$$\frac{u_i^* - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}[3N_i^n - N_i^{n-1}] = -\frac{\delta p^n}{\delta x_i} + \frac{1}{2\mathrm{Re}}\left(\frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2}\right)(u_i^* + u_i^n) \tag{1}$$

여기서

$$N_i = \frac{\delta(U_j u_i)}{\delta x_j} \tag{2}$$

$N_1$ 과 $N_2$ 를 풀어쓰면

$$N_{1,P} = \frac{\delta(U_1 u_1)}{\delta x} + \frac{\delta(U_2 u_1)}{\delta y} = \frac{U_{1,e}u_{1,e} - U_{1,w}u_{1,w}}{dx_P} + \frac{U_{2,n}u_{1,n} - U_{2,s}u_{1,s}}{dy_P} \tag{3}$$

$$N_{2,P} = \frac{\delta(U_1 u_2)}{\delta x} + \frac{\delta(U_2 u_2)}{\delta y} = \frac{U_{1,e}u_{2,e} - U_{1,w}u_{2,w}}{dx_P} + \frac{U_{2,n}u_{2,n} - U_{2,s}u_{2,s}}{dy_P} \tag{4}$$

여기서

$$u_{i,e} = \frac{u_{i,P}dx_E + u_{i,E}dx_P}{dx_P + dx_E} \tag{5a}$$

$$u_{i,w} = \frac{u_{i,W}dx_P + u_{i,P}dx_W}{dx_W + dx_P} \tag{5b}$$

$$u_{i,n} = \frac{u_{i,P}dy_N + u_{i,N}dy_P}{dy_P + dy_N} \tag{5c}$$

$$u_{i,s} = \frac{u_{i,S}dy_P + u_{i,P}dy_S}{dy_S + dy_P} \tag{5d}$$

이에 따라 $N_i$ 를 구할 수 있다.

이제 식 (1)을 $u_i^*$ 에 대해 정리하자.

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2\mathrm{Re}}\frac{\delta^2}{\delta x^2} - \frac{\Delta t}{2\mathrm{Re}}\frac{\delta^2}{\delta y^2}\right)(u_i^* - u_i^n) = -\frac{\Delta t}{2}(3N_i^n - N_i^{n-1}) - \Delta t\frac{\partial p^n}{\delta x_i} + \frac{\Delta t}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2}\right)u_i^n \tag{6}$$

$u_i^* - u_i^n = \bar{u}_i$ 로 정의하고 위 식의 좌변을 다음과 같이 근사하자.

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2\mathrm{Re}}\frac{\delta^2}{\delta x^2}\right)\left(1 - \frac{\Delta t}{2\mathrm{Re}}\frac{\delta^2}{\delta y^2}\right)\bar{u}_i = -\frac{\Delta t}{2}(3N_i^n - N_i^{n-1}) - \Delta t\frac{\partial p^n}{\delta x_i} + \frac{\Delta t}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2}\right)u_i^n \tag{7}$$

우변을 $\mathrm{RHS}_i$ 라 하고 $[1 - (\Delta t/2\mathrm{Re})(\delta^2/\delta y^2)]\bar{u}_i = C_i$ 라 하면 $C_i$ 에 대한 삼중대각 시스템을 얻는다.

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2\mathrm{Re}}\frac{\delta^2}{\delta x^2}\right)C_i = \mathrm{RHS}_i \tag{8}$$

풀어쓰면

$$-kx_W C_{i,W} + kx_P C_{i,P} - kx_E C_{i,E} = \mathrm{RHS}_{i,P} \tag{9}$$

여기서

$$kx_W = \frac{\Delta t}{2\mathrm{Re}}\frac{1}{(xc_P - xc_W)dx_P}, \quad kx_E = \frac{\Delta t}{2\mathrm{Re}}\frac{1}{(xc_E - xc_P)dx_P}, \quad kx_P = kx_W + kx_E + 1 \tag{10}$$

왼쪽과 오른쪽 경계에서 $u_i$ 가 주어지는 경우 $\bar{u}_i$ 의 경계 조건은 $\bar{u}_i = 0$ 이므로 왼쪽 경계에서는 $C_{i,W} = -C_{i,P}$ 이고 오른쪽 경계에서는 $C_{i,E} = -C_{i,P}$ 이다. 따라서 삼중대각 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} kx_W(1) + kx_P(1) & -kx_E(1) & & & \\ -kx_W(2) & kx_P(2) & -kx_E(2) & & \\ & & \ddots & & \\ & & -kx_W(N_x) & kx_P(N_x) + kx_E(N_x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_i(1,j) \\ C_i(2,j) \\ \vdots \\ C_i(N_x,j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{RHS}_i(1,j) \\ \mathrm{RHS}_i(2,j) \\ \vdots \\ \mathrm{RHS}_i(N_x,j) \end{bmatrix} \tag{11}$$

$C_i$ 를 구했으므로 $\bar{u}_i$ 를 구한다.

$$\left(1 - \frac{\Delta t}{2\mathrm{Re}}\frac{\delta^2}{\delta y^2}\right)\bar{u}_i = C_i \tag{12}$$

또는

$$-ky_S\bar{u}_{i,S} + ky_P\bar{u}_{i,P} - ky_N\bar{u}_{i,N} = C_{i,P} \tag{13}$$

여기서

$$ky_S = \frac{\Delta t}{2\mathrm{Re}}\frac{1}{(yc_P - yc_S)dy_P}, \quad kx_N = \frac{\Delta t}{2\mathrm{Re}}\frac{1}{(yc_N - yc_P)dy_P}, \quad ky_P = ky_W + ky_E + 1 \tag{14}$$

이에 따른 삼중대각 시스템은

$$\begin{bmatrix} ky_S(1) + ky_P(1) & -ky_N(1) & & \\ -ky_S(2) & ky_P(2) & -ky_N(2) & \\ & & \ddots & \\ & & -ky_S(N_y) & ky_P(N_y) + ky_N(N_y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i(i,1) \\ \bar{u}_i(i,2) \\ \vdots \\ \bar{u}_i(i,N_y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_i(i,1) \\ C_i(i,2) \\ \vdots \\ C_i(i,N_y) \end{bmatrix} \tag{15}$$

그 다음 엇갈림 중간 속도를 계산해야 한다.

$$\widetilde{u}_{1,P} = u^*_{1,P} + \Delta t\frac{p^n_E - p^n_W}{xc_E - xc_W} \qquad \widetilde{u}_{2,P} = u^*_{2,P} + \Delta t\frac{p^n_N - p^n_S}{yc_N - yc_S} \tag{16a}$$

$$\widetilde{U}_{1,e} = \frac{\widetilde{u}_{1,P}dx_E + \widetilde{u}_{1,E}dx_P}{dx_P + dx_E} \qquad \widetilde{U}_{2,n} = \frac{\widetilde{u}_{2,P}dy_N + \widetilde{u}_{2,N}dy_P}{dy_P + dy_N} \tag{16b}$$

$$U^*_{1,e} = \widetilde{U}_{1,e} - \Delta t\frac{p^n_E - p^n_P}{xc_E - xc_P} \qquad U^*_{2,n} = \widetilde{U}_{2,n} - \Delta t\frac{p^n_N - p^n_P}{yc_N - yc_P} \tag{16c}$$

이로부터 압력 수정을 구할 수 있다. 압력 수정은 푸아송 방정식의 해로 표현된다.

$$\left(\frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2}\right)p' = \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\delta U^*_1}{\delta x} + \frac{\delta U^*_2}{\delta y}\right) \tag{17}$$

또는

$$\begin{aligned} kx_W p'_W + kx_E p'_E + ky_S p'_S + ky_N p'_N - (kx_W + kx_E + ky_S + ky_N)p'_P \\ = \frac{1}{2\mathrm{Re}}\left(\frac{U^*_{1,e} - U^*_{1,w}}{dx_P} + \frac{U^*_{2,n} - U^*_{2,s}}{dy_P}\right) \equiv Q_P \end{aligned} \tag{18}$$

최종적으로 압력과 속도 업데이트는

$$p^{n+1}_P = p^n_P + p'_P \tag{19a}$$

$$u^{n+1}_{1,P} = u^*_{1,P} - \Delta t\frac{p'_E - p'_W}{xc_E - xc_W} \qquad u^{n+1}_{2,P} = u^*_{2,P} - \Delta t\frac{p'_N - p'_S}{yc_N - yc_S} \tag{19b}$$

$$U^{n+1}_{1,e} = U^*_{1,e} - \Delta t\frac{p'_E - p'_P}{xc_E - xc_P} \qquad U^{n+1}_{2,n} = U^*_{2,n} - \Delta t\frac{p'_N - p'_P}{yc_N - yc_P} \tag{19c}$$