Большое домашнее задание. Математический анализ.

Пешехонов Иван. БПМИ1912

9 декабря 2019 г.

Глава 1

Вариант 24.

1.1 № 1.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-3+2x}{1-4x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x+1}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{-3+2x}{1-4x}-1\right)\right)^{\frac{3x^2-1}{x+1}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4+6x}{1-4x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x+1}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1-4x}{-4+6x}}\right)^{\frac{3x^2-1}{x+1}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1-4x}{-4+6x}}\right)^{\frac{-4+6x}{1-4x}*\frac{1-4x}{-4+6x}*\frac{3x^2-1}{x+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-4x}{-4+6x}*\frac{3x^2-1}{x+1}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-1-12x^3+4x}{-4x-4+6x^2+6x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{3x^2-1-12x^3+4x}{x^3}}{\frac{-4+6x^2+2x}{x^3}}\right)} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-12}{\frac{6}{x}}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}-12x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{-\infty} = 0$

1.2 № 2.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}(4+3\cos 3x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} 3x}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}(1+(3+3\cos 3x))^{\frac{1}{\operatorname{tg} 3x}}$

Проведём замену: $t = x - \frac{\pi}{3}$, тогда $x = t + \frac{\pi}{3}$:

$\lim\limits_{t\to 0}(1+(3+3\cos(3t+\pi)))^{\frac{1}{\operatorname{tg}(3t+\pi)}} = \lim\limits_{t\to 0}(1+(3-3\cos 3t))^{\frac{1}{3-3\cos 3t}*\frac{1}{\operatorname{tg} 3t}*(3-3\cos 3t)} =$

$= e^{\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{3-3\cos 3t}{\operatorname{tg} 3t}\right)} = e^{3\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos 3t}{\operatorname{tg} 3t}\right)} = \{$используем эквивалентность $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}\} = e^{3\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{\frac{9t^2}{2}}{\operatorname{tg} 3t}\right)} =$

$= \{$используем эквивалентность $\operatorname{tg} x \sim x\} = e^{\frac{3}{2}\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{9t^2}{3t}\right)} = e^{\frac{3}{2}\lim\limits_{t\to 0} 3t} = e^0 = 1$

1.3 № 3.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos(5\arcsin 2x)-1)\log_3(1+\sin(\operatorname{tg}^2 4x))}{(\sqrt{1-\operatorname{arctg}^2 6x}-1)(5^{\operatorname{tg} 2x^2}-1)} = (*)$

Используем эквивалентности:
$\cos(5\arcsin 2x)-1 \sim \cos(5*2x)-1 \sim \cos 10x - 1 \sim -(1-\cos 10x) \sim -50x^2$
$\sin(\operatorname{tg}^2 4x) \sim \sin 16x^2 \sim 16x^2$
$\operatorname{arctg}^2 6x \sim 36x^2$
$\operatorname{tg} 2x^2 \sim 2x^2$
$5^{2x^2}-1 \sim 2x^2\ln 5$

$(*) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-50x^2\log_3(1+16x^2)}{2x^2\ln 5\sqrt{1-36x^2}} = (*)$

И снова используем эквивалентности: $\log_3(1+16x^2) \sim 16x^2 \log_3 e$
$\sqrt{1-36x^2} = (1-36x^2)^{\frac{1}{2}} \sim -18x^2$

$(*) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-50x^2*16x^2\log_3 e}{-18x^2*2x^2\ln 5} = \frac{\log_3 e}{\ln 5} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-50*8}{-18*2} = \frac{\log_3 e}{\ln 5} * \frac{50*4}{9} = \frac{200\log_3 3}{9\ln 5}$

1.4 № 4.

Рассмотрим для каждой точки:
1) $a = 1$

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-} x^2 + 3x = 4$
$\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+} 2x + 2 = 4$
$f(1) = 1^2 + 3*1 = 4 \Rightarrow f(x)$ непрерывна в точке 1.

2) $a = 2$

$\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-} 2x + 2 = 6$
$\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+} 2^x = 4 \Rightarrow$ односторонние пределы не равны $\Rightarrow$ имеется разрыв второго рода.

1.5 № 5.

$f(x) = -5^{\frac{1}{x^2(x^2+6x+8)}}$

ОДЗ:
$x \neq 0$
$(x^2+6x+8) \neq 0$
$D = 36 - 32 = 4$
$x \neq \frac{-62}{2} = -2; -4$

$f(x) = -5^{\frac{1}{x^2(x+4)(x+2)}}$
Пусть $g(x) = \frac{1}{x^2(x+4)(x+2)}$, тогда $f(x) = -5^{g(x)}$
$f(x)$ - степенная функция. Заметим, что при стремелении аргумента к $-\infty$, значение степенной функции стремится к 0, в то время как при стремелении аргумента к $+\infty$, значение степенной функции само стремится к $+\infty$. Этим фактом будем пользоваться в дальнейшем.
Посчитаем все односторонние пределы:
$a = 0$
$\lim\limits_{x\to 0-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x^2(x+4)(x+2)}$;
$x^2 > 0$,
$x + 4 > 0$,
$x + 2 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow g(x) > 0$.
Вывод: $g(x) \to +\infty \Rightarrow f(x) \to -(+\infty) \Rightarrow f(x) \to -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x^2(x+4)(x+2)}$;
$x^2 > 0$,
$x + 4 > 0$,
$x + 2 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow g(x) > 0$.
Вывод: $g(x) \to +\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$
$f(a)$ - неопределено $\Rightarrow a$ - точка разрыва (второго рода).
$a = -4$
$\lim\limits_{x \to -4-} g(x) = \lim\limits_{x \to -4-} \frac{1}{x^2(x+4)(x+2)}$;
$x^2 > 0$,
$x + 4 < 0$,
$x + 2 < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow g(x) > 0$.
Вывод: $g(x) \to +\infty \Rightarrow f(x) \to -(+\infty) \Rightarrow f(x) \to -\infty$

$\lim\limits_{x \to -4+} g(x) = \lim\limits_{x \to -4+} \frac{1}{x^2(x+4)(x+2)}$;
$x^2 > 0$,
$x + 4 > 0$,
$x + 2 < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow g(x) < 0$.
Вывод: $g(x) \to -\infty \Rightarrow f(x) \to 0$

$a = -2$
$\lim\limits_{x \to -2-} g(x) = \lim\limits_{x \to -2-} \frac{1}{x^2(x+4)(x+2)}$;
$x^2 > 0$,
$x + 4 > 0$,
$x + 2 < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow g(x) < 0$.
Вывод: $g(x) \to -\infty \Rightarrow f(x) \to 0$

$\lim\limits_{x \to -2+} g(x) = \lim\limits_{x \to -2+} \frac{1}{x^2(x+4)(x+2)}$;
$x^2 > 0$,
$x + 4 > 0$,
$x + 2 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow g(x) > 0$.
Вывод: $g(x) \to +\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$

1.6 № 6.

$y = e^{3x} \cos x$
Пусть $f(x) = e^{3x}$, а $g(x) = \cos x$, тогда $y = f(x)g(x)$, а
$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Найдём $f'(x)$:
$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{3x+3\Delta x} - e^{3x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{e^{3x} e^{3\Delta x} - e^{3x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (e^{3x} * \frac{e^{3\Delta x} - 1}{\Delta x}) =$

$= \{$используем эквивалентность $e^x - 1 \sim x\} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (e^{3x} * \frac{3\Delta x}{\Delta x}) = 3e^{3x}$

Найдём $g'(x)$:
$g'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} =$
$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x(\cos \Delta x - 1) - \sin x \sin \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-\cos x(1 - \cos \Delta x) - \sin x \sin \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-\cos x \frac{\Delta x^2}{2} - \sin x \sin \Delta x}{\Delta x} =$
$\{$используем эквивалентность $\sin x \sim x\} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-\cos x \frac{\Delta x^2}{2} - \Delta x \sin x}{\Delta x} =$
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} -\cos x \frac{\Delta x}{2} - \sin x = -\sin x$

Наконец найдём y':
$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 3e^{3x} \cos x - e^{3x} \sin x = e^{3x}(3\cos x - \sin x)$

1.7 № 7.

$f(x) = \ln \frac{\sin x}{\cos x + \sqrt{\cos 2x}} + \sqrt{\operatorname{arctg} \frac{2}{x}} + \operatorname{ctg} \sqrt[3]{5}$

Разделим эту функцию на несколько:

$f_1(x) = \ln \frac{\sin x}{\cos x + \sqrt{\cos 2x}}$
$f_2(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} \frac{2}{x}}$
$f_3(x) = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{5}$

таких, что $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$.
Соответсвенно: $f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x)$.
Ещё немного расчленим $f_1(x)$:

$f_{11}(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sqrt{\cos 2x}}$

Найдём теперь производную каждой функции:

$f_{11}'(x) = \frac{(\sin x)'(\cos x + \sqrt{\cos 2x}) - (\sin x)(\cos x + \sqrt{\cos 2x})'}{(\cos x + \sqrt{\cos 2x})^2} = \frac{\cos x(\cos x + \sqrt{\cos 2x}) - \sin x(-\sin x - \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}})}{(\cos x + \sqrt{\cos 2x})^2} =$

$= \frac{\cos^2 x + \cos x \sqrt{\cos 2x} + \sin^2 x + \frac{\sin x \sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}}{(\cos x + \sqrt{\cos 2x})^2} = \frac{1 + \frac{\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}}{(\cos x + \sqrt{\cos 2x})^2} = \frac{1 + \frac{\cos(x - 2x)}{\sqrt{\cos 2x}}}{(\cos x + \sqrt{\cos 2x})^2} = \frac{\sqrt{\cos 2x} + \cos x}{\sqrt{\cos 2x}} * \frac{1}{(\cos x + \sqrt{\cos 2x})^2} =$

$= \frac{1}{(\cos x + \sqrt{\cos 2x})\sqrt{\cos 2x}}$

$f_1'(x) = (\ln f_{11}(x))' * f_{11}'(x) = \frac{1}{f_{11}(x)} * f_{11}'(x) = \frac{\cos x + \sqrt{\cos 2x}}{\sin x} * \frac{1}{(\cos x + \sqrt{\cos 2x})\sqrt{\cos 2x}} = \frac{1}{\sin x \sqrt{\cos 2x}}$

$f_2'(x) = \frac{(\operatorname{arctg} \frac{2}{x})'}{2\sqrt{\operatorname{arctg} \frac{2}{x}}} = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} \frac{2}{x}}} * \frac{1}{1 + \frac{4}{x^2}} * (-\frac{2}{x^2}) = -\frac{1}{(x^2+4)\sqrt{\operatorname{arctg} \frac{2}{x}}}$

$f_3'(x) = (\operatorname{ctg} \sqrt[3]{5})' = 0$

$f'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x) = \frac{1}{(\cos x + \sqrt{\cos 2x})\sqrt{\cos 2x}} - \frac{1}{(x^2+4)\sqrt{\operatorname{arctg} \frac{2}{x}}} + 0 = \frac{(x^2+4)\sqrt{\operatorname{arctg} \frac{2}{x}} - (\cos x + \sqrt{\cos 2x})\sqrt{\cos 2x}}{(\cos x + \sqrt{\cos 2x})(x^2+4)\sqrt{\cos 2x \operatorname{arctg} \frac{2}{x}}}$

1.8 № 8.

$y = f(x) = e^x(\cos 2x + 2\sin 2x)$
Найдём $f'(x)$:
$f'(x) = (e^x)'(\cos 2x+2\sin 2x)+e^x(\cos 2x+2\sin 2x)' = e^x(\cos 2x+2\sin 2x-2\sin 2x+4\cos 2x) =$
$= 5e^x \cos 2x$
$dy = f'(x) * dx = 5e^x \cos 2x * dx$
Ответ: $dy = 5e^x \cos 2x * dx$.

1.9 № 9.

$y = f(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$

$\frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow f'(x) = (\sqrt{2x^2+1})' = \frac{(2x^2+1)'}{2\sqrt{2x^2+1}} = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow f''(x) = \frac{(2x)`\sqrt{2x^2+1}-2x(\sqrt{2x^2+1})'}{2x^2+1} = \frac{2\sqrt{2x^2+1}-2x*\frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}}{2x^2+1} = \frac{\frac{2(2x^2+1)-4x^2}{\sqrt{2x^2+1}}}{2x^2+1} = \frac{\frac{4x^2+2-4x^2}{\sqrt{2x^2+1}}}{2x^2+1} = \frac{\frac{2}{\sqrt{2x^2+1}}}{2x^2+1} =$

$= \frac{2}{(2x^2+1)\sqrt{2x^2+1}}$

Ответ: $\frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$ и $\frac{2}{(2x^2+1)\sqrt{2x^2+1}}$.

1.10 № 10.

$f'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln 10}$
$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2 \ln 10}$
$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3 \ln 10}$
$f''''(x) = -\frac{6}{(x+1)^4 \ln 10}$
$f'''''(x) = \frac{24}{(x+1)^5 \ln 10}$
Предположение: $\frac{d^ny}{dx^n} = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n \ln 10}$.
Докажем предположение по индукции:
База: $n = 1$
$f^{(1)}(x) = (\lg(1+x))' = \frac{1}{(x+1)\ln 10}$
$(-1)^{n+1} * \frac{(n-1)!}{(x+1)^n \ln 10} = \frac{0!}{(x+1)\ln 10} = \frac{1}{(x+1)\ln 10}$
$\frac{1}{(x+1)\ln 10} = \frac{1}{(x+1)\ln 10}$ ■

Предположение индукции: $n = k$:
$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} * \frac{(k-1)!}{(x+1)^k \ln 10}$.

Шаг индукции: $n = k + 1$
$f^{(k+1)}(x) = (-1)^{k+2} * \frac{k!}{(x+1)^{k+1} \ln 10}$.
$(f^{(k)}(x))' = (-1) * (-1)^{k+1} * \frac{k(k-1)!}{(x+1)^k (x+1) \ln 10}$
$(f^{(k)}(x))' = -\frac{k}{(x+1)} * (-1)^{k+1} * \frac{(k-1)!}{(x+1)^k \ln 10}$

$(f^{(k)}(x))' = -\frac{k}{(x+1)} * f^{(k)}(x)$