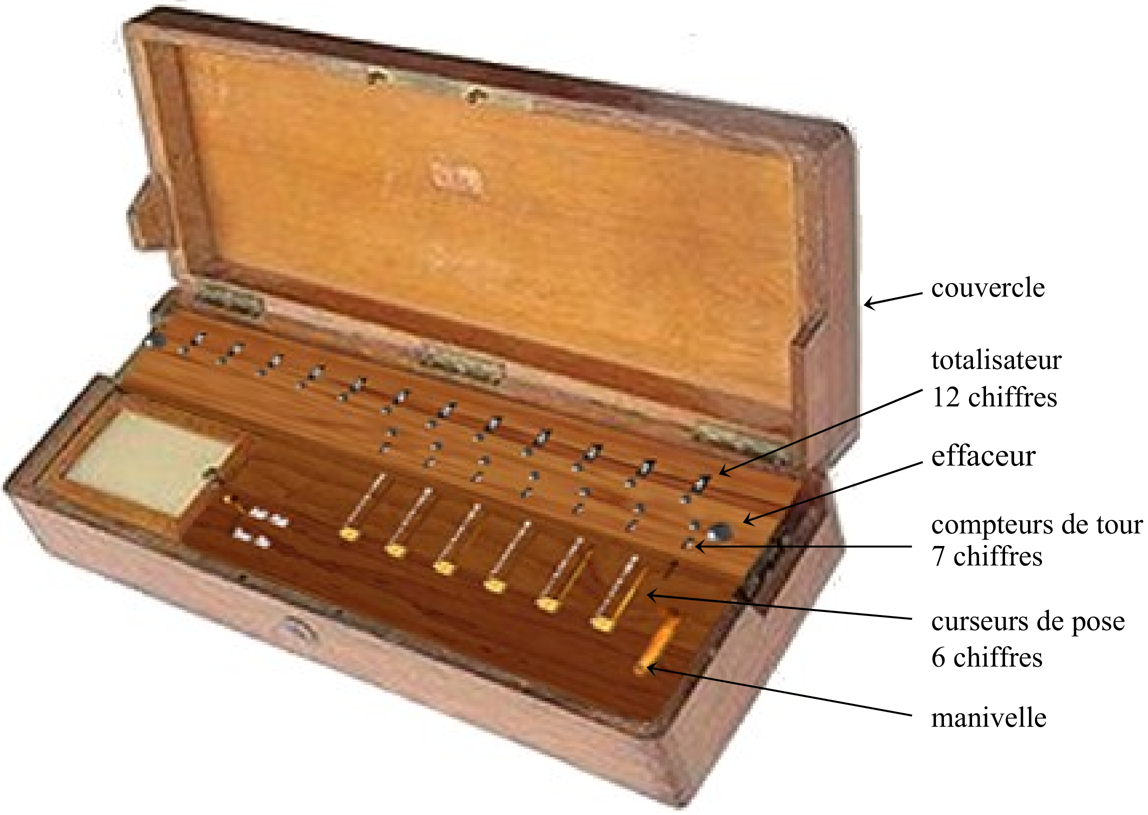
Modèle 3D de l’Arithmomètre de Thomas de Colmar

Alain Guyot
Chargé des collections



Résumé
L'arithmomètre de Thomas fut la première machine à calculer commercialisée au monde. Malgré sa rareté actuelle un modèle virtuel disponible sur Internet permet de comprendre comment il marche et comment on s’en sert. Quant à savoir tout ce à quoi il sert, les applications sont innombrables.

http://www.aconit.org

1 Introduction

On peut affirmer que c'est l'arithmomètre qui créa le marché de la machine à calculer de bureau en France et en Angleterre (~60% de la production exportée).
Le musée ACONIT ne possède pas d'arithmomètre, c'est pourquoi il présente un arithmomètre virtuel, également disponible sur Internet : http://www.aconit.org/arithmometre/

2 Généralités

Les machines à calculer mécaniques ont régné pendant trois siècles.
Les machines à calculer mécaniques travaillent en base 10. Il y a eu cependant de rares exceptions pour travailler avec des systèmes monétaires non décimaux. La Grande-Bretagne n'a décimalisé sa monnaie qu'en 1971.

2.1 Représentation des chiffres et des nombres

Les valeurs des chiffres sont représentées par des positions angulaires de disques. Les disques portent des chiffres dessinés dont un seul est visible à travers une lucarne du boîtier. Pour passer à la valeur suivante ou précédente d'un chiffre, modulo 10, le disque tourne de 1/10 tour (36 °). Au repos, quand ils ne sont pas en train de tourner, la position angulaire idéale de ces disques serait un multiple entier de 36 °.

La position 0 du disque du *totalisateur* est repérée par un bossage solidaire du disque.

2.2 Remise à zéro

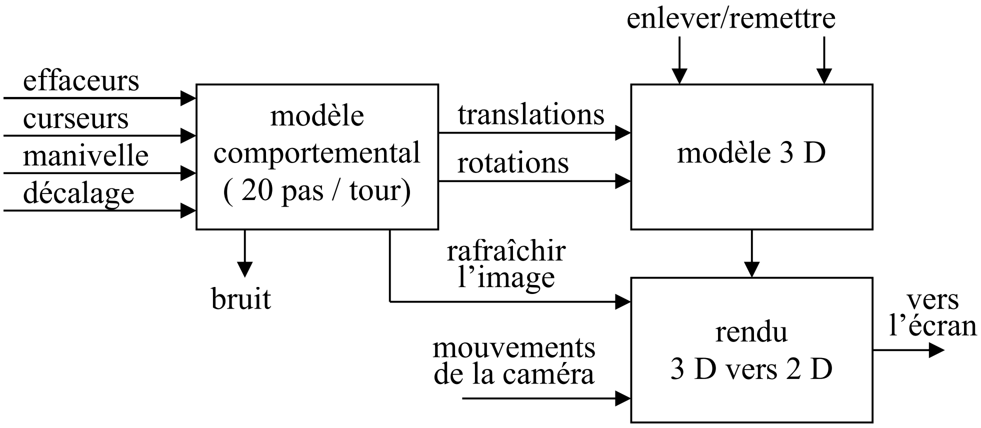
Pour remettre à zéro les engrenages on les entraîne par une crémaillère tant que la valeur affichée est ≠ 0.

3 Analyse d'un arithmomètre

Les caractéristiques de l'arithmomètre virtuel viennent d'une vidéo sur le site « arithmometre.org ». Le modèle qui correspond à la vidéo semble être le modèle P1, dont le site donne les dimensions. De cette observation et de l'analyse du brevet de Thomas de Colmar de 1920, corrigé par Valéry Monnier et Michel Bardel, les tailles des pièces ont pu être déduites.

4 Arithmomètre virtuel

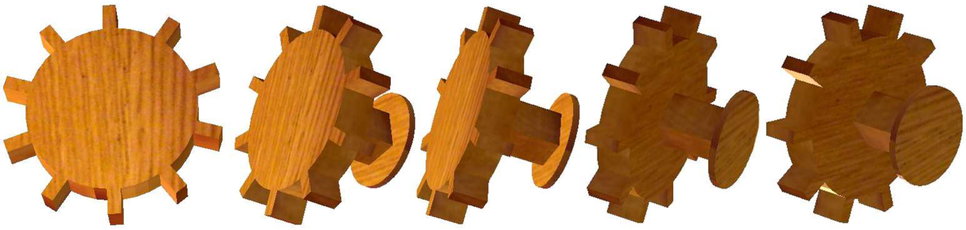
L'arithmomètre virtuel est un assemblage de 3 modules : un modèle de l'arithmomètre en trois dimensions, un logiciel de projection de ce modèle 3D sur l'écran de votre ordinateur (rendu) et enfin un logiciel d'animation du modèle 3D.



Ces trois modules sont chargés temporairement en mémoire de votre ordinateur par votre navigateur favori. Une barre de progression vous indique l'état d'avancement du chargement.

4.1 Modèle 3 D d'une pièce de l'arithmomètre

Une pièce en trois dimensions est un volume délimité par des faces plates polygonales (généralement des rectangles), déterminées chacune par les coordonnées cartésiennes x, y et z de leurs sommets. Ces faces sont colorées par une texture. Ces pièces virtuelles sont crées par un éditeur de dessin 3D à partir de la déformation et l'assemblage, additif ou soustractif, de volumes polyédriques prédéfinis comme des cubes ou des cylindres.



Par exemple, un pignon baladeur de l'arithmomètre est un cylindre aplati sur le périmètre duquel on a assemblé 10 dents qui sont des cubes aplatis. Puis on a ajouté un cube allongé et un autre cylindre aplati sur le même axe.
Notez que le trou carré de l'axe de ce pignon baladeur sera percé par l'axe lui même (§ 7.2).

4.2 Modèle 3 D de l'arithmomètre entier

Quand les pièces ont été dessinées, elles sont instanciées et assemblées hiérarchiquement dans un espace à 3 dimensions, chaque instance possède trois coordonnées cartésiennes x, y, z et trois angles d'Euler (positions angulaires) ψ, θ et φ suivant ses trois axes.
Les pièces de l'arithmomètre ont été dessinées puis assemblées grâce au logiciel libre BLENDER. http://blender3d.fr/
Le fichier généré par BLENDER est un "Object3D" exporté avec le type COLLADATA (COLLAborative Design Activity), et une extension .dae.
'http://www.aconit.org/arithmometre/test/Export/Arithmometre-Export.dae'
Toutes les pièces du modèle 3D sont rangées par l'éditeur dans un tableau nommé "Objects".
En modifiant indépendamment les attributs coordonnées cartésiennes x, y ou z de ces objets on peut les déplacer par translation, et en modifiant leurs angles ψ, θ ou φ on peut les faire pivoter.
Par exemple quand on déplace le chariot de l'arithmomètre, l'ensemble des pièces du chariot est translaté suivant l'axe x par modification de l'attribut coordonnée x de chacune de ses pièces.
De même la manivelle tourne autour de l'axe z, l'arbre principal autour de l'axe x et les cylindres autour de l'axe y, toujours du même angle et à la même vitesse (§ 7.1).

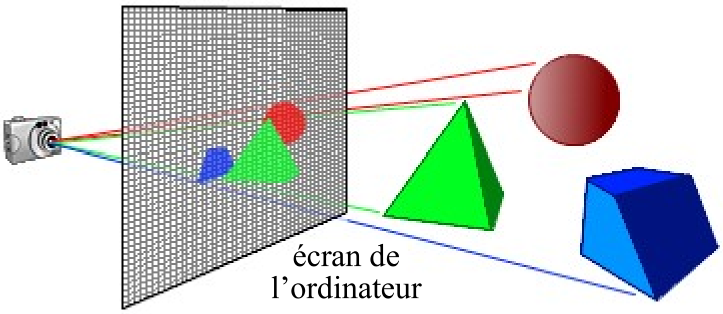
4.3 Bruit de l’arithmomètre virtuel

Une différence remarquable entre calculateurs électroniques et mécaniques est le bruit. Un bruit synthétique accompagne l’animation de l’arithmomètre 3D. Ce bruit est très simplifié et indépendant de l’opération effectuée, contrairement au bruit d’un vrai arithmomètre. Ce bruit était plus long et plus fort en cas de changement de signe du *totalisateur*, permettant d’effectuer la division à restauration (§ 16.1) « à l’oreille ».

5 Rendu

« Three.js » est une bibliothèque libre légère, écrite par Ricardo Cabello, dont la fonction principale est le rendu 2D dans les navigateurs. https://threejs.org/

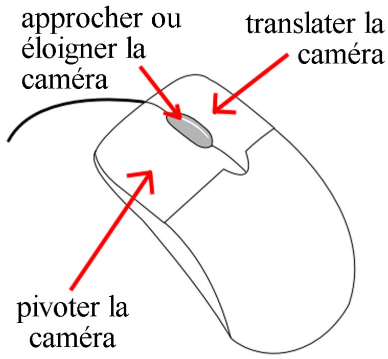
Three utilise la méthode de « raycasting ». A partir de l’objectif d’une caméra, on lance un rayon (une ligne droite) et on calcule les intersections de cette ligne avec les surfaces des objets de l’arithmomètre virtuel. L’objet le plus proche de la caméra masque tous les autres. Dans l’exemple ci-contre, la pyramide verte masque partiellement la sphère rouge et le polyèdre bleu sur l’écran. Théoriquement il faut calculer un rayon par pixel de l’écran de l’ordinateur, ce qui est très coûteux. Heureusement il y a de nombreuses techniques d’optimisation très efficaces, en particulier par l’exploitation de la carte graphique de votre ordinateur.



Chaque fois qu’un ou plusieurs objets ont été modifiés, on appelle Three pour qu’il recalcule une image 2D. Le temps de ce calcul varie suivant la puissance de la carte graphique, ce qui fait que l’animation est plus ou moins rapide en fonction de l’ordinateur et son navigateur.

6 Mouvements de la caméra

Le modèle 3D de l’arithmomètre est fixe, il est éclairé par une lampe et filmé par une caméra. L’image filmée par cette caméra s’affiche sur votre écran. Votre souris permet de déplacer la caméra :



- La molette permet d’approcher ou d’éloigner la caméra du centre de la scène. Attention, si on s’approche trop de l’arithmomètre virtuel, la caméra passera au travers. Si on s’en éloigne beaucoup, on risque de le perdre totalement de vue et être désorienté.
- Le bouton gauche déplace la caméra sur une sphère centrée sur la scène.
- Le bouton droit déplace la caméra dans un plan parallèle à l’écran.

Sur l’écran, cinq boutons à cliquer permettent de ramener la caméra dans des position précalculées pour voir l’arithmomètre de face, de dessus, de dessous, de droite ou de gauche.

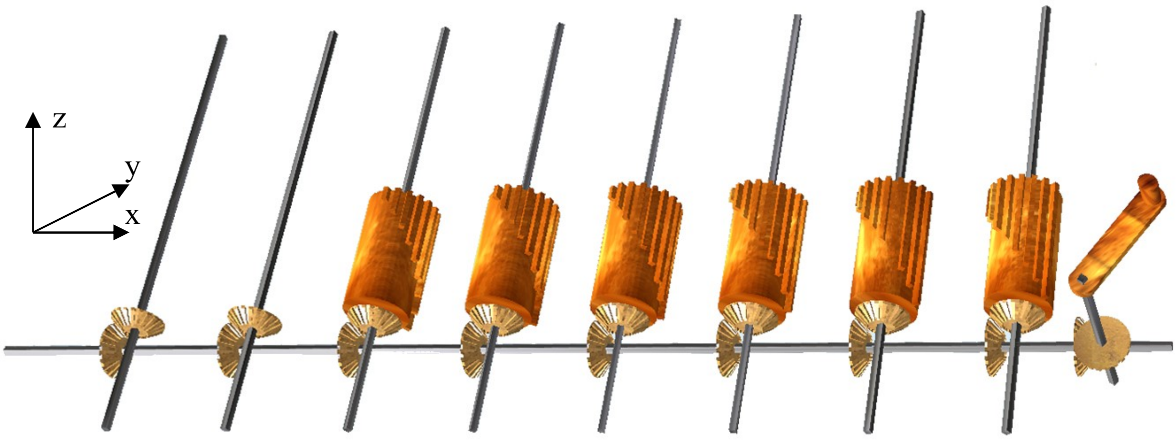
7 Modèle comportemental de l’arithmomètre

Quelle séquence de mouvements de pièces entraîne un tour de manivelle ?

Quelle séquence de mouvements des pièces déclenche un décalage du chariot ?

7.1 Entraînement continu

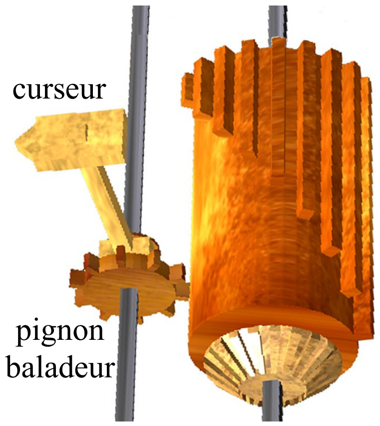
La manivelle entraîne par des engrenages coniques un arbre de distribution qui lui même entraîne 8 arbres dont 6 portent un cylindre de Leibniz. Toutes ces pièces tournent simultanément, la manivelle autour de son axe z, l'arbre de distribution autour de son axe x et les 8 arbres autour de l'axe y.



Observez sur ce dessin le déphasage angulaire des 6 cylindres de Leibniz.

7.2 Entraînement intermittent

Six pignons baladeurs (§ 4.1), positionnés par les 6 curseurs, sont entraînés de façon intermittente par les cylindres de Leibniz. Comme le diamètre des pignons baladeurs est 1 cm et celui des cylindres de Leibniz est 2 cm, ces engrenages tournent deux fois plus vite que la manivelle quand ils sont entraînés et ne tournent pas du tout autrement. La vitesse de rotation étant connue, il reste à déterminer à quel moment précis ils sont entraînés.
Le pignon baladeur entraîne un axe de section carrée qui entraîne un disque du *totalisateur* (§ 2.1).



7.3 Entraînement par les cylindres de Leibniz

Soit c [i] la position discrétisée du i^{ème} curseur ;
$i \in [0..5]$ et $c[i] \in [0..9]$
Alors pour le i^{ème} arbre :

début d'entraînement : $\tau[i] = i + 9 - c[i]$
fin d'entraînement : $\tau[i] = i + 9$.

7.4 Entraînement par la propagation de retenue

S'il a lieu, l'entraînement du i^{ème} arbre par la retenue se fait toujours au temps $\tau[i] = i + 10$.
Soit t [i] la valeur du i^{ème} chiffre du *totalisateur* ; $i \in [0..11]$ et $t[i] \in [0..9]$.
Soit j le décalage du chariot, $i \in [0..6]$; j vaut 6 si le chariot est totalement à droite, et 0 s'il est centré.
Alors il y a entraînement du i^{ème} arbre par la retenue si :

cas de l'addition : $t[i + j - 1] + c[i - 1] > 9$
cas de la soustraction : $t[i + j - 1] - c[i - 1] < 0$

8 Report de retenue

Le mécanisme de propagation de la retenue est celui auquel Thomas et ses collaborateurs, puis ses successeurs, ont apporté le plus d'améliorations. Le principe originel est dû au comte Charles Stanhope, troisième du nom, inventeur prolifique. Le dispositif de report de sa machine à multiplier de 1775 agit en deux temps. Dans le premier temps, on mémorise le passage de 9 à 0 de chacun des disques du *totalisateur*, puis plus tard on effectue

séquentiellement les reports. Quelle que soit la base de numération (décimale ou binaire), la retenue à mémoriser peut prendre une parmi deux valeurs : 0 et 1.
Pour l'arithmomètre, cette détection éventuelle a lieu pendant l'entraînement des disques du *totalisateur* par les cylindres de Leibniz (§ 7.2). Dans le deuxième temps, s'il y a retenue on entraîne de nouveau le disque du *totalisateur* suivant. Ce deuxième temps vient juste après l'entraînement par le cylindre de Leibniz (§ 7.2).
La propagation séquentielle de la retenue de Stanhope a été reprise dans la plupart des calculatrices mécaniques ultérieures, avec deux exceptions notables :

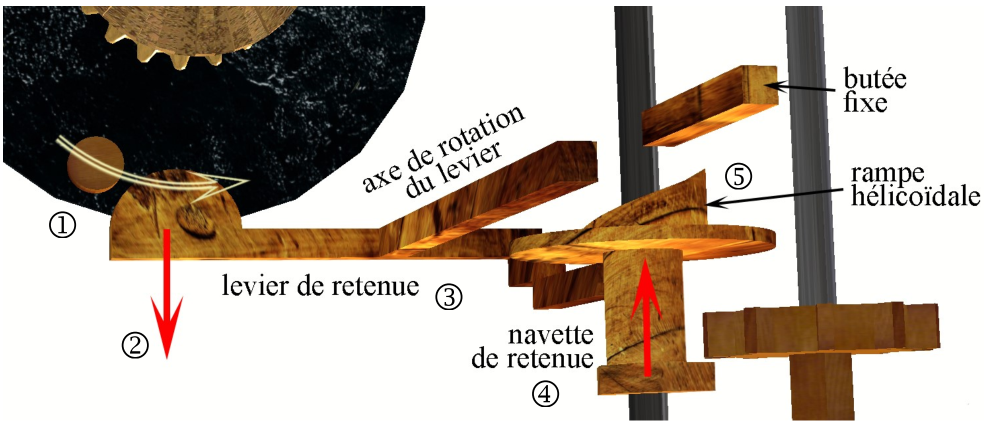
8.1 Autres systèmes de report

1 - Le reporteur différentiel de Tchebychev de 1882 :
www.aconit.org/histoire/calcul_mecanique/documents/Tchebichef_1882.pdf
qui fut repris dans les machines Burroughs puis Marchant.
2 - La retenue anticipée de Charles Babbage vers 1840. Une petite partie de l'additionneur de la machine analytique conçue par Babbage a été finalement fabriquée par son fils Henry, comme démonstrateur. La retenue anticipée a été réinventée vers 1950 par Natale Capellaro, d'Olivetti, et utilisé dans pratiquement toutes les calculatrices mécaniques d'Olivetti
http://www.aconit.org/histoire/calcul_mecanique/documents/Science_Museum_London.ppt
Charles Babbage a possédé les machines arithmétiques de Stanhope, qui furent données au musée par son fils Henry vers 1910. Mais il est peu probable que Thomas ait eu connaissance en 1820 du mécanisme de propagation de la retenue de Stanhope de 1775.
De même il est peu probable que Natale Capellaro ait connu le principe de la retenue anticipée de Babbage.

8.2 Navette

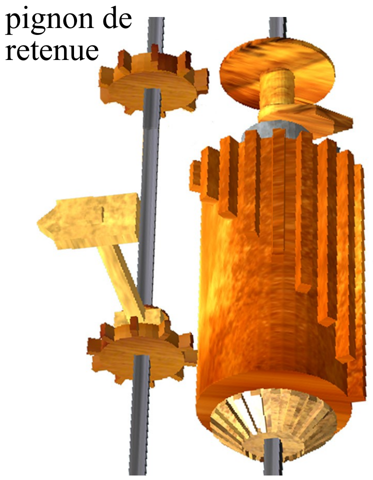
Percées d'un trou carré, traversées et entraînées par les mêmes arbres carrés que les cylindres de Leibniz, les navettes peuvent coulisser le long de ces axes. Les navettes sont formées en bas d'un engrenage à une seule dent (ergot), d'un plateau et d'une rampe triangulaire. Lorsque cette rampe en tournant heurte une butée fixe, la navette est repoussée. La position de la navette le long de l'arbre indique si la retenue vaut 0 ou 1.

8.3 Mouvement de la navette



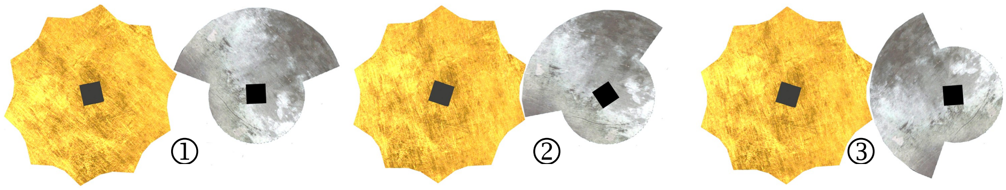
Une protubérance ① solidaire du disque du *totalisateur*, en passant de 9 à 0ou de 0 à 9, pousse vers le bas l'extrémité d'un levier ②. Ce levier bascule autour de son axe ③ et soulève ④ la navette de retenue. Une rampe hélicoïdale ⑤ sur cette navette la repoussera en bas à la fin du cycle, et elle même repoussera ce levier en position initiale.

Pour bien observer le mouvement des navettes du modèle 3D, il faut ôter le boîtier, passer en vitesse lente, poser 999999 puis donner plusieurs tours de manivelle.
La navette est munie d'une dent (ergot) qui entraîne un pignon de retenue si elle est en position haute, faisant tourner le disque du *totalisateur* d'un dixième de tour supplémentaire.



9 Entraînement par les croix de Malte

En dehors de l'entraînement intermittent, c'est à dire au repos, chaque disque du *totalisateur* ne doit prendre qu'une parmi 10 positions angulaires discrètes. Un engrenage en forme de « croix de malte » entraîne le disque tant que celui-ci n'a pas une position angulaire idéale, et puis le bloque dans cette position. Ce mécanisme est aussi appelé « stabilisateur ».
En tournant, le segment engage la croix de malte ① et la force éventuellement à tourner ②, et enfin la bloque ③ en bonne position angulaire .



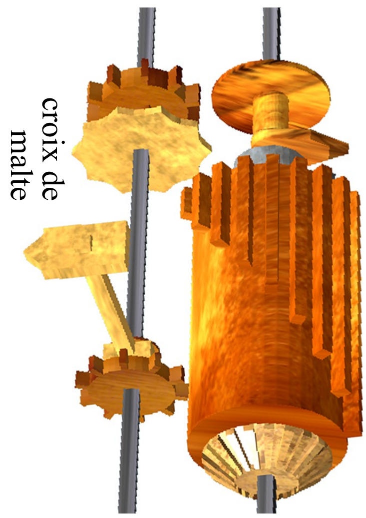
9.1 Calage du segment

Le segment doit bloquer la croix de malte au moment où elle doit impérativement cesser son mouvement. Par contre la croix de malte n'est plus forcément bloquée quand elle est déjà immobile.
En conséquence un tour du *totalisateur* est divisé en deux secteurs :

1- un secteur où le *totalisateur* ne peut jamais être entraîné par le cylindre de Leibniz
2- un secteur où le *totalisateur* peut éventuellement être entraîné par le cylindre de Leibniz, en fonction de la position du pignon baladeur

La forme et le calage angulaire du segment reflète ces deux cas

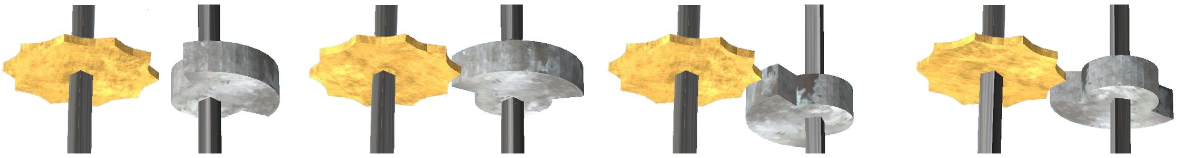
9.2 Retenue et entraînement



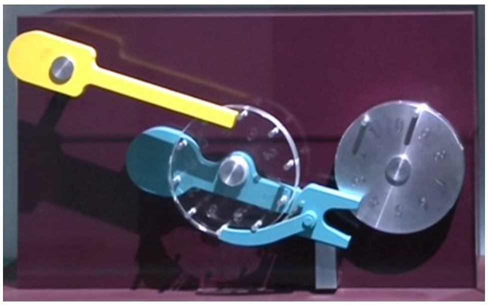
La retenue provoque un entraînement du *totalisateur* d'un dixième de tour supplémentaire durant lequel il ne faut pas bloquer le *totalisateur*. Cependant il faut le bloquer juste après. Le segment est solidaire de la navette de retenue, et est donc soulevé comme elle en cas de mémorisation de retenue (§ 8.3).

9.3 Fiabilité

On ne saurait trop insister sur l'ingéniosité et surtout la nécessité de ce mécanisme.
En effet, lorsque l'entraînement intermittent cesse, la position angulaire des disques n'est *a priori* pas idéale. Les causes en sont la précision limitée de la taille des engrenages, leur jeu et leur usure, et enfin et surtout l'inertie des pièces en rotation. Les disques ne s'arrêtent pas instantanément quand leur entraînement cesse.
Les croix de malte les ramènent très près de ces positions angulaires idéales.

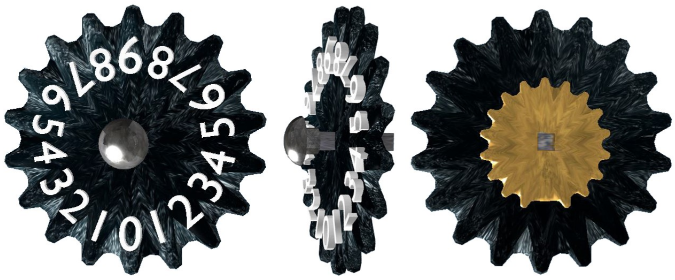


Déjà en 1640, Blaise Pascal a muni sa machine de bras pivotants terminés par un dièdre pénétrant les engrenages à lanterne et les forçant dans le bon angle, et aussi les empêchant de revenir en arrière sous le poids du sautoir de retenue.
Un modèle du dispositif de Pascal est exposé au musée Henri Lecoq de Clermont-Ferrand.
L'engrenage à lanterne est en plexi et le bras est peint en jaune.
Le grand Charles Babbage, contemporain de Thomas, a muni sa machine à différences d'échappements à ancre pour la retenue, comme dans les horloges, et a soigneusement évité les entraînements intermittents au prix il faut le dire d'une assez grande complexité. Le suédois Per Georg Scheutz a par la suite construit à partir de 1843 des machines à différences moins chères et moins soignées de ce point de vue, et qui marchaient plutôt mal.



10 Compteurs de tours de manivelle

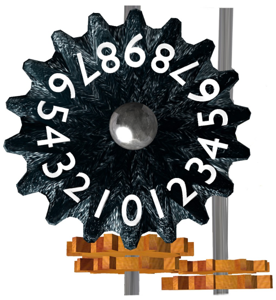
Les 7 roues des compte-tours sont des pignons à 18 dents. La navette de retenue (§ 8.2) la plus à droite de l'arithmomètre ne sert pas à la retenue (il n'y a pas de retenue entrante à droite). Elle est déplacée vers le haut si l'inverseur est en position addition, et vers le bas en position soustraction.

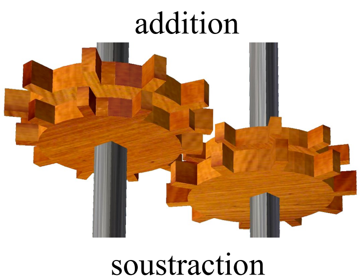


La dent unique de la navette (ergot) entraîne une roue de compteur en sens direct pour l'addition, et en sens inverse pour la soustraction. On peut dire que la partie gauche de la roue de compteur sert a compter les additions moins les soustractions et la partie droite les soustractions moins les additions.

10.1 Inversion du sens du compteur

L'inverseur de sens de rotation de la roue compteur est formé de 4 engrenages. Les 2 du milieu sont engrenées et tournent en sens inverse. L'engrenage du haut est engrené avec la roue compteur. La dent de la navette attaque soit l'engrenage du haut, pour l'addition, soit l'engrenage du bas pour la soustraction.





11 Décalage du chariot

Les disques du *totalisateur* ainsi que les engrenages des compteurs se déplacent avec un chariot mobile, ou platine. Quand le chariot est soulevé, les disques du *totalisateur* et l'engrenage compteur se désengrènent. On peut alors déplacer le chariot. On peut alors aussi effacer les compteurs et le *totalisateur*. On peut enfin modifier manuellement le *totalisateur* grâce à une molette. Cette possibilité n'est pas exploitée dans l'arithmomètre 3D.

12 Economie de moyen

L'arithmomètre fonctionne grâce à des pièces coulissant le long d'axe à section carrée qui les entraîne en rotation, comme le résume le tableau ci-dessous. La colonne # P indique le nombre de positions possibles, # E le nombre d'instances dans l'arithmomètre, la colonne cause donne l'origine de la translation. Ces translations amènent des pignons dans le même plan pour qu'ils puissent s'entraîner. 0 ↔ 9 indique le passage d'un disque du *totalisateur* de 0 à 9 ou bien de 9 à 0.

	# P	# E	cause	
Pignon baladeur	10	6	curseur	entraîne un disque de 0 à 9 dixièmes de tour
Navette de retenue	2	7	0 ↔ 9	entraîne un disque de 0 ou 1 dixième de tour
Segment stabilisateur	2	7	0 ↔ 9	autorise la retenue
Couple conique	2	8	inverseur	change le sens d'entraînement des disques
Navette du compteur	2	1	inverseur	compte les additions ou les soustractions

L'élégance de l'économie de moyens dans la réalisation de l'Arithmomètre est remarquable.

13 Exemples d'opérations

A des fins pédagogiques, 4 opérations arithmétiques sont prédéfinies pour l'arithmomètre 3D.

165 + 328 = 493
324 – 152 = 172
256 x 18 = 4608
2569 ÷ 12 = 214 reste 1

Une case à cocher permet d'enchaîner l'exécution de ces exemples. Pour reprendre la main il faut décocher cette case.

14 Addition/soustraction

Les opérations d'addition et de soustraction sont paradoxalement les plus complexes et les plus spectaculaires, à cause du mécanisme de propagation des retenues (§ 8). Pour effectuer une de ces opérations, il faut effacer le *totalisateur*, puis poser le premier opérande, donner un tour de manivelle pour transférer cet opérande dans le *totalisateur*, puis poser le deuxième opérande et redonner un tour de manivelle.

Pour soustraire, il suffit d'inverser le sens de rotation des disques du *totalisateur* en actionnant le levier inverseur qui déplace un couple d'engrenages coniques coulissant sur l'axe des pignon baladeurs. La détection du passage de 9 à 0 devient la détection du passage de 0 à 9. La protubérance qui détecte ce passage (§ 8.3) est parfaitement symétrique.

Cette dualité addition/soustraction avait été remarquée par Pascal, mais comme le *totalisateur* de la pascaline ne tournait que dans un sens, Pascal avait écrit sur les tambours du *totalisateur* les chiffres en ordre croissant et dessus en ordre décroissant. Un volet mobile masquait une de ces deux écritures.

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Dans le cas d'additions/soustractions, le *compteur* indique le nombre de valeurs additionnées ou respectivement soustraites.

Si on fait une addition/soustraction de trop, on peut restaurer la machine exactement dans son état antérieur en faisant une soustraction (respectivement une addition).

14.1 Signe du totalisateur

En soustrayant deux nombres positifs, on peut obtenir un résultat négatif. L'arithmomètre ne note pas comme nous les valeurs négatives en faisant précéder leur valeur absolue d'un signe

moins, mais en complément à la capacité de la machine. C'est ainsi que l'opposé de 1 est noté 99999999.
C'est logique car si on ajoute 99999999 + 1 on obtient bien 0 avec cette machine.
Le problème est que dans l'arithmomètre le *totalisateur*, le *compteur* et les *curseurs* de pose n'ont pas le même nombre de chiffre, donc la même capacité. L'écriture d'un nombre négatif change. Il faut retenir que si le premier chiffre non nul a gauche du *totalisateur* est 9 alors le nombre est négatif.

15 Multiplication

On veut multiplier deux entiers positifs X et Y.
Y est le *multiplieur* écrit avec n chiffres décimaux : $y_{n-1}\, y_{n-2} \ldots\ldots y_2\, y_1\, y_0$

$$X \mathbf{x}\, Y = X \mathbf{x} \sum_{i=0}^{n-1} y_i \mathbf{x}\, 10^i = \sum_{i=0}^{n-1} X \mathbf{x}\, y_i \mathbf{x}\, 10^i$$

On voit qu'il faut faire une somme de n termes, multiplier un nombre X par un chiffre y_i et enfin multiplier par 10^i. Multiplier un nombre par un chiffre consiste à l'additionner autant de fois que la valeur de ce chiffre, c'est à dire tourner la manivelle y_i fois :

$$X \mathbf{x}\, y_i = \sum_{k=1}^{y_i} X$$

Reste à multiplier X par 10^i . C'est facile, il suffit de décaler X de i positions vers la gauche (ou encore accoler i zéros à droite de X).

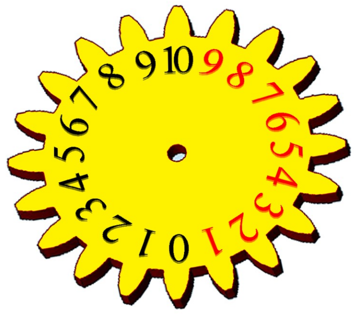
15.1 Multiplication itérative

On initialise le *totalisateur* et le *compteur* de tours à zéro, on pose le *multiplicande* avec les *curseurs* et on pousse l'inverseur sur addition, puis on tourne la manivelle et/ou décale le chariot vers la droite.
L'égalité suivante est vraie en permanence : *totalisateur* = *pose* **x** *compteur*
Donc pour effectuer une multiplication, on va en fait effectuer une suite de multiplications plus simples qui seront toutes correctes. Le résultat est atteint lorsque le compteur affiche la valeur du multiplieur.

15.2 Décalage relatif

Avec l'arithmomètre, on ne sait pas décaler les curseurs de pose, par contre le *produit partiel* est dans le chariot qui se décale. C'est donc lui qui va être décalé, à droite cette fois.
Le décalage est relatif. Décaler le *multiplicande* à gauche par rapport au *produit partiel*, comme on l'apprend à l'école, est équivalent à décaler le *produit* à droite, le *multiplicande* restant fixe.

15.3 Multiplication réduite



La multiplication réduite consiste à échanger une séquence d'additions contre une séquence d'additions/soustractions plus courte.
Par exemple la multiplication par 9999 réduite demande une addition et une soustraction au lieu de 36 additions. Par contre la multiplication par 5555 ne se réduit pas. En moyenne, si les nombres sont longs et les valeurs des chiffres équiprobables, le nombre des opérations se réduit de 50%, ce qui est substantiel.
Nul doute que les utilisateurs de l'arithmomètre connaissaient et utilisaient ce raccourci. Les roues du compteur de l'arithmomètre auraient pu mémoriser le type de l'opération : par exemple addition en noir et soustraction en rouge. Alors la valeur du multiplieur serait le nombre formé des chiffres noirs moins le nombre formé des chiffres rouges. La Olivetti Divisumma 14 possède la multiplication réduite automatique. Les compteurs de certaines machines Facit affichent en rouge le nombre de soustraction et en noir celui des additions.
http://www.aconit.org/histoire/calcul_mecanique/documents/Olivetti-Divisumma-14-1.pdf

16 Division

On se donne un *dividende* et un *diviseur*, entiers positifs. Une division euclidienne consiste à trouver un *quotient* tel que :

$$dividende = diviseur \times quotient + reste \quad \text{avec} \quad 0 \leq reste < diviseur .$$

L'usage veut que le *reste* ait le même signe que le *dividende*, et l'arithmomètre ne représente que des nombres positifs ou nuls. On introduit la notion de *reste partiel* tel que

$$dividende = diviseur \times quotient + reste\ partiel$$

Alors si *quotient* = 0 et *reste partiel* = *dividende* celle égalité est vraie.
On inscrit le *dividende* dans le *totalisateur*, le *diviseur* avec les curseurs, le *quotient* sera donné par les compteurs.
Si l'inverseur est sur soustraction, si on tourne la manivelle et/ou on décale le chariot, cette égalité reste toujours vraie. Reste à réduire le *reste partiel*.

16.1 Division avec restauration

On transfère le *dividende* dans le *totalisateur*, on pose le *diviseur* avec les curseurs, puis en décalant le chariot à droite on aligne le chiffre non nul le plus à gauche du *totalisateur* avec le curseur non nul le plus à gauche.

Puis on itère :

Si *totalisateur* ≥ 0 **alors**
soustraire
Si *totalisateur* < 0 **alors**
1- additionner pour restaurer (on annule la soustraction précédente)
2- décaler le chariot à gauche

L'opération s'arrête quand on ne peut plus décaler le chariot. Cette division demande juste de surveiller le signe du *totalisateur*. Le *totalisateur* est négatif s'il commence par un 9.

16.2 Division sans restauration et division oscillante

La division sans restauration consiste à comparer à la lecture le *totalisateur* et les *curseurs* :

Si *totalisateur* ≥ *curseurs* **alors**
soustraire
Si *totalisateur* < *curseurs* **alors**
décaler le chariot à gauche (le *totalisateur* devient plus grand)

Si on se trompe dans la comparaison, c'est à dire si on fait une soustraction de trop, il suffit de restaurer (§ 16.1) .
La division oscillante semble encore plus simple

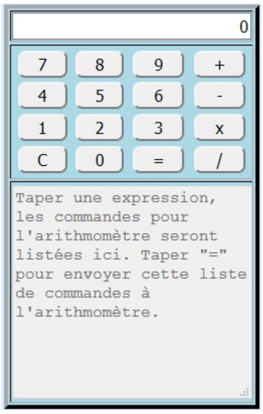
Si *totalisateur* change de signe **alors**
décaler le chariot à gauche (le *totalisateur* devient plus grand)
Si *totalisateur* ≥ 0 **alors**
soustraire
Si *totalisateur* < 0 **alors**
additionner

Cependant le résultat (le quotient) est plus difficile à interpréter, certains compteurs ayant compté les additions, les autres des soustractions, et le *quotient* est le nombre de soustractions moins le nombre d'additions.

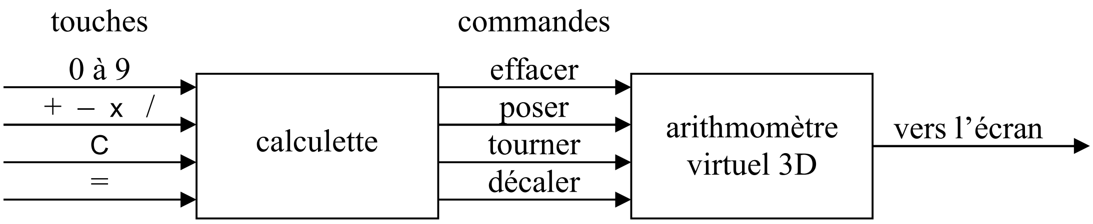
16.3 La division et la virgule

La division introduit un *quotient* fractionnaire, approché par un entier. Si on veut des chiffres après la virgule, il faut poser un dividende décalé. Par exemple 22/7 donne 3 ; 220/7 donne 31 et 2200000/7 donne 314285. On introduit manuellement la virgule : $22/7 \approx 3{,}14285$
Pour obtenir le maximum de chiffres significatifs, il faut décaler le chariot complètement à droite puis poser le *dividende* et le *diviseur* alignés complètement à gauche.

17 Calculette



Comment calculait-on du temps de l'arithmomètre ? Certainement bien lentement. Plus vite sans doute qu'avec un abaque ou avec un crayon, mais beaucoup moins vite qu'avec une calculette contemporaine. Pour s'en rendre compte, on peut faire apparaître dans une fenêtre popup une calculette quatre opérations virtuelle.
Au fur et à mesure que l'on tape une expression arithmétique en cliquant les touches, cette expression est évaluée de gauche à droite, et les commandes correspondantes pour l'arithmomètre sont listées.
Cliquer la touche "=" lance l'exécution de cette liste de commandes, affiche l'expression et le résultat sur la calculette et désactive toutes les touches sauf la touche "C" qui remet la calculette à zéro, mais stoppe l'arithmomètre dans son état.



Cliquer "=" sans entrer une nouvelle expression relance l'exécution de la même liste. Quand l'arithmomètre est actif, on peut se servir des touches du pavé numérique du clavier de l'ordinateur.

17.1 Transferts

Les transferts ne sont pas des opérations arithmétiques. Ils sont parfois nécessaires pour enchaîner des opérations car les supports physiques des opérandes et du résultat dépendent de l'opération exécutée par l'arithmomètre :

Opération	Opérande 1	Opérande 2	Résultat
Addition	totalisateur	pose (curseurs)	totalisateur
Soustraction	totalisateur	pose	totalisateur
Multiplication	pose	compteurs	totalisateur
Division	totalisateur	pose	compteurs

Par exemple pour calculer le volume d'un parallélépipède :
volume = largeur **x** *longueur* **x** *hauteur*,
il faut effectuer deux multiplications raccordées par un transfert :
largeur ⇨ *pose (curseurs)*
longueur ⇨ *compteurs (manivelle)*
totalisateur ⇨ *pose (transfert)*
hauteur ⇨ *compteurs (manivelle)*
Les transferts sont insérés automatiquement par la calculette.
Comme les transferts manuels sont des pertes de temps et des sources potentielles d'erreur de recopie, vers 1920, l'ingénieur allemand Franz Trinks, de la firme Brunsviga, a ajouté le transfert automatique à des machines à manivelle de type Odhner, permettant d'enchaîner des multiplications. Cette innovation s'est ensuite généralisée, jusqu'au "ctrl X" "ctrl V" de votre ordinateur.

18 Racine carrée

Extraire une racine carrée est un exercice non trivial exigeant une certaine agilité en calcul mental.
Pourtant vers 1860 le professeur allemand August Toepler, physicien de renom, a développé pour l'arithmomètre de Thomas un algorithme d'extraction d'une confondante facilité.

D'abord on initialise le *totalisateur* avec le *radicande* multiplié par 5 (demande 5 ou 10 tours de manivelle suivant le nombre de chiffres du *radicande*), et simultanément on décale le chariot à droite de la demi longueur du *radicande*. Puis on pose un 5 avec les curseurs, juste deux positions à droite du chiffre le plus significatif du *totalisateur*, le *curseur courant* est toujours à gauche de ce 5. Puis on itère :

Si *totalisateur* ≥ 0 **alors**

1- soustraire
2- incrémenter le *curseur courant* (à gauche du dernier 5 à droite)

Si *totalisateur* < 0 **alors**

3- additionner (pour restaurer)
4- décaler le chariot à gauche,
5- sur les curseurs permuter le 5 à droite avec le 0 qui suit (50 ⇨ 05)

L'itération prend fin quand on ne peut plus décaler le chariot. La racine est alors dans les *compteurs*, et également, suivie d'un 5, dans les *curseurs*.
L'exemple ci-contre calcule $\sqrt{15705369}$. Le totalisateur est initialisé avec 15705369 x 5 , soit 78526845, *Reste initial*. Examinez la colonne `Curseurs` à droite pour repérer les incrémentations du *curseur courant* ou les permutations de 5 avec le 0 qui suit. La racine vaut 3963 et le reste 0.
Cette liste est produite par l'extracteur de racine carrée invoqué en cliquant « Racine carrée » sur l'arithmomètre 3D.
Le reste final est aussi multiplié par 5. Pour obtenir la valeur du *reste*, le diviser par 2.

```
Reste initial = 78526845
  Reste   Curseurs
  078526 - 005000
  073526 - 015000
  058526 - 025000
  033526 - 035000
  998526 + 035000
  335268 - 030500
  304768 - 031500
  273268 - 032500
  240768 - 033500
  207268 - 034500
  172768 - 035500
  137268 - 036500
  100768 - 037500
  063268 - 038500
  024768 - 039500
  985268 + 039500
  247684 - 039050
  208634 - 039150
  169484 - 039250
  130234 - 039350
  090884 - 039450
  051434 - 039550
  011884 - 039650
  972234 + 039650
  118845 - 039605
  079240 - 039615
  039625 - 039625
  000000 - 039635
  960365 + 039635
Reste final = 0
```

18.1 Automatisation de l'algorithme de Toepler

L'algorithme de Toepler a été automatisé en 1950 par l'ingénieur américain Grant C. Ellerbeck pour la machine Friden SRW, la seule machine à calculer mécanique capable d'extraire automatiquement des racines carrées.
L'algorithme de Toepler a ensuite été utilisé dans les premières calculettes de poche électroniques non scientifiques vers 1973.

18.2 L'extraction de racine carrée et la virgule

Pour augmenter la précision de la racine, il faut ajouter à la droite du *radicande* des paires de 0. $\sqrt{2}$ donne 1 , $\sqrt{200}$ donne 14 , $\sqrt{20000}$ donne 141 , $\sqrt{200\,000\,000}$ donne 14142. On en déduit trivialement que $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$. Attention, cadrer le *radicande* à gauche du totalisateur pour augmenter la précision, comme pour la division, donnerait un résultat erroné.

18.3 Algorithme de Newton-Raphson

Cet algorithme d'extraction de racine carrée était décrit par le grec Héron d'Alexandrie (1er siècle) avant sa généralisation aux fonctions que l'anglais Isaac Newton a publiée en 1711.
La méthode de Newton permet de trouver par itération une racine d'une fonction f(x). On construit la suite (x_n) comme suit :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Si la valeur de départ x_0 est suffisamment proche de la racine cherchée, alors cette itération converge vers la racine de manière quadratique, ce qui signifie grosso modo que le nombre de chiffres corrects obtenus double à chaque itération.
L'application de cette itération à la fonction $f(x) = x^2 - R$, dont $\sqrt{R}$ est une racine, donne

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{R}{x_n}\right) \quad \text{(itération de Héron)}$$

On prend comme *diviseur* initial une racine approchée, peu importe.
Puis on itère :

1- *quotient* = R / *diviseur*
2- *diviseur* = (*diviseur* + *quotient*)/2 (moyenne arithmétique)

On arrête l'itération lorsque la différence (*diviseur* – *quotient*) est suffisamment petite. Alors *quotient* ≈ *diviseur* et *quotient* ≈ R / *quotient*, ou encore R ≈ *quotient* x *quotient*.
La convergence de ces itérations est quadratique.
L'exemple à droite, emprunté à Alain Billerey, est le calcul de $\sqrt{15705369} = 3963$ avec une Olivetti Tetractys 24 de 1956.

```
------------ <*
15705369 ++
15705369 <:
    4000 <:
    3926 <T
    1369 <T

    4000 <+
    3926 <+X
    7926 <:
       2 <:
    3963 <T
         <T

15705369 0+
15705369 <:
    3963 <T
    3963 <T
         <T
```

19 L'arithmomètre, un objet pédagogique ?

L'arithmomètre a un fort intérêt pédagogique pour de multiples raisons

1- C'est une machine curieuse et esthétique, de taille raisonnable
2- Il est entraîné par une manivelle, qu'on peut tourner très lentement pour observer le fonctionnement.
3- Il marche en base dix, système de numération familier.
4- Les seules opérations automatisées sont l'addition et la soustraction, que l'arithmomètre exécute comme les élèves : de droite à gauche
5- Il note la retenue et la reporte plus tard, et on peut voir le report se propager dans la machine.
6- Il ne fait pas tout, la multiplication et la division demandent de bien connaître les algorithmes. Ce sont les mêmes que ceux appris à l'école.
7- Son concepteur, soldat de Napoléon anobli par Napoléon III, fondateur de sociétés d'assurance qui existent encore, est un personnage historique.
8- L'arithmomètre a joué un rôle de premier plan dans l'introduction de machines dans les bureaux

Comme il ne serait pas raisonnable de confier un arithmomètre ancien à des élèves, un arithmomètre virtuel peut le remplacer utilement.

20 Redde Caesari

L'arithmomètre 3D était le sujet d'un stage applicatif de licence Mathématique et Informatique 2015-2016 de l'Université Grenoble Alpes (Bac +3).
Ont participé à ce projet les étudiants Clémence Barbier, Mama Dembele, Julien Dides, Thomas Gerspacher, Julien Girard, Gwendal Le Quellenec, Noah Lee, Corentin Moirant et Mathilde Sapet, sous la direction des professeurs Françoise Jung et Laurent Testard, d'après une idée originale de René Gindre, secrétaire d'ACONIT

Corentin Moirant a réalisé des films sur l'arithmomètre virtuel :
https://www.youtube.com/watch?v=-d3SkPJSaWA&index=1&list=UUQFaozBOfejG99ULCs3xchg
https://www.youtube.com/watch?v=h6JuZxpALb0&index=2&list=UUQFaozBOfejG99ULCs3xchg
https://www.youtube.com/watch?v=rkzsEtM5r_0&index=3&list=UUQFaozBOfejG99ULCs3xchg
https://www.youtube.com/watch?v=NLUfAVuQw4s&index=4&list=UUQFaozBOfejG99ULCs3xchg

Table des Matières