9. DISKRET SIGNALLARNI ALMASHTIRISH

Signal va funksiyalarni odatdagicha, ularning qiymatlarini ma'lum argumentlar (vaqt, chiziqli yoki fazoviy koordinatalar va shunga o'xshashlar)dan tashqari, ma'lumotlarga ishlov berish va ularni tahlil etishda signallarni argumenti dinamik shaklda ifodalashdagiga teskari bo'lgan argumentli matematik ifodalardan ham keng foydalaniladi. Misol uchun, vaqtga teskari bo'lgan argument bu chastotadir. Bu shaklda ifodalash ushbu signal o'zining berilgan vaqt oralig'ida cheksiz ko'p bo'lmagan qiymatlarga ega bo'lsa, har qanday murakkab ko'rinishdagi signalni nisbatan sodda, oddiy elementar signallar yig'indisi orqali ifodalash mumkin, va xususiy holda oddiy garmonik tebranishlar yig'indisi ko'rinishida, ya'ni Fure almashtirishi orqali bajarilishi mumkin. Yuqoridagidan kelib chiqqan holda signalni elementar garmonik tashkil etuvchilarga yoyish uzluksiz yoki boshlang'ich fazasi qiymatlari orqali ifodalanadi. Uzluksiz yoki diskret vaqt argumentlari ularga teskari bo'lgan ifodalashga mos keladi. Signal yoyilgan garmonik tashkil etuvchilarning majmuasi ushbu signalning amplituda spektri deb ataladi va boshlang'ich fazalar majmuasi faza spektri deb ataladi. Ushbu ikki spektr signalning to'liq spektrini tashkil etadi va bu matematik ifoda o'z aniqligi bilan signalni dinamik ko'rinishda ifodalashga to'liq mos keladi.

Fure garmonik qatoridan tashqari signalni yana boshqa ko'rinishdagi elementar tashkil etuvchilarga yoyishlardan ham foydalaniladi, bular Uolsh, Adamar, Veyvlet va boshqalardir. Bundan tashqari Chebishev, Lagger, Lejandr polinomlari va boshqalarga yoyish usullari ham mavjud. Signallarga raqamli ishlov berishda Fure diskret almashtirishi (FDA) va uni tezkor hisoblash usuli – Fure tez almashtirishi (FTA) dan keng foydalaniladi. Bunga bir necha sabablar bor: ular chastotalar koordinatasida eng qisqa vaqt davom etadigan signallardan (<1 s) tashqari signallarni to'liq – aniq ifodalaydilar; chastota bo'yicha qisqartirilgan Fure tashkil etuvchilari ma'lumotlarni boshqa darajali qatorlarga nisbatan aniqroq ifodalaydi. Uning alohida tashkil etuvchilari sinusoida ko'rinishida bo'lib, chiziqli tizimlar orqali uzatilganda buzilmaydilar (o'z shakllarini o'zgartirmaydilar), shu sabali ulardan yaxshi sinov signallari sifatida foydalanish mumkin.

Signallarni elementar tashkil etuvchilarga yoyishda asosiy shart birqiymatlik va matematik ifodaning to'liq mosligi – yoyilayotgan elementar funksiyalar o‘zaro ortogonal bo‘lishlari kerak. Ammo signal sifatli tahlil etilgan taqdirda ularning foydali fizik ma’lumotlarini aks ettirish uchun kerakli, o‘ziga xos xususiyatlarini ko‘rsatuvchi noortogonal funksiyalardan ham foydalanish mumkin. Signallarga raqamli ishlov berishda eng ko‘p qo‘llaniladigan signallarni yoyish usullarini ko‘rib chiqamiz.

9.1. Fure qatori

Har qanday davriy signal $S(t)$ ni cheksiz ko‘p sinusoidal va kosinusoidal argumenti karrali tashkil etuvchilar va doimiy tashkil etuvchi yig‘indisi ko‘rinishida ifodalash mumkin. Bunday ifodalash Fure qatoriga yoyish deb ataladi va quyidagi matematik ifoda orqali ifodalanadi

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega T) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega T), \tag{9.1}$$

bunda t – mustaqil o‘zgaruvchi bo‘lib, odatda vaqtni anglatadi, ammo u masofa yoki har qanday boshqa kattalik bo‘lishi mumkin; $S(t)$ – ko‘p hollarda kuchlanish funksiyasining argument vaqtga bog‘liqligini bildiradi, ammo har qanday boshqa signalni ham bildirishi mumkin; $\omega = 2\pi / T_r$ – siklik chastota asosiy (birinchi) garmonikasi bo‘lib, asosiy davriy chastota f bilan $\omega = 2\pi f$ ko‘rinishida bog‘liq, T_r – signal takrorlanish davri.

Fure qatori doimiy tashkil etuvchisi a_0 quyidagi ifoda orqali aniqlanadi:

$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_{-T_r/2}^{T_r/2} S(t)dt.$$

Signalning doimiy tashkil etuvchisi $S(t)$ signalning bir davr vaqt bo‘yicha o‘rtacha qiymatiga mos keladi. Misol uchun o‘zgarmas kuchlanish sathi

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_{-T_r/2}^{T_r/2} S(t)\cos(n\omega t)dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_{-T_r/2}^{T_r/2} S(t) \sin(n\omega t) dt.$$

$n\omega$ chastota ω chastotaning n-chi garmonikasi deyiladi. Demak cheksiz qator chastotaga bog‘liq bo‘lgan turli amplitudali a_n va b_n kosinusoidal va sinusoidal chastotalari musbat $n\omega$ garmonikali tashkil etuvchilardan iborat. Bu qatorni eksponensial funksiya yordamida impuls xarakteristikasi ixchamroq shaklda ham ifodalash mumkin

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\omega t}, \tag{9.2}$$

bunda
$$d_n = \frac{1}{T_p} \int_{-T_r/2}^{T_r/2} S(t) e^{-in\omega t} dt \tag{9.3}$$

kompleks sonlar bo‘lib, $|d_n|$ – voltlarda baholanadigan kattalik.

(9.1) ifodada elementar tashkil etuvchilar yig‘indisini aniqlashda n ning manfiy qiymatlari ham hisobga olinadi, qatorning yarim tashkil etuvchilari $n\omega$ manfiy chastotaga ega bo‘ladi. Ular fizik qiymatga ega bo‘lmaydilar va faqat matematik tushunchalar bo‘lib, buning natijasida kompleks amplituda d_n larning modullari $|d_n|$ miqdor jihatdan ikki marta kichik qilib olingan. Bu musbat va manfiy chastotalarda mos amplitudalar bir-biriga teng etib taqsimlanganligini anglatadi. Natijada chastotasi $n\omega$ bo‘lgan tashkil etuvchining haqiqiy qiymati hisoblab aniqlangan qiymatni ikkiga ko‘paytirish orqali aniqlanadi.

Signalning kompleks va trigonometrik shakldagi ifodalari bir-biri bilan quyidagicha bog‘langan:

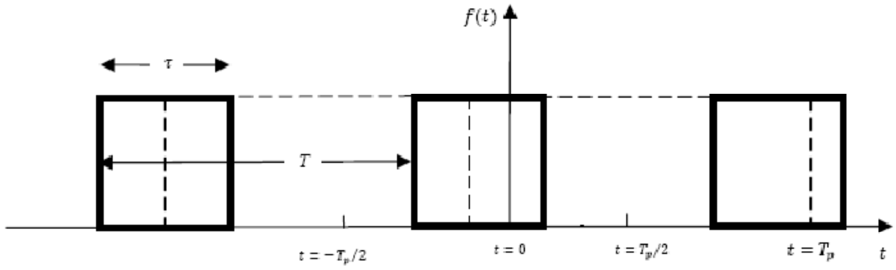
$$|d_n| = \left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2}, \tag{9.4}$$

$$\varphi_n = -arctg(b_n / a_n), \tag{9.5}$$

bunda φ_n – n-chi garmonikali tashkil etuvchisi boshlang‘ich fazasi bo‘lib, uni d_n ning mavhum va haqiqiy tashkil etuvchilarining arktangensi sifatida aniqlanadi. Demak, signalning har bir garmonikasi o‘zining amplitudasi va fazasi siljishi bilan xarakterlanadi.

9.2. Fure almashtirishi

Agar signal davriy bo‘lmasa, u holda Fure qatoriga yoyish moslashtiriladi. Misol tariqasida 9.1*a*-rasmda keltirilgan to‘g‘ri burchakli impulslar ketma-ketligidan impulslar takrorlanish davri T_r ni cheksizlikkacha davom ettirish natijasida yagona to‘rtburchakli impulsni hosil bo‘lishini ko‘rib chiqamiz.



9.1-rasm. *Davriy takrorlanuvchi to‘g‘riburchakli impuls*

T_r ni kattalashtirib borilsa garmonikalar orasidagi $1/T_r = \omega/2\pi$ bo‘lgan masofa $d\omega/2\pi$ gacha kichiklashib boradi va nolga teng bo‘ladi. Bu o‘zgaruvchi diskret chastota $n\omega$ dan uzluksiz o‘zgaruvchi ω ga o‘tishga, shu bilan bir vaqtda fazaviy va amplitudaviy spektr ham uzluksiz bo‘lishiga olib keladi. Demak, $T_r \to \infty$ bo‘lganda $d_n \to d\omega$ bo‘ladi. Ushbu o‘zgartirishlarni e’tiborga olsak (9.3) ifoda quyidagi ko‘rinishni oladi

$$d(\omega) = \frac{d\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-j\omega t}dt. \qquad (9.6)$$

Qulay bo‘lishi uchun (9.6) ifodani $d\omega/2\pi$ ga bo‘lib quyidagi ifodani olamiz

$$\frac{d(\omega)}{d(\omega)/2\pi} = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-j\omega t}dt. \qquad (9.7)$$

Bu formuladagi $F(j\omega)$ Fure integrali yoki oddiygina Fure tasviri (ko‘rinishi) deb ataladi. $F(j\omega)$ ni haqiqiy va mavhum qismlari yig‘indisi shaklida quyidagicha ifodalash mumkin, agar

$$F(j\omega) = \mathrm{Re}(j\omega) + j\,\mathrm{Im}(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}, \qquad (9.8)$$

bo‘lsa, u holda $$|F(j\omega)| = \left[\mathrm{Re}^2(j\omega) + \mathrm{Im}^2(j\omega)\right]^{1/2} \tag{9.9}$$

bo‘ladi va bu kattalik voltda emas V/Hz larda baholanadi. $F(j\omega)$ ni amplituda zichligi, ba’zan esa amplituda spektri zichligi yoki amplituda spektri deb ataladi. Amplituda spektriga mos ravishda faza siljishi $\varphi(\omega)$ quyidagicha aniqlanadi

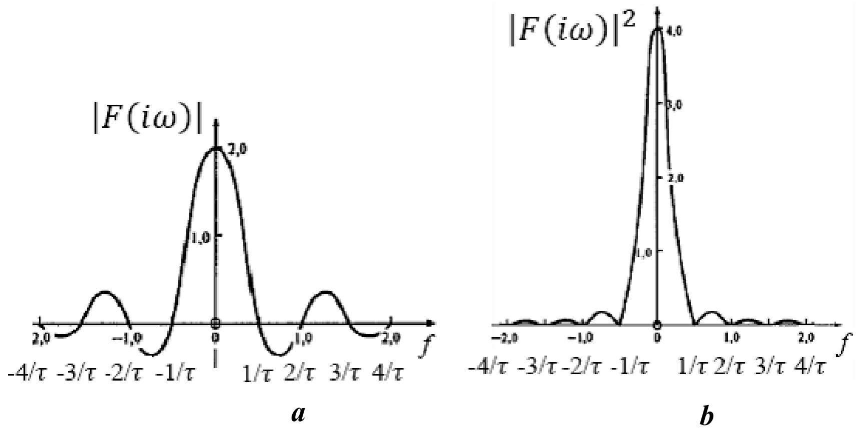
$$\varphi(\omega) = arctg[\mathrm{Im}(j\omega)/\mathrm{Re}(j\omega)]. \tag{9.10}$$

$|F(j\omega)|^2$ qiymati V^2/Hz^2 shaklida baholanadi. Normallashtirilgan elektr quvvati, ya’ni qarshiligi 1 Om bo‘lgan qarshilikda ajralib chiqayotgan quvvat V^2 larda baholanadi, bu Dj/s yoki Dj·Hz (Djoul bu energiya birligi)ni anglatadi, u holda V^2/Hz^2 kattalik DjHz·Hz^{-2}= Dj·Hz^{-1} ga teng bo‘ladi. Demak $|F(j\omega)|^2$ bir taqsim Hz energiyani, ya’ni $|F(j\omega)|^2$– spektr energiyasining zichligini anglatadi. $|F(j\omega)|$ ning f ga bog‘liqligi grafigi ostidagi yuza asosi $f_0 - df$ va $f_0 + df$ polosa f_0 chastotasi o‘rtacha kuchlanishini ifodalaydi. $|F(j\omega)|^2$ ning f ga bog‘liqligi grafigi ostidagi yuza f_0 chastotadagi energiya o‘rtacha qiymatiga teng bo‘ladi. Bundan tashqari spektr tahlilida ko‘p hollarda spektr energiyasi zichligining chastotaga bog‘liqlik grafigi (chizmasi) ham quriladi.

Agar impulsdan oniy qiymat olish uning markaziga (qoq o‘rtasiga) mos kelsa, ya’ni $x = \frac{1}{2}$ bo‘lganda ushbu impulsning Fure shakli (ko‘rinishi) quyidagicha beriladi

$$F(i\omega) = \frac{A\tau \sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} = A\tau\,\mathrm{sinc}(\omega\tau/2) \tag{9.11}$$

va haqiqiy hisoblanadi. $|F(j\omega)|$ funksiya uzluksiz bo‘lib, uning $A = 1$ V, $T_r = 10$ s va $\tau = 2$ s qiymatlari uchun grafigi 9.2*a*-rasmda tasvirlangan. Bu amplituda spektri oniy qiymatlar funksiyasiga proporsional bo‘lib, hamma vaqt ideal past chastota filtriga to‘g‘riburchakli impuls ta’sirida hosil bo‘ladi, shu bilan birga har qanday davomiyligi t bilan cheklangan impuls ta’sirida ham yuzaga kelishi mumkin.



9.2-rasm. *Impuls amplitudasi 2V: a) amplituda spektri; b) energiya spektri*

Amplitudasi 2 V bo‘lgan impuls energiya spektral zichligi grafigi 9.2*b*-rasmda tasvirlangan, 9.2*a*-rasmda esa amplituda spektri tasvirlangan.

Shuni alohida ta’kidlash kerakki, funksiyaning chastotaga bog‘liqligidan vaqt funksiyasiga Fure teskari almashtirishi yordamida o‘tish mumkin. Bu holda

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\, df \qquad (9.12)$$

9.3. Fure diskret almashtirishi (FDA) va teskari FDA

Amalda signal Fure tashkil etuvchilari, unga analog ishlov berish natijasida emas, raqamli hisoblashlar natijasi orqali aniqlanadi. Analog signal cheksiz ko‘p bir-biriga yaqin nuqtalardan iborat bo‘lganligi uchun, uning hamma qiymatlarini ifodalash mumkin emas. Shuning uchun raqamli tizimlardan foydalanish uchun analog signalni bir xil vaqt oraliqlarida diskretlash kerak bo‘ladi va bu oniy qiymat(o‘lchov)larni ikkilik raqamli signal shakliga keltirish kerak bo‘ladi. Bu oniy qiymatni o‘lchash xotirada saqlash konturi yordamida amalga oshiriladi, so‘ngra analog-raqamli o‘zgartirish amalga oshiriladi. Analog signalni yuqori aniqlik bilan tiklash uchun bu bir sekund davomida olingan oniy qiymat(o‘lchash)lar soni yetarli darajada. Nazariy nuqtai nazardan diskretlash kerakli tezligi Naykvist chastotasi deb ataladi va $2f_{yu}$ ga teng, f_{yu} – signalning amplitudasi sezilarli darajada katta eng yuqori chastotali sinusoidal ko'rinishdagi tashkil etuvchisi chastotasi.

Shunday qilib, o'zgartirilishi kerak bo'lgan hamma ma'lumotlar endi diskret va nodavriy ham bo'lishi mumkin. Shuning uchun Fure almashtirishidan foydalanish mumkin emas, chunki u uzluksiz ma'lumotlar uchun mo'ljallangan. Ammo, shunday analog almashtirish borki, uni diskret ma'lumotlarga ham qo'llash mumkin – bu Fure diskret almashtirishi (FDA).

Faraz qilaylik, analog signalni bir xil vaqt T oraliqlarida diskretlash natijasida N ta oniy qiymat(o'lchash)ga ega bo'lgan quyidagi diskret ketma-ketlik olingan bo'lsin $\{x(nT)\} = x(0), x(t), ..., x[(N-1)T]$, bunda n – olingan oniy qiymat tartib raqami bo'lib, $n = 0$ dan $n = N - 1$ gacha qiymatlarni qabul qiladi. $x(nT)$ qiymati faqat kuchlanish spektriga tegishli vaqt qatoriga tegishli qiymatlarni ifodalaganda haqiqiy kattalik bo'ladi.

Shuning uchun signalning vaqt bo'yicha haqiqiy bo'lgan N ta qiymatlari FDAning chastota bo'yicha N ta kompleks qiymatlariga aylanadi

$$X(k) = F_D[x(nT)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)\mathrm{e}^{-ik\Omega nT}, \ \ k = 0, 1, \dots, N-1 \qquad (9.13)$$

bunda F_D orqali Fure diskret almashtirishi belgilangan.

Teskari Fure diskret almashtirishi (TFDA) quyidagicha aniqlanadi

$$x(nT) = F_D^{-1}[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\mathrm{e}^{ik\Omega nT}, n = 0, 1, \dots, N-1 \qquad (9.14)$$

bunda F_D^{-1} orqali teskari Fure diskret almashtirishi belgilangan.

9.4. Fure tezkor almashtirishi

Fure diskret almashtirishidan foydalanib katta davomiylikka ega impulslar ketma-ketligiga ishlov berishda katta hajmdagi arifmetik amallar (ko'paytirish, qo'shish va kechiktirish)ni real vaqt oralig'ida bajarish talab etiladi. Hozirda katta tezlikda arifmetik amallarni bajaruvchi maxsus signal protsessorlari mavudligiga qaramasdan katta hajmdagi signallarga raqamli ishlov berishni real vaqt davomida bajarishda qiyinchiliklar mavjud. Misol uchun $x(n)$ ketma-ketlik uchun $N=10^3$ bo‘lgan holat uchun Fure diskret almashtirishini

$$\dot{G}(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jnk\frac{2\pi}{N}}, \quad \text{bunda} \quad k=0,1,2,...,N-1 \tag{9.15}$$

formula orqali aniqlashda va $x(n)$ kompleks kattalik bo‘lganda $(N-1)^2 \approx 10^6$ ta kompleks ko‘paytirish va $N(N-1)\approx 10^6$ ta kompleks qo‘shish amallarini bajarish kerak bo‘ladi.

Fure tezkor almashtirishi (FTA)dan foydalanish asosida bajariladigan arifmetik amallar sonini bir necha tartibga keskin kamaytirish mumkin.

FTAning asosini bir o‘lchamli sonlar massivini ko‘p o‘lchamli bilan almashtirish tashkil etadi. Bir o‘lchamli sonlar massivini ko‘p sonliga aylantirishning bir necha usullari mavjud, ya’ni TFAning bir necha algoritmlari mavjud.

Ushbu FTA algoritmlaridan birini ko‘rib chiqamiz. N nuqtali $x(n)$ ketma-ketlik uchun FTAni aniqlaymiz. Buning uchun N^{2n} deb hisoblaymiz. N nuqtali $x(n)$ ketma-ketlikni ikki (N/2) nuqtali juft $x_1(n)$ va toq $x_2(n)$ ketma-ketliklarga ajratamiz.

$$x_1(n)=x(2n), \quad n=0,1,...,\frac{N}{2}-1, \tag{9.16}$$

$$x_2(n)=x(2n+1), \quad n=0,1,...,\frac{N}{2}-1. \tag{9.17}$$

N nuqtali $x(n)$ ketma-ketlikning FTAi quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{aligned}\dot{G}(k)&=\sum_{\substack{n=0\\ n-\,juft}}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}+\sum_{\substack{n=0\\ n-\,toq}}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\\ &=\sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n)W_N^{2nk}+\sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1)W_N^{(2n+1)k},\end{aligned} \tag{9.18}$$

bunda, $W_N^2=\left[e^{j(2\pi/N)}\right]^2=e^{j(2\pi/N\cdot 2)}=W_{N/2}$. (9.19)

(9.18) ifodani (9.19) ni e’tiborga olgan holda quyidagi shaklga keltiramiz:

$$\dot{G}(k)=\sum_{n=0}^{N/2-1}x_1(n)W_{N/2}^{nk}+W_N^k\sum_{n=0}^{N/2-1}x_2(n)W_{N/2}^{nk},\qquad(9.20)$$

yoki

$$\dot{G}(k)=\dot{G}_1(k)+W_N^k\dot{G}_2(k),\qquad(9.21)$$

bunda, $\dot{G}_1(k)$ va $\dot{G}_2(k)$ mos ravishda $x_1(n)$ va $x_2(n)$ ketma-ketliklarning (N/2) nuqtali FDAga teng.

(9.21) ifoda $\dot{G}(k)$ N nuqtali FDAni $\dot{G}_1(k)$ va $\dot{G}_2(k)$ (N/2) nuqtali FDAlari yig‘indisi shaklida aniqlash mumkin.

Agar (N/2) nutali FDAni oddiy usulda hisoblanganda N nuqtali FDAni aniqlash uchun $\left(N^2/2+N\right)$ ta kompleks ko‘paytirish amalini bajarish kerak bo‘ladi. N katta bo‘lganda, ya’ni $\left(N^2/2+N\right)\approx N^2/2$ bo‘lgan holat uchun $\dot{G}(k)$ ni aniqlashda bajariladigan ko‘paytirish amallari soni taxminan 2 marta kamayadi.

$\dot{G}(k)$ ni $0\le k\le N-1$ lar uchun aniqlash kerakligini va $\dot{G}_1(k)$, $\dot{G}_2(k)$ larni esa $0\le k\le N/2-1$ uchun aniqlash kerakligini e’tiborga olib (9.21) ifodani $k\ge N/2$ uchun aniqlaymiz:

$$\begin{aligned}\dot{G}(k)&=\dot{G}_1(k)+W_N^k\dot{G}_2(k),\quad agar\quad 0\le k\le N/2-1,\\ \dot{G}(k)&=\dot{G}_1(k-N/2)+W_N^k\dot{G}_2(k-N/2),\quad agar\quad N/2\le k\le N-1.\end{aligned}\qquad(9.22)$$

Bunda $\dot{G}_1(k)$ va $\dot{G}_2(k)$ lar har $N/2$ davrda k tadan takrorlanishi e’tiborga olingan.

Yuqorida keltirilgan FTA algoritmini yo‘naltirilgan graflar yordamida tshuntirish uchun (9.3-rasm) sakkiz nuqtali FTAni ikkita to‘rt nuqtali graflardan foydalanish usuli tasvirlangan.

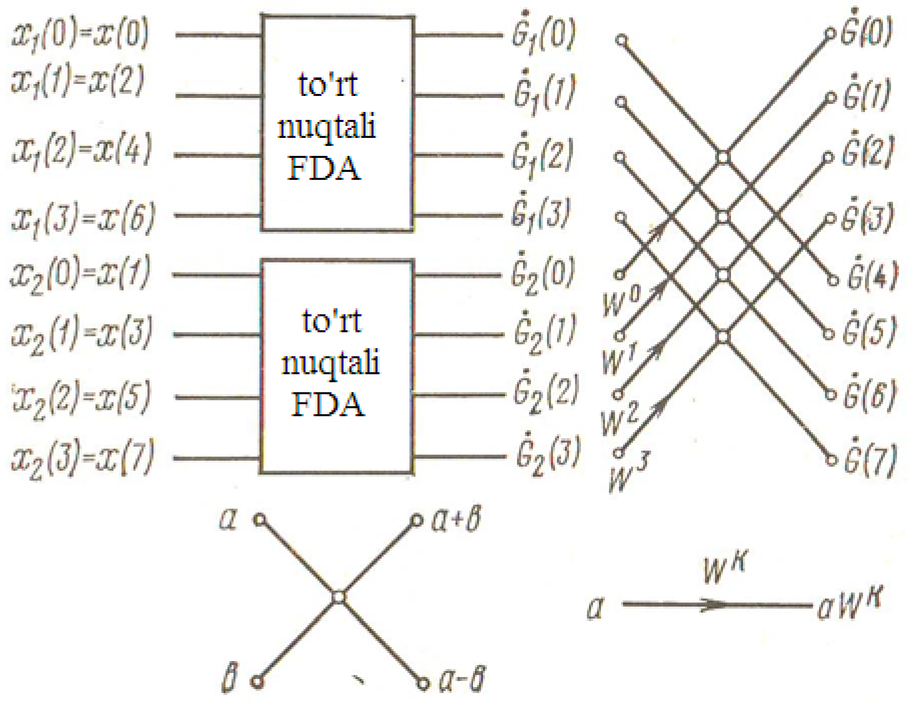
Dastlab kirishdagi $x(n)$ ketma-ketligi ikkita $x_1(n)$ – juft va $x_2(n)$ – toq ketma-ketlikka bo‘laklangan bo‘lib, ular uchun $\dot{G}_1(k)$ va $\dot{G}_2(k)$ lar aniqlanadi. So‘ngra (9.22) ifodaga asoslanib $\dot{G}(k)$ aniqlanadi. O‘z navbatida har bir $x_1(n)$ va $x_2(n)$ ketma-ketliklar ikkiga bo‘linib, to‘rtta ikki nuqtali ketma-ketliklar hosil qilish mumkin. (9.21) va (9.22) ifodalarni e’tiborga olib $N/2$ nuqtali FDA ikkita $N/4$ nuqtali FDA kombinatsiyalari shakliga keltirilishi mumkin.

$$\dot{G}_1(k) = A(k) + W_{N/2}^{k} B(k), \qquad (9.23)$$

yoki

$$\dot{G}_1(k) = A(k) + W_{N}^{2k} B(k), \qquad (9.24)$$

bunda, $0 \le k \le N/2 - 1$, $A(k)$ va $B(k)$ – $N/4$ nuqtali $x_1(n)$ ning juft va toq FDAlari.

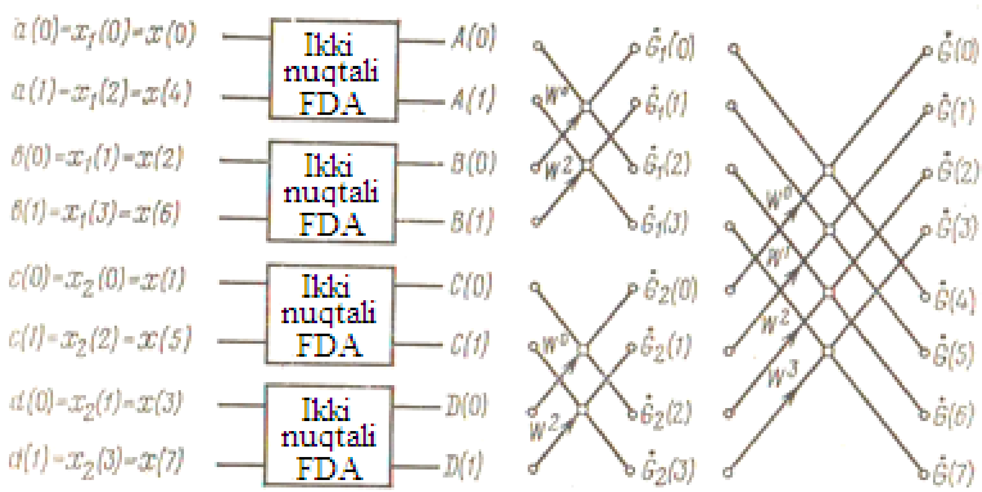


9.3-rasm. *Sakkiz nuqtali FTAni ikkita to'rt nuqtali graflardan foydalanish usuli*

9.4-rasmda sakkiz nuqtali FDAni ikki toʻrt nuqtali FDA va uni oʻz navbatida toʻrtta ikki nuqtali FDA orqali hisoblash algoritmi keltirilgan.

N nuqtali FDAlarini ketma-ket ikkiga boʻlish usuli bilan kompleks koʻpaytirishlar sonini oddiy usulda hisoblashlar soni $(N-1)^2$ dan $N/2\log_2 N$ taga kamaytirish imkoniyatini beradi.

9.3-rasmdagi boʻyalmagan kichik aylanma nuqtalar qoʻshish-ayirish amalini anglatadi, bunda yuqoridagi chiqishlar yigʻindi (va pastkilari ayirish) natijasini bildiradi. Yoʻnalish belgisi (strelka) ushbu yoʻnalish belgisi yuqorisidagi koʻpaytma a ga koʻpaytirish amalini bajarishini anglatadi. Umuman oʻzgaruvchilarning hammasi kompleks sonlar. Rasmdagi tugun (uzel)lar alohida FDAlari kirish va chiqishlari massivlari qiymatlarini ro‘yxatga olish funksional qurilmasini bildiradi.



9.4-rasm. *Cakkiz nuqtali FDAni ikki to‘rt nuqtali FDA va uni o‘z navbatida to‘rtta ikki nuqtali FDA orqali hisoblash algoritmi*

9.5. Diskret kosinus almashtirish (DKA)

Diskret kosinus almashtirishlardan korrelyatsiya va svertka (o‘ram)ni hisoblashni tezlashtirishda va spektr tahlilida foydalaniladi. Bundan tashqari bu usullardan ma’lumotlarni siqish, misol uchun ovozni (tovush) yoki tasvirni uzatish, elektrokardiogramma va elektroensenogramma kabi medisina signallarini yozish uchun foydalaniladi. Shuningdek DKAdan tasvir va nusxa (shablon)larni tanishda ham foydalaniladi. Buning natijasida signallarni uzatish uchun kodlashda talab etiladigan “bit”lar soni kamayadi, bu signal uzatish tezligini oshiradi. Bu esa nisbatan tor polosali aloqa liniyalaridan foydalanish imkoniyatini keltirib chiqaradi, shuningdek nusxa (shablon)larni tanishni osonlashtiradi (bu axborot hajmi kamaytirilishi hisobiga ro‘y beradi). DKAning ushbu xususiyatlari uni signallarni siqish nuqtai nazaridan samaradorligini bildiradi, bu signal energiyasining past chastotalarda to‘planishi natijasida ro‘y beradi. Bundan tashqari hisoblashlarning soddaligi va o‘rtacha kvadratik xatolikning kichik (minimal) bo‘lishini ta’minlaydi.

Yuqoridagi fikrlar Fure diskret kosinus almashtirishdan (FDKA) foydalanishni taqozo etadi. Umuman olganda FDKA Fure diskret almashtirishining haqiqiy qismidan iborat, chunki Fure qatori haqiqiy va juft qismi faqat kosinusoidal tashkil etuvchilardan iborat bo‘lib, misol uchun kuchlanishning diskret qiymatlaridan foydalanilganda ma’lumotlar haqiqiy bo‘ladi, ularni ikki marta ko‘p qilish uchun ularga aks tashkil etuvchilarini qo‘shish kerak bo‘ladi.

(9.13) formulaga asosan FDA quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i nk/N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 .$$

Ushbu almashtirishning haqiqiy qismi DKAni anglatadi

$$X_c(k) = \mathrm{Re}[X(k)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{k2\pi n}{N}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 .$$

Bu DKAning bir xususiy ko‘rinishi. DKAning umumiy ko‘rinishi quyidagicha aniqlanadi

$$X_c(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{k2\pi n + k\pi}{2N}\right) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left[\frac{k\pi(2n+1)}{2N}\right], \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \qquad (9.25)$$

9.6. Uolsh almashtirishi

Hozirgacha ko‘rib chiqilgan almashtirishlar sinus va kosinus funksiyalariga asoslangan edi. Impulsga o‘xshash $+1$ va -1 ga asoslangan almashtirish nisbatan oson va tez hisoblash imkoniyatini beradi. Bundan tashqari bunday almashtirishlar uzluksizligi buzilgan signallarni ifodalashda ancha qulay hisoblanadi, misol uchun, tasvir signallarini almashtirishda. Shu bilan birga ular uzluksiz signallarni ifodalashda ancha noqulay bo‘lib, ular fazalari bo‘yicha moslikni ta’minlamaydilar, bu signal spektrining buzilishiga va natijada signal shaklining buzilishiga olib keladi. Shuning uchun Uolsh almashtirishidan odatda tasvir signallariga ishlov berish (astronomiya va spektroskopiya)da signallarni kodlash va filtrlashda foydalaniladi.

Fure diskret almashtirishi garmonik sinusoidal va kosinusoidal tashkil etuvchilar orqali ifodalanganidek, Uolsh diskret almashtirishi (UDA) Uolsh funksiyalari deb ataluvchi to‘g‘ri to‘rtburchakli o‘rovchili garmonik signallar to‘plami orqali ifodalashga asoslangan. Ammo to‘g‘riburchakli impulslar uchun ularning takrorlanish chastotasi noma’lum bo‘lgani uchun analog signal uchun foydalaniladigan “ketma-ketlik” atamasidan foydalaniladi. “Ketma-ketlik” – bu vaqt birligida nolni kesib o‘tishlar sonining yarmiga teng bo‘ladi.

9.5-rasmda $N=8$ gacha bo‘lgan tartibdagi Uolsh funksiyalari kattalashish tartibida ko‘rsatilgan. Bu ko‘rinishni Uolsh bo‘yicha tartibga keltirilgan funksiya deb ataladi. Davomiylik vaqti t ga va tartibi n ga teng Uolsh funksiyasi quyidagicha belgilanadi $\mathrm{WAL}(n,t)$.

9.5-rasmdan ko‘rinadiki xuddi Fure qatorida toq va juft sinusoidal va kosinusoidal funksiyalar bir-biriga teng bo‘lganidek, Uolsh funksiyasida ham bir xil sonli toq va juft funksiyalar bo‘ladi. Uolsh $\mathrm{WAL}(2k,t)$ juft funksiyalari $\mathrm{CAL}(k,t)$ ko‘rinishida ifodalanadi va $\mathrm{WAL}(2k+1,t)$ toq funksiyalari $\mathrm{CAL}(2k+1,t)$ ko‘rinishida ifodalanadi, bu yerda $k=1,2,...,N/2-1$.

Har qanday $S(t)$ signalni Uolsh funksiyalari majmua (jamlama)lariga yoyish mumkin (xuddi Fure qatoriga yoygandek)

$$S(t) - a_0\mathrm{WAL}(0,t) + \sum_{i=1}^{N/2-1}\sum_{j=1}^{N/2-1}[a_i\mathrm{SAL}(i,t) + b_i\mathrm{CAL}(j,t)], \quad (9.26)$$

bunda a_i va b_i – qator koeffisientlari.

Har qanday ikkita Uolsh funksiyasi uchun quyidagi ifoda kuchga ega

$$\sum_{t=0}^{N-1}\mathrm{WAL}(m,t)\mathrm{WAL}(n,t) = \begin{cases} N & agar\ n=m, \\ 0 & agar\ n \neq m. \end{cases}$$

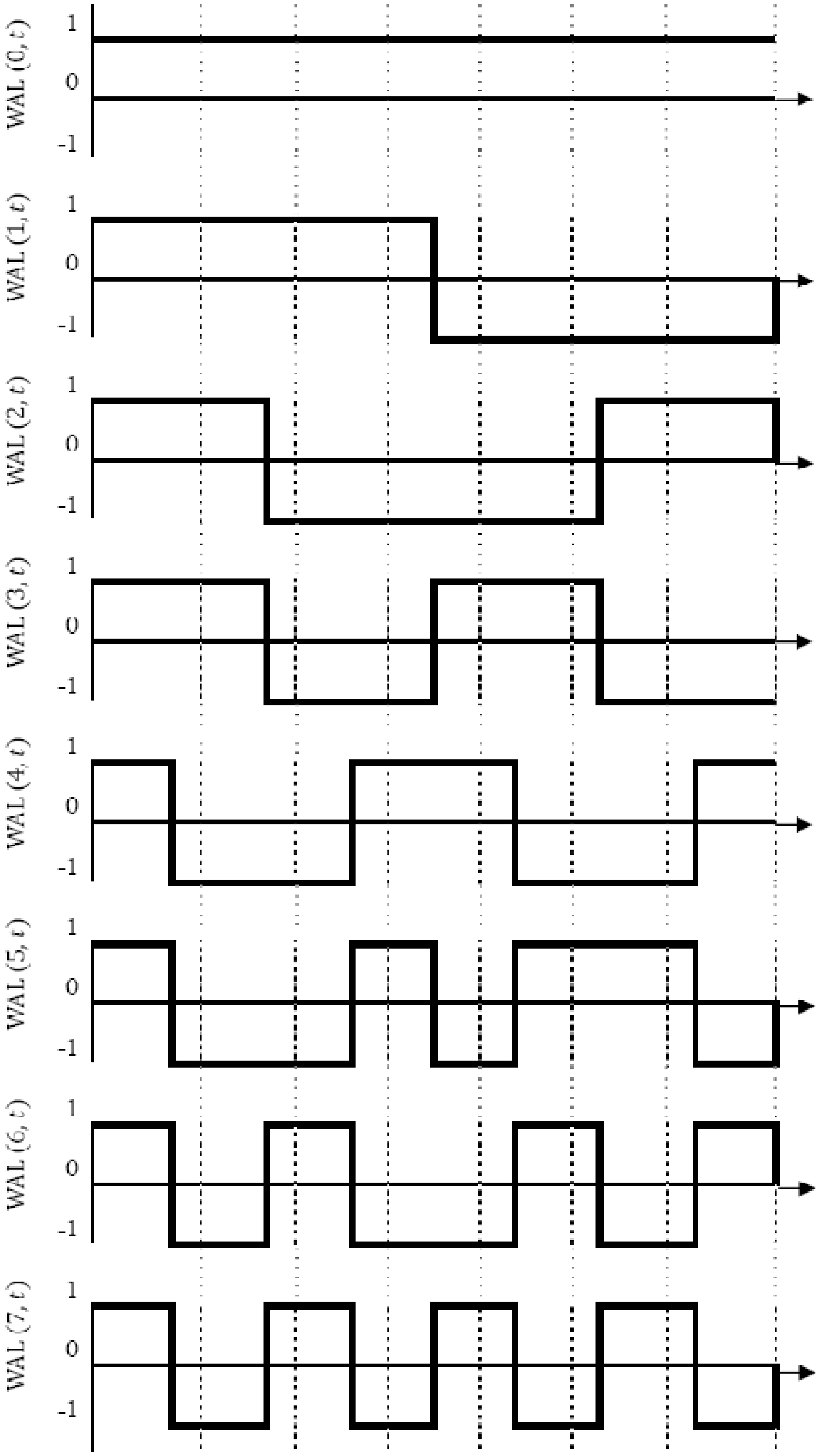
ya’ni Uolsh funksiyalari o‘zaro ortogonal.

Uolsh almashtirishi uchun to‘g‘ri va teskari almashtirishlarni tadbiq etish mumkin:

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N\ 1} x_i\mathrm{WAL}(k,i)\,, \quad k = 0,1,\dots,N-1, \quad (9.27)$$

$$x_i = \sum_{i=0}^{N-1} X_k\mathrm{WAL}(k,i)\,, \quad k = 0,1,\dots,N-1. \quad (9.28)$$

Agar $1/N$ ko‘paytmani e’tiborga olinmasa teskari almashtirish to‘g‘ri almashtirish bilan bir xil va $\mathrm{WAL}(k,i)=\pm 1$ bo‘ladi.



9.5-rasm. *Uolshning 8×8 tartibli almashtirishi matrisasi uchun uning ketma-ket kattalashishi* $n=7$ *gacha tartibga keltirilgan funksiyalari*

Shuning uchun “shakl”lar juftlarini matrisalarni raqamli usul (metod) asosida ko‘paytirish natijasida topish mumkin. Ammo faza haqidagi axborot yo‘qligi uchun UDA tez korrelyatsiya (korrelyatsiya oralig‘i kichik)larni va o‘ramlarni hisoblash uchun yaroqsiz.

(9.17) tenglik UDA k nchi elementini diskret signal har bir elementi x_i ni k ketma-ketlikli Uolsh funksiyasiga ko‘paytirishi va k ning hamma qiymatlari uchun qo‘shish orqali olish mumkin $k = 0,1,...,N-1$. k ning hamma elementlari uchun uni matrisa ko‘rinishida yozish mumkin

$$\mathbf{X}_k = x_i \mathbf{W}_{ki} \,, \tag{9.29}$$

bunda $x_i = [x_0 x_1 x_2 ... x_{N-1}]$ – ma’lumotlar ketma-ketligi.

$$\mathbf{W}_{ki} = \begin{bmatrix} W_{01} & W_{02} & \cdots & W_{0,N-1} \\ W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1,N-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ W_{N-1,1} & W_{N-1,2} & \cdots & W_{N-1,N-1} \end{bmatrix}$$

– Uolsh almashtirishi matrisasi, $X_k = [X_0 X_1 X_2 ... X_{N-1}]$ – $(N-1)$ UDA matrisasi tashkil etuvchilari.

Alohida ta’kidlaymiz, W_{ki} – bu $N \times N$ tartibli matrisa, bunda N berilgan nuqtalar soni, ya’ni diskret signal nuqtalari. Agar N berilgan nuqtalar soni bo‘lsa, u holda Uolsh funksiyasining dastlabki N ta tartibga keltirilganlarini ko‘rib chiqish kerak bo‘ladi. Ularning har biri N marta diskretizatsiyalanadi, bunda W_{ki} matrisaning k nchi qatori k komponenta ketma-ketligining N ta diskret qiymatlariga to‘g‘ri keladi.

9.7. Adamar almashtirishi

Adamar almashtirishi yoki Uolsh-Adamar almashtirishi bu ham mazmunan Uolsh almashtirishi bo‘lib, faqat boshqa tartibdagi Uolsh funksiyalari va boshqa almashtirish matrisasi qatoridir. Bunday o‘rin almashtirishlar natijasida olinadigan Adamar matrisasi, ikkinchi tartibli matrisaning massiv ostini o‘z ichiga oladi. 9.6-rasmda Adamarning 8×8 tartibli matrisasi ko‘rsatilgan bo‘lib, u ${}^8H$ ko‘rinishida belgilanadi.

$$
\begin{array}{cc}
 & i \rightarrow \\
 & \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{array}{c} k \\ \downarrow \end{array}
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

9.6-rasm. *Adamarning* 8×8 *tartibli almashtirish matrisasi*

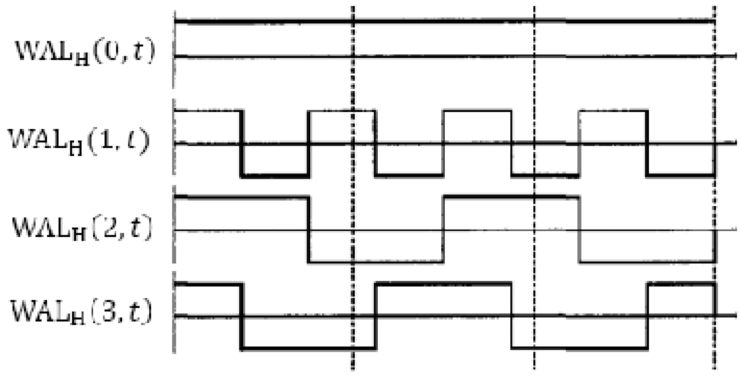
Uni matrisalar orqali yozish mumkin

$$ {}^{2}\mathrm{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad -{}^{2}\mathrm{H} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. $$

Adamarning har qanday $2N$ tartibli matrisasini ${}^{2}H$ dan rekursiv shakldа olish mumkin, ya'ni

$$ {}^{2N}\mathrm{H} = \begin{bmatrix} {}^{N}\mathrm{H} & {}^{N}\mathrm{H} \\ {}^{N}\mathrm{H} & {}^{N}\mathrm{H} \end{bmatrix}. \qquad (9.30) $$

Bu rekursivlik xossasidan Uolsh funksiyasini Adamar tomonidan aniqlangan tartibda joylashtirish natijasida olingan Uolsh-Adamar tez almashtirishini UDAga nisbatan ancha katta tezlik bilan hisoblash mumkin. Adamar tartibida joylashgan Uolsh (yoki tabiiy tartibda joylashgan) funksiyasi 9.7-rasmda ko'rsatilgan.



9.7-rasm. *Adamar* 4×4 *tartibli almashtirish matrisasi uchun diskretizatsiyalash vaqtini ko'rsatuvchi* $n = 7$ *gacha Adamar tartibida joylashgan Uolsh funksiyasi*

9.8. Veyvlet almashtirishi

Geyzenberg noma’lumlik (noaniqlik) fizik prinsipiga asosan, bir vaqtning o‘zida x zarrachaning holati va uning impulsi p ni aniq bilish mumkin emas. Amalda

$$xp \geq h = 6.626 \times 10^{-34} \text{Dj·s}, \tag{9.31}$$

bunda h – Plank doimiysi. Eynshteynning $E = mc^2$ tenglamasi asosida bu prinsipni signallarga ishlov berish sohasida ham qo‘llash mumkin. Bunda Geyzenberg prinsipi quyidagicha ta’riflanadi: bir vaqtning o‘zida har qanday aniqlik bilan vaqt va chastotani aniqlash mumkin emas, ya’ni

$$\Delta f \cdot T \geq 1, \tag{9.32}$$

bunda Δf va T chastota va vaqt bo‘yicha farqlanishni ifodalaydi. Agar chastota qiymati yuqori aniqlik bilan farqlansa (aniqlansa), u holda chastota nisbatan kam aniqlik bilan baholanadi va aksincha.

Natijada bir vaqtning o‘zida signal tashkil etuvchilari chastotasini va uning paydo bo‘lish vaqtini yoki signal turli chastotali tashkil etuvchilarini vaqt bo‘yicha ajratish talab darajasidagi yuqori aniqlik bilan o‘lchash yetarli darajada murakkab bo‘lishi mumkin. Bu holat agar signal yuqori chastotali tashkil etuvchilardan iborat bo‘lsa va ular vaqt sohasida uzoq davomiyli tashkil etuvchilarga juda ham yaqin joylashgan bo‘lsa va ular ham o‘z vaqtida chastota sohasida yaqin joylashgan bo‘lsa, hamda turli onlar (vaqtlar)da hosil bo‘lsa yuz berishi mumkin.

Bunday signallar davriy bo‘lmaydi. Bu chastota-vaqt tahlili umumiy muammosini yechish uchun Veyvlet almashtirishdan foydalaniladi (wavelet transform), u nostasionar signallarni tahlil etish vositasi hisoblanadi. Veyvlet almashtirishdan signallarni filtrlashda, shovqinlarni yo‘qotishda, sinulyarlik joyini topish va ularning taqsimlanishini aniqlash kabi masalalarni yechishda foydalanish mumkin.

Fure almashtirishida signal qiymati darajasi ko‘rsatkichida mavhum bo‘lgan hissa (vesovoy) koeffisienti bo‘lsa va argument garmonik shaklda bo‘lib chastotaga bog‘liq bo‘lsa, ya’ni sinusoidal tashkil etuvchi bo‘lsa, Veyvlet almashtirishda xususiy hissa koeffisientlari qiymati sifatida Veyvlet funksiyalardan foydalaniladi.

Hamma Veyvlet funksiyalar asosiy (bazaviy) Veyvlet funksiyasidan olinadi. Ba’zi hissalar bo‘lishini ta’minlash uchun bir qator asosiy (bazaviy) funksiyalardan foydalaniladi. Talab etiladigan xossalarga ega bo‘lish uchun Veyvlet funksiya tebranishlar shaklida bo‘lib, doimiy tashkil etuvchisi bo‘lmasligi kerak, spektri ma’lum bir kichik polosada joylashgan bo‘lishi, kichik vaqt ichida nolga teng qiymatgacha kichiklashishi va aksincha, kichik vaqt oralig‘ida o‘zining eng katta qiymatiga ega bo‘lishi kerak. Bu xususiyat Veyvlet almashtirish bir qiymatli bo‘lishiga kafolat beradi. Asosiy funksiyani $\Psi(t)$ ko‘rinishida yozish mumkin. Misol uchun, Morlet yoki Gauss modifikatsiyalangan asosiy funksiyasi (Morle veyvleti) quyidagicha ifodalanadi

$$\Psi(t) = e^{i\omega_0 t} e^{-t^2/2}, \tag{9.33}$$

Uning Fure ko‘rinishi

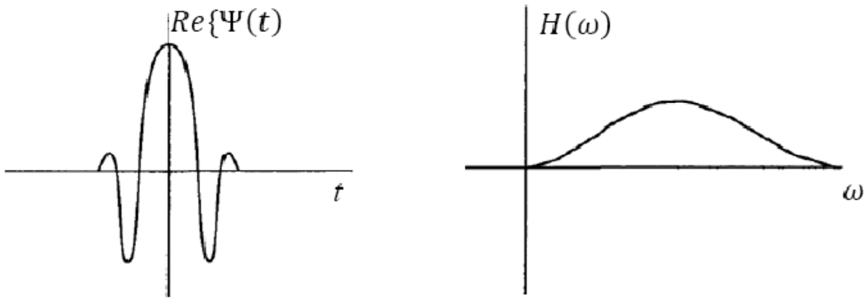
$$H(\omega) = \sqrt{2\pi e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}} \tag{9.34}$$

Bu ikki signal 9.8-rasmda keltirilgan bo‘lib, bundan ko‘rinadiki $\Psi(t)$ funksiya yuqorida keltirilgan talablarga javob beradi, ya’ni tebranuvchan va nolgacha kichiklashadi.

Qolgan (qiz, ikkilamchi) funksiyalar birlamchi asosiy funksiyalar masshtabini o‘zgartirish natijasida olinadi, bular funksiyalar oilasini tashkil etadilar. Har bir ikkilamchi (qiz) funksiyani quyidagicha ifodalash mumkin

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\Psi\{(t-\tau)/a\},$$

bunda a – masshtabni o‘zgartirish o‘zgaruvchan koeffisienti, τ – olib o‘tish o‘zgarmas koeffisienti. Agar a ning masshtabi kattalashsa funksiyaning amplitudasi va argumenti kichiklashadi. Amplituda berilgan qiymatida argumentning kichiklashishi chastotaning kichiklashishini anglatadi.



9.8-rasm. *Modifikatsiyalashtirilgan Gauss yoki Morlet,* $\Psi(t)$ *ona (asosiy) veyvlet funksiyasi va uning Fure ko'rinishi* $H(\omega)$

Masshtabni o'zgartirish koeffisienti a va olib o'tish o'zgarmas koeffisienti τ yordamida katta va kichik (turli) amplitudali, yuqori va past (turli) chastotali funksiyalarni yaratish mumkin va ularni vaqtning turli onlariga joylashtirish mumkin.

Shunday qilib turli vaqt oralig'iga joylashgan turli chastotali tashkil etuvchilarga ega nostasionar signallarni turli veyvlet funksiyalar yig'indisi orqali ifodalash mumkin. Veyvlet funksiyasidan shu maqsadlarda foydalaniladi.

Uzluksiz veyvlet almashtirishni (UVA) (a,τ) quyidagicha ifodalash mumkin

$$\text{UVA}(a,\tau) = \left(1/\sqrt{a}\right) \int s(t)\Psi\{(t-\tau)/a\}dt. \qquad (9.35)$$

Bu tenglama paramterlarini diskretlash natijasida diskret parametrli veyvlet almashtirishi (DPVA) (m,n) ni olish mumkin, u quyidagicha aniqlanadi

$$\text{DPVA}(m,n) = a_0^{-m/2} \int s(t)\, \Psi\{(t - n\tau_0 a_0^m)/a_0^m\}dt\,, \qquad (9.36)$$

bunda quyidagi almashtirishlar amalga oshirilgan: $a = a_0^m$, $\tau = n\tau_0 a_0^m$. Bu almashtirishlarda a_0 va τ_0 lar a va τ lar uchun diskretizatsiyalash oralig'i; m va n lar esa butun sonlar.

Ko'p hollarda $a_0 = 2a$, $\tau_0 = 1$ ga teng deb olinadi. Yuqoridagilarni e'tiborga olinsa

$$\text{DPVA}\ (m,n) = 2^{-m/2} \int s(t)\, \Psi\{(t - n2^m)/2^m\}dt =$$

$$= 2^{-m/2} \int s(t)\Psi\{2^{-m}t - n\}\, dt.$$

Bu vaqt o‘qini 2^{-m} marotaba kengaytiradi, natijada veyvlet funksiya vaqt bo‘yicha musbat tomonga $2^{m}n$ kattalikka suriladi.

Veyvlet funksiyani vaqt bo‘yicha diskretizatsiyalash, diskret vaqtli veyvlet almashtirishi (DVVA)ni beradi, u quyidagicha aniqlanadi

$$\text{DVVA}\,(m,n) = a_0^{-m/2} \sum_k s(k)\Psi(a_0^{-m}\,k - n\iota_0). \qquad (9.37)$$

Agar qaytadan $a_0 = 2a$ va $\tau_0 = 1$ deb hisoblasak u holda DVMI quyidagicha aniqlanadi

$$\text{DVVA}\,(m,n) - 2^{-m/2} \sum_k s(k)\Psi(2^{-m}\,k - n), \qquad (9.38)$$

(9.38) ifoda veyvlet diskret almashtirishi hisoblanadi.

Shunday qilib, veyvlet diskret almashtirishi uzluksiz veyvlet almashtirishidan masshtab parametri a ni, olib o‘tish o‘zgarmas koeffisienti τ va vaqtli diskretizatsiyalash, so‘ngra diskretlash oralig‘i qiymatlari $a_0 = 2$ va $\tau_0 = 1$ deb hisoblash natijasida olinadi.

Veyvlet almashtirishlardan signallar chastota-vaqt tarkiblarini o‘rganishda foydalanishdan tashqari, ulardan signallarni filtrlash, ya’ni shovqinning qandaydir qismini olib tashlashda ham foydalanish mumkin. Buning uchun signal tashkil etuvchilarga ajratilishi kerak. So‘ngra taqqoslash asosida shovqin tashkil etuvchilari olib tashlanadi. Va nihoyat shovqinlardan tozalangan signal tashkil etuvchilari veyvlet funksiyalari orqali qayta tiklanadi. Uzluksiz veyvlet almashtirishidan foydalanilganda signalni qayta tiklash (teskari almashtirishi) ifodasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$s(t) = \frac{1}{C_\Psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{a>0}^{\infty} UVA(a,\tau) \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}} \right\} \Psi\{(t-\tau)/a\} \left\{ \frac{1}{\sqrt{a^2}} \right\} dadt, \qquad (9.39)$$

bunda $\quad C_\Psi = \int_0^{\infty} \{|H(\omega)|^2/\omega\} d\omega < \infty$,

va $H(\omega)$ – asosiy impuls $\Psi(t)$ ning Fure ko‘rinishi.

9.9. Gilbert almashtirishi

Aloqa kanallari orqali uzatiladigan signallar vaqtning haqiqiy funktsiyasi bo'ladi. Ammo bir qator signallar uzatish muammolariga tegishli masalalarni echishda signalni vaqt funktsiyasi bo'lgan elementar kompleks tashkil etuvchilar yig'indisi sifatida qarashni taqazo etadi yoki signalning o'zini to'liq kompleks funktsiya deb tadqiq etishga ehtiyoj tug'iladi, ya'ni

$$\dot{s}(t) = s(t) + js^{*}(t) = u(t)e^{j\psi(t)} \tag{9.40}$$

bunda, $u(t)$ va $\psi(t)$ – signal o'rovchisi va fazasi. Bu holda haqiqiy signal kompleks signal orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$s(t) = R_c\dot{s}(t) = R_c u(t)e^{j\psi(t)} = u(t)\cos\psi(t) \tag{9.41}$$

Signalni bu shakldа ifodalashdan tor polosali signallarni tadqiq qilishda keng foydalaniladi.

Agar $s(t)$ va $s^{*}(t)$ Gilbert o'zgartirish juftligi orqali bir-biriga bog'liq bo'lsa, $s(t)$ signal analitik signal deb ataladi, ya'ni

$$\left.\begin{aligned} s^{*}(t) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(\tau)}{t-\tau}d\tau \\ s(t) &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s^{*}(\tau)}{t-\tau}d\tau \end{aligned}\right\} \tag{9.42}$$

shaklida bog'langan bo'lsa, bunday signal analitik signal hisoblanadi. (9.42) ifodalardagi integrallar Koshining asosiy qiymati sifatida qabul qilinadi. $s^{*}(t)$ funktsiya bilan Gilbert bo'yicha moslashgan hisoblanadi. $s(t)$ va $s^{*}(t)$ ni Gilbert sharti asosida tanlangan bo'lsa, u holda signal o'rovchisi va fazasi quyidagicha aniqlanadi:

$$u(t) = \sqrt{[s(t)]^2 + [s^{*}(t)]^2}, \tag{9.43}$$

$$\psi(t) = arctg\frac{s^{*}(t)}{s(t)}. \tag{9.44}$$

Agar $s(t)$ signal spektri kengligi o'zining o'rtacha chastotasi ω_0 dan kichik bo'lsa, u holda bu signalning amplitudasi va fazasi signal $s(t)$ ning o'ziga nisbatan sekin o'zgaradi. Gilbert to'g'ri va teskari bir juft o'zgartirishlari asosida $s(t)=\cos\omega t$ signalga $s^*(t)=\sin\omega t$ signal va $s(t)=\sin\omega_0 t$ signalga $s^*(t)=-\cos\omega_0 t$ signal kompleks moslashganligini tasdiqlash mumkin. Xuddi shunga o'xshash $s(t)=\sum_k (a_k\cos k\omega_0 t+b_k\sin k\omega_0 t)$ signal bilan $s^*(t)=\sum_k (a_k\sin k\omega_0 t-b_k\cos k\omega_0 t)$ signal kompleks moslashgan bo'ladi.

Shunday qilib $s(t)=A\cos\omega t$ oddiy garmonik tebranish signalga $s^*(t)=A\cos\omega t+jA\sin\omega t=Ae^{j\omega t}$ analitik signal mos keladi.

Agar signal Fure integrali ko'rinishida bo'lsa:

$$s(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s(j\omega)e^{j\omega t}d\omega . \tag{9.45}$$

Uning chastota spektri quyidagicha ifodalanadi:

$$s(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt=\Gamma[s(t)] \tag{9.46}$$

$s(t)$ va $s^*(t)$ signallarning spektri o'zaro quyidagi bog'lanishga ega:

$$\hat{\Gamma}[s(t)]=[-j\,\mathrm{sgn}(\omega)]s(j\omega), \tag{9.47}$$

bunda $\mathrm{sgn}(\omega)=\begin{cases} +1, & agar\,\omega>0; \\ 0, & agar\,\omega=0; \\ -1, & agar\,\omega<0. \end{cases}$

Shunday qilib, Gilbert o'zgarishini $s(t)$ signalning hamma spektral tashkil etuvchilarini $-\frac{\pi}{2}$ ga suruvchi elektr zanjiridan o'tishi deb hisoblash kerak. Ushbu elektr zanjirining chastota va faza tavsiflari quyidagicha bo'ladi:

$$K(j\omega)=-j\,\mathrm{sgn}(\omega), \qquad h(t)=\frac{1}{\pi t}.$$

(9.47) ifodani (9.40) ifodaga kiritish natijasi $S^*(t)$ signalning spektri $S(j\omega)$ ning “bir tomonlama” ekanini ko'rsatadi:

$$\dot{s}(j\omega)=\begin{cases} 2s(j\omega), & agar \quad \omega>0; \\ s(0), & agar \quad \omega=0; \\ 0, & agar \quad \omega<0. \end{cases} \qquad (9.48)$$

Bu analitik sigalning juda muhim hossasi hisoblanadi.

Davriy signal $s(t)$ ning Gilbert sharti bo'yicha moslashgan $s^*(t)$ funktsiyasi ham $s(t)$ signal davriga teng bo'ladi. $s(t)$ va $s^*(t)$ signallar ularning davri T oralig'ida o'zaro ortogonal bo'ladi, ya'ni

$$\int_0^T s(t)\hat{s}^*(t)dt=0\,.$$

Agar $s_i(t)$ va $s_j(t)$ ortogonal signallardan birini uning Gilbert o'zlashtirishi sharti asosida moslashtirilganiga almashtirilganda ham ortogonallik hususiyati saqlansa, bunday signallar kuchaytirilgan ma'noda ortogonal signallar deb ataladilar, ya'ni

$$\begin{aligned} &s_i(t)\cdot s_j(t)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s_i(t)\cdot s_j(t)dt=0; \\ &s_i(t)\cdot \hat{s}^*{}_j(t)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s_i(t)\cdot \hat{s}^*{}_j(t)dt=0, \qquad agar \qquad i\neq j \end{aligned} \qquad (9.49)$$

Bundan tashqari bunday signallardan birini uning $s^*(t)$ kompleks moslashganiga almashtirilganda ham o'zaro ortogonallik hususiyati saqlanib qoladi, ya'ni

$$s_i(t)\cdot s_j(t)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}s_i(t)\cdot s^*{}_j(t)dt=0; \qquad agar \qquad i\neq j \qquad (9.50)$$

Analitik signal tushunchasi har qanday signalni kompleks shaklga keltirish va uning o'rovchisini hamda fazasini aniq aniqlash imkoniyatini beradi. Determinant (o'zgarish qonuniyati ma'lum funktsiya) va tasodifiy signallar analitik shaklga keltirilishi mumkin.

Signalni analitik shaklga keltirish natijasida, uning o'rovchisi va fazasi o'zgarishini alohida-alohida tadqiq qilish mumkin bo'ladi. Masalan, tasodifiy jarayon tadqiq etilganda uning oniy qiymatlari bilan shug'ullanish o'rniga, uning o'rovchisi yoki fazasini tadqiq etish bilan chegaralanish mumkin.

Umuman olganda $x(t)$ va $x^*(t)$ jarayonlarning spektrlari va korrelyatsion funktsiyalari bir xil: $G_x(\omega) = G_{x^*}(\omega)$, $B_x(\tau) = B_{x^*}(\tau)$. $x(t)$ va $x^*(t)$ jarayonlarning o'zaro energetik spektrlari $G_{x^*}(\omega) = jG_{x^*}(\omega)$ o'zaro korrelyatsiya funktsiyasi quyidagi ifoda orqali aniqlanadi:

$$B_{x^*}(\tau) = -B_{x^*}(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty G_x(\omega)\sin\omega\tau d\omega \qquad (9.51)$$

Tasodifiy jarayon taqsimot qonuni bilan uning o'rovchisi $s(t)$ va fazasi $\psi(t)$ taqsimot qonunlari bir-birlariga bog'liq, tasodifiy jarayonning ehtimollik zichligi taqsimot qonuni $P(x)$ orqali, uning o'rovchisi va fazasi ehtimolligi zichligi taqsimoti qonuni $P(s)$ va $P(\varphi)$ ni aniqlash mumkin.

Nazorat savollari

1. Davriy signalni Fure qatoriga yoying va uning tashkil etuvchilari haqida so'zlab bering.
2. Fure to'g'ri va teskari almashtirishi formulasini yozing va tushuncha bering.
3. Fure to'g'ri va teskari diskret almashtirishidan fanday signallar va qaysi hollarda foydalaniladi?
4. Fure diskret kosinus almashtirishi haqida tushuntirish bering.
5. Uolsh almashtirishi haqida tushuncha bering.
6. Adamar almashtirishi haqida tushuncha bering.
7. Veyvlet almashtirish haqida tushuncha bering.
8. Gilbert almashtirish haqida tushuncha bering.