# Коллок по линалу

Пешехонов Иван. БПМИ1912

25 ноября 2019 г.

# Оглавление

# Глава 1

# Определения

## 1.1 Сумма двух матриц, произведение матрицы на скаляр

**Сложение.** $A, B \in \mathbb{R}^{\mathrm{n \times m}}, A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{m3} + b_{m3} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n \times m}}$$

**Умножение на скаляр.** $A \in \mathbb{R}^{\mathrm{n \times m}}, \lambda \in \mathbb{R}, A = (a_{ij}) \Rightarrow$

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n \times m}}$$

## 1.2 Транспонированная матрица

Пусть $A \in \mathbb{R}^{\mathrm{n \times m}}, A = (a_{ij})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

тогда транспонированная к A матрица (обозначается) $A^T$:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

## 1.3 Произведение двух матриц

$A \in \mathbb{R}^{\mathrm{n \times m}}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$
Тогда AB –такая матрица $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$, что $c_{ij} = A_{(i)}B^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

## 1.4 Диагональная матрица, умножение на диагональную матрицу слева и справа

атрица $A \in$
азывается **диагональной** $\Leftrightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_n & \cdots & 0 \end{pmatrix} = diag(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

То есть

$$\forall i, j \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{ij} = \begin{cases} a_i & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Пусть $\mathrm{A} = diag(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, тогда

$(1) B \in \mathbb{R}^{\mathrm{n \times m}} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} a_1 B_{(1)} \\ a_2 B_{(2)} \\ \vdots \\ a_n B_{(n)} \end{pmatrix}$ (Каждая строка $B$ умножается на соответсвующий элемент столбца матрицы $A$)

$(2) B \in \mathbb{R}^{\mathrm{n \times m}} \Rightarrow BA = \begin{pmatrix} a_1 B^{(1)} & a_2 B^{(2)} & \cdots & a_n B^{(n)} \end{pmatrix}$ (Каждый сролбец $B$ умножается на соответсвующий элемент строки матрицы $A$)

## 1.5 Единичная матрица, её свойства

Матрица $A \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ называется **единичной** $\Leftrightarrow A = diag(1, 1, \cdots, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, обозначается $E$ (или $I$).

**Свойства:**
(1) $EA = AE = A, \forall A \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$
(2) $E = E^{-1}$

## 1.6 След квадратной матрицы и его поведение при сложении матриц, умножении матрицы на скаляр и транспонировании

**Следом матрицы** называется сумма элементов её главной диагонали и обозначается $tr(A)$.

**Свойства:**
(1) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
(2) $tr(\lambda A) = \lambda * tr(A)$
(3) $tr(A) = tr(A^T)$

## 1.7 След произведения двух матриц

$tr(AB) = tr(BA) \forall A \in \mathbb{R}^{\mathrm{n \times m}}, B \in \mathbb{R}^{\mathrm{m \times n}}$
**Доказательство.**

Пусть $X = AB, Y = BA$, тогда
$tr(X) = \sum_{i=1}^{n} x_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} y_{jj} = tr(Y)$ ■

## 1.8 Совместные и несовместные системы линейных уравнений

Система линейных уравнений (СЛУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

**Решением СЛУ** является такой набор значений неизвестных, который является решением каждого уравнения в СЛУ.

СЛУ называется **совместной** если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае СЛУ называется **несовместной**.

## 1.9 Эквивалентные системы линейных уравнений

Две СЛУ от одних и тех же переменных называются **эквивалентыми** если у них совпадают множества решений.

## 1.10 Расширенная матрица линейных уравнений

$$(*) = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

**Расширенной матрицей** СЛУ $(*)$ называется матрица вида $\big(A|b\big) = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & \cdots & \mathrm{a}_{1n} & \mathrm{b}_1 \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} & \cdots & \mathrm{a}_{2n} & \mathrm{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{a}_{m1} & \mathrm{a}_{m2} & \cdots & \mathrm{a}_{mn} & \mathrm{b}_m \end{array}\right)$,
где $A$ –матрица коэффициентов при неизвестных, а $b$ –вектор-слобец правых частей каждого уравнения СЛУ $(*)$.

## 1.11 Элементарные преобразования строк матрицы

**Элементарными преобразованиями** называют следующие три преобразрования, меняющие вид матрицы:

| | | |
|---|---|---|
| 1 тип | К i-ой строке матрицы прибавить j-ую, умноженную на $\lambda$ | $Э_1(i, j, \lambda)$ |
| 2 тип | Поменять местами i-ую и j-ую строки местами | $Э_2(i, j)$ |
| 3 тип | i-ую строку матрицы умножить на ненулевую $\lambda$ | $Э_3(i, \lambda), \lambda \neq 0$ |

## 1.12 Ступенчатый вид матрицы

Строка $(a_1, a_2, \cdots, a_i)$ называется **нулевой**, если $a_1 = a_2 = \cdots = a_i = 0$, и **ненулевой** в обратном случае $(\exists i : a_i \neq 0)$.

**Ведущим элементом** называется первый ненулевой элемент нулевой строки.

Матрица $A \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{m}}$ называется **ступенчатой** или имеет **ступенчатый вид**, если:
1) Номера ведущих элементов строго возрастают.
2) Все нулевые строки расположены в конце.

$$\begin{pmatrix} 0 & \heartsuit & * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \heartsuit & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \heartsuit & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \heartsuit \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

где $*$ –что угодно, $\heartsuit^{\smile} \neq 0$

## 1.13 Улучшеный ступенчатый вид матрицы

Говорят, что матрица имеет **улучшенный (усиленный) ступенчатый вид**, если:
1) Она имеет ступенчатый вид.
2) Все ведущие элементы матрицы равны 1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

## 1.14 Теорема о виде, к которому можно привести матрицу при помощи элементарных преобразований

**Теорема 1.** Любую матрицу можно привести к ступенчатому виду.
**Доказательство:**

## 1.15 Общее решение совместной системы линейных уравнений

Общим решением совместной СЛУ является множество наборов значений неизвестных, в которых главные неизвестные выражены через свободные (линейные комбинации от свободных неизвестных).

## 1.16 Сколько может быть решений у системы линейных уравнений с действительными коэффициентами

Всякая СЛУ с действительными коэффициентами либо несовместна, либо имеет ровно одно решение, либо имеет бесконечно много решений.

## 1.17 Однородная система линейных уравнений. Что можно сказать про её множество решений?

Однородной системой линейных уравнений (ОСЛУ) называется такая СЛУ, в которой каждое уравнение в правой части имеет 0. Расширенная матрица имеет вид $(A|0)$.
Очевидно: вектор $x = (0, 0, 0, \cdots 0)$ является решением всякой ОСЛУ.
Всякая ОСЛУ имеет либо решение (нулевое), либо бесконечно много решений.

## 1.18 Свойство однородной системы линейных уравнений, у которой число неизвестных больше числа уравнений

Всякая ОСЛУ, у которой число неизвестных больше числа уравнений имеет ненулевое решение $\Rightarrow$ имеет бесконечно много решений.

## 1.19 Связь между множеством решений совместной системы линейных уравнений и множеством решений соответсвующей ей однородной системы

???

## 1.20 Обратная матрица

**Обратной матрицей** к матрице $A \in Mn$ называется такая квадратная матрица $B \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, что: $AB = BA = E$. Матрица $B$ обозначается как $A^{-1}$.

## 1.21 Перестановки множества $\{1, 2, \cdots, n\}$

**Перестановкой** множества $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ называется упорядоченный набор $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$, в котором каждое число от 1 до n встречается ровно один раз.

**Подстановка** (перестановка) из n элементов - это биективное отображение множества $\{1, 2, \cdots, n\}$ в себя. Обозначается: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$.

## 1.22 Инверсия в перестановке. Знак перестановки. Чётные и нечётный перестановки.

Говорят, что неупорядоченная пара $i, j$ образует **инверсию** в $\sigma$, если числа $i - j$ и $\sigma(i) - \sigma(j)$ имеют разный знак, т.е. либо $i > j$ и $\sigma(i) < \sigma(j)$, либо $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$.

**Знаком (сигнатурой)** подстановки $\sigma$ называется число $sgn\ \sigma$, такое что $sgn\ \sigma = (-1)^{inv\ \sigma}$, где $inv\ \sigma$ - число инверсий. Знак может принимать значения 1 и $-1$.

Подстановка называется **чётной**, если её знак равен 1, и **нечётной**, если её знак равен $-1$.

## 1.23 Произведение двух перестановок

Пусть даны две подстановки $\sigma$ и $\tau \in \mathrm{S}_n$. **Произведением** или (композицией) двух подстановок называется такая подстановка $\sigma\tau$, что $(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i)), \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$

## 1.24 Тождественная перестановка и её свойства. Обратная перестановка и её свойства.

**Тождественной (единичной)** подстановкой называется подстановка вида $\begin{pmatrix} s1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \in S_n$. Тождественная подстановка обозначается как $id$ (или $e$).
$id(i) = i, \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.
**Свойство:**
$id * \sigma = \sigma * id = \sigma, \forall \sigma \in S_n$
Пусть дана подстановка $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$, тогда **обратной подстановкой** к $\sigma$ называется подстановка $\tau$, вида $\begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$, и обозначается, как $\sigma^{-1}$.
**Свойства:**
1) $\sigma^{-1}$ - единственная
2) $\sigma * \sigma^{-1} = \sigma^{-1} * \sigma = id$.

## 1.25 Теорема о знаке произведения двух подстановок

**Теорема:** Пусть даный $\sigma, \tau \in S_n$, тогда $sgn(\sigma\tau) = sgn(\sigma) * sgn(\tau)$

## 1.26 Транспозиция. Знак транспозиции.

Пусть дана подстановка $\tau \in S_n$,такая что $\tau(i) = j, \tau(j) = i, \tau(k) = k \forall k \neq i, j$. Такая подстановка $'tau$ называется **транспозицией**.
$sgn(\tau) = -1$

## 1.27 Общая формула для определителя квадратной матрицы произвольного порядка

Пусть дана матрица $A \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, тогда
$|A| = \sum\limits_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

## 1.28 Определители 2-го и 3-го порядка

**Определителем 2-го порядка** называется определитель квадратной матрицы $A \in \mathbb{R}^{2\times 2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
$|A| = ad - bc$.
**Определителем 3-го порядка** называется определитель квадратной матрицы $A \in \mathbb{R}^{3\times 3} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$.
$|A| = aek + bjg + cdh - ceg - afh - bdk$

## 1.29 Поведение определителя при разложении строки (столбца) в сумму двух.

???

## 1.30 Поведение определителя при перестановке двух строк (столбцов)

Элементарное преобразование второго типа, а именно перестановка двух строк (столбцов) местами **меняет знак определителя** и **не меняет значение определителя**.

## 1.31 Поведение определителя при прибавлению к строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженного на скаляр

Элементарное преобразование первого типа, а именно прибавление к строке (столбцу) матрицы другой строки (столбца), умноженного на скаляр **не меняет знак определителя** и **не меняет значение определителя**.

## 1.32 Верхнетреугольный и нижнетреугольные матрицы

**Верхнетреугольной матрицей** называется такая квадратная матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$