Лабораторная работа № 2

Тема: Решение нелинейных уравнений. Метод итерации.

Задание: 1) Отделить корни уравнения графически и программно.

2) Уточнить один из корней уравнения методом итерации с точностью $\varepsilon = 0,001$, указать число итераций.

3) Нарисовать схему применения метода итерации к данному корню уравнения.

Вопросы самоконтроля.

1) Как отделяются корни уравнения?
2) Какой должна быть величина шага при отделении корней?
3) Какие условия должны быть выполнены для применения метода итерации?
4) Какова идея метода итерации? Геометрическая иллюстрация.
5) Какое условие должно выполняться для сходимости итерационной последовательности?
6) Как находится равносильное уравнение, применяемое для итерационного процесса? Критерий выбора равносильного уравнения.
7) Как определяется погрешность метода итерации при заданной точности?
8) Какие положительные и отрицательные стороны метода итерации (сравнить с методом деления отрезка пополам)?

Вариант	Уравнение
1	$\lg(x) - \frac{5}{3x+2} = 0$
2	$2e^x + 3x + 1 = 0$
3	$x^3 + x - 3 = 0$
4	$x^3 - 1,2x^2 + x + 3 = 0$
5	$x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$
6	$x^2 - 2\cos(x) = 0$
7	$x^3 - 3x - 3 = 0$
8	$3x - \cos(x) - 2 = 0$
9	$x + 3 \cdot \lg(x) = 1,25$

Вариант	Уравнение
31	$3x - \cos(x) - 1 = 0$
32	$x + 2 \cdot \lg(x) = 1,45$
33	$x + \lg(x) = 0,35$
34	$tg(3x + 0,5) = x^2$
35	$x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = 0$
36	$3x - 2\cos(x) - 1 = 0$
37	$\cos(2x + 0,3) = x^2 - 2x - 1$
38	$2x - \lg(x) - 3 = 0$
39	$x^4 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$

10	$tg(0,5x-1,2)=x^2-1$
11	$x^3-2x^2+3x-4=0$
12	$2x-\lg(x)-2=0$
13	$\lg(x)-\frac{5}{2x+1}=0$
14	$5x+\lg(x)=2$
15	$x^3-3x^2+4x-2=0$
16	$x^3-4x^2+2x-3=0$
17	$3e^x+5x+1=0$
18	$3\sin(x)=x-1,2$
19	$\cos(2x-0,5)=x^2$
20	$x^4-5x^2+6=0$
21	$0,5x+\lg(x)=1,5$
22	$\cos(2x+0,3)=x^2$
23	$x^4-x^2-1=0$
24	$3\cdot\lg(x)-\frac{x}{4}+1=0$
25	$2x^2-0,5^x-1=0$
26	$2^x-3x-1=0$
27	$ctg(x)-\frac{3x}{4}=0$
28	$x^3-3x+2=0$
29	$x^2+5\sin(x+1)=0$
30	$x^3-6x^2-7=0$

40	$x^2-2\sin(x)=0$
41	$4\cdot\lg(x)-\frac{x}{3}+1=0$
42	$3x^2-0,5^x-2=0$
43	$2^x-3x+2=0$
44	$ctg(x-1,5)-\frac{x}{3}=0$
45	$x^3+x^2+3=0$
46	$x^2-2+2\sin(x)=0$
47	$x^3-2x^2-7=0$
48	$4x-3\cos(x)-1=0$
49	$x+2\cdot\lg(x)=2,5$
50	$tg(0,2x+0,3)=x^2-2$
51	$x^3-3x^2+x-1=0$
52	$3x-3\cdot\lg(x)-2=0$
53	$3\cdot\lg(x)-\frac{4}{2x+3}=0$
54	$1,5x+\lg(x)=3$
55	$x^3+4x^2-3=0$
56	$x^3-2x^2-4=0$
57	$x^3-5x^2+2x+3=0$
58	$3x^2-2\cos(x)=0$
59	$x^3+2x^2-3x-1=0$
60	$x^2+4\sin(x)=0$

Образец выполнения лабораторной работы № 2

(Решение нелинейных уравнений. Метод итерации.)

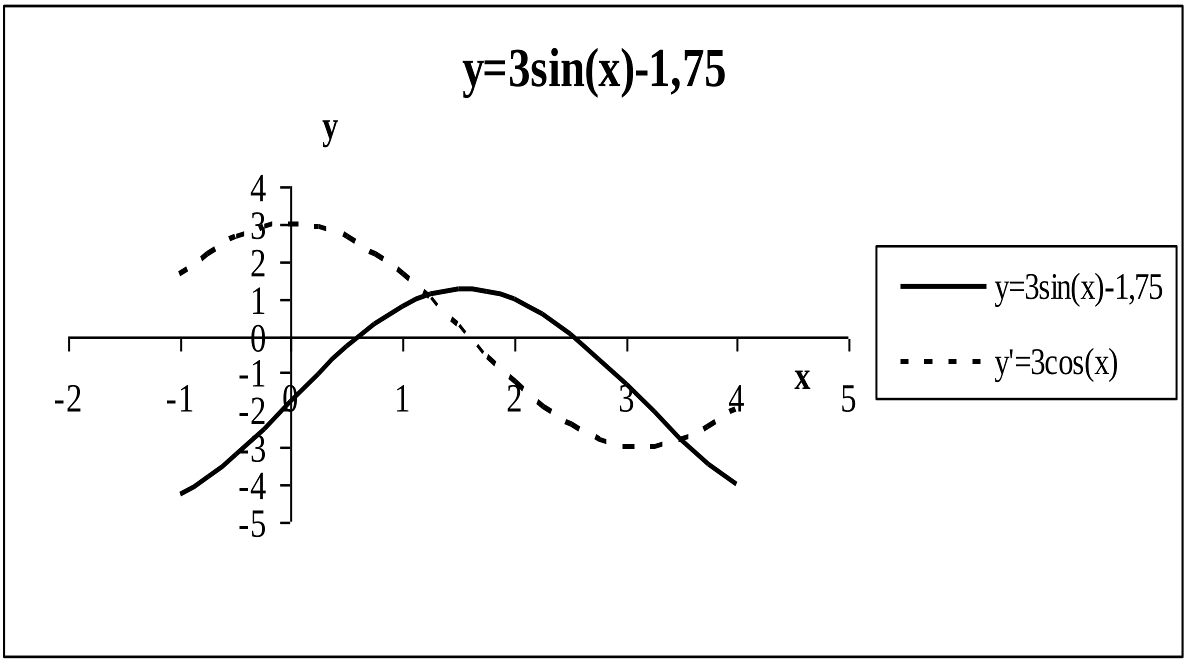
Постановка задачи. Найти корень нелинейного уравнения $3\cdot\sin(x)-1{,}75=0$ методом итерации с точностью $\varepsilon=0{,}001$.

Решение задачи. Отделим корень уравнения на отрезке $[-1;\,4]$ графическим методом. Для этого табулируем функцию $y(x)=3\cdot\sin(x)-1{,}75$ на данном отрезке.

$\varepsilon=$ 0,0001,

$a=$ -1, $n=$ 20,

$b=$ 4, $h=$ 0,25.



$x=$	$y(x)=3\cdot\sin(x)-1{,}75$	$y'(x)=3\cdot cos(x)$
-1	-4,274412954	1,620906918
-0,75	-3,79491628	2,195066607
-0,5	-3,188276616	2,632747686
-0,25	-2,492211878	2,906737265
0	-1,75	3
0,25	-1,007788122	2,906737265
0,5	-0,311723384	2,632747686
0,75	0,29491628	2,195066607
1	0,774412954	1,620906918
1,25	1,096953858	0,945967087
1,5	1,24248496	0,212211605
1,75	1,201957841	-0,534738167

2	0,97789228	-1,24844051
2,25	0,584219591	-1,884520868
2,5	0,045416432	-2,403430847
2,75	-0,605017024	-2,772907136
3	-1,326639976	-2,96997749
3,25	-2,074585404	-2,982389028
3,5	-2,802349683	-2,809370062
3,75	-3,464683956	-2,461678072
4	-4,020407486	-1,960930863

Выделим отрезок $[0;1]$, где находится корень, и уточним его методом итерации.

Получим равносильное уравнению $F(x) \equiv 3 \cdot \sin(x) - 1{,}75 = 0$ уравнение $x = \varphi(x)$. Функцию $\varphi(x)$ будем искать в виде $\varphi(x) = x - \dfrac{F(x)}{M}$, где $0 < m < F'(x) \le M$.

$$a_1 = 0, \qquad 0 < 1{,}620906918 < F'(x) \le 3,$$
$$b_1 = 1, \qquad 0 < m < F'(x) \le M,$$

$$m = 1{,}620906918, \qquad M = 3.$$

При таком выборе функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию сходимости итерационной последовательности $x_i = \varphi(x_{i-1}),\ i = 1, 2, 3, \dots$, $|\varphi'(x)| \le q < 1$, где $q = 1 - \dfrac{m}{M}$.

Тогда получим следующее значение $q = 0{,}459697694$, условие остановки итерационной последовательности $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon \dfrac{1-q}{q} = 0{,}000118$, при выборе приближенного решения $\tilde{\xi} = x_i$ с погрешностью приближенного решения $\Delta\tilde{\xi} = |\xi - x_i| \le |x_i - x_{i-1}| \dfrac{q}{1-q} = \Delta_{\tilde{\xi}}$.

Если свести результаты в таблицу получим

	x_i	$\varphi(x_{i-1})$	$\lvert x_i - x_{i-1}\rvert$	$\Delta_{\tilde{\xi}}$	Условие остановки итерации
x_0	0,5				
x_1	0,603908	0,603908	0,10390779	0,08840638	нет
x_2	0,619378	0,619378	0,01546994	0,01316207	нет
x_3	0,622182	0,622182	0,00280474	0,00238631	нет
x_4	0,622706	0,622706	0,00052329	0,00044523	нет
x_5	0,622804	0,622804	0,00009814	0,00008350	да
x_6	0,622822	0,622822	0,00001842	0,00001568	да
x_7	0,622826	0,622826	0,00000346	0,00000294	да
		0,622826	0,00000065	0,00000055	да

Приближенное решение $\tilde{\xi} = x_5 = 0{,}622804$, погрешность $\Delta_{\tilde{\xi}} = 0{,}0000835$, число итераций $k = 5$.

Следовательно, приближенное значение корня равно $\tilde{\xi} = 0{,}622804 \pm 0{,}00008350$.

Запишем приближенное значение корня только верными значащими цифрами в узком смысле.

Имеем $\Delta_{\tilde{\xi}} = 0{,}00008350 \le \frac{1}{2}10^{-3} = \frac{1}{2}10^{m-n+1}$, $m = 0$, $n = 4$. Округлим $\tilde{\xi} = 0{,}622804$ до $n = 4$. Получим $\tilde{\xi}_1 = 0{,}623$, $\Delta_{окр} = \left|\tilde{\xi} - \tilde{\xi}_1\right| \le 0{,}000196$, $\Delta_{\tilde{\xi}_1} = \Delta_{окр} + \Delta_{\tilde{\xi}_1} = 0{,}0002795$.

Найдем число верных знаков для $\tilde{\xi}_1 = 0{,}623$. Имеем $\Delta_{\tilde{\xi}_1} = 0{,}0002795 \le \frac{1}{2}10^{-3} = \frac{1}{2}10^{m-n_1+1}$, $m = 0$, $n_1 = 4$. Так как $n_1 = n$, то получим приближенное значение корня с числом верных знаков $n_1 = 4$.

Ответ: $\tilde{\xi} = 0{,}623 \pm 0{,}0002795$; $k = 5$.