

# Analisi 2

Davide

October 20, 2019

## 1 Basi

**Definizione di o-piccolo** Sia  $f(x) = o(g(x))$  per  $x \rightarrow \infty$  allora:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

E vuol dire che  $f(x)$  ha ordine di grandezza più basso di  $g(x)$

## 2 Derivate

### 2.1 Derivate da sapere come se si contasse da uno a 10

$$\begin{array}{c|c} f(x) & \frac{df(x)}{dx} \\ \hline \tan(x) & \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x) \\ a^x & a^x \log(a) \end{array}$$

### 2.2 Chain Rule

Sia  $u = f(\xi, \eta, \dots)$  una funzione con argomenti che sono loro stessi funzioni.

$$\begin{aligned} \xi &= \Phi(x, y) \\ \eta &= \Psi(x, y) \end{aligned}$$

Le sue derivate parziali saranno date da:

$$\begin{aligned} u_x &= f_\xi \xi_x + f_\eta \eta_x + \dots \\ u_y &= f_\xi \xi_y + f_\eta \eta_y + \dots \end{aligned}$$

**Esempio:** Derivata di  $x^x$

$$\begin{aligned} [u = x, v = x, z = u^v] \\ z_x &= z_u u_x + z_v v_x = v u^{v-1} + u^v \log(u) \\ &= x x^{x-1} + x^x \log(x) \end{aligned}$$

## 2.3 Differenziabilità

### 2.3.1 Funzione differenziabile

Una funzione è differenziabile nel punto  $(0, 0)$  se può essere approssimata nelle vicinanze di questo punto dalla seguente funzione lineare:

$$f(x+h, y+k) = f_x(x, y)h + f_y(x, y)k + f(x, y) + \varepsilon\sqrt{h^2 + k^2} \quad (1)$$

dove  $\varepsilon, h, k \rightarrow 0$  e  $\sqrt{h^2 + k^2}$  denota la distanza tra il punto  $(x+h, y+k)$  e  $(x, y)$ .  
Le funzioni differenziabili hanno le derivate parziali e anche le derivate in ogni direzione.

**Il Piano tangente** nel punto  $(\xi, \eta)$ :

$$z(x, y) = f(\xi, \eta) + f_x(x - \xi) + f_y(y - \eta) \quad (2)$$

### 2.3.2 Derivate direzionali

$$\begin{aligned} D_\theta f(x, y) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x + \rho \cos \theta, y + \rho \sin \theta) - f(x, y)}{\rho} \\ &= f_x \cos(\theta) + f_y \sin(\theta) \end{aligned}$$

**Gradiente** :  $\vec{\nabla} f = (f_x(x, y), f_y(x, y))$ , esso è il vettore che indica la direzione della massima pendenza sul grafico ed è sempre perpendicolare alle curve di livello.

$$D_{\hat{v}} f(x, y) = \vec{\nabla} f \cdot \hat{v}$$

Dove  $\hat{v}$  è un versore.

## 3 Integrali

### 3.1 Tecniche di integrazione

#### 3.1.1 Per sostituzione

#### 3.1.2 Per parti

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \quad (3)$$

Per risolvere tipo  $\int \ln(x) dx$  o  $\int x \sin(x) dx$

#### 3.1.3 Funzioni Trigonometriche

$$\int \cos^2(t)dt = \frac{t + \sin(t) \cos(t)}{2} \quad (4)$$

$$\int \sin^2(t)dt = \frac{t - \sin(t) \cos(t)}{2} \quad (5)$$

Questa formula deriva da alcune formule trigonometriche a me oscure cioè  $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$  e l'equivalente per il seno  $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

$$\int \cos^2(2t)dt = \frac{4t + \sin(4t)}{8} \quad (6)$$

## 3.2 Integrali Multipli

### 3.2.1 Trasformazioni Polari

**Matrice Jacobiana** è la matrice delle derivate parziali delle funzioni che vengono sostituite.

$$x = f(u, v)$$

$$y = g(u, v)$$

$$\text{Area Parallelogramma } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$\int \int_D f(u, v)g(u, v)|D| \, du \, dv \quad (7)$$