6. Z-ALMASHTIRISH

Diskret vaqt signal va tizimlariini analiz va loyihalashda qo‘llanilishi eng qulay bo‘lgan almashtirish bu z-almashtirish hisoblanadi.

6.1. Diskret vaqt tizimlari

Diskret vaqt tizimi – bu kirishiga $x(n)$ signal ketma-ketligi berilganda chiqishida $y(n)$ ketma-ketligini hosil qilish matematik algoritmi. Diskret vaqt tizimlariga quyidagilarni misol qilib keltirish mumkin: raqamli kontroller (nazoratlash qurilma)lari, spektr raqamli analizatorlari va raqamli filtrlar.

Diskret vaqt tizimi chiziqli va nochiziqli, vaqt bo‘yicha ko‘rsatkichlari o‘zgarmas (invariant) yoki o‘zgaruvchan bo‘lishi mumkin.

Diskret vaqt tizimi chiziqli deb ataladi, agar bu tizimga nisbatan aks ta’sir uning kirishiga bir vaqtda bir necha signal berilgandagi qiymati har bir kirish signallari alohida-alohida unga ta’sir etgandagi alohida-alohida aks ta’sirlar yig‘indisiga teng bo‘lsa.

Misol uchun, uning birinchi kirishiga $x_1(n)$ signal berilsa chiqishida $y_1(n)$ hosil bo‘ladi va ikkinchi kirishiga $x_2(n)$ signal berilsa chiqishida $y_2(n)$ hosil bo‘ladi. U holda tizimning har ikki ta’sir signaliga aks ta’siri, ya’ni chiqishidagi signal quyidagicha aniqlanadi

$$a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \rightarrow a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n), \tag{6.1}$$

bunda a_1 va a_2 – har qanday o‘zgarmas kattalik (konstanta).

Diskret vaqt tizimi (vaqtga bog‘liq emas) invariant yoki unga signal ta’sir etish vaqtiga bog‘liq emas deb hisoblanadi, agar uning chiqishidagi signal $y(n)$ kirishiga qaysi vaqtda signal $x(n)$ berilganiga, ya’ni $x(n-k)$ ga bog‘liq emas, bunda k – signal kechikish vaqti. Misol uchun, agar uning kirishiga $x(n)$ signal berilsa chiqishida $y_1(n)$ hosil bo‘ladi, agar $x(n-k)$ signal berilsa chiqishida $y_1(n-k)$ signal hosil bo‘ladi, ya’ni

$$x(n) \rightarrow y(n), \tag{6.2a}$$

$$x(n-k) \to y(n-k), \tag{6.2b}$$

bo‘ladi, ya’ni kirish signali qancha vaqtga kechiksa chiqish signali ham shuncha vaqtga kechikadi. Chiziqli invariant tizim (ChIT) kirish va chiqish signallari orasidagi bog‘liqlik o‘rovchi (svertka) yig‘indisi orqali beriladi

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k), \tag{6.3}$$

bunda $x(k)$ – tizim impuls xarakteristikasi. $x(k)$ ning qiymati diskret vaqt tizimini vaqt bo‘yicha o‘zgarishini to‘liq aniqlaydi. Agar ChIT impuls xarakteristikasi quyidagi talabga javob bersa, u barqaror hisoblanadi

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \tag{6.4}$$

Bu shart agar $x(k)$ cheklangan davomiylikka yoki k kattalashishi bilan $x(k)$ nolga intilganda kuchga ega.

Faqat kirishida signal bo‘lganda chiqishida aks signal hosil bo‘ladigan tizim – fizik jihatdan amalga oshirilishi mumkin bo‘lgan tizim deb ataladi. Umuman olganda, diskret vaqt ketma-ketligida mavjud $x(n)$ yoki diskret vaqt tizimi impuls xarakteristikasi fizik jihatdan amalga oshirish mumkin bo‘lgan tizimlar uchun vaqt nolinchi onigacha nolga teng bo‘ladi, ya’ni $x(n) = 0$, $n < 0$ yoki $x(k) = 0$, $k < 0$.

6.2. To‘g‘ri va teskari z-almashtirishlar

$x(n)$ ning n ning hamma qiymatlari uchun haqiqiy bo‘lgan z-almashtirishni aniqlaymiz

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \tag{6.5}$$

bunda z – kompleks o‘zgaruvchi.

Aks ta’siri mavjud tizimlarda $x(n)$ faqat $0 < n < \infty$ oralig‘ida nolga teng bo‘lmaydi va (6.5) tenglamadan bir tomonlama z-almashtirish deb ataladigan quyidagi almashtirish ifodasini olamiz

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{6.6}$$

teskari z-almashtirishi (z^{-1}) $x(n)$ diskret vaqt ketma-ketligini uning z-ko‘rinishi orqali tiklash imkoniyatini beradi. z^{-1} teskari z-almashtirishi SRIBda keng foydalaniladi, misol uchun raqamli filtrlarning impuls xarakteristikasini aniqlashda. Simvolik shaklda z-almashtirishi quyidagicha aniqlash mumkin:

$$x(n) = Z^{-1}[X(z)], \tag{6.7}$$

bunda $X(z)$ – $x(n)$ ketma-ketlikning z-ko‘rinishi, Z^{-1} esa z-teskari almashtirish amalini anglatuvchi simvol.

$x(n)$ ketma-ketlik albatta aks ta’sir hosil bo‘lishiga olib keladi deb hisoblab, (6.6) tenglamadan $X(z)$ ning z-ko‘rinishini darajali quyidagi qatorga yoyish mumkin:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \cdots \tag{6.8}$$

(6.8) qatordan ko‘rinadiki ketma-ketlik qiymatlari $x(n)$ – bu z^{-n} ($n = 0, 1, \ldots$) koeffisientlari bo‘lib, shuning uchun ularni to‘g‘ridan-to‘g‘ri aniqlash mumkin. Amaliyotda, ko‘p hollarda $X(z)$ ni z^{-1} dan yoki unga teng kuchli bo‘lgan z dan olingan ikki ko‘phadning nisbati orqali ifodalsh mumkin:

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}}. \tag{6.9}$$

$x(n)$ ning bu ko‘rinishdagi z-almashtirishini quyidagi usullardan biri yordamida aniqlash mumkin:

a) darajali qatorga yoyish usuli;

b) elementar sonlar nisbati (kasr sonlar) ko‘rinishida ifodalash usuli;

v) ayirish usuli (vichet).

6.2.1. Darajali qatorga yoyish usuli

Agar $X(z)$ aks ta’sirli ketma-ketlik (6.6) z-almashtirishi berilgan bo‘lsa, u holda uni z^{-1} yoki z ga nisbatan ustun (stolbik)ga bo‘lish sintetik bo‘lish usuli deb ataluvchi usuldan foydalanib cheksiz qatorga yoyish mumkin:

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}} =$$
$$= x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \cdots. \qquad (6.10)$$

Bu usuldan foydalanilganda $X(z)$ funksiyasining maxraji va surati dastlab z ning darajasi kamayuvchi shaklida yoki z^{-1} ning darajasi kattalashuvchi qator sifatida ifodalanadi, so‘ngra ularni bo‘lish natijasida xususiy qiymati topiladi.

6.2.2. Elementar sonlar nisbati (kasr sonlar) ko‘rinishida ifodalash usuli

Bu usuldan foydalanilganda dastlab z-almashtirish kasr sonlar nisbati shaklida yoyiladi. Har bir elementar kasrning z-teskari almashtirishi topiladi. Bu natijalarni qo‘shish natijasida umumiy z-almashtirish olinadi. Amalda ko‘p hollarda z-almashtirish z yoki z^{-1} ko‘p hadlilarning nisbati ko‘rinishda beriladi va quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_N z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}} =$$
$$= x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + x(3)z^{-3} + \cdots. \qquad (6.11)$$

Agar $X(z)$ funksiyaning qutblari birinchi tartibli bo‘lsa va $N = M$ bo‘lsa, u holda uni quyidagi qatorga yoyish mumkin:

$$X(z) = B_0 + \frac{C_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{C_2}{1 - p_2 z^{-1}} + \cdots + \frac{C_M}{1 - p_M z^{-1}} =$$
$$= B_0 + \frac{C_1 z}{z - p_1} + \frac{C_2 z}{z - p_2} + \cdots + \frac{C_M z}{z - p_M} = B_0 + \sum_{k=1}^{M} \frac{C_k z}{z - p_k}, \qquad (6.12)$$

bunda p_k – $X(z)$ funksiyaning qutblari, C_k – elementar kasrlarning koeffisientlari va

$$B_0 = \frac{b_N}{a_N}, \qquad (6.13)$$

C_k koeffisientlarini ba’zan $X(z)$ funksiyaning ayirmasi (vichet) deb ham ataladi.

Agar (6.11) tenglamada suratning darajasi maxrajning darajasidan kichik bo‘lsa, ya’ni $N < M$ bo‘lsa, u holda B_0 nolga teng bo‘ladi. Agar $N > M$ bo‘lsa, u holda $X(z)$ ni $N \le M$ ni ko‘rinishida olish uchun dastlab uni surat va maxrajning z^{-1} ni darajasi kamayib boruvchi ko‘rinishda yozilgan ifodasini ustunga bo‘lish kerak bo‘ladi. Qoldiqni (6.12) tenglamada keltirilgan ko‘rinishda ifodalash mumkin.

C_k koeffisientning p_k qutb bilan bog‘liq qiymatini (6.12) tenglamaning chap va o‘ng tomonini $(z - p_k)/z$ ga ko‘paytirish, so‘ngra $z = p_k$ almashtirishni amalga oshirib topish mumkin:

$$C_k = \frac{X(z)}{z}(z - p_k)|_{z=p_k}. \qquad (6.14)$$

Agar $X(z)$ funksiya bir yoki bir necha birinchi tartiblidan katta qutblarga ega bo‘lsa (ya’ni mos keluvchi qutblarga), u holda buni e’tiborga olish uchun (6.12) tenglamaga qo‘shimcha hadlar qo‘shish kerak bo‘ladi.

Misol uchun, agar $X(z)$ funksiya $z = p_k$ nuqtada m-tartibli qutbga ega bo‘lsa, u holda elementar kasrlarga yoyishga quyidagi ko‘rinishdagi hadlar kirishi kerak:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{D_i}{(z - p_k)^1}. \qquad (6.15)$$

D_i koeffisientlarining qiymatlarini quyidagi bog‘liqlikdan topish mumkin:

$$D_i = \frac{1}{(m-i)!} \frac{d^{m-i}}{dz^{m-i}} (z - p_k)^m \frac{X(z)}{z}\bigg|_{z=p_k}. \qquad (6.16)$$

6.2.3.Ayirish usuli

Bu usulda z^{-1} kontur integralini hisoblash orqali aniqlanadi:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{n-1} X(z) dz, \qquad (6.17)$$

bunda C – bu integrallash konturi bo‘lib, $X(z)$ ning hamma qutblarini o‘z ichiga oladi (qamrab oladi). Rational ko‘phadlar uchun (6.17) tenglamadan kontur bo‘yicha integral kompleks o‘zgaruvchilar nazariyasi asosiy natijasiga asoslanib, ayirishlar (vichet) haqidagi Koshi teoremasi yordamida aniqlanadi:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{n-1} X(z) dz =$$

$= z^{n-1} X(z)$ ning C ichidagi hamma qutblari ayirmalari yig‘indisi (6.18)

Avvalgi mulohazalarda C_k ni elementar tashkil etuvchilarga yoyish koeffisientini $X(z)$ funksiyaning ayirmalari deb ataladi deb aytib o‘tilgan va uning qiymatlarini hisoblash usullari keltirilgan edi. Shuni eslab qolish kerakki, har bir ayirma C_k qutb p_k bilan bog‘liq. Bu usulda esa $z^{n-1} X(z)$ ning p_k qutbdagi ayirmasi ($X(z)$ funksiyaning ayirmalari emas) quyidagi ko‘rinishda beriladi:

$$\mathrm{Res}[F(z),p_k] = \frac{1}{(m-i)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-p_k)F(z)]|_{z=p_k}. \qquad (6.19)$$

bunda $F(z) = z^{n-1}X(z)$, m – bu p_k nuqtadagi qutb tartibi, $\mathrm{Res}[F(z),p_k]$ – $F(z)$ ning $z = p_k$ nuqtadagi ayirmasi (vicheti). Oddiy (alohida) qutb uchun (6.19) tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\mathrm{Res}[F(z),p_k] = (z-p_k)F(z) = (z-p_k)z^{n-1}X(z)|_{z=p_k}.$$

6.2.4. z-teskari almashtirish usullarini taqqoslash

Ko‘rib chiqilgan z-teskari almashtirishlarini hisoblash usullarini taqqoslaymiz. Darajali qatorga yoyish usulining kamchiligi shundan iboratki, bu usul analitik ko‘rinishdagi yechimni bermaydi (ba’zan oddiy hollarda uni aniqlash mumkin), ammo u sodda bo‘lib kompyuter yordamida hisoblashda foydalanish mumkin. Ammo u tabiatan rekursiv xarakterga egaligi uchun z-teskari almashtirishning berilgan nuqtalari ko‘p bo‘lsa xatolik oshib borishi mumkin.

Elementar kasrlarga yoyish usuli va vichetlar usuli analitik ko‘rinishda natija olish imkonini beradi. Bu usullarning asosiy kamchiligi maxraj ko‘p hadligi ko‘paytkichini yoyish talab etilishi, ya’ni $X(z)$ funksiyaning qutblarini topish talab etilishi hisoblanadi. Agar $X(z)$ funksiya yuqori tartibli bo‘lsa va funksiya yoyilgan shaklda berilmagan bo‘lsa, u holda uning qutblarini qidirish yetarli darajada qiyin masala hisoblanadi.

6.3. z-almashtirishning xossalari

Quyida signallarga raqamli ishlov berishda keng foydalaniladigan z-almashtirishning ba’zi foydali xossalarini qisqacha keltiramiz.

1. *Chiziqlilik.* Agar $x_1(n)$ va $x_2(n)$ ketma-ketliklar $X_1(z)$ va $X_2(z)$ shaklidagi z-ko‘rinishlarga ega bo‘lsa, u holda z-ko‘rinishlarning chiziqli kombinatsiyasi quyidagicha ifodalanadi:

$$ax_1(n) + bx_2(n) \rightarrow aX_1(z) + bX_2(z). \qquad (6.20)$$

2. *Kechikish yoki siljish*. Agar $x(n)$ ketma-ketlikning z-ko'rinishi $X(z)$ bo'lsa, u holda m elementga kechikkan ketma-ketlikning z-ko'rinishi $z^{-m}X(z)$ bo'ladi. Bu xossadan diskret vaqt tizimlari uzatish funksiyasi z ni vaqt bo'yicha farqlanuvchi tenglamaga aylantirishda keng foydalaniladi

$$x(n) \rightarrow X(z),$$
$$x(n-m) \rightarrow z^{-m}X(z).$$

3. *Svertka (o'ram)*. Kirish signali $x(n)$ va impuls xarakteristikasi $x(k)$ bo'lgan diskret vaqt tizimi berilgan bo'lsa, tizim chiqishidagi signal quyidagicha aniqlanadi:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k), \qquad (6.21a)$$

z-ko'rinishlar orqali tizim kirish va chiqishi quyidagicha bog'langan:

$$Y(z) - H(z)X(z), \qquad (6.21b)$$

bunda $X(z)$, $H(z)$ va $Y(z)$ lar mos ravishda $x(n)$, $x(k)$ va $y(n)$ ketma-ketliklarning z-ko'rinishlari. Agar $X(z)$ va $H(z)$ berilgan bo'lsa, u holda $y(n)$ ni $Y(z)$ ning teskari z-almashtirishi orqali topish mumkin. Yuqoridagidan ko'rinadiki (6.21a) tenglamadan o'ram (svertka) olish jarayoni z-sohada ko'paytirish amaliga aylanib qoladi.

4. *Differensiallash*. Agar $X(z)$ orqali $x(n)$ ketma-ketlik z-ko'rinishi ifodalansa, u holda $nx(n)$ ning z-ko'rinishini $X(z)$ ni differensiallash orqali topish mumkin

$$x(n) \rightarrow X(z),$$
$$nx(n) \rightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}. \qquad (6.22)$$

Z-almashtirishning bu xossasidan $X(z)$ yuqori tartibli qutblarga ega bo'lganda, uning teskari z-almashtirishini hisoblashda foydalaniladi.

6.4. Diskret vaqt tizimlarini qutb va nollar orqali ifodalash

Amalda foydalaniladigan ko‘pgina diskret vaqt tizimlari uchun z-almashtirishli, ya’ni tizim uzatish funksiyasi $H(z)$ ni uning qutbi va noli orqali ifodalash mumkin. Misol shaklida, N-tartibli diskret vaqt oddiy filtri uchun quyidagi z-almashtirishni ko‘rib chiqamiz ($N = M$ bo‘lgan holat uchun):

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}, \tag{6.23}$$

bunda
$$N(z) = b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \ ... + b_N,$$
$$D(z) = a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + \ ... + a_N\ ,$$

$a_k$va b_k – filtr koeffisientlari.

Agar $H(z)$ funksiya $z = p_1, p_2, ..., p_N$ nuqtalarda qutblarga ega bo‘lsa va $z = z_1, z_2, ..., z_N$ nuqtalarda nolga teng bo‘lsa, u holda $H(z)$ funksiyani ko‘paytmalarga yoyish va quyidagi ko‘rinishga olib kelish mumkin:

$$H(z) = \frac{K(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_N)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_N)}, \tag{6.24}$$

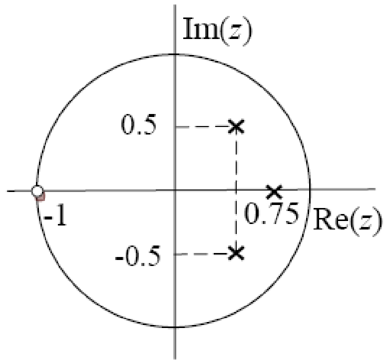
bunda z_i – i-nchi nol, p_i – i-nchi qutb va K – kuchaytirish koeffisienti. z-almashtirishning qutblari deb z ning funksiya $H(z)$ ni cheksizlikka teng bo‘lishiga olib keluvchi qiymatlariga aytiladi. z ning $H(z)$ ni nolga teng bo‘lishini ta’minlovchi qiymatlari uning nollari deb ataladi. $H(z)$ funksiyaning qutb va nollari haqiqiy yoki kompleks bo‘lishi mumkin. Agar qutb va nollar kompleks bo‘lsa, u holda ular funksiyaga kompleks moslashgan juftlik bo‘lib kiradilar, chunki a_k va b_k koeffisientlar haqiqiy bo‘lishi kerak. (6.24) tenglamadan ko‘rinadiki, agar $H(z)$ funksiyaning qutb va nollari joylashishi ma’lum bo‘lsa, u holda $H(z)$ funksiyani o‘zgarmas kattalik (konstanta)gacha aniqlik bilan qayta tiklash mumkin.

z-ko‘rinishdagi axborotni qutb va nollarning digrammasi ko‘rinishida tasvirlash qulay (6.1-rasm). Ushbu diagrammada qutblarning o‘rni (*) bilan belgilangan, nol esa (0) bilan belgilangan.

6.1-rasmdagi misolda $z = 0.5 \pm 0.5i$ va $z = 0.75$ nuqtalarida qutblar joylashgan, nol esa $z = -1$ nuqtada joylashgan.

Qutb va nollarning diagrammasi diskret vaqt tizimi xossalarini olib beradi. Misol uchun, qutb va nollarning joylashishiga qarab tizimning amplituda-chastota xarakteristikasini va uning qanday darajada barqarorligini bilib olish mumkin. Barqaror tizimlar uchun hamma qutblar, birlik o‘lcham (radius)ga ega doira ichida bo‘lishi yoki birlik o‘lchamli doira nollariga mos bo‘lishi mumkin.

Ko‘p hollarda z-almashtirishni yoyilgan ko‘rinishda ifodalash mumkin emas, uni (6.24) tenglamadagidek ko‘p hadlar nisbati sifatida ifodalash mumkin. Bu hollarda $H(z)$ ni uning nol va qutblar z-ko‘rinishida ifodalash uchun, maxraj ko‘phadligi $D(z)$ va surat ko‘phadligi $N(z)$ ning ildizlarini topish kerak bo‘ladi.



6.1-rasm. *z-almashtirishni qutb (*) va nollar (0) diagrammasi ko‘rinishida tasvirlash*

$ax^2 + bx + c$ ko‘rinishida beriladigan ikkinchi tartibli ko‘phadning ildizlari quyidagi formula orqali topiladi:

$$\frac{-b \pm (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a}. \tag{6.25}$$

$N(z)$ va $D(z)$ ko‘phadlarning nisbatan yuqori tartibli ildizlarini topish murakkab masala hisoblanadi. Amalda bu ildizlarni topishda raqamli usullardan foydalaniladi yoki Nyuton yoki/hamda Beystou (Baistow) algoritmlaridan foydalaniladi.

6.5. Barqarorlikni tadqiqot qilish

Ko‘p hollarda diskret vaqt tizimlarini yaratishda ularning barqarorligini (ustoychivost) tahlil etish kerak bo‘ladi. Tizimlar barqarorligining foydali yetarli mezonini quyidagicha ta’riflash mumkin: hamma kirish signallariga tizimning aks ta’siri ham cheklangan bo‘lishi kerak. Bu shart KChChCh (kirish cheklash, chiqish cheklash) sharti deb ataladi. Odatda KChChCh tizimi barqaror deb qaraladi faqat quyidagi barqarorlik sharti bajarilsa:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| < \infty, \tag{6.26}$$

bunda $h(k)$ – tizim impuls xarakteristikasi. Ma’lumki, agar impuls xarakteristikasi cheklangan bo‘lsa yuqorida keltirilgan shart bajariladi, chunki impuls xarakteristikalar koeffisienti chekli qiymatga ega bo‘ladi. Shunday qilib, barqarorlikni tahlil etishni faqat impuls xarakteristikalari cheksiz davomli tizimlarga nisbatan qo‘llash mumkin.

Chiqish signali sathi cheklangan bo‘lishi uchun, hamma qutblar birlik radiusli doira ichida bo‘lishi shart. Agar qutblar birlik radiusli doira tashqarisida bo‘lsa, tizim barqaror emas deb hisoblanadi. Amalda qutbi birlik doira ustida joylashgan tizimlar ham barqaror bo‘lmagan tizim deb hisoblanadi yoki potensial nobarqaror deb hisoblanadi, chunki juda kichik qo‘zg‘atuvchi kuch yoki sezilarli xatolik tizimni barqaror bo‘lmagan holatga olib keladi. Bundan birlik doiradagi qutb nolga mos kelgan holatda uning ta’siri bir-birini qoplaydi (kompensatsiya qiladi). Barqaror bo‘lmagan tizim impuls xarakteristikasi vaqtga bog‘liq shaklda cheksiz kattalashib boradi.

Tizimning barqarorligini nazorat qilish juda oson: z-almashtirish qutblari joylarini aniqlash kerak, agar qandaydir qutb birlik doira ustiga to‘g‘ri kelsa yoki undan tashqarida bo‘lsa tizim barqaror emas deb hisoblanadi (faqat qutb holati birlik doira ustidagi nolga mos kelmasa). Amalda qutblar holatini aniqlash oson masala bo‘lmasligi mumkin.

Agar $H(z)$ tizimi z-ko‘rinishini ko‘phadlarga yoyish mumkin bo‘lmasa, oddiy tekshirish usuli bu yetarli sondagi impuls xarakteristikalarini topish va teskari z-almashtirishni hisoblab chiqib grafigini chizishdan iborat. Agar tizim impuls xarakteristikasi vaqt o'tishi bilan cheksiz kattalashib borsa yoki tezda nolgaintilsa, u holda tizim barqaror emas yoki juda kam darajada barqaror bo'ladi.

6.6. Farqlanish tenglamasi

Farqlanish tenglamasi diskret vaqt tizimining kirish ma'lumotlari ustidan kerakli chiqish signali uchun real bajaradigan amalini ta'riflaydi. Ko'pgina amaliyotda muhim holatlar farqlanish tenglamasini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k x(n-k) - \sum_{k=0}^{M} b_k y(n-k), \qquad (6.27)$$

bunda $x(n)$ – kirish signali ketma-ketligi elementi, $y(n)$ – chiqish signali ketma-ketligi elementi, $y(n-k)$ – bitta avvalgi chiqish signali, a_k va b_k – tizim koeffisientlari. (6.27) tenglamadan ko'rinadiki, joriy $y(n)$ joriy qiymati ketma-ketligining shu ondagi va bitta avvalgi elementlari va bitta avvalgi chiqish signaliga $y(n-k)$ lar orqali olinadi (aniqlanadi). Z-almashtirishning kechikish xossasidan foydalanib, vaqt diskret tizimi uzatish funksiyasi uchun quyidagi farqlanish tenglamasini olish mumkin va aksincha:

$$a_k x(n) \leftrightarrow a_k X(z),$$
$$a_k x(n-k) \leftrightarrow a_k z^{-k} X(z).$$

Shunday qilib (6.27) tenglamani quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} X(z) - \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} Y(z). \qquad (6.28)$$

(6.28) ifodani soddalashtirib z-qiymatlari majmuasi uchun diskret tizim uzatish funksiyasi $H(z)$ ning ifodasini olamiz

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}. \tag{6.29}$$

Agar maxraj b_k ning hamma qiymatlari nolga teng bo‘lsa, u holda (6.27) va (6.28) tenglamalar quyidagi ko‘rinishlarni oladilar:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} a_k x(n-k),$$
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}. \tag{6.30}$$

Endi chiqish signali $y(n)$ kirish ketma-ketligining faqat shu ondagi va avvalgi elementlariga bog‘liq bo‘ladi va (6.27) tenglamada ifodalangan chiqish signali avvalgi qiymatiga bog‘liq bo‘lmaydi. Ushbu holatda a_k koeffisient tizim impuls xarakteristikasi bo‘lib, odatda $h(k)$ simvoli orqali belgilanadi. Bu tur tizimlarni cheklangan impuls xarakteristikali tizimlar deb ataladi, chunki $h(k)$ ketma-ketlik davomiyligi albatta cheklangan bo‘ladi. (6.27) va (6.29) tenglamalar orqali ifodalanadigan tizimlar uchun uning maxrajlaridan kamida bittasi nolga teng bo‘lmaydi, bunday tizimlar cheksiz impuls xarakteristikali tizimlar deb ataladi. Impuls xarakteristikasi cheksiz tizimlarda qutblardan kamida bittasi nolga teng bo‘lmaydi, impuls xarakteristikasi cheklangan tizimlarning esa odatda qutblari bo‘lmaydi.

6.7. Impuls xarakteristikasini baholash

Diskret vaqt tizimlarini loyihalashda ko‘p hollarda ularning impuls xarakteristikalarini hisoblashga ehtiyoj tug‘iladi. Misol uchun tizimni loyihalashda uni amalga oshirish uchun cheklangan impuls xarakteristikasini bilish kerak bo‘ladi va cheksiz impuls xarakteristikali tizimni loyihalashda esa uning barqarorligini tahlil etish uchun kerak. Shuningdek tizim chastota xarakteristikasini baholashda ham impuls xarakteristikasidan foydalanish mumkin.

Diskret vaqt tizimi impuls xarakteristikasini uning impuls xarakteristikasi $H(z)$ ga teskari z-almashtirishni amalga oshirish natijasida aniqlash mumkin:

$$h(k) = Z^{-1}[H(z)], \quad k = 0,1,\dots$$

Agar $H(z)$ ning z-almashtirishini darajali qatorga yoyilsa, ya'ni

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \cdots \qquad (6.31)$$

bo'lsa,u holda z-almashtirish koeffisientlari to'g'ridan-to'g'ri $H(z)$ impuls xarakteristikasiga teng bo'ladi.

Impuls xarakteristikani diskret vaqt tizimining $u(n)$ birlik sakrashning $n = 0$ bo'lganda birga teng bo'lishi va n ning boshqa hamma qiymatlari uchun nolga teng bo'lgan tizim aks ta'siri deb qaralishi mumkin. Bunday qarash agar tizim kirish signali $x(n)$ ni birlik sakrash impulsi $u(n)$ ga teng, ya'ni $x(n) = u(n)$ bo'lganda tizim chiqish signali tizim xarakteristikasi $h(n)$ ga teng bo'lishini anglatishi bilan o'zini oqlaydi

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)u(n-k) =$$
$$= h(0)n(n) + h(1)u(n-1) + h(2)u(n-2) + \cdots = h(n),$$
$$n = 0,1,\dots \qquad (6.32)$$

Bu $h(n)$ hisoblashning yana bir teng kuchli usulini beradi (amalda esa, z-almashtirishning yana bir usulini olamiz).

Nazorat savollari

1. Vaqt diskret tizimi deganda nimani tushunasiz?

2. Chiziqli va nochiziqli vaqt bo'yicha invariant tizimlar bir-biridan qanday farqlanadi?

3. To‘g‘ri va teskari z-almashtirish haqida umumiy tushuntirish bering.

4. Z-almashtirishda darajali qatorga yoyish usuli haqida tushuncha bering.

5. Z-almashtirishda elementar kasr sonlar qatoriga yoyish usuli haqida tushuncha bering.

6. Z-almashtirishda cheklash (ayirish) usulidan foydalanish haqida tushuncha bering.

7. Z-almashtirishning asosiy xossalarini ayting.

8. Diskret vaqt tizimlarini qutb va nollar orqali ta’riflash deganda nimani tushunasiz?

9. Farqlanish tenglamalaridan diskret tizimlarda nima maqsadda foydalaniladi?

10. Farqlanish tenglamasini yozing va undagi ifodalarga ta’rif bering.

11. Impuls xarakteristikasi nimani anglatadi?