傅里叶变换及其应用

动机：多项式乘法

- 给定多项式$A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$和$B(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$的系数$A[0..n], B[0..n]$，求$C(x) = A(x) \cdot B(x)$的系数$C[0..2n-1]$。
- 卷积：$C = \mathrm{Conv}(A, B)$。
- 注意到，$C[k] = \sum_{j=0}^{k} A[j]B[k-j]$。
- 直接利用上式计算，复杂度为$O(n^2)$，太高。
- 为了快速完成卷积运算，我们引入傅里叶变换。

DFT和IDFT

- 正变换：对于序列$A[0..n]$，定义离散Fourier变换为

$$\mathrm{DFT}_n(A)[k]=\sum_{j=0}^{n-1}A[j]\omega_n^{kj}$$

其中$\omega_n=e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}}$为$n$次主单位根。

- 逆变换：已知Fourier变换为$B[0..n]$，则原序列为

$$\mathrm{IDFT}_n(B)[k]=\sum_{j=0}^{n-1}B[j]\omega_n^{-kj}/n$$

- 卷积定理：

$$\mathrm{Conv}(A,B)=\mathrm{IDFT}_{2n}(\mathrm{DFT}_{2n}(A)\cdot\mathrm{DFT}_{2n}(B))$$

FFT和IFFT

- 为方便计算，补0将序列的长度凑为2的幂。
- 将多项式的奇次项和偶次项拆开，组成两个新的多项式：

$$A_{\text{even}}(x) = a_0 + a_2 x + \cdots + a_{n-2} x^{n/2-1}$$
$$A_{\text{odd}}(x) = a_1 + a_3 x + \cdots + a_{n-1} x^{n/2-1}$$

- 原多项式可以写成$A(x) = A_{\text{even}}(x^2) + xA_{\text{odd}}(x^2)$。
- 注意到$A_{\text{even}}\left(\omega_n^{2j}\right) = A_{\text{even}}\left(\omega_n^{2(j+n/2)}\right) = A_{\text{even}}\left(\omega_{n/2}^{j}\right)$，因此只需递归计算一半的值，时间复杂度为$O(n \log n)$。

$$\text{FFT}_n(A)[j] = \text{FFT}_{n/2}(A_{\text{even}})[j] + \omega_n^j \text{FFT}_{n/2}(A_{\text{odd}})[j]$$
$$\text{FFT}_n(A)[j + n/2] = \text{FFT}_{n/2}(A_{\text{even}})[j] - \omega_n^j \text{FFT}_{n/2}(A_{\text{odd}})[j]$$

FFT和IFFT

- 对于逆变换，只需将ω_n改为ω_n^{-1}，并在最后除以n即可。

总结

- 利用快速Fourier变换解题，基本的套路是

1. 将问题转化为计算形如$C[k]=\sum_{i+j=k}A[i]B[j]$的卷积问题；
2. 计算$\mathrm{FFT}(A)$和$\mathrm{FFT}(B)$，耗时$O(n\log n)$；
3. 计算逐项乘积$\hat{C}=\mathrm{FFT}(A)\cdot\mathrm{FFT}(B)$，耗时$O(n)$；
4. 计算逆变换$C=\mathrm{IFFT}(\hat{C})$，耗时$O(n\log n)$。

卷积定理：

$$\mathrm{Conv}(A,B)=\mathrm{IFFT}(\mathrm{FFT}(A)\cdot\mathrm{FFT}(B))$$

Some easy problems

ZJOI2014　力

- 给出n个数q_i，给出F_j的定义如下：

$$F_j = \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{(i-j)^2} - \sum_{i>j} \frac{q_i q_j}{(i-j)^2}$$

- 令$E_i = F_i / q_i$，试求E_i。
- $n \le 10^5$，$0 < q_i < 10^9$，答案允许有1e-2误差。

Codeforces Round #390 (Div.2) E

- 二维带通配符匹配。

Sample input:

```
5 7
qcezchs
hhedywq
wikywqy
qckrqzt
bqexcxz
3 2
??
yw
?q
```

Sample output:

```
0000100
0001001
0000000
0000000
0000000
```

Codeforces Round #390 (Div.2) E

- 可以先考虑一维的情况。

a?a

abaaaca

10101

思考题：如果模式串和待匹配字符串中都有通配符，怎么办？

VK Cup 2017 E

- 给定一串由V、K和通配符组成的字符串S (|S|≤500000)，求该字符串所有可能的周期。
- 正整数T (T≤|S|)称为字符串S的一个周期，当且仅当S[i]=S[i+T]在字符串长度范围内恒成立。
- 样例：

```
V??VK    3,5
??????   1,2,3,4,5,6
?VK?     2,3,4
```

HDU 4609 3-idiots

- 给定N条边，随机抽3条， 求能构成三角形的概率。
- $3 \le N \le 10^5, 1 \le a_i \le 10^5$
- 其实就是要求出构成三角形的选法有多少种。
- 先用卷积算出满足$a_i + a_j = x$的选法，记为num[x]（注意去重）。
- 将边排序，考虑a_i作为最大边的情况，那么另两边之和大于a_i，方案数为$\sum_{x>a_i} num[x]$，减去取了两个大的情况，一大一小的情况和取了a_i自身的情况。

SDOI2015 序列统计

- 给定非负整数集合S，其中每个元素都小于M。求满足以下条件的长度为N的数列$\{a_i\}$的个数，答案模1004535809：
  1. $a_i \in S, i = 1,2,\cdots N$
  2. $a_1 a_2 \cdots a_n \equiv x \bmod M$
- $1 \le n \le 10^9, 3 \le M \le 8000, 1 \le x \le M-1$， 保证$M$是质数。
- 样例；$N = 4, M = 3, x = 1, S = \{1,2\}$，答案为8，满足要求的有

$$(1,1,1,1),(1,1,2,2),(1,2,1,2),(1,2,2,1),$$
$$(2,1,1,2),(2,1,2,1),(2,2,1,1),(2,2,2,2)$$

快速数论变换（NTT）

- 给定素数P，设P的原根是g，记$g^{\frac{P-1}{n}} = g_n$，则有以下变换：
- 正变换：$\mathrm{NTT}_n(A)[k] = \sum_{j=0}^{n-1} A[j] g_n^{kj} \bmod P$
- 逆变换：$\mathrm{INTT}_n(B)[k] = \sum_{j=0}^{n-1} B[j] g_n^{-kj} / n \bmod P$
- 卷积定理在模P意义下仍然成立。
- 这种变换要求序列长度n是$P-1$的因数，常用于NTT的质数有：
  - $P = 1004535809 = 479 \cdot 2^{21} + 1$
  - $P = 998244353 = 7 \cdot 17 \cdot 2^{23} + 1$