2 3

Выполнимость 3-КНФ

Каргальцев Степан

1. Постановка задачи

Построить и имплементировать алгоритм, про который можно доказать следующее:

- Он распознает выполнимость 3-КНФ;
- В случае P = NP он делает это за полиномиальное время

2. Решение

2.1. **Описание решения.** Псевдокод:

Исходные параметры: Выполнимая формула φ
Результат: Выполняющий набор для φ
цикл $n \leftarrow 1 \dots \infty$ **выполнять**
  цикл $m \leftarrow 1 \dots n$ **выполнять**
    Запустить машину номер m на n шагов на входе φ; **если** *Машина m завершилась* **тогда**
      если *Выход машины m — выполняющий набор для φ* **тогда**
        Вернуть выход машины m;
      конец
    конец
  конец
конец

Покажем, что данный код работает за полиномиальное время. Действительно, если P=NP, то существует машина тьюринга M такая, что она по выполнимой формуле φ выдает выполняющий набор для этой формулы за полиномиальное время. (Вообще, P=NP напрямую означает лишь существование машины Тьюринга, которая распознает принадлежность φ к $3-SAT$, но в [1] в разделе 3.5 доказывается, что в случае P=NP можно также быстро решать соответствующую задачу поиска, чем мы и пользуемся).

Пусть эта машина работает не более, чем за $P(|x|)$ шагов на входе x, где P — некоторый полином, а ее номер в нашей нумерации M (подробнее про реализацию нумерации и перебора машин — в разделе *Структура кода*).

Положим $T := \max(M, P(|\varphi|))$.

Date: Декабрь 2016.

Тогда мы сделаем не более чем $1^2 + 2^2 + \ldots + T^2 = Q(T)$ шагов (под шагами подразумевается шаги эмулируемых машин тьюринга), ($Q(x) = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$ — фиксированный полином). Действительно, прежде чем переменая во внешнем цикле достигнет значения $P(|\varphi|)$ пройдет не более $Q(P(|\varphi|))$ шагов, а прежде чем переменная внутреннего цикла достигнет значения M пройдет не более $Q(M)$ шагов.

Когда внешняя переменная станет равна $P(|\varphi|)$, а внутренняя M, то мы запустим машину M на $P(|\varphi|)$ шагов и получим выполняющий набор (однако, возможно, мы получили его раньше и вышли).

Посмотрим, на что мы тратим время:

(1) Эмуляция машин Тьюринга
(2) Проверка корректности выполнимого набора
(3) Итерации по циклам

Эмуляцию машин Тьюринга мы будем делать с ухудшением времени в константное число раз. Итераций по циклам никак не больше чем шагов машин Тьюринга, проверка корректности выполнимого набора выполняется за полиномиальное от размера формулы время и таких проверок будет не больше, чем итераций по циклам. Итого наше время работы можно ограничить следующей величиной:

$$(P_1(|\varphi|) + C) \cdot Q(T) = P_1(|\varphi|) + C) \cdot Q(\max(M, P(|\varphi))) \leq$$

$$P_1(|\varphi|) + C) \cdot Q(M) + P_1(|\varphi|) + C) \cdot Q(P(|\varphi))$$

,
где P_1 — полином, ограничивающий время проверки корректности выполняющего набора, а C — константа ухудшения при эмуляции машины Тьюринга. В любом случае, учитывая, что M – это константа, а композиция, произведение, сумма полиномов — полином, получаем, что время работы алгоритма полиномиальное.

(Доказательством утверждений про полиномиальность проверки корректности и константного ухудшения эмуляций машин Тьюринга будет является код, решающий поставленные задачи за заявленное время)

2.2. **Проблемы.** Внимательный читатель заметит, что мы научились находить выполняющий набор (и доказывать выполнимость) выполнимых формул за полиномиальное время (что, безусловно, радует), но ничего не сделали с невыполнимыми формулами. Моих интелектуальных способностей хватило на три следующих выхода из ситуации:

2.2.1. *Проигнорировать.* Давайте интерпретировать условие ("Распознать выполнимость 3-КНФ за полиномиальное время") как "Понимать (доказывать), что строка является выполнимой 3-КНФ за полиномиальное время". В таком случае мы решили задачу.

2.2.2. *Поперебирать доказательства.* Давайте считать, что известно, что задача решаемая (нам же не дадут нерешаемых задач как семестровый проект, правда?). Тогда можно сделать следующее: перебирать машины тьюринга, и параллельно перебирать доказательства утверждений "Машина Тьюринга $\mathrm{M}_i 3 - SAT P = NP$"(,"$M_i 3 - SAT$, $P = NP$).

Как только мы нашли машину Тьюринга, про которую существует доказательство полиномиальности ее работы, запустим ее на нашем входе и победим. Повторюсь, что доказуемость перебираемого утверждения я утверждаю в предположении решаемости данной мне задачи. Поэтому, в частности, это решение плохо (доказывать что-то тем, что раз мне это дали как упражнение, то это решаемое не самое математичное рассуждение). Поэтому я упомяну это решение как забавное, а сам попытаюсь перейти к чему-нибудь еще.

2.2.3. *Сделать хоть что-то с плохом случае.* Схоже с вариантом "Проигнорировать но в отличие от него а) решает задачу в формулировке "Понять, принадлежит ли φ 3-SAT"и б) добавляет данной работе нетривиальности.

В чем идея — давайте модифицируем основной алгоритм. Во-первых, при входе проверим, что φ — 3-КНФ формула. Во-вторых, по происшествии некоторого количества шагов (или просто параллельно) запустим один из существующих 3-SAT-решателей.

2.3. **Структура и описание кода.**

2.3.1. *Структура кода.*

2.3.2. *Тестирование основного решения.*

2.4. **Дополнительные решения.**

2.4.1. *Тестирование дополнительного решения 1.*

Список литературы

1. Д. В. Мусатов, *Сложность вычислений. Конспект лекций* МФТИ, 2016
2. https://en.wikipedia.org/wiki/P_versus_NP_problem
3. Brown, *On a conjecture of Dirichlet*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

МФТИ, 494
E-mail address: stepikmvk@gmail.com