Лабораторная работа № 3

Тема: Решение нелинейных уравнений.
Комбинированный метод хорд и касательных.

Задание: 1) Отделить корни уравнения графически и программно.
2) Уточнить корни уравнения данным методом с точностью $\varepsilon = 0{,}0001$.
3) Нарисовать схему применения метода к каждому корню уравнения.

Вариант	Уравнение
1	$x^3 + 4x^2 - 1{,}5 = 0$
2	$x^2 - 2 + 2\sin(x) = 0$
3	$x^3 - 2x^2 - 7 = 0$
4	$x^3 - 6\cos(x) + 5 = 0$
5	$\sin(x) + 1{,}2 \cdot \lg(x) = 0$
6	$tg(0{,}2x + 0{,}3) = x^2 - 2$
7	$x^3 - 5x^2 + x = 3{,}2$
8	$3(x-2)^2 - 3 \cdot \lg(x) - 2 = 0$
9	$x^4 + 2x^2 - e^{2x-1} = 0$
10	$e^{x^2} - 5\sin(x) = 0$
11	$4 \cdot \ln(x) - \dfrac{x^2}{3} + 1 = 0$
12	$2x^2 - 2^x - 3\sin(x) = 0$
13	$2^x - 3x^2 + 2 = 0$
14	$\cos(x-1) - \dfrac{x^2}{3} = 0$

Вариант	Уравнение
31	$x^3 - 3x^2 + x + 3 = 0$
32	$x^3 + 0{,}1 - tg(x) = 0$
33	$x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$
34	$(x-1)^3 \cos(x) + 1 = 14x^2$
35	$x^2 - 2 \cdot \ln(x) = 2{,}5$
36	$\cos(2x-1) = x^3 - 2x - 1$
37	$x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$
38	$3\lvert x \rvert - 3 \cdot \ln(x+2) - 4 = 0$
39	$3 \cdot \lg(x+2) - \dfrac{4x}{2x^2 + 3} = 1$
40	$2 \cdot \ln(x+1) - \dfrac{x^2}{2} + 1 = 0$
41	$2x^4 - 0{,}5^x - 1 = 0$
42	$2^x + x^2 - 2 = 0$
43	$3\cos(x^{0,5} - 0{,}3) = \dfrac{3}{2x}$
44	$x^3 - 2\cos(3x+1) + 2 = 0$

15	$0,19*x+\sin(x)=\lg(x)$
16	$x^3-3x^2-4x+1=0$
17	$x^3-4x^2+3x=0,2$
18	$e^x+5x^2-7=0$
19	$3\sin(x)=x-1$
20	$3\cos(2x-0,5)=2x^2$
21	$x^4-5x(x+0,1)+6=0$
22	$(x-1)^3+2\ln\lvert x-2\rvert=0$
23	$tg(0,2x+\frac{1}{2})+0.55=2x^3$
24	$x^3-4x^2+2\lvert x\rvert-1=0$
25	$(x-3)^2-2\lg(x^2-3)=1$
26	$x^2-2\sin(x-1)-2=0$
27	$x^3-1.2x+1=0$
28	$x^2-2\sin(2x)-0.5=0$
29	$x^3-x-0.2=0$
30	$x^3-4x^2+x+2.5=0$

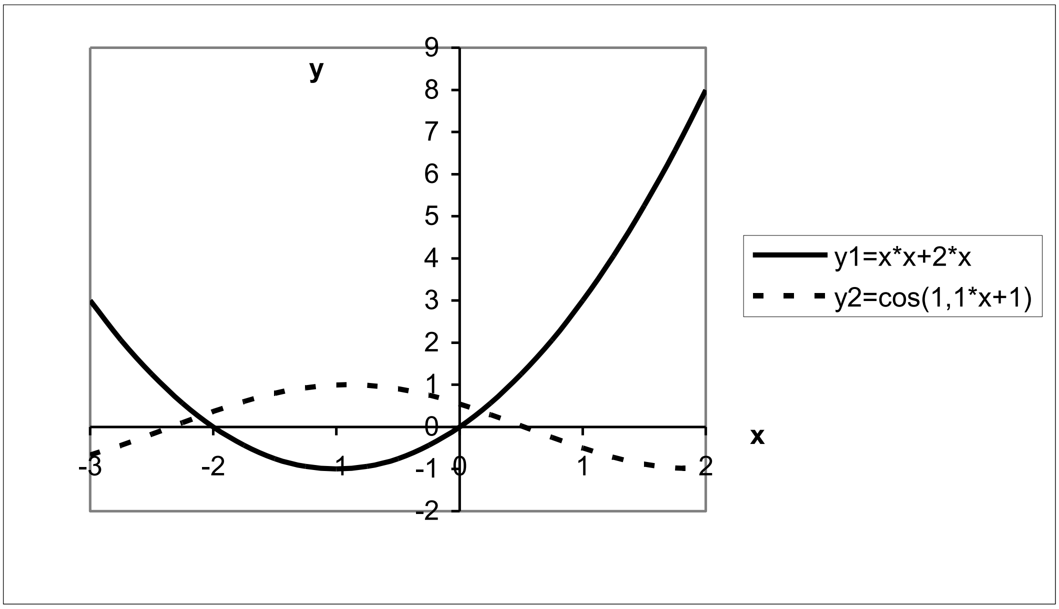
45	$x^2+5\sin(3x+1)=0$
46	$x^3-3x^2+2x-5=0$
47	$\frac{2}{\lvert x\rvert}-\lg(\lvert x\rvert)-3=0$
48	$x^4+2x^2+2x-1=0$
49	$x^2-2\sin(x)=0$
50	$4\cdot\lg(x)-\frac{x^2}{3}+1=0$
51	$3x^2-0,5^x-2=0$
52	$(x-1)^{3/2}-(x-1)^2=0.03$
53	$3x^2+\cos(x-\pi/5)-1=0$
54	$(x-1)^3+2\ln\lvert x-2\rvert=0,2$
55	$tg(0,2x+0,5)+0.51=x^3$
56	$x^3-4x^2+2\lvert x\rvert-1=0$
57	$(x-3)^2-2\lg(x^2-3)=1$
58	$x^2-2\sin(x-1)-2=0$
59	$x^3-1.2x+1=0$
60	$x^2-2\sin(2x)-0.5=0$

Образцы выполнения заданий лабораторных работ №3

(Приближенное решение нелинейных уравнений.
Метод хорд, касательных (Ньютона), комбинированный метод).

I). Найти приближенные решения уравнения $x^2+2x-\cos(1,1x+1)=0$ методом хорд с точностью $\varepsilon=10^{-4}$.

Отделим корни этого уравнения графически (можно и программно). Для этого построим графики функций $y_1(x) = x^2 + 2x$, $y_2(x) = \cos(1{,}1x+1)$ и найдем абсциссы точек пересечения графиков этих функций: $\xi_1 \in [-2{,}5; -2]$, $\xi_2 \in [0;\ 0{,}5]$.



Рассмотрим в качестве примера первый корень. Уточним его методом хорд. Для этого определим знаки функции $y = F(x)$ и второй ее производной $y'' = F''(x)$ на этом отрезке $[-2{,}5; -2]$.

$$F(x) = x^2 + 2x - \cos(1{,}1x+1),$$

$$F''(x) = 2 + 1{,}21\cos(1{,}1x+1);$$

$F(-2{,}5) = 1{,}42825 > 0$, $F(-2) = -0{,}36236 < 0$; так как $|\cos(1{,}1 * x + 1)| \le 1$, то $F''(x) > 0$, $\forall x \in [-2{,}5;\ -2]$.

Поскольку $F(-2{,}5) \cdot F''(x) > 0$, то применяем формулу

$$x_{n+1} = (-2{,}5) - \frac{F(-2{,}5)}{F(x_n) - F(-2{,}5)}\left(x_n - (-2{,}5)\right),$$

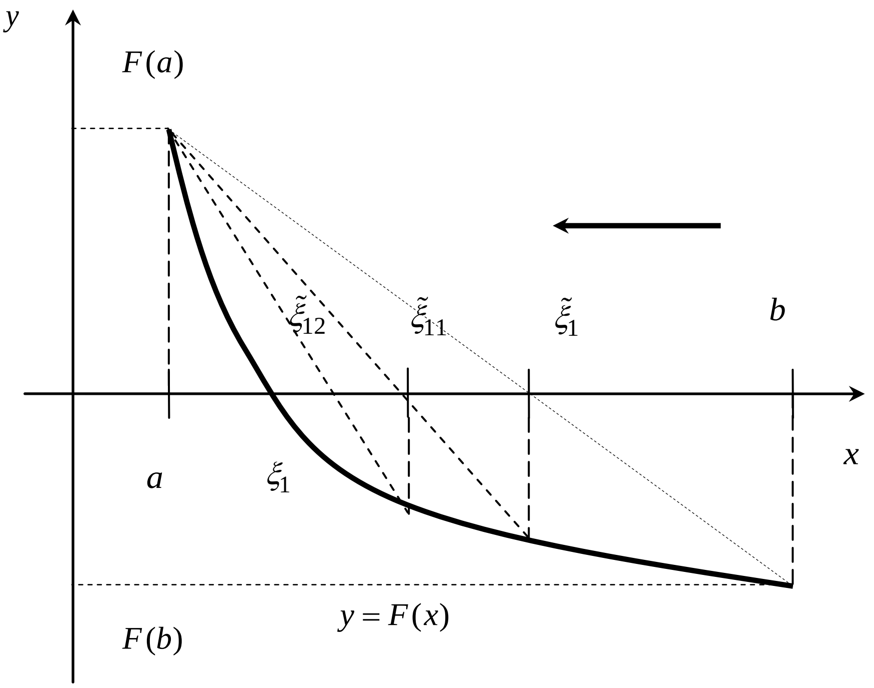
где неподвижная точка $x = a = -2{,}5$, а начальная точка $x_0 = b = -2$.Получим следующую таблицу

x	y	$\Delta x = x_n - a$	h_n	Δh	Δx
-2	-0,362357754	0,5	-0,398816882		
-2,101183118	-0,043988132	0,398816882	-0,386900836	0,011916	0,101183
-2,113099164	-0,004912162	0,386900836	-0,38557473	0,001326	0,011916
-2,11442527	-0,000543307	0,38557473	-0,385428113	0,000147	0,001326
-2,114571887	-0,000060028	0,385428113	-0,385411914	1,62E-05	0,000147
-2,114588086	-0,000006632	0,385411914	-0,385410125	1,79E-06	1,62E-05

a	b	$F(a)$
-2,5	-2	1,428246056

Где $h_n = \dfrac{F(a)}{F(x_n)-F(a)}(x_n - a)$, $\Delta h = h_{n+1} - h_n$, $\Delta x = x_{n+1} - x_n$.

Схема применения метода хорд.



Оценим погрешность приближения. Так как $F''(x)$ не меняет свой знак на данном отрезке, то $F'(x)$ достигает своего наибольшего и наименьшего значения на концах отрезка $[-2,5; -2]$, поэтому $|F'(x)| = |2x+2+1,1\cdot\sin(1,1\cdot x+1)| \geq 3 = m > 0$ для $\forall x \in [-2,5; -2]$.

А) Тогда используя оценку погрешности

$$|x_n - \xi_1| \leq \frac{|F(x_n)|}{m} \leq \varepsilon,\ |F'(x)| \geq m > 0,\ \forall x \in [a,b]$$

получим $\tilde{\xi}_1 = x_4 = -2{,}114571887$, $\Delta\tilde{\xi} = \left|\tilde{\xi}_1 - \xi_1\right| \leq \dfrac{0,00006003}{3} \leq 0,0000201 = \Delta_{\tilde{\xi}} \leq \varepsilon$.

Следовательно, приближенное значение корня равно

$$\tilde{\xi}_1 = -2{,}114571887 \pm 0{,}0000201.$$

Запишем приближенное значение корня только верными значащими цифрами в узком смысле.

Имеем $\Delta_{\tilde{\xi}_1} = 0,0000201 \leq \dfrac{1}{2}10^{-4} = \dfrac{1}{2}10^{m-n+1}$, $m = 0$, $n = 5$. Округлим $\tilde{\xi}_1 = -2{,}114571887$ до $n = 5$. Получим $\tilde{\xi}_{11} = -2{,}1146$, $\Delta_{окр} = \left|\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_{11}\right| \leq 0,000029$, $\Delta_{\tilde{\xi}_{11}} = \Delta_{окр} + \Delta_{\tilde{\xi}_1} = 0,0000491$.

Найдем число верных знаков для $\tilde{\xi}_{11} = -2{,}1146$. Имеем $\Delta_{\tilde{\xi}_{11}} = 0{,}0000491 \le \frac{1}{2}10^{-4} = \frac{1}{2}10^{m-n_1+1}$, $m=0$, $n_1=5$. Так как $n_1 = n$, то получим приближенное значение корня с числом верных знаков $n_1 = 5$.

Ответ: $\tilde{\xi}_1 = -2{,}1146 \pm 0{,}0000491$.

Б) Верна так же следующая формула оценки погрешности приближенного значения корня:

$$|x_n - \xi_1| \le \frac{M-m}{m}|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon, \quad 0 < m \le |F'(x)| \le M < +\infty, \forall x \in [a,b].$$

Для нашего уравнения имеем $m=3$, $M=4{,}1$.

Тогда полагая $\tilde{\xi}_1 = x_4 = -2{,}114571887$, получим

$$\Delta\tilde{\xi} = |\tilde{\xi}_1 - \xi_1| \le \frac{4{,}1-3}{3}\cdot 0{,}000147 = 0{,}00005137 \le 0{,}0000514 = \Delta_{\tilde{\xi}} \le \varepsilon.$$

Следовательно, приближенное значение корня равно $\tilde{\xi}_1 = -2{,}114571887 \pm 0{,}0000514$.

Запишем приближенное значение корня только верными значащими цифрами в узком смысле.

Имеем $\Delta_{\tilde{\xi}_1} = 0{,}0000514 \le \frac{1}{2}10^{-3} = \frac{1}{2}10^{m-n+1}$, $m=0$, $n=4$. Округлим $\tilde{\xi}_1 = -2{,}114571887$ до $n=4$. Получим $\tilde{\xi}_{11} = -2{,}115$, $\Delta_{окр} = |\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_{11}| \le 0{,}000429$, $\Delta_{\tilde{\xi}_{11}} = \Delta_{окр} + \Delta_{\tilde{\xi}_1} = 0{,}0004804$.

Найдем число верных знаков для $\tilde{\xi}_{11} = -2{,}115$. Имеем $\Delta_{\tilde{\xi}_{11}} = 0{,}0004804 \le \frac{1}{2}10^{-3} = \frac{1}{2}10^{m-n_1+1}$, $m=0$, $n_1=4$.

Так как $n = n_1$, то получим приближенное значение корня $\tilde{\xi}_{11} = -2{,}115$ с числом верных знаков $n_1 = 4$.

Ответ: $\tilde{\xi}_1 = -2{,}115 \pm 0{,}0004804$.

II) Найти приближенные решения уравнения $x^2 + 2x - \cos(1{,}1x+1) = 0$ методом касательных (методом Ньютона) с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Отделим корни этого уравнения графически (можно и программно). Для этого построим графики функций $y_1(x) = x^2 + 2x$, $y_2(x) = \cos(1{,}1x+1)$ и найдем абсциссы точек пересечения графиков этих функций: $\xi_1 \in [-2{,}5; -2]$, $\xi_2 \in [0;\ 0{,}5]$.

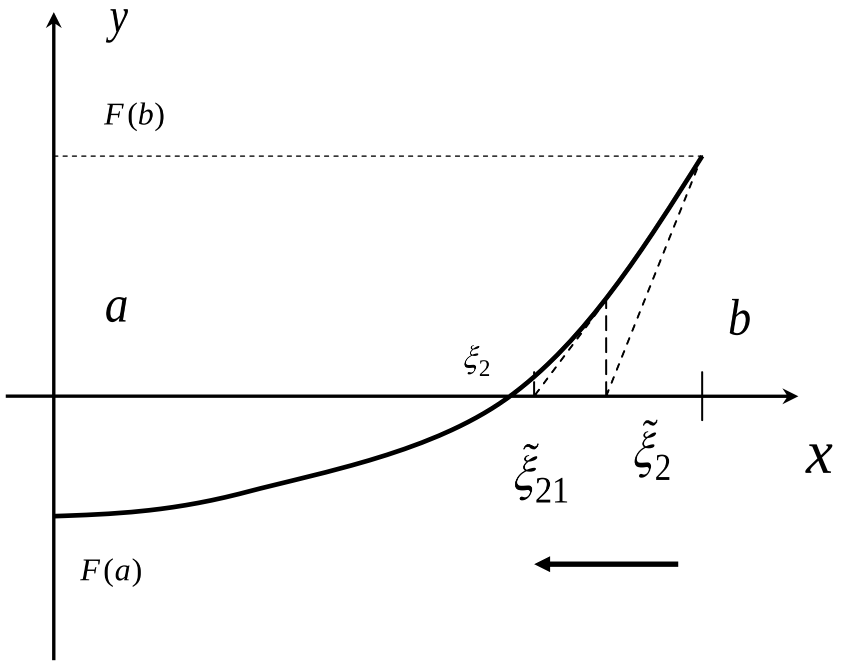
<u>*В качестве примера рассмотрим второй корень*</u>. Уточним его методом касательных. Для этого определим знаки функции $y = F(x)$ и второй ее производной $y'' = F''(x)$ на этом отрезке $[0;\ 0{,}5]$: $F(x) = x^2 + 2x - \cos(1{,}1x+1)$, $F''(x) = 2 + 1{,}21\cos(1{,}1x+1)$; $F(0) = -0{,}54031 < 0$, $F(0{,}5) = 1{,}22921 > 0$; так как $|\cos(1{,}1 * x+1)| \le 1$, то $F''(x) > 0, \forall x \in [0;\ 0{,}5]$.

Поскольку $F(0{,}5)\cdot F''(x)>0$, то применяем формулу $x_{n+1}=x_n-\dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)}$, $n=0,1,2,\ldots,\ \ x_0=0{,}5$.

x	y	$F'(x_0)$	$h=\dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)}$	$\Delta x=x_{n+1}-x_n$
0,5	1,229205172	4,099762141	0,29982354	
0,200176466	0,096960102	3,433435582	0,028239965	0,299823534
0,171936501	0,000967890	3,364722863	0,000287658	0,028239965
0,171648863	0,000000101	3,364017852	0,000000030	0,000287658
0,171648813	0,000000000	3,364017778	0,000000000	0,000000030

a	b	$F(a)$	$F(b)$	$F''(a)$	$F''(b)$
0	0,5	-0,54030231	1,229205172	2,65376579	2,02516174

Схема применения метода касательных.



Оценим погрешность приближения. Так как $F''(x)$ не меняет свой знак на данном отрезке, то $F'(x)$ достигает своего наибольшего и наименьшего значения на концах отрезка $[0;0{,}5]$, поэтому $|F'(x)|=|2x+2+1{,}1\sin(1{,}1x+1)|\ge 2=m>0$ для $\forall x\in[0;0{,}5]$.

А) Тогда используя оценку погрешности

$$|x_n-\xi_2|\le\frac{|F(x_n)|}{m}\le\varepsilon,\ \ |F'(x)|\ge m>0,\ \forall x\in[a,b]$$

получим $\tilde{\xi}_2 = x_4 = 0{,}171648813$,

$$\Delta\tilde{\xi}_2 = \left|\tilde{\xi}_2 - \xi_2\right| \le \frac{0{,}000000030}{2} = \Delta_{\tilde{\xi}_2} = 0{,}00000015 \le \varepsilon .$$

Следовательно, приближенное значение корня равно

$$\tilde{\xi}_2 = 0{,}171648813 \pm 0{,}000000030 .$$

Запишем приближенное значение корня только верными значащими цифрами в узком смысле.

Имеем $\Delta_{\tilde{\xi}_2} = 0{,}00000003 \le \frac{1}{2}10^{-7} = \frac{1}{2}10^{m-n+1}$, $m=0$, $n=8$. Округлим $\tilde{\xi}_2 = 0{,}171648813$ до $n=8$. Получим $\tilde{\xi}_{21} = 0{,}1716488$, с погрешностью округления $\Delta_{окр} = \left|\tilde{\xi}_2 - \tilde{\xi}_{21}\right| \le 0{,}000000014$, $\Delta_{\tilde{\xi}_{21}} = \Delta_{окр} + \Delta_{\tilde{\xi}_2} = 0{,}000000044$.

Найдем число верных знаков для $\tilde{\xi}_{21} = 0{,}1716488$.

Имеем $\Delta_{\tilde{\xi}_{21}} = 0{,}000000044 \le \frac{1}{2}10^{-7} = \frac{1}{2}10^{m-n_1+1}$, $m=0$, $n_1 = 8$. Так как $n_1 = n$, то получим приближенное значение корня с числом верных знаков $n_1 = 8$.

Ответ: $\tilde{\xi}_2 = 0{,}1716488 \pm 0{,}000000044$.

Б) Верна так же следующая формула оценки погрешности приближенного значения корня:

$$\left|x_n - \xi_2\right| \le \frac{M}{2m}\left|x_n - x_{n-1}\right|^2 \le \varepsilon ,\ \ 0 < m \le \left|F'(x)\right| \le M < +\infty,\ \forall x \in [a,b] .$$

Для нашего уравнения имеем $m=2$, $M=2{,}7$. Тогда полагая $\tilde{\xi}_2 = x_3 = 0{,}171648843$, получим

$$\Delta\tilde{\xi}_2 = \left|\tilde{\xi}_2 - \xi_2\right| \le \frac{2{,}7}{2\cdot 2}\cdot 0{,}000287658^2 = \Delta_{\tilde{\xi}_2} = 0{,}000000056 \le \varepsilon .$$

Следовательно, приближенное значение корня равно $\tilde{\xi}_2 = 0{,}171648843 \pm 0{,}000000056$.

Запишем приближенное значение корня только верными значащими цифрами в узком смысле.

Имеем $\Delta_{\tilde{\xi}_2} = 0{,}000000056 \le \frac{1}{2}10^{-6} = \frac{1}{2}10^{m-n+1}$, $m=0$, $n=7$.

Округлим $\tilde{\xi}_2 = 0{,}171648843$ до $n=7$. Получим $\tilde{\xi}_{21} = 0{,}171649$, $\Delta_{окр} = \left|\tilde{\xi}_2 - \tilde{\xi}_{21}\right| \le 0{,}00000016$, $\Delta_{\tilde{\xi}_{21}} = \Delta_{окр} + \Delta_{\tilde{\xi}_2} = 0{,}000011 + 0{,}0000171 = 0{,}0000281$

$\Delta_{\tilde{\xi}_{21}} = \Delta_{окр} + \Delta_{\tilde{\xi}_2} = 0{,}000000216$

Найдем число верных знаков для $\tilde{\xi}_{21} = 0{,}171649$. Имеем $\Delta_{\tilde{\xi}_{21}} = 0{,}000000216 \le \frac{1}{2}10^{-6} = \frac{1}{2}10^{m-n_1+1}$, $m=0$, $n_1 = 7$. Так как $n_1 = n$, то получим приближенное значение корня с числом верных знаков $n_1 = 7$.

Ответ: $\tilde{\xi}_{21} = 0{,}171649 \pm 0{,}000000216$.

Замечание. Из сравнения результатов пунктов **А**) и **Б**) метода касательных видно, что оценка во втором пункте позволяет получить приближенный результат за меньшее число приближений и может быть получен округлением из результата пункта **А**).

III) Найти приближенные решения уравнения $x^2+2x-\cos(1{,}1x+1)=0$ комбинированным методом с точностью $\varepsilon=10^{-4}$.

Отделим корни этого уравнения графически (можно и программно). Для этого построим графики функций $y_1(x)=x^2+2x$, $y_2(x)=\cos(1{,}1x+1)$ и найдем абсциссы точек пересечения графиков этих функций: $\xi_1\in[-2{,}5;-2]$, $\xi_2\in[0;\ 0{,}5]$.

Рассмотрим второй корень в качестве примера. Уточним его комбинированным методом. Для этого определим знаки функции $y=F(x)$ и второй ее производной $y''=F''(x)$ на этом отрезке $[0;\ 0{,}5]$: $F(x)=x^2+2x-\cos(1{,}1x+1)$, $F''(x)=2+1{,}21\cos(1{,}1x+1)$; $F(0)=$-0,54031<0, $F(0{,}5)=$1,22921>0; $F'(x)>0$, так как $|\cos(1{,}1*x+1)|\le 1$, то $F''(x)>0$, $\forall x\in[0;\ 0{,}5]$.

Тогда применяем формулы

$$x_{n+1}=x_n-h_1,\quad h_1=\frac{F(x_n)}{F(\bar{x}_n)-F(x_n)}(\bar{x}_n-x_n),\ \bar{x}_{n+1}=\bar{x}_n-h_2,\quad h_2=\frac{F(\bar{x}_n)}{F'(\bar{x}_n)},$$
$$x_0=a,\ \bar{x}_0=b,\ m=0,1,2,\dots .$$

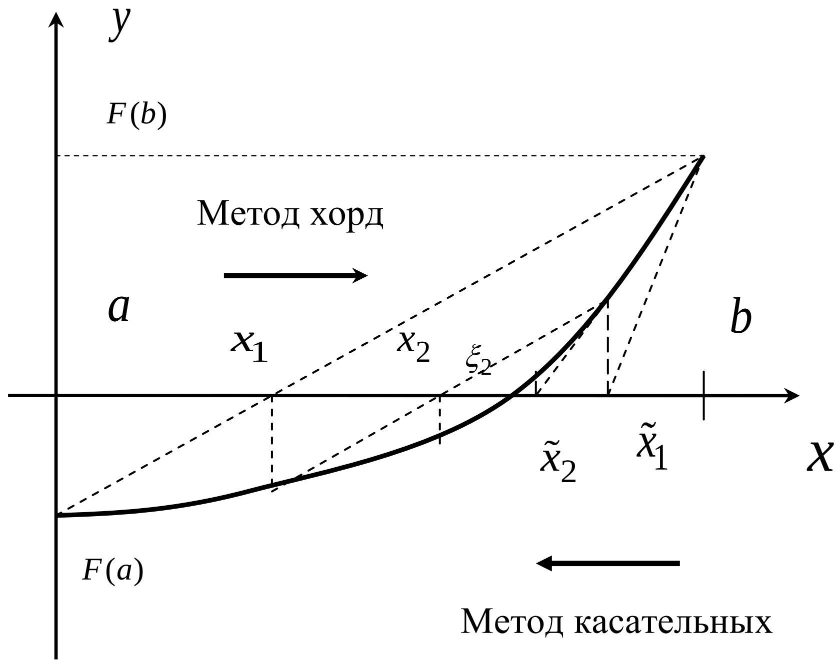
Процесс продолжаем до выполнения условия $|\bar{x}_n-x_n|<\varepsilon$, тогда за приближенное значение корня можно взять значение

$$\tilde{\xi}=\frac{x_n+\bar{x}_n}{2},\ \Delta_{\tilde{\xi}}=\frac{|x_n-\bar{x}_n|}{2}.$$

x_n	$\bar{x}_n$	$F(x_n)$	h_1	$F(\bar{x}_n)$	h_2
0,00000000	0,50000000	-0,54030231	-0,15267025	1,22920517	0,29982353
0,15267025	0,20017647	-0,06340140	-0,01878232	0,09696010	0,02823997
0,17145257	0,17193650	-0,00066012	-0,00019622	0,00096789	0,00028766
0,17164879	0,17164884	-0,00000007	-0,00000002	0,00000010	0,00000003

$F'(\bar{x}_n)$	$\bar{x}_n-x_n$	$\tilde{\xi}$	$\Delta_{\tilde{\xi}}$
4,09976214	0,50000000	0,25000000	0,25000000
3,43343558	0,04750621	0,17642336	0,02375311
3,36472286	0,00048393	0,17169453	0,00024197
3,36401785	0,00000005	0,17164882	0,00000003

Схема применения комбинированного метода.



Найдем число верных знаков у приближенного корня $\tilde{\xi}_2 = 0{,}17164882$. Так как $\Delta_{\tilde{\xi}_2} = 0{,}00000003 < \frac{1}{2}10^{-7} = \frac{1}{2}10^{m-n+1}$, $m = 0$, то получим $n = 8$. Округлим до верных знаков $\tilde{\xi}_{21} = 0{,}1716488$, при этом погрешность округления будет $\Delta_{окр} = 0{,}00000003$, а погрешность приближенного решения $\Delta_{\tilde{\xi}_{21}} = 0{,}00000006$.

Найдем число верных знаков $\Delta_{\tilde{\xi}_{21}} = 0{,}00000006 < \frac{1}{2}10^{-6} = \frac{1}{2}10^{m-n_1+1}$, $m = 0$, $n_1 = 7$.

Округлим до верных знаков $\tilde{\xi}_{22} = 0{,}171649$, при этом погрешность округления будет $\Delta_{окр_1} = 0{,}0000003$, а погрешность приближенного решения $\Delta_{\tilde{\xi}_{22}} = 0{,}00000036$.

Найдем число верных знаков $\Delta_{\tilde{\xi}_{22}} = 0{,}00000036 < \frac{1}{2}10^{-6} = \frac{1}{2}10^{m-n_2+1}$, $m = 0$, $n_2 = 7$.

Так как $n_2 = n_1$, то прекращаем округление.

Ответ: $\tilde{\xi}_2 = 0{,}171649 \pm 0{,}00000036$.