# Complexité et algorithmes paramétrés \*

### Christophe Paul

CNRS - LIRMM, Université de Montpellier 2, France

#### Résumé

La théorie de la complexité paramétrée permet d'étudier la difficulté de problèmes algorithmiques de manière plus précise que la théorie de la complexité classique. Cette théorie permet ainsi d'expliquer pourquoi la résolution exacte est plus facile pour certains problèmes NP-Complets (e.g. Vertex Cover) que pour d'autres (e.g. Independent Set). L'idée principale est d'analyser la complexité d'un problème en fonction de la taille de l'instance, dénotée n, et d'un (ou plusieurs) paramètre(s). Un problème est **FPT** (Fixed Parameter Tractable) pour un paramètre k, s'il peut être résolu par un algorithme de complexité  $f(k) \cdot n^{O(1)}$ .

La complexité et les algorithmes paramétrés constituent un champ de recherches très actif depuis leur formalisation dans les années 90 par Downey et Fellows. En particulier de nouvelles techniques algorithmiques ont été développées dans le contexte de la complexité paramétrée et les progrès observés ces dernières années sont impressionnants.

Après une introduction retraçant l'histoire de ce domaine, nous présentons en détail les principaux paradigmes utilisés pour élaborer des algorithmes paramétrés. Nous étudierons aussi différentes classes de complexité paramétrée et les outils associés qui permettent d'établir des résultats de bornes inférieures.

## 1 Une brève histoire de la complexité paramétrée

La théorie de la complexité mesure la difficulté d'un problème par le nombre d'opérations nécessaires à sa résolution, généralement exprimé en fonction de la taille de la donnée. La distinction entre algorithmes polynomiaux et exponentiels émerge dans les années 60, notamment avec les travaux de Edmonds [34] corrélant la notion de bonne caractérisation d'un problème (qui se traduit par l'appartenance à  $\mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$ ) et l'existence d'un algorithme efficace. Au début des années 70, le théorème de Cook-Levin [22, 48] prouve que l'existence d'un algorithme polynomial pour le problème SAT impliquerait l'existence d'un tel algorithme pour tout problème appartenant à la classe  $\mathbf{NP}$ . Avec une liste de problèmes plus complète, Karp [44] montre à l'aide de réduction polynomiales que SAT n'est pas un cas isolé. La théorie de la NP-Complétude est née (voir [42, 51] pour une présentation détaillée).

L'étude algorithmique d'un problème s'est longtemps résumée en une preuve de NP-complétude ou la mise au point d'un algorithme *efficace*, c'est à dire polynomial. La situation n'est pas si simple. Le théorème suivant, issu des travaux de Robertson et Seymour sur la théorie des <sup>1</sup> de graphes, contredit l'intuition qu'un problème est *facile* s'il peut être résolu par un algorithme polynomial.

<sup>\*</sup>Recherches financées par l'ANR, projet AGAPE (ANR-09-BLAN-0159) et la Région Languedoc-Roussillon, projet KERNEL du programme  $Chercheur\ d'Avenir\ 2012.$ 

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Un graphe H est un mineur d'un graphe G, si un graphe isomorphe à H peut être obtenu en contractant des arêtes d'un sous-graphe de G.

**Théorème 1.1** [55] Toute famille de graphes finis close par mineur peut être reconnue en temps polynomial.

Ce théorème repose sur le fait que tester si un graphe est mineur d'un autre graphe se résoud en temps  $O(n^3)$  et que si une famille de graphes finis est close par mineur, alors elle possède un nombre fini d'obstructions – graphes exclus minimal pour la relation de mineur (car la relation de mineur sur l'ensemble des graphes forment un bel-ordre [54]). Autrement dit, Robertson et Seymour nous apprennent qu'il n'est pas nécessaire de connaître la liste d'obstructions pour établir l'existence d'un algorithme de reconnaissance polynomial. Ce théorème permet de montrer qu'un problème appartient à  $\mathbf{P}$  sans décrire le moindre algorithme<sup>2</sup>.

Comme l'ont observé en 1986 Fellows et Langston [36], les conséquences du théorème 1.1 vont bien au-delà. Il permet de nuancer l'idée que tous les problèmes NP-complets sont équivalents du point de vue de leur difficulté. Pour observer cela, considérons les problèmes NP-Complet classiques VERTEX COVER et COLORATION. Dans le premier, il s'agit de décider si un graphe G possède un ensemble S d'au plus k sommets dont la suppression élimine toute les arêtes (le graphe H = G - S est un graphe sans arêtes). L'ensemble S est une (k-) couverture (des arêtes) de G. Le second consiste à décider si les sommets d'un graphe peuvent être partitionnés en au plus k ensembles indépendants (le graphe admet une k-coloration). Il est aisé de constater que la famille  $\mathcal{F}_{k-VC}$  des graphes possèdant une k-couverture (pour k fixé) est close par mineur. La famille  $\mathcal{F}_{k-VC}$  peut donc être reconnue en temps polynomial. Par contre, il est bien connu que pour k=3, le problème Coloration reste NP-Complet. Il existe donc une différence notable de difficulté entre ces deux problèmes<sup>3</sup>.

Pour comprendre la différence entre Vertex Cover et Coloration, nous devons examiner de plus près la complexité de l'algorithme obtenu à l'aide du Théorème 1.1 pour Vertex Cover. Puisque l'ensemble des mineurs exclus de la famille  $\mathcal{F}_{k-VC}$  dépend de la valeur de k, la constante cachée dans la notation O(.) est en fait une fonction f(k). Le problème Vertex Cover peut donc être résolu en temps  $O(f(k) \cdot n^3)$ . Pour Vertex Cover, le facteur polynomial de la complexité est indépendant du paramètre k, ce n'est pas le cas pour Coloration qui paramètré par le nombre de couleurs est para-NP-Complet (NP-Complet pour k > 2 fixé). En fait, la meilleure complexité du problème Coloration reste  $O(2^n.n)$  [7] (l'algorithme naïf consistant à tester la validité les  $k^n$  colorations possibles). Contrairement à Coloration, les problèmes de la classe  $\mathbf{XP}$  ont une complexité polynomiale pour chaque valeur fixée du paramètre : leur complexité est de la forme  $O(n^{f(k)})$  – le degré du polynôme dépend du paramètre k. La classe  $\mathbf{XP}$  contient par exemple le problème Independent Set paramétré par la taille de la solution : en effet il est possible de tester l'existence d'un ensemble de sommets indépendents (deux à deux non-adjacents) en temps  $O(n^k)$ .

Pour distinguer les problèmes de décision VERTEX COVER, COLORATION et INDEPENDENT SET, nous notons p-VERTEX COVER, p-COLORATION et p-INDEPENDENT SET leurs versions paramétrées respectivement par la taille de la couverture et par le nombre de couleurs. De manière générale, une paramétrisation d'un problème associe un entier positif k (le paramètre) à toute instance.

**Définition 1.2** Un problème paramétré est Fixed Parameter Tractable (FPT) s'il peut être résolu par un algorithme de complexité  $O(f(k) \cdot n^c)$ , avec n la taille de la donnée, c une constante positive

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Il existe de nombreuses familles de graphes closes par mineurs dont on ne connait ni la liste, ni le nombre d'obstructions.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Il semble que, dans les années 80's, certains auteurs (voir [57] par exemple) évoquent que la complexité classique n'offfre pas les bons outils d'analyse puisque certains problèmes – requêtes dans les bases de données par exemple – possèdent plusieurs composantes naturelles.

et f(.) une fonction calculable dépendant uniquement du paramètre  $k \in \mathbb{N}$ . La constante cachée dans la notation O(.) est indépendante du paramètre k.

Lorsqu'un problème est  $\mathbf{FPT}$  pour un paramètre k donné, il faut comprendre que le coût de l'explosion combinatoire nécessaire à sa résolution ne dépend pas de la taille de l'instance traitée mais est limité par une fonction du paramètre. Pour autant, les algorithmes  $\mathbf{FPT}$  peuvent-ils être considérés comme efficaces? La fonction f(.) obtenue pour p-Vertex Cover par le Théorème 1.1 est une exponentielle dont la hauteur est décrite par une exponentielle... Ce n'est donc pas très convaincant!

Heureusement dans le cas de p-Vertex Cover, l'histoire ne s'arrête pas là. Une première amélioration est décrite par Johnson [43] en 1987 qui propose un algorithme de programmation dynamique de complexité  $O(2^{2^k} \cdot n^2)$ . Il est très surprenant qu'un algorithme extrêment simple et efficace ne soit décrit qu'en 1988 par Fellows [35], soit plus de 15 années après la preuve de NP-Complétude par Karp [44]. Puisque chaque arête doit être couverte par l'un de ses deux sommets, l'algorithme consiste à développer un arbre de branchement binaire de profondeur au plus k utilisant la règle suivante.

**Règle de branchement 1.3** Soit (G, k) une instance de p-VERTEX COVER avec G un graphe et  $k \in \mathbb{N}^+$ . Si (x, y) est une arête de G, alors brancher sur les instances :

1. 
$$(G-x, k-1)$$
  
2.  $(G-y, k-1)$ 

La complexité obtenue est  $O(2^k \cdot n)$ . Aujourd'hui, la complexité de l'algorithme paramétré le plus efficace pour p-VERTEX COVER est  $O(1.2738^k + kn)$  [19]. Notons qu'une telle complexité permet aujourd'hui de rechercher de couvertures de quelques milliers de sommets dans des graphes de plusieurs millions de sommets [33, 47].

A la fin des années 80, l'algorithme paramétré efficace de Vertex Cover semble isolé. En effet, les premières contributions significatives de la théorie de la complexité paramétrée restaient très théoriques. Après avoir observé les conséquences du théorème 1.1, Fellows et Langston dans une série d'articles [37, 38] proposent des méthodes / outils non-constructifs pour démontrer l'existence d'algorithmes FPT. Parmis ces premiers développements, nous notons l'utilisation d'un théorème analogue à celui de Myhil-Nerode par Fellows and Langston [38] dans le contexte des automates d'arbres et graphes de largeur arborescente bornée (voir aussi [1] et la méthode des test-set). Dans un esprit similaire, le théorème de Courcelle [23] prouve que tout problème de graphes exprimable en logique monadique du second ordre est FPT s'il est paramétré par la largeur arborescente du graphe. Même si ces deux résultats permettent la construction effective d'algorithmes paramétrés, les fonctions dépendant du paramètre restent gigantesques.

Avant de poursuivre la discussion sur l'efficacité des algorithmes **FPT** pour la résolution des problèmes difficiles, revenons sur la non-existence d'un algorithme **FPT** pour le problème p-Coloration. Ce n'est qu'au début des années 90, que Downey et Fellows formalisent dans une série d'articles [30, 29, 28] la notion de réduction paramétrée polynomiale<sup>4</sup> pour montrer des équivalences entre problèmes paramétrés. En travaillant sur une notion de non-déterminisme limité, Downey et Fellows étudient la classe **XP**. Ils définissent la **W**-hiérarchie de classes de complexité : **FPT** =

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Une réduction paramétrée polynomiale peut-être comprise comme une réduction polynomiale (ou réduction de Karp) qui préserve (ou contrôle) les paramètres.

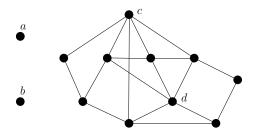


FIG. 1 – Règles de réductions pour p-VERTEX COVER : les sommets isolés a et b sont inutiles et peuvent être supprimés ; les sommets c et d doivent appartenir à toute 4-couverture s'il en existe une. Nous obtenons que G possède une couverture de taille 4 ssi  $G - \{a, b, c, d\}$  possède une couverture de taille 2.

 $\mathbf{W}[0] \subseteq \mathbf{W}[1] \subseteq \mathbf{W}[2] \subseteq \cdots \subseteq \mathbf{XP}$ . Un théorème analogue à celui de Cook-Levin dans le contexte de la complexité paramétrée identifie un premier problème (SHORT TURING MACHINE ACCEPTANCE) complet pour la classe  $\mathbf{W}[1]$ . La complétude du problème p-INDEPENDENT SET pour la classe  $\mathbf{W}[1]$  est aussi établie.

A la fin des années 90, le livre de Downey et Fellows [31] présente une théorie désormais complète de la complexité et des algorithmes paramétrés : techniques permettant d'établir l'existence d'algorithmes **FPT** d'une part, outils permettant de montrer la difficulté d'un problème paramétré d'autre part. Notons que la théorie de la complexité paramétrée a permis l'émergence de nouveaux paradigmes algorithmiques. Outre les méthodes de programmation dynamique sur les décompositions arborescentes et les arbres de recherche bornée évoquées plus tôt, mentionnons color coding [4], la compression itérative [53] . . . et la kernelization [31].

Les succès pratiques des algorithmes paramétrés s'illustrent de manière étonnante à l'aide de la kernelization, qui se développe aujourd'hui comme une théorie à part entière. La kernelization formalise la notion de pré-traitement polynomial dans le cadre de la théorie de la complexité paramétrée. Pour introduire cette technique, revisitons le problème VERTEX COVER à l'aide de deux observations élémentaires [15].

#### **Observation 1.4** Soit (G, k) une instance de p-Vertex Cover. Alors

- 1. si v est un sommet isolé, alors G possède une couverture de taille k ssi G-v possède une couverture de taille k;
- 2. si v est un sommet de degré au moins k+1, alors G possède une couverture de taille k ssi G-v possède une couverture de taille k-1.

Ces propriétés se traduisent facilement en règles de réduction qui suppriment les sommets isolés et les sommets de degré au moins k+1 (voir Figure 1). Par un simple argument de comptage, on montre que si aucune de ces règles ne s'applique et que G possède une couverture de taille k, alors le nombre de sommets de G est au plus  $k+k^2$ . Autrement dit, toute instance du problème p-VERTEX COVER peut être réduite en temps polynomial en un instance équivalente de taille polynomiale en k. L'instance réduite est un kernel (ou noyau). En fait par un résultat datant de 1975 [49], on peut montrer que p-VERTEX COVER admet un noyau de taille 2k. Plus formellement, nous avons la définition suivante.

**Définition 1.5** Un algorithme de kernelization, pour un problème paramétré  $\Pi$ , transforme (réduit) en temps polynomial une instance x paramétrée par k en une instance équivalente x' paramétrée par k' de telle sorte que :

- 1. (x,k) est une instance positive de  $\Pi$  ssi (x',k') est une instance positive de  $\Pi$ ;
- 2. la taille de x' est bornée par une fonction de k (il existe une fonction calculable g telle que  $|x'| \leq g(k)$ );
- 3. le nouveau paramètre k' dépend du paramètre k (il existe une fonction calculable g' telle que  $k' \leq g'(k)$ ).

L'instance réduite est appelée noyau (ou kernel). Un noyau polynomial est un noyau dont la taille est bornée par un polynôme en k (i.e.  $q(k) = k^{O(1)}$ ).

D'après notre discussion précédente, VERTEX COVER admet donc un noyau polynomial. La définition ci-dessus autorise des noyaux de taille exponentielle. En fait un noyau de taille  $2^k$  pour VERTEX COVER est trivial : observons que sur un graphe contenant au moins  $2^k$  sommets l'agorithme de branchement décrit plus tôt calcule une couverture en temps polynomial; un graphe de taille au plus  $2^k$  est donc un noyau (exponentiel) pour p-VERTEX COVER. De manière générale cet argument permet de montrer le théorème suivant.

#### Théorème 1.6 Un problème paramétré est FPT ssi il admet un noyau.

Cette caractérisation montre qu'un problème paramétré peut être résolu en temps  $O(f(k) \cdot n^c)$  ssi il peut être résolu en temps  $O(g(k) + n^{c'})$ . Il est possible donc d'interpréter l'ensemble la théorie de la complexité paramétrée comme l'étude formelle des méthodes de prétraitement polynomial (avec garantie). Ce n'est pas possible avec la théorie de la complexité classique car elle évalue l'efficacité d'un algorithme seulement en fonction de la taille de l'instance. Si nous étions capable de montrer qu'un algorithme polynomial pouvait réduire (en fonction de n) la taille d'une instance, nous aurions une preuve que  $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ , ce qui semble improbable selon les hypothèses actuelles de complexité. L'introduction d'un paramètre indépendant de la taille de l'instance est donc primordial.

Il est naturel de demander si tous les problèmes **FPT** admettent un noyau polynomial. La réponse à cette question est très récente. En 2008, Bodlaender et al. [9] proposent les premiers outils permettant d'établir des bornes inférieures exponentielles sur la taille des noyaux (sous des hypothèses de complexité courantes). Depuis de nouvelles techniques sont régulièrement proposées. Par exemple, il est intéressant de noter que le problème p-Connected Vertex Cover (la couverture doit induire un sous-graphe connexe) est **FPT** mais, contrairement à Vertex Cover, n'admet pas de noyau polynomial.

Pour résumer notre discussion, nous avons vu que la paramétrisation des problèmes, difficiles du point de vue de la complexité classique, permettait d'affiner notre compréhension des classes de complexités usuelles. En particulier, nous pouvons considérer que la classe  $\bf P$  contient les problèmes admettant un noyau de taille constante (peu importe le paramètre). Nous distinguons ensuite la classe de problèmes paramétrés admettant un noyau polynomial (p-Vertex Cover) de la classe des problèmes  $\bf FPT$  sans noyau polynomial (p-Connected Vertex Cover). Enfin certains problèmes paramétrés ne sont pas  $\bf FPT$  mais admettent un algorithme de complexité  $n^{O(k)}$  (p-Independent Set). Cette classe, connue comme la classe  $\bf XP$ , contient les classes de la  $\bf W$ -hiérarchie. Remarquons que le problème p-Coloration n'appartient pas à la classe  $\bf XP$  puisque tester l'existence d'une 3-coloration dans un graphe est un problème NP-Complet.

Organisation de l'article. Notre présentation suit la hiérarchie de classe décrite au paragraphe précédent. La section 3 présente des exemples classiques d'algorithmes de kernelization. La section 4 est une synthèse des techniques permettant d'établir des bornes inférieures exponentielles sur la taille des noyaux. La section 5 est dédiée à la présentation de techniques algorithmiques classiques dans le cadre de la complexité paramétrée. Finalement, nous discuterons des problèmes non-FPT (sans noyau exponentiel) et de la W-hiérachie dans la section 6. La plupart des sections peuvent se lire de manière indépendante.

#### 2 Notations

Problèmes et instances paramétrés. De manière classique, un problème  $\Pi$  est décrit comme un langage sur un alphabet  $\Sigma$ , *i.e.*  $\Pi \subseteq \Sigma^*$ . Une instance de  $\Pi$  est une chaîne  $x \in \Sigma^*$  dont la taille sera dénotée |x|. Une paramétrisation de  $\Pi$  est une fonction  $\kappa: \Sigma^* \to \mathbb{N}$ . Nous noterons  $\kappa$ - $\Pi$  le problème  $\Pi$  paramétré par  $\kappa$  et  $(x, \kappa(x))$  une instance de  $\kappa$ - $\Pi$ . Nous écrirons abusivement que  $\kappa$ - $\Pi$  appartient à la classe  $\mathbf{NP}$  si le problème  $\tilde{\Pi} = \{x\#1^{\kappa(x)} \mid (x, \kappa(x)) \in \kappa$ - $\Pi$ } appartient à la classe  $\mathbf{NP}$ . La paramétrisation standard d'un problème  $\Pi$  est la taille de la solution recherchée. Nous noterons cette paramétrisation p- $\Pi$ .

La complexité d'un problème ou d'un algorithme paramétré sera décrite avec les notations O(.) ou  $O^*(.)$ . La dernière néglige le facteur polynomial de la fonction de complexité :  $O(2^k \cdot n^{120})$  pourra donc être noté  $O^*(2^k)$ .

**Graphes.** Nous noterons par  $V_G$  et  $E_G$  respectivement l'ensemble des sommets et arêtes du graphe G. Nous noterons  $n_G = |V_G|$  et  $m_G = |E_G|$ . L'ensemble  $N_G(x)$  désigne le voisinage d'un sommet  $x \in V_G$  dans G,  $N_G[x] = N_G(x) \cup \{x\}$  est son voisinage clos. Le degré d'un sommet  $x \in V_G$  est  $d_G(x) = |N_G(x)|^5$ . Si S est un sous-ensemble de sommets, alors le sous-graphe induit par S est le graphe  $G[S] = (S, E_G \cap S^2)$ . Nous noterons G - S le graphe obtenu à partir de G en suprimant les sommets de S, c'est à dire  $G - S = G[V_G \setminus S]$ . Lorsque S est le singleton  $\{x\}$ , nous écrirons abusivement G - x au lieu de  $G - \{x\}$ . De manière similaire, si F est un sous-ensemble d'arêtes, alors G - F est le graphe  $H = (V, E \setminus F)$ . Si F ne contient qu'une arête e, nous noterons H = G - e. Un hypergraphe  $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$  est formé d'un ensemble V de sommets V et d'un ensemble  $\mathcal{E}$  d'hyperarêtes (chaque hyperarête est un sous-ensemble non-vide de V).

# 3 Noyaux polynomiaux

De nombreux noyaux polynomiaux sont obtenus à l'aide de règles de réduction "locales" qui permettent d'exclure localement une solution de taille k. L'exemple typique le noyau quadratique pour le problème p-VERTEX COVER est décrit dans l'introduction : si un sommet possède au moins k+1 voisins, il appartient à toute solution de taille k. Les meilleures bornes sur la taille des noyaux sont obtenues à l'aide de règles de réduction globales. Dans le cas de p-VERTEX COVER, des noyaux linéaires utilisent la programmation linaire ou une règle de décomposition en couronne [21]. Nous ne développerons pas ces résultats très largement exposés dans la littérature (voir [39, 50]).

Nous présentons ci-dessous deux noyaux polynomiaux. Le premier repose sur le lemme du tournesol qui permet de généraliser le noyau quadratique de p-VERTEX COVER à d'autres problèmes.

 $<sup>^5 {\</sup>rm Lorsqu'il}$ n'y aura pas d'ambiguïté sur le graphe, l'indice G sera omis.

Puis nous détaillons un noyau linéaire pour le problème p-FEEDBACK ARC SET IN TOURNAMENT qui utilise une règle de réduction globale à base de couplages. Ce type de technique qui a été utilisée pour la première fois sur le problème p-FEEDBACK VERTEX SET [56] permet souvent d'obtenir des noyaux de taille optimale.

## 3.1 d-Hitting Set: lemme du tournesol

Etant donnée une famille  $\mathcal{E}$  de sous-ensembles de taille au plus d d'un ensemble V, c'est à dire un hypergraphe  $\mathcal{H}=(V,\mathcal{E})$ , le problème d-HITTING SET consiste à décider s'il existe  $X\subseteq V$  de taille au plus k tel que pour tout  $F\in\mathcal{E}, F\cap X\neq\emptyset$ . Un tel ensemble X est appelé couverture (ou transversal) de  $\mathcal{H}$ . Notons que le problème VERTEX COVER sur un graphe G=(V,E) correspond exactement à 2-HITTING SET sur l'hypergraphe  $\mathcal{H}=(V,E)$ .

Les règles permettant d'obtenir un noyau quadratique pour p-VERTEX COVER (décrit dans l'introduction) découlent du lemme du tournesol (ou sunflower lemma). Nous montrons deux applications de ce lemme dans le cadre de la kernelization. La première est la généralisation du noyau pour p-VERTEX COVER au problème p-d-HITTING SET – paramétré par k+d où k est la taille de la couverture recherchée (voir [2, 39]). Nous étudions ensuite des problèmes de modification de graphes par suppression de sommets.

**Définition 3.1** Un tournesol dans un hypergraphe d-uniforme  ${}^6\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$  est un ensemble  $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots S_\ell\} \subseteq \mathcal{E}$  pour lequel il existe  $C \subseteq V$  tel que pour tout  $1 \leqslant i < j \leqslant \ell$ ,  $S_i \cap S_j = C$ . L'ensemble C est le cœur du tournesol et les élements de  $\mathcal{S}$  sont ses pétales. La taille d'un tournesol est son nombre de pétales.

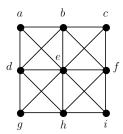


FIG. 2 – Soit  $\mathcal{H} = (V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}, \epsilon)$  l'hypergraphe dont les hyperarêtes sont les ensembles de sommets alignés horizontalement, verticalement ou en diagonal. Observons que  $S_1 = \{\{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{g, h, i\}\}$  est un tournesol à trois pétales dont le cœur est vide. Alors que  $\{e\}$  est le cœur du tournesol  $S_2 = \{\{d, e, f\}, \{b, e, h\}, \{a, e, i\}, \{q, e, c\}\}$ .

Remarquons que le cœur d'un tournesol peut être vide (voir figure 2).

**Lemme 3.2 (Lemme du tournesol)** [39] Soient  $k, d \in \mathbb{N}$  et  $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$  un hypergraphe d-uniforme. Si  $|\mathcal{E}| > (k-1)^d \cdot d!$ , alors  $\mathcal{H}$  contient un tournesol de taille k. Pour d fixé, un tournesol peut être identifié en temps polynomial en k+n.

*Proof:* La preuve est une récurrence sur d. Le cas d = 1 est trivial. Soit  $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$  un hypergraphe (d+1)-uniforme tel que

$$|\mathcal{E}| > (k-1)^{(d+1)} \cdot (d+1)!$$

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Un hypergraphe d-uniforme ne contient que des hyperarêtes de taille d.

Soit  $S = \{S_1, \dots S_\ell\}$  une famille maximale d'hyperarêtes deux à deux disjointes. Si  $\ell \geqslant k$ , alors S est un tournesol. Supposons le contraire. Soit  $S = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant \ell} S_i$ . Par construction de S, toute hyperarête  $F \in \mathcal{E}$  intersecte S. Il existe donc un élément  $v \in S$  contenu dans au moins

$$\frac{|\mathcal{E}|}{|S|} > \frac{(k-1)^{(d+1)} \cdot (d+1)!}{(k-1)(d+1)} = (k-1)^d \cdot d!$$

hyperarêtes. Soit  $\mathcal{H}' = (V \setminus \{v\}, \mathcal{E}')$  l'hypergraphe (d-1)-uniforme avec  $\mathcal{E}' = \{F \setminus \{v\} \mid F \in \mathcal{E} \text{ et } v \in F\}$ . Par hypothèse de récurrence  $\mathcal{H}'$  contient un tournesol  $\mathcal{S}'$  de taille k. En ajoutant v à chaque pétale de  $\mathcal{S}'$ , nous obtenons un tournesol de  $\mathcal{H}$ . Remarquons que la preuve est constructive et permet de construire en temps  $(n+k)^{O(1)}$  un tournesol de  $\mathcal{H}$ .

Appliquons le lemme du tournesol dans le contexte des graphes : si G = (V, E) est un graphe tel que  $|E| > 2k^2$ , alors il existe un tournesol de taille k+1. Dans un graphe, un tournesol est formé soit par un couplage de taille k+1, soit par un sommet de degré au moins k+1. Dans le premier cas, nous avons un certificat que  $\mathbf{VC}(G) > k$ . Dans le second cas, nous identifions un sommet appartenant à toute couverture de G. Dans les deux cas, le lemme du tournesol montre que si le graphe possède trop d'arêtes, nous pouvons le réduire. Nous obtenons donc une preuve alternative du noyau quadratique pour p-VERTEX COVER (il faut avoir pris soin d'éliminer les sommets isolés). Généralisé aux hypergraphes, ce raisonnement aboutit aux règles de réduction suivantes.

Règle de réduction 3.3 Soient  $(\mathcal{H} = (V, \mathcal{E}), k)$  une instance de p-d-HITTING SET et  $\mathcal{S}$  un tournesol de taille k+1 composé d'hyperarêtes de taille  $d' \leq d$ . Alors

- 1. Si le cœur C de S est vide, alors retourner une instance triviale  $(\mathcal{H}',0)$  où  $\mathcal{H}'$  est un hypergraphe contenant une hyperarête;
- 2. sinon retourner  $(\mathcal{H}' = (V, \mathcal{E} \setminus \mathcal{S} \cup \{C\}), k)$ .

**Règle de réduction 3.4** Soit  $(\mathcal{H} = (V, \mathcal{E}), k)$  une instance de p-d-Hitting Set. Si  $x \in V$  n'appartient à aucune hyperarête alors retourner  $\mathcal{H}' = (V \setminus \{x\}, \mathcal{E})$ .

**Théorème 3.5** Soit  $d \in \mathbb{N}$ . Le problème p-d-HITTING SET admet un noyau polynomial de taille  $O(k^d \cdot d! \cdot d^2)$ .

*Proof:* Observons que si un hypergraphe  $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$  possède un tournesol  $\mathcal{S}$  de taille k+1, alors toute couverture de taille k de  $\mathcal{H}$  doit intersecter le cœur C de  $\mathcal{S}$ . Ainsi  $\mathcal{H}$  possède une couverture de taille k ssi  $\mathcal{H}' = (V, \mathcal{E}')$  avec  $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \setminus \mathcal{S} \cup \{C\}$  possède une couverture de taille k.

Par chaque  $d' \leq d$  (par valeur décroissante de d'), nous appliquons la règle de réduction 3.3 sur l'hypergraphe d'-uniforme  $\mathcal{H}_{d'} = (V, \mathcal{E}_{d'})$  avec  $\mathcal{E}_{d'} = \{F \in \mathcal{E} \mid |F| = d'\}$ . Tout tournesol de taille k+1 identifié est remplacé par son cœur s'il est non-vide (sinon  $\mathcal{H}_{d'}$  – et donc  $\mathcal{H}$  – ne possède pas de couverture de taille k, on retourne une instance triviallement fausse). Après au plus  $|\mathcal{E}|$  étapes de réduction, d'après le Lemme du tournesol, le nombre d'hyperarêtes de taille au plus d' (pour  $d' \leq d$ ) est au plus  $k^{d'} \cdot d'$ !. La suppression des sommets isolés (règle 3.4) permet donc d'obtenir un noyau de taille  $O(k^d \cdot d! \cdot d^2)$ .

Montrons comment le lemme du tournesol peut s'appliquer à des problèmes de modification de graphes. De nombreuses familles de graphes sont caractérisées par une liste de sous-graphes induits interdits. Parmi les plus classiques, les *cographes* sont les graphes sans  $P_4$  (chemins induits de 4 sommets), les *graphes trianqulés* sont les graphes sans cycle sans corde de longueur au moins 4, les

graphes parfaits sont les graphes ne contenant aucun cycle impair induit de longueur au moins 5 ni leur complémentaire...Selon les familles considérées, la liste de sous-graphes interdits est finie ou pas. Observons que toute famille de graphes ainsi caractérisée est hériditaire, c'est à dire close par sous-graphes induits.

Soit  $\mathcal{F}$  une famille de graphes caractérisée par une liste *finie* de sous-graphes induits interdits. Dans le problème p- $\mathcal{F}$ -VERTEX DELETION, il faut décider s'il est possible de supprimer un ensemble S d'au plus k sommets dans un graphe G pour obtenir un graphe G - S de  $\mathcal{F}$ . Un algorithme de branchement permet de résoudre ce problème en temps FPT [16]. Le lemme du tournesol permet d'obtenir un noyau polynomial.

Soit d le nombre maximum de sommets dans un sous-graphe interdit de  $\mathcal{F}$ . On réduit un graphe G = (V, E) à un hypergraphe  $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ , instance de p-d-HITTING SET de la manière suivante : si H' est sous-graphe induit de G isomorphe à un graphe interdit de  $\mathcal{F}$ , alors  $V_{H'}$  est une hyperarête de  $\mathcal{E}$ . Les règles de réduction de p-d-HITTING SET ne peuvent s'appliquer directement. Rappelons qu'un algorithme de kernelization est une procédure de réduction d'un problème vers lui-même. Remplacer un tournesol avec k+1 pétales par son cœur n'est pas valide dans le cas de p- $\mathcal{F}$ -VERTEX DELETION. En effet la suppression des sommets n'appartenant pas au cœur peut détruire certaines occurences des sous-graphes induits interdits. Le lemme suivant montre comment appliquer le lemme du tournesol pour obtenir un noyau polynomial pour p- $\mathcal{F}$ -VERTEX DELETION.

**Lemme 3.6** [40] Soit  $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$  un hypergraphe tel que  $\forall F \in \mathcal{E}$ ,  $|F| \leq d$  et soit  $k \in \mathbb{N}$ . Si  $|\mathcal{E}| > (k+1)^d \cdot d!$ , alors il existe  $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$  tel que X est une couverture de taille au plus k de  $\mathcal{H}$  ssi X est une couverture de taille au plus k de  $\mathcal{H}' = (V, \mathcal{E}')$ . De plus,  $\mathcal{E}'$  peut être calculé en temps  $O(|\mathcal{E}| \cdot (k+|\mathcal{E}|))$ .

Proof: (Nous ne donnons qu'une idée de la preuve) S'il n'existe pas de tournesol de taille k+2, le lemme du tournesol permet d'établir la borne sur le nombre d'hyperarêtes. S'il en existe un dont le cœur est vide, alors la réponse est triviale puisqu'il n'existe pas de couverture de taille k. Supposons qu'il existe un tournesol  $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_{k+2}\}$  dont le cœur C est non-vide. Au lieu de remplacer les pétales de  $\mathcal{S}$  par C, nous supprimons le pétale  $S_{k+2}$  de l'ensemble des hyperarêtes. Cette opération préserve l'existence d'un tournesol  $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \setminus \{S_{k+2}\}$  de taille k+1 dont le cœur est K. Donc toute couverture de taille au plus k du nouvel hypergraphe doit contenir un élément de K.

Le lemme 3.6 permet de limiter le nombre de sous-graphes induits à couvrir, mais ne réduit pas le nombre de sommets du graphe. Une règle supplémentaire est nécessaire pour complèter l'algorithme de kernelization : tout sommet n'appartenant pas à un des sous-graphes à couvrir peut être supprimé. Nous laissons la preuve de cette assertion et du théorème au lecteur.

**Théorème 3.7** Soit  $\mathcal{F}$  une famille de graphes caractérisée par une liste finie de sous-graphes induits interdits. Le problème p- $\mathcal{F}$ -VERTEX DELETION admet un noyau de taille  $O((k+1)^d \cdot d! \cdot d^2)$ , avec d le nombre maximum de sommets dans un sous-graphe interdit de  $\mathcal{F}$ .

#### 3.2 Règles de réduction globales

Nous décrivons ici un noyau linéaire pour le probème p-FEEDBACK ARC SET IN TOURNAMENT (p-FAST) utilisant une règle à base de couplages [52]. La preuve repose sur le fait que dans un graphe biparti, la taille du couplage maximum est égale à la taille d'une couverture (des arêtes) minimum (théorème de König-Egervary). Nous utiliserons le lemme suivant qui est une conséquence du théorème de Hall.

**Lemme 3.8** Soit S une converture minimum d'un graphe biparti  $B = (X \cup Y, E)$ . Pour tout ensemble  $I \subseteq S \cap X$ , il existe un couplage entre I et  $Y \setminus S$  saturant I.

Un tournoi est un graphe orienté complet asymétrique : T = (V, A) est un tournoi si pour toute paire de sommets  $u, v \in V$ , l'arc  $uv \in A$  si et seulement si  $vu \notin A$ . Inverser un arc est l'opération qui consiste à changer uv en vu. Un ensemble  $F \subset A$  d'arcs est un coupe-circuit (ou Feedback Arc Set) si leur inversion permet d'obtenir un tournoi sans circuit. Le problème FAST qui consiste à décider s'il existe un coupe-circuit de taille au plus k est NP-Complet [3, 18]. Le lemme suivant permet de montrer que sa paramétrisation standard est FPT et possède un noyau quadratique à l'aide du lemme du tournesol.

**Lemme 3.9** Les trois propriétés suivantes sont équivalentes : (i) T est un tournoi sans circuit; (ii) T est transitif; (iii) T ne contient pas de circuit de lonqueur 3.

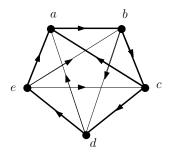


FIG. 3 – Un tournoi non-transitif:  $\{a, b, c, d, e\}$ ,  $\{a, b, c\}$  sont des circuits.

Par inversion d'arcs, il est donc suffisant de supprimer les circuits de longueur 3, que nous appellerons désormais *conflit*. La preuve de la première règle de réduction est laissée en exercice.

**Règle de réduction 3.10** Soit (T, k) une instance de p-FAST. Si x est un sommet n'appartenant à aucun conflit, alors retourner (T - x, k).

Si un tournoi T=(V,A) est transitif, alors il existe une permutation  $\sigma$  de ses sommets, tel que pour tout  $u,v\in V,\ uv\in A$  si et seulement si  $\sigma(u)<\sigma(v)$  (que nous noterons  $u<_{\sigma}v$ ). Un tournoi ordonné  $T_{\sigma}=(V,A,\sigma)$  est un tournoi T=(V,A) muni d'une permutation  $\sigma:V\to [n]$ . Un arc retour de  $T_{\sigma}$  est un arc  $uv\in A$  tel que  $v<_{\sigma}u$ . D'après le Lemme 3.9, un tournoi T possède un coupe-circuit de taille k si et seulement si il existe une permutation  $\sigma$  de V telle que  $T_{\sigma}$  contient au plus k arcs retour. L'idée de l'algorithme est de construire une permutation qui nous permet d'identifier un ensemble d'arcs retours dont nous pouvons certifier l'appartenance à une solution optimale et qui pourront être renversés. Pour cela, nous avons besoin de quelques définitions.

Soit  $T_{\sigma} = (V, A, \sigma)$  un tournoi ordonné. Une  $\sigma$ -partition de V est une partition  $\mathcal{P} = \{V_1, \dots V_l\}$  telle que  $\forall i \in [l]$ , la partie  $V_i$  contient un ensemble d'éléments consécutifs dans  $\sigma$  et  $\forall i < j, x \in V_i, y \in V_j$ , alors  $x <_{\sigma} y$ . Toute  $\sigma$ -partition  $\mathcal{P}$  partitionne l'ensemble des arcs en  $A_E = \{uv \in A \mid u \in V_i, v \in V_j, i \neq j\}$ , l'ensemble des arcs externes, et  $A_I = A \setminus A_E$  l'ensemble des arcs internes. Si e = wu est un arc retour de  $T_{\sigma}$ , alors  $c(e) = \{u, v, w\}$  est un certificat de e si  $u <_{\sigma} v <_{\sigma} w$  (un certificat induit donc un conflit). Un ensemble  $F \subseteq A$  d'arcs retour est certifié s'il existe un ensemble  $\{c(e) : e \in F\}$  de certificats tels  $\forall e \neq f \in F, |c(e) \cap c(f)| \leq 1$ : les certificats forment des conflits arcs-disjoints. Une  $\sigma$ -partition est sûre si l'ensemble B des arcs retours de  $A_E$  est non-vide et certifé par un ensemble de certificats arcs disjoints  $\mathcal{C}$  tel que  $\forall \{u, v, w\} \in \mathcal{C}, uv, vw, wu \in A_E$ .

**Règle de réduction 3.11** Soit (T, k) une instance de p-FAST. Si  $\mathcal{P}$  est une  $\sigma$ -partition sûre de  $T_{\sigma}$ , alors retourner (T', k') tel que T' est obtenu en inversant les arcs retours externes F de  $T_{\sigma}$  et k' = k - |F|.

Proof: Observons que tout circuit de T' est composé d'arcs internes de  $T_{\sigma}$ . On en déduit que si (T', k - |F|) est une instance positive de p-FAST, alors (T, k) est aussi une instance positive. Pour montrer la réciproque, supposons que (T', k') ne soit pas une instance positive : une solution optimale F' de T' vérifie |F'| > k'. Puisque F est certifié, il existe |F| conflits arcs disjoints n'utilisant que des arcs externes. On en déduit que (T, k) est aussi une instance négative puisqu'il faut inverser |F| + |F'| > k arcs pour obtenir un tournoi transitif.

Nous allons montrer qu'il est possible de calculer en temps polynomial une partition sûre pour tout tournoi réduit pour la règle 3.10 possèdant au moins 4k sommets. Pour cela, nous devons calculer une permutation  $\sigma$  et une  $\sigma$ -partition dont les arcs retours externes peuvent être certifiés avec des arcs externes. La première étape consiste à calculer par un algorithme glouton un ensemble  $\mathcal{C}$  maximal de conflits arcs-disjoints appelé packing de conflits.

**Observation 3.12** Soient (T, k) une instance positive de p-FAST et  $V(\mathcal{C})$  l'ensemble de sommets couverts par un packing de conflits  $\mathcal{C}$ . Alors  $|\mathcal{C}| \leq k$  et  $|V(\mathcal{C})| \leq 3k$ 

**Lemme 3.13** Soient (T, k) une instance positive de p-FAST et C un packing de conflits. Il existe une permutation  $\sigma$  de V tel que tout arc retour uv de  $T_{\sigma}$  vérifie  $u, v \in V(C)$ .

Proof: Soient V les sommets de T et  $V' = V \setminus V(\mathcal{C})$ . Par maximalité de  $\mathcal{C}$ , T' = T[V'] est transitif. Il existe donc une permutation  $\sigma'$  de V' sans arc retour. De même, pour tout  $v \in V(\mathcal{C})$ ,  $T[V' \cup \{v\}]$  est aussi transitif. Il existe donc une unique position d'insertion de v dans  $\sigma'$  ne créant pas d'arc retour. La permutation  $\sigma$  de V est définie telle que  $\forall u, v \in V'$ ,  $u <_{\sigma'} v \Rightarrow u <_{\sigma} v$  et pour tout  $v \in V(\mathcal{C})$  et  $u \in V'$ ,  $v <_{\sigma} u$  ssi la position d'insertion de v est avant v dans v. Les sommets ayant la même position d'insertion sont ordonnés entre eux de manière quelconque. Par construction, les sommets incidents à un arc retour appartiennent à  $V(\mathcal{C})$ .

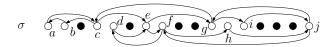


FIG. 4 – Une permutation  $\sigma$  obtenue à l'aide du packing de conflits  $\mathcal{C} = \{\{a,b,c\},\{c,e,g\},\{d,e,f\},\{f,h,j\},\{g,i,j\}\}\}$ . Les arcs bc, cb, gc, fd, jf, jg sont des arcs retours pour  $\sigma$  (pas nécessairement les seuls). Les sommets noirs sont les sommets libres: non-couverts par le packing de conflits et donc non-incidents à un arc retour. Observons que puisque le tournoi est réduit par la règle 3.10, le premier et le dernier sommet de  $\sigma$  appartiennent à  $V(\mathcal{C})$ .

A partir d'un packing de conflits  $\mathcal{C}$  et une permutation  $\sigma$  vérifiant le lemme 3.13, nous calculons une  $\sigma$ -partition  $\mathcal{P}$  en temps polynomial de la manière suivante :

- 1. Soit  $B = (R \cup L, E)$  le graphe biparti tel que  $L = V \setminus V(C)$  est l'ensemble des sommets libres (non couverts par le packing de conflits),  $R = \{i_{wu} \mid wu \text{ est un arc retour de } T_{\sigma}\}$  et  $i_{wu}v \in E$  ssi  $\{u, v, w\}$  est un conflit.
- 2. Soit S une couverture minimum de B et  $S_L$  l'ensemble des sommets libres dans  $S(S_L = L \cap S)$ .

3.  $\mathcal{P}$  est la  $\sigma$ -partition obtenue en créant une partie  $\{v\}$  pour chaque sommet libre v n'appartenant pas à  $S_L$  et une partie pour chaque ensemble maximal de sommets de  $V(\mathcal{C}) \cup S_L$  consécutifs dans  $\sigma$ .

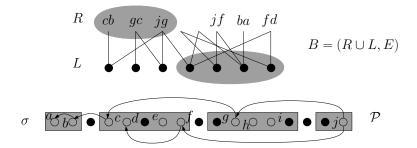


FIG. 5 – Les sommets du graphe biparti  $B = (L \cup R, E)$  sont sommets libres L et les arcs retours de  $\sigma$ . La couverture S de B est grisée. La  $\sigma$ -partition obtenue isole les sommets de L. Les trois arcs retours cb, hc, jg et jf sont externes.

**Lemme 3.14** Si (T, k) est une instance positive de p-FAST réduite pour la règle 3.10 contenant au moins 4k sommets, alors la  $\sigma$ -partition  $\mathcal{P}$  construite par l'algorithme ci-dessus est une partition sûre.

Proof: Par construction, un couplage maximal dans le graphe biparti B est un packing de conflits. D'après l'observation 3.12 et le fait que la taille d'un couplage maximum de B est égale à la taille d'une couverture minimum, B possède une couverture S de taille au plus k. Puisque |V| > 4k,  $|V(\mathcal{C})| \leq 3k$  et  $|S_L| \leq k$ ,  $L \setminus S_L \neq \emptyset$ . On en déduit que la  $\sigma$ -partition  $\mathcal{P}$  contient au moins deux parties.

Soit  $R_E$  l'ensemble des arcs retours externes de  $\mathcal{P}$ . Nous devons montrer que  $R_E$  est certifié à l'aide de conflits n'utilisant que des arcs externes. Observons tout d'abord que  $R_E$  est non-vide. En effet, puisque T est réduit pour la règle 3.10, pour tout sommet  $v \in L \setminus S_L$ , il existe un arc retour  $wu \in R_E$  tel que  $u <_{\sigma} v <_{\sigma} w$  (car  $\{v\}$  est une partie de  $\mathcal{P}$ ). De même, par construction de  $\mathcal{P}$ , pour tout arc retour externe wu, il existe un sommet  $v \in L \setminus S_L$  tel que  $u <_{\sigma} v <_{\sigma} w$  et  $\{u, v, w\}$  est un conflit n'utilisant que des arcs externes. On en déduit que B contient une arête entre les sommets  $i_{wu} \in R$  et v qui doit être couverte par S. Or  $v \in L \setminus S_L$  implique que  $i_{wu} \in S$ . Nous avons donc montré que l'ensemble  $R_E$  des arcs retours externes est inclus dans  $R \cap S$ . D'après le lemme 3.8, il existe un couplage entre  $R_E$  et  $L \setminus S_L$  qui sature  $R_E$ . Ce couplage définit un certificat pour l'ensemble des arcs retours externes. La partition  $\mathcal{P}$  est donc sûre.

La preuve du théorème suivant repose sur la discussion ci-dessus.

**Théorème 3.15** [52] Le problème p-FAST admet un noyau de taille au plus 4k sommets.

#### 3.3 Développements récents

Un nombre important de noyaux polynomiaux ont été obtenus ces dernières années. Les techniques développées sont nombreuses y compris pour obtenir des noyaux randomisés [46]. Récemment des "meta-théorèmes" ont permis d'établir des conditions suffisantes à l'existence de noyaux polynomiaux (ou linéaires) pour un grand nombre de problèmes de graphes [12]. Ces résultats combinent des outils de logiques et de théorie des graphes.

## 4 Bornes inférieures exponentielles sur les noyaux

Les premiers outils permettant de montrer la non-existence d'un noyau polynomial pour un problème **FPT** sont proposés en 2008 dans un article de Bodlaender *et al* [10]. Depuis de nouvelles techniques arrivent presque chaque année et la liste des bornes inférieures exponentielles sur la taille des noyaux ne cesse de s'allonger.

## 4.1 Algorithmes de distillation et composition

Nous illustrons l'intuition de la non-existence de noyau polynomial pour certains problèmes **FPT** à l'aide du problème Longest Path. Il s'agit de décider si un graphe contient un chemin de longueur au moins k. Pour k=n, ce problème correspond à Chemin Hamiltonien<sup>7</sup>, il est donc NP-Complet. Il est clair qu'un graphe G contient un chemin de longueur k ssi l'une de ses composantes connexes en contient un. L'existence d'un noyau de taille t bits (polynomial en k) pour p-Longest Path appliqué à une instance (G,k) contenant t+1 composantes connexes reviendrait donc à associer en temps polynomial moins de 1 bit en moyenne à chaque composante. Cela signifierait qu'il a été possible de résoudre Longest Path en temps polynomial sur l'une des composantes (or Longest Path est NP-Complet). Ce raisonnement, certe trop simpliste, se rélève être une bonne intuition. La preuve que p-Longest Path ne contient pas de noyau polynomial utilise les notions de OU-distillation et OU-composition.

**Définition 4.1** [41] Un algorithme de OU-distillation  $\mathcal{A}$  pour un problème de décision Q (non paramétré) sur l'alphabet  $\Sigma$  est un algorithme qui :

```
1. reçoit une séquence (x_1, \ldots x_t), avec x_i \in \Sigma^*, \forall i \in [t];
```

- 2. possède une complexité polynomiale en  $\sum_{i=1}^{t} |x_i|$ ,
- 3. retourne  $y \in \Sigma^*$  tel que
  - $-y \in Q \Leftrightarrow \exists i \in [t], x_i \in Q;$
  - |y| est polynomial en  $\max_{i \in [t]} |x_i|$ .

**Théorème 4.2** [41] Si un problème NP-complet est OU-distillable, alors  $coNP \subseteq NP/Poly$ .

Pour une définition de la classe de complexité NP/Poly le lecteur peut se référer à [51]. L'hypothèse  $coNP \not\subseteq NP/Poly$  est standard dans la théorie de la complexité. Bodlaender et al [10] retranscrivent la notion de OU-distillations dans le cadre de la complexité paramétrée comme suit.

**Définition 4.3** [10] Un algorithme de OU-composition pour un problème paramétré  $\kappa$ - $Q \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$  est un algorithme  $\mathcal{A}$  qui

```
1. reçoit une séquence ((x_1, k), \dots (x_t, k)), avec (x_i, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}, \forall i \in [t];
```

- 2. a une complexité polynomiale en  $\sum_{i=1}^{t} |x_i| + k$ ,
- 3. retourne  $(y, \kappa(y)) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$  tel que
  - $-(y, \kappa(y)) \in \kappa Q \Leftrightarrow \exists i \in [t], (x_i, k) \in \kappa Q;$
  - $\kappa(y)$  est polynomial en k.

Observons que le problème p-Longest Path est trivialement ou-composable en transformant une série d'instances  $(G_1, k) \dots (G_t, k)$  en (H, k) tel que H = (V, E) est l'union disjointe des graphes  $G_i$   $(i.e., V = \bigcup_{i \in [t]} V_{G_i}$  et  $E = \bigcup_{i \in [t]} E_{G_i})$  (voir figure 6).

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Un chemin Hamiltonien est un chemin qui passe une et une seule fois par chaque sommet du graphe.

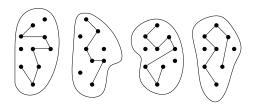


FIG. 6 – Un graphe contient un chemin de longueur k ssi une de ses composantes connexes en contient un. Le problème p-Longest Path est donc ou-composable.

**Théorème 4.4** [10] Soit  $\kappa$ - $Q \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$  un problème paramétré OU-composable tel que le problème  $Q \in \Sigma^*$  est NP-Complet. Si  $\kappa$ -Q admet un noyau polynomial, alors Q est OU-distillable.

*Proof:* A toute instance  $(x, \kappa(x))$  du problème paramétré  $\kappa$ -Q, nous associons l'instance  $x \# 1^{\kappa(x)}$ du problème de décision Q. Puisque Q est NP-Complet, il existe deux réductions polynomiales  $\Phi$  de Q vers **SAT** et  $\Psi$  de **SAT** vers Q. Nous allons construire un algorithme de OU-distillation pour Q à partir de  $\Phi$ ,  $\Psi$ , de l'algorithme de OU-composition  $\mathcal{C}$  et de l'algorithme de kernelisation polynomiale  $\mathcal{K}$  pour  $\kappa$ -Q.

Soit  $(x_1 \# 1^{\kappa(x_1)}, \dots x_t \# 1^{\kappa(x_t)})$  une séquence d'instances de Q. Considérons la séquence d'instances de Q. tances correspondantes du problème paramétré  $\kappa$ - $Q: S = ((x_1, \kappa(x_1)), \dots (x_t, \kappa(x_t)))$ . Pour chaque valeur  $p \leq \max_{i \in [t]} \kappa(x_i)$  parmi  $\{\kappa(x_1), \dots \kappa(x_t)\}$ , nous appliquons l'algorithme de OU-composition  $\mathcal{C}$  sur la sous-séquence  $S_p$  contenant  $\{(x_i, \kappa(x_i) \mid \kappa(x_i) = p\}$ . Pour chaque p, le résultat est une instance  $(y_p, k_p)$  de  $\kappa$ -Q qui est alors réduite à l'aide de l'algorithme  $\mathcal{K}$  de kernelization. Nous obtenons ainsi une séquence  $S' = ((z_1, k'_1), \dots, (z_r, k'_r))$  de  $r \leq \max_{i \in [t]} \kappa(x_i)$  instances de  $\kappa$ -Q. Il nous reste à transformer les instances de S' en une séquence d'instances du problème de décision  $Q:(z_1\#1^{k'_1},\ldots,z_r\#1^{k'_r})$ . En utilisant les réductions polynomiales  $\Phi$  et  $\Psi$  nous obtenons d'abord une séquence d'instances de **SAT**  $(\Phi(z_1 \# 1^{k'_1}), \dots, \Phi(z_r \# 1^{k'_r}))$ , puis une instance équivalente  $X = \Psi(\bigvee_{i \in [r]} \Phi(z_i \# 1^{k'_i}))$  du problème d'origine Q. Montrons que l'algorithme  $\mathcal{A}$  décrit ci-dessus est une ou-distillation de Q. Nous devons montrer

- 1. A s'exécute en temps polynomial en  $n = \sum_{i=1}^t |x_i \# 1^{\kappa(x_i)}|$  et |X| est polynomial en  $m = \sum_{i=1}^t |x_i \# 1^{\kappa(x_i)}|$  $\max_{i \in [t]} |x_i|$ . Notons que pour tout  $i \in [r]$ ,  $(y_i, k_i)$  est le résultat d'une ou-composition, donc  $k_i$  est polynomial en  $\kappa(x_i) \leq m$ . De même, pour tout  $i \in [r], (z_i, k_i')$  est un noyau polynomial. Ainsi les valeurs  $|z_i|$  et  $k_i'$  sont polynomiales en  $k_i$  et donc en m. Enfin le nombre d'instances dans la séquence S' est au plus m. La taille de X est donc bornée polynomialement par m. Chaque étape correspondant à un algorithme polynomial, le temps d'exécution global est polynomial en n.
- 2.  $X = \Psi(\vee_{i \in [r]} \Phi(z_i \# 1^{k'_i}))$  est une instance positive de Q ssi  $\exists i \in [t]$  tel que  $x_i \# 1^{\kappa(x_i)}$  est une instance positive de Q. Nous avons :

$$\begin{split} \Psi(\bigvee_{i \in [r]} \Phi(z_i \# 1^{k_i'})) \in Q &\iff \bigvee_{i \in [r]} \Phi(z_i \# 1^{k_i'}) \in \mathbf{SAT} \\ &\iff \exists i \in [r], \ \Phi(z_i \# 1^{k_i'}) \in \mathbf{SAT} \\ &\iff \exists i \in [r], \ z_i \# 1^{k_i'} \in Q \\ &\iff \exists i \in [r], \ (z_i, k_i') \in \kappa\text{-}Q \\ &\iff \exists i \in [r], \ (y_i, k_i) \in \kappa\text{-}Q \\ &\iff \exists j \in [t], \ (x_j, \kappa(x_j)) \in \kappa\text{-}Q \\ &\iff \exists j \in [t], \ x_j \# 1^{\kappa(x_j)} \in Q \end{split}$$

Le théorème 4.2 et le théorème 4.4 établissent la non-existence d'un noyau polynomial pour p-Longest Path puisqu'il est ou-composable. De manière plus générale, on déduit de ces deux théorèmes le résultat suivant.

**Théorème 4.5** Soit  $\kappa$ -Q un problème paramétré OU-composable tel que le problème de décision Q associé est NP-complet. Si  $\kappa$ -Q admet un noyau polynomial, alors  $coNP \subseteq NP/poly$ .

#### 4.2 Réductions polynomiales paramétrées

Tous les problèmes paramétrés n'admettent pas de ou-composition naturelle comme p-Longest Path. Considérons le problème p-Path Packing : existe-t-il dans un graphe G donné, k chemins disjoints de longueur k? Clairement l'union disjointe de graphes issus d'une séquence ne fonctionne plus. Nous allons montrer que ce problème n'admet pas de noyau polynomial non plus. Pour cela, nous utilisons la notion de réduction polynomiale paramétrée.

**Définition 4.6** Soient  $\kappa$ -P et  $\tau$ -Q deux problèmes paramétrés. Une Réduction polynomiale et paramétrée de  $\kappa$ -P vers  $\tau$ -Q est un algorithme polynomial  $\mathcal{A}$  qui :

- 1. à toute instance  $(x, \kappa(x))$  de  $\kappa$ -P associe une instance  $(y, \tau'(y))$  de  $\tau$ -Q;
- 2.  $(x, \kappa(x)) \in \kappa P \Leftrightarrow (y, \tau(y)) \in \tau Q \text{ et } \tau(y) \leqslant poly(\kappa(x)).$

On note  $\kappa$ - $P \leqslant_{TPP} \tau$ -Q.

**Théorème 4.7** [14] Soient  $\kappa$ -P et  $\tau$ -Q deux problèmes paramétrés tels que P est NP-Complet et Q appartient à NP. Si  $\kappa$ - $P \leqslant_{TPP} \tau$ -Q et si  $\kappa$ -P n'admet pas de noyau polynomial, alors  $\tau$ -Q n'admet pas de noyau polynomial.

Proof: Nous montrons la contraposée. Supposons que  $\tau$ -Q admet un noyau polynomial et soit  $\mathcal{K}$  l'algorithme de kernelization. Soit  $\mathcal{R}$  la TPP de  $\kappa$ -P vers  $\tau$ -Q. Considérons l'algorithme suivant : étant donnée l'instance  $(x, \kappa(x))$  de  $\kappa$ -P, on applique  $\mathcal{K}$  sur l'instance  $(x' = \mathcal{R}(x), \tau(x'))$  de  $\tau$ -Q. Le fait que le résultat retourné par  $\mathcal{K}$  soit un noyau polynomial est une conséquence directe des définitions.

**Proposition 4.8** Le problème p-Path Packing n'admet pas de noyau polynomial sauf si  $coNP \subseteq NP/Poly$ .

*Proof:* Pour montrer que p-Longest Path  $\leq_{TPP}$  p-Path Packing, il suffit d'ajouter au graphe (G, k), instance de p-Longest Path, k-1 composantes connexes, chacune constituée d'un chemin de longueur k (voir figure 7).

La méthode classique permettant d'établir la non-existence de noyau polynomial pour un problème  $\kappa$ -P est : 1) d'introduire un problème intermédiaire ad-hoc  $\tau$ -Q tel que Q est NP-complet et ou-composable ; 2) de construire une réduction polynomiale paramétrée de  $\tau$ -Q vers  $\kappa$ -P.

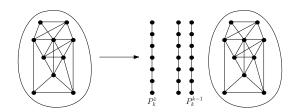


FIG. 7 – Réduction polynomiale paramétrée entre p-Longest Path et p-Path Packing.

#### 4.3 Compositions croisées

Notons que les OU-compositions sont des auto-compositions. Cette contrainte peut être source de difficultés pour établir la non-existence de noyau polynomial. Les compositions croisées définies cidessous permettent de composer un problème NP-Complet quelconque vers le problème paramétré cible.

**Définition 4.9** Une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  sur  $\Sigma^*$  est une relation d'équivalence polynomiale si

- 1.  $\exists$  un algorithme qui décide si  $x\mathcal{R}y$  en temps  $(|x|+|y|)^{O(1)}$
- 2.  $\forall S \subseteq \Sigma^*$ ,  $\mathcal{R}$  partitionne S en au plus  $(\max_{x \in S} |x|)^{O(1)}$  classes

Une relation d'équivalence polynomiale peut être définie par exemple par le nombre de sommets des graphes ou la valeur des paramètres associés aux instances.

**Définition 4.10** [13] Soient  $L \subseteq \Sigma^*$  et  $(Q, \kappa) \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ . Il existe une composition croisée de L vers Q si il existe une relation d'équivalence polynomiale  $\mathcal{R}$  sur  $\Sigma^*$  et un algorithme  $\mathcal{A}$  qui

- 1. reçoit une séquence  $(x_1, \dots x_t)$ , tel que  $\forall 1 \leq i < j \leq t$ ,  $x_i \mathcal{R} x_j$ ;
- 2. a une complexité polynomiale en  $\sum_{i=1}^{t} |x_i|$ ;
- 3. retourne  $(x,k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$  tel que
  - $-(x,k) \in (Q,\kappa) \Leftrightarrow \exists i \in [t], x_i \in L;$
  - k est polynomial en  $max_{i=1}^{t}|x_i| + \log t$ .

**Théorème 4.11** [13] Soit A une composition croisée d'un problème NP-complet  $L \subseteq \Sigma^*$  vers un problème paramétré  $(Q, \kappa)$  tel que  $\tilde{Q} \in NP$ -complet. Si  $(Q, \kappa)$  admet un noyau polynomial, alors L admet une OU-distillation.

La preuve du théorème 4.11 est très similaire à celle du théorème 4.4.

Corollaire 4.12 Soit A une composition croisée d'un problème NP-complet  $L \subseteq \Sigma^*$  vers un problème paramétré  $(Q, \kappa)$  tel que  $\tilde{Q} \in NP$ -complet. Si  $(Q, \kappa)$  admet un noyau polynomial, alors  $coNP \subseteq NP/Poly$ .

Les deux propositions suivantes montrent que la notion de composition croisée englobent les OU-compositions et les réductions paramétrées polynomiales.

**Proposition 4.13** S'il existe un algorithme de OU-composition pour le problème paramétré  $\kappa$ -P, alors il existe un algorithme de composition croisée de P vers  $\kappa$ -P.

**Proposition 4.14** Soient  $\kappa$ -P et  $\tau$ -Q deux problèmes paramétrés, C un algorithme de OU-composition pour  $\kappa$ -P et T une réduction paramétrée polynomiale de  $\kappa$ -P vers  $\tau$ -Q. Alors il existe une composition croisée de P vers  $\tau$ -Q.

### 4.4 Développements récents

En 2012, Drucker [32] a montré que l'existence de ET-composition pour un problème paramétré impliquait aussi la non-existence de noyau polynomial, répondant ainsi à une question laissée par Bodlaender et. al. [10]. Récemment des variantes de la OU-composition ont permis de démontrer des bornes inférieures polynomiales [25] : ainsi, sous l'hypothèse  $coNP \not\subseteq NP/Poly$ , le problème p-VERTEX COVER ne possède pas de noyau de taille  $k^{2-\epsilon}$  (ici la taille prend en compte le nombre d'arêtes du graphe réduit).

## 5 Techniques et algorithmes FPT

Nous présentons quatres paradigmes représentatifs des algorithmes paramétrés. Ils viennent compléter les algorithmes de kernelization (voir Section 3). Nous développons les méthodes de branchement à degré borné en décrivant une amélioration de l'algorithme de branchement pour p-VERTEX COVER décrit en introduction. Nous présentons ensuite les méthodes de programmation dynamique sur les décompositions arborescentes et le théorème de Courcelle. Nous poursuivons avec des algorithmes randomisés (et la méthode color coding) et la technique de compression itérative.

Nous illustrerons la plupart de ces techniques avec FEEDBACK VERTEX SET. Ce problème teste l'existence d'un couple-cycle de taille au plus k, i.e. d'un ensemble S de sommets tel que G-S soit acyclique (une forêt). C'est un des problèmes NP-Complet de la liste originale de Karp [44]. Comme p-VERTEX COVER, l'appartenance de p-FEEDBACK VERTEX SET à la classe **FPT** découle du théorème 1.1 car les forêts sont exactement les graphes sans  $K_3$ -mineurs. Après de nombreuses améliorations successives, la meilleure complexité connue aujourd'hui est  $O^*(3.83^k)$  [17].

## 5.1 Algorithmes de branchement à degré borné

La meilleure complexité connue pour p-VERTEX COVER est  $O(1.2738^k + kn)$  [19]. L'algorithme de complexité  $O(2^k \cdot n)$  discuté en introduction reposait sur le fait que toute couverture contient au moins un sommet de chaque arête. Dans le noyau quadratique, la règle de réduction des sommets de haut degré du noyau quadratique était basée sur l'observation suivante.

**Observation 5.1** Soit S une converture du graphe G. Si un sommet x de G n'appartient pas à S, alors  $N(x) \subseteq S$ .

Au lieu de brancher sur les deux sommets d'une arête, il est donc possible de brancher sur l'ajout dans la solution d'un sommet x d'une part et de son voisinage N(x) d'autre part. Si à chaque étape nous pouvons choisir un sommet de haut degré, alors dans l'une des deux branches le paramètre diminuera d'autant et la taille de l'arbre de recherche sera limitée. Observons qu'il est possible de restreindre les branchements sur les sommets de degré au moins 3.

**Observation 5.2** Vertex Cover se résoud en temps polynomial sur les graphes de degré maximum 2.

En effet, les composantes connexes d'un graphe de degré maximum 2 sont soit des chemins, soit des cycles. Dans les deux cas, calculer la couverture nécessite un temps linéaire. Nous obtenons la règle de branchement ci-dessous dont la validité découle de l'observation 5.1.

**Règle de branchement 5.3** Soit (G, k) une instance de p-VERTEX COVER. Si G contient un sommet x tel que  $d(x) \ge 3$ , alors brancher sur les instances :

- 1. (G-x, k-1);
- 2. (G N[x], k d(x)).

Dans la première branche, on ajoute x à la solution partielle; dans la seconde, on ajoute N(x).

**Théorème 5.4** Le problème p-Vertex Cover peut se résoudre en temps  $O(1, 47^k \cdot n)$ .

*Proof:* L'algorithme consiste à appliquer la règle de branchement 5.3 tant qu'il existe un sommet de degré au moins 3 et sinon de calculer en temps linéaire une couverture minimum. L'arbre de branchement développé est caractérisé par son *vecteur de branchement*, correspondant à la diminution de la valeur du paramètre dans chaque branche, ici (1,3). L'équation de récurence qui permet d'analyser la taille de l'arbre de branchement est donc :

$$vc_{k+3} = vc_{k+2} + vc_k + 1,$$
  $vc_1 = vc_2 = 1,$   $vc_0 = 0$ 

En fixant  $vc_k = c^k - 1$ , nous obtenons :

$$c^3 = c^2 + 1$$

La plus petite racine positive est  $c=5^{1/4}\leqslant 1,47$ . La taille de l'arbre de branchement amélioré est donc bornée par  $1,47^k$ . Puisque chaque nœud de l'arbre nécessite un temps O(n), nous obtenons la complexité annoncée.

Aujourd'hui les meilleurs algorithmes de p-VERTEX COVER implémentés mélangent plusieurs techniques (arbre de branchement, kernelization) et permettent de calculer des couvertures de taille 70 dans des graphes de plusieurs milliers de sommets [47].

**Exercice 5.4.1** Proposer un algorithme de branchement en  $O(3^k \cdot (n+m))$  pour p-FAST. L'algorithme pourra utiliser le lemme 3.9.

#### 5.2 Programmation dynamique et largeur arborescente

Nous n'avons jusqu'ici étudié que des paramétrisations standards (le paramètre est la taille de la solution recherchée). Les paramètres structuraux, en particulier les paramètres de largeur de graphe jouent un rôle important pour la complexité paramétrée. Nous étudions l'un des plus classiques : la largeur arborescente <sup>8</sup> qui permet d'étendre un grand nombre d'algorithmes polynomiaux sur la classe des arbres à des classes de graphes plus générales.

**Définition 5.5** Une décomposition arborescente d'un graphe G = (V, E) est une paire  $(T, \mathcal{X} = \{X_t : t \in T\})$  où T est un arbre et pour tout nœud  $^9$  t de T,  $X_t \subseteq V$ , telle que

- 1. [converture des sommets] pour tout sommet  $x \in V$ , il existe un nœud t de T tel que  $x \in X_t$ ;
- 2. [converture des arêtes] pour toute arête  $(x,y) \in E$ , il existe un nœud t de T tel que  $x,y \in X_t$ ;

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>La notion de largeur arborescente a été définie par Robserton et Seymour dans leur travaux sur les mineurs de graphes et la conjecture de Wagner [54].

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup> Afin d'éviter les confusions, nous parlons des sommets d'un graphe G et des nœuds de l'arbre de décomposition T.

3. [consistance] si  $x \in V$  appartient à  $X_{t_1} \cap X_{t_2}$ , alors tout nœud t sur le chemin entre  $t_1$  et  $t_2$  dans T,  $x \in X_t$ .

La figure 8 illustre une décomposition arborescente  $T_G = (T, \mathcal{X})$  d'un graphe G. Les ensembles de  $\mathcal{X}$  sont les sacs de la décomposition arborescente. La propriété de consistance implique que l'ensemble des nœuds contenant un sommet x forme un sous-arbre que nous noterons  $T_x$ . Si T' est un sous-arbre de T, alors  $G_{T'}$  est le sous-graphe induit par  $V_{T'} = \bigcup_{t' \in T'} X_{t'}$ .

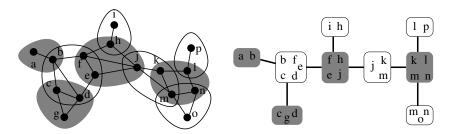


Fig. 8 – Une décomposition arborescente  $\mathcal{T}_G = (T, \mathcal{X})$  de largeur 4. Observons cette décomposition n'est pas optimale et que  $\mathbf{tw}(G) = 2$ .

Un ensemble de sommets S est un séparateur de G si G-S contient plus de composantes connexes que G (ou encore s'il existe deux sommets x et y tels que tout chemin entre x et y intersecte S). Le lemme suivant montre que les nœuds de  $\mathcal{T}_G$  sont des séparateurs. Ils peuvent donc être comparés aux sommets d'un arbre.

**Lemme 5.6** Si  $T_G = (T, \mathcal{X})$  est une décomposition arborescente d'un graphe G, alors pour tout nœud t qui n'est pas une feuille de T, le sac  $X_t$  est un séparateur de G.

*Proof:* 

Soient  $T_1, \ldots T_\ell$  les sous-arbres connexes maximaux de T-t. Pour tout  $i \in [\ell]$ , nous notons  $G_i = G_{T_i} - X_t$ . Observons que pour tout  $i \neq j$ , les graphes  $G_i$  et  $G_j$  ne partagent aucun sommet. En effet tout sommet x appartenant à un nœud de  $T_i$  et un nœud de  $T_j$  est aussi contenu dans  $X_t$  (axiome de consistence).

Supposons qu'il existe une arête (x,y) entre un sommet x de  $G_i$  et y de  $G_j$   $(i \neq j)$ . L'axiome de couverture des arêtes implique l'existence d'un nœud t' tel que  $x,y \in X_{t'}$ . Donc les sous-arbres  $T_x$  et  $T_y$  intersectent. Puisque  $x \in G_i$ ,  $T_i$  et  $T_x$  intersectent (de même  $y \in G_j$  implique que  $T_j$  et  $T_y$  intersectent). Comme  $G_j$  et  $G_i$  ne contiennent aucun sommet en commun, x n'appartient à aucun sac de  $G_i$  et  $G_i$  ne déduit que les nœuds  $G_i$  et  $G_i$  sont les mêmes. Autrement dit, nous avons montré que  $G_i$  et  $G_i$  et  $G_i$  de  $G_i$ .

D'une manière similaire, si t et t' sont deux nœuds adjacents, alors  $X_t \cap X_{t'}$  est un séparateur. Un exposé très complet sur les décompositions arborescentes est proposé dans [26].

**Définition 5.7** Soit G un graphe et  $\mathcal{T}_G = (T, \{X_t : t \in T\})$  une décomposition arborescente de G. La largeur de  $\mathcal{T}_G$  est

$$width(\mathcal{T}_G) = \max_{t \in T} |X_t| - 1$$

et la largeur arborescente de G est  $tw(G) = \min_{\mathcal{T}_G} width(\mathcal{T}_G)$ 

Déterminer la largeur arborescente d'un graphe est un problème NP-Complet [5]. Une 4-approximation de la largeur arborescente peut être calculée en temps  $O^*(2^k)$  [27]. Déterminer la valeur exacte est plus coûteux.

**Théorème 5.8** [8] Etant donné un graphe G, une décomposition arborescente  $\mathcal{T}_G = (T, \{X_t : t \in T\})$  de largeur tw(G) peut être calculée en temps  $2^{O(k^3)} \cdot n$ .

Observons que tw(G) = 1 si et seulement si G est une forêt. Si un problème est NP-Complet sur les graphes quelconques mais polynomial sur les forêts, alors il naturel de le paramétrer par la largeur arborescente. Les problèmes Independent Set et Coloration sont les exemples classiques pour lesquels l'algorithme polynomial de programmation dynamique sur les arbres se généralise en un algorithme FPT paramétré par la largeur arborescente (voir par exemple [45, 50, 39]).

FEEDBACK VERTEX SET paramétré par la largeur arborescente. Dans cette paramétrisation, nous calculons le plus petit coupe-cycle S d'un graphe de largeur arborescente fixée. Un algorithme de programmation dynamique sur une décomposition arborescente  $(T, \mathcal{X})$  calcule une solution en remontant à partir des feuilles de la décomposition. Il faut donc enraciner la décomposition arborescente : notons  $T_r$  l'arbre T enraciné en r et pour tout nœud t,  $T_t$  le sous-arbre de  $T_r$  enraciné en t. Pour élaborer l'algorithme, nous devons compendre,

- 1. comment une solution au problème intersecte les sacs de la décomposition pour déterminer la structure d'une solution partielle (voir observation 5.9);
- 2. comment une solution partielle pour un nœud se calcule à partir des solutions partielles de ses fils.

Le fait d'utiliser la largeur arborescente comme paramètre permet de borner le nombre de solutions partielles (i.e. les tables de programmation dynamique) pour chaque nœud.

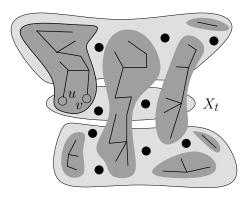


FIG. 9 – Le sac  $X_t$  associé à au nœud t de l'arbre de décomposition sépare le graphe G en plusieurs composantes. L'ensemble S des sommets noirs est un coupe-cycle. Les composantes connexes de G-S et donc de  $G_t-S$  sont des arbres. Observons que : 1) les sommets u et v appartiennent à différentes composantes connexes de  $G_t-S$ ; 2)  $G_t-S$  peut contenir des composantes connexes n'intersectant pas  $X_t$ .

**Observation 5.9** Soit t un nœud d'une décomposition arborescente  $\mathcal{T} = (T, \mathcal{X})$  d'un graphe G. Si S est un coupe-cycle de G et  $C_t^1, \ldots C_t^q$  les composantes connexes de  $G_t - S$ , alors tout sac  $X_t \in \mathcal{X}$  est partitionné en  $S_t \uplus X_t^1 \uplus \cdots \uplus X_t^q$  où  $S_t = S \cap X_t$  et pour tout  $i \in [q], X_t^i = C_t^i \cap X_t$ .

Pour chaque partition de  $S_t \uplus X_t^1 \uplus \cdots \uplus X_t^p$  de  $X_t$ , nous calculons

$$fvs_t(S_t \uplus X_t^1 \uplus \cdots \uplus X_t^p)$$

retournant le nombre de sommets du graphe  $G_t$  appartenant à un coupe-cycle S tel que  $S_t = X_t \cap S$  et pour tout  $i \in [p]$ ,  $X_t^i$  est l'intersection (non-vide) de  $X_t$  avec une composante connexe de  $G_t - S$ . Les ensembles  $X_t^i$  seront appelés composantes partielles. Puisque  $|X_t| \leq \mathbf{tw}(G)$ , la taille de la table de programmation dynamique associée à un nœud t sera  $\mathbf{tw}(G)^{\mathbf{tw}(G)} \sim 2^{\mathbf{tw}(G) \cdot \log \mathbf{tw}(G)}$ .

**Décompositions simples.** L'utilisation de décompositions arborescentes *simples* améliore l'efficacité du calcul des tables de programmation dynamique.

**Définition 5.10** Une décomposition arborescente enracinée  $T_G = (T_r, \{X_t : t \in T\})$  est simple si  $T_r$  est un arbre enraciné et tout nœud t est d'un des quatre types suivant.

- 1. Feuille : t n'a pas de fils et  $|X_t| = 1$ ;
- 2. Ajout : t possède un fils unique t' et  $X_t = X_{t'} \cup \{v\}$  avec  $v \notin X_{t'}$ ;
- 3. Suppression : t possède un fils unique t' et  $X_t = X_{t'} \setminus \{v\}$  avec  $v \in X_{t'}$ ;
- 4. Fusion : t possède deux fils  $t_1$  et  $t_2$  et  $X_t = X_{t_1} = X_{t_2}$ .

**Théorème 5.11** Une décomposition arborescente  $\mathcal{T}_G = (T, \mathcal{X})$  de largeur  $\omega$  peut être transformée en une décomposition arborescente simple  $\mathcal{T}_G^s = (T_r, \mathcal{X}^s)$  de largeur  $\omega$  en temps O(n+m).

Nous illustrons l'utilisation des décompositions simples sur le problème **tw**-FEEDBACK VERTEX SET. Soit t un nœud d'une décomposition simple d'un graphe G. L'algorithme de calcul de la table de programmation dynamique de t dépend du type de t. Initiallement, chaque entrée est initialisée à  $\infty$ .

- (i) t est un nœud Feuille : trivial.
- (ii) t est un nœud Ajout : Soit t' le fils de t. Nous examinons comment chaque partition  $S_{t'} \uplus X_{t'}^1 \uplus \cdots \uplus X_{t'}^p$  de  $X_{t'}$  peut être étendue avec l'ajout du sommet  $v \in X_t \setminus X_{t'}$ . Nous avons deux cas.
  - 1. Si v est ajouté à  $S_{t'}$ , alors

$$fvs_t((S_{t'} \cup \{v\}) \uplus X_{t'}^1 \uplus \cdots \uplus X_{t'}^p) = fvs_{t'}(S_{t'} \uplus X_{t'}^1 \uplus \cdots \uplus X_{t'}^p) + 1$$

2. Sinon v est inclus dans une composante connexe de  $G_t - S$ . Pour ne pas créer de cycle, v possède au plus un voisin dans chaque composante connexe de  $G_{t'} - S$ . Puisque les voisins de v dans  $G_{t'}$  sont inclus dans  $X_{t'}$ , pour tout  $i \in [p]$ ,  $|N(v) \cap X_{t'}^i| \leq 1$ . Si  $N(v) \cap X_t \subseteq S_t$ , alors

$$fvs_t(S_{t'} \uplus \{v\} \uplus X_{t'}^1 \uplus \cdots \uplus X_{t'}^p) = fvs_{t'}(S_{t'} \uplus X_{t'}^1 \uplus \cdots \uplus X_{t'}^p)$$

Sinon, sans perte de généralité, supposons que  $X_{t'}^1, \dots X_{t'}^s$   $(s \leq p)$  soient les composantes partielles de t' contenant un voisin de v, alors :

$$fvs_t(S_{t'} \uplus X_t^1 \uplus X_{t'}^{s+1} \uplus \cdots \uplus X_{t'}^p) = \min\{fvs_{t'}(S_{t'} \uplus X_{t'}^1 \uplus \cdots \uplus X_{t'}^p), fvs_t(S_{t'} \uplus X_t^1 \uplus X_{t'}^{s+1} \uplus \cdots \uplus X_{t'}^p)\}$$

$$avec X_t^1 = \{v\} \cup X_{t'}^1 \cup \cdots X_{t'}^s.$$

(iii) t est un næud Suppression : Soient t' le fils de t et  $v \in X_{t'} \setminus X_t$ . Soit  $S_{t'} \uplus X_{t'}^1 \uplus \cdots \uplus X_{t'}^p$  une partition de  $X_{t'}$ , sans perte de généralité, supposons que  $v \in X_{t'}^1$  (et  $X_{t'}^1 \setminus \{v\} \neq \emptyset$ ), alors

$$fvs_t(S_{t'} \uplus X_{t'}^1 \setminus \{v\} \uplus \cdots \uplus X_{t'}^p) = \min\{fvs_{t'}(S_{t'} \uplus X_{t'}^1 \uplus \cdots \uplus X_{t'}^p), fvs_t(S_{t'} \uplus X_{t'}^1 \setminus \{v\} \uplus \cdots \uplus X_{t'}^p)\}$$

Si  $X_{t'}^1 \setminus \{v\} = \emptyset$ , alors la partie  $X_{t'}^1$  disparait. Si  $v \in S_{t'}$ , le calcul est similaire, mais on garde trace de l'ensemble vide si  $S_{t'} = \{v\}$ .

(iv) t est un nœud Fusion : L'algorithme est plus technique, nous ne décrivons que l'idée. Soient  $t_1$  et  $t_2$  les deux fils de t tels que  $X_{t_1} = X_{t_2} = X_t$ . Nous devons déterminer si deux partitions  $S_{t_1} \uplus X_{t_1}^1 \uplus \cdots \uplus X_{t_1}^p$  et  $S_{t_2} \uplus X_{t_2}^1 \uplus \cdots \uplus X_{t_2}^q$  de  $X_{t_2}$  et  $X_{t_2}$  sont compatibles pour former une partition  $S_t \cup X_t^1 \uplus \cdots \uplus X_t^s$  de  $X_t$ . Il faut vérifier les conditions suivantes.

- 1.  $S_t = S_{t_1} = S_{t_2}$ .
- 2. Deux parties  $X_{t_1}^i$  et  $X_{t_2}^j$  qui s'intersectent ne peuvent être incluses dans une partie  $X_t^h$  que si leur intersection est une composante connexe (qui est acyclique par hypothèse) de  $G[X_{t_1}^i \cup X_{t_2}^j]$ . Sinon nous créerions une composante avec un cycle.
- 3.  $X_t^h$  est l'union de parties qui s'intersectent deux à deux de manière acyclique.

L'étape la plus coûteuse est le calcul des tables de programmation dynamique pour les nœuds fusions puisqu'il faut examiner la compatibilité de toute paire d'entrées dans les tables des deux fils. Nous en déduisons le résultat suivant.

 $\textbf{Th\'{e}or\`{e}me 5.12} \ \textit{Le problème tw-} \\ \textbf{FEEDBACK VERTEX SET} \ \textit{se r\'{e}soud en temps } O^*(2^{(\mathbf{tw}(G) \cdot \log \mathbf{tw}(G))^2}).$ 

Théorème de Courcelle. La logique du second ordre monadique (MSOL) permet d'exprimer un grand nombre de propriétés classiques de graphes (voir par exemple [24]). Par exemple, les problèmes Independent Set, Vertex Cover, Feedback Vertex Set sont exprimables en MSOL. Ce n'est pas le propos de décrire ici cette logique (voir par exemple [39]).

**Théorème 5.13** [23] Soient G un graphe et  $\Pi$  une propriété décrite par une formule  $MSOL\ \varphi$ . Il existe un algorithme paramétré qui décide si G satisfait la propriété  $\varphi$  et temps  $O(f(\mathbf{tw}(G)+|\varphi|)\cdot n)$ .

Le théorème de Courcelle est un outil très puissant pour montrer l'existence d'un algorithme paramétré. Il peut s'appliquer même si le paramètre n'est pas la largeur arborescente du graphe. La technique classique consiste à borner la largeur arborescente en fonction du paramètre considéré : soit les instances positives sont de largeur arborescente bornée, soit en réduisant les instances dont la largeur arborescente est grande. Nous illustrons cette approche sur deux problèmes que nous avons étudiés.

- 1. p-FEEDBACK VERTEX SET (paramétrisation standard par la taille du coupe-cycle). Observons que l'existence d'un coupe-cycle de taille au plus k dans un graphe G implique que  $\mathbf{tw}(G) \leq k+1$ . Par ailleurs, cette propriété est exprimable en MSOL. Le théorème de Courcelle implique donc l'appartenance du problème à la classe FPT.
- 2. p-Longest Path est exprimable en MSOL. Constatons que si un arbre de parcours en profondeur (à partir d'un sommet quelconque de G) est de profondeur au moins k, alors un chemin de longueur k existe; sinon on peut construire à partir de l'arbre de parcours une décomposition arborescente de largeur au plus k (exercice). Le théorème de Courcelle peut donc s'appliquer.

La généralité du théorème de Courcelle a un prix. La complexité l'algorithme de programmation dynamique décrit pour FEEDBACK VERTEX SET est bien meilleure que celle obtenue avec le théorème de Courcelle. De manière générale, la fonction (exponentielle) du paramètre dépend de la structure de la formule logique : c'est une tour d'exponentielles dont la hauteur dépend du nombre d'alternances entre les quantificateurs universels et existenciels.

#### 5.3 Algorithmes randomisés – Color Coding

Nous présentons ci-dessous deux algorithmes FPT randomisés. Le premier est un algorithme extrêmement simple pour FEEDBACK VERTEX SET [6]. Il a permis, au prix d'étapes de tirage aléatoire, d'obtenir le premier algorithme en temps exponentiel simple pour FEEDBACK VERTEX SET. Le second algorithme utilise la technique color coding introduite par Alon, Yuster et Zwick [4], qui à l'aide d'une coloration aléatoire d'une instance permet de simplifier et améliorer la complexité de certains problèmes. Nous illustrerons cette technique avec l'exemple classique LONGEST PATH.

**p-Feedback Vertex Set.** L'algorithme que nous décrivons nécessite que le degré minimum du graphe en entrée soit au moins 3. Pour garantir cette contrainte, nous réduisons le graphe à l'aide des deux règles suivantes.

Règle de réduction 5.14 Soit (G, k) une instance de p-FEEDBACK VERTEX SET. Si x est un sommet de degré au plus 1, alors retourner (G - x, k).

**Règle de réduction 5.15** Soit (G, k) une instance de p-FEEDBACK VERTEX SET. Si x est un sommet de degré 2 avec  $N(x) = \{y, z\}$ , alors retourner (H, k) où  $V(H) = V(G) \setminus \{x\}$  et  $E(H) = E(G) \cup \{yz\} \setminus \{xy, xz\}$ .

Notons que la règle 5.15 peut générer des arêtes multiples. Il est clair que ces deux règles de réduction ne détruisent aucun cycle. La correction de l'algorithme repose sur un argument de double comptage des arêtes et des degrés.

**Lemme 5.16** Si S est un coupe-cycle d'un graphe G = (V, E) de degré minimum au moins 3, alors  $|E_S| \ge |E|/2$  avec  $E_S = \{(u, v) \in E \mid u \in S \text{ ou } v \in S\}$ .

*Proof:* Notons  $X = V \setminus S$  et  $E_{S,X} = \{(u,v) \mid u \in S, v \in X\}$ . Observons que puisque G est de degré minimum 3:

$$3 \cdot |X| \leqslant \Sigma_{x \in X} \ d(x) = 2 \cdot |E_X| + |E_{S,X}|$$

Puisque S est un coupe-cycle, G[X] est une forêt et donc  $|E_X| < |X|$ . On en déduit que  $|E_X| < |E_{S,X}|$  ce qui implique  $|E_S| \ge |E|/2$ .

La conséquence du lemme 5.16 est qu'avec probabilité au moins 1/2, une arête tirée aléatoirement de manière uniforme possède un de ses deux sommets dans le coupe-cycle.

**Théorème 5.17** [6] Le problème FEEDBACK VERTEX SET admet un algorithme de complexité  $O(c4^k \cdot kn)$  (avec c > 0) qui retourne un FVS de taille k d'un graphe G (s'il en existe un) avec probabilité au moins  $1 - (1 - \frac{1}{4^k})^{c4^k} \leq 1 - \frac{1}{e^c}$ .

*Proof:* Soit S un ensemble de k sommets obtenu en répétant k fois les tirages suivant : 1) tirer uniformément une arête e de E; 2) tirer uniformément un des deux sommets incidents à e et l'ajouter à S. D'après le lemme 5.16, la probabilité que S ne soit pas un coupe-cycle de G est au plus  $1-\frac{1}{4^k}$ . On en déduit que la probabilité qu'après  $4^k$  tirages aucun des ensembles  $S_1, \ldots S_{4^k}$  ne soit un coupe-cycle est au plus

$$(1 - \frac{1}{4^k})^{4^k} \leqslant \frac{1}{e}$$

En répétant le processus c fois la probabilité d'identifier un coupe-cycle de taille k (s'il en existe un) est au moins  $1 - \frac{1}{e^c}$ .

LONGEST PATH avec la méthode color coding. Nous avons vu qu'un algorithme paramétré pour LONGEST PATH découle du théorème de Courcelle. Grâce à la technique du color coding, il est possible de résoudre le problème p-LONGEST PATH à l'aide d'un algorithme paramétré randomisé en temps  $O^*(2^k)$ . Le principe de cette technique repose sur deux étapes.

- 1. Colorer de manière aléatoire uniforme les sommets du graphe en entrée à l'aide de k couleurs;
- 2. Décider si l'instance colorée possède une solution multicolore: un chemin de longueur k utilisant une et une seule fois chacune des k couleurs.

Nous devons donc 1) estimer la probabilité de l'existence d'une solution multicolore; et 2) une méthode efficace de résolution pour le problème p-MULTICOLORED PATH, la version colorée de p-LONGEST PATH. Les deux étapes sont alors répétées un nombre suffisant de fois pour maximiser la probabilité d'existence d'un chemin multicolore. Notons qu'en utilisant des fonctions de hachage universelles [4] il est possible de rendre l'approche déterministe.

**Lemme 5.18** Soit  $P_k$  un chemin de longueur k dans un graphe G muni d'une coloration alératoire uniforme  $\omega: V(G) \to [k]$ . Alors

$$\mathbb{P}(P_k \ soit \ mulicolore) = \frac{k!}{k^k} > \frac{1}{e}$$

*Proof:* Il suffit d'observer qu'il existe  $k^k$  colorations possibles pour  $P_k$  et que seulement k! d'entre elles sont multicolores.

Un raisonnement similaire à celui de la preuve du théorème 5.17 permet d'utiliser un algorithme pour p-Multicolored Path comme routine de base pour un algorithme paramétré randomisé pour p-Longest Path.

Lemme 5.19 Un algorithme A de complexité  $O^*(f(k))$  pour p-MULTICOLORED PATH permet tester en temps  $O^*(e^k \cdot f(k))$  l'existence d'un chemin de longueur k dans un graphe avec probabilité au moins  $1 - \frac{1}{e^c}$  pour toute constante c > 0.

*Proof:* Soit G un graphe contenant un chemin de longueur k. La probabilité que le graphe coloré  $G^{\omega}$  ne contiennent pas un chemin multicolore  $P_k^{\omega}$  est

$$\mathbb{P}(P_k^{\omega} \notin G^{\omega}) < 1 - \frac{1}{e^k}$$

Soient  $\omega_1, \ldots \omega_{e^k}$  des colorations indépendantes de G, la probabilité qu'aucune de ces colorations ne contienne un chemin multicolore est

$$\mathbb{P}(\forall i \in [e^k], P_k^{\omega_i} \notin G^{\omega_i}) < (1 - \frac{1}{e^k})^{e^k} = \frac{1}{e}$$

En utilisant l'algorithme  $\mathcal{A}$  dans  $c \cdot e^k$  colorations indépendantes de G, nous obtenons donc le résultat annoncé.

Il nous reste donc à proposer un algorithme  $\mathcal{A}$  pour p-MULTICOLORED PATH. Une solution "naïve" consiste à fixer l'ordre d'apparition des couleurs dans le chemin de longueur k. Mais cela entraîne une complexité dominée par k!. Un algorithme plus efficace basé sur la programmation dynamique résoud le problème en  $O^*(2^k)$ . Pour cela, nous ajoutons un sommet universel s au graphe coloré  $G^\omega$  et calculons les  $2^k \cdot |V(G)|$  variables booléenes T(x,C) indiquant l'existence d'un chemin multicolore de s à x sur l'ensemble de couleurs  $C \subseteq [k]$ . La table T(X,C) se calcule de la manière suivante.

$$\left\{ \begin{array}{l} T(s,\emptyset) = \mathrm{Vrai}, \\ T(x,C) = \bigvee_{yx \in E} T(y,C \setminus \{\omega(x)\}). \end{array} \right.$$

L'algorithme de programmation dynamique ci-dessus et le lemme 5.19 permettent d'obtenir le résutlat suivant.

**Théorème 5.20** [4] Le problème p-Longest Path admet un algorithme randomisé de complexité  $O^*((2e)^k)$  qui identifie un chemin de longueur k (s'il en existe un) avec probabilité  $1 - \frac{1}{e^c}$  pour toute constante c > 0.

## 5.4 FEEDBACK VERTEX SET et la compression itérative

Le premier algorithme détermiste pour p-FEEDBACK VERTEX SET en temps exponentiel simple a été obtenu à l'aide de la compression itérative, une technique introduite par Reed et al. [53] et devenue désormais standard. L'idée est basée sur une routine de compression :

Etant donnée une solution (ici un coupe-cycle) de taille k + 1, calculer une solution de taille au plus k ou certifier qu'il n'en existe pas.

Les sommets sont traités selon un ordre quelconque  $v_1, \ldots v_n$ . A l'étape i, un coupe-cycle  $S_i$  du graphe  $G_i = G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$  est obtenu. Puisque l'acyclicité d'un graphe est une propriété héréditaire, l'ensemble  $S_{i+1} = S_i \cup \{v_{i+1}\}$  est un coupe-cycle de  $G_{i+1}$ . La routine de compression permet "d'améliorer"  $S_{i+1}$  si  $|S_{i+1}| > k$ . Nous construisons ainsi itérativement un coupe-cycle de taille au plus k de G, s'il en existe un. Plus précisément, l'étape de compression pour p-FEEDBACK VERTEX SET consiste à résoudre le problème p-DISJOINT FEEDBACK VERTEX SET qui étant donné un coupe-cycle S d'un graphe S, construit un coupe-cycle S', tel que  $S \cap S' = \emptyset$  et  $|S'| \leq k \leq |S|$  (si S' existe). Le paramètre est k.

**Lemme 5.21** Un algorithme de complexité  $O^*(c^k)$ , avec  $c \in \mathbb{N}^+$ , pour p-Disjoint Feedback Vertex Set implique un algorithme de complexité  $O^*((c+1)^k)$  pour p-Feedback Vertex Set.

Proof: Soient (G, k) une instance de p-Feedback Vertex Set et  $v_1, \ldots, v_n$  les sommets de G. Clairement  $V_k$  est un coupe-cycle de  $G_k$  de taille au plus k. Pour tout  $i \geq k$ ,  $S_{i+1} = S_i \cup \{v_{i+1}\}$  est un coupe-cycle de  $G_{i+1}$ . Si  $|S_{i+1}| \leq k$ , alors on passe à l'itération i+2. Sinon supposons qu'il existe un coupe-cycle  $S'_{i+1}$  de  $G_{i+1}$  tel que  $|S'_{i+1}| \leq |S_{i+1}|$ . Alors  $S = S_{i+1} \setminus S'_{i+1}$  et  $S' = S'_{i+1} \setminus S_{i+1}$  sont deux coupe-cycles disjoints du graphe  $G_{i+1} - (S_{i+1} \cap S'_{i+1})$  et |S'| < |S|. Pour tester l'existence d'un tel  $S'_{i+1}$  (et le construire), il suffit donc d'appliquer un algorithme pour p-Disjoint Feedback Vertex Set sur chacune des  $2^{k+1}$  instances  $(G - X, S_{i+1} \setminus X, k+1)$  pour tour  $X \subseteq S_{i+1}$ . Nous laissons l'analyse de complexité au lecteur.

Remarque 5.22 La preuve ci-dessus permet de considérer l'étape de compression comme un branchement de degré  $2^k$ . La définition usuelle d'un arbre de branchement requiert un degré borné et une profondeur dépendant de k. L'objectif est pourtant de borner la taille de l'arbre en fonction de k. Un degré dépendant de k peut donc être compatible.

L'observation suivante sera cruciale dans les preuves de correction de l'algorithme.

**Observation 5.23** Si (G, S, k) est une instance positive de p-Disjoint Feedback Vertex Set, alors G[S] et G - S sont des forêts.

*Proof:* Puisque S est un coupe-cycle de G, par définition G-S est acyclique. Puisque (G,S,k) est une instance positive, alors il existe un coupe-cycle  $S' \subseteq V \setminus S$  et donc G[S] est aussi acyclique.  $\square$ 

L'algorithme **FPT** pour p-DISJOINT FEEDBACK VERTEX SET combine des règles de réduction et une règle de branchement. Il utilise la règle de rèduction 5.14 pour supprimer les sommets de degré au plus 1 dans G-S. La règle suivante est une variante de la règle 5.15.

**Règle de réduction 5.24** Si  $V \setminus S$  contient un sommet x tel que  $N(x) = \{y, z\}, y \in V \setminus S$  et  $z \in S$ , alors retourner  $(G, S \cup \{x\}, k)$ .

**Règle de réduction 5.25** Si un sommet  $x \in V \setminus S$  est incident à deux arêtes e = (x, y) et e = (x, y') tels que y et y' appartiennent à la même composante connexe de G[S], retourner (G-x, S, k-1).

Règle de branchement 5.26 Si un sommet  $x \in V \setminus S$  possède deux voisins appartenant à des composantes connexes différentes de G[S], alors brancher sur :

- 1. (G-x, S, k-1);
- 2.  $(G, S \cup \{x\}, k)$ .

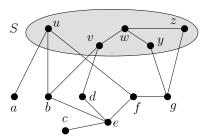


FIG. 10 – Règles pour p-DISJOINT FEEDBACK VERTEX SET : les sommets a et c sont supprimés par la règle 5.14; le sommet g est supprimé par la règle 5.25; le sommet g est ajouté à g par la règle 5.24; le sommet g génére un branchement avec la règle 5.26.

Si les règles 5.14 et 5.25 diminuent soit la taille du graphe, soit la valeur du paramètre, remarquons que ce n'est pas le cas de la règle 5.24. De même ni la taille, ni la valeur du paramètre ne décroît dans la seconde branche de la règle 5.26. Pour analyser la progression de l'algorithme, nous introduisons une mesure tenant compte du nombre #cc(S) de composantes connexes de G[S]:

$$\mu = k + \#cc(S)$$

Remarquons qu'initialement  $\mu \leq 2k$  (car  $\#cc(S) \leq |S|$ ) et que l'application de n'importe quelle règle (réduction ou branchement) diminue la valeur de  $\mu$  ou la taille de  $V \setminus S$ . Par ailleurs, l'application de chaque règle nécessite un temps polynomial.

**Théorème 5.27** Le problème p-Disjoint Feedback Vertex Set est résolu par un algorithme de branchement de complexité  $O^*(4^k)$ .

Proof: Considérons une instance positive (G, S, k) et rappelons que G - S est une forêt (car S est un coupe-cycle). Notons S' un coupe-cycle disjoint de S de taille au plus k. L'algorithme réduit les arbres de G - S en appliquant les règles de réduction et de branchement sur leurs feuilles tant que k > 0. Supposons que G - S soit réduit pour la règle  $5.14 : V \setminus S$  ne contient pas de sommet isolé et chaque feuille x d'un arbre de G - S possède au moins un voisin dans S.

Si  $|N(x) \cap S| = 1$ , alors la règle 5.24 s'applique et x est supprimé de  $V \setminus S$ . La validité de la règle provient du fait que si  $x \in S'$ , alors  $(S' \setminus \{x\}) \cup \{y\}$  (avec y le voisin de x dans  $V \setminus S$ ) est aussi un coupe-cycle disjoint de S de taille au plus k.

Supposons que  $|N(x) \cap S| \ge 2$ . Si x possède deux voisins dans la même composante connexe de G[S], alors G contient un cycle intersectant  $V \setminus S$  uniquement en x. Dans ce cas x appartient à tout coupe-cycle inclus dans  $V \setminus S$  et en particulier S'. La règle 5.25 qui s'applique dans ce cas est donc valide. Supposons qu'aucune composante connexe de G[S] ne contient deux voisins de x. Puisque x possède au moins deux voisins dans S, la règle 5.26 s'applique. Cette règle consiste simplement à brancher sur toutes les possibilités pour x: soit  $x \in S'$  et x décroît de 1, soit  $x \notin S'$  et x peut-être transféré dans l'ensemble S qui reste disjoint de S'. Dans ce dernier cas, comme observé plus tôt, la valeur de  $\mu$  diminue puisque l'ajout de x dans S a connecté au moins deux composantes connexes de G[S].

Puisque chaque règle nécessite un temps polynomial, la complexité dépend de la taille de l'arbre de branchement. L'application de la règle 5.26 décroît la mesure  $\mu$  dans les deux branches développées. Le nombre de feuilles (et de nœuds de branchement) de l'arbre est donc  $4^k$ . Pour conclure, observons que chaque branche de l'arbre contient au plus  $|V \setminus S|$  nœuds correspondant à une règle de réduction (nœuds de "branchement" unaire). On en déduit qu'en temps  $O^*(4^k)$ , il est possible de construire un coupe-cycle disjoint de S s'il en existe un.

Corollaire 5.28 Le problème p-FEEDBACK VERTEX SET admet un algorithme paramétré de complexité  $O^*(5^k)$ .

Exercice 5.28.1 Proposer un algorithme basé sur la compression itérative pour le problème p-Vertex Cover.

### 6 Problèmes non-FPT

La discussion de l'introduction a permis de conclure que le problème p-Coloration n'admet pas d'algorithme **FPT**. L'étude de la complexité des problèmes paramétrés non-**FPT** est un domaine à part entière de la théorie de la complexité que nous n'allons qu'effleurer. Nous présentons ci-dessous la notion de réduction paramétrée qui permet d'établir des relations entre problèmes paramétrés et la W-hiérarchie qui permet de classifier les problèmes paramétrés selon leurs difficultés.

#### 6.1 Réductions paramétrées

**Définition 6.1** Soient  $\kappa$ -P et  $\tau$ -Q deux problèmes paramétrés sur les alphabets respectifs  $\Sigma_P$  et  $\Sigma_Q$ . Une réduction paramétrée de  $\kappa$ -P vers  $\tau$ -Q est un algorithme **FPT**  $\mathcal{R}$  parmétré par  $\kappa$  tel que

- 1. pour tout  $(x, \kappa(x)) \in \Sigma_P^* \times \mathbb{N}$ ,  $(x, \kappa(x))$  est une instance positive de  $\kappa$ -P ssi  $(\mathcal{R}(x), \tau(\mathcal{R}(x)))$  est un instance positive de  $\tau$ -Q;
- 2. il existe une fonction calculable  $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$  telle que pour tout  $x \in \Sigma_P^*$ ,  $\tau(R(x)) \leq g(\kappa(x))$ . Nous dirons que  $\kappa$ -P est **FPT**-réductible vers  $\tau$ -Q, noté  $\kappa$ -P  $\leq_{fpt} \tau$ -Q, s'il existe un réduction paramétrée de  $\kappa$ -P vers  $\tau$ -Q. Nous noterons  $\kappa$ -P  $\equiv_{fpt} \tau$ -Q si  $\kappa$ -P  $\leq_{fpt} \tau$ -Q et  $\tau$ -Q  $\leq_{fpt} \kappa$ -P.

**Théorème 6.2** Soient  $\kappa$ -P et  $\tau$ -Q deux problèmes paramétrés tels que  $\kappa$ - $P \leqslant_{fpt} \tau$ -Q. Si  $\tau$ -Q est un problème **FPT**, alors  $\kappa$ -P est un problème **FPT**.

La preuve du théorème est laissée au lecteur. De nombreuses réductions polynomiales sont des réductions paramètrées. C'est le cas par exemple de la réduction entre CLIQUE et INDEPENDENT SET : un graphe possède une clique de taille k ssi son complémentaire possède un ensemble indépendant de taille k. Par contre la réduction polynomiale entre INDEPENDENT SET et VERTEX COVER n'est pas une réduction paramétrée : un graphe possède un ensemble indépendant de taille k ssi il possède une couverture de taille n-k. La taille de la couverture ne dépend pas uniquement de la taille de l'ensemble indépendant. Nous décrivons une réduction plus technique entre p-INDEPENDENT SET et p-DOMINATING SET (qui consiste à tester l'existence d'un ensemble dominant de taille k).

**Proposition 6.3** *p*-Independent Set  $\leq_{fpt}$  *p*-Dominating Set.

*Proof:* A partir d'un graphe  $G = (V_G, E_G)$ , nous construisons un graphe  $H = (V_H, E_H)$  tel que G contient un ensemble indépendant de taille k ssi H contient un ensemble dominant de taille k. La description est illustrée par la figure 11.

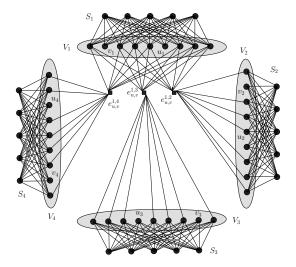


FIG. 11 – Construction partielle de la réduction de p-INDEPENDENT SET vers p-DOMINATING SET pour k=4. Les sommets  $e_{u,v}^{1,2}$ ,  $e_{u,v}^{1,3}$ ,  $e_{u,v}^{1,4}$  témoignent de l'existence de l'arête (u,v) dans G.

L'ensemble de sommets  $V_H$  est tel que :

$$V_H = (\bigcup_{i \in [k]} S_i \cup V_i) \cup (\bigcup_{i \neq j \in [k]} V_{i,j})$$

Pour chaque  $i \in [k]$ :  $V_i$  est une clique contenant une copie  $v_i$  de chaque sommet  $v \in V_G$ ;  $S_i$  est un ensemble indépendant de taille k+1 dont les sommets sont adjacents à tous les sommets de  $V_i$ . Pour chaque  $i \neq j \in [k]$ , l'ensemble  $V_{i,j}$  contient un sommet  $e_{u,v}^{i,j}$  pour chaque arête  $(u,v) \in E_G$  tel que  $N(e_{u,v}^{i,j}) = (V_i \cup V_j) \setminus \{u_i, v_j\}$  et un sommet  $e_{v,v}^{i,j}$  pour chaque  $v \in V$  tel que  $N(e_{v,v}^{i,j}) = (V_i \cup V_j) \setminus \{v_i, v_j\}$ . Construire H nécessite un temps polynomial.

Si  $I = \{v^1, \dots v^k\}$  est un ensemble indépendant de G, alors  $D = \{v^1_1, \dots v^k_k\}$  est un ensemble dominant de H. Notons que chaque  $v^i_i \in D$  domine  $V_i \cup S_i$ . Montrons que pour  $i \neq j \in [k]$ , les sommets de  $V_{i,j}$  sont dominés. Soit  $e^{i,j}_{u,v} \in V_{i,j}$  correspondant à l'arête  $(u,v) \in E_G$ . Puisque I est un ensemble indépendant,  $(v_i,v_j) \notin E$  implique que  $u \neq v_i$  ou  $v \neq v_j$ . Dans ce cas, par construction,  $e^{i,j}_{u,v}$  est adjacent à  $v_i$  ou  $v_j$ .

Soit D un ensemble dominant de taille k. Observons que pour tout  $i \in [k], |D \cap V_i| = 1$ . Sinon il existerait un ensemble  $S_i \subseteq D$ , ce qui est impossible car  $|S_i| = k + 1$ . Soient  $v_i \in V_i \cap D$  et  $u_j \in V_j \cap D$ . Observons que  $v_i \neq u_i$  et  $u_j \neq v_j$ , i.e.  $u_i$  et  $v_j$  sont des copies de deux sommets différents u et v de  $v_j$  sinon  $v_i \neq v_j$  n'est pas dominé. De même, observons que si  $v_j \neq v_j$  n'est une arête de  $v_j \neq v_j$  n'est pas dominé. On en déduit que  $v_j \neq v_j$  correspond à un ensemble indépendant de taille  $v_j \neq v_j$  n'est pas dominé. On en déduit que  $v_j \neq v_j$  correspond à un ensemble indépendant de taille  $v_j \neq v_j$  n'est pas dominé.

#### 6.2 W-hiérarchie

La proposition 6.3 est connue depuis les débuts de la complexité paramétré. Par contre, il a fallu attendre plusieurs années et la formalisation de la W-hiérarchie pour établir que, sous les hypothèses standards de la théorie de la complexité, p-Dominating Set  $\not\leq_{fpt}$  p-Independent Set. En 1995, Downey et Fellows [28] montrent un résultat analogue au théorème de Cook : sous l'hypothèse eth (une instance à n variables de 3-sat ne peut pas être résolue en temps  $2^{o(n)}$ ), le problème p-Short Turing Machine Acceptance n'admet pas d'algorithme paramétré. Ce problème consiste à déterminer si une machine de Turing non-déterministe accepte une entrée en au plus k étapes (k est le paramètre). On peut montrer que p-Independent Set  $\equiv_{fpt}$  Short Turing Machine Acceptance. Ces deux problèmes appartiennent au premier niveau de la W-hiérarchie, une hiérarchie de classes de complexité paramétrée en terme de circuits logiques (voir [20, 39] pour une synthèse).

**Définition 6.4** Un circuit C de n variables booléennes  $\{x_1, \ldots x_n\}$  est un graphe orienté acyclique ayant un unique sommet de degré sortant 0, la porte de sortie, et n sommets de degré entrant 0, les portes d'entrées, étiquetés par un litéral positif  $x_i$  ou négatif  $\overline{x_i}$ . Les sommets de degré entrant et sortant strictement positifs, appelés portes internes, sont étiquetés par l'opérateur booléen ET ou 0U.

Notons que les portes (d'entrées ou internes) ne sont pas "déterministes" : elles peuvent envoyer leur résultats vers plusieurs portes. La profondeur d'un circuit est la longueur maximum d'un chemin entre une porte d'entrée et la porte de sortie. Un circuit C de profondeur t est un  $\Pi_t$ -circuit si sa porte de sortie est étiquetée par l'opérateur AND. Une affectation  $\tau: \{v_1, \ldots v_n\} \to \{0, 1\}$  satisfait

le circuit C si la porte de sortie retourne la valeur 1. Le poids de  $\tau$  est le nombre de variables qui ont reçu la valeur 1. Le problème p-WEIGHTED SATISFIABILITY sur les  $\Pi_t$ -circuits, noté p-WCS[t], consiste à tester l'existence d'une affectation  $\tau$  de poids k satisfaisant un circuit C donné (le paramètre est k). Dans le problème p-WCNF 3-SAT, le circuit correspond à une formule CNF dont les clauses sont formées d'au plus 3 littéraux.

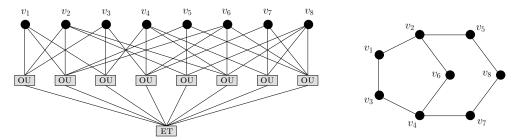


FIG. 12 – Un circuit C de profondeur 2 admettant une affectation de poids 3 : assigner la valeur 1 aux variables  $v_2$ ,  $v_4$  et  $v_6$  permet de satisfaire C. C est le circuit contruit à partir du graphe G pour montrer que p-Dominating Set appartient à la classe W[2].

**Définition 6.5** La classe W[1] contient l'ensemble des problèmes paramétrés **FPT**-réductibles à WCNF 3-SAT. Pour t > 1, la classe W[t] contient l'ensemble des problèmes paramétrés **FPT**-réductibles à p-WCS[t]. La W-hiérachie est définie par

$$\mathbf{FPT} \subseteq W[1] \subseteq W[2] \subseteq \cdots \subseteq W[t] \subseteq \ldots$$

**Théorème 6.6** [29] Le problème p-Independent Set est W[1]-complet et le problème p-Dominating Set est W[2]-complet.

Proof: Nous ne présentons pas la preuve (trop technique) que p-INDEPENDENT SET est W[1]-complet. Pour montrer que p-DOMINATING SET est W[2]-complet, il est suffisant de considérer des circuits de profondeur 2 dont l'ensemble des portes sont étiquetées par un littéral positif. Soit C un tel circuit dont les portes d'entrées sont  $\{v_1, \ldots v_n\}$  et les portes internes  $\{x_1, \ldots, x_m\}$ . On construit un graphe G tel que  $V_G = \{v_1, \ldots, v_n\} \cup \{x_1, \ldots, x_m\}$  avec : pour tout  $i < j \in [n], (v_i, v_j) \in E_G$  et  $(v_i, x_j) \in E_G$  ( $i \in [n]$  et  $j \in [m]$ ) ssi  $v_i$  est une entrée de la porte  $x_j$ . Nous pouvons observer que G possède un ensemble dominant de taille k ssi C possède une affectation de poids k. Ceci montre que p-DOMINATING SET est W[2]-difficile.

Pour montrer l'appartenance de p-DOMINATING SET à la classe W[2], nous construisons un circuit C de profondeur 2 à partir d'un graphe G = (V, E). A chaque sommet  $v \in V$ , nous associons une porte d'entrée étiquetée par un littéral positif et une porte interne  $x_v$  étiquetée par un ou. La porte interne correspondant au sommet v a pour entrées les portes correspondants aux sommets de N[v]. Le circuit de la figure 12 illustre cette construction. A nouveau, G possède un ensemble dominant de taille k ssi C possède une affectation de poids k.

# 7 Notes bibliographiques

Il existe aujourd'hui trois livres de référence. Historiquement, *Parameterized Compelxity* de R. Downey et M. Fellows [31] est le premier de ces trois livres. Il date un peu (une révision est prévue)

et s'adresse sans doute à un lecteur aguerri. Les livres Invitation to fixed parameter algorithms de R. Niedermeier [50] et Parameterized compleixty theory de J. Flum et M. Grohe [39] sont plus récents et plus accessibles. Comme leurs titres l'indiquent, le premier est plus orienté algorithmique alors que le second s'intéresse d'avantage à la complexité (en développant aussi les liens avec la logique et la théorie des automates). Sont disponibles sur internet de nombreux transparents de cours ou tutoriaux. Enfin, il faut mentionner deux numéros spéciaux de la revue The Computer Journal datant de 2008 – numéros 51(1) et 51(2)) – composés d'articles de synthèse couvrant l'ensemble du domaine. Plus récemment, à l'occassion du 60-ième anniversaire de M. Fellows, une série d'articles de synthèse ainsi que des notes historiques sur l'émergence du domaine ont été publié dans un volume de Lecture Notes in Computer Science [11].

## Références

- [1] K. Abrahamson and M. Fellows. Finite automata, bounded treewidth and well-quasiordering. In *Graph Structure Theory*, volume 147 of *Contemporary Mathematics*, pages 539–564. American Mathematical Society, 1993.
- [2] F. Abu-Khzam. A kernelization algorithm for d-hitting set. *Journal of Computer and System Sciences*, 76(7):524–531, 2010.
- [3] N. Alon. Ranking tournaments. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 20(137–142), 2005.
- [4] N. Alon, R. Yuster, and U. Zwick. Color coding. Journal of the ACM, 42(4):844–856, 1995.
- [5] S. Arnborg, D. Corneil, and A. Proskurowski. Complexity of finding embeddings in a k-tree. SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods, 8:277–284, 1987.
- [6] A. Becker, R. Bar-Yehuda, and D. Geiger. Randomized algorithms for the loop cutset problem. Journal of Artificial Intelligence Research, 12:219–234, 2000.
- [7] A. Björklund, T. Husfeld, and M. Koivisto. Set partitioning via inclusion? exclusion. SIAM Journal on Computing, 2(39):546–563, 2009.
- [8] H. Bodlaender. A linear time algorithm for finding tree-decomposition of small treewidth. SIAM Journal on Computing, 25:1305–1317, 1996.
- [9] H. Bodlaender, R. Downey, M. Fellows, and D. Hermelin. On problems without polynomial kernels. In *International Colloquium on Automata*, *Languages and Programming (ICALP)*, volume 5125 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 563–574, 2008.
- [10] H. Bodlaender, R. Downey, M. Fellows, and D. Hermelin. On problems without polynomial kernels. *Journal of Computer and System Sciences*, 75:423–434, 2009.
- [11] H. Bodlaender, R. Downey, F. Fomin, and D. Marx, editors. *The multivariate algorithmic revolution and beyond*, number 7370 in Lecture Notes in Computer Science, 2012.
- [12] H. Bodlaender, F. Fomin, D. Lokshtanov, E. Penninkx, S. Saurabh, and D. Thilikos. (meta) kernelization. In *Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pages 629–638, 2009.
- [13] H. Bodlaender, S. Kratsch, and B. Jansen. Cross-composition: a new technique for kernelization lower bounds. In *Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS)*, volume 9 of *Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs)*, pages 165–176, 2011.

- [14] H. Bodlaender, S. Thomassé, and A. Yeo. Kernel bounds for disjoint cycles and disjoint paths. In European Symposium on Algorithms (ESA), volume 5757 of Lecture Notes in Computer Science, pages 635–646, 2009.
- [15] J. Buss and J. Goldsmith. Nondeterminism within P. SIAM Journal on Computing, 22(3):560–572, 1993.
- [16] L. Cai. Fixed-parameter tractability of graph modification problems for hereditary properties. *Information Processing Letters*, 58(4):171–176, 1996.
- [17] Y. Cao, J. Chen, and Y. Liu. On feedback vertex set: new measure and new structures. In Scandinavian Workshop on Algorithm Theory (SWAT), volume 6139 of Lecture Notes in Computer Science, pages 93–104, 2010.
- [18] P. Charbit, S. Thomassé, and A. Yeo. The minimum feedback arc set problem is NP-hard for tournaments. *Combinatorics, Probability and Computing*, 16(1):1–4, 2007.
- [19] J. Chen, I. Kanj, and G. Xia. Improved upper bound for vertex cover. *Theoretical Computer Science*, 411(40–42):3736–3756, 2010.
- [20] J. Chen and J. Meng. On parameterized intractability: hardness and completeness. *The Computer Journal*, 51(1):39–60, 2008.
- [21] B. Chor, M.R. Fellows, and D. Juedes. Linear kernels in linear time, or how to save k colors in  $O(n^2)$  steps. In *Internation Workshop on Graph Theoretical Concepts in Computer Science* (WG), number 3353 in Lecture Notes in Computer Science, pages 257–269, 2004.
- [22] S. Cook. The complexity of theorem proving procedures. In Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC), pages 151–158, 1971.
- [23] B. Courcelle. The monadic second order theory of graphs. I: recognizable sets of finite graphs. Information and Computation, 85:12–75, 1990.
- [24] B. Courcelle and J. Engelfriet. Graph structure and monadic second-order logic, a language theoretic approach, volume 138 of Encyclopedi of Mathematics and Its Applications. Cambridge Univ. Press, 2012.
- [25] H. Dell and D. van Melkebeek. Satisfiability allows no nontrivial sparsification unless the polynomial-time hierarchy collapse. In Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC), pages 251–260, 2010.
- [26] R. Diestel. Graph theory. Springer-Verlag, 2005.
- [27] R. Diestel, K. Gorbunov, T. Jensen, and C. Thomassen. Highly connected sets and the excluded grid theorem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 75:61–73, 1999.
- [28] R. Downey and M. Fellows. Parameterized computational feasibility. In Second Cornell Workshop on Feasible Mathematics, pages 219–244. Birkhauser Boston, 1995.
- [29] R.G. Downey and M.R. Fellows. Fixed-parameter tractability and completeness I: Basic results. SIAM Journal on Computing, 24(4):873–921, 1995.
- [30] R.G. Downey and M.R. Fellows. Fixed-parameter tractability and completeness II: on completeness for W[1]. *Theoretical Computer Science*, 141:109–131, 1995.
- [31] R.G. Downey and M.R. Fellows. Parameterized complexity. Springer, 1999.
- [32] A. Drucker. New limits to classical and quantum instance compression. *Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC)*, 19:112, 2012.

- [33] J. Eblen, M. Langston, G. Rogers, and D. Weerapurage. Parallel vertex cover: A case study in dynamic load balancing. In *Australasian Symposium on Parallel and Distributed Computing*, 2011.
- [34] J. Edmonds. Minimum partition of a matroid into independent subsets. *Journal of Research of the National Bureau of Standards-B Mathematics and Mathematical Physics*, 69B(1–2), 1965.
- [35] M. Fellows. On the complexity of vertex set problems. Technical report, Computer Science Department, University of New Mexico, 1988.
- [36] M. Fellows and M. Langston. Nonconstructive advances in polynomial-time complexity. *Information Processing Letters*, 26:157–162, 1987.
- [37] M. Fellows and M. Langston. Nonconstructive tools for proving polynomial-time decidability. Journal of ACM, 35(3):727–739, 1988.
- [38] M. Fellows and M. Langston. An analogue of the Myhill-Nerode theorem and its use in computing finite-basis characterizations. In *Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pages 520–525, 1989.
- [39] J. Flum and M. Grohe. *Parameterized complexity theory*. Texts in Theoretical Computer Science. Springer, 2006.
- [40] F. Fomin, S. Saurabh, and Y. Villanger. A polynomial kernel for proper interval vertex deletion. In European Symposium on Algorithms (ESA), volume 7501 of Lecture Notes in Computer Science, pages 467–478, 2012.
- [41] L. Fortnow and R. Santhanam. Infeasability of instance compression and succinct PCPs for NP. In *Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 133–142, 2008.
- [42] M. Garey and S. Johnson. Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness. Freeman, 1978.
- [43] D. Johnson. The NP-completeness column. Journal of Algorithms, 8(2):285–303, 1987.
- [44] R. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of Computer Computations*, pages 85–103, 1972.
- [45] J. Kleinberg and E. Tardos. Algorithm design. Pearson International Edition, 2006.
- [46] S. Kratsch and M. Wahlström. Compression via matroids: a randomized polynomial kernel for add cycle transversal. In *Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, pages 92–103, 2012.
- [47] M. Langston, A. Perkins, A. Saxton, J. Scharff, and B. Voy. Innovative computational methods for transcriptomic data analysis: A case study in the use of FPT for practical algorithm design and implementation. *The Computer Journal*, 51(1):26–38, 2008.
- [48] L. Levin. Universal search problems. Problems of Informations Transmission, 1973.
- [49] G.L. Nemhauser and L.E. Trotter. Vertex packing: structural properties and algorithms. *Mathematical Programming*, 8:232–248, 1975.
- [50] R. Niedermeier. Invitation to fixed parameter algorithms, volume 31 of Oxford Lectures Series in Mathematics and its Applications. Oxford University Press, 2006.
- [51] C. Papadimitriou. Computational complexity. Addison Wesley, 1994.

- [52] C. Paul, A. Perez, and S. Thomassé. Conflict packing yields linear vertex-kernels for k-FAST, k-dense RTI and a related problem. In *International Symposium on Mathematical Foundation of Computer Science (MFCS)*, volume 6907 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 497–507, 2011.
- [53] B. Reed, K. Smith, and A. Vetta. Finding odd cycle transversals. *Operations Research Letters*, 32:299–301, 2004.
- [54] N. Roberston and P. Seymour. Graph minors XX: Wagner's conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 92(2):325–357, 2004.
- [55] N. Robertson and P. Seymour. Graph minors XIII: the disjoint paths problem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 63:65–110, 1995.
- [56] S. Thomassé. A  $4k^2$  kernel for feedback vertex set. ACM Transactions on Algorithms, 6(2), 2010.
- [57] M. Vardi. The complexity of relational query languages. In Annual ACM symposium on Theory of Computing (STOC), pages 137–146, 1982.