Подготовка к экзамену по матану.

Иван Пешехонов. ФКН. БПМИ1912.

14 марта 2020 г.

Оглавление

Глава 1

Системы линейных уравнений

1.1 Теория

Вспомним некоторые понятия, которые пригодятся нам для решения системок.

1.1.1 Сколько может быть решений у системы

Прежде всего поговорим про число решений у системы, всего, вообще говоря, может быть три варианта:

- Система может **не иметь решений** (быть несовместной)
- Система может **иметь ровно одно** решение
- Система может **иметь бесконечно много** решений

Это все варианты, бывает случай, когда система не может не иметь решений, но никогда не может быть такого, чтобы система имела конечное число решений, большее одного.

1.1.2 Расширенная матрица

Так же нам понадобится понятие расширенной матрицы:
Расширенная матрица имеет вид $(A|b)$, где A - матрица, составленная из коэффициентов перед неизвестными в системе, а b - столбец значений, стоящих после знака равно. Покажу на примере, как делать переход от системы к расширенной матрице:

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 14x_3 + x_4 = 12 \\ 31x_1 + x_2 + 12x_4 = 7 \\ 13x_2 + 17x_3 + 21x_4 = 5 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 6 & 14 & 1 & 12 \\ 31 & 1 & {\color{red}0} & 12 & 7 \\ {\color{red}0} & 13 & 17 & 21 & 5 \\ 3 & 7 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Обратим внимание на красные нули: во втором уравнении отсутсвует переменная x_3, так же как отсутсвует x_1 в третьем уравнении, это то же самое, как если бы мы их записали, но поставили перед ними коэффициент 0. Вот этот 0 мы и переносим в матрицу.
Немного про размер раширенной матрицы: если в системе есть m уравнений, и всего в системе используется n переменных, то размер матрицы коэффициентов будет $m \times n$, а размер расширенной матрицы, соответственно $m \times (n+1)$.

1.1.3 Метод Гаусса

Теперь немного о том, как собственно решать системы уравнений.
Алгоритм:

1. Записать раширенную матрицу
2. Выполнять элементарные преобразования, приводя левую часть расширенной матрицы к ступенчатому виду
3. Выполнять элементарные преобразования, приводя левую часть расширенной матрицы к улучшенному ступенчатому виду
4. Записать ответ

Будем считать, что с первым пуктном мы разобрались, теперь второй и третий.
Вспомним, что есть такое элементарные преобразования и что вообще значит "матрица ступенчатого вида".

Элементарные преобразования, это способ менять матрицу, не меняя при этом какие-то важные харрактеристики, которые нас интересуют (множество решений, ранг, определитель...). Всего элементарные преобразования существуют трёх типов:

1. К какой-то строке прибавить какую-то другую строку, умноженную на некоторое число.
2. Поменять две строки местами.
3. Какую-то строку умножить на некоторое, ненулевое число.

Все эти действия можно в последовательном порядке применять к расширенной матрице, и не бояться, что какие-то решения продолбаются (если конечно не сделать арифметическую ошибку). Что значит "последовательный порядок"? Очень просто, строго запрещается одновременно выполнять с одной строкой два каких-то преобразования, чтобы избежать путаницы, и действительно не продолбать решения.
Теперь про ступенчатый и улучшенный ступенчатый виды:
Прежде всего ведущим элементом будем называть первый ненулевой элемент в строке. Матрица имеет ступенчатый вид, если под всеми ведущими элементами стоят нули, а номера ведущих элементов строго возрастают. Пример: слева и посередине матрица ступенчатого вида, справа матрица не имеет ступенчатый вид.

$$\begin{pmatrix}1&4&5&11\\0&3&1&2\\0&0&1&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&4&5&11&6\\0&0&1&2&4\\0&0&0&8&1\\0&0&0&0&12\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&4&5&11&6\\0&0&1&2&4\\2&0&0&8&1\\0&4&0&0&12\end{pmatrix}$$

Контрольный вопрос: является ли матрица $\begin{pmatrix}1&4&5&11&6\\0&0&1&2&4\\0&0&0&8&1\\0&4&0&0&12\end{pmatrix}$ ступенчатой?

Аналогично матрица имеет **улучшенный ступенчатый вид**, если
1) Она имеет ступенчатый вид
2) Ведущими элементами являются единицы
3) Над ведущими элементами стоят нули
Следующие матрицы имеют улучшенный ступенчатый вид:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&4\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&8\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Контрольный вопрос: имеет ли матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ улучшенный ступенчатый вид?

Собственно по системам уравнений всё, как это делать ручками и как записывать ответ я покажу на конкретных примерах в следующем блоке.
Полезный факт: матрицу можно привести к ступенчатому виду используя только целочисленные преобразования. С улучшенным ступенчатым видом так уже не работает.

1.1.4 Общее и частное решение системы

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 3 \\ 5x_1 - x_2 - 7x_3 - 9x_4 = -1 \end{cases}$$

Подробный разбор этой задачи можно найти в соответствующем блоке. Сейчас важно то, что элементарными преобразованиями эту систему можно привести к виду

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_4 + \frac{2}{5} - \frac{2}{15} \\ x_3 = \frac{1}{3} - x_4 \end{cases}$$

Причём, от переменных x_2, x_4 здесь ничего не зависит, а значит они могут принимать вообще любые числовые значения. Т.к. мы не можем явно указать конкретные значения свободных переменных, то и ответ в обычном, числовом виде мы записать не можем. Возникает резонный вопрос: а как записать ответ? В таких случаях, когда система имеет одну или более свободную неизвестную используется понятие **общего решения**. Общее решение это просто колонка, окружённая круглыми скобками, количество строк в которой совпадает с общим числом неизвестных системы. Например в этой системе используется 4 неизвестных, значит и общее решение будет состоять из четырёх строк. Разберёмся, что это будут за строки. Принцып очень прост: если очередная строка соответсвует главной неизвестной (неизвестной, которая выражается через свободные, в данном случае главные неизвестные это x_1, x_3), то в строку записывается просто её выражение через свободные неизвестные. Если же очередная строка соответсвует свободной неизвестной, то в эту строку записывается просто сама свободная неизвестная. Таким образом в общем решении будет строк то конечно столько, сколько всего неизвестных в системе, но вот буквы там использоваться будут только те, что соответсвуют свободным неизвестным. Покажем построение общего решения для этой системы:

- Как уже отемачалось выше, всего в системе используется 4 разных неизвестных, значит в общем решении будет 4 строчки.
- Пусть первая строчка соответсвует переменной x_1, вторая соответсвует x_2, третья x_3, а четвёртая x_4.
- Переменная x_1 выражена через свободные переменные x_2, x_4. Значит в первой строке общего решения будет стоять просто это выражение $(\frac{1}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_4 + \frac{2}{5} - \frac{2}{15})$.
- Аналогично для x_3.
- Переменные x_2 и x_4 являются свободными, значит во второй и в четвёртой строке общего решения соответсвенно будут стоять просто x_2 и x_4.

Теперь просто запишем общее решение на основании этих пунктов:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_4 + \frac{2}{5} - \frac{2}{15} \\ x_2 \\ \frac{1}{3} - x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Итак, мы научились записывать общее решение системы. Но что делать, если в задаче просят частное решение, и что вообще такое частное решение? Тут всё гораздо проще: частное решение, это как раз то самое числовое решение, к которому все привыкли. Как искать частное решение? Совсем просто: после того, как мы записать общее решение, в свободные переменные мы подставляем любое число, которое нравится, хоть 1, хоть 0, хоть 10^9. Дальше просто вычисляем до конца выражения главных неизвестных, и полученная колонка с числами и будет частным решением системы. Если подставить в свободные переменные другие значение, то получится другое частное решение. Ещё какие-то значения - ещё какое-то частное решение, и т.д. Собственно из-за такого бардака, и в силу того, что подставлять мы можем что хотим, система, которая имеет хотя бы одну свободную неизвестную имеет бесконечное число (частных) решений. Я приведу простой пример частного решения этой системы, просто подставив на место x_2, x_4 ноль:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} - \frac{2}{15} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Та-дам.

Всё что будет написано дальше касается уже следующего типа задач, а именно решений матричных уравнений.

1.1.5 Операции с матрицами: перемножение и транспонирование

Хз на самом деле, как описать по-русски переменожение матриц, поэтому я лучше приведу тройку примеров, и буду надеяться, что что-то понятно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 1 & 1\cdot 5 + 2\cdot 0 \\ 3\cdot 2 + 4\cdot 1 & 3\cdot 5 + 4\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 1 & 1\cdot 5 + 2\cdot 0 & 1\cdot 3 + 2\cdot 2 \\ 3\cdot 2 + 4\cdot 1 & 3\cdot 5 + 4\cdot 0 & 3\cdot 3 + 4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 10 & 15 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 8\cdot 0 = 4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 8\cdot 0 & 1\cdot 4 + 2\cdot 3 + 8\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 18 \end{pmatrix}$$

Стоит немного об этом подумать, запомнить что с чем и как складывается, и очень важно обратить внимание на размеры.

Транспонирование, в свою очередь, простая и интуитивно понятная операция: если матрица, в которой сколько строк, мы берём эти строки, и в том же порядке записываем в стобцы матрицы. На примерах, пожалуй, всё ещё будет нагляднее:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 4 & 6 & 8 & 12\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}2\\4\\6\\8\\12\end{pmatrix}$$

Опять же важно просто внимательно на это посмотреть, осознать как это работает и что происходит с размерами матриц.
Полезное свойство операции транспонировая, пригодится нам позже: $(AB)^T = B^T A^T$, где A и B - матрицы.

1.1.6 Единичная матрица

Вспомним, что есть такое единичная матрица.
Единичная матрица, это такая квадратная матрица, у которой на главной диагонали (из левого верхнего угла в правый нижний) стоят единицы, а на всех остальных местах нули. Единичная матрица обозначается E.
Пример единичных матриц:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Парочка свойств единичной матрицы, они нам впринципе не нужны, но для общего развития....
1) $AE = A$
2) $E^{-1} = E$

1.1.7 Матричные уравнения

Матричные уравнения есть двух типов:

- $AX = B$
- $XA = B$

где A, B - известные матрицы, а X - неизвестная.
Первый случай мы сейчас подробно разберём, а второй сведём к первому.
Алгоритм решения матричного уравнения:

1. Запишем расширенную матрицу $(A|B)$.
2. Элементарными преобразованиями строк приводим левую часть к ступенчатому виду.
3. Элементарными преобразованиями строк приводим левую часть к УСВ.
4. Вот тут есть два варианта:
    - После всех элементарных преобразований слева получилась единичная матрица, тогда справа находится ответ
    - Слева единичная матрица не получилась, тогда придётся немного поизвращаться

Подробно покажу в разборе.
А теперь второй вид: $XA = B$. Тут неизвестная матрица стоит с другой стороны, и в случае матриц это прям проблема, потому что мы, вообще говоря, не можем просто поменять их местами. Но, у нас есть классное свойство транспонирования, которое как раз поможет нам это сделать, а именно мы берём, и транспонируем обе части уравнения: $XA = B \Leftrightarrow A^T X^T = B^T$. И снова неизвестная матрица у нас с правильной стороны, теперь мы решаем это уравнение по алгоритму выше, и получаем ответ в качестве матрицы X^T, главное потом не забыть транспонировать её обратно, и тогда это будет уже финальным ответом.

1.2 Разборы задач

1.2.1 Пример системы с единственным решением

Задача: Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 5 \\ -6x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$$

Решение:
Идём по алгоритму, запишем расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 5 \\ -6 & 2 & -5 & -2 \\ 3 & -6 & 10 & 11 \end{array}\right)$$

Начинаем приводить матрицу к ступенчатому виду. Я прибавлю дважды первую строчку ко второй, и из третьей строчки вычту первую чтобы получить нули под угловой тройкой:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 5 \\ -6 & 2 & -5 & -2 \\ 3 & -6 & 10 & 11 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & 8 \\ 0 & -4 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

Теперь я вычту из первой и из третьей строчки вторую:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & 8 \\ 0 & -4 & 5 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

И наконец я вычту из второй строчки третью, а потом поменяю их местами:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

Итак, пункт 2 алгоритма выполнен: матрица имеет ступенчатый вид. Теперь будем приводить её к улучшенному ступенчатому виду. Матрица у нас достаточно хорошая, поэтому привести её можно практически в одно действие: раздели первую строчку на 3 (умножим на $\frac{1}{3}$, если так больше нравится), вторую строчку разделим на -2, и третью строчку разделим на 5.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

И вот матрица уже имеет улучшенный ступенчатый вид, пункт три выполнен. Осталость только записать ответ. Чтобы было понятно, я сделаю переход от расширенной матрицы обратно к системе:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Собственно, мы выразили все переменные однозначно, это и есть ответ.

1.2.2 Пример несовместной системы

Задача: Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 5x_5 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + 4x_5 = 3 \end{cases}$$

Решение: Расширенная матрица и сразу УСВ (там чисто арифметика):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \rightsquigarrow \\ \\ C_3 - C_1 \\ C_4 - C_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 - C_2 \\ \rightsquigarrow \\ C_3 - C_2 \\ C_4 - 2C_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$C_n - C_m$ значит "из n-ой строчки вычесть m-ую".
Если поменять первую и вторую строчку местами, то получится УСВ, но нам гораздо интереснее послдняя строка матрицы. Если мы сделаем переход обратно к системе, то последней строчкой такой системы будет $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = -1$, т.е. $0 = -1$, но такого же не может быть, а значит система не имеет решений, или, другими словами, система несовместна.

1.2.3 Пример системы с бесконечным числом решений

Задача: Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 3 \\ 5x_1 - x_2 - 7x_3 - 9x_4 = -1 \end{cases}$$

Решение: Расширенная матрица и ступенчатый вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & -1 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & -1 & -7 & -9 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \rightsquigarrow \\ C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \rightsquigarrow \\ C_2/2 \\ C_3/2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 + C_2 \\ \rightsquigarrow \\ C_3 + C_2 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Матрица имеет ступенчатый вид, теперь приведём её к УСВ (ух, сейчас классные числа повылезают):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1/5 \\ C_2/3 \\ \rightsquigarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1/5 & 2/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 - \frac{2}{5}C_2 \\ \rightsquigarrow \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1/5 & 0 & -2/5 & 2/5 - 2/15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Здорово, матрица имеет УСВ, но какой ценой(((
Теперь важный момент: как выписывать решение в такой системе? Снова сделаем переход к системе:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1/5 & 0 & -2/5 & 2/5 - 2/15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{1}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_4 = \frac{2}{5} - \frac{2}{15} \\ x_3 + x_4 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Выразим переменные x_1 и x_3:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_4 + \frac{2}{5} - \frac{2}{15} \\ x_3 = \frac{1}{3} - x_4 \end{cases}$$

Переменные x_2 и x_4 могут принимать любое значение и называются **свободными**, но как только мы зафиксируем какие-то значения x_2 и x_4, то мы можем их подставить в уравнения, и значения переменных x_1, x_3 сразу определятся. Запишем общее решение системы:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_4 + \frac{4}{15} \\ x_2 \\ \frac{1}{3} - x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Можно ещё дополнительно записать, что $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$, но это не обязательно на самом деле. Так выглдяит общее решение системы с бесконечным число решений (недеюсь, теперь понятно, почему их бесконечное число). Вопрос: что делать если в задаче просят найти общее решение, и какое-то частное решение? Очень просто: можно просто подставить любые знчения в свободные неизвестные и получится частное решение. например в этой задаче я хочу подставить $x_2 = 5$, а $x_4 = \frac{1}{3}$, тогда получится частно решение

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{6}{15} \\ 5 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

1.2.4 Матричное уравнение № 1.

Задача: Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -2 & 8 & 7 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение: Запишем расширенную матрицу $(A|B)$ и будем приводить её левую часть к улучшенному ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & \text{-1} & \text{-2} & 8 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \rightsquigarrow \\ C_2 - 2C_1 \\ C_3 - C_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & \text{-1} & \text{-3} & \text{-10} & 2 & \text{-5} \\ 0 & \text{-1} & 1 & 2 & \text{-2} & \text{-1} \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 + 2C_3 \\ \rightsquigarrow \\ C_2 - C_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 8 & \text{-1} & 4 \\ 0 & 0 & \text{-4} & \text{-12} & 4 & \text{-4} \\ 0 & \text{-1} & 1 & 2 & \text{-2} & \text{-1} \end{array}\right) \begin{array}{c} \rightsquigarrow \\ C_2/(-4) \\ C_3 \cdot (-1) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 8 & \text{-1} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \text{-1} & 1 \\ 0 & 1 & \text{-1} & \text{-2} & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 - 3C_2 \\ \rightsquigarrow \\ C_3 + C_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \text{-1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \text{-1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \rightsquigarrow \\ C_3 \rightleftarrows C_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \text{-1} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \text{-1} & 1 \end{array}\right)$$

Итак, мы привели матрицу слева к УСВ, более того, матрица слева являет единичной. В соответствии с алгоритмом, раз матрица слева - единичная, то матрица справа - искомая.

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

В качестве проверки можно просто их перемножить, и увидеть, что действительно получится матрица справа.

1.2.5 Матричное уравнение № 2.

Задача: Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение: Всё так же запишем расширенную матрицу, и будем приводить её левую часть к УСВ:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{C_3-2C_1}{\overset{\rightsquigarrow}{C_2-C_1}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \underset{C_3-C_2}{\overset{C_1-C_2}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{C_2\cdot(-1)}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Итак, матрица слева имеет УСВ, но неприятность заключается в том, что она не единичная, а значит мы не можем простонаписать ответ. Что делать, когда происходит такая неприятность? Ответ: надо разбить такую матрицу на две вот такие:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Т.е. просто рашиваем матрицу по столбцам правой части раширенной матрицы и получаем две системы линейных уравнений, а их мы уже умеем решать. Общее решение левой системы:

$$\begin{pmatrix} 1+2x_3 \\ 1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Общее решение правой системы:

$$\begin{pmatrix} 3+2x_3 \\ 2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Теперь надо вспомнить, что нам нужно было решить не две отдельные системы, а матричное уравнение, т.е. в ответе надо получить матрицу. Два полученных частных решения нужно обратно слить в одну матрицу, но тут есть тонкий момент. Запишем сначала то, что первое приходит в голову:

$$X = \begin{pmatrix} 1+2x_3 & 3+2x_3 \\ 1 & 2 \\ x_3 & x_3 \end{pmatrix}$$

Вроде вот, матрицу какую-то получили, она вроде даже того размера, которого надо, можно говорить что это ответ. Сказать то конечно можно, но вот ответ этот **не правильный**, и полный балл за такое решение не поставят. В чём тут лажа? Мы сейчас решили две системы отдельно, и в обеих обозначили буквой x_3 единственную свободную неизвестную. Но, вообще говоря, это не одна и та же неизвестная, и в итоговой матрице лучше всё же писать разные буквы. Т.к. я могу красиво набирать греческие буквы, я, пожалуй, использую их:

$$X = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & 3+2\mu \\ 1 & 2 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

Вот это уже правильная матрица, и её можно писать в ответ.

1.2.6 Матричное уравнение № 3.

Задача: Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Опа, неизвестная матрица на неправильном месте, такое мы решать не умеем. Воспользуемся свойством транспонирования и транспонируем обе части уравнения:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 2 & -3 & -2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}^T X^T = \begin{pmatrix}4 & -6 & 0\\ 5 & -6 & 0\end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & -3 & -1\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix} X^T = \begin{pmatrix}4 & 5\\ -6 & -6\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

А вот это мы уже вроде как умеем решать. Запишем расширенную матрицу и приведём её к УСВ. Я сделаю это в одно действие, потому что мне лень всё это печатать, но там ничего интересного, просто элементарные преобразования.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 4 & 5\\ -1 & -3 & -1 & -6 & -6\\ -2 & -2 & 2 & 0 & 0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2\end{array}\right)$$

Итак, слева получилась единичная матрица, значит справа находится ответ, да? **Нет.** Дело в том, что мы транспонировали обе части уравнения, и решали немного другое матричное уравнение, не совсем то, что нас просили решить в задании. Поэтому найденная матрица это на самом деле не X, а X^T. Но т.к. мы (я надеюсь) уже овладели операцией транспонирования, мы легко можем превратить X^T обратно в X:

$$X^T = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Вот эта матрица уже является искомой.

1.3 Задачи

1. Найти решения систем

$$\begin{cases}3x_1 + 4x_2 = 7\\ 5x_1 + 3x_2 = 8\end{cases} \quad b) \begin{cases}3x_1 + 4x_2 = -3\\ 5x_1 + 3x_2 = -5\end{cases} \quad c) \begin{cases}3x_1 + 4x_2 = 2\\ 5x_1 + 3x_2 = 7\end{cases} \quad d) \begin{cases}2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0\\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2\\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1\\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = -4\end{cases}$$

2. Перемножить матрицы

$$a)\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}5\\4\\3\\2\\1\end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}5 & 7\\6 & 8\end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 2\\7 & 2 & 7 & 1\end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 14\\3 & 4 & 17\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$e)\ \begin{pmatrix}5\\4\\3\\2\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix} \qquad f)\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 14\\3 & 4 & 17\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}$$

3. Транспонировать матрицы

$$a)\ \begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 1\\0 & 2\end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix}1\\3\\3\\12\\4\\8\end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 7 & 9\\2 & 4 & 6 & 8 & 10\\3 & 14 & 159 & 256 & 0\\2 & 7 & 18 & 61 & 18\end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix}1 & 4 & 6\\4 & -8 & 7\\6 & 7 & 11\end{pmatrix}$$

---

4. Найти общее, и какое-нибудь частное решение следующих систем линейных уравнений.

$$a)\ \begin{cases}x_1 + 2x_2 - x_4 = 1\\x_3 - 3x_4 = 2\end{cases} \qquad b)\ \begin{cases}5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10\\2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4\\x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2\end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases}-9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3\\-6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2\\-3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1\end{cases} \qquad d)\ \begin{cases}-6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4\\-2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2\\-4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3\end{cases}$$

5. Решить матричные уравнения.

$$a)\ \begin{pmatrix}1 & 3\\1 & 2\end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix}2 & -1\\4 & -2\end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 6\end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\1 & -3 & 5\\-1 & 2 & 6\end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\1 & 3 & 4\\3 & 2 & 1\end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix}-1 & 2\\0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$$

$$f)\ X \cdot \begin{pmatrix}3 & 2 & -3\\-3 & 2 & -2\\-1 & 3 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & -4 & 4\\-10 & 1 & 2\\2 & 2 & -6\end{pmatrix}$$

Глава 2

Разложение трёхмерных векторов по трём другим

2.1 Алгоритм

Пусть дан какой-то вектор v, и его надо разложить по векторам e_1, e_2, e_3. Прежде всего: что это значит? На самом деле всё очень просто: разложить вектор по остальным значит представить его в виде суммы остальных. Вероятно, в задачах будут даны как вектор v, так и векторы e_1, e_2, e_3, т.е. мы знаем практически всё, что нужно. Единственное, чего мы не знаем, это с какими коэффициентами нам надо сложить векторы e, чтобы в итоге получился вектор v. Поиск этих коэффициентов и есть суть задачи разложения вектора по остальным.
Итак, алгоритм:
Задача: дан вектор v, надо представить его в виде $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. Коэффициентов α мы не знаем, их надо найти. Сейчас будет очень важный переход его стоит хорошо запомнить:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = (e_1\, e_2\, e_3) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

где $(e_1\, e_2\, e_3)$ - матрица, составленная из столбцов векторов e. Действительно, если взять и перемножить эти два "типа вектора“, то получится выражение, стоящее слева. Тогда перепишем в таком виде и исходное равенство:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = v \iff (e_1\, e_2\, e_3) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = v$$

В итоге слева мы имеем матрицу из векторов e, столбец неизвестных коэффициентов, а справа имеем вектор v. Т.е. в итоге от какого-то выражения с тремя неизвестными мы перешли к системе уравнений, которые мы уже умеем решать. Остаётся только записать расширенную матрицу $(e_1\, e_2\, e_3 \,|\, v)$ и решить систему. В ответе получится три числа - те самые коэффициенты, с которыми надо сложить векторы e, чтобы получился вектор v.

2.2 Разбор задач

2.2.1 Разложение № 1.

Задача: Разложить вектор b по векторам a_1, a_2, a_3.

$$b = (-3, 5, 5) \qquad\qquad a_1 = (2, 1, 1), a_2 = (-2, 0, -3), a_3 = (-1, 2, 1)$$

Решение: составим расширенную матрицу $(a_1\, a_2\, a_3 \mid b)$ и будем её решать:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right) \underset{C_3 - C_2}{\overset{C_1 - 2C_2}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -5 & -13 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{C_3 - C_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -5 & -13 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 13 \end{array}\right) \underset{C_3 \cdot (-1)}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & -5 & -13 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -13 \end{array}\right) \overset{C_1 + 2C_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -13 & -39 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -13 \end{array}\right) \overset{C_1 \cdot (-1/13)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -13 \end{array}\right) \underset{C_3 + 4C_1}{\overset{C_2 - 2C_1}{\rightsquigarrow}}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \overset{C_1 \leftrightarrows C_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \underset{C_3 \leftrightarrows C_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 3 \end{cases}$$

Мы нашли коэффициенты в разложении, остаётся только проверить, это именно те коэффициенты, которые нам нужны:

$$-a_1 - a_2 + 3a_3 = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = b$$

Таким образом разложение $b = -a_1 - a_2 + 3a_3$ является искомым. Ещё говорят, что коэффициенты $(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3)$ являются координатами вектора b в системе векторов a_1, a_2, a_3.

2.2.2 Разложение № 2.

Задача: является ли вектор $b = (3, 1, 4)$ линейной комбинацией векторов $a_1 = (1, 1, 1), a_2 = (1, -1, 2), a_3 = (1, -3, 3)$? Решение: "Представить как линейную комбинацию", "найти координаты в базисе", "разложить по базису" и т.д. Это всё разные названия одной и той же задачи. Мы, как и в прошлой задаче записываем расширенную матрицу $(e_1\, e_2\, e_3 \mid b)$ и решаем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \rightsquigarrow \\ C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_1 - C_3 \\ C_2 + 2C_3 \\ \rightsquigarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{cases} \alpha_1 = 2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 = 1 - 2\alpha_3 \end{cases}$$

Мы получили систему с одной свободной неизвестной, выпишем её общее решение:

$$\begin{pmatrix} 2 + \alpha_3 \\ 1 - 2\alpha_3 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Таким образом у нас есть некоторая свобода в подборе коэффициентов в разложении, ввиду того, что мы можем вообще любое число подставить в α_3, и решение будет верным. Для удобства я подставлю значение $\dfrac{\sqrt{3\pi}}{e^{\ln 4}}$. Шучу, я подставлю 0:

$$\alpha_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = b$$

Таким образом вектор b является линейной комбинацией векторов e с коэффициентами например $(2, 1, 0)$.

2.3 Задачи

1. Разложить вектор $x(4, 3, -2)$ по векторам

$$e_1(1, 1, 2) \qquad e_2(-3, 0, -2) \qquad e_3(1, 2, -1)$$

2. Найти координаты вектора $x(2, 2, -1)$ в базисе

$$e_1(1, 0, 2) \qquad e_2(-1, 2, 1) \qquad e_3(-1, 4, 0)$$

3. Представить вектор $b(0, 1, 2)$ в виде линейной комбинации векторов

$$e_1(-1, 2, -2) \qquad e_2(1, -1, 2) \qquad e_3(1, -1, 1)$$

4. Разложить вектор $b(2, 2, 3, 3)$ по системе векторов

$$e_1(1, 2, 3, 1) \qquad e_2(2, 1, 2, 3) \qquad e_3(3, 2, 4, 4)$$

5. Найти коэффциенты вектора $b(4, 1, 3, 1)$ в линейной комбинации векторов

$$e_1(2, 0, 1, 1) \qquad e_2(1, 1, 2, -2) \qquad e_3(2, 1, 3, -3)$$

Глава 3

Поиск локальных экстремумов функции трёх переменных

3.1 Алгоритм.

Сразу рассмотрим пример: найти локальные экстремумы функции $f(x, y, z) = -x^2 - 5y^2 - 3z^2 + xy - 2xz + 2yz + 11x + 2y + 18z + 10$.

Шаг первый: ищем частные производные.

- $f'_x = -2x + y - 2z + 11$
- $f'_y = -10y + x + 2z + 2$
- $f'_z = -6z - 2x + 2y + 18$

Шаг второй: приравниваем частные производные к нулю и находим кретические точки.

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - 2z + 11 = 0 \\ -10y + x + 2z + 2 = 0 \\ -6z - 2x + 2y + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Нашли точку $M_0(4, 1, 2)$, она критическая, теперь надо бы узнать, максимум там, минимум, или это просто левая точка.

Шаг третий: вычисляем частные производные второго порядка и составляем матрицу Гёссе. Матрица Гёссе - симметреческая матрица вида

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{pmatrix}$$

И хотя в ней 9 значений, нам достаточно вычислить всего 6, это всё равно будет больно.

Итак нам надо найти:

$$\begin{matrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zz} & f''_{xz} \end{matrix}$$

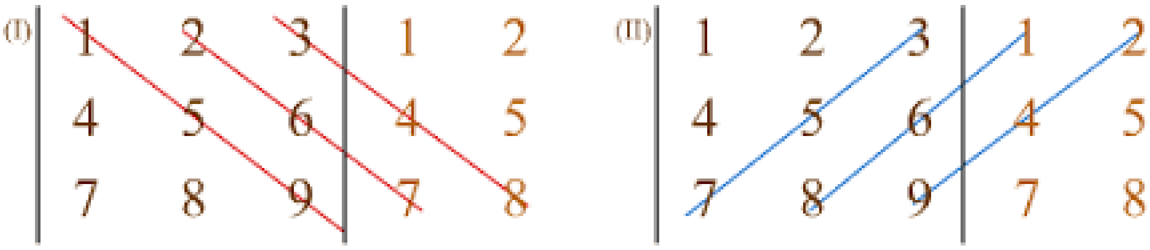
Ну, найдём:

$$f''_{xx} = -2 \qquad f''_{xy} = 1$$
$$f''_{yy} = -10 \qquad f''_{yz} = 2$$
$$f''_{zz} = -6 \qquad f''_{xz} = -2$$

А теперь составим матрицу Гёссе, так как матрица симметрическая, то нам действительно достаточно 6 значений:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -10 & 2 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Шаг четвёртый: считаем угловые миноры.
Угловые миноры, это определители квадртных подматриц меньшего размера, разрастающиеся из левого верхнего угла. Напомним, как считать определелители:
Для матрицы 1×1 : $|a| = a$.
Для матрицы 2×2 : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.
Для матрицы 3×3 :



Мне кажется эта картинка помогает лучше всего запомнить, как считать определитель матрицы 3×3. Т.е. просто записываем справа от матрицы первые два её столбца, а дальше складываем элементы, расположенные на диагоналях. Элементы на красных диагоналях берём со знаком $+$, а элементы на синих со знаком $-$.
Вернёмся к нашей матрице и посчитаем у неё угловые миноры (я буду обозначать их δ).
$\delta_1 = -2$
$\delta_2 = -2 \cdot (-10) - 1 \cdot 1 = 19$
$\delta_3 = -2 \cdot (-10) \cdot (-6) + 1 \cdot 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 \cdot 2 - (-2) \cdot (-10) \cdot (-2) - (-2) \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot (-6) = -74$

А теперь внимательно, может быть 3 случая:

1. Если $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \delta_3 > 0$, то точка M_0 является точкой минимума данной функции.
2. Если $\delta_1 < 0, \delta_2 > 0, \delta_3 < 0$, то точка M_0 является точкой максимума данной функции.
3. Если получилось что-то другое, то экстремумов у функции нет.

В нашем случае $\delta_1 < 0, \delta_2 > 0, \delta_3 < 0$, а значит точка $M_0(4, 1, 2)$ - точка максимума.

3.2 Задачи

№ 1. Исследовать функцию на экстремум:

$$f(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2 + 3x + 4y - 6z$$

№ 2. Исследовать функцию на экстремум:

$$f(x, y, z) = -2x^2 - y^2 + 2z^2 - 2xy + 3xz - 2yz - 4x + 8y + z + 4$$

№ 3. Найти локальные экстремумы функции $f(x, y) = x + 2y$ при условии $g(x, y) : x^2 + y^2 - 5 = 0$
№ 4. Вычислить наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $D : 0 \leqslant x \leqslant 2, -1 \leqslant y \leqslant 2$

Глава 4

Собственный вектор и собственное значение матрицы [:(]

4.1 Теория и алгоритмы

Прежде всего определение: вектор x называется собственным вектором матрицы A, если выполняются два условия:

1. $x \neq 0$
2. Существует число λ, такое что $Ax = \lambda x$. Это число λ называется собственным значением матрицы.

Первое, что стоит заметить, это то, что собственных значений у матрицы, как и собственных векторов может быть много.

4.2 Разбор задач

4.3 Задачи

Глава 5

Разложение по базису (Reduntat)

5.1 Теория

5.1.1 Линейные пространства и их размерности

Прежде всего надо немного познакомиться с чем мы будем тут работать:

$$a = 1 \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Выше я привёл пример трёх конструкций, каждая из которых является вектором. В общем случае, вектор это просто столбик из цифр фиксированной высоты. Так вектор a это столбик высоты 1, вектор b - столбик высоты 2, вектор c - столбик высоты 4. Всем этим столбикам надо где-то жить, в каком-то множестве таких же столбиков. И так и есть, любой вектор высоты n живёт в **линейном пространстве** $\mathbb{R}^n$. Что значит вот это вот $\mathbb{R}^n$? Ну, мы знаем что $\mathbb{R}$ это множество вещественных (действительных) чисел, включающее в себя все натуральные, целые, рациональные и иррациональные числа. Тогда $\mathbb{R}^n$, это множество столбиков из чисел высоты n, в котором каждое число может является вещественным, т.е. все числа в столбике являются числами из $\mathbb{R}$.
Так например вектор a из примера живёт в пространстве $\mathbb{R}^1$, что то же самое, что $\mathbb{R}$, вектор b живёт в $\mathbb{R}^2$, а вектор c живёт в пространстве $\mathbb{R}^4$.
Идём дальше: для каждого столбика существуют две операции:

1. Мы можем взять два каких-нибудь столбика и сложить их просто покомпонентно, и получить новый столбик, но такой же высоты.

2. Можем взять какой-нибудь столбик, и каждую его компоненту умножить на какое-то число. И тогда мы тоже получим столбик такой-же высоты.

$\mathbb{R}^n$ - простейший пример линейного пространства, и в нём на самом деле проходит очень много операций линейной алгебры, и именно оно нам дальше очень пригодится. Но это не единственное существующее линейное пространство, есть и другие. Рассмотрим их:

1. $\mathbb{R}^{m \times n}$ - пространство матриц размера $m \times n$. Соответсвенно, каждым элементом в таком пространстве является матрица соответствующего размера.

2. $\mathbb{R}[x]_n$ - пространство многочленов от переменной x в степени не выше n. В общем виде элементами такого пространства являются следующие выражения $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$, где $a_1 \cdots a_n$ - какие-то числа-коэффициенты.

3. $\mathbb{S}^{n \times n}$ - пространство квадратных симметрических матриц.

4. $\mathbb{K}^{n \times n}$ - пространство квадратных кососимметрических матриц.

Подробнее про симметрические и кососимметрические матрицы в следующем блоке.
Собственно, это конечно не все примеры линейных пространств, но это пожалуй все, какие могут нам

встретиться.

Теперь про размерность. Что такое размерность линейного пространства? В самом примитивном случае размерность, это вот та цифра, которая стоит в "степени" у линейного пространства. В частности у пространства $\mathbb{R}^n$ размерность будет n, т.е. размерность просто равна количеству строчек в векторе. Размерность пространства мы будем обозначать как dim. Приведём несколько явных формул для вычисления размерностей:

- $\dim \mathbb{R}^n = n$
- $\dim \mathbb{R}^{m\times n} = m \cdot n$
- $\dim \mathbb{R}[x]_n = n + 1$
- $\dim \mathbb{S}^{n\times n} = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- $\dim \mathbb{K}^{n\times n} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

  Примеры:

- Размерность пространства $\mathbb{R}$ равна 1
- Размерность пространства $\mathbb{R}^4$ равна 4
- Размерность пространства $\mathbb{R}^{3\times 4}$ (пространства матриц 3 на 4) равна $3 \cdot 4 = 12$
- Размерность пространства $\mathbb{R}[x]_2$ (пространства многочленов от переменной x степени не выше 2) равна $2 + 1 = 3$
- Размерность пространства $\mathbb{S}^{2\times 2}$ (пространства симметрических матриц размера 2 на 2) равна $\dfrac{2 \cdot 3}{2} = 3$
- Размерность пространства $\mathbb{K}^{2\times 2}$ (пространства кососимметрических матриц размера 2 на 2) равна $\dfrac{2 \cdot 1}{2} = 1$

Замечание: часто в задачах надо что-то найти в пространстве $\mathbb{F}^n$, мы будем работать с ним точно так же как и с $\mathbb{R}^n$.

5.1.2 Базис линейного пространства

Базис линейного пространства это просто набор из нескольких векторов, ничего больше. Что же в нём такого уникального, почему мы прям выделяем какой-то набор среди бесконечного множества векторов? Базис имеет две особенности, обозначим за (e_1, e_2, e_3) какой-то базис пространства $\mathbb{R}^3$. Тогда выполняются два условия:

1. Если мы захотим сложить базисные векторы с какими-нибудь коэффициентами так, чтобы получить нулевой вектор, т.е. записать что-нибудь такое: $a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, то у нас это ни за что не получится, если только каждый из коэффициентов a не будет равен нулю.
2. Любой вектор из $\mathbb{R}^3$ (в том числе и базисный) может быть получен единственным образом путём сложения базисных векторов с какими то коэффициентами. Иными словами, существует единственный набор коэффициентов a_1, a_2, a_3, при котором какой-нибудь вектор x из линейного пространства $\mathbb{R}^n$ представим в виде суммы $x = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$.

Скорее замечание, чем особенность базиса: нулевой вектор <u>никогда и ни при каких обстоятельствах</u> не может быть частью базиса.

Таким образом, если мы взяли какой-то набор векторов из пространства, и он удовлетворяет одному из двух условий выше, то он является базисом в пространстве.
Это почти всё по теории, что может нам пригодиться, остаётся только разобраться с тем, сколько именно векторов должно быть в рассмотренном наборе. Ну и тут всё просто на самом деле: в базисе линейного пространства должно быть столько же векторов, какова и размерность этого пространства.

5.1.3 Превращаем любое пространство в $\mathbb{R}^n$

Здесь будут в основном примеры, как какое-то пространство превратить в $\mathbb{R}^n$, и как работать с его элементами просто как с векторами.

1. Превращаем матрицы в векторы:
Любую матрицу можно превратить в вектор следующим образом: просто берём матрицу и построчно её вытягиваем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2. Превращаем многочлен в вектор:
Любой многочлен можно записать в вектор следующим образом: записываем свободную константу в первую строчку, коэффициент перед иксом в первой степени во вторую строчку, коэффициент перед иксом в квадрате в третью строчку и т.д. В последнюю строчку будет записан коэффициент перед иксом в последней степени. Если икс в какой-то степени отсутсвует в многочлене, то на соответствующую строчку пишем ноль:

$$4 + 2x + x^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad 17 + 4x^4 \longrightarrow \begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad 7x^3 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

3. Разбираемся с симметрическими матрицами:
Симметрическая матрица, это квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоит что-то, а выше и ниже главной диагонали стоят одинаковые числа, как-бы отражённые относительно диагонали. Приведём несколько примеров:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 17 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 7 & 0 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Можно заметить, что какая-то матрица A является симметрической, если $A = A^T$.
Теперь, как вытянуть симметрическую матрицу в вектор? Кажется, что это можно сделать так же, как и с обычной матрицей, но на самом деле не совсем. Дело в том, что если мы зададим только диагональ матрицы, и элементы, стоящие выше неё, то этого уже будет достаточно, чтобы задать всю матрицу, поскольку элементы ниже диагонали будут точно такими же, как элементы выше диагонали, а их мы уже задали. Получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 17 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 17 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 7 & 0 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4. Разбираемся с кососимметрическими матрицами.
Кососимметрическая матрица, это такая матрица, у которой на главной диагонали стоят нули, выше главной диагонали какие-то значения, а ниже главной диагонали те же самый значения со знаком минус, отражённые от главной диагонали:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -2 & 0 & 15 \\ -7 & -15 & 0 \end{pmatrix}$$

По аналогии с симметрическими матрицами можно заметить, что какая-то матрица A является кососимметрической, если $A = -A^T$.
Вытягивание кососимметрической матрицы в вектор почти полностью аналогично вытягиванию симметрической, за исключением того, что кроме того, что стоит ниже диагонали, мы теперь знаем, что на самой диагонали всегда стоят нули, и их писать в вектор нам тоже не надо:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow 2 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -2 & 0 & 15 \\ -7 & -15 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}$$

5.2 Разбор задач

5.2.1 Является ли базисом?

Задача: проверить, является ли базисом пространстве $\mathbb{R}^3$ следующий набор векторов:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Вспомним, что одно из условий, которое должно выполняться для базиса, это $a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = 0$ только при условии, что $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Теперь **очень внимательно**, сейчас будет сделан очень важный переход, который является ключевым в решении всех задач на эту тему:
$a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = 0$ это то же самое, что и $(e_1\ e_2\ e_3) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, где $(e_1\ e_2\ e_3)$ - матрица, составленная по слолбцам из векторов e_1, e_2, e_3. Действительно, если взять и перемножить их как матрицы, то получится ровно нужное нам условие. Теперь мы можем составить матрицу из векторов e_1, e_2, e_3, и знаем, что в правой части у нас стоит нулевой вектор, но мы не знаем столбец из коэффициентов. Что это? Правильно, это просто система уравнений с расширенной матрицей $(e_1e_2e_3|0)$. Решаем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \text{-1} & \text{-2} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{C_2+C_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{C_2/2 \\ C_3 - C_1}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\rightsquigarrow}{C_1 - C_2 - C_3}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{C_3 \leftrightarrows C_2}{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Делаем переход к системе:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

Мы получили, что все три коэффициента равны 0, именно с такими коэффициентами набор базисных векторов в сумме даёт нулевой вектор, а значит векторы e_1, e_2, e_3 - действительно базис в $\mathbb{R}^3$.

5.3 Задачи

1. Найти размерность следующих пространств

$a)\mathbb{R}^7$	$b)\mathbb{R}^{20}$	$c)\mathbb{F}^{300}$
$d)\mathbb{R}^{7\times 5}$	$e)\mathbb{R}^{20\times 4}$	$f)\mathbb{F}^{100\times 100}$
$g)\mathbb{R}[x]_4$	$h)\mathbb{R}[b]_{12}$	$i)\mathbb{F}[y]_{19}$
$j)\mathbb{S}^{3\times 3}$	$k)\mathbb{K}^{3\times 3}$	

2. Вытянуть в вектор следующие элементы разных пространств

$a)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad b)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad c)2 + x + 15x^2 \in \mathbb{R}[x]_2$

$d)2 + x + 15x^2 \in \mathbb{R}[x]_4$ $\quad e)5 + 12x + x^2 + 4x^3 + 6x^5 \in \mathbb{R}[x]_6$

$f)\begin{pmatrix} 0 & 12 & 4 \\ -12 & 0 & 6 \\ -4 & -6 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ $\quad g)\begin{pmatrix} 0 & 12 & 4 \\ -12 & 0 & 6 \\ -4 & -6 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ $\quad h)\begin{pmatrix} 0 & 12 & 4 \\ 12 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^{3\times 3}$