

# **Pojednostavljeni model protuoklopnog vođenog projektila**

Fizikalni model i priprema jednadžbi za simulaciju

## **Seminarski rad**

Kolegij: Interaktivni simulacijski sustavi

### **Autori:**

Daniel Batinić

Leon Lužaić

Ivan Periša

Karim Krklec

Nikola Simunić

24. siječnja 2026.

# 1 Uvod

Cilj ovog rada je izvesti detaljan fizikalni model pojednostavljenog protuoklopnnog vođenog raketnog sustava, fokusiran na dinamiku projektila i interakciju s fluidom (zrakom). Model uključuje:

- geometriju projektila,
- izračun težišta,
- tenzor momenta tromosti,
- aerodinamičke sile i stabilizacijski moment,
- potisak propulzora, njegovu orijentaciju i latencije na unos korisnika,
- jednadžbe translacije i rotacije,
- diskretne jednadžbe za računalnu simulaciju.

Primarna namjena modela je integracija u real-time interaktivnu simulaciju korištenjem alata Godot.

## 2 Geometrijski model projektila

Projektil se aproksimira kao kruto tijelo sastavljen od valjka i stošca:

$$V_{\text{valjak}} = \pi R^2 H, \quad V_{\text{stožac}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

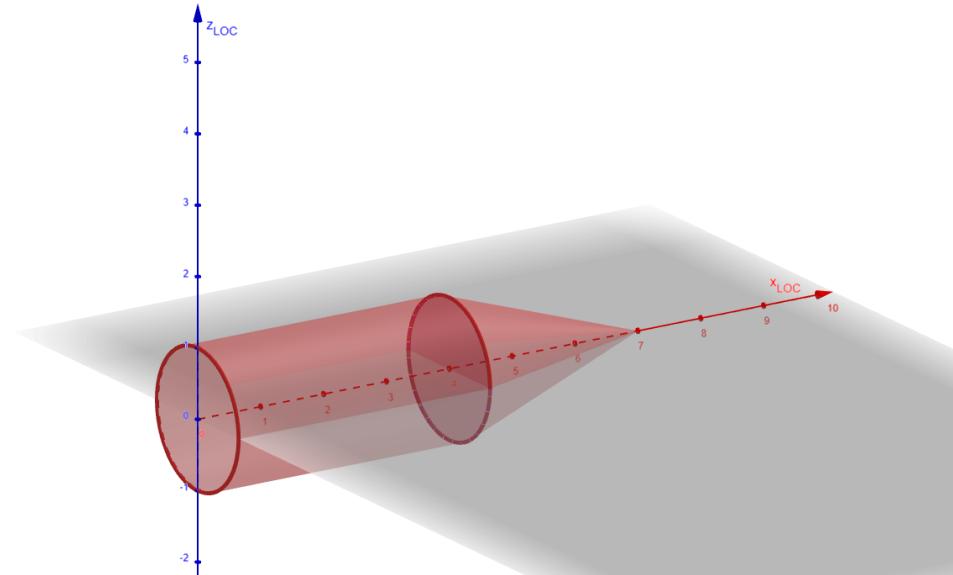
Ukupni volumen:

$$V_{\text{tot}} = \pi R^2 \left( H + \frac{h}{3} \right).$$

Ukupna masa:

$$M = \rho V_{\text{tot}}.$$

Lokalna os  $x_{\text{loc}}$  definirana je tako da prolazi kroz središte slobodne baze valjka (ishodište), kroz spoj valjak–stožac i do vrha stožca.



Slika 1: Pojednostavljeni model projektila sastavljen od valjka i stošca. Središte slobodne baze valjka postavljeno je u ishodište lokalnog koordinatnog sustava.

$H$  definiramo kao visinu valjka,  $h$  kao visinu stožca i  $R$  kao radijus baza valjka i stošca. Primjer na slici gore daje  $H=4$ ,  $h=3$  i  $R=1$

## 3 Težište projektila

### Točno izведен izraz sa simulaciju

Težište valjka (mjereno od baze valjka):

$$x_{\text{CM, valjak}} = \frac{H}{2}.$$

Težište stošca (mjereno od baze valjka):

$$x_{\text{CM,stožac}} = H + \frac{h}{4}.$$

Ukupna masa:

$$M = \rho \pi R^2 \left( H + \frac{h}{3} \right).$$

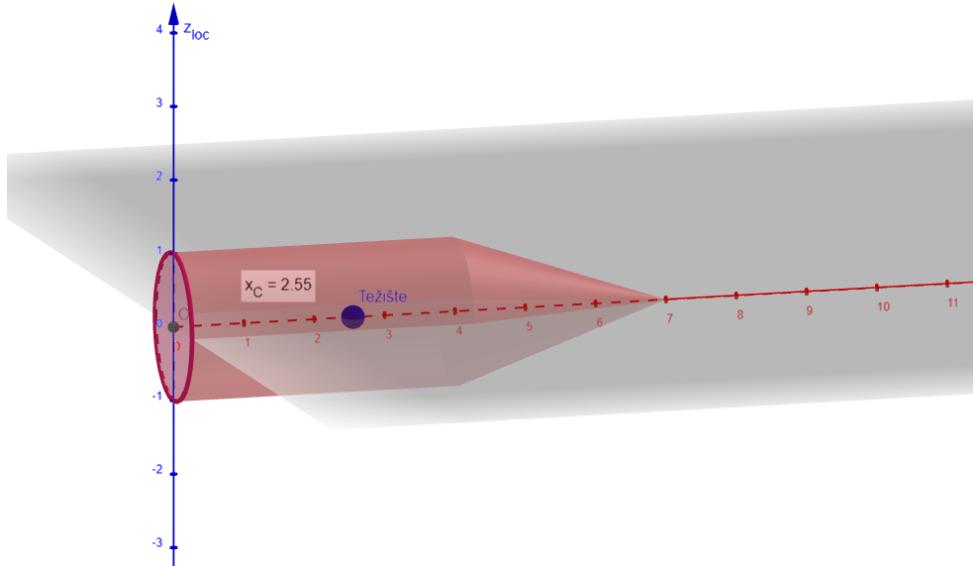
Rezultat za ukupno težište (od baze valjka):

$$x_{\text{CM,loc}} = \frac{\pi R^2 \rho \left( H \cdot \frac{H}{2} + \frac{h}{3} (H + \frac{h}{4}) \right)}{\pi R^2 \rho \left( H + \frac{h}{3} \right)}.$$

Pojednostavljeno:

$$x_{\text{CM,loc}} = \frac{6H^2 + 4Hh + 3h^2}{12H + 4h}$$

Udaljenost težišta od središta baze valjka koje je na slici gore smješteno u ishodištu.



Slika 2: Prikaz težišta modela za vrijednosti početnog primjera.

Za globalnu poziciju težišta imamo:

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \mathbf{r}_{\text{proj}} + R(\alpha_{\text{proj}}, \beta_{\text{proj}}, \gamma_{\text{proj}}) \begin{bmatrix} x_{\text{CM,loc}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Smjer projektila definiran je lokalnom x-osom, pa vrijedi:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{proj}} = R(\alpha, \beta, \gamma) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Budući da je potpuna rotacijska matrica  $R(\alpha, \beta, \gamma)$  zadana s:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ \cos \beta \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma \\ -\sin \beta & \sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix},$$

jedinični vektor smjera jednak je prvoj koloni matrice:

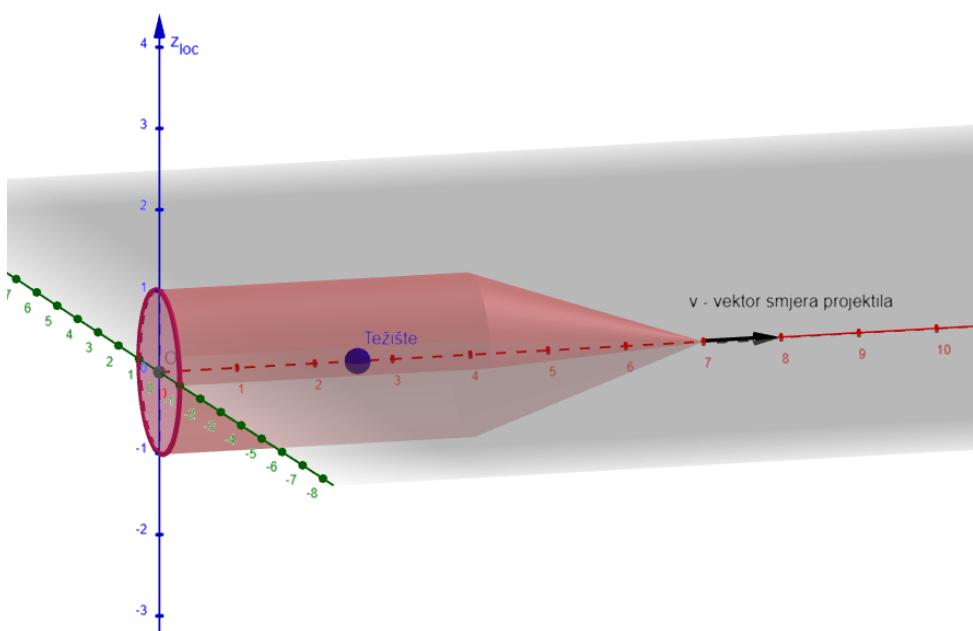
$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{proj}} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma \\ \cos \beta \sin \gamma \\ -\sin \beta \end{bmatrix}$$

pa imamo izraz za točnu poziciju težišta u globalnom sustavu

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \mathbf{r}_{\text{proj}} + x_{\text{CM,loc}} \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma \\ \cos \beta \sin \gamma \\ -\sin \beta \end{bmatrix}$$

gdje su kutevi  $\alpha, \beta, \gamma$  kutevi pod kojima je vektor smjera projektila zaokrenut oko osi x, y, z respektivno.

Dobili smo konačan zatvoreni izraz u sinusima i kosinusima Eulerovih kuteva, a  $\mathbf{r}_{\text{proj}}$  predstavlja točnu poziciju točke središta slobodne baze valjka projektila.



Slika 3: Prikaz vektora smjera modela koji je uvijek kolinearan sa lokalnom osi x.

## 4 Tenzor tromosti

### 1. Relativne mase valjka i stošca

Ukupni volumen:

$$V_{\text{total}} = \pi R^2 H + \frac{1}{3} \pi R^2 h = \pi R^2 \left( H + \frac{h}{3} \right)$$

Volumni udio valjka:

$$\alpha_v = \frac{\pi R^2 H}{\pi R^2 \left( H + \frac{h}{3} \right)} = \frac{H}{H + \frac{h}{3}}$$

Volumni udio stošca:

$$\alpha_s = 1 - \alpha_v = \frac{\frac{h}{3}}{H + \frac{h}{3}} = \frac{h}{3H + h}$$

Dakle, mase dijelova zbog jednolike raspodjele gustoće su:

$$M_v = \alpha_v M = \frac{H}{H + \frac{h}{3}} M, \quad M_s = \alpha_s M = \frac{h}{3H + h} M$$

### 2. Moment tromosti oko osi x

Valjak (oko svoje osi):

$$I_{xx}^{(v)} = \frac{1}{2} M_v R^2 = \frac{1}{2} \frac{H}{H + h/3} M R^2$$

Stožac (oko svoje osi):

$$I_{xx}^{(s)} = \frac{3}{10} M_s R^2 = \frac{3}{10} \frac{h}{3H + h} M R^2$$

Ukupni moment tromosti oko x-osi:

$$I_{xx}^{\text{total}} = \frac{1}{2} \frac{H}{H + h/3} M R^2 + \frac{3}{10} \frac{h}{3H + h} M R^2$$

### 3. Moment tromosti oko osi okomitih na x (y i z)

Valja primjetiti kako sbog simetrije modela imamo jednake momente tromosti oko osi y i z. Također primjenjujemo već pozate izraze za momente tromosti jednostavnih krutih tijela.

Valjak (oko CM valjka):

$$I_{yy}^{(v)} = I_{zz}^{(v)} = \frac{1}{12} M_v (3R^2 + H^2) = \frac{1}{12} \frac{H}{H + h/3} M (3R^2 + H^2)$$

Stožac (oko CM stošca):

$$I_{yy}^{(s)} = I_{zz}^{(s)} = \frac{3}{20} M_s (R^2 + 4h^2) = \frac{3}{20} \frac{h}{3H + h} M (R^2 + 4h^2)$$

Primjenjujemo Steinerov zakon za pomak do globalnog CM:

$$I_{yy}^{\text{global}} = I_{yy}^{(v)} + M_v (x_{v,CM} - x_{CM})^2 + I_{yy}^{(s)} + M_s (x_{s,CM} - x_{CM})^2$$

$$I_{zz}^{\text{global}} = I_{yy}^{\text{global}}$$

## 4. Konačni tenzor tromosti u lokalnom koordinatnom sustavu s CM u ishodištu

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx}^{\text{total}} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy}^{\text{global}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{yy}^{\text{global}} \end{bmatrix}$$

gdje je

$$I_{xx}^{\text{total}} = \frac{1}{2} \frac{H}{H + h/3} MR^2 + \frac{3}{10} \frac{h}{3H + h} MR^2$$

$$I_{yy}^{\text{global}} = \frac{1}{12} \frac{H}{H + h/3} M(3R^2 + H^2) + \frac{H}{H + h/3} M \left( \frac{H}{2} - x_{CM,lok} \right)^2 \\ + \frac{3}{20} \frac{h}{3H + h} M(R^2 + 4h^2) + \frac{h}{3H + h} M \left( H + \frac{h}{4} - x_{CM,lok} \right)^2$$

## 5 Model potisne sile

Propulzor se nalazi u ishodištu lokalnog sustava te gleda prema van. Korisnički ulazi su po definiciji:

$$u_x(t), \quad u_y(t), \quad u_T(t) \in [0, 1].$$

Gdje je  $u_T$  varijabla koja upravlja jačinom sile propulzije. Uvjet:

$$u_x^2 + u_y^2 \leq 1.$$

### 5.1 Orijentacija mlaznice

Upravljanje smjerom potiska definira se pomoću dvaju upravljačkih signala  $u_x$  i  $u_y$  koji pripadaju tangentnoj ravnini okomitoj na lokalnu os projektila. Njihova kombinacija određuje smjer i veličinu otklona mlaznice.

**Azimut otklona.** Kut azimuta određuje smjer otklona u ravnini okomitoj na os projektila i računa se pomoću funkcije `atan2`, koja uzima u obzir znakove oba argumenta i vraća kut u ispravnom kvadrantu:

$$\alpha_{\text{prop}} = \text{atan2}(u_y, u_x)$$

**Magnituda otklona.** Apsolutna veličina otklona određuje se iz euklidske norme upravljačkog para:

$$\|u\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}.$$

Za potrebe simulacije može se koristiti linearни model u kojem je otklon proporcionalan upravljačkom signalu:

$$\beta_{\text{prop}} = \phi_{\text{prop,max}} \sqrt{u_x^2 + u_y^2},$$

gdje je  $\phi_{\text{prop,max}}$  maksimalni dopušteni kut otklona mlaznice.

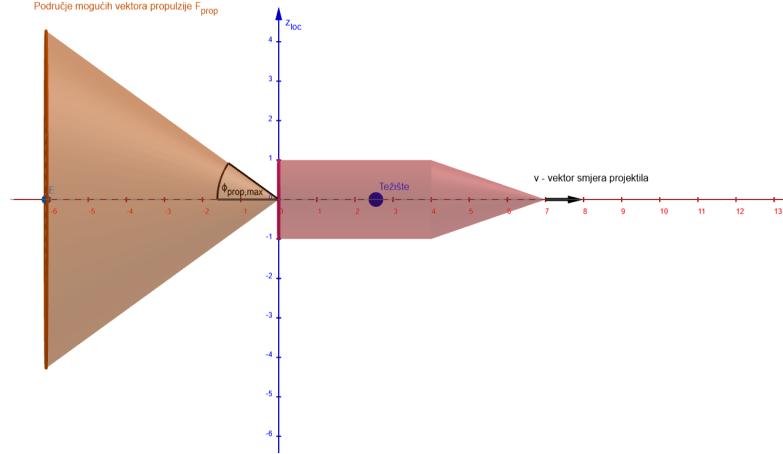
**Napomena o nelinearnom modelu.** Fizikalno točniji model određuje kut otkona kao

$$\beta_{\text{prop}} = \arcsin \left( \min \left( 1, \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \right) \right),$$

uz ograničenje

$$\beta_{\text{prop}} \leq \phi_{\text{prop,max}}.$$

U ovom radu koristi se linearни model radi jednostavnosti i lakše integracije u simulacijski sustav.



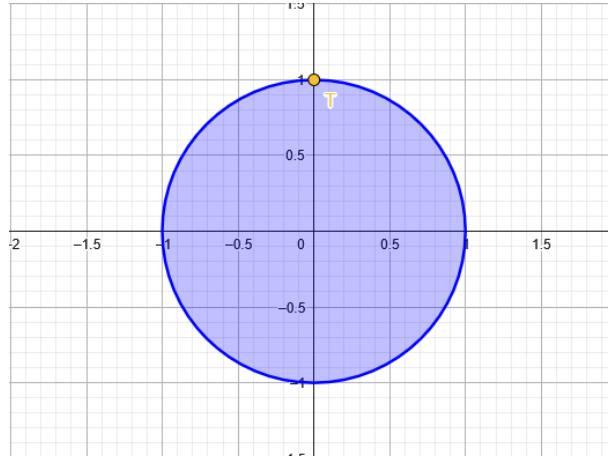
Slika 4: Prikaz domene vektora propulzije.

Vektor potiska u lokalnom sustavu:

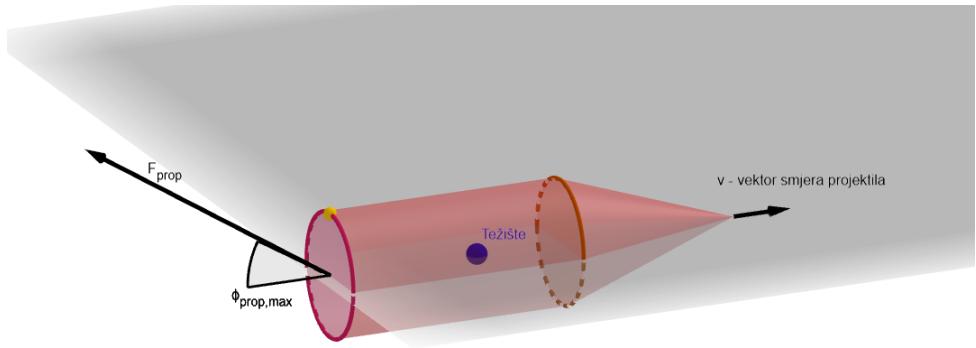
$$\mathbf{F}_{\text{prop,loc}} = F_{\text{prop}}(t) \begin{bmatrix} \cos \beta_{\text{prop}} \\ \sin \beta_{\text{prop}} \cos \alpha_{\text{prop}} \\ \sin \beta_{\text{prop}} \sin \alpha_{\text{prop}} \end{bmatrix}.$$

Ali sila djeluje prema **suprotnoj** strani od mlaza:

$$\mathbf{F}_{\text{loc}} = -\mathbf{F}_{\text{prop,loc}}.$$

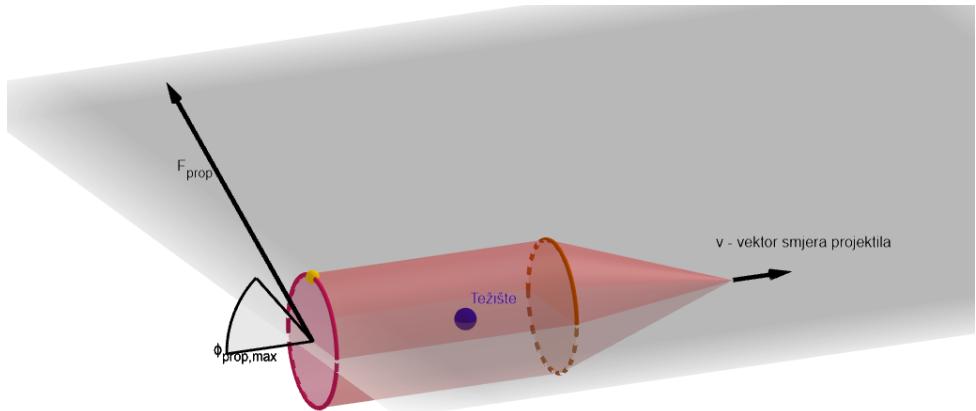


Slika 5: Prikaz primjera korisničkog unosa za  $u_x=0$ ,  $u_y=1$ .

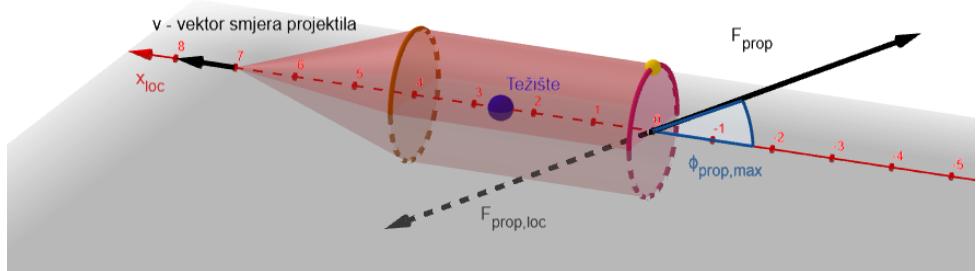


Slika 6: Prikaz smjera vektora  $F_{prop}$  te korisničkog unosa (žuta točka prikazana na kružnici baze valjka koju smo namjestili da je jedinična, vrijedi  $\phi_{prop,max}=30^\circ$ .)

Za male  $\phi_{prop,max}$  naša aproksimacija ali za  $\phi_{prop,max} \geq 30^\circ$  naša aproksimacija više nije dovoljno prihvatljiva.



Slika 7: Za  $\phi_{prop,max} = 50^\circ$  vektor propulzije prelazi zadane rubove.



Slika 8: Prikaz sa reakcijskom silom  $F_{prop,loc}$  koja zapravo djeluje na tijelo.

Latencija unosa throttle-a korisnika:

$$F_{\text{prop}}(t) = F_{\text{prop,max}} u_T(t - t_{\text{prop,throt,lat}}).$$

Latencija orijentacije propulzora:

$$\beta_{\text{prop,eff}}(t) = \beta_{\text{prop}}(t - t_{\text{prop,rot,lat}}).$$

$$\alpha_{\text{prop,eff}}(t) = \alpha_{\text{prop}}(t - t_{\text{prop,rot,lat}}).$$

## 6 Aerodinamičke sile

### 6.1 Gravitacija

$$\mathbf{F}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Mg \end{bmatrix}.$$

### 6.2 Uzgon

$$\mathbf{F}_{\text{uzgon}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g V_{\text{TOTAL}} \end{bmatrix}.$$

### 6.3 Otpor zraka

Definiramo relativnu brzinu projektila u odnosu fluid u okolini:

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{v}_{\text{proj}} - \mathbf{v}_{\text{wind}}.$$

Poznata formula za projeciranu površinu:

$$A_{\text{proj}} = \left| \iint_S (\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dA \right|,$$

gdje je  $\hat{\mathbf{u}} = -\hat{\mathbf{v}}_{\text{rel}}$  to jest jedinični vektor  $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ .

Za tijelo rotacijske simetrije poznato je rješenje ovog plošnog integrala:

$$A_{\text{proj}} = \pi R^2 |\cos \theta| + R(2H + h) |\sin \theta|$$

gdje je  $\theta$  kut između osi projektila (vektora smjera projektila) i relativne brzine  $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ . Vidimo da je formula smislena, kada se projektil translacijski giba u smjeru u kojem je orijentiran onda prevladava komponenta presjeka baze, a kada je orijentiran savršeno okomito onda prevladava komponenta presjeka boka (silueta pravokutnika i trokuta)

Konačno silu otpora imamo kao:

$$\mathbf{F}_{\text{drag}} = -\frac{1}{2} \rho_f C_D(\mathbf{v}_{\text{rel}}) A_{\text{proj}} |\mathbf{v}_{\text{rel}}| \mathbf{v}_{\text{rel}}.$$

## 6.4 Model za koeficijent otpora ( $C_D$ )

Koeficijent  $C_D$  nije samo broj, nego je zapravo složena funkcija. Da bismo dobili točnu vrijednost, u teoriji bismo morali uzeti u obzir sve ovo:

- **Geometriju tijela** (poznati  $R, H, h$ ).
- **Orijentaciju** (kut  $\theta$ ).
- **Kompresibilnost fluida** (Broj Macha,  $Ma$ ).
- **Viskoznost fluida** (Broj Reynoldsa,  $Re$ ).

U formuli za  $\mathbf{F}_{\text{drag}}$ , oznaka  $C_D(\mathbf{v}_{\text{rel}})$  je zapravo skraćeni zapis. Ona nam govori da  $C_D$  ovisi o brzini, ali to radi preko dva ključna bezdimenzionalna broja: Macha i Reynoldsa.

### 6.4.1 Machov broj (Ma) i Reynoldsov broj (Re)

**Broj Macha** ( $Ma$ ) nam govori koliko smo brzi u odnosu na brzinu zvuka ( $a$ ) u fluidu:

$$Ma = \frac{|\mathbf{v}_{\text{rel}}|}{a}$$

(Uzimamo  $a \approx 340 \text{ m/s}$  pri tlu).

**Broj Reynoldsa** ( $Re$ ) uspoređuje koliko je strujanje "jako" (inercija) u odnosu na to koliko je fluid "ljepljiv" (viskoznost):

$$Re = \frac{\rho_f |\mathbf{v}_{\text{rel}}| L}{\mu}$$

Ovdje je  $L$  neka "karakteristična" duljina – za aksijalno gibanje, prema konvenciji uzimamo promjer  $L = 2R$ .  $\mu$  je dinamička viskoznost fluida.

**Dinamička viskoznost** ( $\mu$ ) zraka ovisi primarno o temperaturi. Za našu simulaciju u subsoničnom režimu i pod pretpostavkom konstantne temperature zraka (oko  $20^\circ\text{C}$ ), možemo uzeti konstantnu vrijednost:

$$\mu \approx 1.8 \times 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$$

### 6.4.2 Aproksimacija (za $Ma < 0.8$ )

Najveći problem je što  $C_D$  postane nelinearan i naglo skoči kada se približimo brzini zvuka (transonični režim,  $Ma \approx 1$ ) i pri velikim brzinama (supersonični režim).

Da bismo pojednostavili simulaciju, mi ćemo se ograničiti samo na **subsonični režim** ( $Ma < 0.8$ ). U tom području  $C_D$  je puno stabilniji.

Ako dodatno pretpostavimo da projektil leti uglavnom "ravno", tj. da je napadni kut mali ( $\theta \approx 0$ ), možemo koristiti standardni poznati model. Model koji ćemo koristiti zbraja dvije vrste otpora i ovisi o  $Re$  broju:

$$C_D(Re) \approx C_{D,0} + \frac{k}{Re}$$

$C_{D,0}$  i  $k$  su konstante poznate i popisane u literaturi:

- $C_{D,0}$  je glavni dio otpora, tj. "otpor oblika" (form drag). To je vrijednost koju  $C_D$  ima kad je  $Re$  jako velik. Za šiljasti projektil poput onog kojeg smo modelirali,  $C_{D,0}$  se uzima da je u rasponu od 0.15 do 0.3. Za daljnje modeliranje uzmimo  $C_{D,0} = 0.2$ .
- $k$  predstavlja utjecaj "trenja" fluida (viskozni otpor). Kao grubu aproksimaciju,  $k \approx 10000$ .

Uvršavanjem u definiciju za  $Re$  (s  $L = 2R$ ), konačno dobijemo  $C_D$  kao funkciju brzine i svojstava fluida, što smo i tražili:

$$C_D(\mathbf{v}_{\text{rel}}) \approx C_{D,0} + \frac{k\mu}{\rho|\mathbf{v}_{\text{rel}}|(2R)}$$

#### 6.4.3 Važna ograničenja ovog modela

Aproksimacija vrijedi samo pod uvjetima koje smo postavili:

1. **Subsonične brzine:** Model dobro aproksimira dok je brzina dosta ispod brzine zvuka ( $Ma < 0.8$ ). Formula je potpuno pogrešna blizu ili iznad brzine zvuka (transonični i supersonični režim), jer tamo  $C_D$  naglo skače.
2. **Mali kut  $\theta$ :** Prepostavili smo da je  $\theta \approx 0$  to jest da većinu vremena smjer u kojem je projektil okrenut da je to i smjer translacijske brzine projektila. Ako se projektil u letu "nagne" pa  $\theta$  poraste,  $A_{\text{proj}}$  se mijenja (što imamo u formuli), ali raste i  $C_{D,0}$ , što ovaj jednostavni model ne uzima u obzir.
3. **Najjednostavnija aproksimacija (Veliki  $Re$ ):** U praksi, za brze objekte u zraku,  $Re$  je skoro uvijek ogroman ( $> 10^5$ ). Tada je član  $\frac{k}{Re}$  dovoljno malen da ga možemo zanemariti. U tom slučaju, za cijeli subsonični režim možemo  $C_D$  aproksimirati kao jednu konstantu:

$$C_D \approx C_{D,0} \approx 0.2 \quad (\text{za } Ma < 0.8 \text{ i } \theta \approx 0)$$

## 7 Stabilizacijski aerodinamički moment

Definira se kut odstupanja smjera translacijskog gibanja od smjera projektila (koji je definiran kao jedinični vektor na lokalnoj x osi):

$$\Delta\theta = \angle(\hat{\mathbf{x}}_{\text{proj}}, \hat{\mathbf{v}}_{\text{rel}})$$

$$\Delta\theta = \arccos(\hat{\mathbf{x}}_{\text{proj}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\text{rel}})$$

gdje je  $\mathbf{x}_{\text{proj}}$  vektor smjera projektila u globalnom sustavu, a  $\mathbf{v}_{\text{rel}}$  relativna brzina koja je definirana ranije u modelu.

Stabilizacijski moment  $\mathbf{M}_{\text{stab}}$  želi ispraviti smjer projektila u smjer relativne brzine. Nakon zamjene referentnih duljina ( $A_{\text{ref}} = \pi R^2$ ,  $L_{\text{ref}} = 2R$ ) i uvrštavanja konstantne vrijednosti  $C_{M,\alpha} = 2.0$ , formula izvedena do poznatih varijabli glasi:

$$\mathbf{M}_{\text{stab}} = -2.0 \cdot \pi R^3 \rho |\mathbf{v}_{\text{rel}}|^2 \sin \Delta\theta \hat{\mathbf{n}}_{\perp}$$

**Varijable za unos u simulaciju:**

- $R$ : Polumjer projektila.
- $\rho$ : Gustoća fluida (npr. zraka).
- $|\mathbf{v}_{\text{rel}}|$ : Magnituda vektora relativne brzine.
- $\sin \Delta\theta$ : Sinus kuta odstupanja.

Računalno se dobiva kao  
 $\sin(\arccos(\hat{\mathbf{x}}_{\text{proj}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\text{rel}}))$

- $\hat{\mathbf{n}}_{\perp}$ : Jedinični vektor momenta. Mora se izračunati pomoću vektorskog produkta:

$$\hat{\mathbf{n}}_{\perp} = \frac{\hat{\mathbf{x}}_{\text{proj}} \times \hat{\mathbf{v}}_{\text{rel}}}{|\hat{\mathbf{x}}_{\text{proj}} \times \hat{\mathbf{v}}_{\text{rel}}|}$$

## 8 Ukupne sile i momenti

### 8.1 Ukupna sila

Ukupna vanjska sila koja djeluje na centar mase projektila je:

$$\mathbf{F}_{\text{tot}} = \mathbf{F}_{\text{prop,glob}} + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_{\text{uzgon}} + \mathbf{F}_{\text{drag}}$$

gdje je  $\mathbf{F}_{\text{prop,glob}}$  translacijska sila potiska prevedena iz lokalnog u globalni sustav (znači komponenta sile projecirana na lokalnu x os prevedena u globalni sustav), a  $\mathbf{F}_{\text{uzgon}}$  je sila uzgona (bočna sila) koja se generira zbog kuta  $\Delta\theta \neq 0$ .

### 8.2 Ukupan moment

Moment od potiska se računa:

$$\mathbf{M}_{\text{prop}} = \mathbf{r}_{\text{prop}} \times \mathbf{F}_{\text{prop,glob}}.$$

Ukupan moment oko centra mase:

$$\mathbf{M}_{\text{tot}} = \mathbf{M}_{\text{prop}} + \mathbf{M}_{\text{stab}}$$

*Napomena:* U ovom modelu zanemareni su momenti prigušenja (damping moments).

## 9 Jednadžbe gibanja

Potpune jednadžbe gibanja projektila. Orientacija projektila opisana je Eulerovim kutovima  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , a rotacijsko gibanje opisuje se vektorom kutne brzine u lokalnom koordinatnom sustavu.

## 9.1 Translacija

Translacijsko gibanje centra mase projektila u globalnom koordinatnom sustavu opisano je Newtonovim drugim zakonom:

$$M\ddot{\mathbf{r}}_{\text{proj}} = \mathbf{F}_{\text{tot}}$$

gdje je:

- $\mathbf{r}_{\text{proj}}$  globalna pozicija projektila (središte baze),
- $M$  ukupna masa projektila,
- $\mathbf{F}_{\text{tot}}$  ukupna vanjska sila definirana u sekciji 8.1.

## 9.2 Rotacija (Eulerove jednadžbe krutog tijela)

Rotacijsko gibanje projektila opisano je Eulerovim jednadžbama u lokalnom (Body) koordinatnom sustavu, u kojem je tenzor tromosti dijagonaliziran.

Vektor kutne brzine u lokalnom sustavu je:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{loc}} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}.$$

Eulerove jednadžbe gibanja glase:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{loc}} = \mathbf{I}_{\text{loc}}^{-1} (\mathbf{M}_{\text{tot,loc}} - \boldsymbol{\omega}_{\text{loc}} \times \mathbf{I}_{\text{loc}} \boldsymbol{\omega}_{\text{loc}})$$

gdje su:

- $\mathbf{I}_{\text{loc}} = \text{diag}(I_x x, I_y y, I_z z)$  glavni momenti tromosti,
- $\mathbf{M}_{\text{tot,loc}}$  ukupni moment u lokalnom sustavu.

## 9.3 Kinematičke jednadžbe (Eulerovi kutovi)

Orijentacija projektila opisana je Eulerovim kutovima:

$$(\alpha, \beta, \gamma)$$

koji predstavljaju rotacije oko osi  $x$ ,  $y$  i  $z$  respektivno.

Veza između derivacija Eulerovih kutova i lokalnih komponenti kutne brzine dana je kinematičkim relacijama:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \beta \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \cos \beta \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

Invertiranjem ove relacije dobivamo izraze pogodne za numeričku integraciju:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \omega_x + \tan \beta (\omega_y \sin \alpha + \omega_z \cos \alpha) \\ \dot{\beta} &= \omega_y \cos \alpha - \omega_z \sin \alpha \\ \dot{\gamma} &= \frac{\omega_y \sin \alpha + \omega_z \cos \alpha}{\cos \beta}\end{aligned}$$

**Napomena o stabilnosti:** Zbog aerodinamičke stabilizacije projektila i malih kutova nagiba ( $|\beta| \ll 90^\circ$ ), singularnost pri  $\cos \beta = 0$  se u ovom modelu ne pojavljuje u praksi.

## 9.4 Rotacijska matrica i vektor smjera

Jedinični vektor smjera projektila (lokalna  $x$ -os) u globalnom sustavu jednak je prvoj koloni matrice  $R$ :

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{proj}} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma \\ \cos \beta \sin \gamma \\ -\sin \beta \end{bmatrix}$$

# 10 Diskrete jednadžbe za simulaciju (zaključak)

Za numeričku simulaciju koristi se vremenski korak  $\Delta t$  i metoda eksplicitnog Eulera. Sve varijable u trenutku  $k+1$  računaju se iz poznatih vrijednosti u trenutku  $k$ .

## 10.1 Translacija

Trenutna akceleracija centra mase:

$$\mathbf{a}(k) = \frac{\mathbf{F}_{\text{tot}}(k)}{M}$$

Ažuriranje brzine:

$$\mathbf{v}(k+1) = \mathbf{v}(k) + \mathbf{a}(k)\Delta t$$

Ažuriranje pozicije:

$$\mathbf{r}_{\text{proj}}(k+1) = \mathbf{r}_{\text{proj}}(k) + \mathbf{v}(k)\Delta t$$

## 10.2 Rotacija (kutna brzina)

Diskretizirane Eulerove jednadžbe u komponentnom obliku:

$$\begin{aligned}\omega_x(k+1) &= \omega_x(k) + \left( \frac{M_x}{I_x} - \frac{I_z - I_y}{I_x} \omega_y(k) \omega_z(k) \right) \Delta t \\ \omega_y(k+1) &= \omega_y(k) + \left( \frac{M_y}{I_y} - \frac{I_x - I_z}{I_y} \omega_z(k) \omega_x(k) \right) \Delta t \\ \omega_z(k+1) &= \omega_z(k) + \left( \frac{M_z}{I_z} - \frac{I_y - I_x}{I_z} \omega_x(k) \omega_y(k) \right) \Delta t\end{aligned}$$

### 10.3 Orijentacija (Eulerovi kutovi)

Derivacije Eulerovih kutova računaju se iz trenutnih komponenti kutne brzine:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(k) &= \omega_x(k) + \tan \beta(k) (\omega_y(k) \sin \alpha(k) + \omega_z(k) \cos \alpha(k)) \\ \dot{\beta}(k) &= \omega_y(k) \cos \alpha(k) - \omega_z(k) \sin \alpha(k) \\ \dot{\gamma}(k) &= \frac{\omega_y(k) \sin \alpha(k) + \omega_z(k) \cos \alpha(k)}{\cos \beta(k)}\end{aligned}$$

Diskretno ažuriranje orijentacije:

$$\begin{aligned}\alpha(k+1) &= \alpha(k) + \dot{\alpha}(k)\Delta t \\ \beta(k+1) &= \beta(k) + \dot{\beta}(k)\Delta t \\ \gamma(k+1) &= \gamma(k) + \dot{\gamma}(k)\Delta t\end{aligned}$$

**Napomena:** Zbog malih kutova nagiba i aerodinamičke stabilizacije, Eulerov opis orijentacije ostaje numerički stabilan i fizikalno konzistentan za potrebe real-time simulacije.

## 11 Popis varijabli

Varijabla	Opis
<b>A. Konstante i konfiguracija (specifično za model projektila)</b>	
$R$	Radijus baze modela projektila
$H$	Visina cilindričnog dijela modela projektila
$h$	Visina stošca modela projektila
$M$	Ukupna masa projektila
$V_{\text{tot}}$	Ukupni volumen modela projektila
$x_{\text{CM,loc}}$	Udaljenost težišta od središta slobodne baze modela duž lokalne $x$ -osi
$\mathbf{I}_{\text{loc}}$	Lokalni tenzor tromosti projektila (dijagonalna matrica)
$k_{\text{stab}}$	Koeficijent aerodinamičke stabilizacije (za $\mathbf{M}_{\text{stab}}$ )
$F_{\text{prop,max}}$	Maksimalna vrijednost potiska
$\phi_{\text{prop,max}}$	Maksimalni kut defleksije mlaznice
$t_{\text{prop,rot,lat}}$	Latencija promjene orijentacije mlaznice
$t_{\text{prop,throt,lat}}$	Latencija promjene razine potiska
$\mathbf{v}_{\text{wind}}$	Vektor brzine vjetra u globalnom koordinatnom sustavu
$\rho$	Gustoća fluida (zrak)
$\Delta t$	Vremenski korak numeričke simulacije
<b>B. Varijable stanja (integriraju se tijekom simulacije)</b>	
$\mathbf{r}_{\text{proj}}$	Globalna pozicija referentne točke projektila
$\mathbf{v}$	Globalna brzina referentne točke projektila
$\boldsymbol{\omega}_{\text{loc}}$	Vektor kutne brzine u lokalnom koordinatnom sustavu ( $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ )
$\alpha, \beta, \gamma$	Eulerovi kutovi orijentacije projektila u odnosu na globalni koordinatni sustav
<b>C. Pomoćne varijable i ulazi</b>	
$\mathbf{F}_{\text{tot}}$	Ukupna vanjska sila koja djeluje na projektil
$\mathbf{M}_{\text{tot,loc}}$	Ukupni moment sila izražen u lokalnom sustavu
$\mathbf{F}_{\text{drag}}$	Aerodinamička sila otpora
$\mathbf{M}_{\text{stab}}$	Aerodinamički stabilizacijski moment
$R(\alpha, \beta, \gamma)$	Rotacijska matrica za transformaciju iz lokalnog u globalni sustav
$\hat{\mathbf{x}}_{\text{proj}}$	Jedinični vektor smjera projektila u globalnom sustavu
$u_x, u_y, u_T$	Upravljački ulazi za orijentaciju mlaznice i razinu potiska