บทที่ 4
การวิเคราะห์วงรอบ

4.1 บทนำ

ในบทที่ 3 เราได้เรียนรู้ที่จะดำเนินการวิเคราะห์เมชของวงจรข่ายใดๆ ที่มีคุณสมบัติเชิงเส้นและไม่แปรตามเวลาอย่างเป็นระบบ และเรายังได้เรียนรู้ที่จะดำเนินการวิเคราะห์เมชสำหรับวงจรข่ายดังกล่าวที่ให้กราฟราบ ในบทนี้จะกล่าวถึงการเคราะห์วงรอบสำหรับวงจรข่ายใดๆ ที่ให้กราฟราบหรือมิใช่กราฟราบก็ได้ สามารถเลือกวงรอบและทิศทางของกระแสวงรอบได้อย่างอิสระไม่เหมือนกับการเลือกเมชที่ใช้ในวิธีการวิเคราะห์เมช

4.2 การสร้างวงรอบหลักมูล

เพื่อที่จะพัฒนาวงรอบหลักมูล เราจำเป็นต้องรู้จักความหมายของ*ทรี* กำหนดให้ G เป็นกราฟถูกต่อของวงจรข่ายใดๆ และกำหนดให้ T เป็นกราฟย่อยของ G เรากล่าวได้ว่ากราฟย่อย T เป็น*ทรี*ของกราฟถูกต่อ G ถ้ามีสมบัติ 3 ข้อ ดังนี้

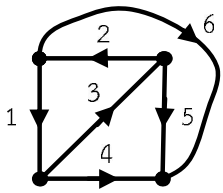
(1) กราฟย่อย T เป็นกราฟย่อยถูกต่อ
(2) กราฟย่อย T มีโนดทั้งหมดของกราฟถูกต่อ G
(3) กราฟย่อย T ไม่มีวงรอบ

ถ้าเราได้รับกราฟถูกต่อ G และทรี T แล้วทุกกิ่งของ G ที่ไม่อยู่ใน T จะถูกเรียกว่า “ลิงค์” ซึ่งอาจเรียกว่า “กิ่งของโคทรี” หรือ “คอร์ด”

โดยทั่วไป กราฟใดๆ มักจะมีทรีจำนวนมาก เราอาจจำได้ว่า ถ้ากราฟใดๆ มีจำนวนของโนดเท่ากับ n_t และมีเพียงกิ่งเดียวถูกต่อกับทุกคู่ของโนดแล้วกราฟเหล่านี้จะมีจำนวนของทรีเท่ากับ $n_t^{n_t-2}$ ในการคำนวณหาจำนวนของทรีของกราฟที่มีสมบัติดังกล่าวข้างต้นไม่ยุ่งยากโดยใช้สูตรข้างต้น ตัวอย่างเช่น จำนวนของทรีของกราฟที่มีจำนวนของโนดเท่ากับ 5 โนด คือ $5^{(5-2)} = 5^3 = 125$ ทรี

ตัวอย่างที่ 4.1 $\Delta\nabla\Delta$

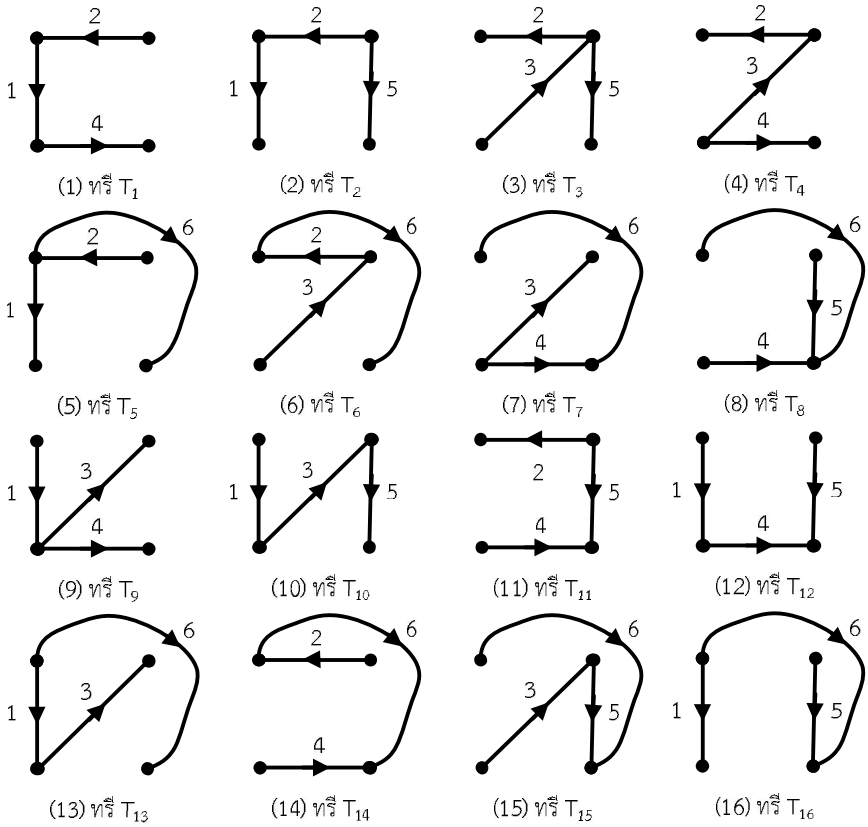
จงวาดทรีที่เป็นไปได้ทั้งหมดของกราฟถูกต่อ G ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 กราฟถูกต่อ G

วิธีทำ

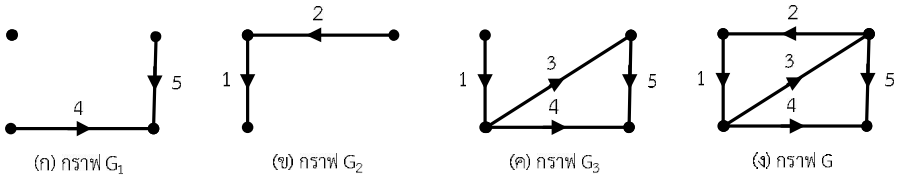
เนื่องจากกราฟ G มีจำนวนของโนดเท่ากับ 4 และแต่ละคู่ของโนดถูกต่อกับกิ่งเดียว ดังนั้น จำนวนของทรีที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ $4^2 = 16$ ทรีดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 ทรีที่เป็นไปได้ทั้งหมดของกราฟ G ในรูปที่ 4.1

การเลือกใช้ทรีของกราฟมีความสำคัญต่อการสร้างวงรอบหลักมูล ในบางครั้งถ้าเลือกทรีไม่เหมาะสมแล้วจะทำให้การแก้ปัญหาวงจรข่ายด้วยวิธีการวิเคราะห์วงรอบเพื่อหาชุดสมการวงรอบที่เหมาะสมเป็นไปด้วยความยากลำบาก

จากรูปที่ 4.3 เมื่อพิจารณากราฟถูกต่อ G ในรูปที่ 4.3(ง) พบว่ากราฟย่อย G_1 ในรูป 4.3(ก) ไม่เป็นทรีของกราฟถูกต่อ G เนื่องจาก G_1 ไม่เป็นกราฟย่อยถูกต่อ และพบว่า กราฟย่อย G_2 ในรูป 4.3(ข) ไม่เป็นทรีของกราฟ G เพราะว่ากราฟย่อย G_2 ขาดหนึ่งโนดที่ถูกต่อระหว่างกิ่ง 4 และกิ่ง 5 ของกราฟถูกต่อ G และยังจะเห็นได้ว่ากราฟย่อย G_3 ในรูป 4.3(ค) ไม่เป็นทรีของกราฟถูกต่อ G เพราะว่ากราฟย่อย G_3 มีวงรอบที่ประกอบด้วยกิ่ง 3, กิ่ง 4 และกิ่ง 5



รูปที่ 4.3 ตัวอย่างกราฟย่อยของกราฟ G

จากตัวอย่างทรี T_4 ที่แสดงไว้ในรูปที่ 4.2(4) จะพบว่ากิ่ง 1, 5 และ 6 เป็นลิงค์ของทรีนี้ ถ้าลิงค์เหล่านี้ถูกใส่ลงในทรี T_4 แล้วจะทำให้เกิดวงรอบหลักมูลขึ้นทั้งหมดจำนวน 3 วงรอบ คือ วงรอบที่หนึ่ง {1, 2, 3} วงรอบที่สอง {3, 4, 5} และวงรอบที่สาม {2, 5, 6} เมื่อใส่กระแสวงรอบของลิงค์ (กิ่ง 1) แก่วงรอบที่หนึ่ง กระแสนี้จะไหลผ่านกิ่งของทรี (กิ่ง 2 และกิ่ง 3) และผ่านลิงค์ที่เป็นส่วนของวงรอบหลักมูล {1, 2, 3} ต่อมาเราถอดลิงค์ของกิ่ง 1 ออก และใส่ลิงค์ของกิ่ง 5 ลงในทรี T_4 จะทำให้เกิดวงรอบหลักมูล {3, 4, 5} และทำเช่นนี้กับลิงค์ของกิ่ง 6 จะทำให้เกิดวงรอบหลักมูล {2, 5, 6} เช่นกัน เนื่องจากทรีนี้ ($b = 6$ และ $n_t = 4$) มีจำนวนลิงค์ ($b - n_t + 1$) เท่ากับ 3 เส้น จะได้กระแสวงรอบเท่ากับ 3 ตัว

ดังนั้น เราสามารถเปลี่ยนกระแสวงรอบไปมาตามกระแสของลิงค์ซึ่งเป็นตัวแปรกระแสได้ จากนั้นเราใช้กฎของเคอร์ชอฟฟ์สำหรับแรงดันแต่ละวงรอบหลักมูลเพื่อสร้างสมการวงรอบหลักมูลในการแก้ปัญหาวงจรข่ายได้

ทฤษฎีบทวงรอบหลักมูลกล่าวว่าถ้ากำหนด G เป็นกราฟถูกต่อที่มีจำนวน n_t โนดและ b กิ่งและกำหนด T เป็นทรีของกราฟถูกต่อ G แล้วจะได้ว่า

(1) มีกิ่งของทรีจำนวน $n_t - 1$ เส้นและมีกิ่งของลิงค์จำนวน $b - n_t + 1$ เส้น

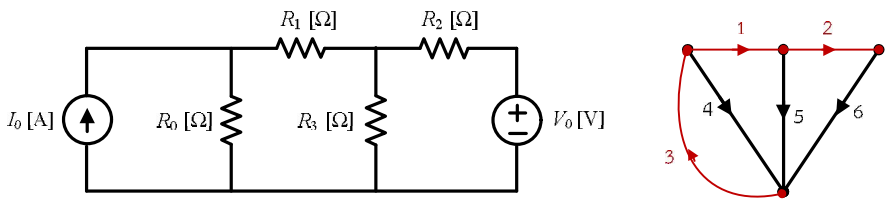
(2) มีเส้นทางเดินที่ไม่ซ้ำระหว่างคู่ของโนดของทรี

(3) แต่ละลิงค์ระหว่างคู่โนดกับเส้นทางเดินของทรีที่ไม่ซ้ำจะประกอบกันเป็น *วงรอบหลักมูล*ที่มีความสัมพันธ์กับลิงค์นั้น

4.3 การสร้างสมการวงรอบ

โดยทั่วไป หลักการเลือกทรีเพื่อสร้างวงรอบหลักมูลมีข้อแนะนำดังต่อไปนี้ ถ้ามีแหล่งกำเนิดกระแสใดๆ ในวงจรข่ายแล้วควรจะตั้งแหล่งกำเนิดกระแสนั้นอยู่ในลิงค์และกำหนดให้กระแสของแหล่งกำเนิดเป็นกระแสลิงค์ หากมีแหล่งกำเนิดใดๆ ที่ถูกควบคุมโดยกระแส แล้วควรใช้กระแสควบคุมนั้นเป็นลิงค์ ในขณะที่ควรเลือกแหล่งกำเนิดแรงดันตั้งอยู่ในกิ่งของทรีและเลือกแรงดันที่ควบคุมแหล่งกำเนิดไม่อิสระ

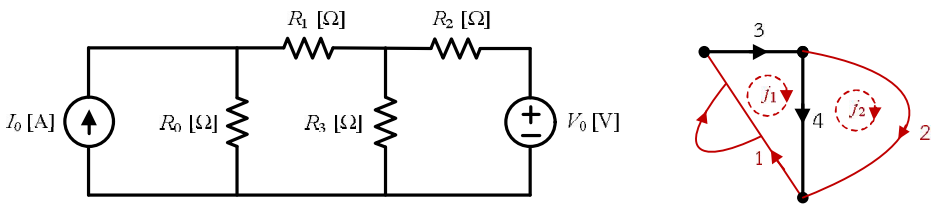
จากรูปที่ 4.4 กราฟของวงจรข่ายความต้านทานมีจำนวน 6 กิ่งและ 4 โนด ทำให้ได้รับจำนวนของทรีและจำนวนของลิงค์เท่ากับ 3 เส้นและ 3 เส้น ตามลำดับ เราสามารถเลือกทรีของกราฟในลักษณะที่ว่าแหล่งกำหนิดแรงดัน V_o ตั้งอยู่ในกิ่งของทรี (กิ่ง 6) และแหล่งกำเนิดกระแส I_o ตั้งอยู่ในลิงค์ (กิ่ง 3) ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4.4(ข) นอกจากนี้ จะเห็นได้ว่าแต่ละลิงค์ (กิ่ง 1, 2 และ 3) กำหนดวงรอบหลักมูล เช่น วงรอบหลักมูล {1, 4, 5} ประกอบด้วยกิ่งของลิงค์ (กิ่ง 1) จำนวนหนึ่งกิ่งและกิ่งของทรี (กิ่ง 4 และ 5) จำนวนสองกิ่งซึ่งเป็นเส้นทางเดินที่ไม่ซ้ำระหว่างโนดของลิงค์นี้



(ก) วงจรข่ายความต้านทาน (ข) ทรีของกราฟของวงจรข่าย

รูปที่ 4.4 ตัวอย่างการเลือกทรีของกราฟของวงจรข่ายความต้านทาน

จากตัวอย่างการเลือกทรีในรูปที่ 4.4(ข) ในทางปฏิบัติ เราสามารถเลือกให้กิ่ง 3 และ 4 เป็นกิ่งเดียวกันได้เพราะว่ากระแสที่ไหลผ่านกิ่งที่ 3 เป็นกระแสของแหล่งกำเนิดกระแส I_o และเลือกกิ่ง 2 กับ 6 เป็นกิ่งเดียวกันได้เนื่องจากกระแสที่ไหลผ่านทั้งสองกิ่งมีค่าเท่ากันและแรงดันกิ่งที่ 6 เป็นแรงดันของแหล่งกำเนิดแรงดัน V_o ทำให้เราสามารถเลือกทรีได้อีกแบบหนึ่งดังในรูปที่ 4.5 (ข) ทำให้ง่ายต่อการวิเคราะห์วงรอบดังแสดงไว้ในตัวอย่างที่ 4.3 จะเห็นได้ว่าการเลือกทรีแบบนี้สามารถลดจำนวนกิ่งและจำนวนวงรอบเป็น 4 กิ่งและ 2 วงรอบหลักมูล ตามลำดับ วงรอบหลักมูล {1, 3, 4} ประกอบด้วยลิงค์ (กิ่ง 1) และทรี (กิ่ง 3 และ 4) และวงรอบหลักมูล {2, 4} ประกอบด้วยลิงค์ (กิ่ง 2) และทรี (กิ่ง 4)



(ก) วงจรข่ายความต้านทาน (ข) ทรีของกราฟของวงจรข่าย

รูปที่ 4.5 ตัวอย่างการเลือกทรีของกราฟของวงจรข่ายความต้านทานในรูปที่ 4.4 (ก)

ในที่นี้ การวิเคราะห์วงรอบเป็นขั้นตอนการหาค่าปริมาณตัวแปรกระแสของวงรอบหลักมูลในวงจรข่ายเชิงเส้นไม่แปรตามเวลาโดยอาศัยกฎของเคอร์ชอฟฟ์สำหรับแรงดันแต่ละวงรอบหลักมูลเพื่อสร้างและแก้ปัญหาสมการวงรอบหลักมูล ขั้นตอนการสร้างสมการวงรอบในวงจรข่ายซึ่งมี b กิ่งและ n_t โนด มีขั้นตอนดังนี้

(1) กำหนดกิ่งของทรีซึ่งมี $n = n_t - 1$ เส้นและกิ่งของลิงค์ซึ่งมี $l = b - n_t + 1$ เส้น

(2) นำกระแสวงรอบ $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_l$ และลิงค์ใส่ลงในทรี ทำให้เกิดวงรอบหลักมูล พร้อมใช้กฎของเคอร์ชอฟฟ์สำหรับแรงดันแต่ละวงรอบจนครบทุกลิงค์เพื่อสร้างเมทริกซ์วงรอบหลักมูล $B = [b_{jk}]_{l \times b}$ ที่มีขนาด $l \times b$ และมีค่าของสมาชิก (b_{jk}) ของเมทริกซ์ ณ ตำแหน่ง (j,k) เท่ากับ

- $b_{jk} = 1$ เมื่อทิศทางของกิ่งที่ k อยู่ในวงรอบที่ j เดียวกัน
- $b_{jk} = -1$ เมื่อทิศทางของกิ่งที่ k อยู่ในวงรอบที่ j ตรงกันข้าม
- $b_{jk} = 0$ เมื่อกิ่งที่ k ไม่อยู่ในวงรอบที่ j

จะเห็นได้ว่า ถ้าเราใช้กฎของเคอร์ชอฟฟ์สำหรับแรงดันกับแต่ละวงรอบของทั้งหมด l วงรอบหลักมูล จะได้รับระบบของ l สมการพีชคณิตเชิงเส้นที่อิสระต่อกันและมี $\underline{v}$ เป็นเวกเตอร์แรงดันกิ่งซึ่งมีสมาชิก $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_b$ ดังนั้น เขียนสมการอยู่ในรูปแบบเมทริกซ์เวกเตอร์ได้ว่า

$$B\underline{v} = \underline{0} \tag{4-1}$$

จะพบว่า อาจเขียนเมทริกซ์ $B = [I_{l\times l} \mid F_{l\times n}]$ โดยที่ $F_{l\times n}$ คือเมทริกซ์ขนาด $l \times n$ ซึ่งมีค่าของสมาชิกเท่ากับ 1, -1 หรือ 0 เท่านั้น และ $I_{l\times l}$ คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $l \times l$ ซึ่งมีค่าของสมาชิกเท่ากับ 1 ตามแนวทแยงนอกนั้นเป็นศูนย์ทั้งหมด เนื่องจากมีเมทริกซ์ $I_{l\times l}$ ภายในเมทริกซ์ B ดังนั้นเมทริกซ์วงรอบหลักมูล B มีค่าของแรงค์เท่ากับ l จึงทำให้เราได้รับระบบของ l สมการวงรอบหลักมูลในรูปแบบแรงดันกิ่งที่อิสระต่อกันอย่างเชิงเส้น

(3) กำหนดให้ i_k เป็นกระแสกิ่งที่ไหลผ่านกิ่งที่ k จากกฎของเคอร์ชอฟฟ์สำหรับกระแส สามารถหากระแสกิ่งในรูปแบบเมทริกซ์เวกเตอร์ได้ว่า

$$\underline{i} = B^T \underline{j} \tag{4-2}$$

โดยที่ $\underline{i}$ และ $\underline{j}$ เป็นเวกเตอร์กระแสกิ่งขนาด $b \times 1$ ซึ่งมีสมาชิก $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_b$ และเวกเตอร์กระแสวงรอบขนาด $l \times 1$ ซึ่งมีสมาชิก $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_l$ ตามลำดับ ดังนั้น จะเห็นได้ว่าเราสามารถสร้างเวกเตอร์กระแสกิ่งได้จากผลคูณระหว่างการทรานสโพส์ของเมทริกซ์วงรอบหลักมูลกับเวกเตอร์กระแสกิ่งในทรี

(4) เขียนความสัมพันธ์ระหว่างแรงดันกิ่งและกระแสกิ่งแต่ละกิ่งเพื่อสร้างสมการกิ่งในรูปแบบเมทริกซ์เวกเตอร์ได้ว่า

$$\underline{v} = Z_b \underline{i} + \underline{v_s} - Z_b \underline{i_s} \tag{4-3}$$

โดย $\underline{i_s}$ และ $\underline{v_s}$ เป็นเวกเตอร์แหล่งกำเนิดกระแสกิ่งและเวกเตอร์แหล่งกำเนิดแรงดันกิ่ง ตามลำดับ และ Z_b คือเมทริกซ์อิมพีแดนซ์กิ่งขนาด $b \times b$

(5) นำเมทริกซ์ B ในสมการ (4-1) คูณเข้าด้านหน้าของสมการ (4-3) จะได้ว่า

$$B\underline{v} = BZ_b\underline{i} + B\underline{v_s} - BZ_b\underline{i_s}$$

ต่อมาจากความสัมพันธ์ (4-1) และ (4-2) แทน $B\underline{v} = \underline{0}$ และ $\underline{i} = B^T\underline{j}$ ลงในด้านซ้ายและด้านขวาของสมการข้างต้นตามลำดับ จะได้ว่า

$$\underline{0} = BZ_bB^T\underline{j} + B\underline{v_s} - BZ_b\underline{i_s}$$

หรือเขียนสมการในรูปแบบใหม่ได้ว่า

$$BZ_bB^T\underline{j} = BZ_b\underline{i_s} - B\underline{v_s} \qquad (4\text{--}4)$$

และสร้างสมการวงรอบในรูปแบบเมทริกซ์เวกเตอร์ได้ว่า

$$Z_l\underline{j} = \underline{e_s} \qquad (4\text{-}5)$$

โดยที่ Z_l คือเมทริกซ์อิมพีแดนซ์วงรอบอันดับ l ซึ่งมีนิยามว่า

$$Z_l \triangleq BZ_bB^T \qquad (4\text{-}6)$$

และ $\underline{e_s}$ คือเวกเตอร์แหล่งกำเนิดแรงดันวงรอบซึ่งมีนิยามว่า

$$\underline{e_s} \triangleq BZ_b\underline{i_s} - B\underline{v_s} \qquad (4\text{-}7)$$

โดยสรุป ความสัมพันธ์ $B\underline{v} = \underline{0}$ มีคุณสมบัติตามกฎของเคอร์ชอฟฟ์สำหรับแรงดัน และความสัมพันธ์ $\underline{i} = B^T\underline{j}$ มีคุณสมบัติตามกฎของเคอร์ชอฟฟ์สำหรับกระแส จึงทำให้ความสัมพันธ์ทั้งสองนี้เป็นจริงเสมอไปโดยไม่ต้องคำนึงถึงธรรมชาติของอุปกรณ์ไฟฟ้าภายในวงจรข่าย

ตัวอย่างที่ 4.2 $\Delta\nabla\Delta$

พิจารณาวงจรข่ายในรูปที่ 4.5(ก) จงเขียนสมการวงรอบในรูปแบบเมทริกซ์เวกเตอร์

วิธีทำ

กำหนดให้ 3 และ 4 เป็นกิ่งของทรีและกำหนดให้ 1 และ 2 เป็นกิ่งของลิงค์โดยให้ j_1 และ j_2 เป็นตัวแปรกระแสวงรอบที่ 1 และ 2 ซึ่งถูกระบุอยู่ในทรีของวงจรข่ายดังรูปที่ 4.5(ข)

เมื่อใช้กฎของเคอร์ชอฟฟ์สำหรับแรงดันแต่ละวงรอบ หาเมทริกซ์วงรอบหลักมูลได้ว่า

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

และเขียนความสัมพันธ์ระหว่างแรงดันกิ่งและกระแสกิ่งแต่ละกิ่งเพื่อสร้างสมการกิ่งในรูปแบบเมทริกซ์เวกเตอร์ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ V_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_0 I_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \underline{v} = Z_b \underline{i} + \underline{v_s} - Z_b \underline{i_s}$$

ต่อมา หาเมทริกซ์อิมพีแดนซ์วงรอบอันดับสองได้ว่า

$$Z_l \triangleq B Z_b B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 + R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix}$$

และหาเวกเตอร์แหล่งกำเนิดแรงดันวงรอบได้ว่า

$$\underline{e_s} \triangleq B Z_b \underline{i_s} - B \underline{v_s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ V_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 I_0 \\ -V_0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เราสามารถเขียนสมการวงรอบในรูปแบบเมทริกซ์เวกเตอร์ได้ว่า

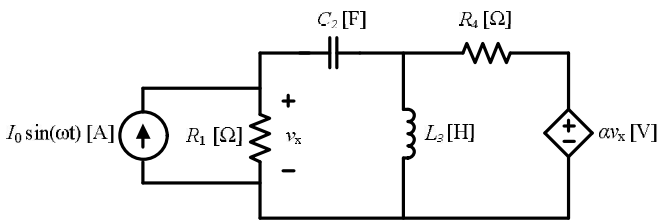
$$\begin{bmatrix} R_0 + R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 I_0 \\ -V_0 \end{bmatrix}$$ **<u>ตอบ</u>**

จะเห็นได้ว่าสมการวงรอบนี้เป็นสมการเดียวกันกับระบบสมการเมชในความสัมพันธ์ (3-3) ด้วยการวิเคราะห์เมชกับวงจรข่ายเดียวกันดังแสดงไว้ในตัวอย่างที่ 3.1

ตัวอย่างต่อไปนี้จะกล่าวถึงการใช้สมการวงรอบสำหรับการวิเคราะห์วงจรข่ายในสถานะอยู่ตัวซึ่งประกอบด้วยตัวต้านทาน ตัวเหนี่ยวนำ ตัวเก็บประจุ และแหล่งกำเนิดแรงดันและกระแสอิสระประเภทสัญญาณไซน์ที่มีอัตราเร็วเชิงมุม ω เรเดียนต่อวินาที

ตัวอย่างที่ 4.3 $\Delta\nabla\Delta$

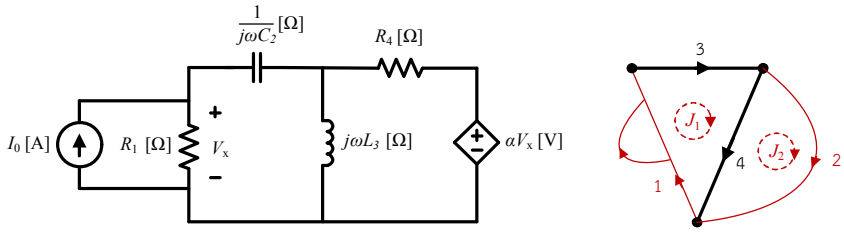
จงเขียนสมการวงรอบในรูปแบบเฟสเซอร์แทนของวงจรข่ายที่แสดงไว้ในรูปที่ 4.6



รูปที่ 4.6 วงจรข่ายอาร์แอลซีในสถานะอยู่ตัว

วิธีทำ

กำหนดเฟสเซอร์แทนและทรีของวงจรข่ายดังรูปที่ 4.7 โดยกำหนดให้ J_1 และ J_2 เป็นเฟสเซอร์แทนของกระแสวงรอบที่ 1 และ 2 ตามลำดับ



(ก) วงจรข่ายในโดเมนความถี่ (ข) ทรีของกราฟของวงจรข่าย

รูปที่ 4.7 เฟสเซอร์แทนและทรีของวงจรข่าย

เมื่อใช้กฎของเคอร์ชอฟฟ์สำหรับแรงดันแต่ละวงรอบ หาเมทริกซ์วงรอบหลักมูลได้ว่า

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

และเขียนความสัมพันธ์ระหว่างเฟสเซอร์แทนของแรงดันกิ่งและกระแสกิ่งแต่ละกิ่งเพื่อสร้างสมการกิ่งในรูปแบบเมทริกซ์เวกเตอร์ได้ว่า

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}}_{\underline{V}} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha R_1 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(j\omega C_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega L_3 \end{bmatrix}}_{Z_b} \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}}_{\underline{I}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{V_s}} - Z_b \underbrace{\begin{bmatrix} I_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{I_s}}$$

ต่อมา หาเมทริกซ์อิมพีแดนซ์วงรอบอันดับสองได้ว่า

$$Z_l \triangleq BZ_bB^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha R_1 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(j\omega C_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R_1 + 1/(j\omega C_2) + j\omega L_3 & -j\omega L_3 \\ -\alpha R_1 - j\omega L_3 & R_4 + j\omega L_3 \end{bmatrix}$$

และหาเวกเตอร์แหล่งกำเนิดแรงดันวงรอบได้ว่า

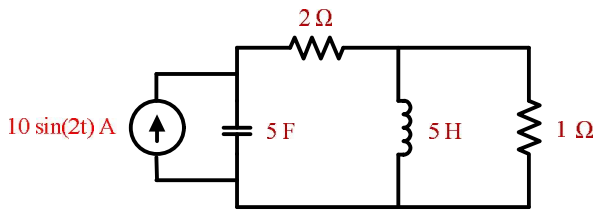
$$\underline{E_s} \triangleq BZ_b\underline{I_s} - B\underline{V_s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha R_1 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(j\omega C_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \underline{0} = \begin{bmatrix} R_0 I_0 \\ -\alpha R_1 I_0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น เราสามารถเขียนสมการวงรอบในรูปแบบเมทริกซ์เวกเตอร์ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} R_1 + 1/(j\omega C_2) + j\omega L_3 & -j\omega L_3 \\ -(\alpha R_1 + j\omega L_3) & R_4 + j\omega L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0 I_0 \\ -\alpha R_1 I_0 \end{bmatrix}$$ **<u>ตอบ</u>**

ตัวอย่างที่ 4.4 $\Delta\nabla\Delta$

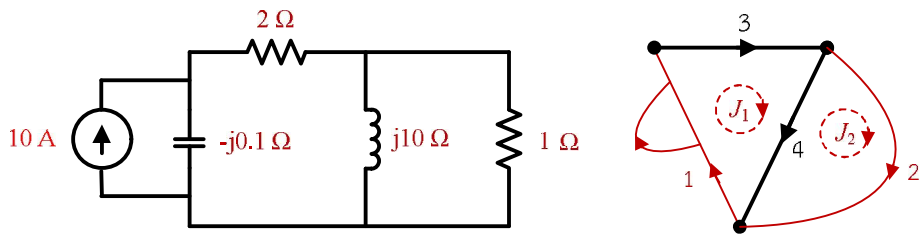
โดยใช้วิธีการวิเคราะห์วงรอบ จงหาแรงดันและกระแสกิ่งในวงจรข่ายที่แสดงไว้ในรูปที่ 4.7



รูปที่ 4.7 วงจรข่ายอาร์แอลซีในสถานะอยู่ตัว

วิธีทำ

กำหนดเฟสเซอร์แทนและทรีของวงจรข่ายดังรูปที่ 4.8 โดยกำหนดให้ J_1 และ J_2 เป็นเฟสเซอร์แทนของกระแสวงรอบที่ 1 และ 2 ตามลำดับ



(ก) วงจรข่ายในโดเมนความถี่ (ข) ทรีของกราฟของวงจรข่าย

รูปที่ 4.8 เฟสเซอร์แทนและทรีของวงจรข่าย

เริ่มต้นด้วยการเขียนความสัมพันธ์ระหว่างเฟสเซอร์แทนของแรงดันกิ่งและกระแสกิ่งแต่ละกิ่งเพื่อสร้างสมการกิ่งในรูปแบบเมทริกซ์เวกเตอร์ได้ว่า

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}}_{\underline{V}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -j0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j10 \end{bmatrix}}_{Z_b} \underbrace{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}}_{\underline{I}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{V_s}} - Z_b \underbrace{\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{I_s}}$$

เนื่องจากทรีของวงจรข่ายเหมือนกับตัวอย่างที่ 4.3 ทำให้ได้รับเมทริกซ์วงรอบหลักมูลเหมือนกัน ต่อมา หาเมทริกซ์อิมพีแดนซ์วงรอบอันดับสองได้ว่า

$$Z_l \triangleq BZ_bB^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+j10-j0.1 & -j10 \\ -j10 & 1+j10 \end{bmatrix}$$

และหาเวกเตอร์แหล่งกำเนิดแรงดันวงรอบได้ว่า

$$\underline{E_s} \triangleq BZ_b\underline{I_s} - B\underline{V_s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \underline{0} = \begin{bmatrix} -j \\ 0 \end{bmatrix}$$

ฉนั้น เราสามารถเขียนสมการวงรอบในรูปแบบเมทริกซ์เวกเตอร์ได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 2+j9.9 & -j10 \\ -j10 & 1+j10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j \\ 0 \end{bmatrix}$$

หรือหาเฟสเซอร์แทนของเวกเตอร์กระแสวงรอบได้ว่า

$$\begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+j9.9 & -j10 \\ -j10 & 1+j10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0001-j0.3344 \\ 0.0332-j0.3311 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3344\angle -89.98^0 \\ 0.3328\angle -84.27^0 \end{bmatrix} \text{ [A]}$$

ดังนั้น จากความสัมพันธ์ (4-2) เราสามารถหาเฟสเซอร์แทนของเวกเตอร์กระแสกิ่งได้ว่า

$$\underline{I} = B^T\underline{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3344\angle -89.98^0 \\ 0.3328\angle -84.27^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3344\angle -89.98^0 \\ 0.3328\angle -84.27^0 \\ 0.3344\angle -89.98^0 \\ 0.0333\angle -174.27^0 \end{bmatrix}$$

หรือค่าของกระแสกิ่งต่างๆ ในรูปแบบฟังก์ชันของเวลา มีดังนี้

กระแสกิ่งที่ 1 คือ $i_1(t) = 0.3344\sin(2t - 89.98^0)$ [A] **ตอบ**
กระแสกิ่งที่ 2 คือ $i_2(t) = 0.3328\sin(2t - 84.27^0)$ [A] **ตอบ**
กระแสกิ่งที่ 3 คือ $i_3(t) = 0.3344\sin(2t - 89.98^0)$ [A] **ตอบ**
กระแสกิ่งที่ 4 คือ $i_4(t) = 0.0333\sin(2t - 174.27^0)$ [A] **ตอบ**

เมื่อนำค่าของเฟสเซอร์แทนของเวกเตอร์กระแสกิ่งแทนลงในความสัมพันธ์ (4-3) เราสามารถหาเฟสเซอร์แทนของเวกเตอร์แรงดันกิ่งได้ว่า

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}}_{\underline{V}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -j0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j10 \end{bmatrix}}_{Z_b} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.3344\angle -89.98^0 \\ 0.3328\angle -84.27^0 \\ 0.3344\angle -89.98^0 \\ 0.0333\angle -174.27^0 \end{bmatrix}}_{\underline{I}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{V_s}} - Z_b \underbrace{\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{I_s}} = \begin{bmatrix} 1.0005\angle +91.92^0 \\ 0.3328\angle -84.27^0 \\ 0.6689\angle -89.98^0 \\ 0.3328\angle -84.27^0 \end{bmatrix}$$

หรือค่าของแรงดันกิ่งต่างๆ ในรูปแบบฟังก์ชันของเวลา มีดังนี้

แรงดันกิ่งที่ 1 คือ $v_1(t) = 1.0005\sin(2t + 91.92^0)$ [V] **ตอบ**
แรงดันกิ่งที่ 2 คือ $v_2(t) = 0.3328\sin(2t - 84.27^0)$ [V] **ตอบ**
แรงดันกิ่งที่ 3 คือ $v_3(t) = 0.6689\sin(2t - 89.98^0)$ [V] **ตอบ**
แรงดันกิ่งที่ 4 คือ $v_4(t) = 0.3328\sin(2t - 84.27^0)$ [V] **ตอบ**

4.4 สมบัติของเมทริกซ์อิมพีแดนซ์วงรอบหลักมูล

ตามตัวอย่างที่ 4.1 ถึงตัวอย่างที่ 4.4 พบว่าการวิเคราะห์วงจรข่ายความต้านทานและการวิเคราะห์วงจรข่ายในสถานะอยู่ตัวไซน์มีลักษณะคล้ายกัน แต่มีความแตกต่างหลักคือค่าของเฟสเซอร์และอิมพีแดนซ์ที่ใช้ในการสร้างเมทริกซ์อิมพีแดนซ์วงรอบหลักมูลซึ่งมีนิยามว่า

$$Z_l \triangleq BZ_bB^T \tag{4-5}$$

เราอาจสรุปสมบัติของเมทริกซ์อิมพีแดนซ์วงรอบหลักมูล Z_l ได้ดังต่อไปนี้

ก. ถ้าวงจรข่ายใดไม่มีอุปกรณ์ไฟฟ้าเชื่อมร่วมกัน (coupling elements) แล้วเมทริกซ์อิมพีแดนซ์กิ่ง Z_b จะเป็นเมทริกซ์แนวทแยงและเมทริกซ์อิมพีแดนซ์วงรอบหลักมูล Z_l จะมีสมบัติสมมาตรกล่าวคือ $Z_l = (Z_l)^T$

ข. ถ้าวงจรข่ายใดไม่มีอุปกรณ์ไฟฟ้าเชื่อมร่วมกัน แล้วเราสามารถเขียนเมทริกซ์อิมพีแดนซ์วงรอบหลักมูล Z_l ได้ด้วยวิธีการตรวจสอบด้วยสายตา ดังนี้

- สมาชิก z_{jj} ตามแนวทแยงในแถวที่ j และหลักที่ j ของเมทริกซ์อิมพีแดนซ์วงรอบหลักมูล Z_l เป็นผลรวมของอิมพีแดนซ์ในวงรอบที่ j โดยที่ z_{jj} เรียกว่า *"อิมพีแดนซ์ตัวเอง"*
- สมาชิก z_{jk} ในแถวที่ j และหลักที่ k ของเมทริกซ์อิมพีแดนซ์วงรอบหลักมูลเป็นค่าลบหรือค่าบวกของผลรวมของอิมพีแดนซ์ของการร่วมกิ่งกับวงรอบที่ j และวงรอบที่ k โดยที่ให้ใช้เครื่องหมายลบเมื่อทิศทางของวงรอบ j ตรงกันข้ามกับทิศทางของวงรอบ k และให้ใช้เครื่องหมายบวกเมื่อทิศทางของวงรอบ j ตรงกันกับทิศทางของวงรอบ k

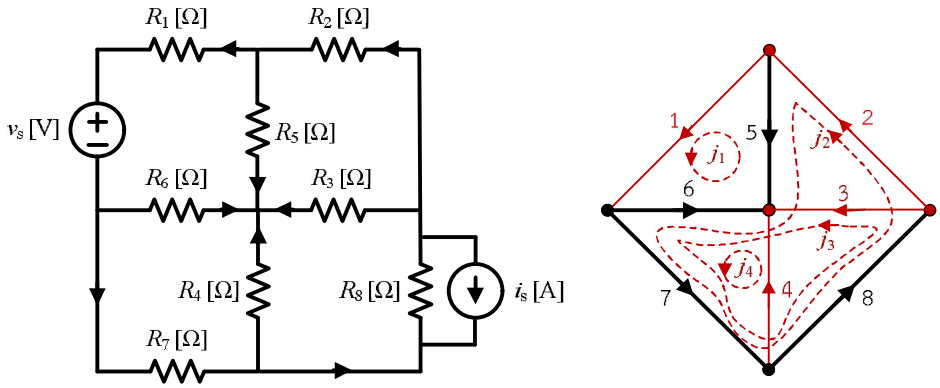
ค. ถ้าแปลงแหล่งกำเนิดกระแสทั้งหมดให้เป็นแหล่งกำเนิดแรงดันโดยใช้วงจรสมมูลเทวนิน แล้วสมาชิก e_{sj} ของเวกเตอร์แหล่งกำเนิดแรงดันวงรอบ $\underline{e_s}$ เป็นผลรวมทางพีชคณิตของแรงดันของแหล่งกำเนิดแรงดันทั้งหมดในวงรอบ j โดยกำหนดเครื่องหมายบวกสำหรับแรงดันของแหล่งกำเนิดแรงดันที่มีทิศทางของกระแสซึ่งป้อนให้ในวงรอบ j สอดคล้องกับทิศทางของกระแสวงรอบ j และหากไม่เป็นไปตามเงื่อนไขดังกล่าวข้างต้นให้กำหนดเครื่องหมายลบ

ง. ถ้าองค์ประกอบไฟฟ้าของวงจรข่ายมีเฉพาะตัวต้านทานและทุกตัวต้านทานมีค่ามากกว่าศูนย์แล้วดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์วงรอบหลักมูลมีค่ามากกว่าศูนย์ กล่าวคือ $\det(Z_l) > 0$ และจากกฎของเครมเมอร์ จะพบว่า สมการวงรอบจะมีผลลัพธ์ออกมาอันเดียวแน่นอนไม่ว่าเวกเตอร์แหล่งกำเนิดแรงดันวงรอบซึ่งมีสมาชิกเป็นแหล่งกำเนิดแรงดันอิสระใดก็ตาม

ในกรณีที่วงจรข่ายมีอุปกรณ์ไฟฟ้าเชื่อมร่วมกัน โดยทั่วไปสรุปได้ว่าเมทริกซ์อิมพีแดนซ์กิ่ง Z_b จะไม่เป็นเมทริกซ์แนวทแยงและเมทริกซ์อิมพีแดนซ์วงรอบหลักมูล Z_l จะไม่มีสมบัติสมมาตร กล่าวคือ $Z_l \neq (Z_l)^T$

ตัวอย่างที่ 4.5 $\Delta\nabla\Delta$

โดยใช้วิธีการตรวจสอบด้วยสายตาของมนุษย์วงจรข่ายในรูปที่ 4.9(ก) และทรีของกราฟแสดงไว้ในรูปที่ 4.9(ข)จงหาเมทริกซ์อิมพีแดนซ์วงรอบหลักมูล Z_l และเวกเตอร์แหล่งกำเนิดแรงดันวงรอบ $\underline{e_s}$



(ก) วงจรข่ายความต้านทาน (ข) ทรีของกราฟของวงจรข่าย

รูปที่ 4.9 วงจรข่ายในสถานะอยู่ตัว

วิธีทำ

โดยใช้วิธีการตรวจสอบด้วยสายตา หาเมทริกซ์อิมพีแดนซ์วงรอบหลักมูล Z_l ได้ว่า

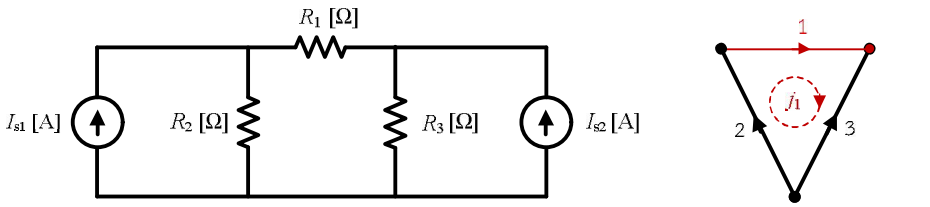
$$Z_l = \begin{bmatrix} R_1+R_5+R_6 & -R_5-R_6 & -R_6 & -R_6 \\ -R_5-R_6 & R_2+R_5+R_6+R_7+R_8 & R_6+R_7+R_8 & R_6+R_7 \\ -R_6 & R_6+R_7+R_8 & R_3+R_6+R_7+R_8 & R_6+R_7 \\ -R_6 & R_6+R_7 & R_6+R_7 & R_4+R_6+R_7 \end{bmatrix} \quad \underline{\textbf{ตอบ}}$$

และหาเวกเตอร์แหล่งกำเนิดแรงดันวงรอบ $\underline{e_s}$ ได้ว่า

$$\underline{e_s} = \begin{bmatrix} -v_s \\ -R_8 i_s \\ -R_8 i_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\textbf{ตอบ}}$$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

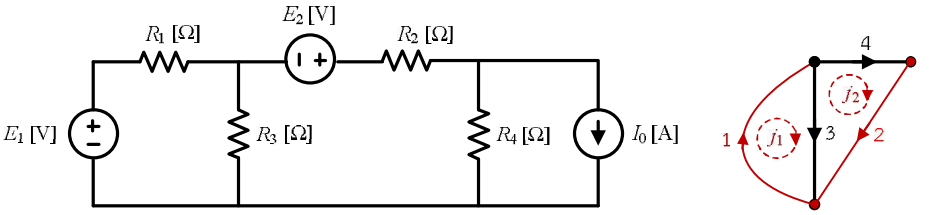
[4.1] พิจารณาวงจรข่ายความต้านทานที่มีแหล่งกำเนิดกระแสอิสระดังแสดงไว้ในรูปที่ 4บ.1(ก) หากเลือกกิ่งที่ 2 และ 3 เป็นกิ่งของทรีและกิ่งที่ 1 เป็นกิ่งของลิงค์ดังแสดงไว้ในรูปที่ 4บ.1(ข) จงเขียนสมการวงรอบและหาค่าของแรงดันกิ่งทั้งสาม



(ก) วงจรข่ายความต้านทาน (ข) ทรีของกราฟของวงจรข่าย

รูปที่ 4บ.1 วงจรข่ายความต้านทาน

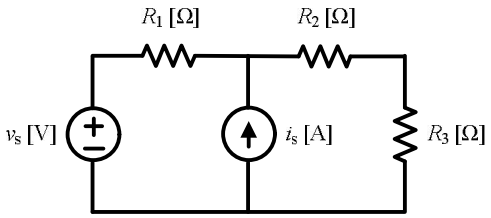
[4.2] พิจารณาวงจรข่ายความต้านทานที่มีแหล่งกำเนิดแรงดันอิสระและแหล่งกำเนิดกระแสอิสระดังแสดงไว้ในรูปที่ 4บ.2(ก) ถ้าเลือกกิ่งที่ 1 และ 2 เป็นกิ่งของลิงค์และเลือกกิ่งที่ 3 และ 4 เป็นกิ่งของทรี จงเขียนสมการวงรอบในรูปแบบเมทริกซ์เวกเตอร์และหาค่าของแรงดันกิ่งและกระแสกิ่งทั้งหมด



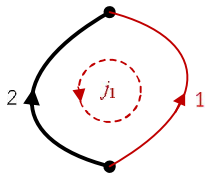
(ก) วงจรข่ายความต้านทาน (ข) ทรีของกราฟของวงจรข่าย

รูปที่ 4บ.2 วงจรข่ายความต้านทาน

[4.3] พิจารณาวงจรข่ายความต้านทานไฟฟ้าในรูปที่ 4บ.3(ก) และกำหนดให้แหล่งกำเนิดแรงดันอิสระต่ออนุกรมกับตัวต้านทาน R_1 ตั้งอยู่บนกิ่งที่ 2 และแหล่งกำเนิดกระแสอิสระต่อขนานกับผลอนุกรมของตัวต้านทาน R_2 และ R_3 ตั้งอยู่บนกิ่งที่ 1 ดังที่แสดงทรีของวงจรข่ายไว้ในรูปที่ 4บ.3(ข) ถ้ากำหนด j_1 เป็นกระแสวงรอบแล้วจงเขียนสมการรอบและจงคำนวณหาค่าของแรงดันกิ่งและกระแสกิ่ง



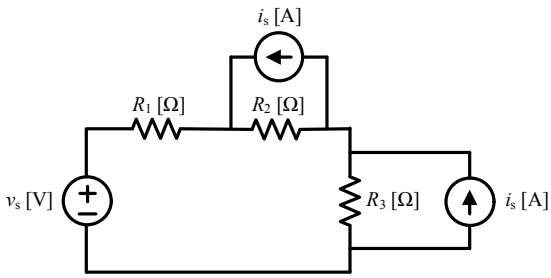
(ก) วงจรข่ายความต้านทาน



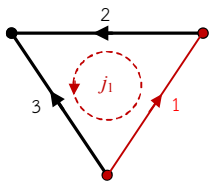
(ข) ทรีของกราฟของวงจรข่าย

รูปที่ 4บ.3 วงจรข่ายความต้านทาน

[4.4] พิจารณาวงจรข่ายความต้านทานไฟฟ้าในรูปที่ 4บ.4(ก) กำหนดให้แหล่งกำเนิดแรงดันอิสระต่ออนุกรมกับตัวต้านทาน R_1 ตั้งอยู่บนกิ่งที่ 3 และกำหนดให้แหล่งกำเนิดกระแสอิสระต่อขนานกับตัวต้านทาน R_2 ตั้งอยู่บนกิ่งที่ 2 และต่อขนานกับตัวต้านทาน R_3 ตั้งอยู่บนกิ่งที่ 1 ดังที่แสดงทรีของวงจรข่ายไว้ในรูปที่ 4บ.4(ข) หากกำหนดให้ j_1 เป็นกระแสวงรอบหลักมูลแล้ว จงเขียนสมการรอบและจงคำนวณหาค่าของแรงดันกิ่งและกระแสกิ่ง



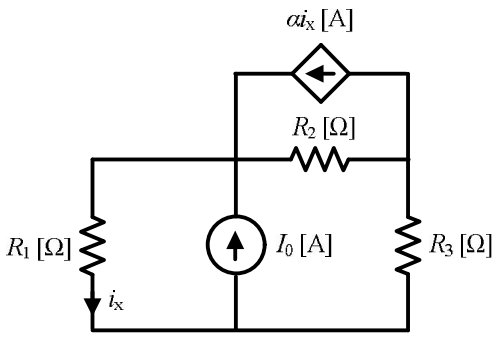
(ก) วงจรข่ายความต้านทาน



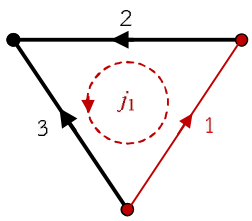
(ข) ทรีของกราฟของวงจรข่าย

รูปที่ 4บ.4 วงจรข่ายความต้านทาน

[4.5] พิจารณาวงจรข่ายความต้านทานไฟฟ้าในรูปที่ 4บ.5(ก) กำหนดให้แหล่งกำเนิดกระแสอิสระต่อขนานกับตัวต้านทาน R_1 ตั้งอยู่บนกิ่งที่ 3 และกำหนดให้แหล่งกำเนิดกระแสไม่อิสระต่อขนานกับตัวต้านทาน R_2 ตั้งอยู่บนกิ่งที่ 2 และตัวต้านทาน R_3 ตั้งอยู่บนกิ่งที่ 1 ดังที่แสดงทรีของวงจรข่ายไว้ในรูปที่ 4บ.5(ข) ถ้ากำหนดให้ j_1 เป็นกระแสวงรอบหลักมูลแล้วจงเขียนสมการรอบหลักมูลและจงคำนวณหาค่าของแรงดันกิ่งและกระแสกิ่ง



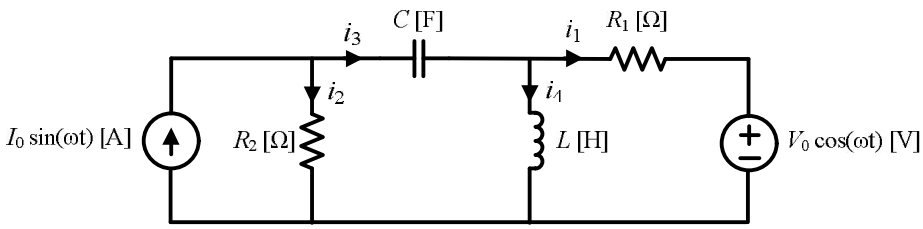
(ก) วงจรข่ายความต้านทาน



(ข) ทรีของกราฟของวงจรข่าย

รูปที่ 4บ.5 วงจรข่ายความต้านทาน

[4.6] พิจารณาวงจรข่ายในรูปที่ 4บ.6 จงเขียนวงจรข่ายสมมูลในโดเมนของความถี่และให้เลือกกิ่งของทรีเพื่อสร้างสมการวงรอบหลักมูลทั้งหมดสำหรับการคำนวณหาค่าของกระแสกิ่ง $i_1(t)$ $i_2(t)$, $i_3(t)$ และ $i_4(t)$ ในวงจรข่ายในสถานะอยู่ตัว



รูปที่ 4บ.6 วงจรข่ายในสถานะอยู่ตัว