

Conjuntos

andrey.cabral@pucpr.br

Conversa inicial

- Inicialmente revisamos conceitos relacionados a lógica, suas principais propriedades e um pouco de álgebra booleana.
- Agora nosso objetivo é mostrar como os conceitos de lógica entram na teoria de conjuntos.

Conjuntos

- O que é um conjunto?
- Informalmente falando , conjunto é uma coleção de objetos; como por exemplo, uma turma de programação , em que esse conjunto é dado por uma coleção de alunos, que são os elementos desse conjunto. Logo, os elementos, são objetos que compõem um conjunto, sejam eles concretos ou abstratos, com ou sem ordenação, muitas vezes definidos por meio de uma regra ou lei de formação.

Conjuntos

- Exemplos:
 - O conjunto de carteiras em uma sala de aula.
 - O conjuntos dos números reais.
 - O conjunto de vogais no alfabeto da língua portuguesa.
 - O conjunto de todos os números reais entre 0 e 1.

Conjuntos

- Um conjunto pode ter um número finito de elementos, em que denomina-se conjunto finito, se ele pode ter infinitos elementos denominana –se conjunto infinito.
- Dos exemplos vistos anteriormente “o conjunto de carteiras em uma sala de aula” é um conjunto finito.
- Já “ o conjunto de todos os números reais entre 0 e 1” é um conjunto infinito, pois não conseguimos descrever todos os números nesse intervalo.

Conjuntos

- Usaremos letras maiúsculas para denotar os conjuntos.
- Letras minúsculas para denotar os elementos.
- Exemplo:
 a é um elemento do conjunto A .

Dizemos que um conjunto pode ser definido, ou seja, nos casos em que podemos listar todos os seus elementos, ou ainda quando suas propriedades são declaradas

Conjuntos

- Dizemos que um conjunto pode ser definido, ou seja, nos casos em que podemos listar todos os seus elementos, ou ainda quando suas propriedades são declaradas.
- Exemplo:
 - “o conjunto de vogais do alfabeto da língua portuguesa”

“o conjunto de vogais do alfabeto da língua portuguesa”

- Chamamos de A o conjunto de vogais, sabemos ainda que as vogais do alfabeto da língua portuguesa são a-e-i-o-u, logo escrevemos o conjunto como:

$$A = \{a,e,i,o,u\}$$

Conjuntos

- Muitas vezes não conseguimos escrever o conjunto explicitamente, sendo assim, utilizamos uma propriedade que o caracteriza.
- Exemplo: Queremos listar o conjunto dos número pares.

Sabemos que listar esse conjunto é muito trabalhoso, sendo assim, iremos definir esse conjunto através de uma propriedade:

$$P = \{n \mid n \text{ é um número par}\}$$

$$P = \{n \mid n \text{ é um número par}\}$$

- O conjunto P é dado por todos os números n 's tal que n é um número par.
- Ou ainda, podemos escrever esse conjunto como todos aqueles que são múltiplos de 2:

Como?

$$P = \{n \mid n \text{ é um número par}\}$$

- O conjunto P é dado por todos os números n 's tal que n é um número par.
- Ou ainda, podemos escrever esse conjunto como todos aqueles que são múltiplos de 2:

$$P = \{2n \mid n \text{ é um número inteiro}\}$$

O conjunto P é dado pelos números da forma $2n$ tal que n é um número inteiro.

Conjuntos

- O conjunto P é dado pelos números da forma 2^n tal que n é um número inteiro.

- OU,

$$P = \{2^n \mid n=0,1,2,3,4,\dots\}$$

Como escrevemos?

Conjuntos

- O conjunto P é dado pelos números da forma $2n$ tal que n é um número inteiro.

- OU,

$$P = \{2n \mid n=0,1,2,3,4...\}$$

O conjunto P é dado pelos números da forma $2n$ tal que n é igual a $0,1,2,3....$

Logo não existem uma única maneira de descrever um conjunto.

Conjuntos

- De uma forma geral, a definição de um conjunto por propriedades pode ser dada por:
- A é um conjunto tal que todo elemento de A satisfaz a propriedade $p(a)$, ou seja

$$A = \{a \mid p(a)\}$$

Conjuntos

- Exemplo:

$A = \{a \mid a \text{ é brasileiro}\}$, aqui a propriedade $p(a)$ é o critério se é ou não brasileiro.

Ayrton Senna é brasileiro, logo Ayrton Senna é um elemento de A , entretanto a rainha Elizabeth II não é brasileira, logo ela não é um elemento de A .

Conjuntos

- Simbolicamente utiliza-se o símbolo \in para dizer que um elemento pertence a um conjunto do exemplo .

Ayrton Senna \in A

Ou seja, Ayrton Senna pertence ao conjunto A. Já o caso contrário, utilizamos o símbolo \notin para dizer que um elemento não pertence ao conjunto.

Conjuntos

- Exemplo

Rainha Elizabeth II $\notin A$

Ou seja, rainha Elizabeth II não pertence ao conjunto A.

Conjuntos

- Vale a pena observar que como os elementos de um conjunto são distintos se $B = \{a, a, a, b, b, c\} = \{a, b, c\}$, ou seja, representar um conjunto com elementos repetidos é equivalente ao mesmo conjunto sem repetir os elementos.
- E mais, se considerarmos $C = \{a, b\}$, sabemos que $a \in C$, entreando a e $\{a\}$ são considerados diferentes, pois o primeiro é um elemento de um conjunto e o segundo é um conjunto que tem a como elemento.
- Logo $a \neq \{a\}$

Tipos de Conjuntos

- Como visto anteriormente, a definição de conjunto é bastante geral, então, quando falamos de elementos de conjuntos, ou tipos de conjuntos podemos estar trabalhando com conjuntos abstratos ou não, com elementos “simples” ou mais complexos, inclusive podemos estar trabalhando com conjuntos de conjuntos.
- Sendo assim, algumas propriedades são importantes para se destacar.

Igualdade de conjuntos

- Dados dois conjuntos A e B , dizemos que esses conjuntos são iguais ou idênticos se, e somente se quando esses conjuntos contém os mesmos elementos.
- Isto é, $A = B$ se e somente se para qualquer elemento $x \in A \leftrightarrow x \in B$
- Caso contrário $A \neq B$, ou seja, os conjuntos não são iguais.

Igualdade de conjuntos: Exemplo

- Seja $A = \{\text{Maria, João, Paulo, Camila, Rodrigo, Joana, Vanessa}\}$ e
- $B = \{\text{Vanessa, Rodrigo, Joana, Maria, Camila, Paulo, João, Paulo}\}$
- Esses conjuntos são iguais?

Igualdade de conjuntos: Exemplo

- Seja $A = \{\text{maria, João, Paulo, Camila, Rodrigo, Jona, Vanesa}\}$ e
- $B = \{\text{Vanessa, Rodrigo, Joana, Maria, Camila, Paulo, João, Paulo}\}$

Note que esses conjuntos contém os mesmos nomes, mas em ordem diferente, quando queremos verificar se os dois conjuntos são iguais, a ordem em que estão colocados os elementos não importa.

Logo, esses conjuntos são iguais.

Conjunto Vazio

- O único conjunto que é subconjunto de qualquer conjunto, é o conjunto vazio, denotado como \emptyset .
- Logo, se B é um conjunto qualquer então $\emptyset \in B$.
- Ele leva esse nome pois é o único conjunto que não contém nenhum elemento.

Conjunto Universo

- Assim como o conjunto vazio, o conjunto universo é um tipo especial de conjunto, pois ele é definido como o conjunto que contém todos os conjuntos, ou seja, qualquer conjunto A está contido no conjunto universo U , $A \subseteq U$

Subconjuntos

- Sejam A e B conjuntos. Se todo elemento de A é elemento de B , então A é um subconjunto de B , em que denotamos como $A \subset B$ ou $B \supset A$.
- Como consequência, temos que todo conjunto é um subconjunto de si mesmo. E mais, se $A \subset B$ mas $A \neq B$, então dizemos que A é um subconjunto próprio de B , denotado como $A \subsetneq B$.
- Ou seja, A é um subconjunto próprio de B quando todo elemento de A é elemento de B , mas existe pelo menos um elemento de B que não pertence a A .

Exemplo:

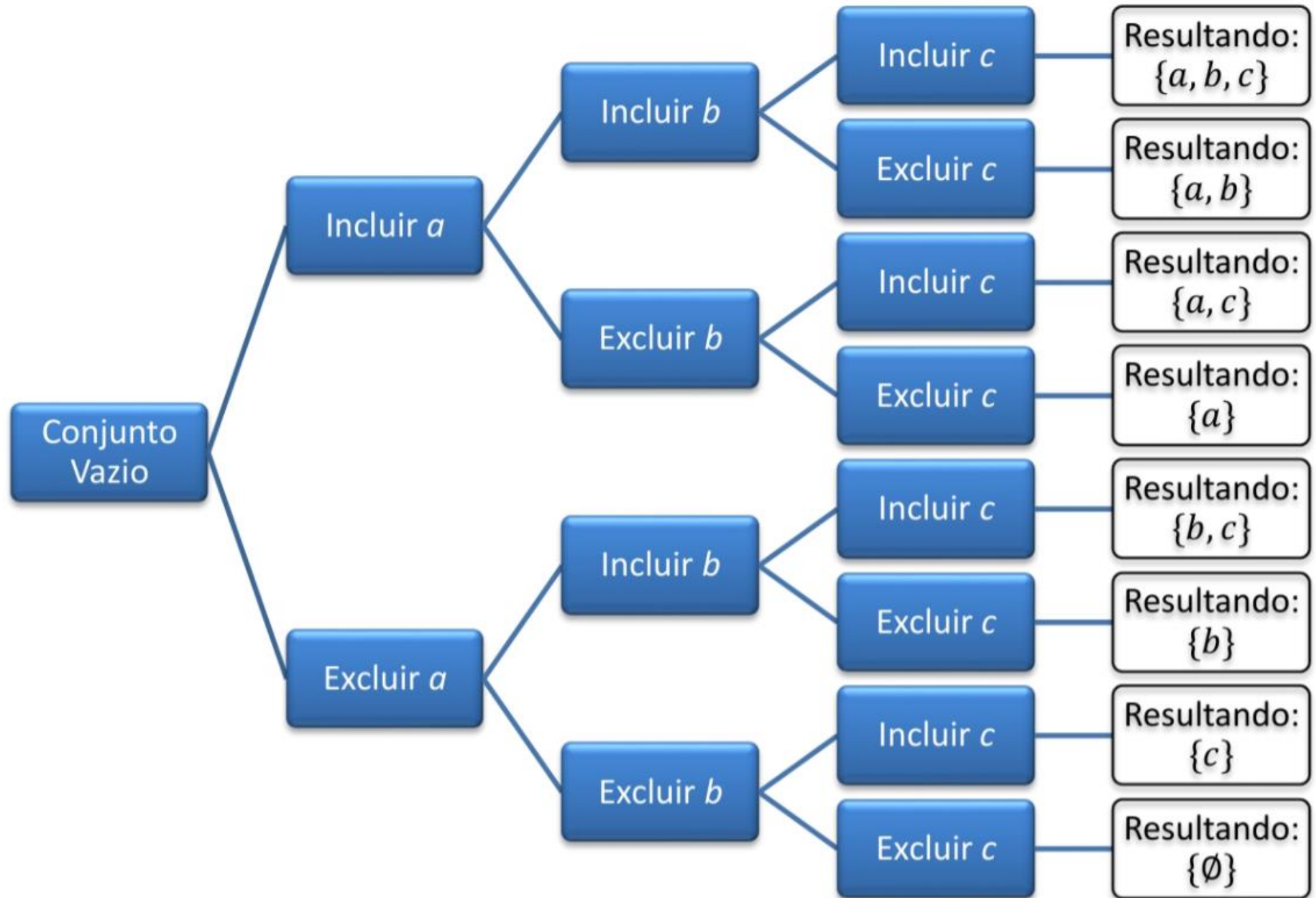
- $\{a,b\} \subseteq \{b,a,c\}$
- $\{1,2,3\} \subseteq N$
- $\{1,2,3\} \subset N$
- $N \subset \mathbb{R}$

Contagem de subconjuntos

- Quando subconjuntos tem um conjunto?
- Se considerar o conjunto $A = \{a,b,c\}$ então temos:
- Subconjunto vazio: $\emptyset \rightarrow 1$ *conjunto*.
- Subconjuntos com apenas 1 elemento : $\{a\}, \{b\}, \{c\} \rightarrow 3$ conjuntos
- Subconjunto com dois elementos: $\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\} \rightarrow 3$ conjuntos
- Subconjunto com três elementos (que na verdade é o próprio A): $\{a,b,c\} \rightarrow 1$ Conjunto.

Contagem de subconjuntos

- Somando as quantidades de subconjuntos, que encontramos, um total de $1+3+3+1 = 8$.
- Ou seja, toda vez que queremos encontrar os subconjuntos, devemos analisar todas as possíveis combinações. E para isso devemos olhar para cada elemento e fazer a escolha se queremos ou não incluir tal elemento.



- Note que para cada elemento que vamos analisar temos duas opções de escolha “incluir ou não incluir” o elemento, ou seja, pro elemento a, temos 2 opções, pro elemento b, temos 2 opções, pro elemento c temos 2 opções.
- Logo, quando vamos fazer a contagem as opções que temos são $2 \times 2 \times 2 = 8$.
- Pois para cada “caminho que escolhermos, mais duas opções aparecem. Esse método de contagem é definido como:

Contagem de subconjuntos

- Seja A um conjunto finito e seja n o número de elementos A contém. Então A é $p(A) = 2^n$.

Na literatura também encontramos essa definição como conjunto potência ou conjunto de partes.

Testando no exemplo anterior, tínhamos que A continha 3 elementos, então $p(A) = 2^3 = 8$.

Unões e Intersecções

- Assim como quando estamos trabalhando com números, em que aplicamos as operações soma, multiplicação, subtração e divisão, com os conjuntos também é possível fazer operações.

União

- Sejam A e B dois conjuntos. Dizemos que a União dos conjuntos A e B denotada por $A \cup B$, é um conjunto que contém todos os elementos que estão em A ou em B , ou em ambos.
- Matematicamente, diz que um elemento x pertence a união de dois conjunto $A \cup B$, é equivalente a dizer que $x \in A$ ou $x \in B$, x pertente ao conjunto A ou x pertence ao conjunto B ; ou ainda podemos escrever $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

União

- Por exemplo: sejam $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $B = \{0,2,4,6,8,10\}$. Então a união desses conjuntos resulta em $A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,8,10\}$.

Intersecção

- Sejam A e B dois conjuntos, dizemos que a intersecção dos conjuntos A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto que contém todos os elementos que pertencem em A e pertencem em B, ou seja, apenas os elementos em comum/iguais desses conjuntos.
- Matematicamente, dizer que um elemento x pertence a intersecção de dois conjuntos $A \cap B$, é equivalente a dizer que $x \in A$ e $x \in B$, x 'pertence ao conjunto A e x pertence ao conjunto B.
- Como podemos escrever matematicamente?

Intersecções

- $A \cap B = ?$

Intersecções

- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- Olhando para o mesmo exemplo que estudamos a união dos conjuntos , agora faremos a intersecção:
- sejam $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ e $B = \{0,2,4,6,8,10\}$. Então a intersecção desses conjuntos resulta em $A \cap B = ???$

Intersecções

- $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- Olhando para o mesmo exemplo que estudamos a união dos conjuntos , agora faremos a intersecção:
- sejam $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ e $B = \{0,2,4,6,8,10\}$. Então a intersecção desses conjuntos resulta em $A \cap B = \{0,2,4\}$.

Intersecções

- Dizemos ainda que dois conjuntos são disjuntos quando sua intersecção resulta no conjunto vazio.
- Por exemplo, $A = \{0,2,4,6,8,10\}$ e $B = \{1,3,5,7,9\}$, então $A \cap B = \emptyset$, já que ambos os conjuntos são distintos.

Diferença

- Sejam A e B dois conjuntos. Dizemos que a diferença dos conjuntos A e B , denotada por $A - B$, é o conjunto que contém todos os elementos que estão em A mas que não estão em B .
- Matematicamente, dizer que um elemento x pertence na diferença de dois conjuntos $A - B$, é equivalente a dizer que $x \in A$ e $x \notin B$, x pertence ao conjunto A e x não pertence ao conjunto B ; ou ainda podemos escrever $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

Exercício

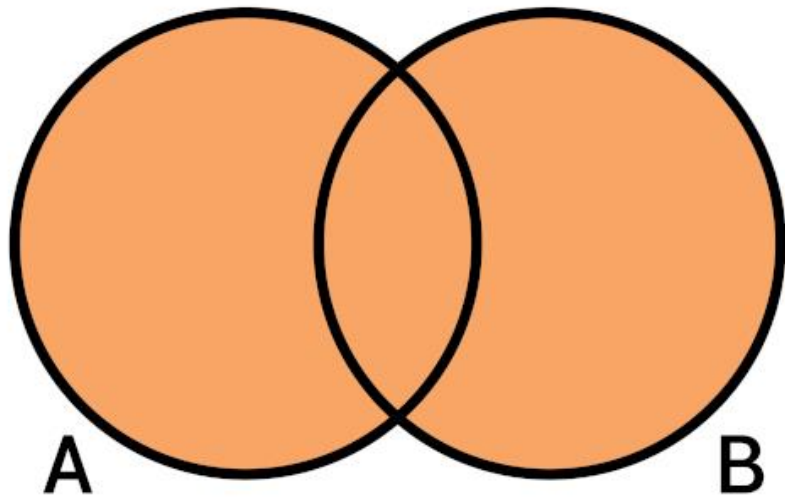
- Qual o resultado para $A - B$ sendo:
- $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ e $B = \{0,2,4,6,8,10\}$.

Exercício

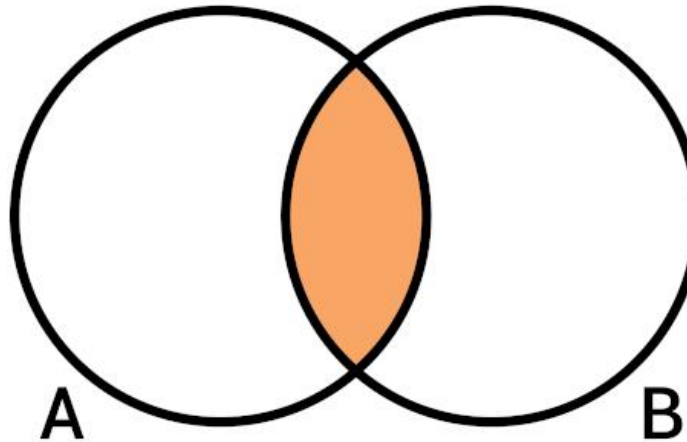
- Qual o resultado para $A - B$ sendo:
- $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ e $B = \{0,2,4,6,8,10\}$.
- $A - B = \{1,3,5\}$

Até aqui vimos:

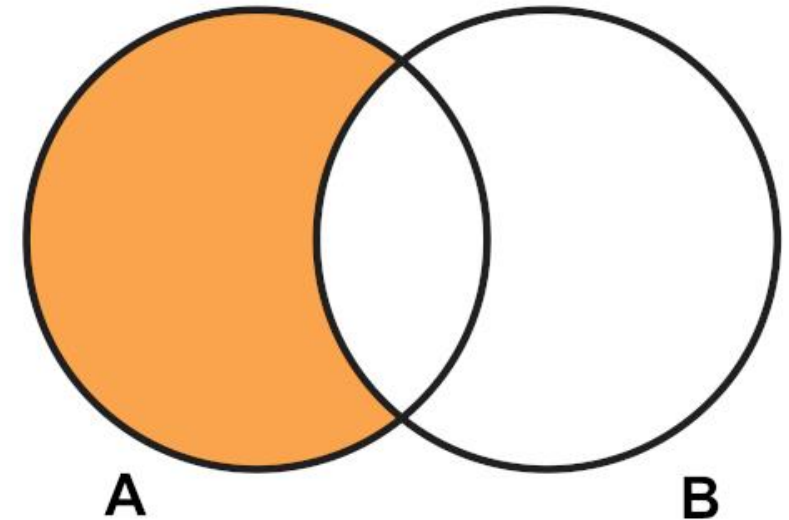
$A \cup B$



$A \cap B$



$A - B$



[Fonte: Operações com conjuntos: quais são, exemplos - Escola Kids \(uol.com.br\)](http://www.uol.com.br)

Complementar

- Se U é um conjunto universo e sejam A um conjunto. Dizemos que o complementar do conjunto A é denotado por A^C , é a diferença do conjunto Universo U com o conjunto A .
- Matematicamente, dizer que um elemento x pertence ao complementar de A , A^C , é equivalente a dizer e $x \in U$ e $x \notin A$, ou seja, x pertence ao conjunto U e x não pertence ao conjunto A ;

Complementar

- Ou ainda podemos escrever que :
- $A^C = U - A = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$

Sejam A e B subconjuntos do conjunto universal U .

- União: $A \cup B = \{x \in U | x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Notação: $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \cup_{i=1}^n A_i$

- Intersecção: $A \cap B = \{x \in U | x \in A \text{ e } x \in B\}$

Notação: $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \cap_{i=1}^n A_i$

- Diferença: $B - A = \{x \in U | x \in B \text{ e } x \notin A\}$

- Complemento: $A^c = \{x \in U | x \notin A\}$

Atividade

- Por analogia de complementares, se tivéssemos dois conjuntos A e B denotados por $A \subset B$, qual o complementar de A em relação ao conjunto B ?

Atividade

- Por analogia de complementares, se tivéssemos dois conjuntos A e B denotados por $A \subset B$, qual o complementar de A em relação ao conjunto B?
- Resposta: $A^C = B - A$

Atividade

- Seja U o conjunto universo do alfabeto brasileiro, e A o conjunto de vogais, qual seria o A^C ?

Atividade

- Seja U o conjunto universo do alfabeto brasileiro, e A o conjunto de vogais, qual seria o A^C ?
- $A^C = \{b, c, d, \dots, z\}$

- Pesquise sobre o diagrama de Venn e complemente seu conhecimento para resolver as atividades a seguir.

Atividade

- faça a representação de :
- $A \cap B$, sendo $A = \{0,1,3,5,7,9\}$ e $B = \{1,2,3,4,5,6\}$
- A e B sendo disjuntos ou seja $A \cap B = \emptyset$
- $A \cap B \cap C$ – Sendo $A = \{0,1,2,4,5,6,10,13,14\}$
- $B = \{0,1,5,7,9,10,17,18,19\}$ $C = \{0,2,3,4,7,8,9,10,11\}$

Atividade

- Uma pizzeria, com o intuito de otimizar suas vendas, fez uma pesquisa para saber qual era a pizza que seus clientes mais consomem. Entre os 500 entrevistados, as mais consumidas foram pizza de frango com catupiry, calabresa e 4 queijos. 278 consomem pizza de frango com catupiry; 175 consomem pizza de calabresa e 215 consomem pizza de 4 queijos. Dentro desse grupo 99 consomem pizza de frango com catupiry e 4 de queijos; 80 consomem pizza de frango com catupiry e calabresa; 107 consomem pizza de calabresa e 4 queijos; 37 consomem os 3 sabores. Quantos clientes consomem apenas frango com catupiry. E quantos consomem outros sabores?
- Utilize o diagrama de Venn para responder.

Questão 1

Considere os conjuntos

$$A = \{1, 4, 7\}$$

$$B = \{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$$

É correto afirmar que:

- a) $A \supset B$
- b) $A \subset B$
- c) $B \not\subset A$
- d) $B \cap A$

Questão 2

Observe os conjuntos a seguir e marque a alternativa correta.

$$A = \{x|x \text{ é um múltiplo positivo de } 4\}$$

$$B = \{x|x \text{ é um número par e } 4 \leq x < 16\}$$

- a) $145 \in A$
- b) $26 \in A \text{ e } B$
- c) $11 \in B$
- d) $12 \in A \text{ e } B$

Questão 3

Qual a possível lei de formação do conjunto $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$?

- a) $A = \{x|x \text{ é um número simétrico e } 2 < x < 15\}$
- b) $A = \{x|x \text{ é um número primo e } 1 < x < 13\}$
- c) $A = \{x|x \text{ é um número ímpar positivo e } 1 < x < 14\}$
- d) $A = \{x|x \text{ é um número natural menor que } 10\}$

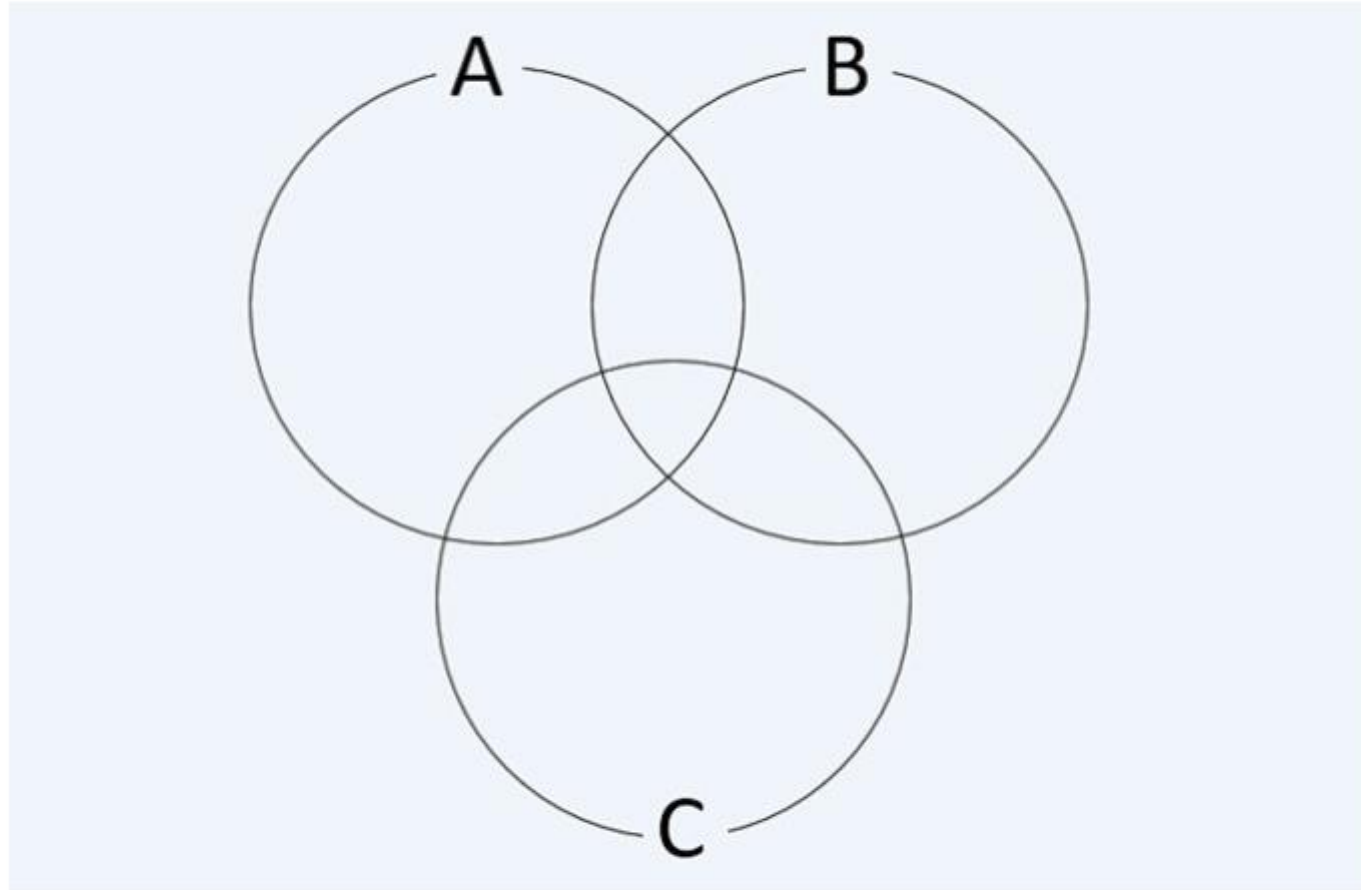
Questão 4

A união dos conjuntos $A = \{x|x \text{ é um número primo e } 1 < x < 10\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$ é dada por:

- a) $A \supset B = \{1,2,3,5,7\}$
- b) $A \subset B = \{1,2,3,5,7\}$
- c) $A \in B = \{1,2,3,5,7\}$
- d) $A \cup B = \{1,2,3,5,7\}$

Questão 5

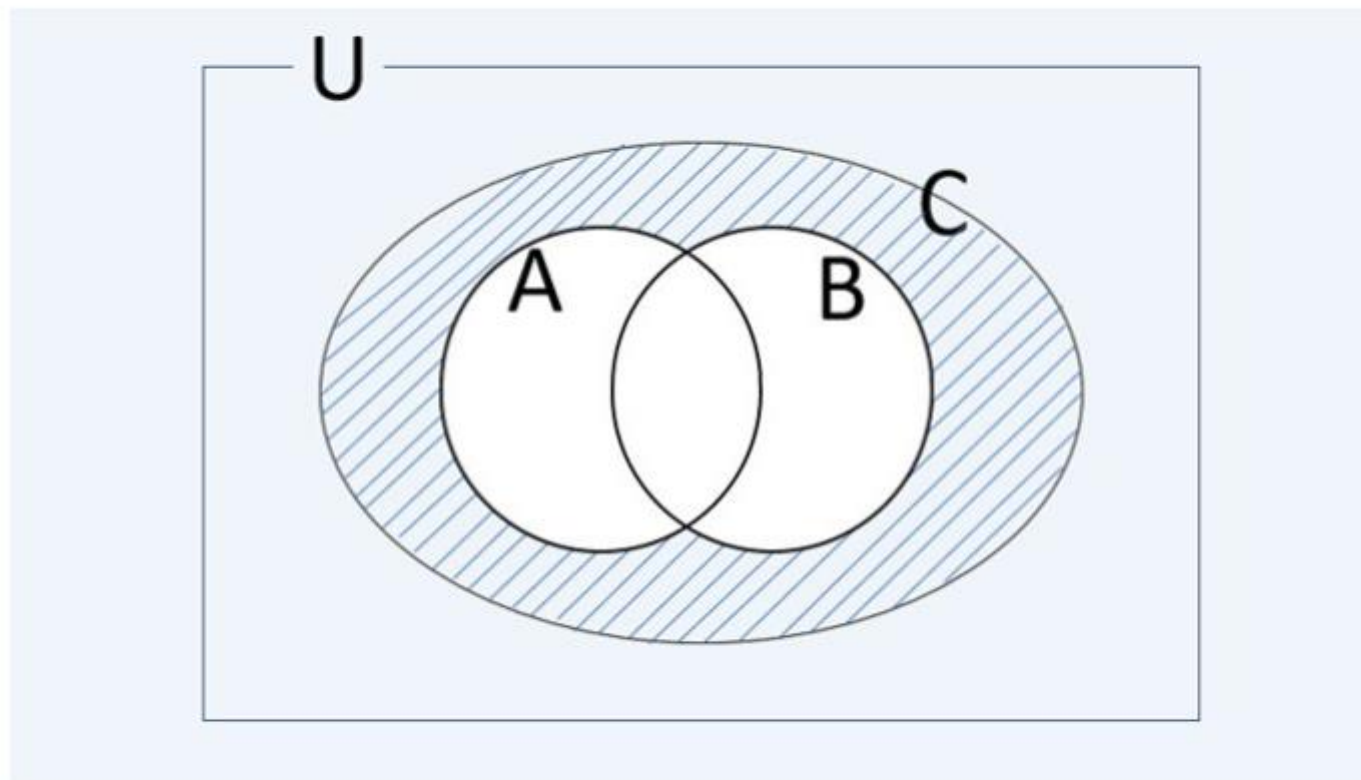
Represente os conjuntos $A = \{-3, -1, 0, 1, 6, 7\}$, $B = \{-4, 1, 3, 5, 6, 7\}$ e $C = \{-5, -3, 1, 2, 3, 5\}$ no diagrama de Venn e em seguida determine:



- a) $A \cap B$
- b) $C \cup B$
- c) $C - A$
- d) $B \cap (A \cup C)$

Questão 6

Observe a área hachurada da figura e marque a alternativa que a representa.



- a) $C \cup (A \cap B)$
- b) $C - (A \cup B)$
- c) $C \cup (A - B)$
- d) $C \cap (A \cup B)$

(UEL-PR) Num dado momento, três canais de TV tinham, em sua programação, novelas em seus horários nobres: a novela A no canal A, a novela B no canal B e a novela C no canal C. Numa pesquisa com 3000 pessoas, perguntou-se quais novelas agradavam. A tabela a seguir indica o número de telespectadores que designaram as novelas como agradáveis.

Novelas	Número de telespectadores
A	1450
B	1150
C	900
A e B	350
A e C	400
B e C	300
A, B e C	100

Quantos telespectadores entrevistados não acham agradável nenhuma das três novelas?

- a) 300 telespectadores.
- b) 370 telespectadores.
- c) 450 telespectadores.
- d) 470 telespectadores.
- e) 500 telespectadores.

- Sejam A , B e C conjuntos finitos. O número de elementos de A intersecção B é 30, o número de elementos de A intersecção C é 20 e o número de elementos de A união B união C é 15. Então o número de elementos de A intersecção $(B \cup C)$ é igual a:
a) 35.
- **b) 15.**
- **c) 50.**
- **d) 45.**
- **e) 20.**

- Num colégio de 100 alunos, 80 gostam de sorvete de chocolate, 70 gostam de sorvete de creme e 60 gostam dos dois sabores. Quantos não gostam de nenhum dos dois sabores?
- **a)** 0.
- **b)** 10.
- **c)** 20.
- **d)** 30.
- **e)** 40.

- Desafio Extra
- Seja $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{u, v\}$ e $C = \{m, n\}$. Liste os elementos do conjunto $A \times (B \times C)$.