Лабораторная работа № 7

Тема: Интерполирование функции. Полином Лагранжа.

Задание:

1) Найти приближенное значение функции при заданном значении аргумента ξ с помощью интерполяционного полинома Лагранжа, если функция задана в не равноотстоящих узлах; $y_i = f(x_i)$, $i=\overline{0,6}$; $y_\xi = f(\xi)$; $y_\xi - ?$
2) Оценить погрешность полученного значения.

Вопросы самоконтроля.

1) Постановка задачи интерполирования. Геометрическая иллюстрация.
2) В чем различие между задачами интерполяции и задачами экстраполяции?
3) Привести формулу Лагранжа. Дать оценку погрешности.
4) Как выглядит формула Лагранжа для равностоящих узлов?
5) От чего зависит точность получаемого формулой Лагранжа результата?
6) Когда полином m порядка будет аппроксимирован формулой Лагранжа с наименьшей погрешностью?

	Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1,0000	6,0100	0,2955	0,8253	0,9553	0,1011	3,6788	0,9689	0,9044	0,1011	3,6788
	1,1000	6,9066	0,4259	0,8162	0,9460	0,1076	3,6616	1,0587	0,9513	0,1183	4,0277
	1,2320	8,3884	0,6095	0,8110	0,9325	0,1154	3,5938	1,1740	0,9900	0,1421	4,4276
x_i	1,4796	12,1761	0,9142	0,8231	0,9031	0,1279	3,3694	1,3796	0,9813	0,1893	4,9855
	1,9383	23,2239	0,6753	0,9067	0,8356	0,1453	2,7901	1,7152	0,6555	0,2816	5,4082
	1,9577	23,8200	0,6283	0,9112	0,8324	0,1459	2,7639	1,7279	0,6332	0,2856	5,4110
	2,0380	26,4092	0,4031	0,9299	0,8189	0,1483	2,6553	1,7791	0,5343	0,3021	5,4115
ξ	1,3										

	Вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	1,8545	20,7751	0,7277	0,8875	0,8492	0,1426	2,9028	1,6588	0,9243	0,2644	3,2300
	1,5022	12,5914	0,9769	0,8256	0,9002	0,1289	3,3445	1,3975	0,7538	0,1937	3,0144
	1,1732	7,6850	0,6229	0,8123	0,9387	0,1120	3,6296	1,1231	0,7000	0,1314	2,5550
x_i	0,8330	4,9104	0,1928	0,8497	0,9689	0,0891	3,6214	0,8150	0,7411	0,0742	1,8099
	0,5589	4,0517	-0,0230	0,9073	0,9860	0,0656	3,1961	0,5535	0,8178	0,0367	1,0718
	0,3354	4,0715	-0,0886	0,9581	0,9949	0,0426	2,3981	0,3342	0,8918	0,0143	0,4825
	0,1948	4,3493	-0,0789	0,9839	0,9983	0,0260	1,6035	0,1946	0,9386	0,0051	0,1875
ξ	0,3										

	Вариант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	0,2143	4,3002	-0,0826	0,9809	0,9979	0,0284	1,7298	0,2140	0,9548	0,0061	1,8888
	0,2572	4,2037	-0,0881	0,9735	0,9970	0,0335	1,9887	0,2567	0,9453	0,0086	1,8466
	0,3269	4,0830	-0,0892	0,9599	0,9952	0,0416	2,3574	0,3258	0,9297	0,0136	1,7688
x_i	0,4282	3,9946	-0,0735	0,9377	0,9918	0,0526	2,7906	0,4258	0,9071	0,0225	1,6415
	0,5657	4,0603	-0,0194	0,9057	0,9856	0,0663	3,2129	0,5600	0,8771	0,0375	1,4547
	0,7756	4,6388	0,1357	0,8603	0,9731	0,0845	3,5710	0,7610	0,8366	0,0656	1,1691
	1,0935	6,8430	0,5139	0,8167	0,9467	0,1072	3,6637	1,0529	0,8014	0,1172	0,7981
ξ	0,25										

	Вариант	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	1,0000	3,1000	1,9320	2,1700	0,9553	0,1011	3,6788	0,9689	0,9636	0,1011	3,6788
	1,1000	3,0131	2,0891	1,9868	0,9460	0,1076	3,6616	1,0587	0,9942	0,1183	4,0277
	1,2320	2,8473	2,2090	1,7349	0,9325	0,1154	3,5938	1,1740	0,9932	0,1421	4,4276
x_i	1,3922	2,5701	2,1119	1,4382	0,9140	0,1238	3,4600	1,3087	0,9200	0,1723	4,8169
	1,5871	2,1234	1,4772	1,1459	0,8888	0,1326	3,2459	1,4638	0,7166	0,2104	5,1515
	1,8251	1,4212	0,0390	1,0001	0,8538	0,1416	2,9421	1,6384	0,3119	0,2584	5,3696
	2,1171	0,3358	-1,0777	1,2810	0,8050	0,1504	2,5485	1,8274	-0,3148	0,3185	5,3956
ξ	1,7										

	Вариант	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
	2,3289	7,4025	4,1063	0,7875	0,7657	0,1556	2,2685	1,9452	1,2182	0,3624	3,1698
	2,2147	7,9204	3,2178	0,4896	0,7873	0,1529	2,4181	1,8838	1,1554	0,3387	3,2133
	2,0597	8,5681	2,9438	0,1833	0,8151	0,1489	2,6259	1,7926	1,0569	0,3066	3,2452
x_i	1,8537	9,3255	3,8554	0,0038	0,8493	0,1426	2,9039	1,6582	0,9238	0,2643	3,2298
	1,6128	10,0558	5,3489	0,1169	0,8852	0,1337	3,2148	1,4834	0,7958	0,2156	3,1108
	1,3708	10,6117	6,1447	0,4758	0,9166	0,1227	3,4805	1,2911	0,7196	0,1682	2,8627
	1,1104	11,0022	6,1029	0,9672	0,9450	0,1082	3,6580	1,0679	0,7012	0,1202	2,4370
ξ	2,1										

	Вариант	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
	1,2214	16,7391	8,1582	0,7551	0,9336	0,1148	3,6009	1,1649	0,8010	0,1402	0,6805
	1,3802	18,0820	8,3779	0,4592	0,9155	0,1232	3,4716	1,2989	0,8143	0,1700	0,5626
	1,5872	20,0003	8,2815	0,1457	0,8888	0,1326	3,2457	1,4639	0,8567	0,2105	0,4545
x_i	1,8571	22,7888	7,1194	0,0045	0,8488	0,1427	2,8994	1,6605	0,9505	0,2650	0,3847
	2,2099	26,9367	4,8706	0,4782	0,7882	0,1528	2,4245	1,8811	1,1017	0,3377	0,3926
	2,6740	33,2783	7,8721	1,7323	0,6951	0,1623	1,8444	2,0984	1,1989	0,4341	0,5204
	3,2890	43,2810	4,7946	1,2357	0,5514	0,1711	1,2265	2,2384	0,9503	0,5629	0,7898
ξ	3										

Образец выполнения лабораторной работы № 7
(Интерполирование функций. Полином Лагранжа)

Постановка задачи. Дана функция $y = f(x)$ своими значениями $y_i = f(x_i)$, где $x_i \in [a,b]$, $i = \overline{0,n}$. Найти интерполирующую функцию определенного класса $F(x)$, такую что $F(x_i) = y_i$, для $\forall x_i \in [a,b]$, $i = \overline{0,n}$.

Задача интерполяции заключается в нахождении значения функции $y = f(x)$ при $x = \xi$, для чего полагают, что $f(\xi) \approx F(\xi)$.

А) Рассмотрим решение задачи интерполяции для функции заданной таблично, используя метод Лагранжа для не равноотстоящих узлов.

x_i	0,200000	0,306000	0,468180	0,716315	1,095963	1,676823	2,565539
y_i	1,020067	1,047184	1,111613	1,267713	1,663140	2,767751	6,542271

Найти $y_\xi = f(\xi)$, при $\xi = 2{,}1$.

x_i	0,200000	0,306000	0,468180	0,716315	1,095963	1,676823	2,565539
y_i	1,020067	1,047184	1,111613	1,267713	1,663140	2,767751	6,542271
ξ	2,10						

Замечание. В дальнейшем промежуточные значения будут представлены в тексте с четырьмя знаками после запятой, хотя все вычисления будут проводиться с шестью знаками после запятой.

$\xi - x_i =$	1,9000	1,7940	1,6318	1,3837	1,0040	0,4232	-0,4655

Таблица разностей $(x_k - \xi)$

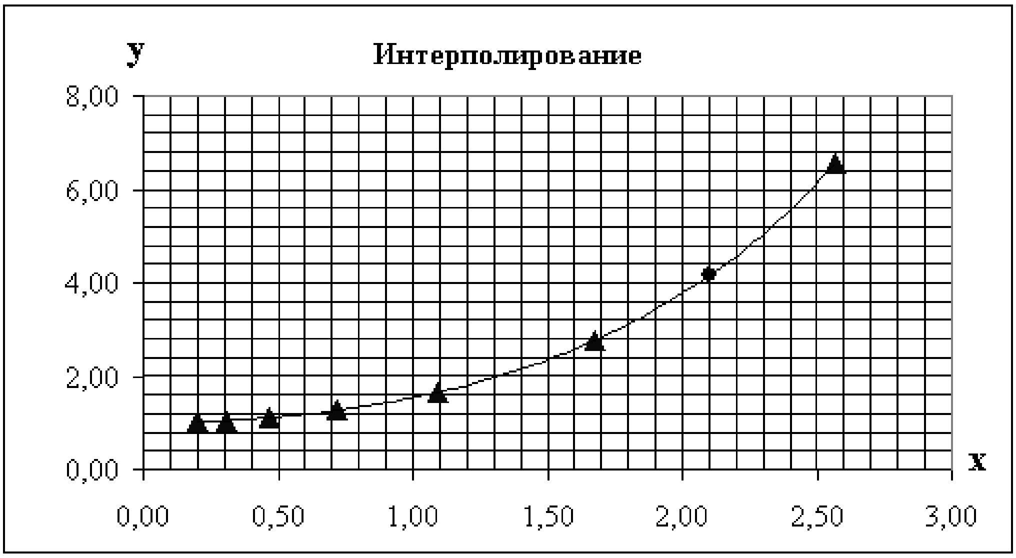
	0,2000	0,3060	0,4682	0,7163	1,0960	1,6768	2,5655
0,2000	1	0,1060	0,2682	0,5163	0,8960	1,4768	2,3655
0,3060	-0,1060	1	0,1622	0,4103	0,7900	1,3708	2,2595
0,4682	-0,2682	-0,1622	1	0,2481	0,6278	1,2086	2,0974
0,7163	-0,5163	-0,4103	-0,2481	1	0,3796	0,9605	1,8492
1,0960	-0,8960	-0,7900	-0,6278	-0,3796	1	0,5809	1,4696
1,6768	-1,4768	-1,3708	-1,2086	-0,9605	-0,5809	1	0,8887
2,5655	-2,3655	-2,2595	-2,0974	-1,8492	-1,4696	-0,8887	1

Таблица значений

$P_{i,k}(\xi) = {(\xi - x_k)}/{(x_i - x_k)}$							$\prod_{k\neq i} P_{i,k}(\xi)$	$y_i \prod_{k\neq i} P_{i,k}(\xi)$
1	-16,9245	-6,0848	-2,6799	-1,1206	-0,2865	0,1968	-17,4407090	-17,7906917
-17,9245	1	-10,0618	-3,3723	-1,2710	-0,3087	0,2060	49,1657194	51,4855547
-7,0848	11,0618	1	-5,5763	-1,5993	-0,3501	0,2220	-54,3186589	-60,3813274
-3,6799	4,3723	6,5763	1	-2,6447	-0,4406	0,2517	31,0373295	39,3464261
-2,1206	2,2710	2,5993	3,6447	1	-0,7285	0,3168	-10,5296185	-17,5122296

-1,2865	1,3087	1,3501	1,4406	1,7285	1	0,5238	2,9651590	8,2068217
-0,8032	0,7940	0,7780	0,7483	0,6832	0,4762	1	0,1207786	0,7901663
						$\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{k\neq i} P_{i,k}(\xi) = F(\xi) =$		4,1447200

Графическая интерпретация исходных значений и результата дают следующую картину, где точкой показан получаемый результат $F(2{,}1) = 4{,}14472$. Из данного рисунка можно сказать, что полученное приближенное решение задачи интерполяции вполне отвечает исходным данным.



Оценка погрешности приближения $F(\xi)$.

Оценим погрешность приближения с помощью выражения $R_n(x) \le \frac{\left|F^{(n+1)}(\eta)\right|}{(n+1)!} \prod_{I=0}^{n} (x - x_i)$, $\eta \in [x_0, x_n]$. Одним из возможных способов оценки погрешности является способ сведения задачи интерполяции в не равноотстоящих точках к задаче на равноотстоящих точках, что позволит оценить $F^{(n+1)}(\eta)$ с помощью выражения $F^{(n+1)}(\eta) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(\Delta x)^{n+1}}$. Для этого необходимо найти конечные разности в равноотстоящих узлах $\bar{x}_i$, $i = \overline{0,6}$, $\bar{x}_i = \bar{x}_0 + i \cdot \Delta x$, $\bar{x}_0 = x_0$, $\bar{x}_6 = x_6$ $\Delta x = (\bar{x}_6 - \bar{x}_0)/6$. С помощью интерполирующего многочлена Лагранжа найдем $\bar{y}_i = F(\bar{x}_i)$, $i = \overline{0,6}$, затем составим конечные разности: $\Delta x = 0{,}3943$

x_i	0,2000	0,5943	0,9885	1,3828	1,7770	2,1713	2,5655
y_i	1,0201	1,1819	1,5297	2,1184	3,0407	4,4423	6,5423

$\overline{y}_i$	$\Delta^1\overline{y}_0$	$\Delta^2\overline{y}_0$	$\Delta^3\overline{y}_0$	$\Delta^4\overline{y}_0$	$\Delta^5\overline{y}_0$	$\Delta^6\overline{y}_0$
1,0201	0,1618	0,1860	0,0549	0,0378	0,0152	0,0052
1,1819	0,3478	0,2409	0,0927	0,0530	0,0204	
1,5297	0,5887	0,3336	0,1457	0,0734		
2,1184	0,9223	0,4793	0,2191			
3,0407	1,4016	0,6984				
4,4423	2,1000					
6,5423						

Если обозначить через $t = \dfrac{\xi - x_n}{\Delta x}$, где $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, то $R_n(\xi) \le \left| \dfrac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} \cdot \prod_{k=0}^{n} (t+k) \right|$.

t	$t+1$	$t+2$	$t+3$	$t+4$	$t+5$	
-1,1808	-0,1808	0,8192	1,8192	2,8192	3,8192	
					$R_n(\xi) =$	0,00002474

Получим решение: $y(\xi) \approx F(\xi) = 4{,}144720$**,** $R_n(\xi) = 0{,}00002474$.

Определим число верных знаков. Так как $R_n(\xi) \le 0{,}00005$, то при $m = 0$ имеем $n = 5$. После округления получим $y_1 = 4{,}1447$**,** $\Delta_{окр} = 0{,}00002$**,** $\Delta_{y_1} = 0{,}00004474$**.** Так как $\Delta_{y_1} = 0{,}00004474 < 0{,}00005$**,** то $n_1 = 5$. Следовательно, в полученном результате все знаки верные.

Ответ: $y(\xi) = 4{,}1447 \pm 0{,}000045$.