

Глава 1

Чудо-алгоритм.

Дано:

U, W - подпространства в V .

$U = \langle a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \rangle$

$W = \langle b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \rangle$

Задача:

Найти базис пересечения U и W .

1.1 Теория

Нам заданы линейные оболочки подпространств, по определению: линейная оболочка пространства - множество всевозможных линейных комбинаций векторов из пространства.

Говорят, что вектор v принадлежит линейной оболочке L , если существует линейная комбинация векторов из оболочки, равная v .

Формально: $v \in L \Leftrightarrow v = \lambda_1 l_1 + \dots + \lambda_n l_n$,

где $l_1, \dots, l_n \in L$; $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - скаляры.

Пересечение подпространств U и W содержит все такие векторы, которые одновременно принадлежат и U , и W . Т.е. одновременно принадлежат и линейной оболочке U и линейной оболочке W .

Перепишем последний абзац:

Если $v \in U \cap W$, то $\begin{cases} v \in U \\ v \in W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n & u_1 \dots u_n \in U \\ v = b_1 w_1 + \dots + b_k w_k & w_1 \dots w_k \in W \end{cases}$, а a_i и b_i - скаляры.

Теперь мы можем записать это таким образом:

$a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = v = b_1 w_1 + \dots + b_k w_k$, и убрать v :

$a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = b_1 w_1 + \dots + b_k w_k$.

Полученное тождество является однородной системой линейных уравнений, покажем это, если не очень очевидно:

$a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = b_1 w_1 + \dots + b_k w_k$.

$$(u_1 \ \dots \ u_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (w_1 \ \dots \ w_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$(u_1 \ \dots \ u_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - (w_1 \ \dots \ w_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = 0$$

Важно осознать следующий переход:

$$(u_1 \dots u_n \mid -w_1 \dots -w_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = 0$$

Запишем расширенную матрицу этой ОСЛУ:

$$(u_1 \dots u_n \mid -w_1 \dots -w_n \mid 0) \Leftrightarrow (u_1 \dots u_n \mid w_1 \dots w_n).$$

Дальше мы решаем эту ОСЛУ как обычно: приводим к улучшенному ступенчатому виду (заметим, что если до этого мы находили базис в $U + W$, то у нас уже есть эта матрица, приведённая к ступенчатому виду, получается что теперь мы просто мучаем её дальше, и выигрываем на этом какое-то время [дохуя времени на самом деле, мы же не делаем переход к системам]), выписываем общее решение, находим ФСР.

Дальше лучше показать на практике.