ayirma ifoda orqali ifodalanadigan diskret tizimlar hisoblanadi.

Diskret vaqt tizimlarida agar qaysidir xususiy qiymatlarining miqdori birga teng yoki birdan katta bo‘lsa, bunday tizim nobarqaror tizim hisoblanadi.

Nazorat savollari

1. *Tizimga tushuncha bering, tizimlarni tahlil qilish deganda nimani tushunasiz?*
2. *Tizimlarga bir necha misollar keltiring?*
3. *Bir nechta sodda tizimlarni blok-sxemalar orqali tasvirlanishiga namunalar keltiring.*
4. *Tizimlar qanday xossalarga ega?*
5. *Gomogen tizimlar deganda nimani tushunasiz?*
6. *Vaqt bo‘yicha invariant tizimga misol keltiring.*
7. *Vaqtga bog‘liq bo‘lmagan chiziqli tizimlar deb qanday tizimlarga aytiladi?*
8. *Diskret vaqt tizimlari haqida tushuncha bering.*
9. *Uzluksiz vaqt tizimidan foydalanib, diskret vaqt tizimini modellashtirishga misol keltiring.*
10. *Diskret vaqt tizimlarining xossalarini aytib bering.*