# Глава 1

# Чудо-алгоритм.

**Дано**:
$U, W$ - подпространства в $V$.
$U = \langle a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \rangle$
$W = \langle b_1\ b_2\ b_3\ b_4 \rangle$
**Задача**:
Найти базис пересечения $U$ и $W$.

## 1.1 Теория

Нам заданы линейные оболочки подпространств, по определению: линейная оболочка пространства - множество всевозможных линейных комбинаций векторов из пространства.
Говорят, что вектор $v$ принадлежит линейной оболочке $L$, если существует линейная комбинация векторов из оболочки, равная $v$.
Формально: $v \in L \Leftrightarrow v = \lambda_n l_1 + ... + \lambda_n l_n$,
где $l_1, ..., l_n \in L;\ \lambda_1, ..., \lambda_n$ - скаляры.

Пересечение подпространств $U$ и $W$ содержит все такие векторы, которые одновеменно принадлежат и $U$, и $W$. Т.е. одновеменно принадлежат и линейной оболочке $U$ и линейной оболочке $W$.

Перепишем последний абзац:
Если $v \in U \cap W$, то $\begin{cases} v \in U \\ v \in W \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = a_1u_1 + ... + a_nu_n & u_1...u_n \in U \\ v = b_1w_1 + ... + b_kw_k & w_1...w_k \in W \end{cases}$, а $a_i$ и $b_i$ - скаляры.
Теперь мы можем записать это таким образом:
$a_1u_1 + ... + a_nu_n = v = b_1w_1 + ... + b_kw_k$, и убрать $v$:
$a_1u_1 + ... + a_nu_n = b_1w_1 + ... + b_kw_k$.

Полученное тождество является однородной системой линейных уравнений, покажем это, если не очень очевидно:
$a_1u_1 + ... + a_nu_n = b_1w_1 + ... + b_kw_k$.

$$(u_1\ ...\ u_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (w_1\ ...\ w_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$(u_1\ ...\ u_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - (w_1\ ...\ w_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = 0$$

Важно осознать следующий переход:

$$(u_1 \ldots u_n \ -w_1 \ldots \ -w_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = 0$$

Запишем расширенную матрицу этой ОСЛУ:
$(u_1 \ldots u_n \ -w_1 \ldots \ -w_n \mid 0) \Leftrightarrow (u_1 \ldots u_n \mid w_1 \ldots w_n)$.

Дальше мы решаем эту ОСЛУ как обычно: приводим к улучшенному ступенчатому виду (заметим, что если до этого мы находили базис в $U+W$, то у нас уже есть эта матрица, приведённая к ступенчатому виду, получается что теперь мы просто мучаем её дальше, и выигрываем на этом какое-то время [дохуя времени на самом деле, мы же не делаем переход к системам]), выписываем общее решение, находим ФСР.
Дальше лучше показать на практике.