Глава 1

Задачи для подготовки к экзамену. Ленал.

1.1 № 1.1

Найти все матрицы $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, удовлетворяющие уравнению $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -2 & 8 & 7 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Пример:
Рассмотрим матричное уравнение $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

. Записываем расширенную матрицу и приводим её к улучшенному ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Неприятность заключается в том, что слева у нас получилась не единичная матрица, а какая-то прямоугольная. Пусть искомая матрица X равна $\begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_2 & x_5 \\ x_3 & x_6 \end{pmatrix}$. К сожалению мы не умеем решать такие СЛУ, где слева и справа одновременно стоят неквадратные матрицы, зато умеем решать СЛУ, где справа стоит одинокий вектор-столбец. Этим и займёмся: разобьём нашу расширенную матрицу на две

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

и будем решать их отдельно. В итоге решение первой матрицы даст нам выражение первого столбца матрицы X, а решение второй, соответсвенно, второго.
Можешь поверить мне на слово, или проверить, но итоговым решением будет:

$$X = \begin{pmatrix} 1 + 2x_3 & 3 + 2x_6 \\ 1 & 2 \\ x_3 & x_6 \end{pmatrix}, x_3, x_6 \in \mathbb{R}$$

Важно не забыть, когда решаешь системы отдельно, о том, что свободные переменные у них, вообще говоря, разные, и если ты их обозначаешь зачем-то другой буквой (какая-нибудь β вместо x_1), то каждую переменную надо обозначать разными буквами.

1.2 № 1.2

Найти все матрицы $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, удовлетворяющие уравнению $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 1 & 9 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3 № 1.3

Постарайся вспомнить, как решать такое уравнение:
$XA = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

1.4 № 1.4 (скорее всего не будет на экзамене, но вдруг...)

Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Подсказка: если будет грустно, попробуй что-нибудь на что-нибудь заменить. Если будет очень грустно, напиши мне :D

1.5 № 1.5 (тоже наверняка не будет на экзамене)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

1.6 № 2.1

Найти все комплексные решения уравнения $(\sqrt{3} - 2i)z^3 = -\sqrt{2} + 3\sqrt{6}i$.

1.7 № 2.2

Найти все комплексные решения уравнения $(2 + \sqrt{3}i)z^3 = 3\sqrt{6} + \sqrt{2}i$.

1.8 № 2.3

Найти все комплексные решения уравнения $z^6 - (\sqrt{2} - 2\sqrt{6}i)z^3 - 6 - 2\sqrt{3}i = 0$.
Подсказка: вспомни, как решала биквадратные уравнения в школе.

1.9 № 2.4

Найти все комплексные решения уравнения $z^6 + (\sqrt{6} - 2\sqrt{2}i)z^3 - 2 - 2\sqrt{3}i = 0$.

1.10 № 3.1

Выяснить, будут ли векторы
$a_1 = (1, 1, -1, 2)$
$a_2 = (2, 0, 1, -1)$
$a_3 = (1, -1, -2, 3)$
линейно независимы в пространстве R^4.

1.11 № 3.2

Аналогично про векторы
$f_1 = -x^2 + 2x + 3$
$f_2 = x^2 - x + 2$
$f_3 = 2x^2 + 3x + 1$
в пространстве $R[x]_2$.

1.12 № 3.3

Аналогично про векторы
$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
в пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$

1.13 № 3.4

Выяснить, будет ли вектор $b = (3, 1, 4)$ принадлежать линейной оболочке векторов
$a_1 = (1, 1, 1)$ $a_2 = (1, -1, 2)$ $a_3 = (1, -3, 3)$

1.14 № 3.5

Доказать, что функции $\cos x, \cos 2x, \cos 3x$ линейно независимы.

1.15 № 3.6

Выяснить, принадлежит ли функция $\sin 3x$ линейной оболочке функций $\sin x, \cos x, \cos^3 x$.

1.16 № 3.7

Выяснить, принадлежит ли функция $\cos 3x$ линейной оболочке функций $\sin x, \cos x, \sin^3 x$.

Пример:
Пусть даны столбцы матрицы $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ равные a_1, a_2, a_3, a_4.
Положим:

$$b_1 = a_1 + 2a_2,\ b_2 = a_1 + 3a_2 + a_3,\ b_3 = -a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4,\ b_4 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 - a_4.$$

Чему равен определитель матрицы B со столбцами b_1, b_2, b_3, b_4, если определитель матрицы A равен 5?
Решение: На самом деле это очень простое задание на элементарные преобразования, в котором просто есть парочка хитростей.
Прежде всего нам дан определитель матрицы A, запишем его:

$$|A| = |a_1\ a_2\ a_3\ a_4| = 5$$

Теперь запишем определитель матрицы B:

$$|B| = |b_1\ b_2\ b_3\ b_4| = \|[a_1 + 2a_2]\ [a_1 + 3a_2 + a_3]\ [-a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4]\ [a_1 + 2a_2 + 3a_3 - a_4]\|$$

Я заключил каждый столбец в квадратные скобки, потому что иначе нихера не понятно, где заканчивается один столбец, и начинается другой. Теперь, когда мы это записали, начинаем выполнять элементарные преобразования столбцов. Я не умею, как Федотов, красиво обозначать тип преобразований, поэтому буду как-нибудь буковками.
Прежде всего вычтем из второго столбца первый, а к третьему добавим четвёртый:

$\|[a_1 + 2a_2]\ [a_1 + 3a_2 + a_3]\ [-a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4]\ [a_1 + 2a_2 + 3a_3 - a_4]\| =$
$\|[a_1 + 2a_2]\ [a_2 + a_3]\ [3a_2 + 4a_3 + a_4]\ [a_1 + 2a_2 + 3a_3 - a_4]\|$

Теперь из третьего столбца вычтем 3 вторых, а из последнего вычтем первый:

$$\|[a_1 + 2a_2]\ [a_2 + a_3]\ [3a_2 + 4a_3 + a_4]\ [a_1 + 2a_2 + 3a_3 - a_4]\| = \|[a_1 + 2a_2]\ [a_2 + a_3]\ [a_3 + a_4]\ [3a_3 - a_4]\|$$

Прибавляем к последнему столбцу третий:

$$\|[a_1 + 2a_2]\ [a_2 + a_3]\ [a_3 + a_4]\ [3a_3 - a_4]\| = \|[a_1 + 2a_2]\ [a_2 + a_3]\ [a_3 + a_4]\ [4a_3]\|$$

И теперь воспользуемся свойством определителя, по которому из каждого элемента определённого столбца можно вынести одно и то же число за знак определителя (**важно не продолбать число!**):

$$\|[a_1 + 2a_2]\ [a_2 + a_3]\ [a_3 + a_4]\ [4a_3]\| = 4\|[a_1 + 2a_2]\ [a_2 + a_3]\ [a_3 + a_4]\ [a_3]\|$$

Теперь всё стало совсем просто, вычитаем из второго и третьего столбца последний:

$$4\|[a_1 + 2a_2]\ [a_2 + a_3]\ [a_3 + a_4]\ [a_3]\| = 4\|[a_1 + 2a_2]\ [a_2]\ [a_4]\ [a_3]\|$$

И теперь вычитаем из первого два вторых:

$$4\|[a_1 + 2a_2]\ [a_2]\ [a_4]\ [a_3]\| = 4|a_1\ a_2\ a_4\ a_3|$$

Полученный определитель подозрительно похож на определитель матрицы A, разве что последние два столбца стоят не на своих местах. Хорошо, что у нас есть элементарное преобразование второго типа, которое позволяет нам поменять местами два столбца определителя **при этом не забыв поменять его знак**:

$$4|a_1\ a_2\ a_4\ a_3| = -4|a_1\ a_2\ a_3\ a_4| = -4 \cdot 5 = -20$$

Ответ: -20.

1.17 № 3.8

Даны столбцы матрицы $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, равные a_1, a_2, a_3, a_4.
Положим:

$$b_1 = -a_1 + 3a_2,\ b_2 = a_1 - 4a_2 - a_3,\ b_3 = a_1 - a_2 + 2a_3 - a_4,\ b_4 = a_1 + a_2 - 3a_3 + 2a_4$$

Чему равен определитель матрицы B со столбцами b_1, b_2, b_3, b_4, если определитель матрицы A равен 4?

1.18 № 3.9 (*)

Выяснить, будут ли векторы
$f_1(x) = 1$
$f_2(x) = 2^x$
$f_3(x) = 3^x$
$\vdots$
$f_n(x) = n^x$
линейно независимы в пространстве $C[0,1]$ (непрерывных функций на отрезке $[0,1]$).

1.19 № 4.1

Доказать, что множество всех матриц $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ удовлетворяющих условию $tr(XY) = 0$, где $Y = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, является подпространством в пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$; найти базис и размерность этого подпространства.
Подсказка № 1: обрати внимание, что сначала тебе нужно именно доказать, и не надо для этого искать все такие матрицы X в общем виде. Подумай, там правда несложно доказывается.
Подсказка № 2: след матрицы равен нулю не только когда элементы на главной диагонали равны нулю.

1.20 № 4.2

Доказать, что множество всех матриц $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ удовлетворяющих условию $tr(YX) = 0$, где $Y = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$, является подпространством в пространстве $\mathbb{R}^{2\times 2}$; найти базис и размерность этого подпространства.

1.21 № 4.3

Пусть V - векторное пространство всех многочленов степени не выше 4 с действительными коэффициентами, и пусть $U \subseteq V$ - подмножество, состоящее из всех многочленов $f(x)$, удовлетворяющих условиям:
1) $2f(-1) = 3f'(1)$
2) $f''(\frac{1}{2}) = 0$
Доказать, что U - подпространство в V.
Найти базис и размерность этого подпространства.

1.22 № 4.4

Пусть V - векторное пространство всех многочленов степени не выше 4 с действительными коэффициентами, и пусть $U \subseteq V$ - подмножество, состоящее из всех многочленов $f(x)$, удовлетворяющих условиям:
1) $2f(1) = f'(-1)$
2) $f''(-\frac{1}{2}) = 0$
Доказать, что U - подпространство в V.
Найти базис и размерность этого подпространства.