



## เอกสารประกอบการเรียน เรื่อง เศษส่วนพหุนาม

ชื่อ.....

ชั้น..... เลขที่.....

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์  
โรงเรียนสายปัญญา ในพระบรมราชินูปถัมภ์

## ทบทวนการแยกตัวประกอบพหุนาม

การแจกแจง (ดึงตัวร่วม)

Ex. 1.  $5x^2 + 10$

2.  $24x - 8x^2$

3.  $12x^2y + 20xy$

4.  $12xy - 16z$

5.  $ab - 2ac + bc - 2c^2$

6.  $5x^2z - 3y + 5yz - 3x^2$

ผลต่างกำลังสอง

Ex. 1.  $x^2 - 4$

2.  $x^2 - 16$

3.  $25 - x^2$

4.  $16x^2 - 9$

5.  $(x+1)^2 - 36$

6.  $(x+2)^2 - 81$

การแยกตัวประกอบสองวงเล็บ

Ex     1.  $x^2 + 5x + 6$

2.  $x^2 - 8x - 20$

3.  $x^2 + 4x - 21$

4.  $2x^2 - 5x + 2$

5.  $4x^2 + 4x - 3$

6.  $4x^2 + 13x + 10$

7.  $5x^2 + 14x - 3$

### เศษส่วนพหุนาม

ให้  $P$  และ  $Q$  เป็นพหุนาม โดยที่  $Q \neq 0$  จะเรียก  $\frac{P}{Q}$  ว่า เศษส่วนพหุนาม ที่มี  $P$  เป็นตัวเศษ และ  $Q$  เป็นตัวส่วน

Ex.  $\frac{3x+8}{x^2-9x}$  เมื่อ  $x^2-9x \neq 0$

$$\frac{x^2-2x-3}{4x^2-5} \quad \text{เมื่อ } 4x^2-5 \neq 0$$

สำหรับนิพจน์ เช่น  $7x+4$  สามารถเขียนได้เป็น  $\frac{7x+4}{1}$  จึงเป็นเศษส่วนพหุนาม เช่นกัน

เศษส่วนของพหุนามต่อไปนี้ ถือว่าตัวส่วนของพหุนามไม่เท่ากับ 0 แม้ว่าจะไม่ได้ระบุในเงื่อนไขของพหุนามไว้ก็ตาม

พิจารณาเศษส่วนของพหุนาม  $\frac{4x-12}{3x^2-9x}$  ซึ่งเขียนในรูปเศษส่วนพหุนามได้อีกแบบหนึ่ง ดังนี้

$$\frac{4x-12}{3x^2-9x} = \frac{4(x-3)}{3x(x-3)}$$

$$= \frac{4}{3x}$$

เรียก  $\frac{4}{3x}$  ว่า เศษส่วนพหุนามในรูปผลสำเร็จ ของ  $\frac{4x-12}{3x^2-9x}$

### แบบฝึกหัดที่ 1

หาผลสำเร็จของพหุนามต่อไปนี้

1.  $\frac{2x+4}{5x+10}$

2.  $\frac{2-x}{4-x^2}$

3.  $\frac{21-7x}{x^2-x-6}$

4.  $\frac{x^2-25}{2x^2-9x-5}$

5.  $\frac{6m}{m^2+3m}$

6.  $\frac{2m-6n}{m-3n}$

## การดำเนินการเศษส่วนพหุนาม

### การคูณและหารเศษส่วนพหุนาม

เมื่อ  $P, Q, R, S$  เป็นพหุนาม โดยที่  $Q \neq 0$  และ  $S \neq 0$  จะได้ว่า

$$\frac{P}{Q} \cdot \frac{R}{S} = \frac{P \cdot R}{Q \cdot S}$$

$$\frac{P}{Q} \div \frac{R}{S} = \frac{P \cdot S}{Q \cdot R}$$

นิยมเขียนผลคูณและผลหาร

ให้เป็นเศษส่วนพหุนามในรูปผลสำเร็จ

Ex. หาผลคูณของพหุนามต่อไปนี้

1.  $\frac{2x^2 - 4x}{x + 3} \cdot \frac{x}{x - 2}$

2.  $\frac{x + 1}{x^2 - 6x} \cdot \frac{5x - 30}{x - 1}$

3.  $\frac{x^2 - x}{3x^2} \cdot \frac{x + 1}{x - 1}$

4.  $\frac{5x^2}{2x - 10} \cdot \frac{x - 5}{10x}$

## แบบฝึกหัดที่ 2

หาผลสำเร็จของพหุนามต่อไปนี้

$$1. \frac{3xy}{5} \cdot \frac{2x}{y}$$

$$2. \frac{8x^2}{3x+9} \cdot \frac{x+3}{2x}$$

$$3. \frac{2x}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{6x-8}$$

$$4. \frac{3x^2+12x}{5x^2+15x} \cdot \frac{10x-5}{x^2+x}$$

$$5. \frac{4m^2+m}{m^2-m} \cdot \frac{3m^2-15m}{7m+7}$$

$$6. \frac{x^2+12x+36}{x^2+4x-12} \cdot \frac{5x^2-10x}{x^2+3x-4}$$

Ex. หาผลหารของพหุนามต่อไปนี้

1.  $\frac{x^4}{4x+8} \div \frac{x^2}{7x+14}$

2.  $\frac{3x^2-x}{x+1} \div 9x-3$

3.  $\frac{x^2-7x+10}{x^2-16} \div \frac{x-5}{x+4}$

4.  $\frac{x^2-5x+6}{x^2+4x-12} \div \frac{x^2-6x+9}{x+6}$



### แบบฝึกหัดที่ 3

หาผลสำเร็จของพหุนามต่อไปนี้

1.  $\frac{a-2b}{16} \div \frac{4a-8b}{24}$

2.  $\frac{3x-7}{5x^3} \div \frac{21-9x}{27x}$

3.  $\frac{4x+12}{15x+15} \div \frac{10x-10}{3x^2+3x}$

4.  $\frac{m^2-m-20}{m^2-m-} \div \frac{m^2-3m-10}{m^2-m-6}$

5.  $\frac{4m+4}{6m-42} \div \frac{6m+6}{8m-32}$

6.  $\frac{x^2-16}{x^2+2x-8} \div \frac{3x^3-3}{x^3-x^2-2x}$

$$7. \frac{6ab}{9b^3} \cdot \frac{3b}{16a^2} \div \frac{8a^3b^2}{27a}$$

$$8. \frac{m^4 - 1}{9m^2 + 6m + 1} \cdot \frac{3m^2 - 2m - 1}{m^3 - m^2 - m + 1} \div \frac{m - 2}{3m + 1}$$

$$9. \frac{7a^2 - 14ab}{a^2b + 2ab^2} \div \frac{a^2 - 4b^2}{a^2 + 7ab + 10b^2} \cdot \frac{a + 2b}{a + 5b}$$

## การบวกและการลบเศษส่วนพหุนาม

เมื่อ  $P, Q, R, S$  เป็นพหุนาม โดยที่  $Q \neq 0$  จะได้ว่า

$$\frac{P}{Q} + \frac{R}{Q} = \frac{P+R}{Q}$$

$$\frac{P}{Q} - \frac{R}{Q} = \frac{P-R}{Q}$$

นิยมเขียนผลบวกและผลลบที่ได้

ให้เป็นเศษส่วนพหุนามในรูปผลสำเร็จ

Ex. หาผลบวกของพหุนามต่อไปนี้

1.  $\frac{3}{x-4} + \frac{7}{x}$

2.  $\frac{3}{x+5} + \frac{1}{x-3}$

3.  $\frac{5x}{x^2-4} + \frac{2}{x-2}$

4.  $\frac{x-5}{4x-4} + \frac{3x+5}{8x-8}$

#### แบบฝึกหัดที่ 4

หาผลสำเร็จของพหุนามต่อไปนี้

1.  $\frac{3x+5}{x+3} + \frac{x-7}{2}$

2.  $\frac{3x+4}{x+6} + \frac{x+5}{2x-7}$

3.  $\frac{x^2+9x+18}{2x^2+x-15} + \frac{2x^2+9x-35}{4x^2-25}$

4.  $\frac{x}{x^2-2x-} + \frac{1}{x^2+x-2}$

5.  $\frac{x}{x^2-16} + \frac{x-1}{x^2-5x+4}$

6.  $\frac{15m^2-10m}{6m^2+23m-18} + \frac{m^3-16m}{4m^2+4m}$

Ex. หาผลลบของพหุนามต่อไปนี้

1.  $\frac{2a}{a^2-16} - \frac{1}{a-4}$

2.  $\frac{3}{m+2} - \frac{4}{m+3}$

3.  $\frac{5}{x^2-2x+1} - \frac{7}{x-1}$

4.  $\frac{x+1}{2x-8} - \frac{x+2}{3x-12}$

### แบบฝึกหัดที่ 5

หาผลสำเร็จของพหุนามต่อไปนี้

1.  $\frac{3}{x+5} - \frac{6}{x-1}$

2.  $\frac{a-1}{3a-7} - \frac{1}{14-6a}$

3.  $3x+7 - \frac{2x+5}{x+1}$

4.  $\frac{x+7}{2x-5} - \frac{4x+1}{x}$

5.  $\frac{x+7}{3x-1} - \frac{2x+9}{x+5}$

6.  $\frac{x+4}{9x^2-1} - \frac{3x-7}{3x^2+19x+6}$

$$7. \frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2x+2}{4x^2+6x+2} - \frac{2x-1}{2x^2-3x+1}$$

$$8. \left[ \frac{x+3}{x+6} + \frac{-10}{x^2-36} \right] \cdot \frac{6x+36}{5x-35}$$

$$9. \frac{x^2+8x+15}{x^2-1} \cdot \left[ \frac{2x+7}{5x^2+6x-27} + \frac{9}{4x+12} \right]$$

## สมการเศษส่วนพหุนาม

การแก้สมการเศษส่วนพหุนาม มีขั้นตอนต่อไปนี้

1. นำค.ร.น. ของตัวส่วนคูณตลอดทั้งสมการ เพื่อให้ตัวส่วนมีค่าเป็นหนึ่ง
2. กรณีที่พหุนามมีดีกรีมากกว่าหนึ่ง ต้องจัดรูปสมการข้างใดข้างหนึ่งของสมการเป็นศูนย์ก่อน
3. จากข้อ 2 แยกตัวประกอบ และแก้สมการหาค่าของตัวแปร

\*\*\* ค่าของตัวแปรที่ได้ ต้องไม่ทำให้ตัวส่วนมีค่าเป็นศูนย์ \*\*\*\*

Ex. แก้สมการเศษส่วนพหุนามต่อไปนี้

$$1. \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x}$$

$$2. \frac{2x}{x+1} = \frac{2x-1}{x}$$

$$3. \frac{3}{m} = \frac{m+3}{2} - 2$$

$$4. \frac{1}{3} + \frac{1}{m} = \frac{4}{3m^2}$$



## แบบฝึกหัดที่ 6

หาผลสำเร็จของพหุนามต่อไปนี้

1.  $\frac{x-1}{x+5} = \frac{x+1}{x+4}$

2.  $\frac{x+2}{5} = \frac{x+1}{3}$

3.  $\frac{2x+2}{3} = \frac{2x+1}{4}$

4.  $\frac{x}{x^2-3} = \frac{5}{x+4}$

$$5. \frac{1}{x+2} = \frac{2x+1}{2}$$

$$6. \frac{x-2}{5} + \frac{x-1}{3} = 1$$

$$7. \frac{m}{m-2} + \frac{1}{m-3} = 3$$

$$8. \frac{4}{2x-1} - \frac{4}{x+3} = 3$$

$$9. \frac{12}{x^2-16} - \frac{24}{x-4} = 3$$

$$10. \frac{a}{a-1} + a = \frac{4a-3}{a-1}$$

$$11. \frac{m+3}{m+2} = 2 - \frac{3}{m^2+5m+6}$$

$$12. \frac{x+2}{2x-6} + \frac{3}{3-x} = \frac{x}{2}$$

## โจทย์ปัญหาเศษส่วนพหุนาม

นักเรียนเคยแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับเรื่องต่างๆ ที่ใช้สมการและการแยกตัวประกอบพหุนามในการแก้สมการมาแล้ว ในหัวข้อนี้ จะเป็นการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการที่ซับซ้อนขึ้น โดยมีเศษส่วนพหุนามและการแยกตัวประกอบมาเกี่ยวข้อง

### แบบฝึกหัดที่ 7

1. สองเท่าของจำนวนจำนวนหนึ่งบวกสี่ แล้วหารสามเท่ากับลบเจ็ด
2. แทนคุณมีเงินมากกว่าสี่เท่าของพิมพาอยู่ 9 บาท ไต้งมีเงินน้อยกว่าห้าเท่าของพิมพาอยู่ 9 บาท แทนคุณนำเงินมาแบ่งเป็น 7 ส่วนเท่าๆกัน ไต้งนำเงินมาแบ่งเป็น 2 ส่วนเท่าๆกัน แต่ละส่วนของไต้งกับแทนคุณเท่ากัน หาจำนวนเงินของไต้ง
3. ห้าเท่าของจำนวนจำนวนหนึ่งบวกสี่แล้วหารด้วยสอง เท่ากับจำนวนนั้นบวกแปด หาจำนวนนั้น

4. อัตราส่วนอายุปัจจุบันของ A : B เป็น 2 : 5 เมื่อ 5 ปีที่แล้ว อัตราส่วนอายุเป็น 7 : 20 อีก 11 ปีข้างหน้าทั้งคู่จะมีอายุเท่าไร

5. ซื้อหนังสือแบบเดียวกันมาจำนวนหนึ่งเป็นเงิน 200 บาท ถ้าหนังสือขึ้นราคาอีกเล่มละ 5 บาท เงินจำนวนนี้จะซื้อได้น้อยลงกว่าเดิม 2 เล่ม เดิมหนังสือราคาเล่มละเท่าไร

6. พ่อค้าซื้อส้มมาเป็นเงิน 540 บาท ขายปลีกในราคา กิโลกรัมละ 12 บาท ถ้าขายหมดจะได้กำไรพอที่จะซื้อส้มเพิ่มได้อีก 20 กิโลกรัม เดิมพ่อค้าซื้อส้มมากี่กิโลกรัม

7. ถ้าแมนเดินขึ้นอีกชั่วโมงละ 1 กิโลเมตร แมนจะใช้เวลาเดินทางระยะทาง 9 กม. น้อยลงกว่าเดิม 45 นาที เดิมแมนได้ชั่วโมงละกี่กิโลเมตร

8. ไม้พิมพ์ตีได้เร็วกว่าเจนนาทีละ 35 คำ ในเวลาที่เท่ากันไม้พิมพ์ได้ 325 คำ และ เจนพิมพ์ได้ 150 คำ แต่ละคนพิมพ์ได้นาทีละกี่คำ

$\text{สูตร อัตราเร็ว} = \frac{\text{ระยะทาง}(km.)}{\text{เวลา}(hr.)}$ $V_{\text{ทวน}} = V_{\text{น้ำนิ่ง}} - V_{\text{กระแสน้ำ}}$ $V_{\text{ตาม}} = V_{\text{น้ำนิ่ง}} + V_{\text{กระแสน้ำ}}$	$V_{\text{น้ำนิ่ง}} = \frac{V_{\text{ตาม}} + V_{\text{ทวน}}}{2}$ $V_{\text{น้ำนิ่ง}} = \frac{V_{\text{ตาม}} + V_{\text{ทวน}}}{2}$
--	---

9. การแข่งขันเรือประจำปีในระยะทาง 4 กม. ขากลับจะต้องพายเรือทวนน้ำ ซึ่งกระแสน้ำมีอัตราเร็ว 4 กม./ชม. ถ้าเรือลำหนึ่งใช้เวลาพายเรือขากลับมากกว่าขาไป 15 นาที หาอัตราเร็วการพายเรือทวนน้ำของเรือลำนี้

10. ในการฝึกพายเรือของพีพี ปรากฏว่าระยะทาง 5 กม. ใช้เวลาพายตามน้ำ 12 นาที และขากลับพายทวนน้ำในเวลา 20 นาที หว่ากระแสน้ำมีอัตราเร็วกี่กิโลเมตรต่อชั่วโมง

11. เรือยนต์ลำหนึ่งใช้เวลาในการเดินทางครั้งหนึ่ง 4 ชั่วโมง โดยเล่นตามน้ำ 48 กิโลเมตร และทวนน้ำกลับเป็นระยะทาง 28 กิโลเมตร ถ้ากระแสน้ำมีอัตราเร็ว 5 กิโลเมตร/ชั่วโมง หาอัตราเร็วของเรือตอนน้ำนิ่ง

12. กิตทำงานอย่างหนึ่งเสร็จใช้เวลา 2 ชั่วโมง ถ้าน้องชายช่วยทำ งานนั้นจะเสร็จในเวลา  $1\frac{1}{4}$  ชั่วโมง หากว่าถ้า  
น้องชายของกิตทำงานคนเดียวจะใช้เวลาเท่าใด เมื่อทั้งสองคนทำงานด้วยอัตราเร็วเดียวกัน

13. บิวกินขับรถจากเมื่อ ก ไปเมือง ข โดยขับผ่านถนนลูกรังเป็นระยะทาง 30 กม. ผ่านถนนลาดยาง 140 กม. ถ้า  
ขับรถผ่านถนนลาดยางด้วยความเร็วมากกว่าขับบนถนนลูกรัง 10 กม./ชม. จะใช้เวลาทั้งสิ้น  $2\frac{1}{2}$  ชม. หาอัตราเร็ว  
ในการขับบนถนนลาดยาง