Большое домашнее задание № 3. Математический анализ.

Пешехонов Иван. БПМИ1912

21 декабря 2019 г.

Глава 1

Вариант 19.

1.1 № 1.

Найти предел по правилу Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x+1)\sin^2 x}{(x+a)\ln^2(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{((x+1)\sin^2 x)'}{((x+a)\ln^2(x+1))'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x + 2(x+1)\sin x\cos x}{\ln^2(x+1)+2(x+a)\frac{\ln(x+1)}{x+1}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x+(x+1)\sin 2x}{\frac{(x+1)\ln^2(x+1)+2(x+a)\ln(x+1)}{x+1}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{(x+1)(\sin^2 x+(x+1)\sin 2x)}{(x+1)\ln^2(x+1)+2(x+a)\ln(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{((x+1)(\sin^2 x+(x+1)\sin 2x))'}{((x+1)\ln^2(x+1)+2(x+a)\ln(x+1))'} =$
$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x+(x+1)\sin 2x+(x+1)(\sin 2x+\sin 2x+2(x+1)\cos 2x)}{\ln^2(x+1)+2(x+1)\frac{\ln(x+1)}{x+1}+2(\ln(x+1)+\frac{(x+a)}{x+1})} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x+(x+1)\sin 2x+2(x+1)(\sin 2x+(x+1)\cos 2x)}{\ln^2(x+1)+2\ln(x+1)+2(\ln(x+1)+\frac{(x+a)}{x+1})} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{0+0+2(0+1)}{0+0+2(0+a)} = \frac{1}{a}$

б) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{1}{e^x-e^{-x}}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{1-\cos x}\right) - \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x-e^{-x}}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{(1)'}{(1-\cos x)'}\right) - \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{(1)'}{(e^x-e^{-x})'}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{0}{\sin x}\right) - \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{0}{e^x+e^{-x}}\right) == \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{(0)'}{(\sin x)'}\right) - \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{0}{1+1}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{0}{\cos x}\right) - \lim\limits_{x\to 0} 0 = \lim\limits_{x\to 0} 0 - \lim\limits_{x\to 0} 0 =$

$= 0 - 0 = 0$

в) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{\cos x}{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{\cos x}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x}\ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x\ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\cos x\ln\left(\frac{\ln x}{x}\right))'}{(x)'}} =$

$e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(-\sin x\ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)+\frac{\cos x}{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{1-ln(x)}{x^2})} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(-\sin x\ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)+\frac{\cos x}{\ln x}\cdot\frac{1-ln(x)}{x})} =$

1.2 № 2.

$f(x) = (1-x^2)e^{x-1}, x_0 = 1;$

$f'(x) = (1-x^2)'e^{x-1} + (1-x^2)[e^{x-1}]' = -2xe^{x-1} + (1-x^2)e^{x-1} = (1-2x-x^2)e^{x-1}$
$f''(x) = [1-2x-x^2]'e^{x-1} + (1-2x-x^2)[e^{x-1}]' = (-2-2x)e^{x-1} + (1-2x-x^2)e^{x-1} =$
$= (-1-4x-x^2)e^{x-1}$
$f'''(x) = [-1-4x-x^2]'e^{x-1} + (-1-4x-x^2)[e^{x-1}]' = (-4-2x)e^{x-1} + (-1-4x-x^2)e^{x-1} =$
$= (-5-6x-x^2)e^{x-1}$
$f(x_0) = 0$

Формула Тейлора:
$f(x) = f(x_0) + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \overline{\overline{o}}((x-x_0)^3)$

$f(x) = 0 + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3 + \overline{\overline{o}}((x-x_0)^3) =$
$= -2(x-x_0) + \frac{-6}{2}(x-x_0)^2 + \frac{-12}{6}(x-x_0)^3 + \overline{\overline{o}}((x-x_0)^3) =$
$= -2(x-x_0) - 3(x-x_0)^2 - 2(x-x_0)^3 + \overline{\overline{o}}((x-x_0)^3)$

1.3 № 5.

Исследовать ф-цию с помощью производной первого порядка.

$y = \frac{1}{e^x - 1}$
$y' = ((e^x-1)^{-1})' = -e^x(e^x-1)^{-2} = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$
Очевидно, что за исключением точки 0 функция $y(x)$ везде непрерывна. А что происходит в точке 0 - вот это мы сейчас узнаем.