Analisi 2

Davide

October 31, 2019

1 Basi

Definizione di o-piccolo Sia $f(x) = o(g(x))$ per $x \to \infty$ allora:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

E vuol dire che f(x) ha ordine di grandezza più basso di g(x)

2 Derivate

2.1 Derivate da sapere come se si contasse da uno a 10

f(x)	$\frac{df(x)}{dx}$
$\tan(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$
a^x	$a^x \log(a)$
$\arctan(\frac{x}{a})$	$\frac{1}{a(1+(\frac{x}{a})^2)}$

2.2 Chain Rule

Sia $u = f(\xi, \eta, ...)$ una funzione con argomenti che sono loro stessi funzioni.

$$\xi = \Phi(x, y)$$
$$\eta = \Psi(x, y)$$

Le sue derivate parziali saranno date da:

$$u_x = f_\xi \xi_x + f_\eta \eta_x + ...$$
$$u_y = f_\xi \xi_y + f_\eta \eta_y + ...$$

Esempio: Derivata di x^x

$$\begin{aligned} &[u = x, v = x, z = u^v] \\ z_x = z_u u_x + z_v v_x &= v u^{v-1} + u^v \log(u) \\ &= x x^{x-1} + x^x \log(x) \end{aligned}$$

2.3 Differenziabilità

2.3.1 Funzione differenziabile

Una funzione è differenziabile nel punto $(0,0)$ se può essere approssimata nelle vicinanze di questo punto dalla seguente funzione lineare:

$$f(x+h, y+k) = f_x(x,y)h + f_y(x,y)k + f(x,y) + \varepsilon\sqrt{h^2+k^2} \tag{1}$$

dove $\varepsilon, h, k \to 0$ e $\sqrt{h^2+k^2}$ denota la distanza tra il punto $(x+h, x+k)$ e (x,y) Le funzioni differenziabili hanno le derivate parziali e anche le derivate in ogni direzione.

Il Piano tangente nel punto (ξ, η):

$$z(x,y) = f(\xi,\eta) + f_x(x-\xi) + f_y(y-\eta) \tag{2}$$

2.3.2 Derivate direzionali

$$\begin{aligned} D_\theta f(x,y) &= \lim_{\rho\to 0} \frac{f(x+\rho\cos\theta, y+\rho\sin\theta) - f(x,y)}{\rho} \\ &= f_x\cos(\theta) + f_y\sin(\theta) \end{aligned}$$

Gradiente : $\vec{\nabla} f = \Big(f_x(x,y), f_y(x,y)\Big)$, esso è il vettore che indica la direzione della massima pendenza sul grafico ed è sempre perpendicolare alle curve di livello.

$$D_{\hat{v}} f(x,y) = \vec{\nabla} f \cdot \hat{v}$$

Dove $\hat{v}$ è un versore.

3 Ottimizzazione

3.0.1 Massimi e minimi

3.0.2 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

4 Integrali

4.0.1 Integrali popolari

F(x)	$f(x)$
$ln(x)$	$x(\ln x - 1)$
a^x	$\frac{a^x}{ln\lvert a\rvert}$

4.1 Tecniche di integrazione

4.1.1 Per sostituzione

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x$$

$u = g(x)$ e $du = g(x)'dx$

$$\int f(u)\,\mathrm{d}u$$

4.1.2 Per parti

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

Per risolvere tipo $\int \ln(x)\,\mathrm{d}x$ o $\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x$

4.1.3 Funzioni Trigonometriche

$$\int \cos^2(t)dt = \frac{t + \sin(t)\cos(t)}{2} \tag{4}$$

$$\int \sin^2(t)dt = \frac{t - \sin(t)\cos(t)}{2} \tag{5}$$

Questa formula deriva da alcune formule trigonometriche a me oscure cioè $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ e l'equivalente per il seno $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

$$\int cos^2(2t)dt = \frac{4t + sin(4t)}{8} \tag{6}$$

4.2 Integrali Multipli

4.2.1 Trasformazioni

Matrice Jacobiana è la matrice delle derivate parziali delle funzioni che vengono sostituite.
$x = f(u, v)$
$y = g(u, v)$

Area Parallelogramma $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{D} = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix} \qquad \text{(determinante matrice Jacobiana)}$$

$$\int\int_D f(u, v)g(u, v)|D|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{7}$$

Nel caso delle **trasformazioni polari** $|D|$ sarà sempre uguale a ρ.

Esempio coordinate ellittiche un esempio di base:
$\iint_D \sqrt{4x^2 + 9y^2}dxdy$
D $= \left\{(x, y) : x \geq 0; y \geq -\frac{2}{3}x; 4x^2 + 9y^2 \leq 4\right\}$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2$
$x = a\rho\cos\theta$
$y = b\rho\sin\theta$

$|\det J| = ab\rho$
nel nostro caso $a = 1/2, b = 1/3$ e $\rho = 2$
quindi le nuove coordinate sono
$x = \rho\frac{1}{2}\cos\theta$
$y = \rho\frac{1}{3}\sin\theta$
$|\det J| = \frac{1}{6}\rho$
Il θ da cui partire si trova dall'equazione $y = -\frac{2}{3}x$ che diventa in coordinate polari
$\frac{1}{3}\rho\sin\theta = -\frac{2}{3}\rho\frac{1}{2}\cos\theta$ da cui trovo che $\theta = \frac{\pi}{4}$.
E quindi l'integrale finale risulterà essere:

$$\int_0^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{6}\rho\rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\theta$$

4.3 Integrali di linea

4.3.1 Linee regolari

Generica

$$P(t) = 0 + x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k} \tag{8}$$

Una linea è regolare se rispetta le seguenti condizioni:

- **Semplice** quando non esistono $t_1 \neq t_2 : P(t_1) = P(t_2)$
- $P(t) \in C^1([a, b])$
- $P^{'}(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a, b)$

4.3.2 Lunghezza linee

- $y = f(x)$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

- $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \tau(t)$

$$l = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \tau'(t)^2}\,\mathrm{d}t \tag{10}$$

- $\rho = \rho(\theta) \quad \theta \in [\alpha, \beta]$

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,\mathrm{d}\theta \tag{11}$$

4.3.3 Integrali di superficie

$$A = \int\int_R \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,\mathrm{d}R$$

Altra formula:

$$A = \int\int_R \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}\left|\frac{1}{f_z}\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

4.3.4 Integrali su campi vettoriali

Lavoro Sia $\mathbf{F} = P(x,y)\hat{\imath} + Q(x,y)\hat{\jmath}$ un campo vettoriale (per esempio una forza che cambia a seconda della posizione x,y).
Mentre $\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathrm{d}x\hat{\imath} + \mathrm{d}y\hat{\jmath}$ cioè il vettore tangente alla curva.
L'integrale di linea di F lungo la linea C è dato da:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Funzione Potenziale Una $f(x,y)$ è una funzione potenziale di un campo vettoriale $F = P\hat{\imath} + Q\hat{\jmath}$ se il gradiente di f è $P\hat{\imath} + Q\hat{\jmath}$.
Non tutti i campi vettoriali hanno una funzione potenziale.

Teorema 1 (Teorema per la verifica dell'esistenza di una funzione potenziale)**.** *Un campo vettoriale $Pi + Qj$ ha una funzione potenziale se e solo se*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Un **differenziale** è **esatto** se vale la qua sopra citata formula.

Teorema 2 (Percorso indipendente)**.** *Sia f una funzione potenziale del campo vettoriale $Pi + Qj$*

$$\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = f(B) - f(A) = \int_A^B P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y \tag{12}$$

Permette di trovare anche la funzione potenziale dal campo vettoriale. Sia g una funzione potenziale se e solo se g si può scrivere nel seguente modo:

$$g(x,y) = \int_A^{(x,y)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + K$$

Un Campo vettoriale con una funzione potenziale viene detto **Campo conservativo**.