Analisi 2

Davide

October 20, 2019

1 Basi

Definizione di o-piccolo Sia $f(x) = o(g(x))$ per $x \to \infty$ allora:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

E vuol dire che f(x) ha ordine di grandezza più basso di g(x)

2 Derivate

2.1 Derivate da sapere come se si contasse da uno a 10

f(x)	$\frac{df(x)}{dx}$
$\tan(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$
a^x	$a^x \log(a)$
$\arctan(\frac{x}{a})$	$\frac{1}{a(1+(\frac{x}{a})^2)}$

2.2 Chain Rule

Sia $u = f(\xi, \eta, ...)$ una funzione con argomenti che sono loro stessi funzioni.

$$\xi = \Phi(x, y)$$
$$\eta = \Psi(x, y)$$

Le sue derivate parziali saranno date da:

$$u_x = f_\xi \xi_x + f_\eta \eta_x + ...$$
$$u_y = f_\xi \xi_y + f_\eta \eta_y + ...$$

Esempio: Derivata di x^x

$$\begin{aligned} & [u = x, v = x, z = u^v] \\ z_x = z_u u_x + z_v v_x &= v u^{v-1} + u^v \log(u) \\ &= x x^{x-1} + x^x \log(x) \end{aligned}$$

2.3 Differenziabilità

2.3.1 Funzione differenziabile

Una funzione è differenziabile nel punto $(0,0)$ se può essere approssimata nelle vicinanze di questo punto dalla seguente funzione lineare:

$$f(x+h, y+k) = f_x(x,y)h + f_y(x,y)k + f(x,y) + \varepsilon\sqrt{h^2+k^2} \tag{1}$$

dove $\varepsilon, h, k \to 0$ e $\sqrt{h^2+k^2}$ denota la distanza tra il punto $(x+h, x+k)$ e (x,y) Le funzioni differenziabili hanno le derivate parziali e anche le derivate in ogni direzione.

Il Piano tangente nel punto (ξ, η):

$$z(x,y) = f(\xi,\eta) + f_x(x-\xi) + f_y(y-\eta) \tag{2}$$

2.3.2 Derivate direzionali

$$\begin{aligned} D_\theta f(x,y) &= \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x+\rho\cos\theta, y+\rho\sin\theta) - f(x,y)}{\rho} \\ &= f_x\cos(\theta) + f_y\sin(\theta) \end{aligned}$$

Gradiente : $\vec{\nabla} f = \Big(f_x(x,y), f_y(x,y)\Big)$, esso è il vettore che indica la direzione della massima pendenza sul grafico ed è sempre perpendicolare alle curve di livello.

$$D_{\hat{v}} f(x,y) = \vec{\nabla} f \cdot \hat{v}$$

Dove $\hat{v}$ è un versore.

3 Ottimizzazione

3.0.1 Massimi e minimi

3.0.2 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

4 Integrali

4.1 Tecniche di integrazione

4.1.1 Per sostituzione

4.1.2 Per parti

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

Per risolvere tipo $\int \ln(x)\,\mathrm{d}x$ o $\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x$

4.1.3 Funzioni Trigonometriche

$$\int \cos^2(t)dt = \frac{t + \sin(t)\cos(t)}{2} \tag{4}$$

$$\int \sin^2(t)dt = \frac{t - \sin(t)\cos(t)}{2} \tag{5}$$

Questa formula deriva da alcune formule trigonometriche a me oscure cioè $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ e l'equivalente per il seno $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

$$\int cos^2(2t)dt = \frac{4t + sin(4t)}{8} \tag{6}$$

4.2 Integrali Multipli

4.2.1 Trasformazioni

Matrice Jacobiana è la matrice delle derivate parziali delle funzioni che vengono sostituite.
$x = f(u, v)$
$y = g(u, v)$

Area Parallelogramma $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{D} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix} \qquad \text{(determinante matrice Jacobiana)}$$

$$\int\int_D f(u, v)g(u, v)|D| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \tag{7}$$

Nel caso delle **trasformazioni polari** $|D|$ sarà sempre uguale a ρ.