柯西不等式的基本與延伸

The basics and extensions of the Cauchy-Schwarz inequality

作者: 西松高中三年和班 3 號李奇勳

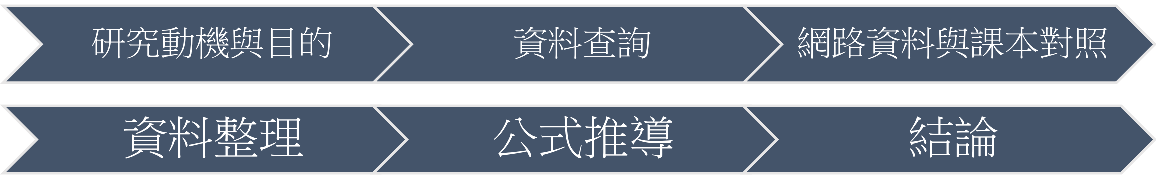
目錄

壹、 前言

一、研究動機與目的

高二上在學平面向量與柯西不等式時，因為我常常搞不懂柯西的概念以及用法，導致我每次遇到柯西相關的題目都不太會寫，這也使得我下定決心要學會如何去運用柯西不等式還有理解柯西背後的概念，此外我也想知道柯西不等式是否只侷限在二次方，而柯西不等式也對向量計算發揮重要的功用，透過文獻以及一些網路上的證明，發現像是廣義柯西不等式對於高中生不太容易去理解，故本研究旨在歸納柯西的一些進階變形。

二、 研究流程與方法



貳、 文獻探討

二、 兩非零空間向量柯西不等式的型態

(一) 設 $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$．$\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ 為座標空間中兩平面向量，其夾角為 θ，

$0° \le \theta \le 180°$，因為$|cos\theta| \le 1$， 故$|\vec{a} \bullet \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||cos\theta| \le |\vec{a}||\vec{b}|$ ，得$|\vec{a} \bullet \vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$

，等號成立於$|cos\theta| = 1$

(二)若 $\vec{a}$， $\vec{b}$ 兩向量用座標表示，式即

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

兩邊平方得

$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$，且等號成立於

$(a_1, a_2, a_3) = t(b_1, b_2, b_3)$時，若 b_1, b_2, b_3 皆不為 0 時，也可以寫成當 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

時等號成立，此外，當 $\vec{a}$ 或 $\vec{b}$為$\vec{0}$ 時，柯西不等式等號自然成立。

參、 正文

一、以一般不等式 f(x)的形式推論$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$和$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2$ 的關係

$$f(x)=(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+(a_3x+b_3)^2+\cdots+(a_nx+b_n)^2$$

$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2)x^2+2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geq 0$$

$$\therefore D\leq 0 \Rightarrow 4(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2-4(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\leq 0$$

$$\Rightarrow (a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\cdots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

上述 f(X)因為是平方相加因此大於等於 0，而若其判別式小於等於 0，則可以得知$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2$

二、向量

(一)平面向量

平面向量

$\vec{p}:(a_1,a_2)$

$\vec{q}:(b_1,b_2)$

$|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2\geq(\vec{p}\cdot\vec{q})^2$

$\Rightarrow (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2$

等式成立

$\Rightarrow \frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$

假設 $\vec{p}\,(a_1,a_2)$及 $\vec{q}(b_1,b_2)$為兩相異平面向量，由向量內積可以得知$(\vec{p}\bullet\vec{q})^2=|\vec{p}|^2\,|\vec{q}|^2\cos^2\theta\leq|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2$，而當$\cos^2\theta$=1 時可以得到不等式 $(\vec{p}\bullet\vec{q})^2\leq|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2$ 再將 $\vec{p}$ 及 $\vec{q}$ 代入，可以得到$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2$ ，等式成立於兩向量平行時，可得 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$

(二)空間向量

空間向量

$\vec{p}=(a_1,a_2,a_3)$

$\vec{q}=(b_1,b_2,b_3)$

$$\Rightarrow (a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

$$\geq(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2)$$

等式成立 $\Rightarrow \frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}$

$$\left(\begin{array}{l} \because \vec{p}=(a_1,a_2,a_3\cdots,a_n) \\ \vec{q}=(b_1,b_2,b_3\cdots,b_n) \\ \frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\cdots=\frac{b_n}{a_n} \end{array}\right)$$

假設 $\vec{p}\,(a_1,a_2,a_3)$及 $\vec{q}(b_1,b_2,b_3)$ 為兩相異空間向量，若將兩者內積則可以得到$(\vec{p}\bullet\vec{q})^2$

$=|\vec{p}|^2\,|\vec{q}|^2\cos^2\theta\leq|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2$ 接著和平面向量一樣將 $\vec{p}$ 及 $\vec{q}$ 代入，可以得到

$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$ ，而等式成立在$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$ 時，而同理可以推知

若 $\vec{p}\,(a_1,a_2,a_3....a_n)$及 $\vec{q}(b_1,b_2,b_3...b_n)$也可以得到相似的結論

底下圖片亦為空間向量等式成立之時機

$(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)\geq(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2$

等號成立於 $x_1y_2=x_2y_1$ 且 $x_2y_3=x_3y_2$ 且 $x_1y_3=x_3y_1$時

三、柯西不等式

(一)兩項柯西不等式(以向量內積的方式推論出柯西不等式最一般的形式)

柯西不等式

$\vec{p}\cdot\vec{q} = |\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta \Rightarrow (\vec{p}\cdot\vec{q})^2 = |\vec{p}|^2|\vec{q}|^2\cos^2\theta \le |\vec{p}|^2|\vec{q}|^2$

Cauchy-Schwarz Inequality

$|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 \ge (\vec{p}\cdot\vec{q})^2$ 等式成立 $\Rightarrow \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \pm 1 \Rightarrow \theta = 0^\circ$ or 180°

$\Downarrow$

分量對應成比例 $\Rightarrow \vec{p} \parallel \vec{q}$

向量內積出來可以以$(\vec{p}\bullet\vec{q})^2 = |\vec{p}|^2\,|\vec{q}|^2\cos^2\theta \le |\vec{p}|^2|\vec{q}|^2$ 表示，而$\cos^2\theta$最大值可為 1，因此透過化簡可以推得 $|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2 \ge (\vec{p}\bullet\vec{q})^2$ 為柯西不等式的基本型態，而等式成立於$\cos^2\theta$為 1 時，此時$\cos\theta$為正負 1，同時 $\vec{p}$ 也平行 $\vec{q}$

(二)三項柯西不等式

二次方:

$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)(c_1^2+c_2^2) \ge (a_1b_1c_1+a_2b_2c_2)^2$ → 底下有證明

$\rightarrow (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)(c_1^2+c_2^2+\cdots+c_n^2) \ge (a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\cdots+a_nb_nc_n)^2$

$\rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right) \ge \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_ic_i\right)^2$

$\ge \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)$　　$(a_ib_ia_jb_j \ge 0,$ $\forall 1 \le i, j \le n)$

$\ge \left(\sum_{i=1}^{n} (a_ib_ic_i)^2\right)$　　$(\forall a_ib_ic_i \in K^+)$

$\ge \sum_{i=1}^{n} (a_i)^2(b_i)^2(c_i)^2$

$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 = (a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+\cdots+a_n^2b_n^2)+2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)$

$\ge (a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+\cdots+a_n^2b_n^2)$

若有三相異平面向量$\vec{p}$ (a_1,a_2)及 $\vec{q}(b_1,b_2)$及 $\vec{r}(c_1^2,c_2^2)$ 則可以利用柯西不等式推得$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$

$(c_1^2+c_2^2)\geq(a_1 b_1 c_1+a_2 b_2 c_2)^2$ 並且同理若 $\vec{p}\,(a_1,a_2,a_3\ldots a_n)$及 $\vec{q}\,(b_1,b_2,b_3\ldots b_n)$及$\vec{r}\,(c_1,c_2,c_3\ldots c_n)$ 也可以

得到相似的結論(底下為證明)

1. $(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)(c_1^2+c_2^2)\geq(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2)^2$

$$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)(c_1^2+c_2^2)\geq(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2)^2$$

<pf>

已知 $(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2$

$$=a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+2a_1b_1a_2b_2$$

without loss of generality

$\Rightarrow a_1 . a_2 \cdots a_n,\ b_1 . b_2 \cdots b_n,\ c_1 . c_2 \cdots c_n \in R^+$

$$\rightarrow \underbrace{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)}(c_1^2+c_2^2)\geq\underbrace{(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2)}(c_1^2+c_2^2)$$

$$\xrightarrow{\text{Cauchy-Schwarz Inequality}}(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2)(c_1^2+c_2^2)\geq(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2)^2$$

2. $(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)(c_1^2+c_2^2+\ldots+c_n^2)\geq(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\ldots+a_nb_nc_n)^2$

由 $(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)(c_1^2+c_2^2)\geq(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2)^2$

$$\Rightarrow(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)(c_1^2+c_2^2+\cdots+c_n^2)\geq(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\cdots+a_nb_nc_n)^2$$

四、廣義柯西不等式

(一)通式

廣義柯西不等式

$m.n\geq2$

$$(a_{11}^m+a_{12}^m+\cdots+a_{1n}^m)(a_{21}^m+a_{22}^m+\cdots+a_{2n}^m)\cdots(a_{m1}^m+a_{m2}^m+\cdots+a_{mn}^m)$$

$$\geq(a_{11}a_{21}a_{31}\cdots a_{m1}+\cdots+a_{1n}a_{2n}a_{3n}\cdots a_{mn})^m$$

(二)三次方廣義柯西不等式

三次: $(a_1^3+a_2^3)(b_1^3+b_2^3)(c_1^3+c_2^3) \geq (a_1b_1c_1+a_2b_2c_2)^3$

$$(a_1^3+a_2^3+a_3^3+\cdots+a_n^3)(b_1^3+b_2^3+b_3^3+\cdots+b_n^3)(c_1^3+c_2^3+c_3^3+\cdots+c_n^3) \geq (a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+\cdots+a_nb_nc_n)^3$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^3\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_ic_i\right)^3$$

$$\frac{\dfrac{a_1^3}{a_1^3+a_2^3+a_3^3+\cdots+a_n^3}+\dfrac{b_1^3}{b_1^3+b_2^3+\cdots+b_n^3}+\dfrac{c_1^3}{c_1^3+c_2^3+\cdots+c_n^3}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a_1^3b_1^3c_1^3}{\sum_{i=1}^{n}a_i^3\sum_{i=1}^{n}b_i^3\sum_{i=1}^{n}c_i^3}} = \frac{a_1b_1c_1}{\sqrt[3]{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n}c_i^3\right)}}$$

$$\frac{\dfrac{a_2^3}{\sum_{i=1}^{n}a_i^3}+\dfrac{b_2^3}{\sum_{i=1}^{n}b_i^3}+\dfrac{c_2^3}{\sum_{i=1}^{n}c_i^3}}{3} \geq \frac{a_2b_2c_2}{\sqrt[3]{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n}c_i^3\right)}} \quad —①$$

—②

$$\frac{\dfrac{a_n^3}{\sum_{i=1}^{n}a_i^3}+\dfrac{b_n^3}{\sum_{i=1}^{n}b_i^3}+\dfrac{c_n^3}{\sum_{i=1}^{n}c_i^3}}{3} \geq \frac{a_nb_nc_n}{\sqrt[3]{\sum a_i^3\sum b_i^3\sum c_i^3}} \quad —ⓝ$$

+)

①+②+⋯+ⓝ

$$1 \geq \frac{\sum_{i=1}^{n}(a_ib_ic_i)}{\sqrt[3]{\left(\sum a_i^3\right)\left(\sum b_i^3\right)\left(\sum c_i^3\right)}} \Rightarrow \sqrt[3]{\sum a_i^3\sum b_i^3\sum c_i^3} \geq \left(\sum a_ib_ic_i\right)$$

三方 $\Rightarrow \left(\sum a_i^3\right)\left(\sum b_i^3\right)\left(\sum c_i^3\right) \geq \left(\sum a_ib_ic_i\right)^3$

$(\text{if } a_i, b_i, c_i \in R^+ \quad \forall\, 1 \leq i \leq n)$

在上圖中，我將原本三項柯西不等式改成了三次方(底下將附上等式能成立的證明)，除了原本的

兩項$(a_1^3+a_2^3)(b_1^3+b_2^3)(c_1^3+c_2^3) \geq (a_1b_1c_1+a_2b_2c_2)^3$ 我在其底下用算幾不等式以及將 1 到 n

代入$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^3\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i\right)^3$ 並將其相加，得出了若a_i , b_i , c_i 屬於正實數則 $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^3\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i\right)^3$

1.三次方廣義柯西不等式等號成立條件

等式成立條件

$$\frac{a_1^3}{a_1^3+a_2^3}=\frac{b_1^3}{b_1^3+b_2^3}=\frac{c_1^3}{c_1^3+c_2^3}$$

$$\Rightarrow \frac{a_k^3}{a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3}=\frac{b_k^3}{b_1^3+b_2^3+\cdots+b_n^3}=\frac{c_k^3}{c_1^3+c_2^3+\cdots+c_n^3}$$

$$(\forall k=1,2,3,\ldots,n)$$

2.三次方廣義柯西不等式 $(a_1^3+a_2^3)(b_1^3+b_2^3)(c_1^3+c_2^3)\geq(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2)^3$ 證明

$$(a_1^3+a_2^3)(b_1^3+b_2^3)(c_1^3+c_2^3)\geq(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2)^3$$

<pf>

$$a_1^3+a_2^3=A$$
$$b_1^3+b_2^3=B$$
$$c_1^3+c_2^3=C$$

$$\frac{a_1^3}{A}+\frac{b_1^3}{B}+\frac{c_1^3}{C}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a_1^3b_1^3c_1^3}{ABC}}=3\cdot\frac{a_1b_1c_1}{\sqrt[3]{ABC}}$$ <算幾不等式>

$$+)\quad \frac{a_2^3}{A}+\frac{b_2^3}{B}+\frac{c_2^3}{C}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a_2^3b_2^3c_2^3}{ABC}}=3\cdot\frac{a_2b_2c_2}{\sqrt[3]{ABC}}$$

$$\frac{a_1^3+a_2^3}{A}+\frac{b_1^3+b_2^3}{B}+\frac{c_1^3+c_2^3}{C}\geq 3\cdot\frac{a_1b_1c_1+a_2b_2c_2}{\sqrt[3]{ABC}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{ABC}\left(\frac{a_1^3+a_2^3}{A}+\frac{b_1^3+b_2^3}{B}+\frac{c_1^3+c_2^3}{C}\right)\geq 3(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2)$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{ABC}\left(\cancelto{1}{\frac{a_1^3+a_2^3}{a_1^3+a_2^3}}+\cancelto{1}{\frac{b_1^3+b_2^3}{b_1^3+b_2^3}}+\cancelto{1}{\frac{c_1^3+c_2^3}{(c_1^3+c_2^3)}}\right)\geq 3(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2)$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{ABC}\right)^3\geq(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2)^3$$

$$\Rightarrow ABC\geq(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2)^3\rightarrow(a_1^3+a_2^3)(b_1^3+b_2^3)(c_1^3+c_2^3)\geq(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2)^3$$

在上面我以三項的算幾不等式以及將其相加來證明$(a_1^3+a_2^3)(b_1^3+b_2^3)(c_1^3+c_2^3)\geq(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2)^3$

(三)四次方廣義柯西不等式

四次

$$\Rightarrow (a_1^4+a_2^4+\dots+a_n^4)(b_1^4+b_2^4+\dots+b_n^4)(c_1^4+c_2^4+\dots+c_n^4)(d_1^4+d_2^4+\dots+d_n^4)$$

(終極版柯西) $\geq (a_1b_1c_1d_1+a_2b_2c_2d_2+\dots+a_nb_nc_nd_n)^4$

同理，若將四次方代入廣義柯西不等式的通式可以得出以上的式子

$(a_1^4+a_2^4+\dots+a_n^4)(b_1^4+b_2^4+\dots+b_n^4)(c_1^4+c_2^4+\dots+c_n^4)(d_1^4+d_2^4+\dots+d_n^4) \geq (a_1b_1c_1d_1+a_2b_2c_2d_2+\dots+a_nb_nc_nd_n)^4$

五、廣義柯西不等式的應用及例題

(一)一般(兩個向量)兩次柯西不等式

一般柯西不等式之應用例題

求 $\frac{9}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}$ 之最小值=? (設 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

令 $\vec{a}\left(\frac{3}{\sin\theta}, \frac{1}{\cos\theta}\right)$

$\vec{b}(\sin\theta, \cos\theta)$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \geq (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{9}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)(\sin^2\theta+\cos^2\theta) \geq \left(\frac{3}{\sin\theta}\cdot\sin\theta+\frac{1}{\cos\theta}\cdot\cos\theta\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{9}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}\right) \geq 16$$

在這裡我假設 $\vec{a}(\frac{3}{\sin\theta},\frac{1}{\cos\theta})$, $\vec{b}$ $(\sin\theta, \cos\theta)$ ，接著將其代入內積得出的柯西不等式$(\vec{\boldsymbol{a}}\bullet\vec{\boldsymbol{b}})^2\leq$ $|\vec{\boldsymbol{a}}|^2|\vec{\boldsymbol{b}}|^2$ 可以算出最小值為 16

等式成立時 $\Rightarrow \dfrac{\frac{3}{\sin\theta}}{\sin\theta} = \dfrac{\frac{1}{\cos\theta}}{\cos\theta} \Rightarrow \dfrac{3}{\sin^2\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow \sin^2\theta = 3\cos^2\theta$

又∵ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{4}$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\sin^2\theta = \frac{3}{4}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

而等式成立於兩向量平行時，也就是 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ ，再各自代入便可以得出 $\sin\theta$ ， $\cos\theta$ 的值

(二)一般(三個向量)三次廣義柯西不等式的應用

解法一:一次微分等於 0 求極值

求 $\frac{64}{\sin\theta} + \frac{8}{\cos\theta}$ 最小值=? (設 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

Sol1:

令 $t = \tan\frac{\theta}{2}$, $t \in R$

$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$f(t) = \frac{64(1+t^2)}{2t} + \frac{8(1+t^2)}{1-t^2} = 32\frac{1}{t} + 32t + 8\left(-1 + \frac{2}{1-t^2}\right)$$

$$= 32t^{-1} + 32t - 8 + 16(1-t^2)^{-1}$$

$\Rightarrow f'(t) = -32t^{-2} + 32 - 16(1-t^2)^{-2}(-2t) = 0$

$\Rightarrow \frac{-32}{t^2} + 32 + \frac{32t}{(1-t^2)^2} = 0$

$\Rightarrow \frac{t}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{t^2}$

$\Rightarrow (1-t^2)^3 = t^3$

$\Rightarrow (1-t^2-t)\left[(1-t^2)^2 + t^2 - (1-t^2)t\right] = 0$

$\Rightarrow (1-t^2-t)\underbrace{\left[(1-t^2)(1-t^2-t) + t^2\right]}_{\text{恆正}} = 0$

$\Rightarrow (1-t^2-t) = 0$

$\Rightarrow t^2 + t - 1 = 0$

$\Rightarrow t = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ (取正) $\Rightarrow \tan\frac{\theta}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 又 $\tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$

$$\tan\theta = \frac{-1+\sqrt{5}}{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{\frac{-2+2\sqrt{5}}{4}} = 2 \#$$

因為高三恰好學習了微積分的基本運算，其中我尤其記得在學習微分時老師提到一次微分等於 0 可以求極值，而我也因此嘗試利用假設法將原本題目的式子變為只有一種未知數 t，這裡的 t 為 $tan\frac{\theta}{2}$ ，接下來我利用以前所學的三角函數萬能公式將 $\sin\theta$ ， $\cos\theta$ 代換為和 t 相關的樣子並代回原式再進行一次微分，而底下將其化簡至等號兩側為三次方接著由於$[(1-t^2)(1-t^2-t)+t^2]$的位置為恆正(公式 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$,而$(a^2+ab+b^2)=$ $(a+\frac{1}{2}b)^{2}+\frac{3}{4}b^2)$，得出 t 之後再用 $\boldsymbol{tan\,\theta=\frac{2t}{1-t^2}}$ 計算便可以算出$\tan\theta=2$

解法二:三次方廣義柯西不等式

Sol 2:

$$(\sin\theta+\cos\theta)\left(\frac{64}{\sin\theta}+\frac{8}{\cos\theta}\right)\geq(\sqrt{64}+\sqrt{8})^2$$

$$\Rightarrow(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\left(\frac{64}{\sin\theta}+\frac{8}{\cos\theta}\right)\left(\frac{64}{\sin\theta}+\frac{8}{\cos\theta}\right)=\left[(\sin^{\frac{2}{3}}\theta)^3+(\cos^{\frac{2}{3}}\theta)^3\right]\left[\left(\frac{4}{\sqrt[3]{\sin\theta}}\right)^3+\left(\frac{2}{\sqrt[3]{\cos\theta}}\right)^3\right]\left[\left(\frac{4}{\sqrt[3]{\sin\theta}}\right)^3+\left(\frac{2}{\sqrt[3]{\cos\theta}}\right)^3\right]$$

$$\geq\left(\sqrt[3]{\sin^2\theta}\times\frac{4}{\sqrt[3]{\sin\theta}}\times\frac{4}{\sqrt[3]{\sin\theta}}+\sqrt[3]{\cos^2\theta}\times\frac{2}{\sqrt[3]{\cos\theta}}\times\frac{2}{\sqrt[3]{\cos\theta}}\right)^3$$

$$\geq(4^2+2^2)^3=20^3$$

$$\Rightarrow\frac{64}{\sin\theta}+\frac{8}{\cos\theta}\geq20^{\frac{2}{3}}\Rightarrow\min=20^{\frac{2}{3}}$$ ※

由上面可以得知如果利用法一，也就是微積分的方法不僅要花更多的時間，且相對比較麻煩，此外也因為一般兩次方的柯西不等式解不了，因此在法二我用三次方廣義柯西不等式來解，我先是假設 $\vec{a}\,(\sqrt[3]{sin^2\,\theta},\sqrt[3]{\cos^2\theta})$及 $\vec{b}(\frac{4}{\sqrt[3]{sin^2\,\theta}},\frac{2}{\sqrt[3]{\cos^2\theta}})$及$\vec{c}(\frac{4}{\sqrt[3]{sin^2\,\theta}},\frac{2}{\sqrt[3]{\cos^2\theta}})$ 然後將其帶入$(a_1^3+a_2^3)(b_1^3+b_2^3)(c_1^3+c_2^3)\geq(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2)^3$ 得出會大於等於 $20^{\frac{2}{3}}$

等式成立時：$\left(\frac{a_1^3}{a_2^3}=\frac{b_1^3}{b_2^3}=\frac{c_1^3}{c_2^3}\right)$

①

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\frac{64}{\sin\theta}}{\frac{64}{\sin\theta}+\frac{8}{\cos\theta}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\frac{64}{\sin\theta}+\frac{8}{\cos\theta}}{\frac{64}{\sin\theta}}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{\tan^2\theta}=1+\frac{8\sin\theta}{64\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{1}{8}\tan\theta$$

$$\Rightarrow \tan^3\theta=8$$

$$\Rightarrow \tan\theta=2$$

②

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\frac{8}{\cos\theta}}{\frac{64}{\sin\theta}+\frac{8}{\cos\theta}}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\frac{64}{\sin\theta}+\frac{8}{\cos\theta}}{\frac{8}{\cos\theta}}$$

$$\Rightarrow 1+\tan^2\theta=1+\frac{64\cos\theta}{8\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \tan^2\theta=8\cdot\frac{1}{\tan\theta}$$

$$\Rightarrow \tan^3\theta=8$$

$$\Rightarrow \tan\theta=2$$

而此為等號成立時的情形，得出$tan\,\theta=2$ ，與法一得到的結果相同

(三)五個向量的三次廣義柯西不等式

設 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，求 $\frac{4}{\sin^{\frac{1}{2}}\theta}+\frac{2}{\cos^{\frac{1}{2}}\theta}$ 的最小值？

$$\Rightarrow \left[\left(\sqrt[3]{\frac{4}{\sin^{\frac12}\theta}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{\frac{2}{\cos^{\frac12}\theta}}\right)^3\right]^4\left[\left(\sqrt[3]{\sin^2\theta}\right)^3+\left(\sqrt[3]{\cos^2\theta}\right)^3\right]\geq\left[\left(\sqrt[3]{\frac{4}{\sin^{\frac12}\theta}}\right)^4\cdot\left(\sqrt[3]{\sin^2\theta}\right)+\left(\sqrt[3]{\frac{2}{\cos^{\frac12}\theta}}\right)^4\cdot\sqrt[3]{\cos^2\theta}\right]^3$$

$$=\left(4^{\frac43}+2^{\frac43}\right)^3$$

$$\therefore \frac{4}{\sin^{\frac12}\theta}+\frac{2}{\cos^{\frac12}\theta}\text{ 的 min}=\left(4^{\frac43}+2^{\frac43}\right)^{\frac34}$$

在這裡為了把次方消到 0，我用了五個向量$\vec{a}(\sqrt[3]{\frac{4}{\sin^{\frac12}\theta}}$，$\sqrt[3]{\frac{2}{cos^{\frac12}\theta}}$)，$\vec{b}(\sqrt[3]{\frac{4}{\sin^{\frac12}\theta}}$，$\sqrt[3]{\frac{2}{cos^{\frac12}\theta}}$),$\vec{c}(\sqrt[3]{\frac{4}{\sin^{\frac12}\theta}}$，$\sqrt[3]{\frac{2}{cos^{\frac12}\theta}}$) ,$\vec{d}$ ($\sqrt[3]{\frac{4}{\sin^{\frac12}\theta}}$，$\sqrt[3]{\frac{2}{cos^{\frac12}\theta}}$) ,$\vec{e}(\sqrt[3]{sin^2\theta}$,$\sqrt[3]{cos^2\theta}$)，因為 $\frac{-1}{2}$*4+2*1=0，接下來我將其代入

$(a_1^3+a_2^3)(b_1^3+b_2^3)(c_1^3+c_2^3)(d_1^3+d_2^3)(e_1^3+e_2^3)\geq(a_1b_1c_1d_1e_1+a_2b_2c_2d_2e_2)^3$ 得出其最小值為

$\left(4^{\frac{4}{3}}+2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{4}{3}}$

而因為等號成立於

$$\frac{a_1^3}{a_1^3+a_2^3}=\frac{b_1^3}{b_1^3+b_2^3}=\frac{c_1^3}{c_1^3+c_2^3}=\frac{d_1^3}{d_1^3+d_2^3}=\frac{e_1^3}{e_1^3+e_2^3}$$

(分子若放第二項也成立)

$$\text{等式成立時：}\left(\frac{a_1^3}{a_2^3}=\frac{b_1^3}{b_2^3}=\frac{c_1^3}{c_2^3}\right)$$

再將 $a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2,d_1,d_2,e_1,e_2$ 代入便可以推出下列式子

$$\text{等號成立時} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{4}{\sin^{\frac{2}{3}}\theta}}:\sqrt[3]{\frac{2}{\cos^{\frac{2}{3}}\theta}}=\sqrt[3]{\sin^2\theta}:\sqrt[3]{\cos^2\theta}$$

$$\text{即} \Rightarrow \sin\theta:\cos\theta=\sqrt[3]{16}:\sqrt[3]{4}$$

肆、 研究分析與結論

由以上的分析與證明可以得到以下幾個結論，首先若是要求兩平面向量抑或是兩空間向量的最小值，可以利用基本的柯西不等式，也就是通過向量內積得出的 $|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2\geq(\vec{p}\cdot\vec{q})^2$ ；而若是需要用到兩次方以上和兩項以上時，則可以使用廣義柯西不等式

$(a_{11}^m+a_{12}^m+\ldots+a_{1n}^m)(a_{21}^m+a_{22}^m+\ldots+a_{2n}^m)\ldots(a_{m1}^m+a_{m2}^m+\ldots+a_{mn}^m)$

$\geq(a_{11}a_{21}a_{31}\ldots a_{m1}+a_{12}a_{22}a_{32}\ldots a_{m2}+\ldots+a_{1n}a_{2n}a_{3n}\ldots a_{mn})^m$ 再將所需要的次方代入，移項過後便可以得出需要的最小值抑或是最大值

伍、 學習收穫

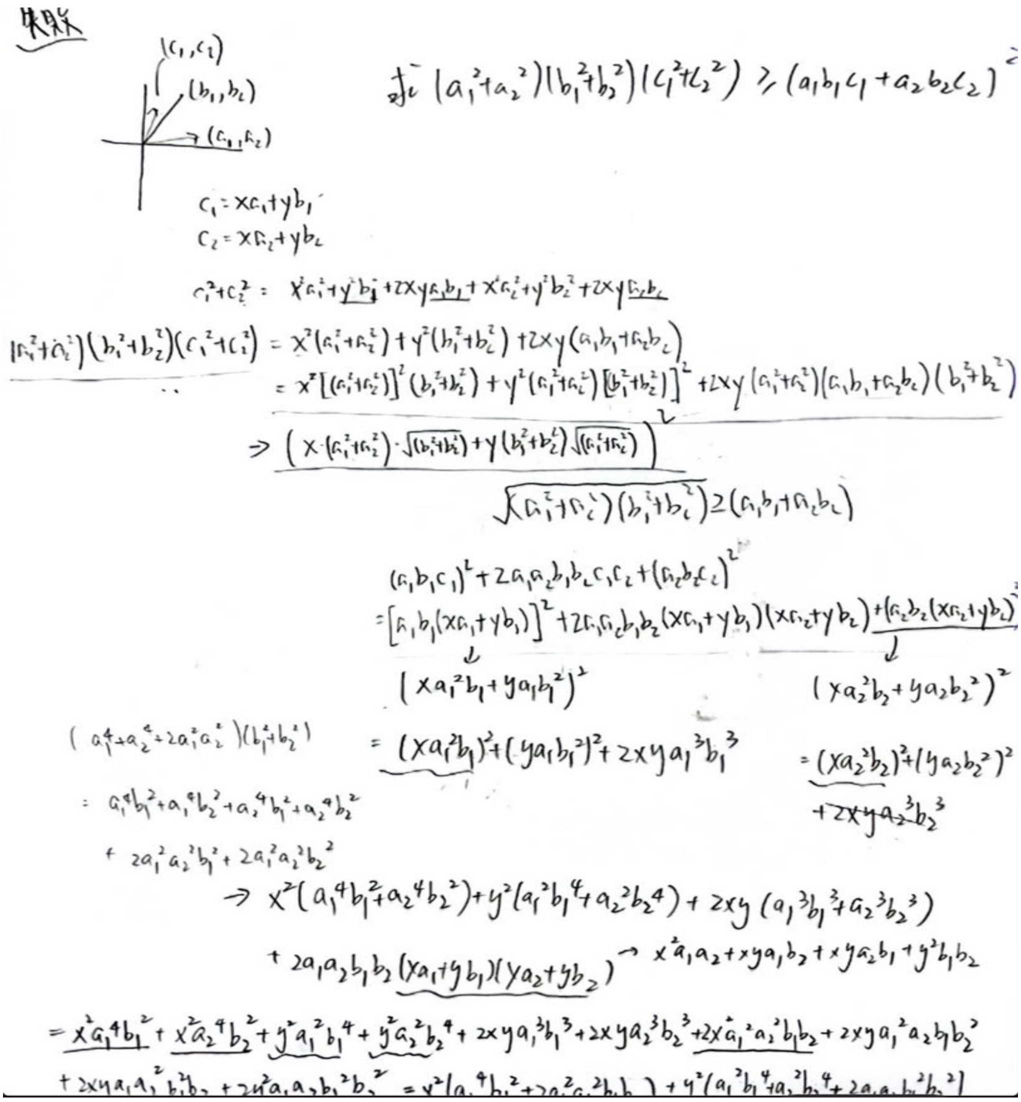
由於這是我第一次獨自撰寫小論文，在完成這份報告中我遇到了許多困難同時也學習到了許多以往我不曾注意到的事情。首先，在公式的證明上我遇到了許多的阻礙，我先是發現公式的證明比我想像中的困難上許多，我原本以為的方法實際上是錯誤的，這也使得我嘗試去仔細地翻閱課本參考書上的證明以及例題，結果出乎意料的我從課本上的基本證明獲得了靈感，我才發覺凡事應該要好好注意周遭的事物，不要放過任何細節，因為或許會發現身邊不常注意到的事物才是解決問題的關

鍵，而除了學術上得到的收穫，我也學到了做事情要抱持的嚴謹態度，在完成第一次的證明後我再次從頭檢查列式，而也正是透過這次的檢查我才驚覺我空間向量的式子寫錯了，原本該放二次方的位置我竟然不注意將其寫成三次方，另外，我也學到了以往我所不具具的勇氣-那便是不畏懼問問題的態度，過去的我總是擔心問問題太沒有水準而被他人嘲笑，這導致了我很少向別人請教，因此我只能常常透過書籍或是自己利用網路查找問題的解答，但這次報告由於我有太多的地方看不懂、不理解、沒學過，迫使了我頻繁的向師長以及同學討教，而我也利用此次的機會克服了心裡的那道坎，我發覺到詢問他人不只能收獲到問題的解答，也能得到他們對事情的見解與看法，學到看事情的不同面向，可以得到問題更深處層面的知識，而這也大大改變了我過去對事情的理解。

陸、 心得與省思

在推導的過程中，原本對於$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)(c_1^2+c_2^2)\geq(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2)^2$ 我想說可以用爆開來完成證明，但事實上當我用向量的方式將左右式子爆開發現雖然確實是左邊較大，但是卻不等於，而對於其他的方法我也沒有什麼頭緒，這也導致我想了將近一個禮拜該用甚麼方法才能將其證出，後來我決定回頭翻閱課本是否有證明來激發靈感，好在我最後透過課本中教到基本柯西中的$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geq(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2)$ 我得到了提示，我因此對於一開始不先將身邊的書籍仔細翻閱感到十分後悔，如果將來還有機會進行研究或是探討學術相關的議題，我會先好好查閱身邊找的到的相關書籍，妥善利用身邊的資源來協助我進行探討，此外在廣義柯西不等式的推證時，我花了很多時間思考該如何排版才能將算幾不等式那部分更好的呈現出來，現在回想起來我認為所花的時間是必要的，因為正是因為當時的持續不懈才能得出那面的分明架構，我以直式的形式來呈現三次方的柯西不等式證明，在觀感上一目瞭然，結構清晰，而在繁雜處我也以文字相輔在式子旁，補充對式子的說明。而對比之下，在內容之間的連貫性我認為我應該改進，在第一次的檢查時我發覺很多的部分我只是將算式寫上去但內容卻與上一段沒有關聯，這導致了內容閱讀上的不順暢、不連

貫，因此為了防止同樣事情發生，我認為在以後的報告中我應該先列好大致上的架構並且隨時檢查段落的連貫性。



在這裡我附上了原本想求證$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)(c_1^2+c_2^2)\geq(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2)^2$ 時，我打算用假設 $c_1=xa_1+yb_1$　$c_2=xa_2+yb_2$ 接下來將其代入原式中看是否能證明$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)(c_1^2+c_2^2)\geq(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2)^2$ 而我雖然有將其爆開並且得出不等式左邊確實相較於右邊來的大，但我實際上想要求出的結果是相等，畢竟只證明左邊較大仍然不知道等號成立時的狀況，我當時只好停下來思考三項柯西不等式該如何證明，而如同上文所提到的，我再次仔細翻閱課本上的內容，嘗試著找出一些靈感，而我也成功地將課本上的證明進行延伸最終以簡易的方式先證明$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2$再將 c_1 及 c_2 代入推得新不等式$(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)(c_1^2+c_2^2)\geq(a_1b_1c_1+a_2b_2c_2)^2$

柒、 參考文獻

1.數學 4 A 二下用書翰林出版(游森棚、林延輯、柯建彰、洪士薰、洪育祥、張宮明)

2.chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/46/senior/0404/040411.pdf

3.chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://www.sec.ntnu.edu.tw/uploads/asset/data/625641aa381784d09345bff8/1998-214-02(16-22).pdf

4. https://zh.wikipedia.org/zh-tw/Topic:Wiqestp541vcc3mz