Глава 1

Чудо-алгоритм.

Дано:
U, W - подпространства в V.
$U = \langle a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \rangle$
$W = \langle b_1\ b_2\ b_3\ b_4 \rangle$
Задача:
Найти базис пересечения U и W.

1.1 Теория

Нам заданы линейные оболочки подпространств, по определению: линейная оболочка пространства - множество всевозможных линейных комбинаций векторов из пространства.
Говорят, что вектор v принадлежит линейной оболочке L, если существует линейная комбинация векторов из оболочки, равная v.
Формально: $v \in L \Leftrightarrow v = \lambda_n l_1 + ... + \lambda_n l_n$,
где $l_1, ..., l_n \in L$; $\lambda_1, ..., \lambda_n$ - скаляры.

Пересечение подпространств U и W содержит все такие векторы, которые одновеменно принадлежат и U, и W. Т.е. одновеменно принадлежат и линейной оболочке U и линейной оболочке W.

Перепишем последний абзац:
Если $v \in U \cap W$, то $\begin{cases} v \in U \\ v \in W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = a_1u_1 + ... + a_nu_n & u_1...u_n \in U \\ v = b_1w_1 + ... + b_kw_k & w_1...w_k \in W \end{cases}$, а a_i и b_i - скаляры.
Теперь мы можем записать это таким образом:
$a_1u_1 + ... + a_nu_n = v = b_1w_1 + ... + b_kw_k$, и убрать v:
$a_1u_1 + ... + a_nu_n = b_1w_1 + ... + b_kw_k$.

Полученное тождество является однородной системой линейных уравнений, покажем это, если не очень очевидно:
$a_1u_1 + ... + a_nu_n = b_1w_1 + ... + b_kw_k$.

$$(u_1\ ...\ u_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (w_1\ ...\ w_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$(u_1\ ...\ u_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - (w_1\ ...\ w_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = 0$$

Важно осознать следующий переход:

$$(u_1 \; ... \; u_n \; -w_1 \; ... \; -w_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = 0$$

Запишем расширенную матрицу этой ОСЛУ:
$(u_1 \; ... \; u_n \; -w_1 \; ... \; -w_n \mid 0) \Leftrightarrow (u_1 \; ... \; u_n \mid w_1 \; ... \; w_n)$.

Дальше мы решаем эту ОСЛУ как обычно: приводим к улучшенному ступенчатому виду (заметим, что если до этого мы находили базис в $U+W$, то у нас уже есть эта матрица, приведённая к ступенчатому виду, получается что теперь мы просто мучаем её дальше, и выигрываем на этом какое-то время [дохуя времени на самом деле, мы же не делаем переход к системам]), выписываем общее решение, находим ФСР.
Дальше лучше показать на практике.

1.2 Пример

$$L_1 = \langle \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -14 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -11 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$L_2 = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 21 \\ -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 15 \\ -8 \end{pmatrix} \rangle$$

Ну и с места в карьер: запишем расширенную матрицу $(L_1 \mid L_2)$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & -6 & 2 & -2 & 8 & 4 & 10 \\ -1 & 1 & -4 & 2 & 0 & -3 & -3 & -6 \\ -14 & -4 & -11 & 1 & -9 & 21 & 3 & 15 \\ 9 & 3 & 6 & 0 & 6 & -13 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & -4 & 2 & 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 3 & 1 & -7 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & -2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

На этом этапе мы привели матрицу к ступенчатому виду, и можем увидеть, что первый, второй, третий и шестой векторы в исходной матрице образуют базис в $L_1 + L_2$. Из них, кстатии, первый, второй и третий образуют базис в L_1.
Теперь мы не бросаем эту матрицу, а продолжаем работать с ней, приводя её к улучшенному ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & -4 & 2 & 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 3 & 1 & -7 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & -2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -4/3 & 0 & -8/3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 0 & 2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Выпишем общее решение:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-2}{3}x_4 - \frac{4}{3}x_5 - \frac{8}{3}x_7 - 4x_8 \\ \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 - \frac{2}{3}x_7 - x_8 \\ x_4 \\ x_5 \\ -x_7 - 2x_8 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix}$$

Очень важно разобраться со знаками, обратим внимание, что разделитель | в матрице фактически обозначает знак равентсва в уравнениях.
Соответственно, когда мы выражаем главные переменные через свободные, мы обычно переносим главные неизвесные в правую часть уравнения, а свободные переменные - в левую.
Таким образом в выражении главных неизвесных свободные, стоящие слева от знака разделения (x_4) мы выписываем в общее решение с противоположным знаком (потому что как бы перекидываем их через равно), а свободные неизвесные, стоящие справа от разделителя (x_5, x_7, x_8) мы записываем в общее решение не меняя их знак (потому что они итак как-бы стоят справа от равно).
По той же логике обратим внимание на то, что главная переменная x_6 выражается через свободные x_7 и x_8, при этом они стоят с одной стороны от разделителя. Значит, свободные переменные нужно как-бы перекинуть через равно, сменив им знаки.

Теперь запишем ФСР нашей ОСЛУ: (заметим, что нет строго правила, типа "В свободные неизвесные надо подставлять строго единицу“. Наример в этом примере, если мы подставим в переменную x_4 единицу, то в ФСР получится много дробей, я этого не хочу, поэтому буду подставлять в x_4 число 3)

$$\begin{pmatrix} \color{red}{0} \\ \color{red}{-2} \\ \color{red}{1} \\ \color{red}{3} \\ \color{blue}{0} \\ \color{blue}{0} \\ \color{blue}{0} \\ \color{blue}{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \color{red}{0} \\ \color{red}{4} \\ \color{red}{1} \\ \color{red}{0} \\ \color{blue}{-3} \\ \color{blue}{0} \\ \color{blue}{0} \\ \color{blue}{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \color{red}{0} \\ \color{red}{-8} \\ \color{red}{-2} \\ \color{red}{0} \\ \color{blue}{0} \\ \color{blue}{3} \\ \color{blue}{-3} \\ \color{blue}{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \color{red}{0} \\ \color{red}{-4} \\ \color{red}{-1} \\ \color{red}{0} \\ \color{blue}{0} \\ \color{blue}{2} \\ \color{blue}{0} \\ \color{blue}{-1} \end{pmatrix}$$

Обозначим за a_1 a_2 a_3 a_4 исходные векторы из L_1, а за b_1 b_2 b_3 b_4 исходные векторы из L_2. Запишем ОСЛУ в явном виде:

$$\color{red}{\lambda_1}\color{black}{a_1} + \color{red}{\lambda_2}\color{black}{a_2} + \color{red}{\lambda_3}\color{black}{a_3} + \color{red}{\lambda_4}\color{black}{a_4} = \color{blue}{\lambda_5}\color{black}{b_1} + \color{blue}{\lambda_6}\color{black}{b_2} + \color{blue}{\lambda_7}\color{black}{b_3} + \color{blue}{\lambda_8}\color{black}{b_4}$$

Теперь важная вещь: мы берём первый вектор из ФСР: $\begin{pmatrix} \color{red}{0} \\ \color{red}{-2} \\ \color{red}{1} \\ \color{red}{3} \\ \color{blue}{0} \\ \color{blue}{0} \\ \color{blue}{0} \\ \color{blue}{0} \end{pmatrix}$, и делаем одну из двух вещей:

1) Подставляем красные координаты на места красных лямбд
2) Подставляем синие координаты на места синих лямбд

Проделав одну из этих операций мы получим вектор, который принадлежит $L_1 \cap L_2$. Впринцыпе, для самопроверки можно сначала подставить красные координаты ФСР в красные лямбды, а синие координаты ФСР в синие лямбды, и тогда, если слева и справа получился одинаковый вектор, то всё хорошо, а если не получился, значит где-то лажа.
Теперь, проделав одну из этих операций для каждого вектора из ФСР мы получим 4 вектора, которые образуют линейную оболочку подпространства $L_1 \cap L_2$. Давайте теперь проделаем это. В синей секции больше нулей, поэтому я буду подставлять синие координаты и синие лямбды, просто чтобы меньше считать:

Для первого вектора ФСР получаем $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Для второго вектора ФСР: $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -27 \\ 18 \end{pmatrix}$

Для третьего: $\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 54 \\ -36 \end{pmatrix}$

Для четвёртого: $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 27 \\ -18 \end{pmatrix}$

Мы получили четыре вектора, линейная оболочка которых образует подпространство $L_1 \cap L_2$. На этом собственно объяснение алгоритма можно считать законченым, т.к. чтобы получить финальный ответ, достаточно уже приненить стандартный алгоритм выделения базиса в линейной оболочке.
Для красоты всё же досчитаем до конца: несложно заметить, что первый, второй и третий векторы пропорциональны четвёртому, следовательно базисом пересечения L_1 и L_2 является вектор

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 27 \\ -18 \end{pmatrix}$$

1.3 Summarize

1) Записываем расширенную матрицу $(L_1 \mid L_2)$ (по столбцам, разумеется)
2) Приводим расширенную матрицу к ступенчатому виду
3) Приведя её к ступенчатому виду мы выполнили два действия одновременно: номера исходных векторов со ступеньками, расположенными левее разделителя дают базис в L_1, а, соответственно, номера исходных векторов со ступеньками во всей матрице дают базис в $L_1 + L_2$.
4) Приводим ступенчатую матрицу дальше к улучшенному ступенчатому виду
5) Записываем общее решение (**следим за знаками!**)
6) Записываем ФСР
7) Подставляем соответствующие координаты из векторов ФСР на места соответствующих скаляров в ОСЛУ (**следим за количеством!**)
8) Получаем векторы, которые образовывают линейную оболочку подпространства $L_1 \cap L_2$
9) Применяем стандартный алгоритм нахождения базиса в линейной оболочке и находим базис подпространства $L_1 \cap L_2$
10) Profit!