

Подготовка к экзамену по матану.

Иван Пешехонов. ФКН. БПМИ1912.

1 марта 2020 г.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Системы линейных уравнений</b>	<b>2</b>
1.1	Теория	2
1.1.1	Сколько может быть решений у системы	2
1.1.2	Расширенная матрица	2
1.1.3	Метод Гаусса	3
1.1.4	Общее и частное решение системы	4
1.1.5	Операции с матрицами: перемножение и транспонирование	5
1.1.6	Единичная матрица	6
1.1.7	Матричные уравнения	6
1.2	Разборы задач	7
1.2.1	Пример системы с единственным решением	7
1.2.2	Пример несовместной системы	8
1.2.3	Пример системы с бесконечным числом решений	8
1.2.4	Матричное уравнение № 1.	9
1.2.5	Матричное уравнение № 2.	9
1.2.6	Матричное уравнение № 3.	10
1.3	Задачи	11
<b>2</b>	<b>Разложение по базису</b>	<b>13</b>
2.1	Теория	13
2.1.1	Линейные пространства и их размерности	13
2.1.2	Базис линейного пространства	14
2.1.3	Превращаем любое пространство в $\mathbb{R}^n$	15
2.2	Разбор задач	16
2.2.1	Является ли базисом?	16
2.3	Задачи	16

# Глава 1

## Системы линейных уравнений

### 1.1 Теория

Вспомним некоторые понятия, которые пригодятся нам для решения системок.

#### 1.1.1 Сколько может быть решений у системы

Прежде всего поговорим про число решений у системы, всего, вообще говоря, может быть три варианта:

- Система может **не иметь решений** (быть несовместной)
- Система может **иметь ровно одно** решение
- Система может **иметь бесконечно много** решений

Это все варианты, бывает случай, когда система не может не иметь решений, но никогда не может быть такого, чтобы система имела конечное число решений, большее одного.

#### 1.1.2 Расширенная матрица

Так же нам понадобится понятие расширенной матрицы:

Расширенная матрица имеет вид  $(A|b)$ , где  $A$  - матрица, составленная из коэффициентов перед неизвестными в системе, а  $b$  - столбец значений, стоящих после знака равно. Покажу на примере, как делать переход от системы к расширенной матрице:

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 14x_3 + x_4 = 12 \\ 31x_1 + x_2 + 12x_4 = 7 \\ 13x_2 + 17x_3 + 21x_4 = 5 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \iff \left( \begin{array}{cccc|c} 4 & 6 & 14 & 1 & 12 \\ 31 & 1 & 0 & 12 & 7 \\ 0 & 13 & 17 & 21 & 5 \\ 3 & 7 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Обратим внимание на красные нули: во втором уравнении отсутствует переменная  $x_3$ , так же как отсутствует  $x_1$  в третьем уравнении, это то же самое, как если бы мы их записали, но поставили перед ними коэффициент 0. Вот этот 0 мы и переносим в матрицу.

Немного про размер расширенной матрицы: если в системе есть  $m$  уравнений, и всего в системе используется  $n$  переменных, то размер матрицы коэффициентов будет  $m \times n$ , а размер расширенной матрицы, соответственно  $m \times (n + 1)$ .

### 1.1.3 Метод Гаусса

Теперь немного о том, как собственно решать системы уравнений.

Алгоритм:

1. Записать расширенную матрицу
2. Выполнять элементарные преобразования, приводя левую часть расширенной матрицы к ступенчатому виду
3. Выполнять элементарные преобразования, приводя левую часть расширенной матрицы к улучшенному ступенчатому виду
4. Записать ответ

Будем считать, что с первым пунктом мы разобрались, теперь второй и третий.

Вспомним, что есть такие элементарные преобразования и что вообще значит “матрица ступенчатого вида”.

Элементарные преобразования, это способ менять матрицу, не меняя при этом какие-то важные характеристики, которые нас интересуют (множество решений, ранг, определитель...). Всего элементарные преобразования существуют трёх типов:

1. К какой-то строке прибавить какую-то другую строку, умноженную на некоторое число.
2. Поменять две строки местами.
3. Какую-то строку умножить на некоторое, ненулевое число.

Все эти действия можно в последовательном порядке применять к расширенной матрице, и не бояться, что какие-то решения продолбаются (если конечно не сделать арифметическую ошибку). Что значит “последовательный порядок”? Очень просто, строго запрещается одновременно выполнять с одной строкой два каких-то преобразования, чтобы избежать путаницы, и действительно не продолжать решения.

Теперь про ступенчатый и улучшенный ступенчатый виды:

Прежде всего ведущим элементом будем называть первый ненулевой элемент в строке. Матрица имеет ступенчатый вид, если под всеми ведущими элементами стоят нули, а номера ведущих элементов строго возрастают. Пример: слева и посередине матрица ступенчатого вида, справа матрица не имеет ступенчатый вид.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Контрольный вопрос: является ли матрица  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$  ступенчатой?

Аналогично матрица имеет **улучшенный ступенчатый вид**, если

- 1) Она имеет ступенчатый вид
- 2) Ведущими элементами являются единицы
- 3) Над ведущими элементами стоят нули

Следующие матрицы имеют улучшенный ступенчатый вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Контрольный вопрос: имеет ли матрица  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$  улучшенный ступенчатый вид?

Собственно по системам уравнений всё, как это делать ручками и как записывать ответ я покажу на конкретных примерах в следующем блоке.

**Полезный факт:** матрицу можно привести к ступенчатому виду используя только целочисленные преобразования. С улучшенным ступенчатым видом так уже не работает.

#### 1.1.4 Общее и частное решение системы

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 3 \\ 5x_1 - x_2 - 7x_3 - 9x_4 = -1 \end{cases}$$

Подробный разбор этой задачи можно найти в [соответствующем блоке](#). Сейчас важно то, что элементарными преобразованиями эту систему можно привести к виду

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_4 + \frac{2}{5} - \frac{2}{15} \\ x_3 = \frac{1}{3} - x_4 \end{cases}$$

Причём, от переменных  $x_2, x_4$  здесь ничего не зависит, а значит они могут принимать вообще любые числовые значения. Т.к. мы не можем явно указать конкретные значения свободных переменных, то и ответ в обычном, числовом виде мы записать не можем. Возникает резонный вопрос: а как записать ответ? В таких случаях, когда система имеет одну или более свободную неизвестную используется понятие **общего решения**. Общее решение это просто колонка, окружённая круглыми скобками, количество строк в которой совпадает с общим числом неизвестных системы. Например в этой системе используется 4 неизвестных, значит и общее решение будет состоять из четырёх строк. Разберёмся, что это будут за строки. Принцип очень прост: если очередная строка соответствует главной неизвестной (неизвестной, которая выражается через свободные, в данном случае главные неизвестные это  $x_1, x_3$ ), то в строку записывается просто её выражение через свободные неизвестные. Если же очередная строка соответствует свободной неизвестной, то в эту строку записывается просто сама свободная неизвестная. Таким образом в общем решении будет строк то конечно столько, сколько всего неизвестных в системе, но вот буквы там использоваться будут только те, что соответствуют свободным неизвестным. Покажем построение общего решения для этой системы:

- Как уже отмечалось выше, всего в системе используется 4 разных неизвестных, значит в общем решении будет 4 строчки.
- Пусть первая строчка соответствует переменной  $x_1$ , вторая соответствует  $x_2$ , третья  $x_3$ , а четвёртая  $x_4$ .
- Переменная  $x_1$  выражена через свободные переменные  $x_2, x_4$ . Значит в первой строке общего решения будет стоять просто это выражение  $(\frac{1}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_4 + \frac{2}{5} - \frac{2}{15})$ .
- Аналогично для  $x_3$ .
- Переменные  $x_2$  и  $x_4$  являются свободными, значит во второй и в четвёртой строке общего решения соответственно будут стоять просто  $x_2$  и  $x_4$ .

Теперь просто запишем общее решение на основании этих пунктов:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_4 + \frac{2}{5} - \frac{2}{15} \\ x_2 \\ \frac{1}{3} - x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Итак, мы научились записывать общее решение системы. Но что делать, если в задаче просят частное решение, и что вообще такое частное решение? Тут всё гораздо проще: частное решение, это как раз то самое числовое решение, к которому все привыкли. Как искать частное решение? Совсем просто: после того, как мы записать общее решение, в свободные переменные мы подставляем любое число, которое нравится, хоть 1, хоть 0, хоть  $10^9$ . Далее просто вычисляем до конца выражения главных неизвестных, и полученная колонка с числами и будет частным решением системы. Если подставить в свободные переменные другие значения, то получится другое частное решение. Ещё какие-то значения - ещё какое-то частное решение, и т.д. Собственно из-за такого бардака, и в силу того, что подставлять мы можем что хотим, система, которая имеет хотя бы одну свободную неизвестную имеет бесконечное число (частных) решений. Я приведу простой пример частного решения этой системы, просто подставив на место  $x_2, x_4$  ноль:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} - \frac{2}{15} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Та-дам.

Всё что будет написано дальше касается уже следующего типа задач, а именно решений матричных уравнений.

### 1.1.5 Операции с матрицами: перемножение и транспонирование

Хз на самом деле, как описать по-русски перемножение матриц, поэтому я лучше приведу тройку примеров, и буду надеяться, что что-то понятно:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 5 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 10 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 8 \cdot 0 = 4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 8 \cdot 0 & 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 8 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 18 \end{pmatrix}$$

Стоит немного об этом подумать, запомнить что с чем и как складывается, и очень важно обратить внимание на размеры.

Транспонирование, в свою очередь, простая и интуитивно понятная операция: если матрица, в которой сколько строк, мы берём эти строки, и в том же порядке записываем в столбцы матрицы. На примерах, пожалуй, всё ещё будет нагляднее:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2 \ 4 \ 6 \ 8 \ 12)^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Опять же важно просто внимательно на это посмотреть, осознать как это работает и что происходит с размерами матриц.

Полезное свойство операции транспонирования, пригодится нам позже:  $(AB)^T = B^T A^T$ , где  $A$  и  $B$  - матрицы.

### 1.1.6 Единичная матрица

Вспомним, что есть такое единичная матрица.

Единичная матрица, это такая квадратная матрица, у которой на главной диагонали (из левого верхнего угла в правый нижний) стоят единицы, а на всех остальных местах нули. Единичная матрица обозначается  $E$ .

Пример единичных матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Парочка свойств единичной матрицы, они нам впринципе не нужны, но для общего развития....

1)  $AE = A$

2)  $E^{-1} = E$

### 1.1.7 Матричные уравнения

Матричные уравнения есть двух типов:

- $AX = B$
- $XA = B$

где  $A, B$  - известные матрицы, а  $X$  - неизвестная.

Первый случай мы сейчас подробно разберём, а второй сведём к первому.

Алгоритм решения матричного уравнения:

1. Запишем расширенную матрицу  $(A|B)$ .
2. Элементарными преобразованиями строк приводим левую часть к ступенчатому виду.
3. Элементарными преобразованиями строк приводим левую часть к УСВ.
4. Вот тут есть два варианта:

- После всех элементарных преобразований слева получилась единичная матрица, тогда справа находится ответ
- Слева единичная матрица не получилась, тогда придётся немного поизвращаться

Подробно покажу в разборе.

А теперь второй вид:  $XA = B$ . Тут неизвестная матрица стоит с другой стороны, и в случае матриц это прям проблема, потому что мы, вообще говоря, не можем просто поменять их местами. Но, у нас есть классное свойство транспонирования, которое как раз поможет нам это сделать, а именно мы берём, и транспонируем обе части уравнения:  $XA = B \Leftrightarrow A^T X^T = B^T$ . И снова неизвестная матрица у нас с правильной стороны, теперь мы решаем это уравнение по алгоритму выше, и получаем ответ в качестве матрицы  $X^T$ , главное потом не забыть транспонировать её обратно, и тогда это будет уже финальным ответом.

## 1.2 Разборы задач

### 1.2.1 Пример системы с единственным решением

Задача: Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 5 \\ -6x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 10x_3 = 11 \end{cases}$$

Решение:

Идём по алгоритму, запишем расширенную матрицу:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 5 \\ -6 & 2 & -5 & -2 \\ 3 & -6 & 10 & 11 \end{array} \right)$$

Начинаем приводить матрицу к ступенчатому виду. Я прибавлю дважды первую строчку ко второй, и из третьей строчки вычту первую чтобы получить нули под угловой тройкой:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 5 \\ -6 & 2 & -5 & -2 \\ 3 & -6 & 10 & 11 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & 8 \\ 0 & -4 & 5 & 6 \end{array} \right)$$

Теперь я вычту из первой и из третьей строчки вторую:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & 8 \\ 0 & -4 & 5 & 6 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 8 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

И наконец я вычту из второй строчки третью, а потом поменяю их местами:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array} \right)$$

Итак, пункт 2 алгоритма выполнен: матрица имеет ступенчатый вид. Теперь будем приводить её к улучшенному ступенчатому виду. Матрица у нас достаточно хорошая, поэтому привести её можно практически в одно действие: раздели первую строчку на 3 (умножим на  $\frac{1}{3}$ , если так больше нравится), вторую строчку разделим на  $-2$ , и третью строчку разделим на 5.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

И вот матрица уже имеет улучшенный ступенчатый вид, пункт три выполнен. Осталось только записать ответ. Чтобы было понятно, я сделаю переход от расширенной матрицы обратно к системе:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Собственно, мы выразили все переменные однозначно, это и есть ответ.



### 1.2.2 Пример несовместной системы

Задача: Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 5x_5 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + 4x_5 = 3 \end{cases}$$

Решение: Расширенная матрица и сразу УСВ (там чисто арифметика):

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{C_3 - C_1 \\ C_4 - C_1}} \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{C_1 - C_2 \\ C_3 - C_2 \\ C_4 - 2C_2}} \left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$C_n - C_m$  значит “из  $n$ -ой строчки вычесть  $m$ -ую”.

Если поменять первую и вторую строчку местами, то получится УСВ, но нам гораздо интереснее последняя строка матрицы. Если мы сделаем переход обратно к системе, то последней строчкой такой системы будет  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = -1$ , т.е.  $0 = -1$ , но такого же не может быть, а значит система не имеет решений, или, другими словами, система несовместна.

### 1.2.3 Пример системы с бесконечным числом решений

Задача: Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 1 \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 3 \\ 5x_1 - x_2 - 7x_3 - 9x_4 = -1 \end{cases}$$

Решение: Расширенная матрица и ступенчатый вид:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & -1 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & -1 & -7 & -9 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1}} \left( \begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{C_2/2 \\ C_3/2}} \left( \begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{C_3 + C_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Матрица имеет ступенчатый вид, теперь приведём её к УСВ (ух, сейчас классные числа повылезают):

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{C_1/5 \\ C_2/3}} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1/5 & 2/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{C_1 - \frac{2}{5}C_2} \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1/5 & 0 & -2/5 & 2/5 - 2/15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Здорово, матрица имеет УСВ, но какой ценой(((

Теперь важный момент: как выписывать решение в такой системе? Снова сделаем переход к системе:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -1/5 & 0 & -2/5 & 2/5 - 2/15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{1}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_4 = \frac{2}{5} - \frac{2}{15} \\ x_3 + x_4 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Выразим переменные  $x_1$  и  $x_3$ :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_4 + \frac{2}{5} - \frac{2}{15} \\ x_3 = \frac{1}{3} - x_4 \end{cases}$$

Переменные  $x_2$  и  $x_4$  могут принимать любое значение и называются **свободными**, но как только мы зафиксируем какие-то значения  $x_2$  и  $x_4$ , то мы можем их подставить в уравнения, и значения переменных  $x_1, x_3$  сразу определятся. Запишем общее решение системы:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_4 + \frac{4}{15} \\ x_2 \\ \frac{1}{3} - x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Можно ещё дополнительно записать, что  $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$ , но это не обязательно на самом деле. Так выглядит общее решение системы с бесконечным числом решений (недеюсь, теперь понятно, почему их бесконечное число). Вопрос: что делать если в задаче просят найти общее решение, и какое-то частное решение? Очень просто: можно просто подставить любые значения в свободные неизвестные и получится частное решение. например в этой задаче я хочу подставить  $x_2 = 5$ , а  $x_4 = \frac{1}{3}$ , тогда получится частное решение

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{6}{15} \\ 5 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

#### 1.2.4 Матричное уравнение № 1.

Задача: Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -2 & 8 & 7 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение: Запишем расширенную матрицу  $(A|B)$  и будем приводить её левую часть к улучшенному ступенчатому виду:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 8 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{C_2 - 2C_1 \\ C_3 - C_1}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -10 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{C_1 + 2C_3 \\ C_2 - C_3}} \\ & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -12 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{C_2 / (-4) \\ C_3 \cdot (-1)}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 8 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{C_1 - 3C_2} \\ & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{C_3 \rightleftharpoons C_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Итак, мы привели матрицу слева к УСВ, более того, матрица слева является единичной. В соответствии с алгоритмом, раз матрица слева - единичная, то матрица справа - искомая.

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

В качестве проверки можно просто их перемножить, и увидеть, что действительно получится матрица справа.

#### 1.2.5 Матричное уравнение № 2.

Задача: Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение: Всё так же запишем расширенную матрицу, и будем приводить её левую часть к УСВ:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & | & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & | & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -4 & | & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 - C_1, C_3 - 2C_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & | & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & | & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & | & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 - C_2, C_3 - C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & | & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \cdot (-1)} \\ \xrightarrow{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Итак, матрица слева имеет УСВ, но неприятность заключается в том, что она не единичная, а значит мы не можем просто написать ответ. Что делать, когда происходит такая неприятность? Ответ: надо разбить такую матрицу на две вот такие:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Т.е. просто рашируем матрицу по столбцам правой части раширенной матрицы и получаем две системы линейных уравнений, а их мы уже умеем решать. Общее решение левой системы:

$$\begin{pmatrix} 1 + 2x_3 \\ 1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Общее решение правой системы:

$$\begin{pmatrix} 3 + 2x_3 \\ 2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Теперь надо вспомнить, что нам нужно было решить не две отдельные системы, а матричное уравнение, т.е. в ответе надо получить матрицу. Два полученных частных решения нужно обратно слить в одну матрицу, но тут есть тонкий момент. Запишем сначала то, что первое приходит в голову:

$$X = \begin{pmatrix} 1 + 2x_3 & 3 + 2x_3 \\ 1 & 2 \\ x_3 & x_3 \end{pmatrix}$$

Вроде вот, матрицу какую-то получили, она вроде даже того размера, которого надо, можно говорить что это ответ. Сказать то конечно можно, но вот ответ этот **не правильный**, и полный балл за такое решение не поставят. В чём тут лажа? Мы сейчас решили две системы отдельно, и в обеих обозначили буквой  $x_3$  единственную свободную неизвестную. Но, вообще говоря, это не одна и та же неизвестная, и в итоговой матрице лучше всё же писать разные буквы. Т.к. я могу красиво набирать греческие буквы, я, пожалуй, использую их:

$$X = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda & 3 + 2\mu \\ 1 & 2 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

Вот это уже правильная матрица, и её можно писать в ответ.

### 1.2.6 Матричное уравнение № 3.

Задача: Решить матричное уравнение

$$X \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Опа, неизвестная матрица на неправильном месте, такое мы решать не умеем. Воспользуемся свойством транспонирования и транспонируем обе части уравнения:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T X^T = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} X^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -6 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

А вот это мы уже вроде как умеем решать. Запишем расширенную матрицу и приведём её к УСВ. Я сделаю это в одно действие, потому что мне лень всё это печатать, но там ничего интересного, просто элементарные преобразования.

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & -1 & -6 & -6 \\ -2 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Итак, слева получилась единичная матрица, значит справа находится ответ, да? **Нет.** Дело в том, что мы транспонировали обе части уравнения, и решали немного другое матричное уравнение, не совсем то, что нас просили решить в задании. Поэтому найденная матрица это на самом деле не  $X$ , а  $X^T$ . Но т.к. мы (я надеюсь) уже овладели операцией транспонирования, мы легко можем превратить  $X^T$  обратно в  $X$ :

$$X^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Вот эта матрица уже является искомой.

## 1.3 Задачи

### 1. Найти решения систем

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 7 \\ 5x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = -3 \\ 5x_1 + 3x_2 = -5 \end{cases} \quad c) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases} \quad d) \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

## 2. Перемножить матрицы

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 3 & 4 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$f) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 14 \\ 3 & 4 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

## 3. Транспонировать матрицы

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 12 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 14 & 159 & 256 & 0 \\ 2 & 7 & 18 & 61 & 18 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & -8 & 7 \\ 6 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

---

## 4. Найти общее, и какое-нибудь частное решение следующих систем линейных уравнений.

$$a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 1 \\ x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3 \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

## 5. Решить матричные уравнения.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f) X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ -10 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

## Глава 2

# Разложение по базису

## 2.1 Теория

### 2.1.1 Линейные пространства и их размерности

Прежде всего надо немного познакомиться с чем мы будем тут работать:

$$a = 1 \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Выше я привёл пример трёх конструкций, каждая из которых является вектором. В общем случае, вектор это просто столбик из цифр фиксированной высоты. Так вектор  $a$  это столбик высоты 1, вектор  $b$  - столбик высоты 2, вектор  $c$  - столбик высоты 4. Всем этим столбикам надо где-то жить, в каком-то множестве таких же столбиков. И так и есть, любой вектор высоты  $n$  живёт в **линейном пространстве**  $\mathbb{R}^n$ . Что значит вот это вот  $\mathbb{R}^n$ ? Ну, мы знаем что  $\mathbb{R}$  это множество вещественных (действительных) чисел, включающее в себя все натуральные, целые, рациональные и иррациональные числа. Тогда  $\mathbb{R}^n$ , это множество столбиков из чисел высоты  $n$ , в котором каждое число может является вещественным, т.е. все числа в столбике являются числами из  $\mathbb{R}$ .

Так например вектор  $a$  из примера живёт в пространстве  $\mathbb{R}^1$ , что то же самое, что  $\mathbb{R}$ , вектор  $b$  живёт в  $\mathbb{R}^2$ , а вектор  $c$  живёт в пространстве  $\mathbb{R}^4$ .

Идём дальше: для каждого столбика существуют две операции:

1. Мы можем взять два каких-нибудь столбика и сложить их просто покомпонентно, и получить новый столбик, но такой же высоты.
2. Можем взять какой-нибудь столбик, и каждую его компоненту умножить на какое-то число. И тогда мы тоже получим столбик такой-же высоты.

$\mathbb{R}^n$  - простейший пример линейного пространства, и в нём на самом деле проходит очень много операций линейной алгебры, и именно оно нам дальше очень пригодится. Но это не единственное существующее линейное пространство, есть и другие. Рассмотрим их:

1.  $\mathbb{R}^{m \times n}$  - пространство матриц размера  $m \times n$ . Соответственно, каждым элементом в таком пространстве является матрица соответствующего размера.
2.  $\mathbb{R}[x]_n$  - пространство многочленов от переменной  $x$  в степени не выше  $n$ . В общем виде элементами такого пространства являются следующие выражения  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$ , где  $a_1 \dots a_n$  - какие-то числа-коэффициенты.
3.  $\mathbb{S}^{n \times n}$  - пространство квадратных симметрических матриц.
4.  $\mathbb{K}^{n \times n}$  - пространство квадратных кососимметрических матриц.

Подробнее про симметрические и кососимметрические матрицы в следующем блоке.

Собственно, это конечно не все примеры линейных пространств, но это пожалуй все, какие могут нам

встретиться.

Теперь про размерность. Что такое размерность линейного пространства? В самом примитивном случае размерность, это вот та цифра, которая стоит в "степени" у линейного пространства. В частности у пространства  $\mathbb{R}^n$  размерность будет  $n$ , т.е. размерность просто равна количеству строчек в векторе. Размерность пространства мы будем обозначать как  $\dim$ . Приведём несколько явных формул для вычисления размерностей:

- $\dim \mathbb{R}^n = n$
- $\dim \mathbb{R}^{m \times n} = m \cdot n$
- $\dim \mathbb{R}[x]_n = n + 1$
- $\dim \mathbb{S}^{n \times n} = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\dim \mathbb{K}^{n \times n} = \frac{n(n-1)}{2}$

Примеры:

- Размерность пространства  $\mathbb{R}$  равна 1
- Размерность пространства  $\mathbb{R}^4$  равна 4
- Размерность пространства  $\mathbb{R}^{3 \times 4}$  (пространства матриц 3 на 4) равна  $3 \cdot 4 = 12$
- Размерность пространства  $\mathbb{R}[x]_2$  (пространства многочленов от переменной  $x$  степени не выше 2) равна  $2 + 1 = 3$
- Размерность пространства  $\mathbb{S}^{2 \times 2}$  (пространства симметрических матриц размера 2 на 2) равна  $\frac{2 \cdot 3}{2} = 3$
- Размерность пространства  $\mathbb{K}^{2 \times 2}$  (пространства кососимметрических матриц размера 2 на 2) равна  $\frac{2 \cdot 1}{2} = 1$

**Замечание:** часто в задачах надо что-то найти в пространстве  $\mathbb{F}^n$ , мы будем работать с ним точно так же как и с  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.1.2 Базис линейного пространства

Базис линейного пространства это просто набор из нескольких векторов, ничего больше. Что же в нём такого уникального, почему мы прям выделяем какой-то набор среди бесконечного множества векторов? Базис имеет две особенности, обозначим за  $(e_1, e_2, e_3)$  какой-то базис пространства  $\mathbb{R}^3$ . Тогда выполняются два условия:

1. Если мы захотим сложить базисные векторы с какими-нибудь коэффициентами так, чтобы получить нулевой вектор, т.е. записать что-нибудь такое:  $a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , то у нас это ни за что не получится, если только каждый из коэффициентов  $a$  не будет равен нулю.
2. Любой вектор из  $\mathbb{R}^3$  (в том числе и базисный) может быть получен единственным образом путём сложения базисных векторов с какими то коэффициентами. Иными словами, существует единственный набор коэффициентов  $a_1, a_2, a_3$ , при котором какой-нибудь вектор  $x$  из линейного пространства  $\mathbb{R}^n$  представим в виде суммы  $x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ .

**Скорее замечание, чем особенность базиса:** нулевой вектор никогда и ни при каких обстоятельствах не может быть частью базиса.

Таким образом, если мы взяли какой-то набор векторов из пространства, и он удовлетворяет одному из двух условий выше, то он является базисом в пространстве.

Это почти всё по теории, что может нам пригодиться, остаётся только разобраться с тем, сколько именно векторов должно быть в рассмотренном наборе. Ну и тут всё просто на самом деле: в базисе линейного пространства должно быть столько же векторов, какова и размерность этого пространства.

### 2.1.3 Превращаем любое пространство в $\mathbb{R}^n$

Здесь будут в основном примеры, как какое-то пространство превратить в  $\mathbb{R}^n$ , и как работать с его элементами просто как с векторами.

#### 1. Превращаем матрицы в векторы:

Любую матрицу можно превратить в вектор следующим образом: просто берём матрицу и построчно её вытягиваем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

#### 2. Превращаем многочлен в вектор:

Любой многочлен можно записать в вектор следующим образом: записываем свободную константу в первую строчку, коэффициент перед  $x$  в первой степени во вторую строчку, коэффициент перед  $x$  в квадрате в третью строчку и т.д. В последнюю строчку будет записан коэффициент перед  $x$  в последней степени. Если  $x$  в какой-то степени отсутствует в многочлене, то на соответствующую строчку пишем ноль:

$$4 + 2x + x^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 17 + 4x^4 \rightarrow \begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad 7x^3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

#### 3. Разбираемся с симметрическими матрицами:

Симметрическая матрица, это квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоит что-то, а выше и ниже главной диагонали стоят одинаковые числа, как-бы отражённые относительно диагонали. Приведём несколько примеров:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 17 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 7 & 0 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Можно заметить, что какая-то матрица  $A$  является симметрической, если  $A = A^T$ .

Теперь, как вытянуть симметрическую матрицу в вектор? Кажется, что это можно сделать так же, как и с обычной матрицей, но на самом деле не совсем. Дело в том, что если мы зададим только диагональ матрицы, и элементы, стоящие выше неё, то этого уже будет достаточно, чтобы задать всю матрицу, поскольку элементы ниже диагонали будут точно такими же, как элементы выше диагонали, а их мы уже задали. Получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 17 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 17 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 7 & 0 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$



#### 4. Разбираемся с кососимметрическими матрицами.

Кососимметрическая матрица, это такая матрица, у которой на главной диагонали стоят нули, выше главной диагонали какие-то значения, а ниже главной диагонали те же самые значения со знаком минус, отражённые от главной диагонали:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -2 & 0 & 15 \\ -7 & -15 & 0 \end{pmatrix}$$

По аналогии с симметрическими матрицами можно заметить, что какая-то матрица  $A$  является кососимметрической, если  $A = -A^T$ .

Вытягивание кососимметрической матрицы в вектор почти полностью аналогично вытягиванию симметрической, за исключением того, что кроме того, что стоит ниже диагонали, мы теперь знаем, что на самой диагонали всегда стоят нули, и их писать в вектор нам тоже не надо:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -2 & 0 & 15 \\ -7 & -15 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix}$$

## 2.2 Разбор задач

### 2.2.1 Является ли базисом?

Задача: проверить, является ли базисом пространстве  $\mathbb{R}^3$  следующий набор векторов:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решение: Вспомним, что одно из условий, которое должно выполняться для базиса, это  $a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = 0$  только при условии, что  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ . Теперь **очень внимательно**, сейчас будет сделан очень важный переход, который является ключевым в решении всех задач на эту тему:

$a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = 0$  это то же самое, что и  $(e_1 \ e_2 \ e_3) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , где  $(e_1 \ e_2 \ e_3)$  - матрица, составленная по столбцам из векторов  $e_1, e_2, e_3$ . Действительно, если взять и перемножить их как матрицы, то получится ровно нужное нам условие. Теперь мы можем составить матрицу из векторов  $e_1, e_2, e_3$ , и знаем, что в правой части у нас стоит нулевой вектор, но мы не знаем столбец из коэффициентов. Что это? Правильно, это просто система уравнений с расширенной матрицей  $(e_1e_2e_3|0)$ . Решаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ -1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 + C_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 - C_2 - C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Делаем переход к системе:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

Мы получили, что все три коэффициента равны 0, именно с такими коэффициентами набор базисных векторов в сумме даёт нулевой вектор, а значит векторы  $e_1, e_2, e_3$  - действительно базис в  $\mathbb{R}^3$ .

## 2.3 Задачи

### 1. Найти размерность следующих пространств

$$a) \mathbb{R}^7$$

$$d) \mathbb{R}^{7 \times 5}$$

$$g) \mathbb{R}[x]_4$$

$$j) \mathbb{S}^{3 \times 3}$$

$$b) \mathbb{R}^{20}$$

$$e) \mathbb{R}^{20 \times 4}$$

$$h) \mathbb{R}[b]_{12}$$

$$k) \mathbb{K}^{3 \times 3}$$

$$c) \mathbb{F}^{300}$$

$$f) \mathbb{F}^{100 \times 100}$$

$$i) \mathbb{F}[y]_{19}$$

### 2. Вытянуть в вектор следующие элементы разных пространств

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c) 2 + x + 15x^2 \in \mathbb{R}[x]_2$$

$$d) 2 + x + 15x^2 \in \mathbb{R}[x]_4$$

$$e) 5 + 12x + x^2 + 4x^3 + 6x^5 \in \mathbb{R}[x]_6$$

$$f) \begin{pmatrix} 0 & 12 & 4 \\ -12 & 0 & 6 \\ -4 & -6 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

$$g) \begin{pmatrix} 0 & 12 & 4 \\ -12 & 0 & 6 \\ -4 & -6 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3 \times 3}$$

$$h) \begin{pmatrix} 0 & 12 & 4 \\ 12 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^{3 \times 3}$$