# 线性代数相关

陈劲源

April 1, 2018

# Warm-up 1: Fast Matrix Calculation

2014 Multi-University Training Contest 9, available at HDUOJ 4965

给定 $N \times k$ 的矩阵 $A$，$k \times N$ 的矩阵 $B$ $(2 \leq k \leq 6, 4 \leq N \leq 1000)$:

Step 1. 计算 $N \times N$ 的矩阵 $C = AB$.

Step 2. 计算 $M = C^{N \times N} \bmod 6$.

Step 3. 输出 $M$ 中所有元素的和.

# Warm-up 1: Fast Matrix Calculation

2014 Multi-University Training Contest 9, available at HDUOJ 4965

给定 $N \times k$ 的矩阵 $A$，$k \times N$ 的矩阵 $B$ $(2 \leq k \leq 6, 4 \leq N \leq 1000)$:

Step 1. 计算 $N \times N$ 的矩阵 $C = AB$.

Step 2. 计算 $M = C^{N \times N} \bmod 6$.

Step 3. 输出 $M$ 中所有元素的和.

## Solution

根据矩阵乘法的结合律,

$$M = (AB)^{N \times N} = A(BA)^{N \times N - 1} B$$

$O(N^3 \log N) \to O(N^2 k + N k^2 + k^3 \log N)$

# Warm-up 2: Matrix Multiplication

2014 Multi-University Training Contest 5, available at HDUOJ 4920

给定 $n \times n$ 的矩阵 $A, B$，求模 3 意义下的乘积。$(1 \le n \le 800)$

# Warm-up 2: Matrix Multiplication

2014 Multi-University Training Contest 5, available at HDUOJ 4920

给定 $n \times n$ 的矩阵 $A, B$，求模 3 意义下的乘积。$(1 \leq n \leq 800)$

## Solution

令 $M_x$: $M_x(i,j) = [M(i,j) = x]$.

$$AB = (A_1 - A_2)(B_1 - B_2) = A_1B_1 - A_1B_2 - A_2B_1 + A_2B_2$$

其中 $A_1, A_2, B_1, B_2$ 是 *01* 矩阵. 使用 `std::bitset`, $O(4n^3/wordsize)$。

# Warm-up 3: Matrix Revolution

HDUOJ 1759

给定一个 $n \times n$ 的矩阵 $A$，计算下述矩阵的非零元素的数量

$$A + A^2 + \cdots + A^k$$

$A$ 是稀疏矩阵，用 $m$ 个三元组 $(a, b, c)$ 表示，每个三元组代表 $A_{ab} = c$。~~此外，保证主对角线上的元素全为 1。~~其他元素均为 0。$(0 \leq n \leq 1000, 0 \leq m \leq 10n,\ \cancel{n}\ 0 < k < 10^{100}, 0 < c < 10^9)$

# Warm-up 3: Matrix Revolution

HDUOJ 1759

给定一个 $n \times n$ 的矩阵 $A$，计算下述矩阵的非零元素的数量

$$A + A^2 + \cdots + A^k$$

$A$ 是稀疏矩阵，用 $m$ 个三元组 $(a, b, c)$ 表示，每个三元组代表 $A_{ab} = c$。~~此外，保证主对角线上的元素全为 1。~~其他元素均为 0。$(0 \le n \le 1000, 0 \le m \le 10n$, $\cancel{n}$ $0 < k < 10^{100}, 0 < c < 10^9)$

## Solution

利用图的邻接矩阵表示。答案就是距离不超过 $k$ 的点对数。

# Warm-up 4: Matrix Multiplication

POJ 3318

给定 $n \times n$ 的矩阵 $A, B, C$。判断 $AB = C$ 是否成立。
$(n \leq 500, |A_{ij}|, |B_{ij}| \leq 100, |C_{ij}| \leq 10,000,000)$

提示：有多组测试数据，$O(n^3)$ 的算法会 TLE。

# Warm-up 4: Matrix Multiplication

POJ 3318

给定 $n\times n$ 的矩阵 $A,B,C$。判断 $AB=C$ 是否成立。
$(n\leq 500, |A_{ij}|, |B_{ij}|\leq 100, |C_{ij}|\leq 10,000,000)$

提示：有多组测试数据，$O(n^3)$ 的算法会 TLE。

## Solution (随机化)

随机生成 $n$ 维列向量 $\vec{x}$，判断 $AB\vec{x}=C\vec{x}$ 是否成立。可在 $O(n^2)$ 时间内完成。

算法出错当且仅当 $(AB-C)\vec{x}=0$ 而 $AB-C\neq 0$。假设我们在 $\mathbb{F}_p$ 里做。令 $M=AB-C$，则 $\vec{x}$ 在 $M$ 的零空间中。仔细想一想 $M$ 的零空间最多 $n-1$ 维，因此出错的概率不会超过 $1/p$。

# Warm-up 5: Square

UVA 11542, also available at vjudge

给定 $n$ 个整数的集合你可以生成 $2^n - 1$ 个非空子集。求有多少个子集，其中的数之积为完全平方数。

$1 \leq T \leq 30$, $1 \leq n \leq 100$，所有整数在 1 和 $10^{15}$ 之间。整数的素因子最多为 500。

# Warm-up 5: Square

UVA 11542, also available at vjudge

给定 $n$ 个整数的集合你可以生成 $2^n - 1$ 个非空子集。求有多少个子集，其中的数之积为完全平方数。

$1 \le T \le 30$, $1 \le n \le 100$，所有整数在 1 和 $10^{15}$ 之间。整数的素因子最多为 500。

## Solution

每个整数的唯一分解序列都看成 $\mathbb{F}_2$ 上的一个的向量，就是要求这些向量构成矩阵的零空间的大小。

# ACM 中线性代数题目类型

- $\mathbb{F}_2$ 上的线性代数；（去年暑假讲过...）
- 和图论结合；
- 加速递推数列和某些 dp 的计算（包括 Markov 链模型）；
- 描述几何变换。

# 前置技能

- 定义：$\langle \mathbb{F}, V, +, \cdot \rangle$；
- $O(n^3)$ 的矩乘，逆，行列式；
- $O(n^3)$ 的线性方程组求解；
- 矩阵的秩，零空间，像空间；
- * 矩阵的特征系统（特征值和特征向量，对角化）。

# Kirchhoff 矩阵 -树定理

对于图 $G$, 矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} \deg(v_1) & -e_{12} & \cdots & -e_{1n} \\ -e_{21} & \deg(v_2) & \cdots & -e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -e_{n1} & -e_{n2} & \cdots & \deg(v_n) \end{bmatrix}$$

称为 $G$ 的 Laplace 矩阵。

**定理** $G$ 的顶点带标号生成树的个数等于 $Q$ 的任何一个 $n-1$ 阶子式。

**推论** $K_n$ 的顶点带标号生成树的个数等于 $n^{n-2}$。

# $k$ 维子空间计数

有限域 $\mathbb{F}_q$ 上 $n$ 维线性空间的 $k$ 维子空间 $V$ 的个数为

$$q^{n-k}\binom{n}{k}_q$$

其中

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}$$

称为 高斯二项式系数。

# Hamilton-Cayley 定理

对于方阵 $A$，它的特征多项式 $f(\lambda) = |A - \lambda I|$ 是 $A$ 的一个零化多项式，即

$$f(A) = \mathbf{0}$$

计算 $g(x) = x^t \bmod f(x)$，再将 $A$ 代入，即可快速计算矩阵幂。

限制：特征多项式必须能很容易看出来或求出来，并且矩阵的前 $n$ 次幂也容易得到。

**例题：**PE 258

计算 2000 阶递推数列 $g_k = g_{k-2000} + g_{k-1999}$，特征多项式为 $x^{2000} - x - 1$。

# 复习

对于矩阵 $A$，我们可以发现，存在一些非零向量 $\vec{\alpha}$ 和数 $\lambda$，使得

$$A\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}$$

其中，$\lambda$ 称为 $A$ 的特征值，$\vec{\alpha}$ 称为 $A$ 关于 $\lambda$ 的特征向量。

例如：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

# 复习

**手工求解特征系统**

将 $A\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}$ 移项：

$$(A - \lambda I)\vec{\alpha} = 0 \tag{1}$$

上述线性齐次方程组有非零解，因此 $(A - \lambda I)$ 是奇异矩阵，$|A - \lambda I| = 0$ 的所有解就是特征值。$f(\lambda) = |A - \lambda I|$ 称为 $A$ 的特征多项式。

将特征值代入 (1)，就可以解出特征向量。

# 复习

如果 $A$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量，那么它们构成一组完备特征系，用矩阵乘法表示就是：

$$A\begin{bmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \cdots, & \alpha_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1, & \alpha_2, & \cdots, & \alpha_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

即 $AP = PD$，由于 $P$ 可逆，还可以写成 $A = PDP^{-1}$ 或 $D = P^{-1}AP$（对角化）。

有什么好处？$A^n = PD^nP^{-1}$。

# 循环矩阵

形如 $A_{ij} = A_{i-1,j-1 \bmod n}$ 的矩阵称为循环矩阵。例

$$A = \begin{bmatrix} a & d & c & b \\ b & a & d & c \\ c & b & a & d \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$$

# 循环矩阵

形如 $A_{ij} = A_{i-1,j-1 \bmod n}$ 的矩阵称为循环矩阵。例

$$A = \begin{bmatrix} a & d & c & b \\ b & a & d & c \\ c & b & a & d \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$$

循环矩阵就是多项式（连同它们的加法和乘法运算）。

循环矩阵的对角化就是 Fourier 变换：

$$P = \begin{bmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega^0 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ \omega^0 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 \end{bmatrix} = [\omega^{ij}]_{i,j}$$

# 循环矩阵

$$\mathscr{F}[f] = P^{-1} f P = D = \mathbf{diag}(f(\omega^0), f(\omega^1), \cdots, f(\omega^{n-1}))$$

$$\mathscr{F}^{-1}[D] = PDP^{-1} = f$$

有什么用？

# 循环矩阵

$$\mathscr{F}[f] = P^{-1} f P = D = \mathbf{diag}(f(\omega^0), f(\omega^1), \cdots, f(\omega^{n-1}))$$

$$\mathscr{F}^{-1}[D] = PDP^{-1} = f$$

有什么用？关于循环矩阵的乘法、逆、行列式、秩、线性方程组，用暴力 DFT 可在 $O(n^2)$ 时间内求出，用 FFT 可在 $O(n \log n)$ 内求出。

例题：HihoCoder 1388, UVA 1386

# By the way ...

形如

$$M = \begin{bmatrix} M_2 & M_1 \\ M_1 & M_2 \end{bmatrix}$$

递归定义的矩阵，对应于异或卷积，它的对角化对应于 Walsh-Hadamard 变换。

**例题：** Codeforces 453D

# 更一般的方法...

对于更加一般的矩阵，如果容易得到它的特征系统，并且容易对角化，那么矩阵快速幂就变成了特征值的快速幂，从而降低时间复杂度。

# Perpetual Subtraction

Codeforces 947E

一开始有一个整数 $x$，每次操作随机选择 $[0,x]$ 中的一个整数并替换之。给出初始值 $x$ 的概率分布，求 $M$ 步之后数字的概率分布。$x$ 的初始最大可能取值为 $N$, $0 \le N \le 10^5, 0 \le M \le 10^{18}$ 结果模 998244353。

# Perpetual Subtraction

Codeforces 947E

一开始有一个整数 $x$，每次操作随机选择 $[0,x]$ 中的一个整数并替换之。给出初始值 $x$ 的概率分布，求 $M$ 步之后数字的概率分布。$x$ 的初始最大可能取值为 $N$, $0 \le N \le 10^5, 0 \le M \le 10^{18}$ 结果模 998244353。

## Solution

容易看出是 *Markov* 链模型，转移矩阵是

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(N+1) \\ & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(N+1) \\ & & 1/3 & \cdots & 1/(N+1) \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1/(N+1) \end{bmatrix}$$

然后呢？

# Perpetual Subtraction

## Codeforces 947E

因为是三角阵，特征值是 $1, 1/2, 1/3, \cdots, 1/(N+1)$。

特征向量呢？先算几个试一试...

# Perpetual Subtraction

Codeforces 947E

因为是三角阵，特征值是 $1, 1/2, 1/3, \cdots, 1/(N+1)$。

特征向量呢？先算几个试一试...

| $\lambda_i$ | $\vec{\alpha}_i$ |
|---|---|
| 1 | $(1, 0, 0, 0, \cdots, 0)$ |
| 1/2 | $(1, -1, 0, 0, \cdots, 0)$ |
| 1/3 | $(1, -2, 1, 0, \cdots, 0)$ |
| 1/4 | $(1, -3, 3, -1, \cdots, 0)$ |

$$A = PDP^{-1}, \qquad P_{i,j} = (-1)^i C_j^i$$

$$(P\vec{x})_i = \sum_j P_{i,j} x_j = \frac{(-1)^i}{i!} \sum_j \frac{j! x_j}{(j-i)!}$$

正好是个卷积。

# 似乎用这种套路可以构造出一批有趣的题目？

例

转移规则：

$$v_{t+1}[i] = \sum_{j \neq i} a \cdot v_t[j] + b \cdot v_t[i]$$

给出数组 $v$ 的初始值，求转移 $t$ 次后的数组。

**Solution**

法 1 暴力迭代转移，$O(nt)$；

## 似乎用这种套路可以构造出一批有趣的题目？

例

转移规则：

$$v_{t+1}[i] = \sum_{j \neq i} a \cdot v_t[j] + b \cdot v_t[i]$$

给出数组 $v$ 的初始值，求转移 $t$ 次后的数组。

### Solution

法 1 暴力迭代转移，$O(nt)$；

法 2 暴力矩乘快速幂，$O(n^3 \log t)$；

# 似乎用这种套路可以构造出一批有趣的题目？

例

转移规则：

$$v_{t+1}[i] = \sum_{j \neq i} a \cdot v_t[j] + b \cdot v_t[i]$$

给出数组 $v$ 的初始值，求转移 $t$ 次后的数组。

**Solution**

- 法 1 暴力迭代转移，$O(nt)$；
- 法 2 暴力矩乘快速幂，$O(n^3 \log t)$；
- 法 3 看出来转移矩阵是循环矩阵，$O(n^2 + n \log t)$ 或 $O(n \log n + n \log t)$，（如果能做 $DFT$, $FFT$ 的话）；

## 似乎用这种套路可以构造出一批有趣的题目？

例

转移规则：

$$v_{t+1}[i] = \sum_{j\neq i} a\cdot v_t[j] + b\cdot v_t[i]$$

给出数组 $v$ 的初始值，求转移 $t$ 次后的数组。

### Solution

- 法 1 暴力迭代转移，$O(nt)$；
- 法 2 暴力矩乘快速幂，$O(n^3\log t)$；
- 法 3 看出来转移矩阵是循环矩阵，$O(n^2+n\log t)$ 或 $O(n\log n+n\log t)$，（如果能做 $DFT, FFT$ 的话）；
- 法 4 看（猜、找规律）出来特征值和特征向量。 $O(n+\log t)$。