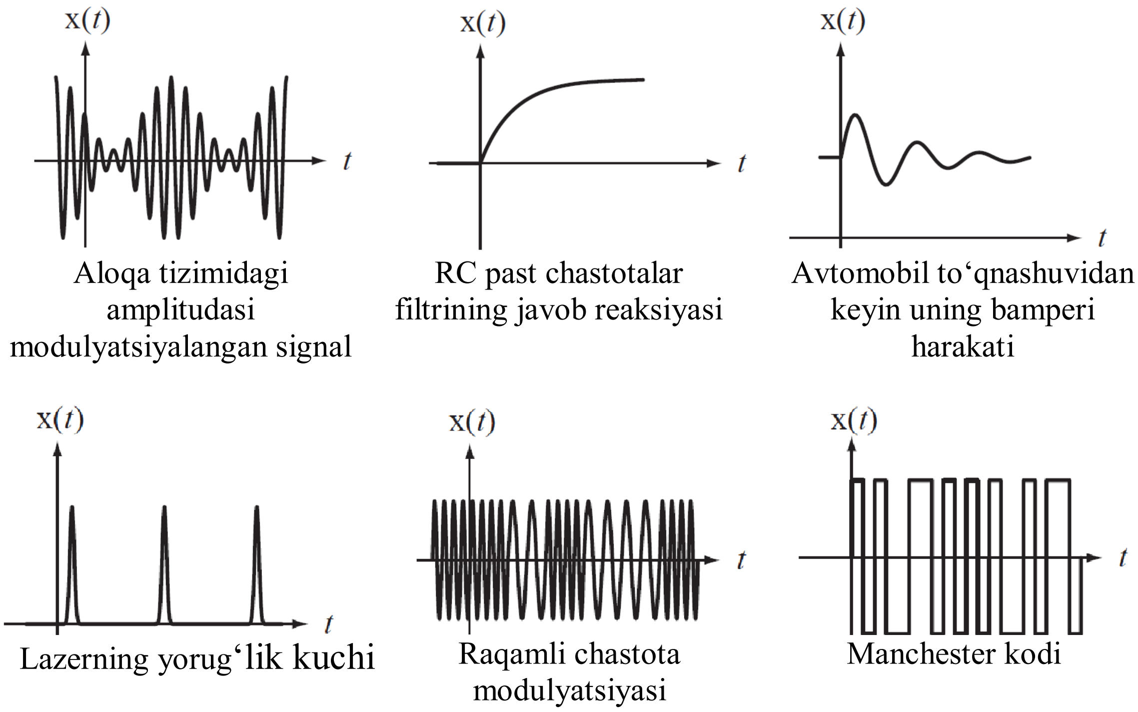
# 2-BOB. UZLUKSIZ SIGNALLARNING MATEMATIK IFODALARI

## 2.1. Umumiy tushunchalar

Mutaxassislarning o‘tgan davr mobaynidagi kuzatishlari shuni ko‘rsatadiki, signallar bir necha ko‘rsatkichlari asosida bir nechta guruhlarga bo‘linadi. 2.1-rasmda signallarga bir qancha misollar keltirilgan.

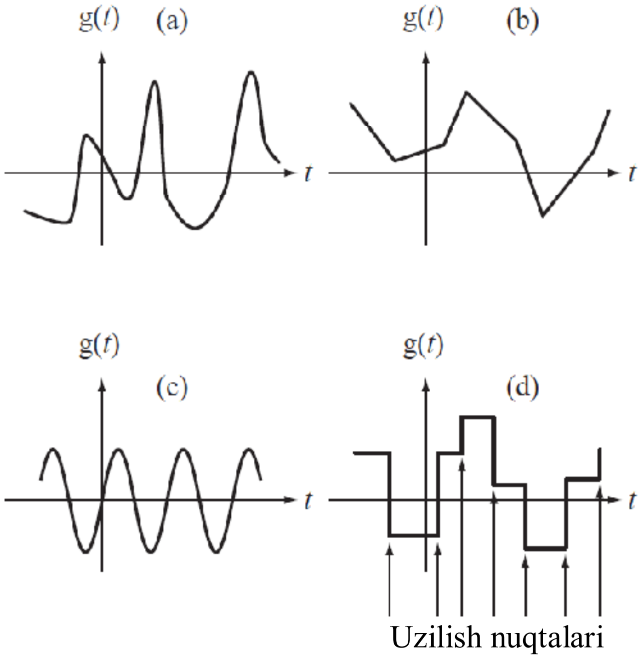



2.1-rasm. *Signallarga namunalar*

Signallar va tizimlarni tahlil qilishda signallar matematik funksiyalar orqali ifodalanadi. Real signallarni ifodalovchi bir nechta funksiyalar bizga avvaldan tanish, masalan eksponenta va sinusoida. Ushbu signallar tizimlarni tahlil qilishda ko‘p ishlatiladi. Bir qator funksiyalar aloqa tizimdagi o‘tish jarayonlarini ifodalashda foydalaniladi. Boshqa bir qator funksiyalar tizimlarni analitik tahlil qilishda yuzaga keladigan jarayonlarni ifodalash uchun qo‘llaniladi. Ushbu funksiyalar bir-biri bilan o‘zaro boqliq bo‘lib, ularni bir shakldan boshqa shaklga o‘zgartirish sodda bo‘lishini inobatga olgan holda tanlanadi.

## 2.2. Uzluksiz signal funksiyalari

Agar funksiya vaqt funksiyasi va ushbu funksiyaning qiymati haqiqiy son bo‘lsa, hamda $g(t)$ funksiya har qanday $t$ vaqt momentida ma’lum bir qiymatni qabul qilsa, bunday funksiya uzluksiz funksiya hisoblanadi. 2.2-rasmda bir nechta uzluksiz funksiyalarga namunalar keltirilgan.




2.2-rasm. *Uzluksiz funksiyalarga namunalar*

2.2d-rasmda uzilishli funksiya keltirilgan. Agar $t = t_0$ uzilish nuqtasi bo‘lsa, u holda

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g(t_0+\varepsilon) \neq \lim_{\varepsilon\to 0} g(t_0-\varepsilon).$$

o‘rinli bo‘ladi.

2.2-rasmdagi (a)-(s) funksiyalar uzluksiz funksiyalar hisoblanadi, chunki $t$ ning barcha real qiymatlarida funksiya aniqlangan hisoblanadi.

### 2.2.1. Kompleks eksponenta va sinusoida

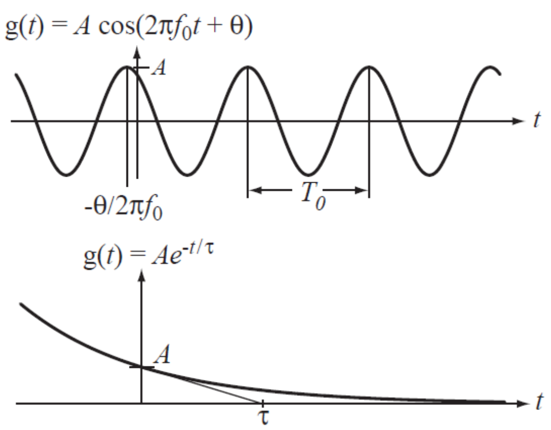
Sinusoida va ekponenta funksiyalari bizga yaxshi tanish, ya’ni sinusoida quyidagi ifoda orqali

$$g(t) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T_0} + \theta\right) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta) =$$
$$= A\cos(\omega_0 t + \theta), \qquad (2.1)$$

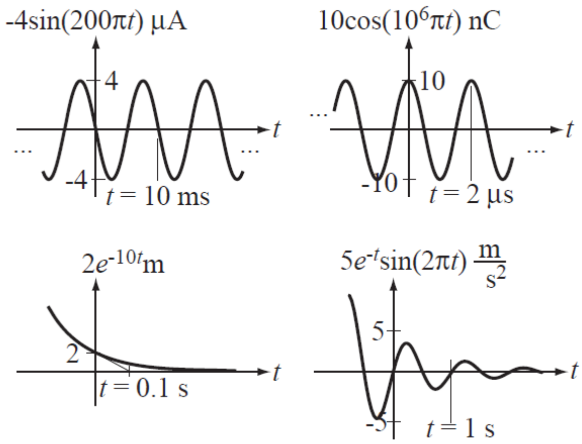
hamda eksponenta esa quyidagi ifoda orqali

$$g(t) = Ae^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t}[\cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)] \qquad (2.2)$$

ifodalanadi. Bunda $A$ – amplituda, $T_0$ – takrorlanish davri, $f_0$ – aylanma chastota, $\omega_0$ – burchak chastota, $t$ – vaqt, $\sigma_0$ – eksponentaning so'nish darajasi (sathi), ya'ni uning vaqt doimiysi $\tau$ ga teskari qiymat (2.3- va 2.4-rasm).




2.3-rasm. *Real sinusoida va eksponenta*




2.4- rasm. *Real sinusoida, kosinusoida va eksponentaga namunalar*

Sinusoida va eksponenta signallar va tizimlar nazariyasida juda keng tarqalgan. Chunki ko'pgina uzluksiz vaqt tizimlarini doimiy koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglama yoki kompleks eksponentaning xususiy funksiyasi sifatida ifodalash mumkin.

Garmonik signalning oniy qiymatini vaqt $t$ funksiyasi yoki $\omega_0 t$ – faza funksiyasi sifatida aniqlash mumkin va grafik shakldа ifodalash mumkin.

Signal $g(t)$ vaqt funksiyasi sifatida tahlil etilganda uning davri $T_0$ ga teng bo'ladi va faza funksiyasi sifatida tahlil etilganda esa davri $2\pi$ ga teng bo'ladi. Bunda garmonik tebranish boshlang'ich fazasi $\theta$ ni uning vaqt diagrammasida va vektor diagrammasida tasvirlash mumkin.

Garmonik signal $g(t) = A\,cos(\omega_0 t + \theta)$ ni ikki alohida sinusoidal va kosinusoidal, bir-biri bilan kvadraturada bo‘lgan tashkil etuvchilar orqali quydagicha ifodalash mumkin:

$$g(t) = A_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A_0\cos\varphi_0\cos\omega_0 t - A_0\sin\varphi_0\sin\omega_0 t = a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t,$$

bunda, $a = A_0\cos\varphi_0$ va $b = A_0\sin\varphi_0$.

$g(t)$ signalning kosinusoidal va sinusoidal tashil etuvchilari amplitudalari $a$ va $b$ lar orqali signal amplitudasi va fazasini aniqlash mumkin:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ va } \varphi = -arctg\frac{b}{a}.$$

Eyler formulasidan foydalanib,

$$e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t; \qquad e^{-j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t - j\sin\omega_0 t;$$

$$\cos\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}; \qquad \sin\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2}.$$

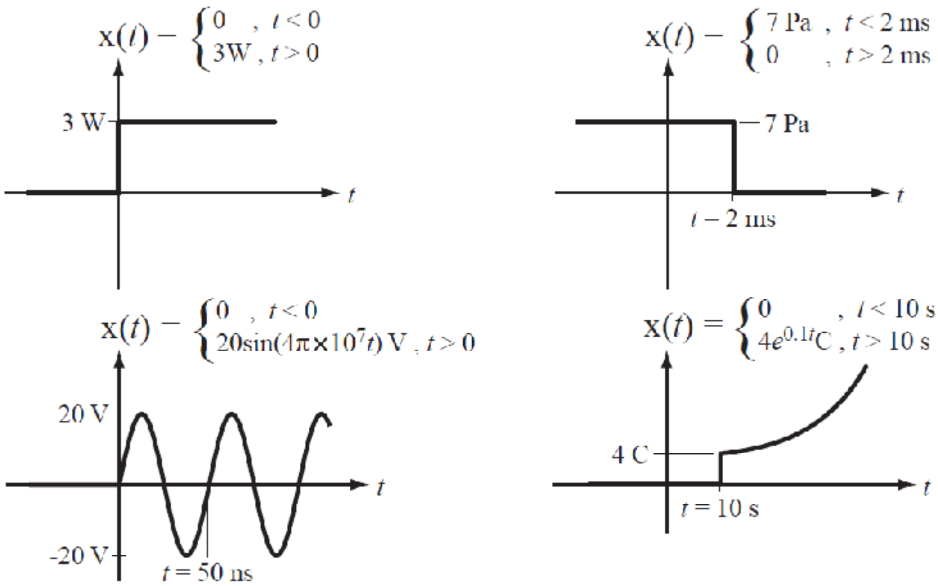
garmonik signalni kompleks funksiya shaklida ifodalash mumkin:

$$s(t) = \frac{A_0}{2}\left(e^{j(\omega_0 t + \varphi_0)} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi_0)}\right). \tag{2.3}$$

Garmonik va eksponenta signallar signallar va tizimlar tahlilida muhim o‘rin egallaydi, chunki ko’pgina tizimlardagi o‘zgarishlar asosan differensial tenglamalar ko’rinishida ifodalanadi. Keyinroq Furye qatori tadqiqi va Furye almashtirishlari qismida ko‘rishimiz mumkin, bir qancha murakkab signallar, ya’ni garmonik bo‘lmagan signallar ham bir necha garmonik signallarning kombinasiyasidan iborat bo‘ladi.

## 2.3. Uzilishli funksiyalar

Barcha garmonik va eksponenta signallar uzluksizdir. Ammo tizimlarda ishlatiladigan bir qancha muhim signallar uzluksiz bo‘lmaydi, bunday signallarni uzilishli signallar deb ataladi. Tizimlardagi uzilishli signallarga namunalar 2.5-rasmda keltirilgan.



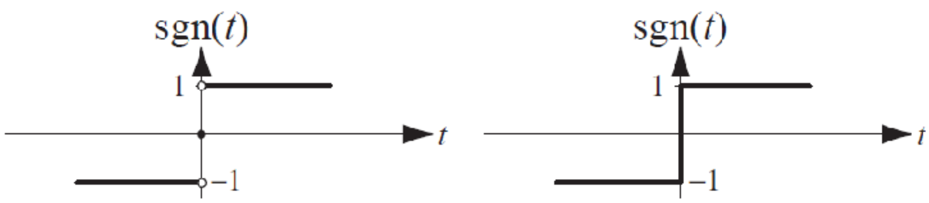

2.5-rasm. *Uzilishli signallarga namunalar*

2.5-rasmda keltirilgan signallarning funksional ifodalari aniq va to‘liq bo‘lib, biroq birmuncha qo‘pol ko’rinishga ega. Ushbu turdagi signallarni uzluksiz funksiyaga ko‘paytirish orqali sodda matematik shaklda ifodalash mumkin.

## 2.3.1. Signum funksiyasi

Quyidagi ko’rinishga ega bo‘lgan funksiya signum funksiyasi deb ataladi (2.6-rasm):

$$sgn(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \tag{2.4}$$




2.6-rasm. *signum funksiyasi*

2.6-rasmda chapdagi grafikni aniq matematik funksiya orqali ifodalash mumkin. O‘ngdagi grafik esa texnik nuqtai nazardan chapdagi funksiyani tasvirlash usuli hisoblanadi. Amaliyotda hyech qaysi signal uzlukli ravishda o‘zgarishi mumkin emas, agar ushbu signal generator yordamida shakllantirilgan bo‘lsa va ossillograf orqali kuzatilsa bu signal o‘ng tomondagi grafik ko‘rinishida bo‘ladi.

### 2.3.2. Yakka sakrash ko‘rinishidagi funksiya

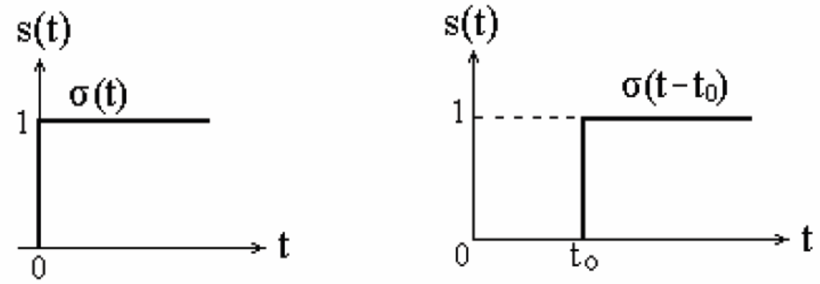
Yakka sakrash funksiyasi (Xevisayd funksiyasi) fizik qurilmaning bir onda bir holatdan boshqa bir holatga o‘tish jarayonini ifodalaydi (2.7-rasm). Yakka sakrash funksiyasini ko‘p hollarda ulanish funksiyasi deb ham yuritiladi va quyidagi formula orqali ifodalanadi:

$$\sigma(t)=\begin{cases} 0, & agar \quad t<0, \\ 1/2, & agar \quad t=0, \\ 1, & agar \quad t>0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Yakka sakrash signalining yordamida radiotexnik qurilma o‘tish xarakteristikasi olinadi. Qurilmaning yakka birlik funksiyaga aks ta’siri uning o‘tish xarakteristikasi hisoblanadi.

Delta funksiya $\delta(t)$ va yakka sakrash funksiyasi $\sigma(t)$ bir-biri bilan quyidagicha bog‘langan:

$$\delta(t)=\frac{d\sigma(t)}{dt}; \qquad \sigma(t)=\int_0^t \delta(t)dt.$$

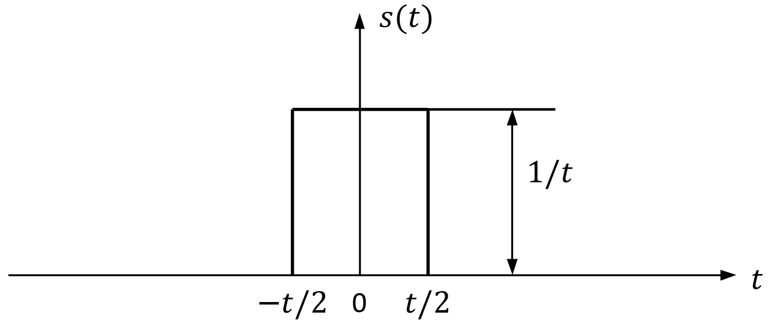



$$\sigma(t)=\begin{cases} 1, & agar\, t\ge 0, \\ 0, & agar\, t<0. \end{cases} \qquad \sigma(t-t_0)=\begin{cases} 1, & agar\ t\ge t_0, \\ 0, & agar\ t<t_0. \end{cases}$$

2.7-rasm. *Yakka sakrash funksiyasi*

### 2.3.3. Delta funksiya

Amplitudasi davomiyligiga teskari proporsional bo‘lgan impulsning (2.8-rasm) spektri zichligini tahlil qilamiz. Bu signalning davomiyligi $\tau$ nolga intilsa amplitudasi cheksizlikka intiladi, ammo impuls yuzasi o‘zgarmas saqlanadi va 1 ga teng bo‘ladi.




2.8-rasm. *Delta funksiyaga o‘tuvchi impuls*

Ushbu signal argumenti $t$ nolga intilsa uning funksiyasini quyidagi ifoda orqali aniqlash mumkin:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & agar \;\; t = 0; \\ 0, & agar \;\; t \neq 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

va shu bilan birga $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$, ya’ni impuls yuzasi birga teng.

Yuqorida keltirilgan xossalarga ega bo‘lgan funksiya $\delta(t)$ yakka birlik impuls, impuls funksiyasi, delta funksiyasi ba’zan esa Dirak funksiyasi deb ham ataladi.

Ushbu delta funksiyani vaqt o‘qi bo‘yicha surib, ushbu funksiya o‘zining eng katta qiymatiga erishgan holatiga keltirsak, u holda

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & agar \;\; t = t_0; \\ 0, & agar \;\; t \neq t_0, \end{cases} \tag{2.7}$$

va $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = 1$ bo‘ladi.

$\delta(t)$ – delta funksiya juda muhim xususiyatga egaligi uchun undan ko‘p hollarda foydalaniladi. (2.6) va (2.7) ifodalardan delta funksiyaning asosiy xossalari kelib chiqadi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot f(t)dt = f(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = f(t_0). \qquad (2.8)$$

$\delta(t - t_0)$ vaqt $t$ ning faqat bitta qiymatida cheksiz katta bo‘lib, vaqtning boshqa hamma qiymatlarida nolga tengligi uchun integrallash oralig‘ini juda kichik qilib tanlash mumkin, faqat $t_0$ vaqtni o‘z ichiga olsa yetarli. Ushbu oraliqda $f(t)$ funksiya $f(t_0)$ ga teng bo‘lgan o‘zgarmas qiymatga ega bo‘ladi va uni integraldan tashqariga chiqarish mumkin. Shunday qilib, har qanday integral osti funksiya $f(t)$ ni $\delta(t - t_0)$ ga ko‘paytirish ushbu ko‘paytmadan olingan integralni $f(t)$ funksiyaning $t = t_0$ vaqtdagi qiymatiga tenglashtirish imkoniyatini beradi. Matematikada va radiotexnikada (2.8) ifoda delta funksiyaning filtrlash xossasi deb yuritiladi. Axborot uzatish radiotexnik tizimlarida delta funksiyaning bu xossasini delta funksiyaning namuna olish (proba olish - stroblash) xossasi deb ham ataladi.

Signallar nazariyasida ko‘p hollarda vaqt $t$ yoki chastota $\omega$ ning funksiyasi bo‘lgan delta funksiyalardan foydalaniladi. Delta funksiyaning spektri zichligi delta funksiyaning (2.8) formula orqali aniqlanadigan xossasiga asoslanib, Fure almashtirishi yordamida quyidagicha aniqlanadi:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \cdot e^{-j\omega t}dt = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = e^{-j\omega t_0}. \quad (2.9)$$

Ushbu funksiyaning moduli birga teng bo‘lib, uning faza-chastota xarakteristikasi quyidagi ifoda orqali aniqlanadi:

$$\varphi(\omega) = -\omega t_0. \qquad (2.10)$$

Delta impulsidan chiziqli radiotexnik qurilmalarni tadqiqot qilishda keng foydalaniladi. Buning uchun real signalning – impulsning amplitudasi cheksiz katta va davomiyligi cheksiz kichik bo‘lishi shart emas. Buning uchun foydalanilayotgan impuls davomiyligi u o‘tayotgan chiziqli radiotexnik qurilma vaqt doimiyligiga nisbatan kichik bo‘lishi yetarli hisoblanadi.

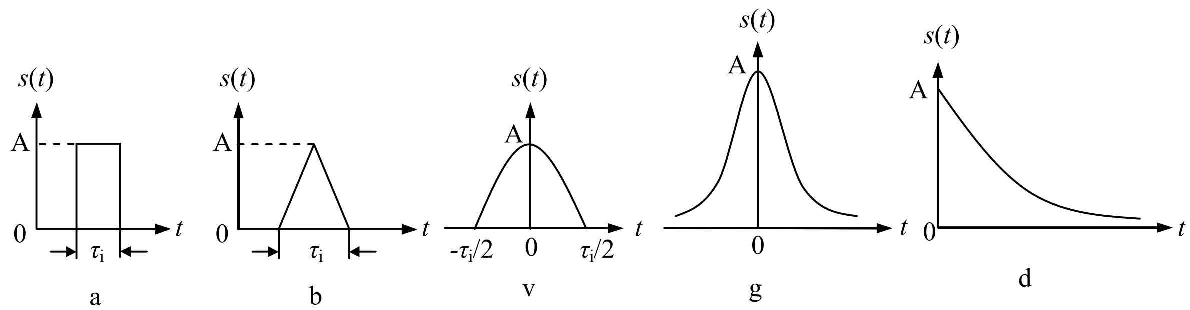
$\delta(t)$ funksiyaga nisbatan keltirilgan hamma fikrlarni $\delta(\omega)$ funksiya uchun ham $t$ ni $\omega$ ga va $\omega$ ni $t$ ga almashtirilgan holda qo‘llash mumkin.

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}dt. \qquad (2.11)$$

(2.11) formuladagi daraja ko‘rsatkichining o‘zgarganligi integralning qiymatiga ta’sir etmaydi.

## 2.4. Impuls signallar

Cheklangan vaqt oralig‘ida mavjud bo‘lgan signallar impuls signallar deb ataladi. Impuls signallar turli shakllarda bo‘lishi mumkin: to‘g‘rito‘rtburchaksimon, arrasimon, trapesiyasimon, uchburchaksimon, qo‘ng‘iroqsimon va h.k. ko‘rinishdagi video va radioimpulslar (2.9-rasm). Energiyasining asosiy qismi kichik vaqt orasiga to‘plangan signallarni ham impuls signallar deb hisoblash mumkin (2.9g,d-rasm.)

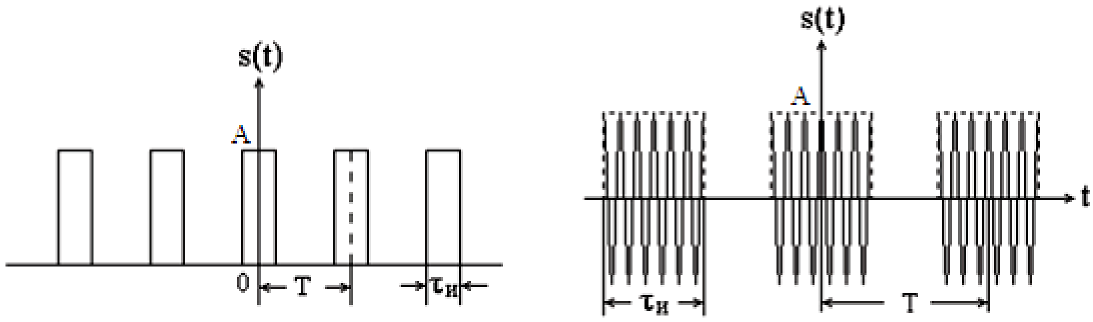



2.9-rasm. *Impuls signallar*

Quyidagi matematik formula bilan vaqt funksiyasi sifatida ifodalanadigan signallar davriy signallar deb ataladi:

$$s(t) = s_0(t + nT), \qquad (2.12)$$

bunda, $T$ – signal takrorlanish davri, ya’ni signalning ikki eng yaqin fazalari orasidagi vaqt, $n = 1, 2, ...k$ – takrorlanayotgan impulslar ketma-ketligi tartib raqami, $s_0(t)$ – video va radioimpulsning asosiy parametrlari bilan xarakterlanadi (2.10-rasm): $A$ – video va radioimpuls amplitudasi, $\tau_i$ – impuls davomiyligi, $T$ – impuls takrorlanish davri, $\omega_0$ – radioimpuls o‘rtacha chastotasi.




a) b)

2.10-rasm. *Davriy signallar*

Impuls signallar nazariya bo‘yicha cheksiz davomiylikka ega ($n = \infty$), ammo bunday signallar amalda mavjud emas. (2.12) formula shartlariga javob bermaydigan signallar nodavriy signallar deb ataladi. Yakka impuls shaklidagi video va radiosignallarni nodavriy signallar deb hisoblash mumkin. Ammo ba’zi hollarda nodavriy signallarni takrorlanish davri $T \to \infty$ ga teng bo‘lgan davriy signal sifatida o‘rganish mumkin.

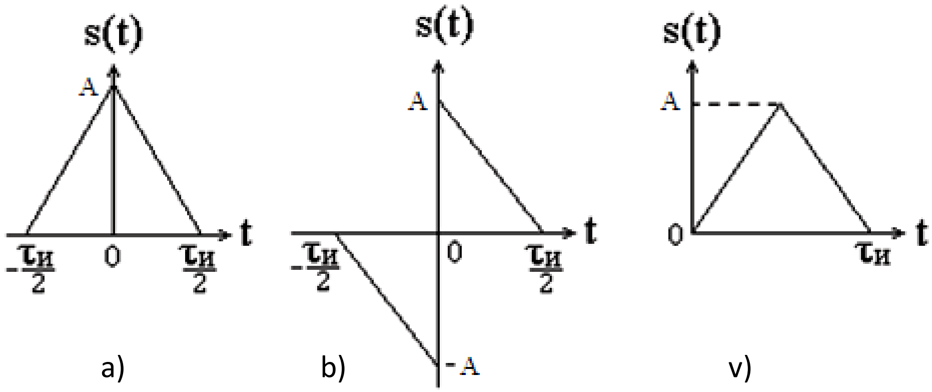
## 2.5. Juft va toq signallar

Juft signallar vaqt bo‘yicha juft funksiyalar, ya’ni $s_j(t) = s_j(-t)$. Juft signallar qutbi vaqt o‘qining manfiy va musbat bo‘lishiga bog‘liq bo‘lmagan holda saqlanib qoladi. Juft signal ordinata o‘qiga nisbatan simmetrik funksiya hisoblanadi (2.11a-rasm).

Toq signallar vaqt bo‘yicha toq funksiya hisoblanadi, ya’ni $s_t(t) = -s_t(-t)$. Bu tur signallarning qutbi vaqtning musbatdan manfiyga va aksincha almashishi bilan o‘z belgisini o‘zgartiradi. Toq signal koordinata o‘qi boshiga nisbatan simmetrik bo‘ladi (2.11b-rasm).

Vaqtning juft va toq funksiyasi bo‘lmagan signalni ixtiyoriy signal deb ataladi. Ixtiyoriy signalni juft va toq signallar yig‘indisi sifatida qarash mumkin, ya’ni $s(t) = s_j(t) + s_t(t)$. Juft va toq funksiyalar uchun ifodalardan foydalanib ixtiyoriy signalni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$s(-t) = s_j(t) + s_t(-t) = s_j(t) - s_t(t).$$

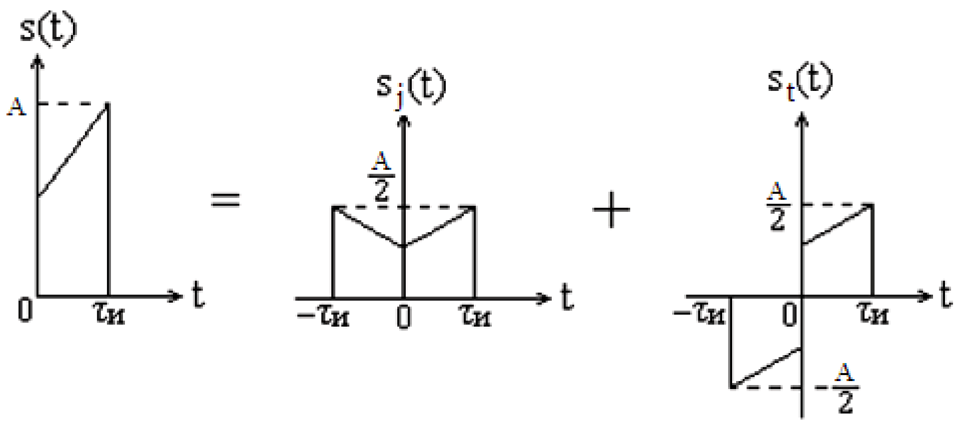



2.11-rasm. *Juft (a), toq (b) va ixtiyoriy (v) signallar*

$s(t)$ va $s(-t)$ lar uchun ifodalarni ikki noma'lumli: $s_j(t)$ va $s_t(t)$ tenglama deb hisoblab, ulardagi noma'lum funksiyalarni aniqlaymiz:

$$s_j(t) = \frac{1}{2}\left[s(t) + s(-t)\right] \text{ va } s_t(t) = \frac{1}{2}\left[s(t) - s(-t)\right].$$

Shuni e'tiborga olish kerakki, $s(-t)$ signal $s(t)$ signalning aks ko'rinishi hisoblanadi (2.12-rasm).




2.12-rasm. $s(t)$ *signalni juft va toq signallar yig'indisi shaklida ifodalash*

## 2.6. Signallarning asosiy xarakteristikalari

Ma’lum bir vaqt oralig‘i $t_2 - t_1 = \Delta t$ vaqt orasida mavjud signal uchun asosiy xarakteristikalar quyidagilardan iborat:

1. Signal o‘rtacha qiymati

$$\overline{s(t)} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} s(t)dt. \tag{2.13}$$

Signalning o‘rtacha qiymati bu uning doimiy tashkil etuvchisiga mos keladi.

2. Signal oniy quvvati

$$p(t) = s(t)\cdot s^*(t) = |s(t)|^2. \tag{2.14}$$

$s(t)$ va $s^*(t)$ – bir-biri bilan kompleks bog‘liq signallar.

3. Signal energiyasi

$$E = \int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} s(t)s^*(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt. \tag{2.15}$$

4. Signal o‘rtacha quvvati

$$p_{o'r} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_1}^{t_2} |s(t)|^2 dt. \tag{2.16}$$

Davriy signallarning energiyasi cheksiz kattaligi uchun uning o‘rtacha qiymati va energetik xarakteristikalari ushbu signalning bir davri uchun aniqlanadi.

## 2.7. Signallar spektrini aniqlash

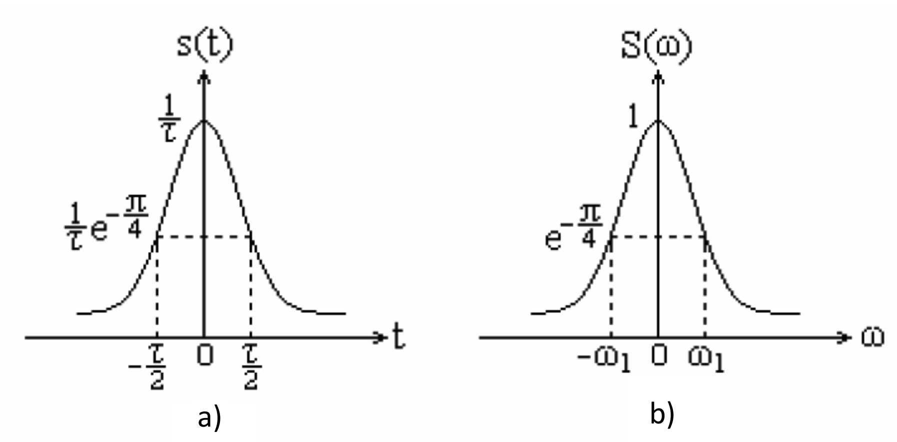
### 2.7.1. Gauss (qo‘ng‘iroqsimon) impuls signal spektri

Gauss (qo‘ng‘iroqsimon) impuls signali vaqt funksiyasi sifatida quyidagicha ifodalanadi (2.13-rasm):

$$s(t)=\frac{1}{\tau}e^{-\pi\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}. \tag{2.17}$$

Bu signalning spektr zichligini Fure to‘g‘ri almashtirishi orqali aniqlaymiz.

$$S(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}s(t)e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}e^{-j\omega t}dt.$$




2.13-rasm. *Gauss (qo‘ng‘iroqsimon) impuls (a) va uning spektri (b)*

Yuqorida keltirilgan ifodaga Eyler formulasini tadbiq qilib, quyidagini olamiz:

$$S(j\omega)=\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}\cos\omega t dt-j\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\pi\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}\sin\omega t dt.$$

Bu ifodaning ikkinchi qismi nolga teng, chunki bu integral toq funksiyadan simmetrik oraliqda olingan. Ushbu ifodaning birinchi integralini hisoblash uchun matematik ma’lumotnomadan foydalanamiz.

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2}\cos x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-b^2/4a^2}, \qquad agar\ a > 0\ bo'lsa.$$

Biz tahlil etayotgan ifodada $a = \frac{\sqrt{\pi}}{\tau}$, $b = \omega$ deb belgilaymiz va natijada quyidagi ifodani olamiz:

$$S(\omega) = \frac{2}{\tau}\int_0^{\infty} e^{-\pi\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}\cos\omega t dt = \frac{2}{\tau}\frac{\sqrt{\pi}\tau}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{4\pi}} = e^{-\frac{\omega^2\tau^2}{4\pi}}.$$

$\frac{2\pi}{\tau} = \Omega$ deb belgilaymiz. U holda $-\frac{\omega^2\tau^2}{4\pi} = -\pi\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2$ ni e'tiborga olsak

$$S(\omega) = e^{-\pi\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2}. \tag{2.18}$$

Shunday qilib, qo‘ng‘iroqsimon signal vaqt funksiyasi sifatida va uning spektri matematik nuqtai nazardan bir xil ko‘rinishga ega bo‘lib, o‘lchami tabiiyki argumenti bilan farqlanadi. Qo‘ng‘iroqsimon impuls signal spektri 2.13b-rasmda keltirilgan.

Ushbu signalning eng katta maksimal qiymatining $e^{-\pi/4}$ ga teng sathdagi spektr kengligi quyidagicha aniqlanadi:

$$-\pi\left(\frac{\omega_1}{\Omega}\right)^2 = -\pi/4; \quad \omega_1 = \frac{\Omega}{2} = \frac{2\pi}{2\tau} = \frac{\pi}{\tau}; \quad \Delta\omega = 2\omega_1 = \frac{2\pi}{\tau} = \Omega.$$

$\Delta\omega$ qiymati orqali signal spektri samarali kengligini aniqlash mumkin. Yuqorida keltirilgan bog‘lanishlar, qo‘ng‘iroqsimon impuls davomiyligi $\tau$ qancha kichik bo‘lsa, uning spektri egallagan chastotalar polosasi shuncha keng bo‘ladi.

### 2.7.2. $\delta$ -funksiya spektri zichligi

$\delta$ -funksiyaning spektrini uni tanlovchanlik xususiyati va Fure to‘g‘ri almashtirishi orqali aniqlaymiz.

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{j\omega_0} = 1. \tag{2.19}$$

Shunday qilib, $\delta$ -funksiya hamma chastotalarda birga teng bo‘lgan bir xil kattalik va zichlikdagi spektrga ega. $\delta(t)$ signali faza spektrining yo‘qligi, bu signal spektrining faqat haqiqiy tashkil etuvchilardan iborat ekanligini ta’kidlaydi (2.14a-rasm).

$\delta(t)$ signal spektridan olingan Fure teskari almashtirishi quyidagiga teng:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega, \qquad \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} d\omega.$$

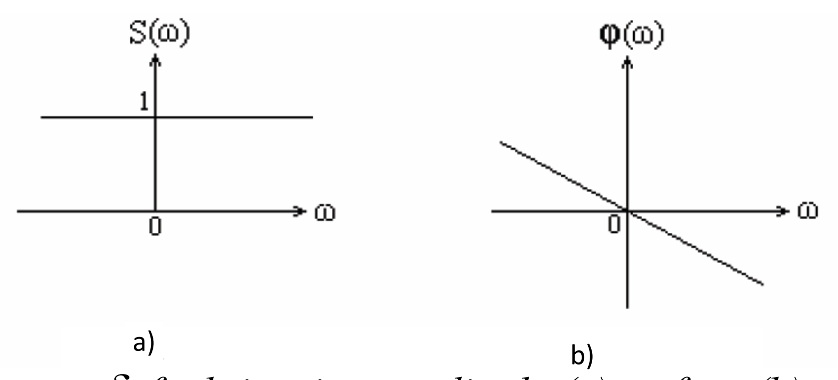
Fure almashtirishlarida vaqt va chastotaning o‘zaro almashtirish mumkinligini e’tiborga olsak, quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt, \qquad \delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt.$$

$\delta$ -funksiyani vaqt o‘qi bo‘yicha $t_0$ ga surish spektrining o‘zgarishiga sabab bo‘ladi va quyidagi formula orqali ifodalanadi:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}.$$

$\delta$-funksiya $t_0$ ga surilganda uning amplituda spektri o‘zgarmas saqlanadi, chastotaga chiziqli bog‘liq bo‘lgan $\omega t_0$ faza spektri paydo bo‘ladi (2.14b-rasm).




2.14-rasm. *$\delta$-funksiyaning amplituda (a) va faza (b) spektri*

### 2.7.3. Yakka sakrash funksiyasi spektri

Yakka sakrash funksiyasini absolyut integrallash juda qiyinligi uchun uning spektrini Fure almashtirishdan foydalanib aniqlash mumkin emas. Shuning uchun uning spektrini aniqlashda bilvosita usuldan foydalanamiz. Bunda uning spektrini aniqlash uchun dastlab boshqa funksiyaning spektrini aniqlaymiz va ma'lum bir chegaraviy qiymatlarda fkka sakrash signali spektrini aniqlaymiz.

Yakka sakrash funksiyasini eksponentasimon impuls chegaraviy qiymatiga o'tish orqali olish mumkin, ya'ni

$$\sigma(t)=\begin{cases}\lim\limits_{\alpha\to 0} e^{-\alpha t}, & agar\ t\geq 0,\\ 0, & agar\ t<0.\end{cases}$$

Yakka sakrash impuls spektrini eksponentasimon impulsning $\alpha=0$ holatdagi spektri shaklida aniqlash mumkin.

$$S_E(j\omega)=\int_0^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt=-\frac{1}{\alpha+j\omega}e^{-(\alpha+j\omega)}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{\alpha+j\omega}.$$

Unda biz aniqlamoqchi bo'lgan spektr quyidagicha aniqlanadi:

$$S(j\omega)=\lim_{\alpha\to 0}S_E(j\omega)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}+j\lim_{\alpha\to 0}\frac{-\omega}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Bu ohirgi ifodaning birinchi tashkil etuvchisi $\alpha=0$ bo'lgan holat uchun $\omega=0$ chastotadan boshqa hamma chastotalarda nolga teng, $\omega=0$ chastotada bu tashkil etuvchi cheksizlikka intiladi. $\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$ funksiya ostidagi yuza, ya'ni

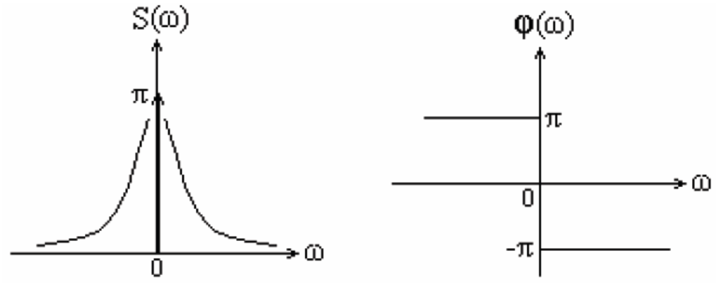
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}d\omega=2\alpha\int_0^{\infty}\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}d\omega=\frac{2\alpha\pi}{2\alpha}=\pi.$$

Shunday qilib, birinchi tashkil etuvchining $\alpha\to 0$ dagi chegaraviy qiymati, vzveshennaya $\delta$-funksiya bo'ladi, ya'ni $\pi\delta(\omega)$ ga teng bo'ladi.

Natijada, yakka sakrash funksiyasi spektri zichligi quyidagicha aniqlanadi:

$$S(j\omega) = \pi\delta(\omega) + 1/(j\omega).$$

Yakka sakrash funksiyasi amplituda va faza spektri 2.15-rasmda keltirilgan.




2.15-rasm. *Yakka sakrash funksiyasi amplituda va faza spektri*

### 2.7.4. Vaqt bo'yicha o'zgarmas – doimiy signal spektri

$\delta$-funksiyaning spektri konstanta (o'zgarmas kattalik) bo'lganligi uchun to'g'ri va teskari Fure almashtirishi asosida vaqt bo'yicha o'zgarmas signal spektri $\delta$-funksiya ko'rinishida bo'ladi.

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-j\omega t} dt = 2\pi A \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi A \delta(\omega).$$

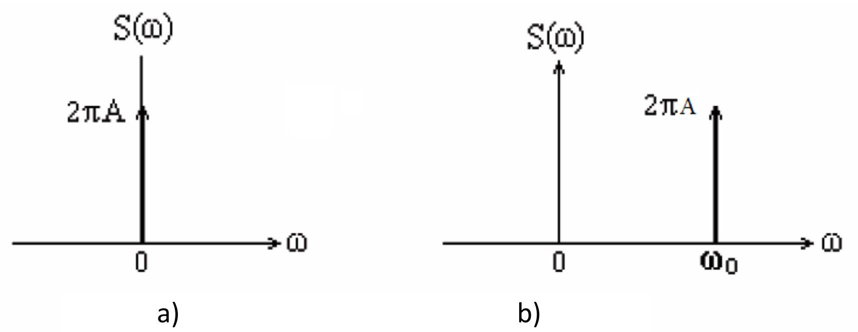
Bu ifoda yana bir bor signal davomiyligi va uning spektri orasida proporsionallik mavjudligini tasdiqlaydi: cheksiz katta davomiylikka ega signal cheksiz tor spektrga ega bo'ladi va aksincha (2.16a-rasm).

### 2.7.5. Kompleks eksponentaning spektri

$s(t) = Ae^{j\omega_0 t}$ – kompleks signal spektri quyidagicha aniqlanadi:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt = 2\pi A \delta(\omega - \omega_0).$$

Kompleks signal spektri yakka (vzveshenniy) – funksiyadan iborat bo‘lib, u haqiqiy bo‘lmagani uchun amplituda spektri juftlik xususiyatiga ega bo‘lmaydi (2.16b-rasm).




2.16-rasm. *Vaqt bo‘yicha o‘zgarmas – doimiy signal spektri (a) va kompleks eksponenta spektri (b)*

Signallarni kompleks ko‘rinishda ifodalash, modulyatsiyalangan signallarni, ayniqsa amplitudasi va fazasi bir vaqtda o‘zgarishi bilan bog‘liq bo‘lgan murakkab modulyatsiya turlarida bu usul qulay hisoblanadi.

## 2.7.6. Garmonik signal spektri

$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ – garmonik signalning spektri quyidagicha aniqlanadi:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A\cos(\omega_0 t + \varphi) e^{-j\omega t}\,dt = \frac{A}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{j(\omega_0 t+\varphi)} - je^{-j(\omega_0 t+\varphi)}\right]e^{-j\omega t}\,dt =$$

$$= \frac{A}{2}e^{j\varphi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)t}\,dt + \frac{A}{2}e^{-j\varphi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega+\omega_0)t}\,dt.$$

Va nihoyat ba’zi almashtirishlarni amalga oshirish natijasida garmonik signal spektri uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$S(j\omega) = A\pi e^{j\varphi}\delta(\omega - \omega_0) + A\pi e^{-j\varphi}\delta(\omega + \omega_0).$$

Garmonik signal spektri ikkita $\pm\omega_0$ chastotalarda joylashgan ma’lum qiymatli $\delta$-funksiyadan iborat bo‘ladi. $\delta$-funksiya qiymati garmonik signal kompleks amplitudasini aks ettiradi.

### 2.7.7. To‘rtburchak shaklidagi videoimpuls spektri

To‘rtburchak shaklidagi videoimpuls (2.17a-rasm) spektrini ikki usulda aniqlaymiz:

1) Fure almashtirishini to‘g‘ridan-to‘g‘ri hisoblash usulida;

2) Fure almashtirishi xossalaridan foydalanish usulida.

*Birinchi usul.* Videoimpuls davomiyligi cheklanganligi va uning amplitudasi signal davri $\tau_и$ davomida o‘zgarmas saqlanib qolishini e’tiborga olib Fure to‘g‘ri almashtirishini hisoblaymiz.

$$S(j\omega) = \int_{-\tau_и/2}^{\tau_и/2} Ae^{-j\omega t}dt = \frac{A}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-\tau_и/2}^{\tau_и/2} = A\frac{e^{j\omega\tau_и/2} - e^{-j\omega\tau_и/2}}{j\omega},$$

$$S(j\omega) = A\tau_и \frac{\sin(\omega\tau_и/2)}{\omega\tau_и/2}.$$

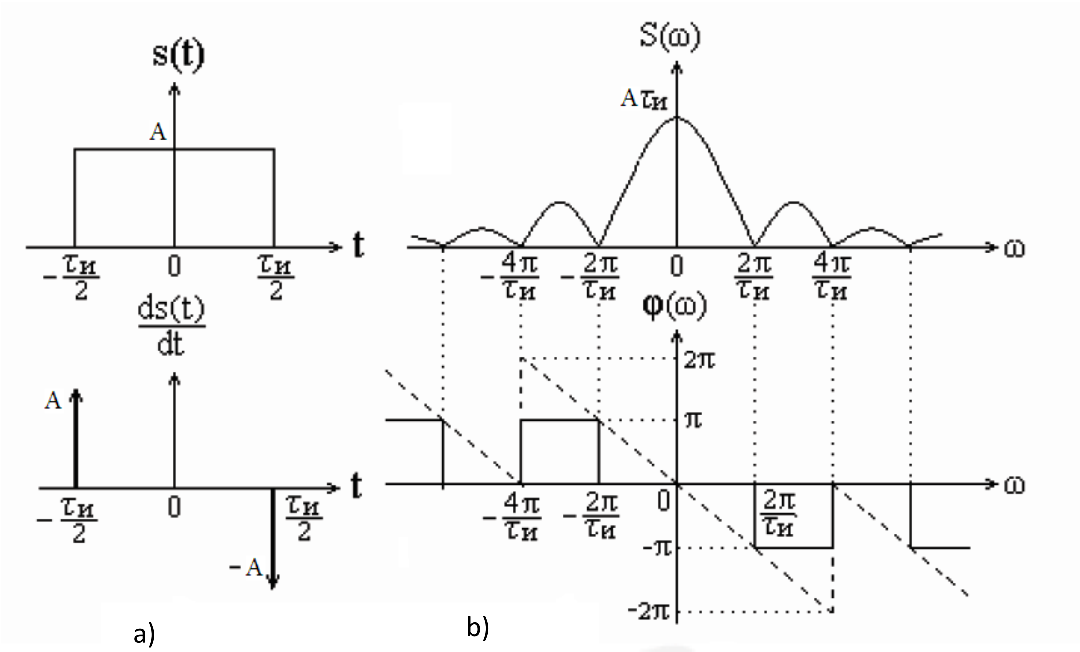
Yuqoridagi misoldagi signal juft bo‘lgani uchun, bu signalning spektri faqat haqiqiy qismga ega (2.17b-rasm).

Videoimpuls spektri o‘rovchisi $\sin x/x$ funksiya ko‘rinishida bo‘lib, u yaproqchalarga ega bo‘lib, har bir yaproqchaning kengligi $2\pi/\tau_и$ ga teng va videoimpuls davomiyligiga teskari proporsional. Signal spektri o‘rovchisining nolga teng bo‘lgan qiymatlari $\sin(\omega\tau_и/2) = 0$ tenglamasi orqali aniqlanadi:

$$\omega\tau_и/2 = \pm k\pi, \qquad k = 1, 2, 3,..., \qquad \omega_k = \pm k\frac{2\pi}{\tau_и}.$$

Videoimpuls spektri zichligi $\omega = 0$ chastotada $S(0)$ ga teng bo‘lib, qiymati $A\tau_и$ ga teng bo‘ladi.

Videoimpuls davomiyligi $\tau_и$ kattalashgan sari yaproqchalar kengligi kichiklashadi va $S(0)$ qiymati kattalashadi va aksincha. Agar videoimpuls davomiyligi $\tau_и \to 0$ bo‘lsa, spektrning $\omega_k = \pm k\frac{2\pi}{\tau_и}$ nuqtalari orasidagi masofa cheksizlikka intiladi va spektri zichligi cheksiz kichiklashadi va bir xil qiymatlarga ega bo‘ladi. Agar $\tau_и \to \infty$ bo‘lsa, u holda $\omega_k$ nuqtalari orasidagi masofa nolga intiladi va cheksiz katta spektr zichligi $\delta$-funksiya shaklini oladi, ya'ni signal spektri kengligi nolga intiladi.




2.17-rasm. *To'rtburchak shaklidagi impuls va uning hosilasi (a) hamda amplituda va faza spektrlari (b)*

Videoimpuls faza spektri (2.17b-rasm) $\sin x/x$ funksiyasiga bog'liq ravishda 0 va $\pi$ ga teng bo'ladi. Faza qiymatlari $-\pi$ va $\pi$ bir-biridan farqlanmaydi, chunki faza spektridagi $\omega>0$ va $\omega<0$ chastotalarda " + " va " − " qiymatlar uni toq funksiya shaklida tasavvur etish uchun ko'rsatilgan.

Videoimpuls vaqt o'qi bo'yicha $\Delta t = \pm t_0$ ga siljisa Fure almashtirishiga asosan uning spektri quyidagi formulalar orqali aniqlanadi:

$$S(j\omega) = A\tau_и \frac{\sin(\omega\tau_и/2)}{\omega\tau_и/2} e^{j\omega\Delta t} = A\tau_и \frac{\sin(\omega\tau_и/2)}{\omega\tau_и/2} e^{\pm j\omega t_0}.$$

Ushbu oxirgi ifodadan ko'rinadiki, signal amplituda spektri signal $\pm t_0$ ga siljishi natijasida o'zgarmas saqlanadi, faza spektri esa $\omega_k$ chastotalarda sakrab $\pm\pi$ ga o'zgaradi va bu sakrashlar orasida qaza chastotaga chiziqli bog'liqlikda o'zgaradi.

*Ikkinchi usul.* Videoimpuls shaklidagi $s(t)$ signaldan olingan hosilaga teng bo'lgan signal $s_1(t) = \frac{ds(t)}{dt}$ ikkita chekli qiymatga ega bo'lgan $\delta$-funksiyadan iborat bo'lib, bu signalning spektri zichligi ikki $\delta$-funksiyalar spektrlari yig'indisiga teng bo'ladi, ya'ni

$$S_1(j\omega) = A\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t+\tau_и/2)e^{-j\omega t}dt - A\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau_и/2)e^{-j\omega t}dt = A\left(e^{j\omega\tau_и/2} - e^{-j\omega\tau_и/2}\right).$$

Videosignal $s(t)$ ning spektri zichligi $s_1(t)$ signal spektridan integral olish orqali, ya'ni $S_1(j\omega)$ ni $j\omega$ ga bo'lish orqali aniqlanishi mumkin.

$$S(j\omega) = \frac{S_1(j\omega)}{j\omega} = \frac{A\left(e^{j\omega\tau_и/2} - e^{-j\omega\tau_и/2}\right)}{j\omega} = A\tau_и\,\frac{\sin\omega\tau_и/2}{\omega\tau_и/2}.$$

Bu ikkinchi usul birinchisiga nisbatan oson amalga oshiriladi.

### 2.7.8. Ixtiyoriy davriy signalning spektri zichligi

Davriy signal Fure qatori kompleks ko'rinishda quyidagicha ifodalanishi mumkin:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{jk\omega_1 t},$$

bunda, $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ – signal takrorlanish chastotasi birinchi garmonikasi.

Ixtiyoriy davriy signalning spektri zichligi Fure qatori chastotalarida joylashgan $\delta$-funksiyalar yig'indisidan iborat bo'lib, $\delta$-funksiyalarning qiymatlari Fure qatori koeffisientlarining $2\pi$ ga ko'paytmasiga teng bo'ladi.

### 2.7.9. sinx/x ko'rinishidagi signal spektri zichligi

Uzluksiz signallarni vaqt bo'yicha diskretlashda uning har bir $k\Delta t$ vaqtga mos keluvchi oniy qiymati $\sin x/x$ funksiya orqali ifodalanadi. Ushbu $\sin x/x$ funksiyaning spektri zichligini Fure to'g'ri almashtirishi formulasidan foydalanib hisoblaymiz.

Berilgan $\sin x/x$ funksiyasi shaklidagi signalni quyidagicha ifodalaymiz:

$$s(t) = A\frac{\sin\omega_d t}{\omega_d t},$$

bunda, $\omega_d = 2\pi f_d = \frac{2\pi}{T}$, $T$ – $\sin\omega_d t$ funksiyaning takrorlanish davri.

Signal oniy qiymatlari nolga teng bo'ladigan nuqtalar quyidagicha aniqlanadi:

$$\omega_d t = \pm k\pi, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \qquad t = \pm\frac{k\pi}{\omega_d}.$$

U holda

$$S(j\omega) = A\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega_d t}{\omega_d t}e^{-j\omega t}dt = 2A\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega_d t\cdot\cos\omega t}{\omega_d t}dt =$$

$$= \frac{A}{j\omega}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(\omega+\omega_d)t}{t}dt - \frac{A}{j\omega}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(\omega-\omega_d)t}{t}dt.$$

Aniq integrallarni hisoblash ma'lumotnomasiga asosan

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x}dx = \begin{cases} \pi/2, & agar\ a > 0, \\ -\pi/2, & agar\ a < 0. \end{cases}$$

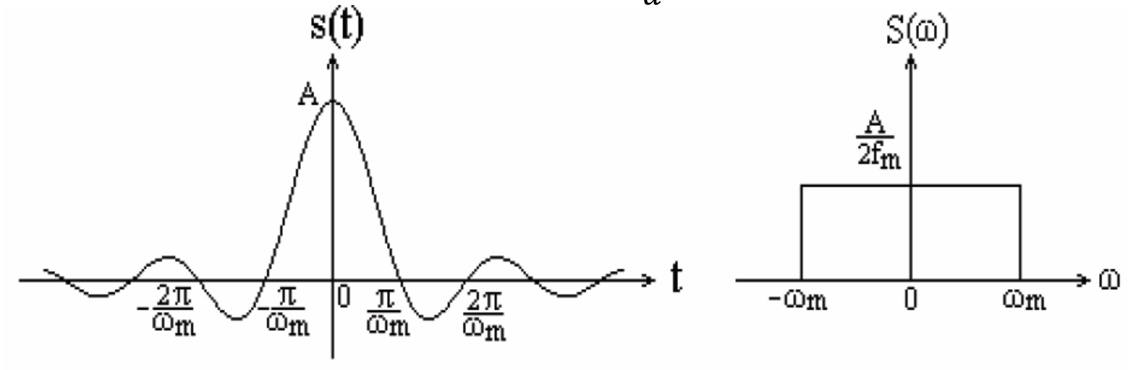
Yuqoridagiga asosan agar $|\omega| > \omega_d$ bo'lsa $S(j\omega) = 0$, va agar $|\omega| < \omega_d$ bo'lsa $S(j\omega) = A\pi/\omega_d$. Shunday qilib, $\sin x/x$ ko'rinishidagi signal haqiqiy va juft funksiya bo'lib, amplituda spektri o'rovchisi to'rtburchak impuls shaklida bo'ladi. Biz tahlil qilgan $s(t) = A\frac{\sin\omega_d t}{\omega_d t}$ signal amplituda spektri polosasi $+\omega_d$ va $-\omega_d$ chastotalar bilan chegaralangan bo‘lib, ushbu polosada hamma spektr tashkil etuvchilari amlpitudalari bir xil kattalikka ega (2.18-rasm).

Xuddi yuqoridagidek natijani Fure to‘g‘ri va teskari almashtirishi xossasi asosida ham olish mumkin. Bu xossasiga asosan $s(t)$ juft signalga $S(j\omega)$ spektr zichligi mos keladi, demak $S(t)$ signalga $2\pi s(j\omega)$ spektr zichligi mos keladi.

Ma’lumki davomiyligi $\tau_i$ bo‘lgan va amplitudasi $A$ ga teng bo‘lgan to‘rtburchak impulsga $A\,\tau_i \frac{\sin(\omega\tau_i/2)}{\omega\tau_i/2}$ spektr zichligi mos keladi. Demak $\sin x/x$ shaklidagi signalga to‘rtburchak shaklidagi amplituda spektri zichligi mos keladi. Faqat $s(t)$ ning davomiyligi va amplituda spektrining qiymatini aniqlash kerak bo‘ladi.

Spektr zichligi formulasidagi $\omega$ ni $t$ ga, $\omega_d$ ni $\tau_i/2$ ga va $A\,\tau_i$ ni $A'$ bilan almashtirib signal uchun ifodani olamiz:

$$s(t) = A'\frac{\sin\omega_d t}{\omega_d t}.$$




2.18-rasm. $s(t) = A\frac{\sin\omega_d t}{\omega_d t}$ *signal va uning spektri*

Xuddi shuningdek, $s(t)$ signal vaqt funksiyasi ifodasida $t$ ni $\omega$ ga, $\tau_i/2$ ni $\omega_d$ ga va $A'$ ni $A\,\tau_i$ bilan almashtirib, $2\omega_d$ chastotalar polosasida joylashgan spektr zichligi $s(j\omega)$ uchun ifodani olamiz. Signal amplituda spektri sathini aniqlaymiz:

$$S(\omega) = 2\pi A'/2\omega_d = A'/2f_d.$$

Shunday qilib, $\sin x/x$ shaklidagi signal spektri uchun quyidagi ifodani yozish mumkin:

$$S(j\omega) = \begin{cases} A'/2f_d, & agar\ |\omega| \le \omega_d \\ 0, & agar\ |\omega| > \omega_d. \end{cases}$$

Yuqorida olingan natijalardan V.A. Kotelnikov teoremasi asosida uzluksiz signallarni diskretlash masalasini koʻrib chiqishda foydalaniladi.

## *Nazorat savollari*

1. *Signalning asosiy xarakteristikalari haqida tushuncha bering.*
2. *Yakka sakrash funksiyasining matematik ifodasini yozing.*
3. *Qoʻngʻiroqsimon signal matematik ifodasini keltiring va uning spektri qanday ifoda orqali aniqlanadi?*
4. *δ-funksiya matematik ifodasini keltiring va uning spektri zichligi qanday aniqlanadi?*
5. *Yakka sakrash funksiyasi matematik ifodasini keltiring va uning spektri zichligi qanday aniqlanadi?*
6. *Garmonik signal matematik ifodasini keltiring va uning spektri zichligi qanday aniqlanadi?*
7. *Yakka toʻrtburchak shaklidagi impuls amplituda va faza spektri qanday aniqlanadi? Ushbu signal uchun amplituda va chastota spektri qanday koʻrinishga ega?*
8. *sinx/x koʻrinishidagi signal spektri qanday aniqlanadi va u qanday koʻrinishga ega?*