2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题参考答案

一、选择题

(1)【答案】 (C).

【解析】本题属于未定式求极限,极限为1^{∞}型,故可以用“e的抬起法”求解.

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=\lim_{x\to\infty}e^{x\cdot\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}},$$

其中又因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x\cdot\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}&=\lim_{x\to\infty}x\ln\left[1+\frac{x^2-(x-a)(x+b)}{(x-a)(x+b)}\right]\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left[x^2-(x-a)(x+b)\right]}{(x-a)(x+b)}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-b)x^2+abx}{(x-a)(x+b)}\\&=a-b\end{aligned}$$

故原式极限为e^{a-b},所以应该选择(C).

(2)【答案】 (B).

【解析】 $$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{F_1'\left(-\frac{y}{x^2}\right)+F_2'\left(-\frac{z}{x^2}\right)}{F_2'\cdot\frac{1}{x}}=\frac{F_1'\cdot\frac{y}{x}+F_2'\cdot\frac{z}{x}}{F_2'}=\frac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{F_1'\cdot\frac{1}{x}}{F_2'\cdot\frac{1}{x}}=-\frac{F_1'}{F_2'},$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yF_1'+zF_2'}{F_2'}-\frac{yF_1'}{F_2'}=\frac{F_2'\cdot z}{F_2'}=z.$$

(3) 【答案】 (D).

【解析】 $x=0$与$x=1$都是瑕点. 应分成

$$\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx=\int_0^{\frac12}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx+\int_{\frac12}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx,$$

用比较判别法的极限形式, 对于 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$, 由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}}{\dfrac{1}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}}=1$.

显然, 当 $0<\frac{1}{n}-\frac{2}{m}<1$, 则该反常积分收敛.

当 $\frac{1}{n}-\frac{2}{m}\le 0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}$ 存在, 此时 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 实际上不是反常积分, 故收敛.

故不论 m,n 是什么正整数, $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 总收敛. 对于 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$, 取 $0<\delta<1$, 不论 m,n 是什么正整数,

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\dfrac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{1}{n}}}}{\dfrac{1}{(1-x)^{\delta}}}=\lim_{x\to1^-}\ln^2(1-x)^{\frac{1}{m}}(1-x)^{\delta}=0,$$

所以 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 收敛, 故选 (D).

(4)【答案】 (D).

【解析】 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2})=(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2})(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i})$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{j}{n})^2}=\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim_{n\to\infty}(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2+j^2})(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i})$$

$$=(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2})\ (\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+i})$$

$$=(\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx)(\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}dy)=\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy .$$

(5)【答案】(A).

【解析】由于 $AB=E$，故 $r(AB)=r(E)=m$．又由于 $r(AB)\le r(A), r(AB)\le r(B)$，故

$$m\le r(A), m\le r(B) \qquad ①$$

由于 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，故

$$r(A)\le m, r(B)\le m \qquad ②$$

由①、②可得 $r(A)=m, r(B)=m$，故选 A.

(6)【答案】(D).

【解析】设 λ 为 A 的特征值，由于 $A^2+A=O$，所以 $\lambda^2+\lambda=0$，即 $(\lambda+1)\lambda=0$，这样 A 的特征值只能为-1 或 0．由于 A 为实对称矩阵，故 A 可相似对角化，即 $A\sim\Lambda$，$r(A)=r(\Lambda)=3$，因此，$\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$，即 $A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(7)【答案】(C).

【解析】离散型随机变量的分布函数是跳跃的阶梯形分段函数，连续型随机变量的分布函数是连续函数．观察本题中 $F(x)$ 的形式，得到随机变量 X 既不是离散型随机变量，也不是连续型随机变量，所以求随机变量在一点处的概率，只能利用分布函数的定义．根据分布函数的定义，函数在某一点的概率可以写成两个区间内概率的差，即

$P\{X=1\}=P\{X\le 1\}-P\{X<1\}=F(1)-F(1-0)=1-e^{-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-e^{-1}$，故本题选 (C).

(8)【答案】(A).

【解析】根据题意知，$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$（$-\infty<x<+\infty$），$f_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & -1\le x\le 3\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

利用概率密度的性质：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$，故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} af_1(x)dx+\int_0^{+\infty} bf_2(x)dx=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)dx+b\int_0^3\frac{1}{4}dx=\frac{a}{2}+\frac{3}{4}b=1$$

所以整理得到 $2a+3b=4$，故本题应选 (A).

二、**填空题**

(9)【答案】0.

【解析】因为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\ln\left(1+t^2\right)}{-e^{-t}}=-\ln\left(1+t^2\right)e^t$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(-\ln\left(1+t^2\right)e^t\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\left[-\frac{2t}{1+t^2}\cdot e^t-\ln\left(1+t^2\right)e^t\right]\cdot\left(-e^t\right)\text{, 所以 }\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=0.$$

(10)【答案】 -4π.

【解析】令 $\sqrt{x}=t$, $x=t^2$, $dx=2tdt$, 利用分部积分法,

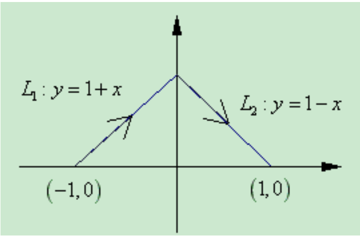
$$\text{原式}=\int_0^{\pi}t\cos t\cdot 2tdt=\int_0^{\pi}2t^2\cos tdt=2\int_0^{\pi}t^2d\sin t$$

$$=2\left[t^2\sin t\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2t\sin tdt\right]=4\int_0^{\pi}td\cos t$$

$$=4\left[t\cos t\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos tdt\right]=4\pi\cos\pi-4\sin t\Big|_0^{\pi}=-4\pi.$$

(11) 【答案】0.

【解析】 $\int_L xydx+x^2dy=\int_{L_1}xydx+x^2dy+\int_{L_2}xydx+x^2dy$



$$=\int_{-1}^{0}x(1+x)dx+x^2dx+\int_0^1x(1-x)dx+x^2(-dx)$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(2x^2+x\right)dx+\int_0^1\left(x-2x^2\right)dx$$

$$=\left(\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=-\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)=0$$

(12) 【答案】 $\dfrac{2}{3}$.

【解析】

$$\frac{\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz}{\iiint\limits_{\Omega}dxdydz}=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1rdr\int_{r^2}^1zdz}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1rdr\int_{r^2}^1dz}=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1rdr\cdot\left(\frac{z^2}{2}\Big|_{r^2}^1\right)}{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(1-r^2\right)rdr}$$

$$=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1r\left(\frac{1}{2}-\frac{r^4}{2}\right)dr}{\frac{\pi}{2}}=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\left(\frac{r^2}{4}-\frac{r^6}{12}\right)\Big|_0^1}{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\int_0^{2\pi}\frac{1}{6}d\theta}{\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{1}{6}\cdot 2\pi}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}.$$

(13)【答案】$a=6$.

【解析】因为由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$生成的向量空间维数为 2,所以$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$. 对$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$进行初等行变换:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&0&1\\0&2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&1&3\\0&2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&a-6\\0&0&0\end{pmatrix}$$

所以$a=6$.

(14) 【答案】2.

【解析】利用离散型随机变量概率分布的性质,知

$$1=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C}{k!}=Ce\text{, 整理得到}C=e^{-1}\text{, 即}$$

$$P\{X=k\}=\frac{e^{-1}}{k!}=\frac{1^k}{k!}e^{-1}.$$

故 X 服从参数为1的泊松分布,则$E(X)=1,D(X)=1$,根据方差的计算公式有

$$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=1+1^2=2.$$

三、**解答题**

(15)【解析】对应齐次方程的特征方程为$\lambda^2-3\lambda+2=0$,解得特征根$\lambda_1=1,\lambda_2=2$,所以对应齐次方程的通解为$y_c=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

设原方程的一个特解为$y^*=x(ax+b)e^x$,则

$$(y^*)'=(ax^2+2ax+bx+b)e^x,$$

$$(y^*)''=(ax^2+4ax+bx+2a+2b)e^x,$$

代入原方程,解得$a=-1,b=-2$,故特解为$y^*=x(-x-2)e^x$.

故方程的通解为$y=y_c+y^*=C_1e^x+C_2e^{2x}-x(x+2)e^x$.

(16)【解析】因为$f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt=x^2\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt-\int_1^{x^2}te^{-t^2}dt$,

所以 $f'(x)=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt+2x^3e^{-x^4}-2x^3e^{-x^4}=2x\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$,令 $f'(x)=0$,则 $x=0,x=\pm1$.

又 $f''(x)=2\int_1^{x^2} e^{-t^2}dt+4x^2e^{-x^4}$，则 $f''(0)=2\int_1^0 e^{-t^2}dt<0$，所以

$$f(0)=\int_1^0 (0-t)e^{-t^2}dt=-\frac{1}{2}e^{-t^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

是极大值.

而 $f''(\pm 1)=4e^{-1}>0$，所以 $f(\pm 1)=0$ 为极小值.

又因为当 $x\ge 1$ 时，$f'(x)>0$；$0\le x<1$ 时，$f'(x)<0$；$-1\le x<0$ 时，$f'(x)>0$；$x<-1$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

(17)【解析】(I) 当 $0<x<1$ 时 $0<\ln(1+x)<x$，故 $\left[\ln(1+t)\right]^n<t^n$，所以

$$|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n<|\ln t|t^n,$$

则 $$\int_0^1|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n dt<\int_0^1|\ln t|t^n dt\ (n=1,2,\cdots).$$

(II) $\int_0^1|\ln t|t^n dt=-\int_0^1\ln t\cdot t^n dt=-\frac{1}{n+1}\int_0^1\ln t\,d\left(t^{n+1}\right)=\frac{1}{(n+1)^2}$，故由

$$0<u_n<\int_0^1|\ln t|t^n dt=\frac{1}{(n+1)^2},$$

根据夹逼定理得 $0\le\lim\limits_{n\to\infty}u_n\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

(18)【解析】

(I) $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{(n+1)-1}}{2(n+1)-1}\cdot x^{2(n+1)}}{\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+1}}{\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n-1)x^2}{2n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{2n+1}\right|\cdot x^2=x^2,$$

所以，当 $x^2<1$，即 $-1<x<1$ 时，原级数绝对收敛. 当 $x^2>1$ 时，原级数发散，因此幂级数的收敛半径 $R=1$.

当 $x=\pm 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$，由莱布尼兹判别法知，此级数收敛，故原级数的收敛域为 $\left[-1,1\right]$.

（II）设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n}=x\cdot\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n-1}\right)$，其中令

$$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n-1}\quad x\in(-1,1),$$

所以有
$$S_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}\qquad x\in(-1,1),$$

从而有
$$S_1'(x)=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}\qquad x\in(-1,1),$$

故
$$S_1(x)=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx+S_1(0)=\arctan x,\ x\in(-1,1).$$

$S_1(x)$ 在 $x=-1,1$ 上是连续的，所以 $S(x)$ 在收敛域 $[-1,1]$ 上是连续的. 所以

$$S(x)=x\cdot\arctan x,\ x\in[-1,1].$$

(19)【解析】（I）令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-yz-1$，故动点 $P(x,y,z)$ 的切平面的法向量为 $(2x,2y-z,2z-y)$，由切平面垂直 xOy，故所求曲线 C 的方程为
$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1\\2z-y=0\end{cases}.$$

（II）由 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1,\\ 2z-y=0,\end{cases}$ 消去 z，可得曲线 C 在 xOy 平面上的投影曲线所围成的 xOy 上的区域 $D:\{(x,y)\,|\,x^2+\frac{3}{4}y^2\le 1\}$，由 $(x^2+y^2+z^2-yz)'_x=(1)'_x$，由

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}dxdy,$$

故

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\left(x+\sqrt{3}\right)|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS=\iint\limits_{D}\left(x+\sqrt{3}\right)dxdy=\iint\limits_{D}xdxdy+\iint\limits_{D}\sqrt{3}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D}\sqrt{3}dxdy=\sqrt{3}\pi\cdot1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=2\pi.$$

(20)【解析】因为方程组有两个不同的解，所以可以判断方程组增广矩阵的秩小于 3，进而可以通过秩的关系求解方程组中未知参数，有以下两种方法.

方法 1：（I）已知 $Ax=b$ 有 2 个不同的解，故 $r(A)=r(\overline{A})<3$，对增广矩阵进行初等行

变换, 得

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda & 1 & 1 & a\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & \lambda & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ \lambda & 1 & 1 & a\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & a-\lambda\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1\end{array}\right)$$

当$\lambda=1$时, $\bar{A}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$, 此时, $r(A)\neq r(\bar{A})$, 故$Ax=b$无解(舍去).

当$\lambda=-1$时, $\bar{A}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a+2\end{array}\right)$, 由于$r(A)=r(\bar{A})<3$, 所以$a=-2$, 故$\lambda=-1$, $a=-2$.

方法 2：已知$Ax=b$有 2 个不同的解, 故$r(A)=r(\bar{A})<3$, 因此$|A|=0$, 即

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0,$$

知$\lambda=1$或-1.

当$\lambda=1$时, $r(A)=1\neq r(\bar{A})=2$, 此时, $Ax=b$无解, 因此$\lambda=-1$. 由$r(A)=r(\bar{A})$, 得$a=-2$.

（ II ） 对增广矩阵做初等行变换

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}-1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

可知原方程组等价为$\begin{cases}x_1-x_3=\dfrac{3}{2}\\ x_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$, 写成向量的形式, 即$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$.

因此 $Ax=b$ 的通解为 $x=k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$，其中 k 为任意常数.

(21)【解析】（Ⅰ）由于二次型在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，所以 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=0$.

由于 Q 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$，所以 A 对应于 $\lambda_3=0$ 的特征向量为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$，记为 α_3. 由于 A 是实对称矩阵，所以对应于不同特征值的特征向量是相互正交的，设属于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T$，则 $\alpha^T\alpha_3=0$，即 $\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_3=0$. 求得该方程组的基础解系为 $\alpha_1=(0,1,0)^T,\alpha_2=(-1,0,1)^T$，因此 α_1,α_2 为属于特征值 $\lambda=1$ 的两个线性无关的特征向量.

由于 α_1,α_2 是相互正交的，所以只需单位化：

$$\beta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=(0,1,0)^T,\beta_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T.$$

取 $Q=(\beta_1,\beta_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，则 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$，且 $Q^{-1}=Q^T$，

故 $A=Q\Lambda Q^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

（Ⅱ）$A+E$ 也是实对称矩阵，A 的特征值为 1, 1, 0，所以 $A+E$ 的特征值为 2, 2, 1，由于 $A+E$ 的特征值全大于零，故 $A+E$ 是正定矩阵.

(22)【解析】当给出二维正态随机变量的的概率密度 $f(x,y)$ 后，要求条件概率密度

$f_{Y|X}(y|x)$, 可以根据条件概率公式 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$ 来进行计算. 本题中还有待定参数, A 要根据概率密度的性质求解, 具体方法如下.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2+2xy-y^2}dy=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2-x^2}dy=Ae^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2}dy$$

$$=A\sqrt{\pi}e^{-x^2},-\infty<x<+\infty.$$

根据概率密度性质有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx=A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=A\pi,\ 即\ A=\pi^{-1},$$

故 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$, $-\infty<x<+\infty$.

当 $-\infty<x<+\infty$ 时, 有条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{Ae^{-2x^2+2xy-y^2}}{A\sqrt{\pi}e^{-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2xy-y^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-y)^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty.$$

(23)【解析】$N_1\sim B(n,1-\theta),N_2\sim B(n,\theta-\theta^2),N_3\sim B(n,\theta^2)$

$$E(T)=E\left(\sum_{i=1}^{3}a_iN_i\right)=a_1E(N_1)+a_2E(N_2)+a_3E(N_3)$$

$$=a_1n(1-\theta)+a_2n(\theta-\theta^2)+a_3n\theta^2=na_1+n(a_2-a_1)\theta+n(a_3-a_2)\theta^2.$$

因为 T 是 θ 的无偏估计量, 所以 $E(T)=\theta$, 即得 $\begin{cases}na_1=0\\n(a_2-a_1)=1\\n(a_3-a_2)=0\end{cases}$, 整理得到 $a_1=0$, $a_2=\dfrac{1}{n}$, $a_3=\dfrac{1}{n}$. 所以统计量

$$T=0\times N_1+\frac{1}{n}\times N_2+\frac{1}{n}\times N_3=\frac{1}{n}\times(N_2+N_3)=\frac{1}{n}\times(n-N_1).$$

注意到 $N_1\sim B(n,1-\theta)$, 故

$$D(T)=D\left[\frac{1}{n}\times(n-N_1)\right]=\frac{1}{n^2}\times D(N_1)=\frac{1}{n}\theta(1-\theta).$$