Actividad No. 3
Métodos para ncontrar las raíces de un polinomio

García Castro, Jorge

Universidad de Sonora
Departamento de Física

Hermosillo, Son. 03 de Octubre de 2018.

1 Introducción

En el presente reporte se describe y explican dos métodos numéricos; Método de Bisección y Método de Newthon-Rhaphson. Los cuales son herramientas que nos ayudan eficazmente a encontrar raíces de funciones.

Cada uno es un algoritmo diferente, porque aplican diferentes técnicas para aproximar la raíz. El método de bisección se basa en una recta secante que corta la función en dos puntos, mientras que el Método de Newton-Raphson se ocupa el cálculo diferencial de la función, usando la recta secante obtenida para aproximar a la solución.

A continuación veremos ambos métodos, sus similitudes, diferencias, ventajas y desventajas.

2 ¿Qué es una raíz?

Cuando se habla de raíces en matemáticas, se refiere a todo elemento de una función f(x) tal que:

La raíz también puede referirse a un número de la forma:

$$a^{\frac{1}{n}=^{n}\sqrt{a}}(1)$$

Que no es otra cosa que la raíz de un polinomio de la forma:

$$(x^n)–a. \tag{2}$$

Un ejemplo de ello sería la raíz cuadrada, la raíz cúbica, etc.

Es necesario destacar que, dichas soluciones, se deben encontrar dentro de un rango posible, que llamamos Dominio de la función. Dicho domino, puede comprender tanto los números reales como los irracionales.

Veamos un ejemplo gráfico:

Llamemos a está curva: y=f(x)

En ella vemos, que para cada valor de x (eje de abscisas, el horizontal) le corresponde un valor de y (eje de ordenadas, el vertical). La curva toma pues, diferentes valores con cada nueva variable que añadimos. Pero observamos que, hay casos, en los que la función corta al eje x. Eses "cortes" son debido a que allí la función vale cero, o siendo más concretos, que el valor de "y" es cero. ¿Por qué? Miren arriba en el ejemplo. Cuando "y" es cero, "x" vale 1, como veis, cuando la curva corta al eje equis en el punto 1, no existe ningún número en el eje de las íes para unirlo con el equis, esto significa que la función vale cero. No quiere decir que no exista. Está ahí, solo que en ese punto 1 en concreto.

Para entenderlo mejor, mirémoslo del revés, pensemos que tenemos un valor de "y", -1, y para este caso equis vale cero. Como se observa, la función no desaparece, simplemente, sigue en línea recta por ese punto solamente.

Se tiene que pensar en las raíces como los puntos de referencia de las funciones, ya que, puede ser difícil conocer todos los puntos, pero sin los puntos de corte con los ejes, o raíces de la función, es imposible representarlas.

En el desarrollo de este trabajo se buscará, por medio de dos algoritmos, encontrar la raíz de una función f(x) dada. Utilizando el método de bisección y el método de Newton-Raphson.

La función f(x) esta dada por:

$$f(x) = x^3 - x - 2 \tag{3}$$

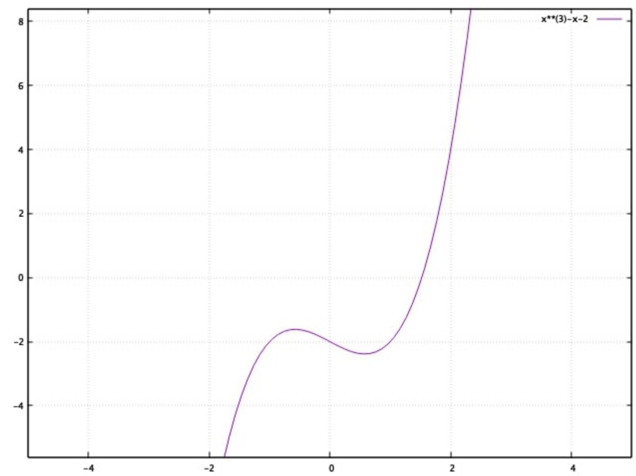

Figure 1: Gráfica de la función f(x)

2.1 Método de Bisección

Este es uno de los métodos más sencillos y de fácil intuición para resolver ecuaciones en una variable, también conocido como Método de Intervalo Medio. Se basa en el teorema del valor intermedio (TVI), el cual establece que toda función continua f en un intervalo cerrado [a,b] toma todos los valores que se hallan entre f(a) y f(b). Esto es que todo valor entre f(a) y f(b) es la imagen de al menos un valor en el intervalo [a,b]. En caso de que f(a) y f(b) tengan signos opuestos, el valor cero sería un valor intermedio entre f(a) y f(b), por lo que con certeza existe un p en [a,b] que cumple f(p)=0. De esta forma, se asegura la existencia de al menos una solución de la ecuación f(x)=0.

El método consiste en lo siguiente:

1. Debe existir seguridad sobre la continuidad de la función f(x) en el intervalo [a,b]

2. A continuación se verifica que

$$f(a).f(b) < 0 \tag{4}$$

3. Se calcula el punto medio m del intervalo [a,b] y se evalúa f(m) si ese valor es igual a cero, ya hemos encontrado la raíz buscada

4. En caso de que no lo sea, verificamos si f(m) tiene signo opuesto con f(a) o con f(b)

5. Se redefine el intervalo [a, b] como [a, m] ó [m, b] según se haya determinado en cuál de estos intervalos ocurre un cambio de signo

6. Con este nuevo intervalo se continúa sucesivamente encerrando la solución en un intervalo cada vez más pequeño, hasta alcanzar la precisión deseada

En la siguiente figura se ilustra el procedimiento descrito.

El método de bisección es menos eficiente que el método de Newton, pero es mucho más seguro para garantizar la convergencia. Si f es una función continua en el intervalo [a, b] y f(a)f(b) ¡ 0, entonces este método converge a la raíz de f. De hecho, una cota del error absoluto es:

$$\frac{|b-a|}{2^n} \tag{5}$$

en la n-ésima iteración. La bisección converge linealmente, por lo cual es un poco lento. Sin embargo, se garantiza la convergencia si f(a) y f(b) tienen distinto signo. Si existieran más de una raíz en el intervalo entonces el método sigue siendo convergente pero no resulta tan fácil caracterizar hacia qué raíz converge el método.

2.1.1 Algoritmo de Bisección en lenguaje Fortran

El siguiente código pertenece al de Bisección, está en lenguaje fortran de la función

$$f(x) = x^3 - x - 2 \tag{6}$$

```
PROGRAM METODO DE BISECCION
IMPLICIT NONE
REAL:: a,b,c,error,f
¡a y b es el intervalo de la raiz
¡c es la aproximacion a la raiz
¡error es el error de truncamiento al finalizar la aproximacion
¡f es la funcion en cuestion
error=1.0e-6
WRITE(*,*)¿En qué intervalo cree se encuntra la raiz?, ingrese a e ingrese b

10 READ(*,*) a,b
15 IF (f(a)*f(b)) .lt. 0) THEN
¡Si al multiplicar la función evaluada en ambos extremos del intervalo nos da menor que
c=(a+b)/2
ELSE
write(*,*)"Por favor ingresa otro intervalo donde pueda estar la raiz"
goto 10
END IF
if (f(a)*f(b) .lt. 0) then
b=c
ELSE
a=c
END IF
IF (abs(b-a) .gt. error) goto 15

WRITE(*,*) "La raiz aproximada de ka funcion f es: ", c
```

```
END PROGRAM

REAL FUNCTION f(x)
IMPLICIT NONE
REAL:: x
f=x**3-x-2
END FUNCTION
```

2.2 Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson es un método abierto, en el sentido de que no está garantizada su convergencia global. La única manera de alcanzar la convergencia es seleccionar un valor inicial lo suficientemente cercano a la raíz buscada. Así, se ha de comenzar la iteración con un valor razonablemente cercano al cero (denominado punto de arranque o valor supuesto). La relativa cercanía del punto inicial a la raíz depende mucho de la naturaleza de la propia función; si ésta presenta múltiples puntos de inflexión o pendientes grandes en el entorno de la raíz, entonces las probabilidades de que el algoritmo diverja aumentan, lo cual exige seleccionar un valor supuesto cercano a la raíz.

Una vez que se ha hecho esto, el método linealiza la función por la recta tangente en ese valor supuesto. La abscisa en el origen de dicha recta será, según el método, una mejor aproximación de la raíz que el valor anterior. Se realizarán sucesivas iteraciones hasta que el método haya convergido lo suficiente.

Sea f: [a, b] -¿ R función derivable definida en el intervalo real [a, b]. Empezamos con un valor inicial x0 y definimos para cada número natural n

$$x_(n+1) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{7}$$

Donde f ' denota la derivada de f.

Nótese que el método descrito es de aplicación exclusiva para funciones de una sola variable con forma analítica o implícita conocible. Existen variantes del método aplicables a sistemas discretos que permiten estimar las raíces de la tendencia, así como algoritmos que extienden el método de Newton a sistemas multivariables, sistemas de ecuaciones, etcétera.

2.2.1 Algoritmo de Newton-Raphson en lenguaje Fortran

```
    PROGRAM NEWTONRAPHSON

IMPLICIT NONE
!x0: una raíz aproximada
!x1: un punto en el eje x mas aproximado a la raíz
!f: funcion en cuestión que se busca su raiz
!fd: primera derivada de la función f
```

```
!error: error relativo a la aproximacion

REAL:: x,x1,error,f,fd

!Se solicita el primer valor de un punto en el eje x, cerca de ka raiz
WRITE(*,*) \Ingresa un punto donde la function cambia de signo"
READ(*,*) x0

DO

x1=x0-(f(x0)/fd(x0))
error = 100*abs( (x1-x0)/x1)
x0=x1
WRITE(*,*) "x0 = ", x1, " % error = ", error
IF (error < 0.0000001) EXIT


END DO

PRINT*,'La raíz aproximada de la función es:', x1

END PROGRAM NEWTONRAPHSON

¡Funcion en cuestión, función original
REAL FUNCTION f(x0)
IMPLICIT NONE
REAL:: x0
f = x0**3-x0-2
END FUNCTION f

!Primera derivada de la función original
REAL FUNCTION fd(x0)
IMPLICIT NONE
REAL:: x0
fd = 3x0**1-1
END FUNCTION fd
```

3 Conclusión

Amboss métodos son muy efectivos, sin embargo el método de Newton-Raphson es el más eficaz al momento de aproximar.

Por ejemplo; el método de bisección tiene la desventaja que es lento en cuanto a convergencia (es decir que se necesita un n grande para que sea pequeño). Otros métodos requieren menos iteraciones para alcanzar la misma exactitud, pero entonces no siempre se conoce una cota para la precisión.

En cambio,el método de N-R, el cual es un método iterativo, es uno de los más usados y efectivos. A diferencia del método de bisección, el método de Newton-Raphson no trabaja sobre un intervalo sino que basa su fórmula en un proceso iterativo.

3.1 Bibliografía

Wikipedia
https://en.wikipedia.org/wiki/Bisection-method
https://es.wikipedia.org/wiki/Método-de-bisección
https://en.wikipedia.org/wiki/Newton27s$_{m}ethod$
$https : //es.wikipedia.org/wiki/Método - de - Newton$