Глава 1

Чудо-алгоритм.

Дано:
U, W - подпространства в V.
$U = \langle a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \rangle$
$W = \langle b_1\ b_2\ b_3\ b_4 \rangle$
Задача:
Найти базис пересечения U и W.

1.1 Теория

Нам заданы линейные оболочки подпространств, по определению: линейная оболочка пространства - множество всевозможных линейных комбинаций векторов из пространства.
Говорят, что вектор v принадлежит линейной оболочке L, если существует линейная комбинация векторов из оболочки, равная v.
Формально: $v \in L \Leftrightarrow v = \lambda_n l_1 + ... + \lambda_n l_n$,
где $l_1, ..., l_n \in L;\ \lambda_1, ..., \lambda_n$ - скаляры.

Пересечение подпространств U и W содержит все такие векторы, которые одновеменно принадлежат и U, и W. Т.е. одновеменно принадлежат и линейной оболочке U и линейной оболочке W.

Перепишем последний абзац:
Если $v \in U \cap W$, то $\begin{cases} v \in U \\ v \in W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = a_1u_1 + ... + a_nu_n & u_1...u_n \in U \\ v = b_1w_1 + ... + b_kw_k & w_1...w_k \in W \end{cases}$, а a_i и b_i - скаляры.
Теперь мы можем записать это таким образом:
$a_1u_1 + ... + a_nu_nu_1...u_n = v = b_1w_1 + ... + b_kw_kw_1...w_k$, и убрать v:
$a_1u_1 + ... + a_nu_nu_1...u_n = b_1w_1 + ... + b_kw_kw_1...w_k$.
Полученное тождоество является однородной системой линейных уравнений, покажем это, если не очень очевидно:
$a_1u_1 + ... + a_nu_nu_1...u_n = b_1w_1 + ... + b_kw_kw_1...w_k$.
$(u_1\ ...\ u_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (w_1\ ...\ w_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.
$(u_1\ ...\ u_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - (w_1\ ...\ w_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = 0$.
Важно осознать следующий переход:

$$(u_1 \dots u_n \ -w_1 \dots \ -w_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = 0.$$

Запишем расширенную матрицу этой ОСЛУ:
$(u_1 \dots u_n \ -w_1 \dots \ -w_n \mid 0) \Leftrightarrow (u_1 \dots u_n \mid w_1 \dots w_n)$.
Дальше мы решаем эту ОСЛУ как обычно: приводим к улучшенному ступенчатому виду (заметим, что если до этого мы находили базис в $U+W$, то у нас уже есть эта матрица, приведённая к ступенчатому виду, получается что теперь мы просто мучаем её дальше, и выигрываем на этом какое-то время [дохуя времени на самом деле, мы же не делаем переход к системам]), выписываем общее решение, находим ФСР.
Дальше лучше показать на практике.