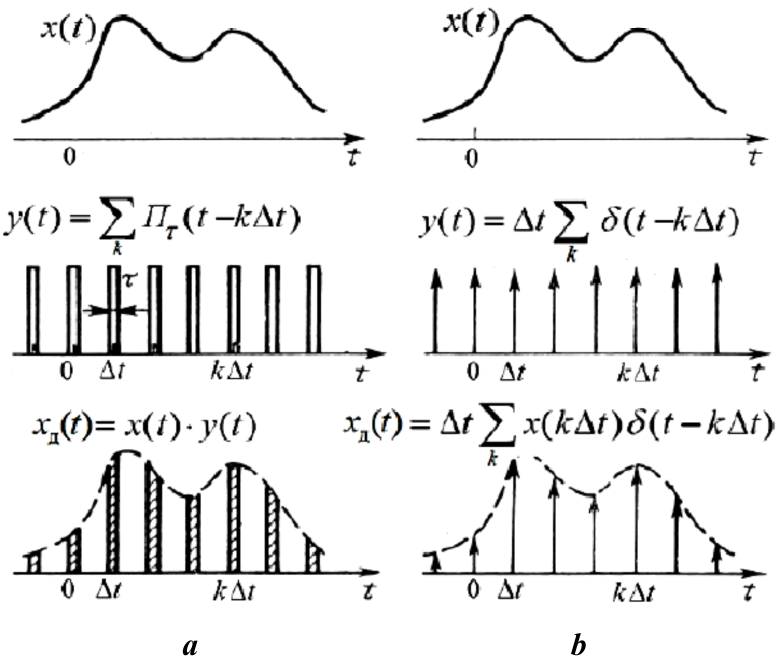
3. SIGNALLARNI DISKRET VAQT FUNKSIYASI SIFATIDA IFODALASH

3.1. Asosiy tushunchalar

Signallarning asosiy turlariga quyidagilar kiradi: analog, diskret va raqamli.

Analog signallar uzluksiz va bo‘laklari uzluksiz $x(t)$ funksiya bilan ifodalanadi, bunda funksiyaning o‘zi va argumenti har qanday qiymatlarni qabul qilishi mumkin, ya’ni $t_1 \le t \le t_2$, $x_1 \le x \le x_2$ (3.1*a*-rasm).



3.1-rasm. *Uzluksiz signalni diskretlash*

Diskret signal $x_d(t)$ uzluksiz signal $x(t)$ ni diskretizatsiyalash funksiyasi $y(t)$ ga ko‘paytirish natijasida hosil qilinadi. Bunda $y(t)$ diskretlash funksiyasi Δt odim bilan davriy takrorlanuvchi kichik davomiyli impulslar ketma-ketligi (3.1*a*-rasm)dan foydalaniladi. Ideal holatda diskretlash funksiyasi sifatida delta-funksiyalar davriy ketma-ketligidan foydalaniladi (3.1*b*-rasm).

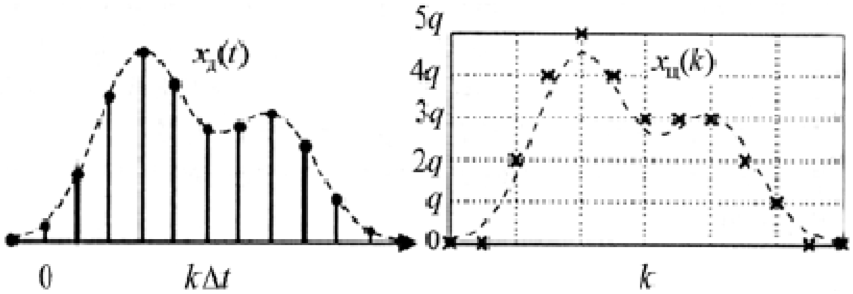
$T = k\Delta t$ oraliq diskretlash davri deb ataladi, unga teskari bo‘lgan kattalik diskretlash chastotasi deb ataladi,

$$f_n = 1/T\,.$$

Diskret signalning nT vaqtdagi qiymatlari uning oniy qiymatlari deb ataladi. Diskret signal haqiqiy yoki kompleks bo‘lishi mumkin. Kompleks signalning haqiqiy va mavhum qismi haqiqiy ketma-ketliklar orqali ifodalanadi

$$x(nT) = x_1(nT) + jx_2(nT).$$

Raqamli signal $x_{\text{r}}(t)$ kvantlangan panjarasimon funksiya (3.2-rasm), ya’ni qator diskret sathlarni kvantlash sathi mq qiymatlarga nT vaqtlarda ega bo‘luvchi panjarasimon funksiyadir. Bunda q – sath bo‘yicha kvantlash odimi, m – kvantlash oralig‘i tartib raqami, $m = 0, 1, 2, ..., M-1$, $M = 2^n$ bo‘lib, n – butun musbat son.



3.2-rasm. *Raqamli signal*

Raqamli signal cheklangan razryadli sonlar ketma-ketligi orqali ifodalanadi. Ba’zan diskret va raqamli signallarni ifodalashda normallashtirilgan vaqt i tushunchasidan ham foydalaniladi, ya’ni

$$i = \frac{t}{T},$$

deb qabul qilinadi va u $t = nT$ bo‘lsa, olingan oniy qiymat tartib raqami n ni anglatadi, n -chi diskret vaqt $n = \frac{t}{T} = i$. Normallashtirilgan vaqt tushunchasi diskret signal $x_{\text{d}}(t)$ ni o‘zgaruvchan butun son funksiyasi $x(n)$ shaklida ifodalash imkoniyatini beradi. Bunda diskret signalni ifodalash uchun bir-biriga aynan teng quyidagi ifodalardan foydalanish mumkin:

$$x(n) \text{ va } x(nT);\ x(nT) \equiv x[n].$$

3.2. Diskret signallarning matematik modellari

Diskret signalni quyidagi matematik ifodalar orqali aniqlash mumkin:

– diskret vaqt funksiyasi nT_d: $x(nT_d) = x(t)|t = nT_d$, bunda $n = 0, 1, 2, ...$, lar analog signalning diskret davriy takrorlanuvchi vaqtdagi oniy (tanlangan) qiymatlariga mos keluvchi normallashtirilgan vaqt;

– olingan qiymat tartib raqami n -funksiyasi: $x(n) = x(nT_d)|T_d = 1$, umuman olganda vaqt bilan to‘g‘ridan-to‘g‘ri bog‘lanmagan;

– uzluksiz vaqt funksiyasi:

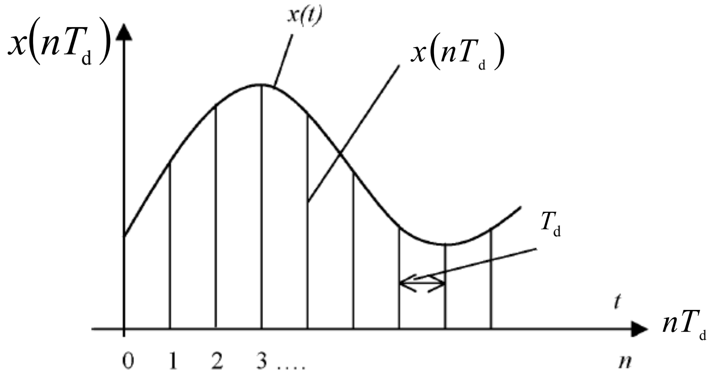
–

$$x(t) = x(t) f_\delta(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT_d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d)\delta(t - nT_d) \qquad (3.1)$$

analog signal $x(t)$ ni diskretlash funksiyasi $f_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT_d)$ ga ko‘paytirish natijasida quyidagi cheksiz qisqa davomiyli impulslar davriy ketma-ketligi uchun ifodani olamiz:

$$\delta(t - nT_d) = \begin{cases} \infty, & t = nT_d, \\ 0, & t \neq nT_d. \end{cases}$$

Diskret signallar tanlash tartib raqami n yoki diskret vaqt nT_d funksiyasi ko‘rinishida tasvirlanishi mumkin (3.3-rasm).



3.3-rasm. *Uzluksiz $x(t)$ va diskret $x(nT_d)$ signal grafiklari*

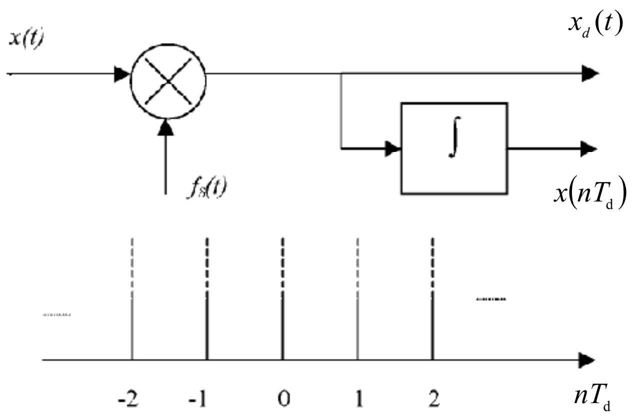
3.3-rasmda keltirilgan vaqt uzluksiz funksiyasini diskret signal $x(nT_{\text{d}})$ ga mos keluvchi analog $x(t)$ signalga yoki $x(n)$ o‘rovchisiga tenglashtirish mumkin.

$x_{\text{d}}(t)$ va $x(nT_{\text{d}})$ signallari bir-biri bilan chiziqli bog‘liklikda

$$x(nT_{\text{d}}) = \int_{(n-0.5)T_d}^{(n+0.5)T_d} x_d(t)dt$$

va bir xil xossalarga ega, ammo o‘lchov birliklari turlicha.

Tanlangan oniy qiymatlarni tartib raqami n orqali ifodalangan signallarni raqamlar ketma-ketligi deb ham ataladi. Uzluksiz vaqt funksiyasi (3.1) ni diskret signal ko‘rinishida aniqlash balans modulyatsiya signaliga yoki davriy takrorlanuvchi $f_{\delta}(t)$ δ impulslar $x(t)$ diskretlangan signallar oniy qiymatlariga proporsional yuzaga ega bo‘lgan impulslar ketma-ketligi yoki uning $x(nT_{\text{d}})$ vaqtlaridagi impulslar oniy qiymatlariga ko‘paytmasiga teng deb hisoblash mumkin (3.4-rasm). Bu ta’rif analog signal va tizimlarni ta’riflovchi usullar (metod) yordamida matematik ifodalarni olish hamda ularni diskret signal va tizimlarga xos xususiyatlar (ko‘rsatkichlar) bilan solishtirish imkonini beradi.



3.4-rasm. *Signalni vaqt bo‘yicha diskretlash ekvivalent sxemasi*

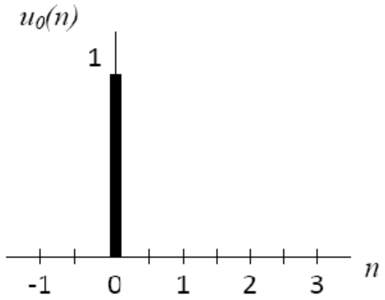
3.3. Sinov diskret signallari

Signallarga raqamli ishlov berish (SRIB)da bir qator signal turlaridan ta’sir etuvchi sinov signallari sifatida foydalaniladi. Eng ko‘p foydalaniladigan sinov signallariga quyidagi signallar kiradi:

1. *Raqamli birlik impuls*, quyidagi ketma-ketlik bilan ifodalanadi:

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

ya'ni, bu signal $n = 0$ bo'lganda birga teng va n ning boshqa hamma qiymatlarida nolga teng bo'ladi (3.5-rasm).

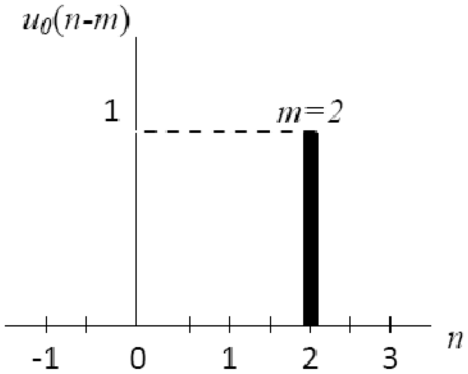


3.5-rasm. *Raqamli birlik impuls*

Kechiktirilgan (ushlanib qolgan) raqamli birlik impuls quyidagi ketma-ketlik orqali ifodalanadi:

$$u_0(n-m) = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m \end{cases} \tag{3.3}$$

ya'ni, bu signal kechiktirilmagan signaldan farqliroq, $n = m$ bo'lganda birga teng va n ning boshqa hamma qiymatlarida nolga teng bo'ladi (3.6-rasm).



3.6-rasm. *Kechiktirilgan raqamli birlik impuls*

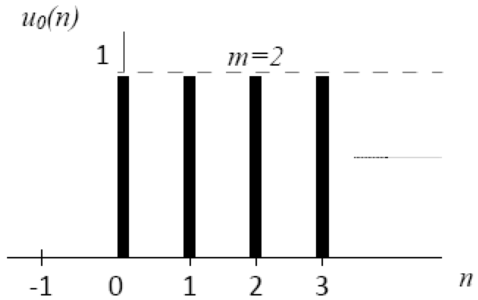
Kechiktirilgan raqamli birlik impuls ta'rifidan quyidagi tenglik kelib chiqadi

$$x(n) = \sum_{m-0}^{\infty} x(m) u_0 (n - m). \tag{3.4}$$

2. *Raqamli bitta sakrash* quyidagi ketma-ketlik bilan ifodalanadi

$$u(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0; \\ 0, n < 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

ya'ni, bu signal n ning hamma manfiy bo'lmagan qiymatlarida birga teng (3.7-rasm).

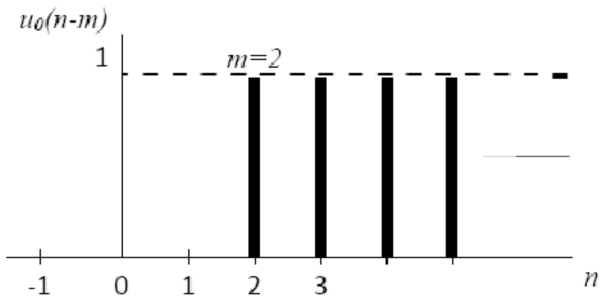


3.7-rasm. *Raqamli bitta sakrash*

Kechiktirilgan raqamli birlik sakrash quyidagi ketma-ketlik orqali ifodalanadi

$$u_1 = (n - m) \begin{cases} 1, \ n \geq m; \\ 0, \ n < m. \end{cases} \tag{3.6}$$

ya'ni, bu signal kechiktirilmagan signaldan farqliroq, $n \geq m$ ning hamma qiymatlarida birga teng va n ning boshqa hamma qiymatlarida nolga teng bo'ladi (3.8-rasm).



3.8-rasm. *Kechiktirilgan raqamli bitta sakrash*

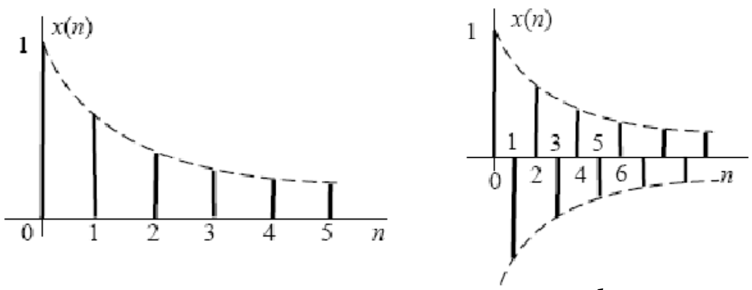
3. *Diskret eksponenta* quyidagi ketma-ketlik orqali ifodalanadi

$$x(n) = \begin{cases} a^n, n > 0. \\ 0, n < 0. \end{cases} \qquad (3.7)$$

bunda, a – haqiqiy o‘zgarmas kattalik (konstanta).

a ning qiymati va belgisi (+ yoki -) ga bog‘liq ravishda diskret eksponenta quyidagicha nomlanadi:

- $|a|<1$ va $a>0$ – kichiklashuvchi belgisi o‘zgarmas (3.9*a*-rasm) $|a|=1$, $a<0$;
- $|a|<1$ va $a<0$ – kichiklashuvchi o‘zgaruvchan belgili (3.9*b*-rasm);
- $|a|>1$ – kattalashuvchi (o‘suvchi);
- $|a|=1$ va $a>0$ – raqamli birlik sakrash (3.7-rasm);
- $|a|=1$ va $a<0$ – belgisi o‘zgaruvchan birliklar ketma-ketligi.



3.9-rasm. *Belgisi o‘zgarmas (a) va belgisi navbat bilan o‘zgaruvchi (b) diskret eksponentalar*

4. *Diskret garmonik signal*, misol uchun diskret kosinusoida quyidagi ketma-ketlik orqali ifodalanadi

$$x(nT) = x(n) = A\cos(2\pi f nT_d) = A\cos(\omega nT_d) \qquad (3.8)$$

bunda T_d – diskretlash davri; A – amplituda; ω – aylanma chastota bo‘lib, siklik (davriy) chastota f bilan proporsonallik koeffisienti 2π orqali bog‘langan ($\omega = 2\pi f$).

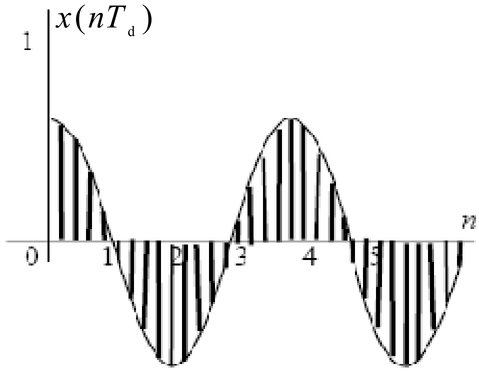
Diskret kosinusoida analog kosinusoidadan uzluksiz vaqtli diskret vaqt nT_d bilan almashtirish orqali olinadi, ya’ni

$$x(t) = A\cos(2\pi f t) = A\cos(\omega t)$$

bo‘lsa va uzluksiz vaqt t ni nT_{d} bilan almashtirish natijasida quyidagini olamiz (3.10-rasm)

$$x(nT) = x(n) = A\cos(\omega t)\Big|_{t=nT_{\text{d}}} = A\cos(\omega n T_{\text{d}}) \quad (3.9)$$

Diskret sinusoida ham shunga o‘xshash shaklda ifodalanadi.



3.10-rasm. *Diskret kosinusoida*

5. *Diskret kompleks garmonik signal*, kompleks ketma-ketlik bilan ifodalanadi

$$x(n) = Ae^{j\omega n T_{\text{d}}} \quad (3.10)$$

yoki ikki haqiqiy ketma-ketlik: kosinusoida (haqiqiy qismi) va sinusoida (mavhum qismi) orqali ifodalanishi mumkin

$$x(nT) = A\cos(\omega n T_{\text{d}}) + jA\sin(\omega n T_{\text{d}}).$$

3.4. Kotelnikov teoremasi

Zamonaviy axborot uzatish tizimlarida, shu jumladan radiotexnik axborot uzatish tizimlarida uzluksiz signallarni diskretizatsiyalash va kvantlash orqali raqamli shaklda uzatish, ularga raqamli ishlov berish usullaridan keng foydalanilmoqda. Uzluksiz signallarni $k\Delta t$ vaqt oraliqlarida olingan oniy qiymatlari yordamida uzatish, vaqt bo‘yicha zichlash usulidan foydalanib bir aloqa kanali orqali bir qancha axborot manbalaridan olingan signallarni uzatish, aloqa kanallarining xabar o‘tkazish imkoniyatidan samarali foydalanish imkoniyatini yaratadi.

Diskretizatsiyalash natijasida $u(t)$ uzluksiz signal $k\Delta t$ vaqtlar orasida ketma-ket olingan oniy qiymatlar (impulslar) orqali ifodalanadi, ya’ni signal $u(k\Delta t)$ oniy qiymatlar ketma-ketligi shakliga keltiriladi.

Uzluksiz signalni qanchalik aniq qayta tiklash diskretlash oralig‘i Δt qiymatiga bog‘liq, Δt qancha kichik bo‘lsa signalni qayta tiklash aniqligi shuncha yuqori bo‘ladi. Ammo Δt ni talab etiladiganidan kichiklashtirib yuborish aloqa kanalidan foydalanish samaradorligining pasayishiga olib keladi va ushbu diskret signallarga ishlov berish jarayonini murakkablashtiradi.

Spektri kengligi cheklangan uzluksiz signalni diskret vaqt $k\Delta t$ larda olingan qiymatlari asosida talab darajasidagi aniqlik bilan qayta tiklash uchun talab etiladigan diskretlash oralig‘i Δt ning optimal (eng ma’qul) qiymati V.A. Kotelnikov teoremasi asosida aniqlanadi.

Kotelnikov teoremasiga asosan spektri yuqori chastotasi F_m bilan cheklangan uzluksiz signalni uning $\Delta t \leq \frac{1}{2}F_m$, sek, bir xil vaqt oraliqlarida olingan oniy qiymatlari orqali to‘liq qayta tiklash mumkin. Teoremani asosliligi spektri eng yuqori chastotasi $\Omega_{max} = 2\pi F_{max}$ bo‘lgan $u(t)$ ni quyidagi qator, vaqt funksiyalari orqali ifodalash orqali tasdiqlanadi, ya’ni

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k\Delta t) \frac{\sin\Omega_{max}(t - k\Delta t)}{\Omega_{max}(t - k\Delta t)}, \tag{3.11}$$

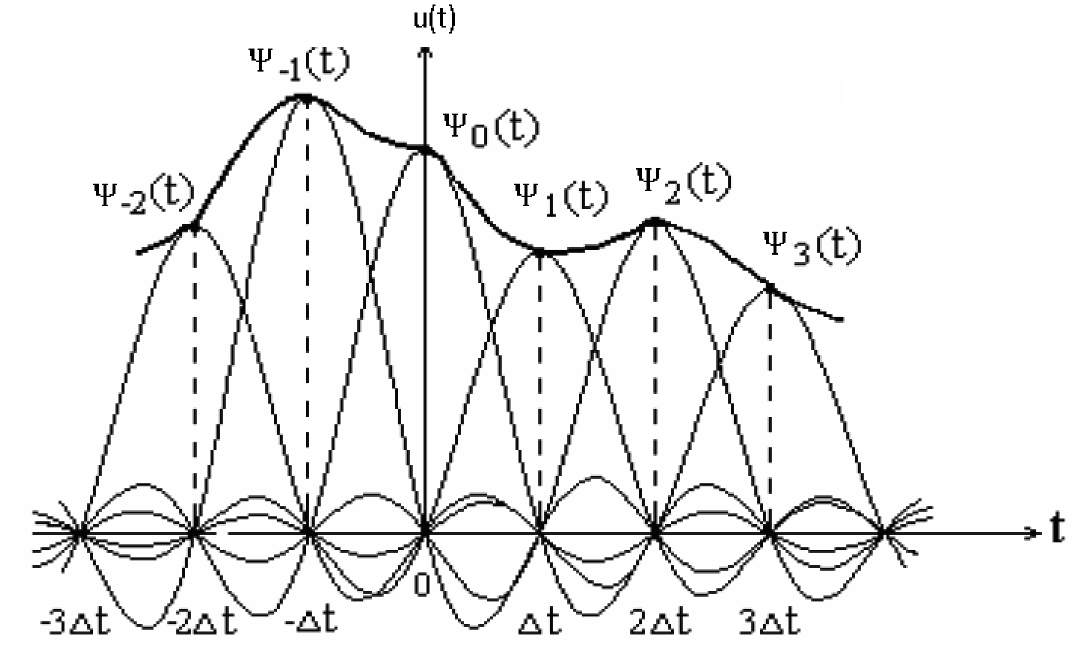
bunda, $\Delta t = \frac{1}{2}F_m$ – ikki qo‘shni oniy qiymatlarni aniqlash orasidagi vaqt, ko‘p hollarda agar alohida ta’kidlanmagan bo‘lsa, bu vaqt oraliqlari bir xil qiymatga ega bo‘ladi, $u(k\Delta t)$ – signal $u(t)$ ning $k\Delta t$ vaqtlarga mos keluvchi oniy qiymatlari.

(3.11) formuladagi

$$\Psi_k(t) = \frac{\sin\Omega_{max}(t - k\Delta t)}{\Omega_{max}(t - k\Delta t)} \tag{3.12}$$

funksiyalar Kotelnikov qatorining asosini tashkil etuvchi bazis funksiyalar hisoblanadi.

$u(t)$ signalni Kotelnikov qatori shaklida ifodalash 3.11-rasmda keltirilgan.



3.11-rasm. *Signalni Kotelnikov qatori shaklida ifodalash*

3.5. Kotelnikov teoremasining tasdig'i

a. $sinx/x$ ko'rinishidagi bazis funksiyasining asosiy xossalari

$\Psi_k(t) = \frac{\sin\Omega_{max}(t-k\Delta t)}{\Omega_{max}(t-k\Delta t)}$ – funksiya $\sin x/x$ ko'rinishidagi funksiya bilan bir-biridan vaqt bo'yicha ga siljiganligi bilan farqlanadi. $\Psi_k(t)$ funksiya $t = k\Delta t$ vaqtlarida o'zining eng katta maksimal qiymatiga teng bo'ladi. Bir-biridan Δt farq qiluvchi $t = 0$ va $t = \Delta t$ vaqtlarga mos keluvchi diskret signal oniy qiymatlari

$$\Psi_0(t) = \frac{\sin\Omega_{max}t}{\Omega_{max}t} \quad \text{va} \quad \Psi_1(t) = \frac{\sin\Omega_{max}(t-\Delta t)}{\Omega_{max}(t-\Delta t)}$$

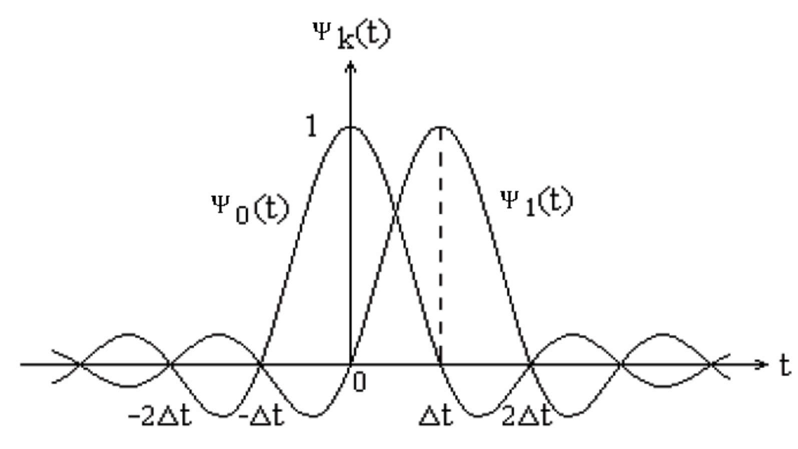
larga teng bo'ladi.

Ushbu $t = 0$ va $t = \Delta t$ vaqtlarga mos keluvchi vaqt funksiyalari $\Psi_0(t)$ va $\Psi_1(t)$ grafiklari 3.12-rasmda keltirilgan. Ushbu $\sin x/x$ ko'rinishidagi funksiyalarning $\tau = t - k\Delta t$ vaqtlardagi qiymatlari nolga teng.

$\Psi_k(t)$ – funksiya ko'rinishidagi signal spektrini aniqlaymiz.

$s(t) = \mathrm{A}\frac{\sin\Omega_m t}{\Omega_m t}$ ko‘rinishidagi signal amplituda spektri avval aniqlaganimizdek $2\Omega_m$ chastotalari bilan chegaralangan to‘g‘ri to‘rtburchak shaklida bo‘ladi. Ushbu signal amplituda spektri quyidagicha ifodalanadi:

$$S(j\omega) = \begin{cases} \dfrac{A}{2\Omega_m}, & agar\ |\Omega| \le \Omega_m, \\ 0, & agar\ |\Omega| > \Omega_m. \end{cases}$$



3.12-rasm. $\Psi_0(t)$ *va* $\Psi_1(t)$ *funksiyalar grafiklari*

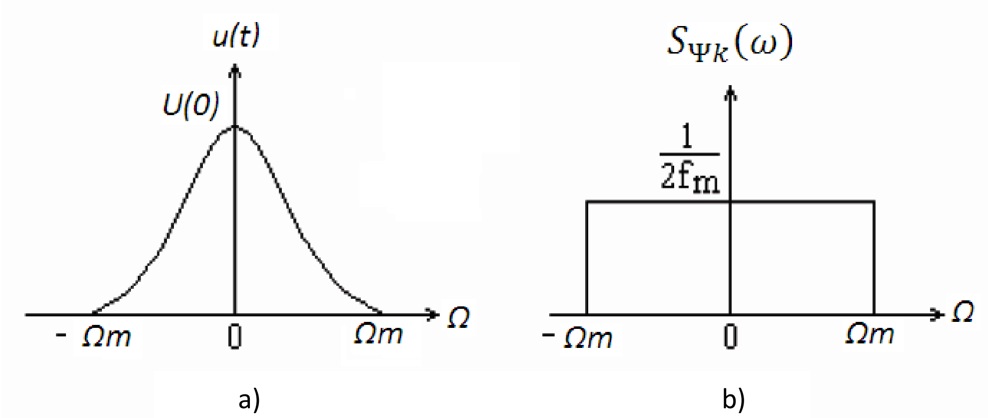
$\Psi_k(t)$ bazis funksiya signali va $s(t)$ signallar, ya’ni $\Psi_k(t) = \frac{\sin\Omega_m(t-k\Delta t)}{\Omega_m(t-k\Delta t)}$ va $s(t) = \mathrm{A}\frac{\sin\Omega_m t}{\Omega_m t}$ lar bir-biridan amplitudalari va vaqt bo‘yicha $k\Delta t$ ga siljitilganligi bilan farq qiladi. Demak, $\Psi_k(t)$ signal spektri kompleks qiymatga ega bo‘lib, bunda uning amplituda spektri shakli o‘zgarmas saqlanadi, lekin $\varphi(\omega) = -k\Omega\Delta t$ faza spektriga ega bo‘ladi. $\Psi_k(t)$ bazis funksiya signali spektri zichligi umumiy ifodasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$S_{\Psi k}(j\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\Omega_m} e^{-j\omega k\Delta t}, & agar\ |\Omega| \le \Omega_m, \\ 0, & agar\ |\Omega| > \Omega_m. \end{cases}$$

$\Delta t = \frac{1}{2F_m}$ ni e’tiborga olsak,

$$S_{\Psi k}(j\omega) = \begin{cases} \Delta t e^{-j\omega k\Delta t}, & agar\ |\Omega| \le \Omega_m, \\ 0, & agar\ |\Omega| > \Omega_m. \end{cases}$$

3.13-rasmda diskretlanadigan signal $u(t)$ va $\Psi_k(t) = \frac{\sin\Omega_m(t-k\Delta t)}{\Omega_m(t-k\Delta t)}$ ko'rinishidagi signal spektri grafigi keltirilgan.



3.13-rasm. *Diskretlanadigan signal (a) va $\Psi_k(t)$ ko'rinishidagi signal spektri*

b. Kotelnikov teoremasining isboti

(3.11) Kotelnikov qatori uzluksiz signal $u(t)$ ning har qanday oniy vaqtdagi qiymatini aniqlash imkoniyatini berishini isbotlaymiz. Buning uchun berilgan funksiyani ortogonal tashkil etuvchilarga yoyish usulidan foydalanamiz:

1. Ortogonal tashkil etuvchilarga yoyish uchun berilgan funksiya – uzluksiz signal $u(t)$;
2. Bazis funksiya shaklida $\sin x/x$ funksiyani, ya'ni $\Psi_k(t) = \frac{\sin\Omega_m(t-k\Delta t)}{\Omega_m(t-k\Delta t)}$ ni tanlaymiz;
3. Ushbu tahlil etiladigan signal uchun Fure umumlashgan qatori quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k \Psi_k(t), \qquad \dot{C}_k = \frac{1}{\|\Psi_k(t)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\Psi_k(t)dt.$$

Kotelnikov qatorini aniqlash uchun: $\Psi_k(t)$ funksiyalarning o'zaro ortogonalligini isbotlash, so'ngra $\|\Psi_k(t)\|^2$ – $\Psi_k(t)$ funksiyaning normasi kvadratini aniqlash va $\dot{C}_k$ koeffisientlarni hisoblash talab etiladi.

$\boldsymbol{\Psi_k(t)}$ *funksiyalarning o'zaro ortogonalligini isbotlash*

$\Psi_k(t)$ funksiyalar majmuasi o'zaro ortogonal bo'ladi, agar quyidagi shart bajarilsa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_k(t)\Psi_n(t)dt = \begin{cases} \|\Psi_k(t)\|^2, & agar\, k = n, \\ 0, & agar\, k \neq n. \end{cases}$$

bunda, $\|\Psi_k(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_k(t)dt}$ – $\Psi_k(t)$ funksiya normasi.

$k \neq n$ bo'lgan holat uchun $\Psi_k(t)\Psi_n(t)$ ko'paytmasi integrali qiymatini aniqlaymiz.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_k(t)\Psi_n(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\Omega_m(t - k\Delta t)}{\Omega_m(t - k\Delta t)} \cdot \frac{\sin\Omega_m(t - n\Delta t)}{\Omega_m(t - n\Delta t)} dt. \quad (3.13)$$

Fure to'g'ri va teskari almashtirishlari asosida

$$s_1(t) \leftrightarrow S_1(j\omega) \text{ va } s_2(t) \leftrightarrow S_2(j\omega) \text{ bo'lsa, u holda}$$
$$s_1(t)s_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} S_1(j\omega) \otimes S_2(j\omega).$$

Shundan kelib chiqib,

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t)\, e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(j\Omega) S_2[j(\omega - \Omega)] d\Omega.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(j\omega) S_2^*(j\omega) d\omega.$$

Ushbu munosabatni (3.13) ifodaga qo'llaymiz va quyidagilarni e'tiborga olgan holda

$$\frac{\sin\Omega_m(t - k\Delta t)}{\Omega_m(t - k\Delta t)} \leftrightarrow \frac{1}{2f_m} e^{-j\Omega k\Delta t} \quad agar - \Omega_m \leq \Omega \leq \Omega_m;$$

$$\frac{\sin\Omega_m(t-n\Delta t)}{\Omega_m(t-n\Delta t)} \leftrightarrow \frac{1}{2f_m}e^{-j\Omega n\Delta t} \quad agar -\Omega_m \le \Omega \le \Omega_m .$$

Demak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_k(t)\Psi_n(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_m}^{\Omega_m} \frac{1}{2f_m}e^{-j\Omega k\Delta t}\frac{1}{2f_m}e^{-j\Omega n\Delta t}d\omega =$$

$$= \frac{1}{8\pi f_m^2}e^{-j\Omega(k-n)\Delta t}d\Omega = -\frac{1}{8\pi f_m^2}\frac{1}{j(k-n)\Delta t}e^{-j\Omega(k-n)\Delta t}\Big|_{-\Omega_m}^{\Omega_m} =$$

$$= \frac{1}{8\pi f_m^2}\frac{1}{j(k-n)\Delta t}\left(e^{j\Omega_m(k-n)\Delta t} - e^{-j\Omega_m(k-n)\Delta t}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi f_m}\frac{1}{(k-n)}\sin\Omega_m(k-n)\Delta t = \frac{1}{4\pi f_m}\frac{1}{(k-n)}\sin\Omega_m(k-n)\pi = 0.$$

$\|\Psi_k(t)\|^2$ qiymatini aniqlaymiz:

$$\|\Psi_k(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi_k^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\Omega_m(t-k\Delta t)}{\Omega_m^2(t-k\Delta t)^2}dt.$$

Quyidagicha belgilashlarni kiritamiz:

$$\Omega_m(t-k\Delta t) = x; \qquad t = \frac{x}{\Omega_m} + k\Delta t; \qquad dt = \frac{1}{\Omega_m}dx.$$

U holda

$$\|\Psi_k(t)\|^2 = \frac{1}{\Omega_m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{\Omega_m} = \frac{\pi}{2\pi f_m} = \Delta t.$$

Shunday qilib,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_k(t)\Psi_n(t)dt = \begin{cases}\Delta t, & agar\ k = n,\\ 0, & agar\ k \ne n.\end{cases}$$

Demak $\Psi_k(t)$ funksiyalar majmuasi ortogonalligi isbotlandi.

Kotelnikov qatori koeffisientlarini aniqlash

$\dot{C}_k$ koeffisientlarining qiymatlarini quyidagi formuladan foydalanib aniqlaymiz:

$$\dot{C}_k = \frac{1}{\|\Psi_k(t)\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\Psi_k(t)dt.$$

$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\Psi_k(t)dt$ integralini hisoblashda $\Psi_k(t)\Psi_n(t)$ ko'paytma integralini $k \neq n$ holat uchun hisoblash usulidan foydalanamiz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\Psi_k(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)S^*_{\Psi k}(j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_m}^{\omega_m} S(j\omega)\Delta t e^{j\omega k\Delta t}d\omega =$$

$$= \Delta t \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_m}^{\Omega_m} S(j\omega)e^{j\omega k\Delta t}d\omega = \Delta t u(k\Delta t).$$

Integrallash chegaralarini aniqlashda real signal spektri va $\Psi_k(t)$ signal spektrining Ω_m bilan cheklanganligini e'tiborga olish kerak.

Shunday qilib, $\dot{C}_k$ koeffisientlar quyidagilarga teng bo'ladi:

$$\dot{C}_k = \frac{1}{\|\Psi_k(t)\|^2}\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\Psi_k(t)dt = \frac{1}{\Delta t}\Delta t u(k\Delta t) = u(k\Delta t).$$

Demak, Kotelnikov qatoridagi kerakli kattaliklarning hammasi aniqlandi va qator uchun ifodani quyidagi shaklda keltiramiz:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k\Psi_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k\Delta t)\frac{\sin\Omega_m(t-k\Delta t)}{\Omega_m(t-k\Delta t)}.$$

Uzluksiz signali $u(t)$ ni uning diskret vaqtlardagi oniy qiymatlari $u(k\Delta t)$ orqali ifodalash natijasida quyidagi xulosalarni keltirish mumkin:

a) signalning eng katta chastotasi F_m bilan cheklanganligi uchun uzluksizligiga asos hisoblanadi;

b) uzluksiz signal $u(t)$ spektri va $\Psi_k(t)$ bazis funksiyaning spektri kengligi $\Delta\omega = 2\Omega_m$ (3.3-rasm). Bu Kotelnikov teoremasidagi asosiy shart $\Delta t = 1/2F_m$ orqali ham tasdiqlanadi;

v) diskretlash oralig'i Δt ni $1/2F_m$ dan kichik qilib ham tanlash mumkin. Bu holda bazis funksiya $\Psi_k(t)$ ning spektri $S_{\Psi k}(j\omega)$ signal $u(t)$ spektridan keng bo'ladi;

g) agar uzatiladigan signal $u(t)$ spektrining F_m dan katta tashkil etuvchilari filtrlash asosida cheklangan bo'lsa, u holda $\Delta t < 1/2F_m$ qilib tanlash $u(t)$ ni qayta tiklash aniqligini oshiradi. Shuni doim yodda tutish kerak, har qanday davomiyligi cheklangan signal spektri nazariya nuqtai nazaridan cheksiz keng spektrga ega bo'ladi. Ammo real uzatiladigan signallarning spektri kengligi aloqa tizimi qaysi tur vazifani bajarishligi (tovush, harakatdagi yoki harakatsiz tasvirni uzatish, axborot uzatish tezligi va h.k.) va qabullash tomonida signalni qayta tiklash sifatiga qo'yiladigan talablar orqali belgilanadi;

d) agar diskretlash oralig'i $\Delta t > 1/2F_m$ dan katta qilib tanlansa (belgilansa), u holda bazis funksiya $\Psi_k(t)$ spektri $S_{\Psi k}(j\omega)$ kengligi uzluksiz signal $u(t)$ spektridan tor bo'ladi.

3.6. Davomiyligi cheklangan uzluksiz signallarni diskretizatsiyalash

Davomiyligi T_c bilan cheklangan signal cheksiz keng spektrga ega bo'ladi, ammo amalda ushbu signal asosiy energiyasi to'plangan spektri kengligini, energiyasi ma'lum qiymatdan kichik bo'lgan signal spektri tashkil etuvchilarini e'tiborga olmaslik orqali aniqlash (chegaralash) mumkin. Ushbu chegaraviy chastotani shartli ravishda F_m bilan belgilab, diskretlash oralig'i Δt ni aniqlash mumkin, ya'ni $\Delta t = 1/2F_m$, sek va u holda davomiyligi cheklangan signalni uning

$$N \geq \frac{T_c}{\Delta t} + 1 = 2F_m T_c + 1$$

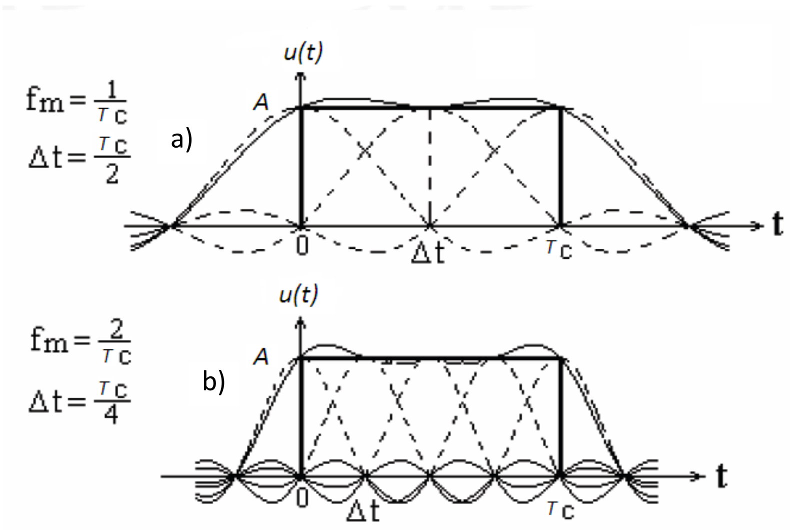
ta oniy qiymatlari orqali aniqlash mumkin. Ba'zan $2F_m T_c$ ni signal bazasi yoki N koordinatali fazodagi nuqta sifatida ham tasavvur etish mumkin. Shunday qilib, davomiyligi T_c bilan cheklangan signalni N ta tashkil etuvchi orqali ifodalash mumkin, u holda kotelnikov qatori quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$u(t)=\sum_{k=-0}^{N}u(k\Delta t)\frac{\sin\Omega_m(t-k\Delta t)}{\Omega_m(t-k\Delta t)}.$$

Tashkil etuvchilari soni N bo‘lgan kotelnikov qatori uzluksiz signal $u(t)$ ni faqat $k\Delta t$ onlardagi qiymatlarini aniq tiklash imkonini beradi. Oniy qiymatlar olish oraliqlarida $u(t)$ signalni qayta tiklash xatoliklari katta bo‘ladi va bu xatolik signal davomiyligi T_c ning boshlanish va tugillanish vaqtlarida katta bo‘ladi.

3.14-rasmda to‘rtburchak shaklidagi $u(t)$ impulsni chegaraviy chastota F_m ning turli qiymatlarida Δt vaqt oraliqlarida olingan oniy qiymatlari orqali qayta tiklashga tegishli chizmalar keltirilgan. 3.14-rasmdagi chizmalardan ko‘rinadiki, signalni qayta tiklash aniqligi davomiyligi cheklangan impulslar chegaraviy chastotasini oshirish va unga mos ravishda diskretlash oralig‘ini kichiklashtirish natijasida yaxshilanadi.

Misol uchun, signal spektri kengligini uning o‘rovchisi birinchi nol qiymatiga ega bo‘lish kengligida cheklansa $F_m=\frac{1}{T_c}$ 3.14a-rasmdagi ko‘rinishdagi shaklda qayta tiklanadi. Bu rasmda $N=2F_mT_c+1=3$, ya’ni T_c davomiyligida 3 ta oniy qiymat aniqlangan.



3.14-rasm. *Cheklangan davomiylikli signalni diskretlash*

3.14b-rasmda signal spektri kengligi uni o‘rovchisi ikkinchi chproqchasining nolga teng bo‘lgan kengligi, ya’ni $F_m = \frac{2}{T_c}$ chastota bilan chegaralansa, bu holda $N = 2F_mT_c + 1 = 5$ bo‘ladi va signal davomiyligi T_c vaqt davomida beshta oniy qiymat asosida tiklanadi.

3.7. Diskretlangan signal spektri

Uzluksiz signal $u(t)$ ni dsikretlash natijasia uning $k\Delta t$ vaqtlarda olingan oniy qiymatlari $u(k\Delta t)$ ga mos keluvchi impulslar ketma-ketligi $u_\partial(t)$ shakllanadi. Analog signal spektri $S(j\omega)$ ni diskretlangan signal spektri $S_\partial(j\omega)$ bilan bog‘liqligini aniqlaymiz.

Diskretlangan signalni analog signalning $u(k\Delta t)$ vaqtlardagi oniy qiymatlarga proporsional δ-funksiyalar ketma-ketligi shaklida ifodalash mumkin (3.5-rasm), ya’ni

$$u_\partial(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta t)\delta(t - n\Delta t). \tag{3.14}$$

$\delta(t - n\Delta t)$ funksiya faqat $t = n\Delta t$ vaqtlarda nolga teng bo‘lmasligini e’tiborga olib, (3.14) formulani quyidagi shaklga keltirish mumkin:

$$u_\partial(t) = u(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t). \tag{3.15}$$

(3.15) fomuladagi yig‘indi (summa) – bu davriy funksiya bo‘lib, uni quyidagi Fure qatori ko‘rinishiga keltirish mumkin:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_\partial t}.$$

Ushbu qatorning koeffisientlari $\dot{C}_k$ ni aniqlaymiz.

$$\dot{C}_k = \frac{1}{\Delta t}\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \delta(t) e^{-jk\omega_\partial t} dt = \frac{1}{\Delta t},$$

bunda, $\omega_\partial = \frac{2\pi}{\Delta t}$ – diskretlash chastotasi.

$\dot{C}_k$ koeffisientlarni hisoblashda δ -funksiyaning tanlovchanlik hossasi va integrallash oralig‘i $(-\frac{\Delta t}{2}, \Delta t/2)$ ga ($n = 0$ bo‘lganda) faqat bitta δ-funksiya tushadi.

Shunday qilib, davriy takrorlanuvchi δ -funksiyalarni quyidagi Fure kompleks qatori shaklida ifodalash mumkin:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) = \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_\partial t}.$$

U holda

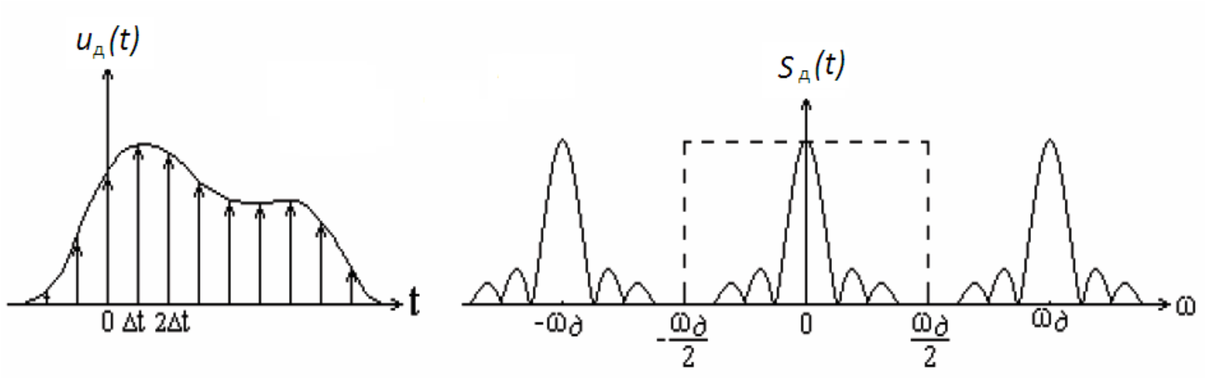
$$u_\partial(t) = u(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) = \frac{u(t)}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_\partial t} = \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} u(t) e^{jk\omega_\partial t}.$$

Fure almashtirish xossasidan ma’lumki, signalni $e^{jk\omega_\partial t}$ ga ko‘paytirish, ushbu signal spektrini o‘ng tomonga $k\omega_\partial$ ga siljishiga olib keladi. Shuning uchun diskretlangan signal spektrini quyidagicha ko‘rinishda ifodalash mumkin:

$$S_\partial(j\omega) = \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} S[j(\omega - k\omega_\partial)]. \qquad (3.16)$$

Shunday qilib, diskretlangan signal spektri analog signal spektrining o‘ng tomonga siljigan cheksiz ko‘p nusxalaridan iborat bo‘ladi. Qo‘shni spektrlar nusxalari orasidagi spektr siljishi qiymati diskretlash chastotasi ω_∂ ga teng bo‘ladi (3.15-rasm).

Diskretlangan signal spektri Fure to‘g‘ri va teskari almashtirishlari chastota va vaqtning bir-biriga bog‘liqligini tasdiqlaydi. Agar signal diskret bo‘lsa, uning spektri ham diskret bo‘ladi va spektr davriy takrorlanuvchi bo‘lsa, signal diskret bo‘ladi.



3.15-rasm. *Diskretlangan signal va uning spektri*

Uzluksiz signalni uning diskret vaqtlardagi oniy qiymatlari asosida tiklash usuli 3.15-rasmda keltirilgan. Buning uchun diskret signalni chastota o‘tkazish polosasi kengligi diskretlash chastotasining yarmiga teng bo‘lgan past chastotalar filtridan o‘tkazish kerak bo‘ladi. Ushbu past chastotalar filtri amplituda-chastota xarakteristikasi 3.15-rasmda punktir chiziq orqali belgilangan.

Uzluksiz signalni aniq qayta tiklash uchun uning diskret oniy qiymatlarining spektri bir-birining ustiga qisman bo‘lsa ham tushmasligi kerak. Buning uchun diskretlash chastotasi F_∂ uzluksiz signal chegaraviy qiymati F_m dan kamida 2 marta katta bo‘lishi talab etiladi, ya’ni $F_\partial \geq 2F_m$, natijada $\Delta t \leq \frac{1}{2F_m}$ bo‘lishi kerak.

Uzluksiz signalni uning diskret qiymatlari yig‘indisi sifatida ifodalash diskret signallar spektrini tahlil etishni soddalashtiradi. Diskretlangan uzluksiz signal spektri $S_\partial(j\omega)$ ni uning $k\Delta t$ vaqtlardagi oniy qiymatlari orqali aniqlash mumkin.

$$S_\partial(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_\partial(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) u(n\Delta t) e^{-jk\omega t}\, dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(k\Delta t) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) e^{-jk\omega t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n\Delta t) e^{-jkn\omega\Delta t}.$$

Shuni ta’kidlash kerakki, (3.16) formulada $\frac{1}{\Delta t}$ ko‘paytma borligi uchun diskretlangan signal spektri 1/sek o‘lchamiga, ya’ni F - siklik chastota o‘lchov birligiga mos keladi.

Nazorat savollari

1. Signallarning asosiy turlarini ayting va ularga qisqa ta'rif bering.

2. Vaqt va sath bo'yicha diskretlash deganda nimani tushunasiz?

3. Raqamli signal deb qanday signalga aytiladi?

4. Raqamli signal uchun matematik ifodani yozing va tushuntirish bering.

5. Uzluksiz signallarni vaqt bo'yichadiskretizatsiyalashga tegishli Kotelnikov teoremasini aytib bering va uni vaqt diagrammasi yordamida tushuntiring.

6. Diskretlash qadami qanday aniqlanadi?

7. Kotelnikov qatori qanday ikki tashkil etuvchilardan iborat va ular qanday fizik ma'noga ega?

8. Vaqt bo'yicha diskretlangan signalni qayta tiklash jarayoniga tegishli jarayonlarni vaqt diagrammasi va funksional sxema asosida tushuntiring.

9. Davomiyligi cheklangan uzluksiz siganllarni diskretlashga tegishli vaqt diagrammalari tushuntirib bering.

10. Diskretlangan signal spektri birlamchi uzluksiz signal spektri bilan qanday bog'lanishga ega?