階層分析法 AHP

統計112 劉恩兆

目錄

- AHP 介紹 · · · · · · · · · · · · P.3
- AHP 作法 · · · · · · · · · P.4 – P.20
- AHP 之理論基礎 · · · · · P.13 – P.14
- 正倒值矩陣 · · · · · · · · · · P.15
- 一致性矩陣 · · · · · · · · · · P.16
- 一致性檢定 · · · · · · · · · · P.17
- AHP 程式 · · · · · · · · P.21 – P.23
- 優缺點比較 · · · · · · · · · · P.24
- 總結 · · · · · · · · · · · · · P.25
- 作業 · · · · · · · · · · · · · P.26
- 附錄 · · · · · · · · · · · · · P.27

AHP 介紹

1. 階層分析法，又稱層級分析程序 (Analytic Hierarchy Process, AHP)

2. 功能：簡化複雜的問題，由**上而下**分解成各個評估要素，再將這些要素依關係分組，形成簡明的層級結構系統

3. 目的：將複雜問題系統化，由不同層面給予層級分解，並透過量化的判斷，協助決策者評估

4. 用於不確定的情況下，與具有多評估準則的**線性**決策問題

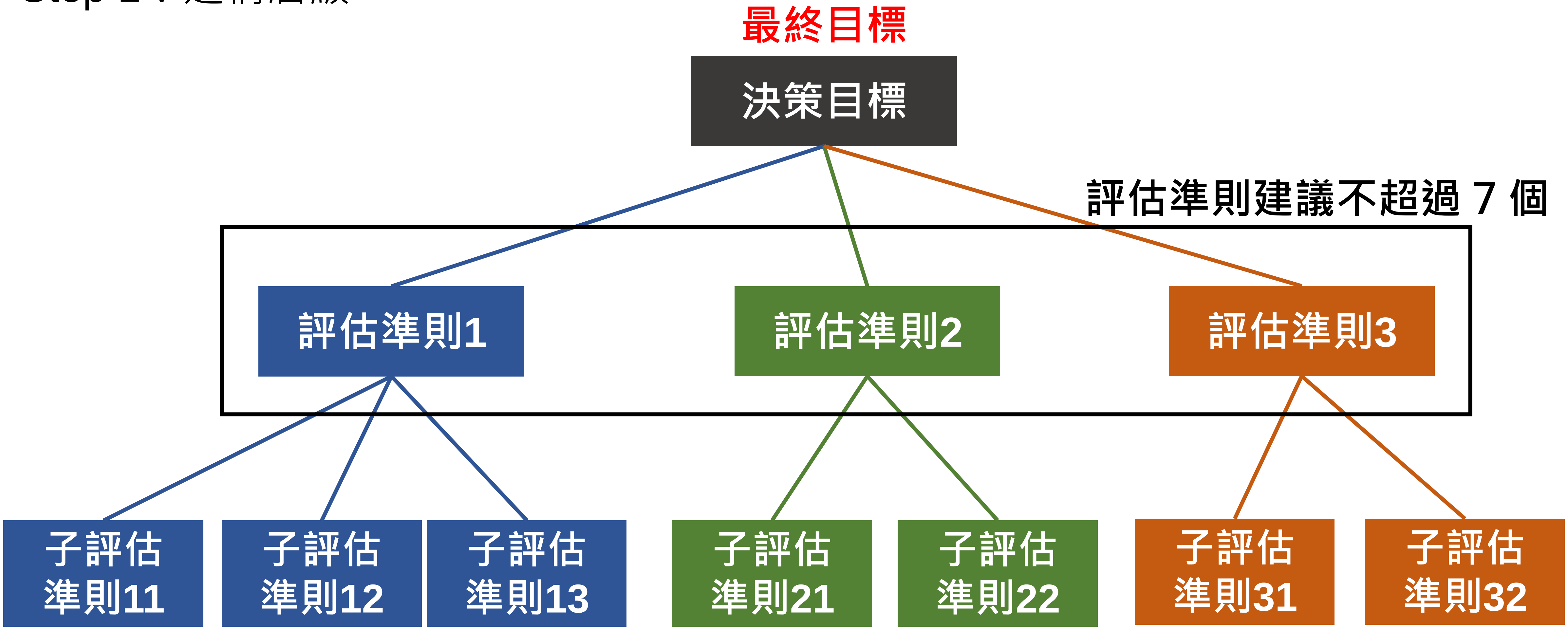
5. 使用線性代數矩陣之特徵向量（Eigenvectors） 與特徵值（Eigenvalue）的觀念

AHP 作法

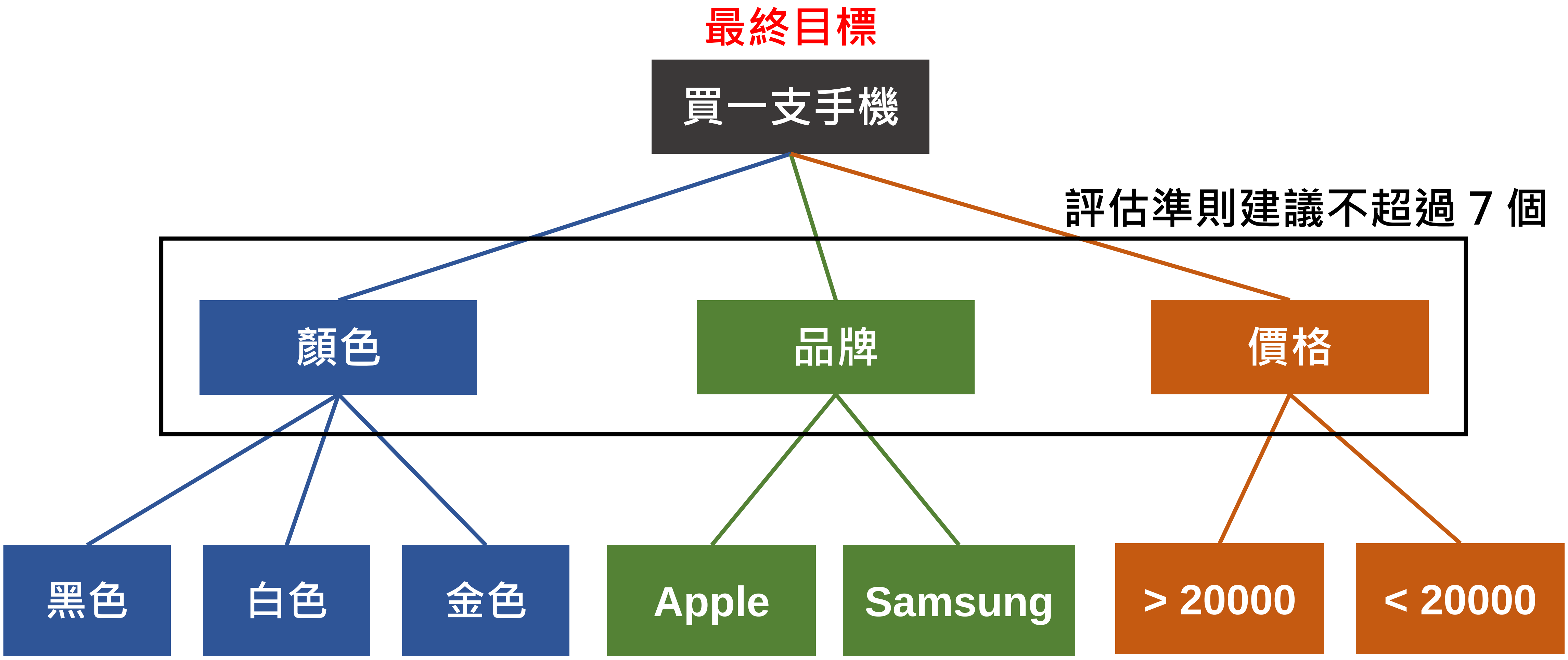
- Step 1：建構層次結構模型
- Step 2：評估尺度 (問卷調查)
- Step 3：建立成對比較矩陣
- Step 4：標準化成對比較矩陣
- Step 5：將標準化成對比較矩陣的每列平均作為各因素的權重
- Step 6：計算特徵值與一致性檢定
- Step 7：各層級要素間的權重計算得出後，再進行整體層級的權重計算與一致性檢定

AHP 作法 — Step 1

Step 1：建構層級



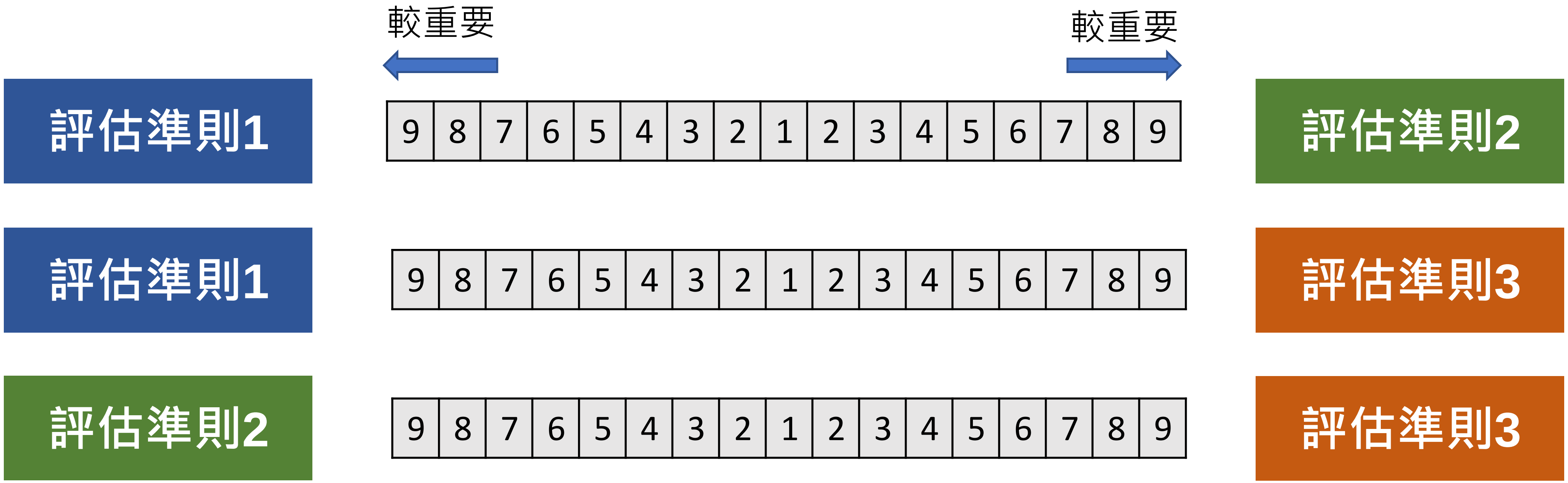
Step 1：建構層級-範例



AHP 作法 — Step 2

Step 2：評估尺度 (問卷調查)

1. 每一層級中要素可以用上一層的要素作為評估依據
2. 分別評估兩個要素對評估準則的相對貢獻度或重要性，將問題分解為兩兩成對比較，以減輕評估者的思考負擔，只專注在二個要素之間的關係



評估尺度的彙整

- 若有多位受訪者進行問卷調查，彙整方式採用幾何平均數會較常用的算數平均數合理

○ 幾何平均數： $w = \sqrt[n]{w_1 \times w_2 \times \cdots \times w_n}$

✕ 算數平均數： $w \neq \dfrac{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}{n}$

評估尺度的彙整 — 範例

- e.g., A、B兩人買手機會較注重顏色還是品牌？

	Mr. A	Ms. B
評估準則: 顏色 vs 品牌	1 : 3	3 : 1
評估尺度分數	$\frac{1}{3}$	3
幾何平均數	$\sqrt{\frac{1}{3} \times 3} = 1$	
算術平均數	$\frac{\frac{1}{3} + 3}{2} = \frac{5}{3}$	

幾何平均數 → 較合理

算術平均數 → 較不合理

AHP 作法 — Step 3

Step 3：建立成對比較矩陣

（1）

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccc} \text{顏色} & \text{品牌} & \text{價格} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{顏色} \\ \\ \text{品牌} \\ \\ \text{價格} \end{array} &
\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

倒數

倒數

倒數

→ 遞移性

（2）

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccc} \text{顏色} & \text{品牌} & \text{價格} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{顏色} \\ \\ \text{品牌} \\ \\ \text{價格} \end{array} &
\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0.333 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \\
\hline
 & \begin{array}{ccc} 1.533 & 4.5 & 8 \end{array}
\end{array}
$$

AHP 作法 — Step 4

Step 4：標準化成對比較矩陣

（2）

	顏色	品牌	價格
顏色	1	3	5
品牌	0.333	1	2
價格	0.2	0.5	1
	1.533	4.5	8

（3）

	顏色	品牌	價格
顏色	0.6522	0.6667	0.6250
品牌	0.2174	0.2222	0.2500
價格	0.1304	0.1111	0.1250
	1	1	1

AHP 作法 — Step 5

Step 5：將標準化成對比較矩陣的每列平均作為各因素的權重

（3）

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 顏色 & 品牌 & 價格 \\
\hline
顏色 & 0.6522 & 0.6667 & 0.6250 \\
品牌 & 0.2174 & 0.2222 & 0.2500 \\
價格 & 0.1304 & 0.1111 & 0.1250 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

$\xrightarrow{\text{列平均}}$

（4）

$$
\begin{array}{c|c}
 & 權重 \\
\hline
顏色 & 0.64795 \\
品牌 & 0.22987 \\
價格 & 0.12218 \\
\hline
 & 1
\end{array}
$$

AHP 之理論基礎

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \text{評估準則1} & \text{評估準則2} & \text{評估準則3} \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{評估準則1} \\[2em] \text{評估準則2} \\[2em] \text{評估準則3} \end{array} &
\begin{bmatrix}
a_{11} = 1 & a_{12} = \dfrac{W_1}{W_2} & a_{13} = \dfrac{W_1}{W_3} \\[1em]
a_{21} = \dfrac{W_2}{W_1} & a_{22} = 1 & a_{23} = \dfrac{W_2}{W_3} \\[1em]
a_{31} = \dfrac{W_3}{W_1} & a_{32} = \dfrac{W_3}{W_2} & a_{33} = 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

倒數

倒數

倒數

$\longrightarrow$ 理想的正倒值矩陣

AHP 之理論基礎

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \frac{1}{a_{12}} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_{1n}} & \frac{1}{a_{2n}} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{w_1}{\cancel{w_1}} & \frac{w_1}{\cancel{w_2}} & \cdots & \frac{w_1}{\cancel{w_n}} \\ \frac{w_2}{\cancel{w_1}} & \frac{w_2}{\cancel{w_2}} & \cdots & \frac{w_2}{\cancel{w_n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{\cancel{w_1}} & \frac{w_n}{\cancel{w_2}} & \cdots & \frac{w_n}{\cancel{w_n}} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \cancel{w_1} \\ \cancel{w_2} \\ \vdots \\ \cancel{w_n} \end{bmatrix}}_{v} = \begin{bmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \vdots \\ nw_n \end{bmatrix} = \underbrace{n}_{\lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}}_{v}$$

A *v* = *λ* *v*

eigenvalue *eigenvector*

正倒值矩陣 (Positive Reciprocal Matrix)

1. 理想的正倒值矩陣每一行向量均呈倍數，故無法對角化
2. 理想的正倒值矩陣只有一個非零的特徵值
3. 理想的正倒值矩陣對角線和為 n，故唯一非零的特徵值應該為 n

$$\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nw_1 \\ nw_2 \\ \vdots \\ nw_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

一致性矩陣 (Consistent Matrix)

- 若一矩陣 *A* 的元素間滿足 $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$，則稱矩陣 *A* 為一致性矩陣

遞移性

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

正倒值矩陣 ~~⟶~~ 正倒值矩陣

現實中難具遞移性

⟶ **進一步做一致性檢定**

$a_{12} \cdot a_{21} = a_{11} = a_{22} = a_{33}$

$a_{13} \cdot a_{31} = a_{11} = a_{22} = a_{33}$

$a_{23} \cdot a_{32} = a_{11} = a_{22} = a_{33}$

⟶ 呈倒數關係

e.g.

	A	B	C
評估準則1	1	2	
評估準則2		1	3
遞移性	1	2	6

一致性檢定

1. 理想的狀況下，正倒值矩陣之特徵值為 *n*

2. 以**一致性指標** (Consistency Index) 來表示與一致性的接近程度

$$C.I.=\frac{\lambda-n}{n-1}$$

3. 通常設置 $C.I.\leq$ 0.1 為可容許偏誤

4. 若不通過一致性檢定，則須重新建構成對比較矩陣，或重新評比

特徵值的求法

1. 列出正倒值矩陣 A

2. 將行標準化

3. 求出列平均 $v=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$(此為權重向量，也是特徵向量)

4. 計算 $\mathrm{A}v$ 得到 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，再計算 $\begin{bmatrix} \frac{x_1}{w_1} \\ \frac{x_2}{w_2} \\ \vdots \\ \frac{x_n}{w_n} \end{bmatrix}$，最後將 n 個分量計算平均數

AHP 作法 — Step 6

Step 6：計算特徵值與一致性檢定

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 0.64795 \\ 0.22987 \\ 0.12218 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad Av = \begin{bmatrix} 1.94847 \\ 0.69021 \\ 0.36670 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{x_1}{w_1} \\ \frac{x_2}{w_2} \\ \frac{x_3}{w_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1.94847}{0.64795} \\ \frac{0.69021}{0.22987} \\ \frac{0.36670}{1.2218} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.007130 \\ 3.002627 \\ 3.001318 \end{bmatrix}$$

avg = 3.003697

$$\therefore\ \lambda = 3.003697$$

$$\therefore\ C.I. = \frac{\lambda - n}{n-1} = \frac{3.003697 - 3}{3-1}$$

$$= 0.001848 \leq 0.1$$

➡ 通過一致性檢定

AHP 作法 — Step 7

Step 7：各層級要素間的權重計算得出後，再進行整體層級的權重計算與一致性檢定(在此就不重複演示)

AHP 程式

- tidyverse package

```
# data
macro <- tibble(x1=c(1,1/2,1/5), x2=c(2,1,1/3), x3=c(5,3,1))
macro
```

```
## # A tibble: 3 × 3
##      x1    x2    x3
##   <dbl> <dbl> <dbl>
## 1   1   2         5
## 2   0.5 1         3
## 3   0.2 0.333     1
```

```
#增加權重
macro %>% mutate(w = '^'(x1*x2*x3, 1/3)) -> macro
# 歸一化
std <- function(x){
  x / sum(x)
}
# 透過歸一化計算權重
macro %>% mutate_at(c("w"), .funs = std) -> macro
macro
```

```
## # A tibble: 3 × 4
##      x1    x2    x3     w
##   <dbl> <dbl> <dbl> <dbl>
## 1   1   2         5 0.582
## 2   0.5 1         3 0.309
## 3   0.2 0.333     1 0.109
```

AHP 程式

```
# 隨機一致性表
ri_table <- c(0, 0, 0.58, 0.89, 1.12, 1.26, 1.36, 1.41, 1.46, 1.49, 1.52,1.54)

b <- as.matrix(macro[,-4])
w <- as.matrix(macro[,4])
b
```

```
# 矩陣乘積
bw <- b %*% w
bw
```

```
##              w
## [1,] 1.7468048
## [2,] 0.9281285
## [3,] 0.3287613
```

AHP 程式

```
# 最大特徵根
lmda <- 1/3 * sum(bw / w)
lmda
```

```
## [1] 3.003695
```

```
# 一致性指標CI
ci <- (lmda-length(bw)) / (length(bw) -1)
ci
```

```
## [1] 0.001847299
```

ci = 0.001847299 < 0.10，通過一致性檢定, 上述 w 的權重是合理的

AHP 優、缺點比較

- 優點：
  - 建立所有要素(包括非量化與量化)的層級結構，清楚呈現各層、各準則與各要素的關係
  - 簡化評估程序，計算過程簡單易懂
  - 若資料有遺漏或不足的部分，仍能求得各要素的重要性

- 缺點：
  - 有些要素可能難以兩兩比較
  - 當準則與要素的數量過多，則一致性檢定不易通過
  - 需考量要素之間的相關性及獨立性

AHP 總結

- 層級架構將複雜的決策問題化成簡明的架構，使決策者在分析時可兼顧不同元素間的邏輯關係，協助決策者做出正確的判斷
- 層級的設計仰賴決策者對問題的經驗及了解，所以不同的決策者在面對相同問題時，可能會建構出不同的層級架構
- 此報告介紹了 AHP 的觀念與特徵值、特徵向量的相關性與原理
- 此報告僅以第二層評估為例，計算一致性檢定指標

作業

$$\text{矩陣 } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ \frac{1}{4} & 2 & 5 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

試做一致性檢定，檢定 *C.I.* 是否 ≤ 0.1？

附錄

- AHP 的九項假設
  - 一個系統可被分解成許多元素。系統、次級系統與元素之間的關係，是以 一種複雜度遞減的方式排列，具網路性之層級結構
  - 每一層級的要素均假設彼此具獨立性
  - 每一層級中的要素可以用上一層級內某些或所有素作為評準，以進行評估
  - 可運用比例尺度進行判斷評估
  - 成對比較後，可使用正倒值矩陣處理
  - 各元素的偏好關係與強度關係，滿足遞移性的關係（A 優於，優於 C，則 A 優於 C；A 優於 B 二倍，B 優於 C 三倍，則 A 優於 C 六倍）
  - 各元素之間完全具遞移性是不容易的，因此必須做一致性檢定
  - 要素的優勢程度，經由加權法則而求得
  - 任何要素只要出現在階層結構中，不論其優勢程度是如何小，均被認為與 整個評估結構有關。

Thank You !