$y = \frac{\ln x}{\ln x - 1}$ D: $x > 0 \wedge x \neq e$

1. Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} y = \frac{\ln x}{\ln x - 1} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{\ln x}{\ln x - 1} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \ln x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

interseca asse x nel punto $(1;0)$

$$\begin{cases} y = \frac{\ln x}{\ln x - 1} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{\ln 0}{\ln 0 - 1} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{impossibile} \\ x = 0 \end{cases}$$

non interseca l'asse y

2. Simmetria

$$\frac{\ln x}{\ln x - 1} = \frac{\ln(-x)}{\ln(-x) - 1}$$

$\ln(-x)$ è impossibile quindi la funzione non è né pari né dispari

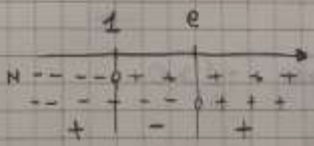
3. Studio del segno

$$\frac{\ln x}{\ln x - 1} > 0$$

N $\ln x > 0$ $\quad x > 1$

D $\ln x - 1 > 0$

$\ln x > 1$ $\quad x > e$



$0 < x < 1 \vee x > e$

4. Limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\ln x - 1} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln 0^+}{\ln 0^+ - 1}$$

$$\lim_{x \to e^{\pm}} \frac{\ln x}{\ln x - 1} = \lim_{x \to e} \frac{\ln e^{\pm}}{\ln e^{\pm} - 1} = \frac{1^{\pm}}{1^{\pm} - 1} = \frac{1^{\pm}}{0^{\pm}} = \pm\infty$$ asintoto orizzontale

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\ln x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln \infty}{\ln \infty - 1} = \frac{\infty}{\infty}$$ F.i.

$$\frac{\ln x}{\ln x - 1} \overset{H}{=} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 1} \overset{H}{=} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1-x}{x}} \overset{H}{=} \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{x}}{1-x} \overset{H}{=} \frac{1}{1-x} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$$ asintoto verticale

5. Derivata prima

$$y' = \frac{\frac{1}{x}\cdot(\ln x - 1) - \ln x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x - 1)^2}$$

$$y' = \frac{\frac{\ln x}{x}\left(-\frac{1}{x}\right) - \frac{\ln x}{x}}{\ln x^2 + 1 - 2\ln x} = -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\cancel{2\ln x} + 1 \cancel{- 2\ln x}} = -\frac{1}{x}$$

$$\cancel{y' = \frac{-1}{x\ln x^2 + x - x\ln x} = \frac{1}{x(\ln x^2 + 1 - 2\ln x)}}$$

6. Punti stazionari

$$-\frac{1}{x} = 0$$

$$-x = 0$$

$$x = 0$$

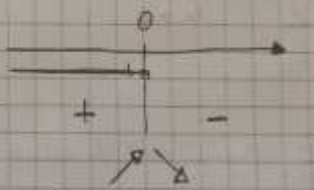
$$y = -\frac{1}{0}$$ impossibile

7. Punti di max e min

$$-\frac{1}{x} > 0$$

$$-x > 0$$

$$x < 0$$



O è un punto di Max

9. Derivata seconda

$$y'' = -\frac{0\cdot x - 1\cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

10. Concavità

$$-\frac{1}{x^2} > 0$$

$$x^2 < 0$$

$$x < 0$$